Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Bitácora de aula: Integrales Múltiples

1. Integrales Múltiples e Iteradas

Fecha			2017

Las integrales múltiples están estrechamente relacionadas con las integrales iteradas, ya que estas últimas son necesarias para resolver las integrales múltiples. De esta forma, la diferencia entre integrales múltiples e iteradas consiste en que la primera se refiere al concepto matemático de integral (aplicado a varias variables) y otra al procedimiento por el cual se resuelve la integral múltiple.

1.1 Integral simple

Iniciamos esta unidad, recordando la definición de integral de una función real de variable real que nos servirá para establecer la de la integral doble.

- Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real acotada sobre el intervalo $[a, b]$.
- Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ mediante la partición

$$\{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

- En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se elige un punto x_i^*.
- Se forma la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

- Si se toma el límite de las sumas cuando $n \to \infty$ se obtiene la integral definida de f desde a hasta b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

En el caso especial donde $f \geq 0$, la suma de Riemann se puede interpretar como la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación (figura 1), de modo que la $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b.

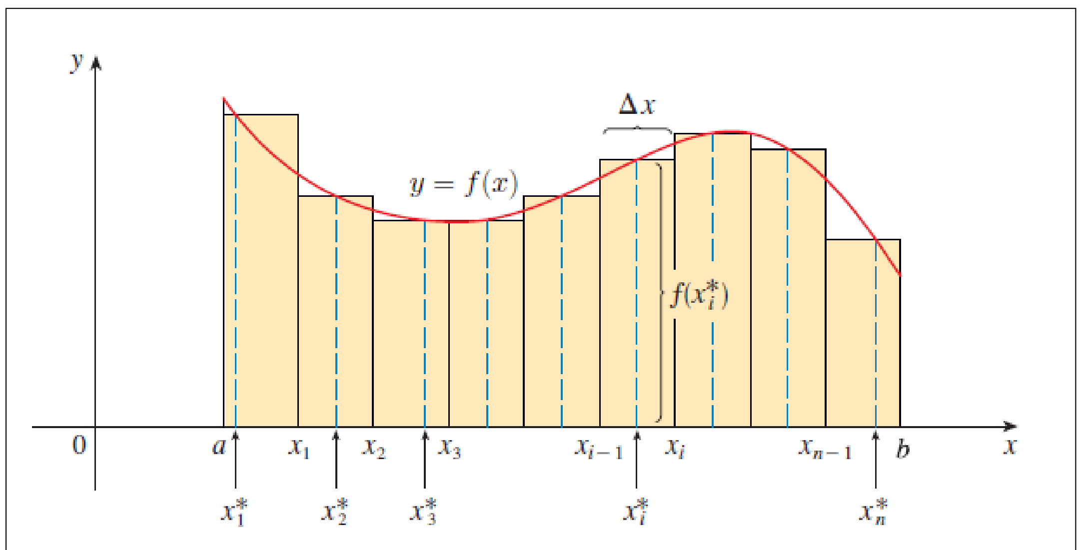

figura 1

1.2 Integrales dobles y volumen

De una manera similar a lo establecido en la integral de una variable, se considera una función $f(x, y) \geq 0$ de dos variables definida en un rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

La gráfica de f es una superficie con ecuación $z = f(x, y)$. Sea S el sólido que está sobre la región R y debajo de la gráfica de f (figura 2), es decir,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ 0 \leq z \leq f(x, y),\ (x, y) \in R\}$$

La tarea es hallar el volumen de S.

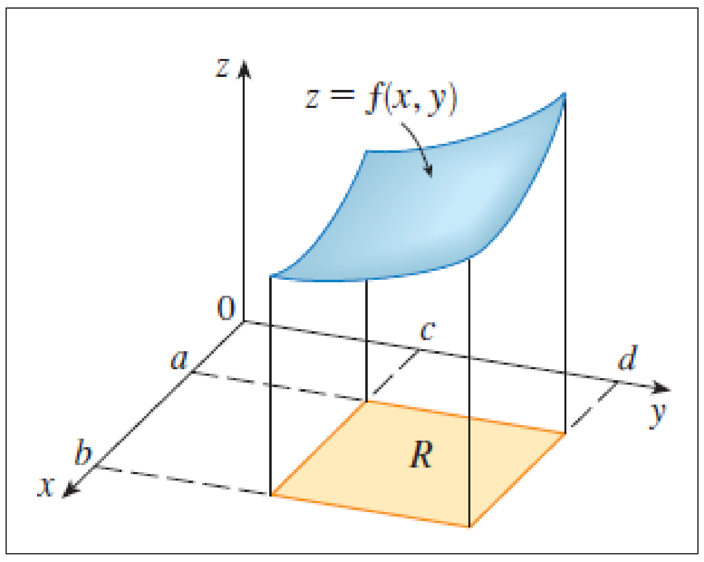

figura 2

El primer paso es dividir el rectángulo R en subrectángulos. Esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual amplitud $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ y dividiendo $[c, d]$ en n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de igual amplitud $\Delta y = \frac{d-c}{n}$.

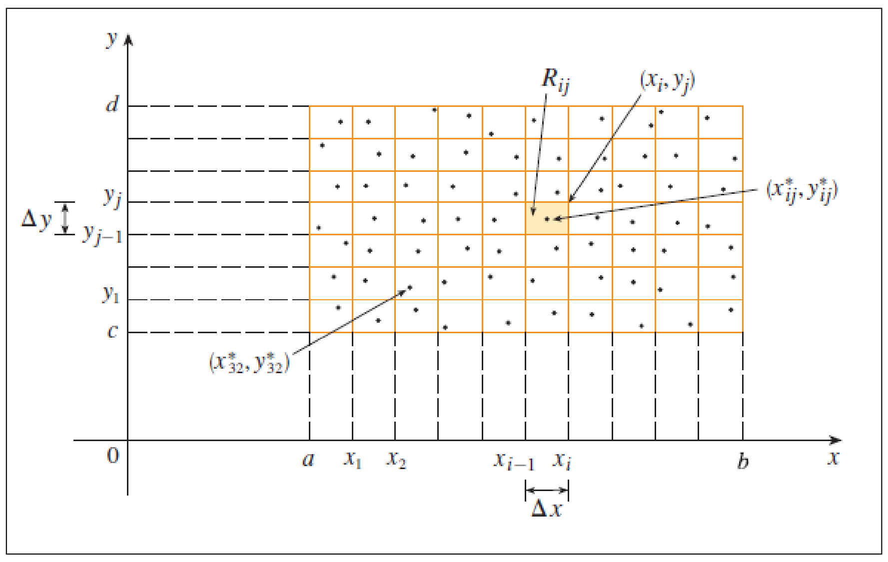

figura 3

Al dibujar líneas paralelas a los ejes coordenados por los puntos finales de estos subintervalos como en la figura 3, se forman los subrectángulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) /\ x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq\}$$

Si se elige el punto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en cada R_{ij}, entonces se puede aproximar la parte de S que está arriba de cada R_{ij} mediante una caja rectangular con base R_{ij} y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ como se muestra en la figura 4.

