# ალგორითმები და მონაცემთა სტრუქტურები

**მაქსიმუმის მოძებნა. ანალიზი.**

ზ. კუჭავა, LaTeX

**ამოცანა** : რიცხვით მასივში $A[n] = A[a_0, .., a_{n-1}]$ მოვძებნოთ მაქსიმალური ელემენტი და გამოვიტანოთ შესაბამისი (უდიდესი) ინდექსი. [1]96-104გვ, [2]114-122გვ

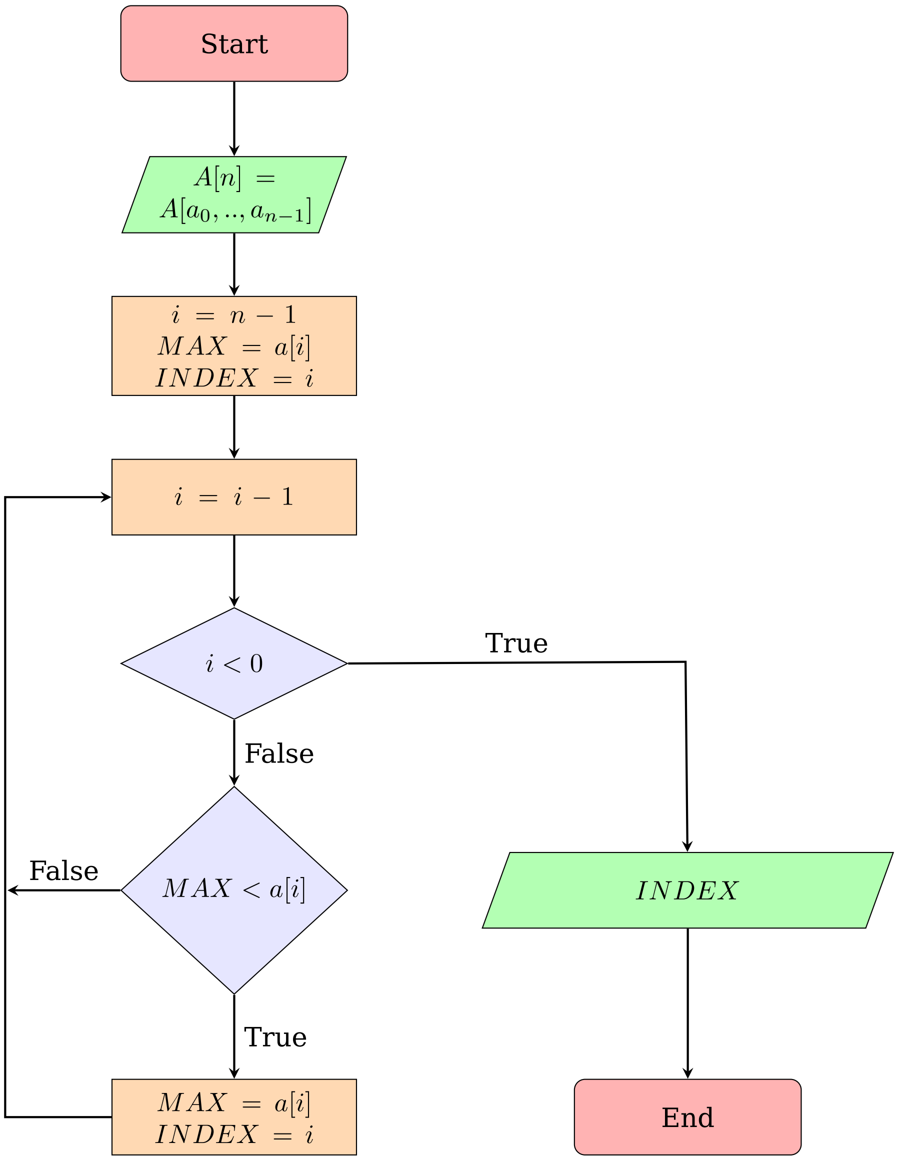
# 1 მარტივი მოძებნა

## 1.1 ალგორითმი

განვიხილოთ ინდექსი $i = n-1$. შემოვიტანოთ დამხმარე ცვლადი $Max$ და მივანიჭოთ $a_{n-1}$ მნიშვნელობა, $Max = a_{n-1}$. ცვლადს $Index$ მივანიჭოთ $n-1$ მნიშვნელობა, $Index = n-1$. შევამციროთ ინდექსი $i = i-1$ და შევამოწმოთ ხომ არ გახდა $i$ უარყოფითი. თუ კი ამოცანა დასრულებულია. თუ არა, შევადაროთ $Max$ მასივის ელემენტს $a_i$-ს. თუ $a_i > Max$, მაშინ შევცვალოთ ცვლადები ახალი მნიშვნელობებით $Max = a_i$ და $Index = i$ და გადავიდეთ ინდექსის შემცირების საფეხურზე. რადგან გამოვიყენეთ მკაცრი უტოლობა, ამიტომ ალგორითმი პოულობს ყველაზე მარჯვენა მაქსიმუმს ანუ მასივის ელემენტებში მაქსიმალურ მნიშვნელობას უდიდესი ინდექსით.

## 1.2 ბლოკსქემა

სურათი 1




სურ. 1: მარტივი მოძებნა

## 1.3 ფსევდოკოდი

კოდი, რომელიც ზუსტად შეესაბამება ბლოკსქემას და ამდენად იყენებს ე.წ. goto კონსტრუქციას შემდეგია:

```
        i = n - 1;
        MAX = a[i];
        INDEX = i;
LOOP:   i = i - 1;
        if(i < 0 )
        {
            return INDEX;
        }
        else
