Sessió pràctica: resolució d'equacions no lineals

Objectius

Ser capaç de

- Programar el mètode de Newton per determinar l'arrel d'una equació no lineal.
- Calcular els errors comesos en el càlcul i representar gràficament la seva evolució (gràfica de convergència).
- Entendre i programar els criteris de parada per un algoritme iteratiu.
- Analitzar el comportament del mètode a partir dels errors.

Introducció

En aquestes sessions aprendrem a resoldre equacions no lineals $f(x) = 0$.

Per trobar les arrels d'una equació es fan servir algoritmes iteratius: donada una aproximació inicial x^0, es construeix una successió de valors $\{x^k\}_{k\geq 0}$ que (esperem) tendeix a una solució α del problema tal que $f(\alpha) = 0$.

En particular, programarem i analitzarem el comportament del **mètode de Newton**:

> Donada una aproximació inicial x^0, es construeix una successió on cada terme es calcula a partir de l'anterior com
>
> $$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \quad \text{per } k \geq 0.$$

A més a més, implementarem els criteris de parada necessaris per aturar l'algoritme iteratiu quan l'aproximació obtinguda és prou bona:

$$|x^{k+1} - x^k| \leq \text{tol}_x |x^{k+1}| \quad \text{i} \quad |f(x^k)| \leq \text{tol}_f. \tag{1}$$

Concretament, estudiarem el comportament del mètode de Newton quan es fan servir per resoldre l'equació $f(x) = 0$ amb

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 21x^2 + 6x + 18. \tag{2}$$

Tasques a fer:

1. Escriu una funció en Python que permeti avaluar la funció (2).

2. Dibuixa la gràfica de la funció. Quantes solucions té? Quines aproximacions inicials et semblen raonables?
   Pista: Totes les arrels estan en l'interval $[-1, 4]$.

3. Escriu una funció `newton_iter` que, donada una aproximació inicial, calculi `niter` aproximacions fent servir el mètode de Newton per determinar les arrels d'una funció $f(x)$. En aquest cas hauràs d'escriure, també, una funció que permeti avaluar la derivada $f'(x)$.

4. Fes servir el mètode de Newton per trobar les arrels de (2) emprant les següents aproximacions inicials:

   a) $x^0 = -1$
   b) $x^0 = 2$
   c) $x^0 = 3$
   d) $x^0 = 2.5$

   Quina solució s'obté en cada cas? Justifica el comportament del mètode en cada cas.

5. El valor absolut de l'error relatiu de cada una de les aproximacions obtingudes és

$$r^k = \left| \frac{x^k - \alpha}{\alpha} \right|.$$

   Tenint en compte que l'aproximació x^{k+1} és millor que la que estem considerant, aquest error es pot aproximar com

$$r^k \simeq \left| \frac{x^k - x^{k+1}}{x^{k+1}} \right|.$$

   Modifica el teu programa per calcular l'error comès en cada una de les iteracions. Guarda aquests valors en un vector i fes-lo servir per dibuixar la gràfica de convergència, és a dir, l'evolució del logaritme dels errors en funció del número d'iteracions.

6. Modificant la funció `newton_iter`, escriu una funció `newton` que calculi aproximacions a la solució fins a assolir els criteris de convergència (1). Afegeix, també, les instruccions necessàries per què la funció torni un vector amb els residus en cada iteració que es pugui fer servir per dibuixar la gràfica de convergència.

Exercicis addicionals:

1. Utilitza el mètode de Newton per determinar les arrels de la funció

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 9x - 18$$

   Utilitza com a aproximacions inicials:

a) $x^0 = -1$

b) $x^0 = 1$

c) $x^0 = 3$

Quina creus que és la causa de què el comportament del mètode canviï en els diferents casos?

2. L'esquema iteratiu corresponent al mètode de Whittaker es pot escriure com

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{m} \quad \text{per } k \geq 0.$$

on m és una constant.

a) Escriu un programa que permeti resoldre la funció (2) mitjançant el mètode de Whittaker.

b) Utilitza el programa per determinar les arrels de la funció, fent servir com aproximació inicial $x^0 = 1$ i els valors següents del paràmetre m:

i) $m = -26$

ii) $m = -32$

iii) $m = -20$

iv) $m = 150$

Observa el comportament del mètode. Convergeix en tots els casos? Quin valor de m proporciona millors resultats?

c) Repeteix l'apartat anterior fent servir com a aproximació inicial $x^0 = 2$. S'observa en tots els casos el mateix comportament?

3. El mètode de la secant és un esquema iteratiu basat en les mateixes idees que el mètode de Newton. La diferència és que, en lloc d'aproximar la funció per la recta tangent en el punt $\big(x^k, f(x^k)\big)$, s'aproxima per la recta secant que passa pels punts $\big(x^k, f(x^k)\big)$ i $\big(x^{k+1}, f(x^{k+1})\big)$.

a) Escriu l'expressió del esquema iteratiu que s'obté en aquest cas.

b) Escriu un programa que permeti resoldre la funció (2) mitjançant el mètode de la secant.

c) Resol el problema fent servir les següents aproximacions inicials:

1) $x^0 = 0$, $x^1 = -1$

2) $x^0 = 1$, $x^1 = 2$

3) $x^0 = 3$, $x^1 = 4$

4) $x^0 = 0$, $x^1 = 4$

Observa el comportament del mètode i compara'l amb el del mètode de Newton.

4. Si no es coneix la derivada de la funció, aquesta es pot aproximar numèricament com

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fes servir el mètode de Newton per trobar les arrels de (2), emprant una aproximació de la derivada. S'obté el mateix tipus de convergència? Depèn del valor d'h que has triat?