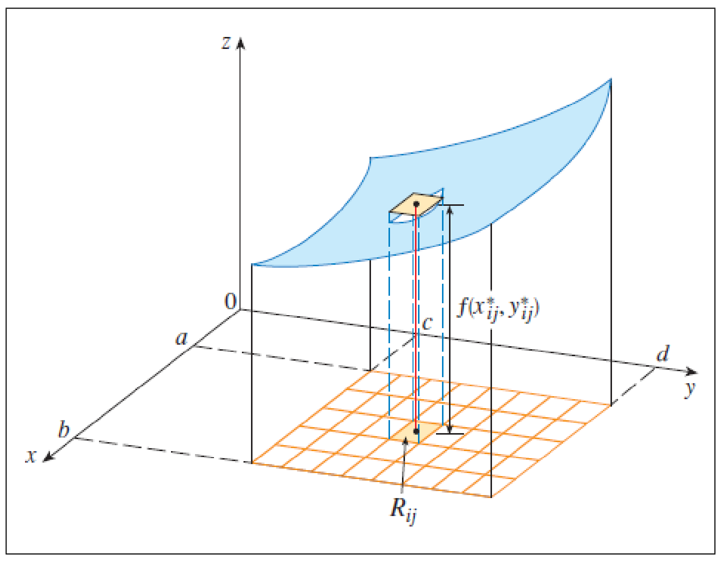

figura 4

El volumen de esta caja es la altura de la caja multiplicada por el área de la base del rectángulo:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

Si se sigue este procedimiento para los rectángulos y se suman los volúmenes de las cajas correspondientes, se obtiene una aproximación del volumen total de S:

$$V \sim \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

Esta suma doble significa que para cada subrectángulo se evalúa f en el punto elegido y se multiplica por el área del subrectángulo, y luego se suman los resultados.
La aproximación al volumen es mejor cuando m y n crecen y, por lo tanto, se esperaría que

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

Esta es la expresión que se usa para definir el volumen del sólido S bajo la gráfica de $f(x, y)$ y sobre el rectángulo R.

Definición 1.1 *La integral doble de f sobre el rectángulo R es*

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

si existe el límite.

Observación 1.2

- *No toda función $z = f(x, y)$ de dos variables es integrable sobre un rectángulo R. Si f es acotada en el rectángulo R y continua en R con excepción, quizás, en un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable en R.*
- *Si f es continua en R, entonces f es integrable en R.*
- *Si $f(x, y) \geq 0$, entonces la integral doble representa el volumen V del sólido que está arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$.*

El cálculo de la integral doble por límite de sumas de Riemann es un proceso largo y tedioso. Los interesados en profundizar las ideas previas pueden consultar algunos de los libros mencionados en la bibliografía.

1.3 Propiedades

Se enuncian tres propiedades de integrales dobles, suponiendo que todas las integrales existen.

Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrables en D y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\displaystyle\iint_D k\, f(x, y)dA = k \iint_D f(x, y)dA$
2. $\displaystyle\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\,dA = \iint_D f(x, y)dA + \iint_D g(x, y)dA$
3. *Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para toda $(x, y) \in R$, entonces*

$$\iint_R f(x, y)dA \geq \iint_R g(x, y)dA$$

1.4 Integral doble iterada

Suponemos que $f(x, y)$ es una función de dos variables que es integrable en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Se usa la notación $\int_c^d f(x, y)\,dy$ para indicar que x se mantiene fija y $f(x, y)$ se integra con respecto a y entre c y d. Este procedimiento se llama integración parcial con respecto a y. El resultado de esta integración es un número que depende del valor de x, así que define una función de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

Si ahora se integra la función A con respecto a x entre a y b, se obtiene

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

La integral del lado derecho esta ecuación se llama integral **iterada**. *Por lo común, se omiten los corchetes. Así,*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

indica que primero se integra con respecto a y y el resultdo se integra con respecto a x.

De manera similar, la integral iterada

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy$$

significa que primero se integra con respecto a x (manteniendo fija y) y después se integra la función resultante con respecto de y.

Ejemplo 1.3 *Evaluar $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy\,dx$. Resp. $\frac{27}{2}$*

El siguiente resultado proporciona un método práctico para evaluar una integral doble expresándola como una integral iterada (en cualquier orden).

Teorema 1.4 *Fubini*
Sea f una función de dos variables definida en la región plana $R = [a, b] \times [c, d]$. Si f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

Actividad 1 *Calcular las siguientes integrales iteradas:*

- $\iint_R xdxdy$, *si* $R = [1, 2] \times [0, 1]$. *Resp.* $\frac{3}{2}$
- $\iint_R xy^2dxdy$, *si* $R = [0, 1] \times [-1, 2]$. *Resp.* $\frac{3}{2}$
- $\iint_R (x + y)dydx$, *si* $R = [0, 1] \times [0, 2]$. *Resp.* 3

1.5 Integral doble sobre regiones generales

Las integrales dobles sobre regiones R no rectangulares pueden ser complicadas. Para calcularlas vamos a definir dos tipos de regiones, regiones del tipo I y del tipo II, y hacer uso del teorema de Fubini.

Región del Tipo I

Una región de este tipo es como la que se muestra en la figura 5

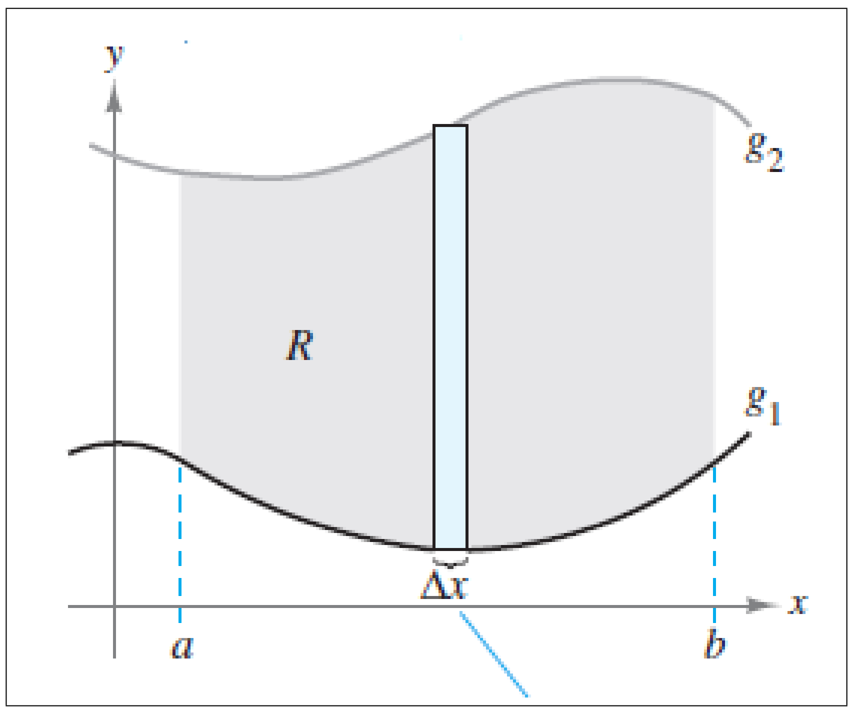

figura 5

Está formada por puntos (x, y) tales que para cada x fijo, entre las constantes a y b, la coordenada y varía de la función g_1 a la función g_2, siendo estas dos funciones continuas. Se puede pensar que el rectángulo genérico, está anclado en las curvas superior e inferior, y que "pinta" la región moviéndose horizontalmente.