        {
            if(MAX < a[i])
            {
                MAX = a[i];
                INDEX = i;
            }
            goto LOOP;
        }
```

ციკლის კონსტრუქციის გამოყენებით

```
    i = n - 1;
    MAX = a[i];
    INDEX = i;
    for(i = n-2; i >= 0; i--)
    {
        if(MAX < a[i])
        {
            MAX = a[i];
            INDEX = i;
        }
    }
    return INDEX;
```

## 1.4 ანალიზი 4 ელემენტის შემთხვევისთვის.

განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც მაქსიმუმს ვეძებთ ოთხ განსხვავებულ $(a, b, c, d)$ რიცხვებს შორის. ასევე, დავუშვათ, რომ რიცხვების რაოდენობა შემოსაზღვრულია, მაგალითად, მათთვის გამოყოფილი ველის სიგრძის მიხედვით. ანუ, თუ საუბარია, მაგალითად, 32 ბიტიან რიცხვებზე, მაშინ სულ გვაქვს განსხვავებული $2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296$ რიცხვი.

ალგორითმის ფსევდოკოდია

```
largest = a;
if(largest < b)
    largest = b;
if(largest < c)
    largest = c;
if(largest < d)
    largest = d;
return largest;
```

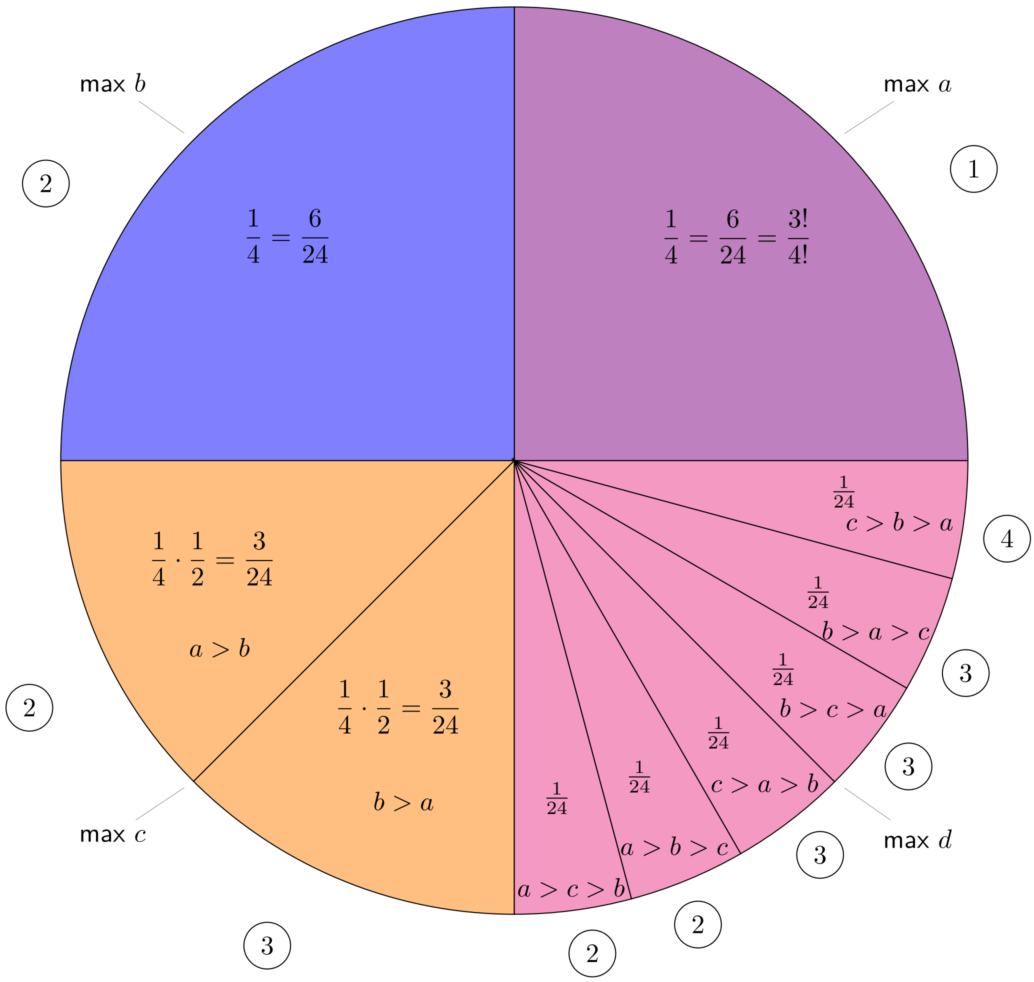
აღვნიშნოთ მინიჭებათა რაოდენობის სირთულის ფუნქცია $T$ ასოთი. ალგორითმის შესრულების დროს მინიჭებების რაოდენობა შეიძლება იყოს 1-დან 4-ის ჩათვლით ნებისმიერი მთელი რიცხვი. ცხადია, რომ ერთი მინიჭება ხდება ყოველთვის, ხოლო მინიჭებათა მაქსიმალური რაოდენობაა $T = 4$.

