
Tir parabòlic

El càlcul de la trajectòria del projectil és un problema de tir parabòlic amb fregament, que es pot plantejar com un sistema de quatre Equacions Diferencials Ordinàries (EDOs),

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -R\|\mathbf{v}\|\mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (1)$$

on les funcions incògnita corresponen a les dues components de la posició $\mathbf{x} = (x(t), y(t))^T$ i de la velocitat $\mathbf{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$, $\mathbf{g} = (0, -9.8)^T$ m/s² és l'acceleració de la gravetat i R és el coeficient de fregament. Aquest coeficient depèn principalment de l'àrea projectada de l'objecte i de la densitat de l'aire, i aquí es pren com $R = 0.00132$ m⁻¹. Per poder resoldre el problema de forma única cal donar condicions inicials, en aquest cas

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0)^T, \quad \mathbf{v}(0) = v_0(\cos \theta, \sin \theta)^T \quad (2)$$

on $v_0 = 100$ m/s és el mòdul de la velocitat inicial i $\theta = \pi/4$ és l'angle sobre l'horitzontal amb que es fa el llançament.

1. Resol la EDO mitjançant el mètode d'Euler i mitjançant un mètode Runge-Kutta explícit de quart ordre (RK4). Representa la trajectòria del projectil durant 10 segons. Si fas servir $m = 20$ intervals, quina és la posició del projectil als 10 segons?
2. Sigui \mathbf{X}_m , la posició en l'instant final obtinguda mitjançant m passos d'un mètode de pas constant. L'error d'aquesta aproximació es pot estimar com

$$E = \|\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{2m}\| \quad r = \frac{E}{\|\mathbf{X}_{2m}\|}.$$

Fes servir aquestes expressions per estimar l'error de les aproximacions. Quantes xifres significatives correctes te l'aproximació obtinguda amb $m = 200$? Justifica la teva resposta.

3. Dibuixa una gràfica de convergència amb l'evolució de l'error dels dos mètodes en funció del número d'avaluacions de la funció. S'observa el comportament esperat? Justifica la teva resposta.
4. La funció `scipy.integrate.solve_ivp` permet resoldre un problema de valor inicial. Fes-la servir per trobar la solució del problema proposat mitjançant el mètode de pas variable RK45. Compara la solució obtinguda amb la dels mètodes d'Euler i RK4 (cost computacional i precisió).
5. Fes servir la funció `scipy.integrate.solve_ivp` amb `Events` per, donat un angle θ , determinar la distància recorreguda pel projectil fins a tocar terra, $d(\theta)$. Amb les condicions inicials de l'enunciat, en quin instant arriba el projectil a terra? Quina és la distància horitzontal recorreguda?
6. Determina l'angle θ amb què s'ha de disparar el projectil per arribar a un objectiu situat a 500 m. Explica l'estratègia emprada per resoldre el problema i justifica la correctesa/precisió de la solució.