Región del Tipo II

Una región de este tipo es como la que se muestra en la figura 6

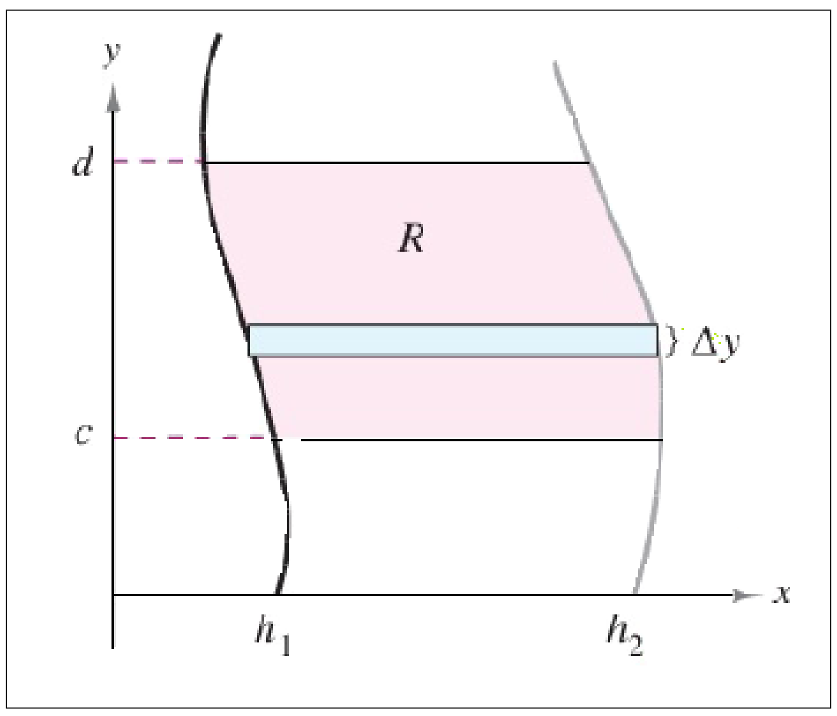

figura 6

Está formada por puntos (x, y) tales que para cada y fijo, entre las constantes c y d, la coordenada x varía de la función h_1 a la función h_2, siendo estas dos funciones continuas. En este caso el rectángulo genérico "pinta" la región moviéndose verticalmente.

Teorema 1.5 *Fubini*

- *Si D es una región del tipo I, entonces*

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g_1}^{g_2} f(x,y)dy\right] dx$$

- *Si D es una región del tipo II, entonces*

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1}^{h_2} f(x,y)dx\right] dy$$

Ejemplo 1.6 *Sea R la región del plano que acotan $y = x$ e $y = x^2$.*

1. *Graficar la región.*
2. *Escribir la región R como de tipo I.*
3. *Escribir la región R como de tipo II.*
4. *Calulcar el área de R.*
5. *Verificar que* $\int_R (2y - 4x)dx\,dy = -\frac{1}{5}$

Actividad 2 *Sea P el paralelógramo de la figura 7.*

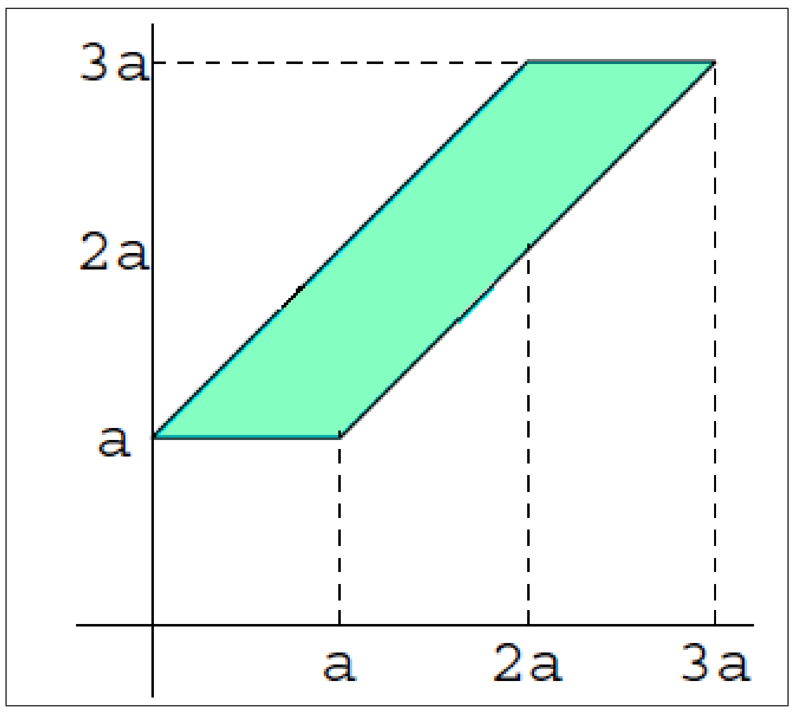

figura 7

1. *¿Cuántas integrales del tipo I son necesarias para hallar el área del paralelógramo?*
2. *¿Cuántes integrales del tipo se necesitan para hallar el área del paralelógramo?*
3. *Calcula el área de la forma más simple posible.*

Actividad 3 *Repetir la actividad anterior en la figura 8, acotada por $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$*

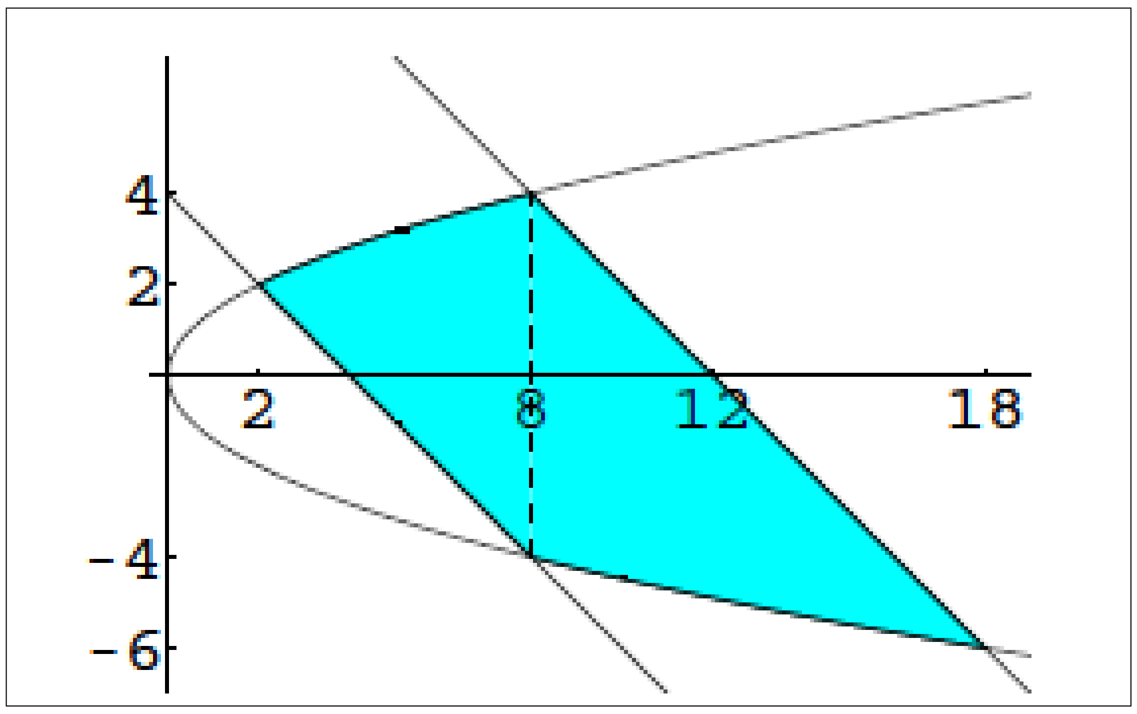

figura 8

Actividad 4 Verificar el resultado de las siguientes integrales dobles, bosquejando previamente el recinto de integración:

