LUCRARE DE VERIFICARE
ALGEBRA
Varianta A

1. a) Să se definească ųrmatoarele noţiuni şi să se dea câte un exemplu pentru fiecare: partiţie, infimum, grup necomutativ.
b) Fie $f : G \to H$ un homomorfism de grupuri. Să se arate că mulţimea $\{x \in G \mid f(x) = 1\}$ este un subgrup al lui G.
c) Fie $f : A \to B$ o funcţie. Să se arate că dacă pentru orice mulţime C şi orice două funcţii $h_1, h_2 : C \to A$ funcţionează implicaţia $h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$ atunci f este surjectivă.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ unde

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, 2] \\ x + 4 \text{ pentru } x \in (2, \infty) \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = x^2 + 1.$$

a) Să se verifice dacă funcţie f este injectivă şi/sau surjectivă.
b) Dacă există să se determine funcţia inversă f^{-1}.
c) Să se determine compunerile $f \circ g$ şi/sau $g \circ f$ (dacă ele există).
d) Să se găsescă un exemplu de submulţime $X \subseteq \mathbb{R}$ aşa încât $g^{-1}(g(X)) \neq X$.

3. a) Să se arate că relaţia $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \equiv)$ dată prin

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \equiv y \text{ ddacă } [x] \equiv [y]$$

este o relaţie de echivalenţă. (Aici $[x]$ notează partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$.)
b) Să se determine mulţimea factor $R/_{\equiv}$, în raport cu relaţia de echivalenţă definită la a).
c) Să se arate că relaţia $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \precsim)$ unde

$$\forall x, y \in \mathbb{C} : x \precsim y \text{ ddacă } |x| \leq |y| \text{ în } \mathbb{R}$$

este o relaţie de reflexivă şi tranzitivă, dar nu este o relaţie de ordine.

4. Fie $U = \{x \in \mathbb{C}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x^n = 1\}$.
a) Să se arate că U este un subgrup al grupului $\mathbb{C}^*$.
b) Să se arate că $f : \mathbb{Q} \to U,\ f(x) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ este bine definită (în sensul că ia valori în U) şi este un homomorfism de grupuri.
c) Să se găsească un izomorfism de grupuri între $(\mathbb{R}, +)$ şi $((0, \infty), \cdot)$.

LUCRARE DE VERIFICARE
ALGEBRA
Varianta B

1. a) Să se definească urmatoarele noţiuni şi să se dea câte un exemplu pentru fiecare: functie surjectivă, relaţie de ordine, morfism de grupuri.
b) Fie G un grup şi $H, K \leq G$ două subgrupuri ale sale. Să este un subgrup al lui G.
c) Fie $g : B \to A$ o funcţie. Să se arate că dacă pentru orice mulţime C şi orice două funcţii $k_1, k_2 : C \to B$ funcţionează implicaţia $g \circ k_1 = g \circ k_2 \Rightarrow k_1 = k_2$ atunci g este injectivă.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ unde

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, 4] \\ x^2 + x - 2 \text{ pentru } x \in (4, \infty) \end{cases} \qquad \text{şi } g(x) = x^2 - 4x + 3.$$

a) Să se verifice dacă funcţia f este injectivă şi/sau surjectivă.
b) Dacă există să se determine funcţia inversă f^{-1}.
c) Să se determine compunerile $f \circ g$ şi/sau $g \circ f$ (dacă ele există).
d) Să se găsescă un exemplu de submulţime $X \subseteq \mathbb{R}$ aşa încât $g(g^{-1}(X)) \neq X$.

3. a) a) Să se arate că relaţia $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \equiv)$ dată prin

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \equiv y \text{ ddacă } \{x\} = \{y\}$$

este o relaţie de echivalenţă. (Aici $\{x\}$ notează partea fracţionara a lui $x \in \mathbb{R}$.)
b) Să se determine mulţimea factor $\mathbb{R}/_{\equiv}$, modulo relaţia de echivalenţă definită la a).
c) Să se arate că relaţia $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \precsim)$ unde

$$\forall X, Y \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : X \precsim Y \text{ ddacă } \det X \leq \det Y \text{ (în } \mathbb{R})$$

este reflexivă şi tranzitivă, dar nu este o relaţie de ordine.

4. Fie $U_7 = \{x \in \mathbb{C}^* \mid x^7 = 1\}$.
a) Să se arate că U_7 este un subgrup al grupului $\mathbb{C}^*$.
b) Să se găsească toate elementele grupului U_7.
c) Să se găsescă un isomorfism între $\mathbb{Z}_7$ şi U_7.