

Quadratures adaptatives

Es vol calcular el valor de la integral definida

$$I = \int_0^2 \sin(e^{2x}) dx \quad (1)$$

amb 6 xifres significatives.

Com a primera opció es planteja aproximar la integral fent servir una quadratura composta senzilla (trapezi i Simpson).

1. Calcula una aproximació de la integral I amb les fórmules compostes del trapezi i de Simpson, amb $m = 4, 8, 16, 32$ subintervalls de longitud uniforme. Dibuixa l'evolució de l'error en funció del número d'avaluacions de la funció, per a cadascun dels mètodes, amb escala logarítmica als dos eixos. Analitza els resultats: es comporten els mètodes com esperàveu? tenen la convergència esperada?
2. Prediu quants subintervalls m de mida uniforme calen per a cadascun dels mètodes per aconseguir una aproximació amb 6 xifres significatives correctes. Calcula l'aproximació amb el número de subintervalls deduït en cada cas, i comprova si tenen la precisió requerida. Pots fer servir Maple o la funció `scipy.integrate.quad` de Python per a calcular un valor de referència de la integral i avaluar l'error de l'aproximació obtinguda.

A la vista de com varia la funció a l'interval $(0, 2)$ sembla raonable fer servir una longitud de subinterval més petita a prop de l'extrem $x = 2$ que a prop de l'extrem $x = 0$. Per a reduir el cost de càlcul de la integral I es planteja, doncs, fer servir una *quadratura de Simpson adaptativa* basada en un algorisme recursiu. Cal implementar una funció, que donada una funció f , un interval (a, b) i una tolerància ϵ ,

- Calcula les aproximacions $S(a, b)$, $S(a, \frac{a+b}{2})$ i $S(\frac{a+b}{2}, b)$, on $S(u, v)$ denota l'aproximació de la integral amb la quadratura de Simpson simple a l'interval (u, v)
- Estima l'error a l'interval (a, b) com $E_{ab} = |S(a, b) - (S(a, \frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2}, b))|$
- si $E_{ab} < \epsilon(b - a)$, l'error és acceptable i retorna el valor de $S(a, b)$

Altrament, crida a la mateixa funció per a calcular les aproximacions de les integrals a l'interval $(a, \frac{a+b}{2})$ i a l'interval $(\frac{a+b}{2}, b)$.

3. Justifica que aquest algorisme recursiu aplicat al càlcul de la integral a $(0, 2)$ proporciona una aproximació amb un error absolut (estimat) menor que 2ϵ .
4. Implementa l'algorisme recursiu i fes-lo servir per a calcular la integral (1) amb un error absolut menor que 10^{-3} i amb un error menor que 10^{-6} . Fes servir Maple o la funció `scipy.integrate.quad` de Python per a calcular un valor de referència de la integral i avaluar l'error de l'aproximació obtinguda. Comentea el resultat.

5. Modifica la funció per què retorni, a més del valor de la integral, les abscisses dels punts que divideixen l'interval $(0, 2)$ en subinterval·ls. Representa gràficament la funció i els punts obtinguts a una figura per visualitzar quins subinterval·ls s'han fet servir en la quadratura adaptativa, per a obtenir una aproximació amb error menor que 10^{-3} i amb error menor que 10^{-6} . Observa i comenta com són els subinterval·ls.
6. Compara el número de subinterval·ls amb el número de subinterval·ls que es necessitarien amb una quadratura composta de Simpson amb longitud de subinterval uniforme.