1. $\displaystyle\iint_R (x^2-2y)dx\,dy = \frac{4}{5}$, si R es la región del plano que acotan las rectas $x=-1$, $x=1$, y las curvas $y=-x^2$ e $y=x^2$
2. $\displaystyle\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{1+y^4} = \frac{\ln 17}{4}$

2. Coordenadas polares

Fecha			2017

En un sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano se puede localizar un punto con una sola pareja de puntos (x,y) estos valores son las distancias dirigidas, partiendo del origen, desde los ejes x e y respectivamente. El origen es el punto donde se intersectan los dos ejes coordenados.

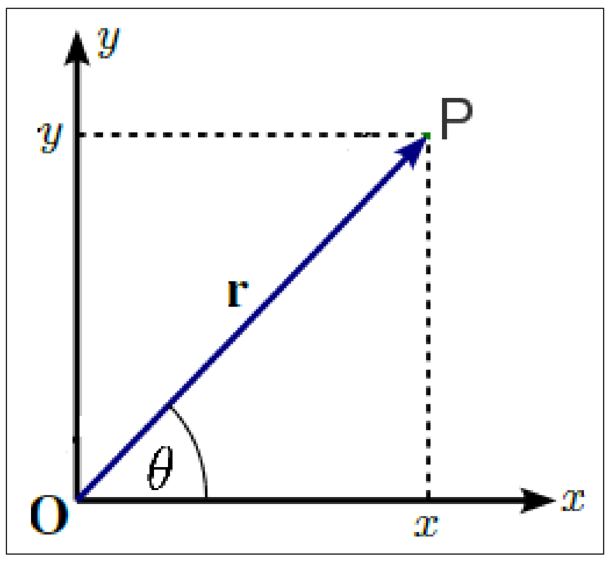

figura 9

Sea P un punto en el plano xy de coordenadas cartesianas (x,y). Las coordenadas polares (r,θ) se definen de la siguiente forma:

- *La coordenada r es la distancia del punto P al punto O. Varía entre los valores 0 y ∞.*
- *La coordenada θ es el ángulo que forma OP con el eje Ox. Puede variar entre los valores 0 y 2π.*

Estas dos coordenadas permiten describir de forma unívoca la posición de cualquier punto en el plano xy.

$$P(r,\theta) \qquad r\in[0,\infty) \qquad \theta\in[0,2\pi)$$

El intervalo para θ es abierto a la derecha para evitar llegar al valor de 2π. De lo contrario, los puntos del eje Ox aparecerían dos veces, para $\theta=0$ y para $\theta=2\pi$.

El eje Ox se llama eje polar, el punto fijo O es el polo y el ángulo θ es el ángulo polar. El trazado de puntos en el sistema polar se facilita considerablemente usando circunferencias concéntricas y rectas concurrentes. Las circunferencias tienen su centro común en el polo, y todas las rectas pasan por el polo.

Relación con las coordenadas cartesianas

Cada par de valores (x,y) corresponde unívocamente a un par de valores r,θ. Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo formado por los catetos de longitud x e y y la hipotenusa de longitud r tenemos

POLARES $\Longrightarrow$ CARTESIANAS	CARTESIANAS $\Longrightarrow$ POLARES
$x = r\,cos\theta$	$r=\sqrt{x^2+y^2}$
$y = r\,sen\theta$	$\theta = arctg(\frac{y}{x})$

Actividad 5 En la figura 10, determina las coordenadas rectangulares y polares del punto estrella.

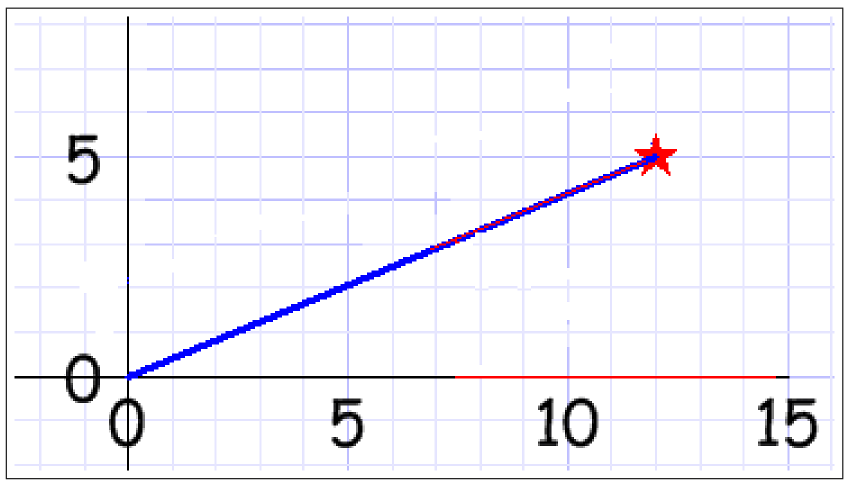

figura 10

Actividad 6 Dibuja un sistema cartesiano y superpones el polar para indicar los siguientes puntos:

$$(1,\frac{\pi}{2}),\ (3,\frac{\pi}{4}),\ (-3,\frac{\pi}{4}),\ (3,\frac{\pi}{6}),\ (3,\frac{7\pi}{4})$$

Actividad 7 Utilizar coordenadas polares para describir cada una de las regiones mostradas en la figura 11

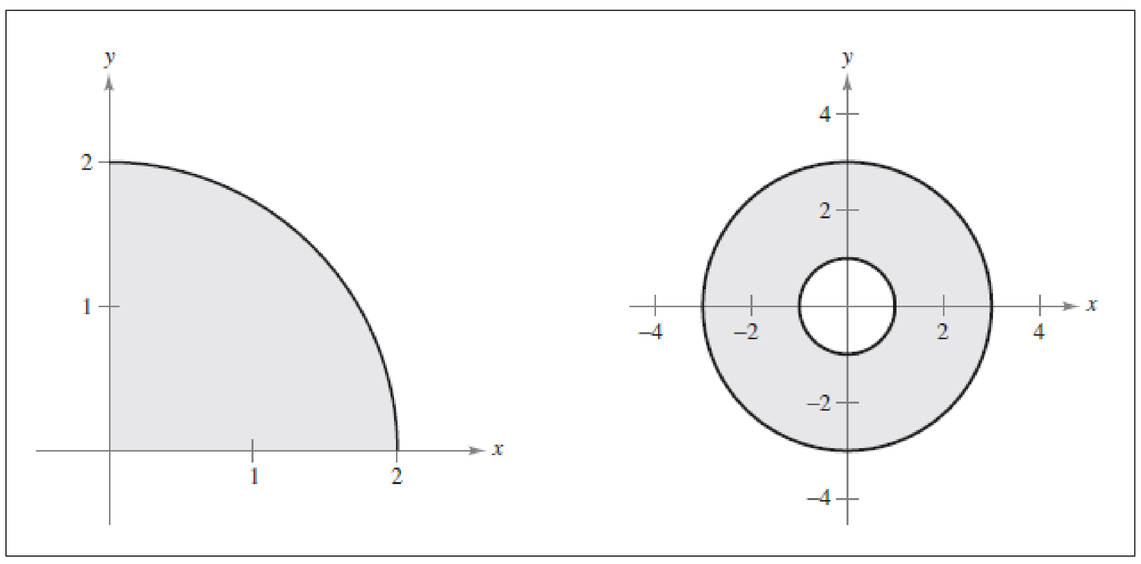

figura 11

2.1 La diferencial en polares

A continuación vamos a ver el equivalente a la diferencial de área dA en coordenadas polares.

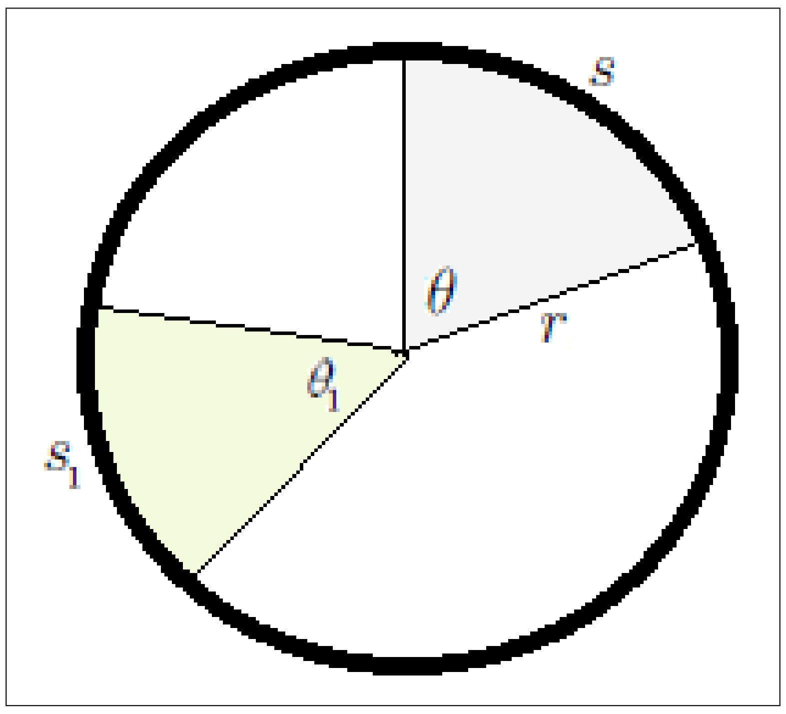

figura 12

Se considera un círculo (figura 12) de radio r y dos ángulos centrales θ y θ_1 medidos en radianes. Estos ángulos subtienden arcos de longitudes s y s_1 respectivamente. La razón de las medidas de los ángulos es igual a la razón de las longitudes correspondientes de los arcos subtendidos por estos ángulos. Es decir,

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1}$$

Si elegimos $\theta_1 = 1$ radián, entonces $s_1 = r$, de lo cual se obtiene

$$s = r\theta$$

Ahora, en la figura 13 tenemos un sector polar cuya forma es aproximadamente una región rectangular en la cual la base es una diferencial de arco y su altura un diferencial de radio.

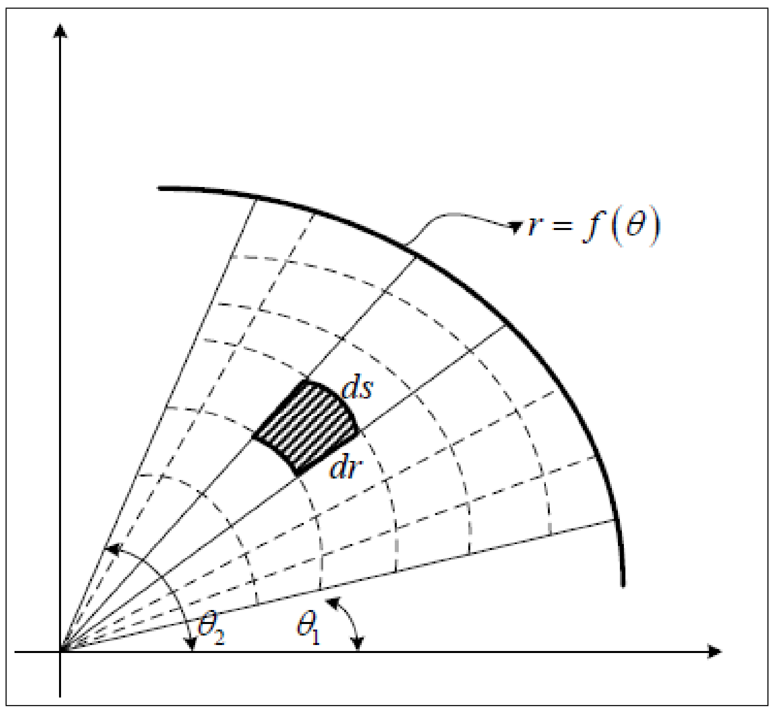

figura 13

En este caso $dA = ds\,dr$, pero $ds = rd\theta$, entonces

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

De manera tal que, la integral doble en coordenadas polares queda de la forma

$$\iint_{R_{polar}} f(r\cos\theta, r\,sen\theta) r\,dr\,d\theta$$

***Actividad 8** Hallar $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$, donde $R = \{0 \le x \le 2, / \; 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$. Resp. 2π*

3. Integrales dobles y volumen

Fecha			2017

Sean R una región plana, $z = f(x,y)$ y $z = g(x,y)$ dos superficies tales que $f(x,y) \ge g(x,y)\ \forall (x,y) \in R$. El volumen entre ambas superficies al interior de la región se puede calcular usando la siguiente integral doble

$$V = \iint_R [f(x,y) - g(x,y)]\,dA = \iint_R [techo - piso]\,dA$$

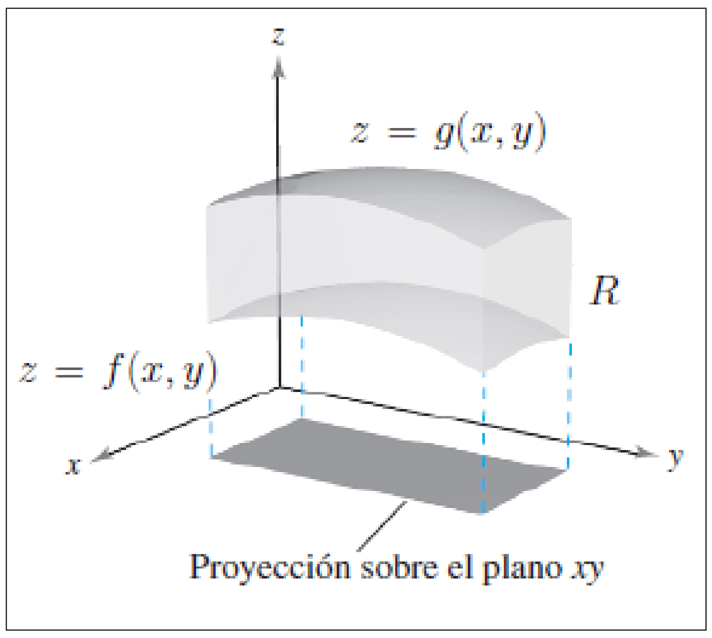

figura 14

***Actividad 9** Hallar los siguientes volúmenes:*

1. *del sólido que se encuentra debajo de la superficie $z = x^2 + 4y$ y arriba del rectángulo $D = \{(x,y)/ \; 0 \le x \le 2, \; 0 \le y \le 3\}$. Resp 44.*
2. *del sólido limitado por el recinto, en el primer octante, acotado por el plano $x + 2y + 3z = 6$.*
3. *del sólido limitado por los planos$z = x + y$, $z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Resp. 36*

3.1 Cambio de variables

Supóngase que se quiere hallar, mediante integrales dobles, el área acotada por las curvas $x-2y = 4$, $x-2y = 0$, $x+y = 4$, $x+y = 1$. La gráfica de esta región es la que se indica en la figura 14.

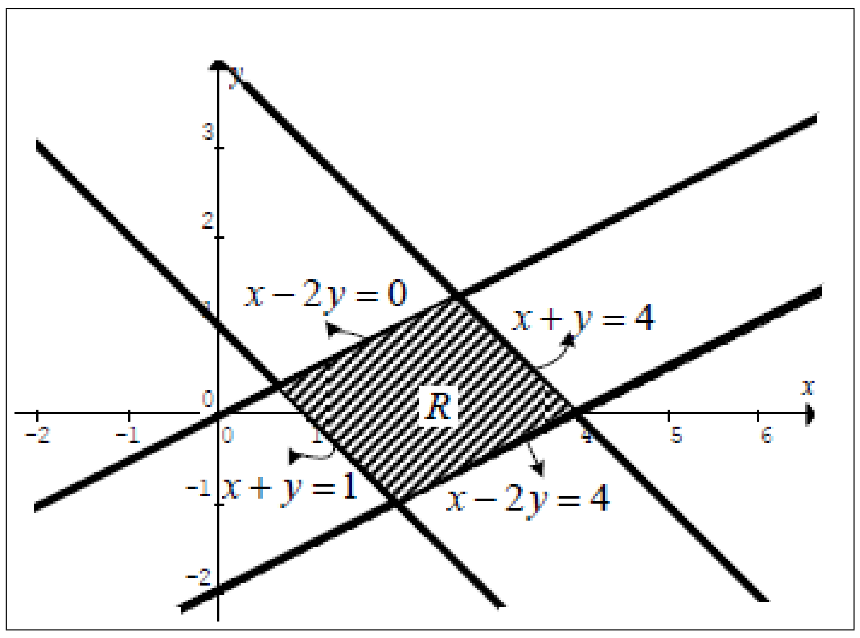

figura 14

Por integrales del tipo I o bien del tipo II es necesario 3 procesos de integración. Pero si se observan las ecuaciones que conforman la frontera de la región, un cambio de la forma

$$x - 2y = u, \quad v = x + y$$

conduce a tener

$$u = 4, \; u = 0, \quad v = 1, \; v = 4$$

una nueva región de integración que es la que muestra la figura 15.

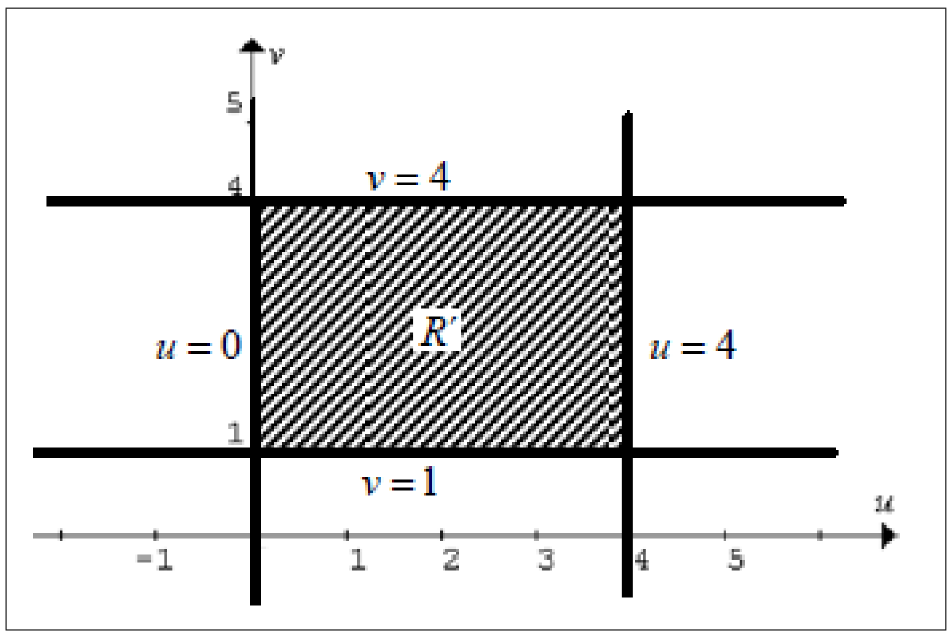

figura 15

El área de la región original estaba en el plano xy, y ahora tenemos una nueva en el plano uv. Esto que se acaba de hacer se conoce como una “transformación”, que se denota por $T : R' \subset \mathbb{R}^2 \to R \subset \mathbb{R}^2$.

3.1.1. Jacobiano de una transformación

Sea $T : R_{uv} \subset \mathbb{R}^2 \to R_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ una función continuamente diferenciable dada por $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, de modo que las funciones inversas $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ están definidas y son continuas en R_{xy}.

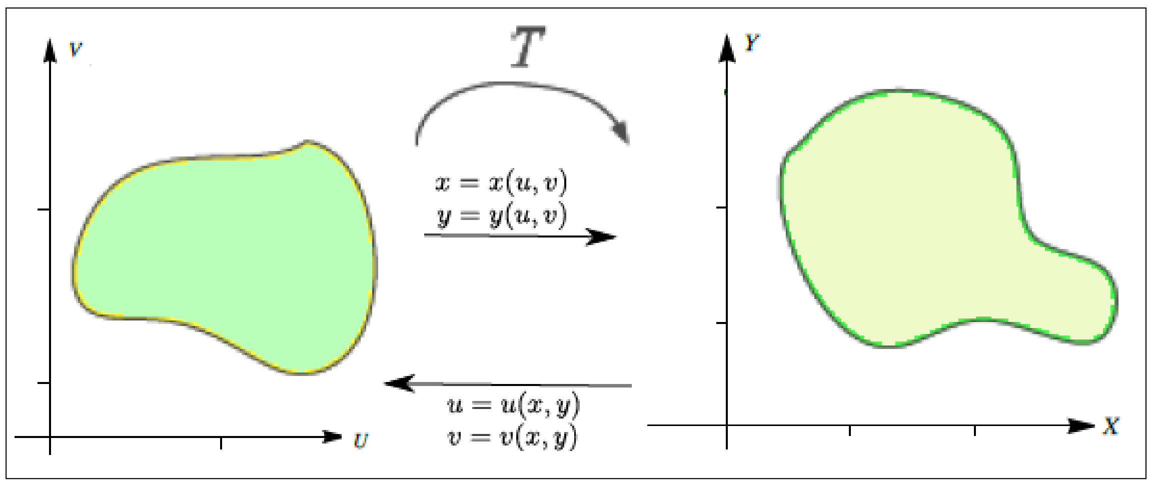

figura 16

El Jacobiano de T es dado por:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dx}{dv} \\ \\ \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dy}{dv} \end{vmatrix}$$

El Jacobiano es un factor de proporcionalidad de las áreas de los recintos R_{uv} y R_{xy}.

***Teorema 3.1** Sean R_{uv} y R_{xy} regiones de los planos uv y xy, respectivamente. Sea T una transformacion biyectiva tal que $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, mediante la cual $T(R_{uv}) = R_{xy}$. Si f es continua en R_{xy}, T es de clase C^1 y $J(T)$ es no nulo, entonces:*

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dA = \iint_{R_{uv}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) |J(T)|\, du\, dv$$

En ciertas ocasiones se desconoce la transformación $T(u,v) = (x,y)$ más apropiada, en estos casos, se trata de hallar una transformación inversa $T^{-1}(x,y) = (u,v)$, la cual vendrá dada por las ecuaciones que limitan a la región o por la función integrando.

***Actividad 10** Hallar, mediante integrales dobles, el área acotada por las curvas $x - 2y = 4$, $x - 2y = 0$, $x + y = 4$, $x + y = 1$.*

La transformación

$$T_1(x,y) = (x - 2y, x + y) = (u,v)$$

va del plano xy en el plano uv. Por tanto, no es el Jacobiano de ésta la que necesitamos, si no que el de la inversa. Pero, existe el siguiente resultado

$$J(T) \cdot J(T^{-1}) = 1$$

donde, en este caso, $T_1 = T^{-1}$. Cálculo del jacobiano:

$$J(T_1) = \begin{vmatrix} \dfrac{du}{dx} & \dfrac{du}{dy} \\ \\ \dfrac{dv}{dx} & \dfrac{dv}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Con lo cual, $J(T) = \dfrac{1}{3}$ En consecuencia,

$$dA_{xy} = \frac{1}{3} dA_{uv}$$

Se sigue que:

$$A = \iint_{R_{xy}} dA = \iint_{R_{uv}} \cdot \frac{1}{3} dA_{uv} = \frac{1}{3}\int_0^4 \int_1^4 dv\, du = 4$$

***Actividad 11** Hallar $\iint_R 4(x+y)e^{x-y}\,dy\,dx$, si R el triángulo formado por $y = 1$, $y = x$ e $y = -x$. Resp. $2(1 - e^{-2})$*

---

4. Aplicaciones de la integral doble

En esta sección veremos algunas aplicaciones de la integral doble en física.
La masa es una medida de la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento y es independiente del sistema gravitatorio particular donde se halle el cuerpo. Fuerza y masa están relacionadas por la ecuación:

$$\text{Fuerza} = \text{masa} \cdot \text{ aceleración} = m \cdot a$$

***Definición 4.1** Si $\rho(x,y)$ es la función densidad de una lámina que corresponde a una región plana R, la masa M de la lámina viene dada por*

$$M = \iint_R \rho(x,y)\,dA$$

***Actividad 12** Hallar la masa de la lámina triangular de vértices $(0,0)$, $(0,3)$ y $(2,3)$, si su densidad en (x,y) es $\rho(x,y) = 2x + y$. Resp. 10*

***Definición 4.2** Los momentos de masa respecto de los ejes x e y son, respectivamente,*

$$M_x = \iint y\rho(x,y)\,dA, \qquad M_y = \iint_R x\rho(x,y)\,dA$$

Si la masa de la lámina es m, el centro de masa es

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{M}(M_y, M_x)$$

*Si R representa una región plana en lugar de una lámina, el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ se llama el **centroide** de la región.*

Actividad 13 *Hallar el centro de masa de la lámina correspondiente a la region parabólica $0 \leq y \leq 4 - x^2$ si la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia de (x, y) al eje x. Resp $m = \frac{256k}{15}$, $\overline{y} = \frac{16}{7}$, $\overline{x} = 0$*

---

5. Integrales triples

Fecha			2017

Las ideas desarrolladas para la integral doble se generalizan de forma similar a integrales triples. Una integral triple tiene la forma

$$\iiint_R f(x, y, z)dV$$

en donde f es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, positiva y acotada. La región R está $\mathbb{R}^3$ y dV es la diferencial de volumen

$$dV = dx\, dy\, dz = dx\, dz\, dx = \cdots$$

Para su cálculo se emplean los teoremas de Fubini.

Actividad 14 *Sea S el sólido acotado por el plano $x + y + z = 1$, los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Calcular $\iiint_S dV$.*

Observación 5.1 *Si R es una región de $\mathbb{R}^3$ que tiene volumen, entonces para $f(x, y, z) = 1$, la integral triple representa el volumen de la región.*

$$V(R) = \iiint_R dV$$

Actividad 15 *Sea R la región acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $2z = 12 - x^2 - y^2$. Usando integral triple calcular el volumen de R. Resp. 12π*

5.1 Coordenadas cilíndricas

Todo punto en el espacio se puede representar por un triple (r, θ, z), en el que el par (r, θ) corresponde a la representación en coordenadas polares del punto (x, y). La figura 17 muestra cómo se interpreta el punto (r, θ, z) en el espacio y la relación con las coordenadas rectangulares habituales.

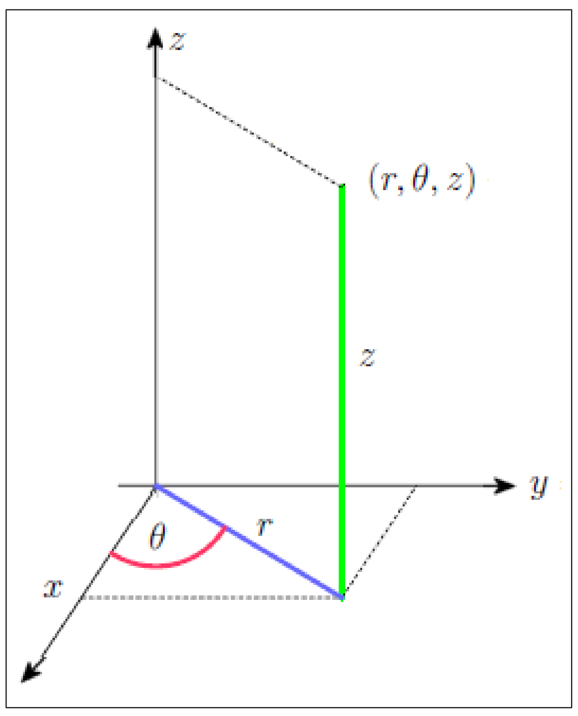

figura 17

Para convertir de coordenadas cilindricas a rectangulares, usamos las ecuaciones:

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \ z = z \qquad (1)$$

Para convertir de coordenadas rectangulares a cilindricas, usamos las ecuaciones:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = arctg\frac{y}{x}, x \neq 0,\ z = z \qquad (2)$$

Actividad 16

1. *Localizar el punto en coordenadas cilíndricas $(2, \frac{\pi}{2}, 1)$ y encuentre sus coordenadas rectangulares.*
2. *Encuentre las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas rectangulares $(3, -3, 7)$.*

En particular, la relación

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \ z = z$$

corresponde a una transformación:

$$T : S \subset \mathbb{R}^3 \to R \subset \mathbb{R}^3$$
$$(r, \theta, z) \to (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

El Jacobiano de esta transformación es

$$J(T) = r$$

Con lo cual.

Para cambiar una integral triple de coordenadas rectangulares a una de coordenadas cilíndricas, se usa la siguiente fórmula:

$$\iiint_R f(x, y, z)dV = \iint_S f(T(r, \theta, z))\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

Actividad 17 *Hallar el volumen, usando coordenadas cilindricas, del sólido limitado superiormente por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$*

5.2 Coordenadas Esféricas

Las coordenadas esféricas son una manera alternativa de describir un punto en el espacio tridimensional. Sea P un punto del espacio con coordenadas (x, y, z). Esto se ilustra en la figura 18.

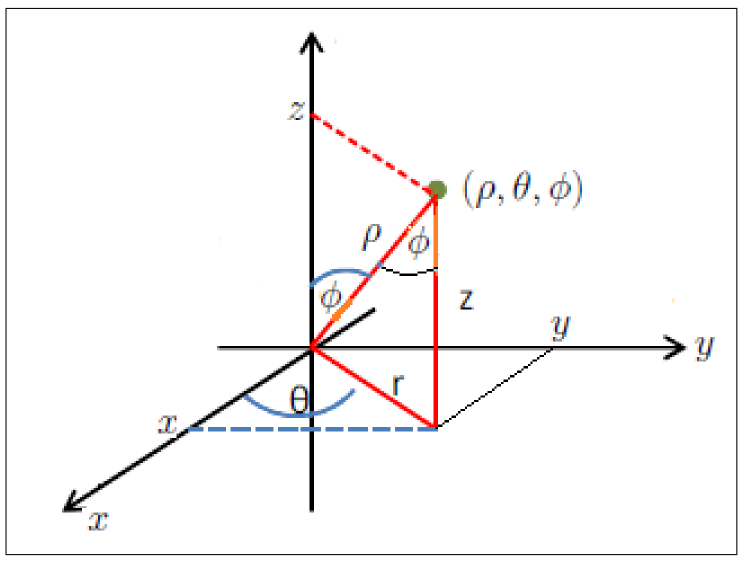

figura 18

ρ es la distancia al origen desde el punto
θ es el ángulo que tiene el punto con respecto al eje x (ángulo en el plano xy de la proyección de P con el eje x)
ϕ es el ángulo del rayo OP con respecto al eje z
La coordenadas esféricas de este punto son $P(\rho, \theta, \phi)$.
De la figura 18 se tiene que:

$$z = \rho\cos\phi, \quad r = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$$

Pero $x = r\cos\theta$, $\quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, entonces

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi\ \cos\theta,\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,\ z = \rho\cos\phi$$

Estas ecuaciones dan forma a las coordenadas esféricas, la cual es una transformación

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$T(\rho,\theta,\phi) = (\rho \operatorname{sen}\phi\ \cos\theta,\ \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,\ \rho\cos\phi)$$

El Jacobiano de esta transformación es $J(T) = -\rho^2 \operatorname{sen}\phi$.

Para cambiar una integral triple de coordenadas rectangulares a una de coordenadas esféricas, se usa la siguiente fórmula:

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \iint_S f(T(\rho,\theta,\phi))\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

Actividad 18 *Localizar el punto* $P(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ *y hallar sus coordenadas cartesianas.*

Actividad 19 *Calcular el volumen al interior del cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *y bajo la esfera* $x^2+y^2+z^2 = 9$*. Resp.* $18\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Observación 5.2 *Al igual que la integral doble, la integral triple tiene aplicaciones al campo de la física, tal como, masa, centro de masa, momentos de inercia. No insistiremos en ello ya que con la integral doble es suficiente.*

6. Tareas para actitudinal

Los siguientes problemas han sido seleccionados para ser entregados antes del primer taller individual. Cada problema debe ser "redactado" indicando los pasos que se dan. La presentación sumará o restará puntos. Pueden usar un cuaderno u hojas tamaño carta. No es necesario hacerlos todos. Son 34 puntos (2 puntos cada problema).

Tarea 1

1. *Sea* R *la región triangular del plano* xy *limitado por* $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, *encontrar el valor de* $\displaystyle\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dy\, dx$. *Resp.*
2. *Calcular* $\displaystyle\int_0^1\int_x^{2x} dy\, dx$ *empleando el cambio de variable* $x = u(1-v),\ y = uv$. *Resp.* $\frac{1}{2}$
3. *Hallar* $\iint_R (x^2+y^2)\, dA$, *donde* R *es la región del plano* xy *limitada por las hipérbolas* $x^2-y^2 = 1$, $x^2-y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = 4$ *en el primer cuadrante. Resp.* 8

Tarea 2 *Calcular:*

1. $\iint_R (3x+4y^2)\, dA$, *donde* R *es la región del semiplano superior acotado por los círculos* $x^2+y^2 = 1$ *y* $x^2+y^2 = 4$. *Resp* $\frac{15\pi}{2}$
2. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2}\, dA$. *Resp*
3. $\iint_r xy\, dA$, *donde* R *es la región del primer cuadrante comprendida entre los círculos* $x^2+y^2 = 4$ *y* $x^2+y^2 = 25$. *Resp* $\frac{609}{8}$
4. $\iint_r e^{x^2+y^2}\, dA$, *donde* R *es la región del plano limitada por el eje de las* x *y la curva* $y = \sqrt{1-x^2}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2}(e-1)$

Tarea 3

1. *Hallar el volumen del sólido limitado por* $z = 4 - x^2 - 2y^2$ *y el plano* $z = 2$. *Resp.* $\pi\sqrt{2}$
2. *del sólido acotado por la semi-esfera superior* $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$, *y por el cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$. *Resp* 8π

Tarea 4 *Verificar el resultado de las siguientes integrales dobles, bosquejando previamente el recinto de integración:*

1. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3\, dy\, dx = 6$
2. $\displaystyle\int_0^1\int_0^y y^2 e^{xy} dx\, dy = \frac{e}{2} - 1$
3. $\displaystyle\iint_R dA = \frac{1}{2} + \ln 2$, *si* R *es la región acotada por las curvas;* $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$, $x = 0$.
4. $\iint_R (2x+1)dA = 1$ *si* R *es el triángulo de vértices* $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.
5. $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\cos x^5\, dx\, dy = \frac{\operatorname{sen} 32}{10}$.

Tarea 5

1. *Encontrar el volumen de la región acotada por las superficies* $z = x^2+y^2$, $z = 10 - x^2 - 2y^2$. *Resp.* $\frac{50\pi}{\sqrt{6}}$
2. *Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide elíptico* $x^2+2y^2+z = 16$, *los planos de coordenadas, y los planos* $x = 2$, $y = 2$. *Resp* 48
3. *Encontrar el volumen de la región acotada por* $z = x^2+3y^2$ *y* $z = 12 - \frac{1}{3}x^2$. *Resp.* π

Si tienes tiempo te recomiendo visitar las dos páginas siguientes:

`http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=es&form=integral2`

`https://es.symbolab.com/solver/double-integrals-calculat`