როგორც ცნობილია $4$ განსხვავებული $a, b, c, d$ რიცხვებისთვის არსებობს $24 = 4!$ განსხვავებული დალაგება. დავუშვათ, რომ ყოველ დალაგებას ვანიჭებთ $\frac{1}{24}$ მოსალოდნელობის ზომას და დავითვალოთ რომელი დალაგებები მოგვცემს $T$ სირთულის ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებს. დათვლა ჩავატაროთ 2 წრიული დიაგრამის მიხედვით და შედეგები შევაჯამოთ 1 სისტემაში:

როდესაც $a$ მაქსიმალურია, მაშინ, ცხადია, რომ 1.4 კოდში გვექნება მხოლოდ ერთი, პირველი, მინიჭება. აგრეთვე, ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ კოდის შესრულებისას მოხდა მხოლოდ ერთი მინიჭება, მაშინ $a$ აუცილებლად მაქსიმალური უნდა იყოს. ამიტომ $6 = 3!$ დალაგება, სადაც $a$ მაქსიმალურია, მოგვცემს $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ მოსალოდნელობას $T = 1$ მნიშვნელობისთვის, რაც ქმნის 1 სისტემის პირველ სტრიქონს.

როდესაც მაქსიმალური არის $b$ მაშინ 1.4 კოდში გვექნება $2$ მინიჭება და ეს შექმნის 1 სისტემის მე-$2$ სტრიქონის პირველ შესაკრებს ისევ $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ მნიშვნელობით, რადგან დალაგებათა რაოდენობა, სადაც $b$ მაქსიმალურია არის $6 = 3!$.

როდესაც $c$ არის მაქსიმალური, მაშინ ყველა შესაძლო $6 = 3!$ დალაგება ამ შემთხვევისთვის იყოფა ორ ნაწილად $a, b$ რიცხვების ურთიერთდამოკიდებულების მიხედვით. როდესაც $a > b$ გვაქვს ორი მინიჭება და $a < b$-ის გვაქვს სამი მინიჭება. ორივესთვის მოსალოდნელობა გამოდის $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$. ეს გააჩენს, შესაბამისად, 1 სისტემის მე-$2$ სტრიქონის მეორე შესაკრებს და მე-$3$ სტრიქონის პირველ შესაკრებს.




h

სურ. 2: წრიული დიაგრამა.

$d$ მაქსიმალურის შემთხვევისთვის შესაძლებელი $6=3!$ დალაგებების შესაბამისი მოსალოდნელობების მიღება ადვილია 2 წრიული დიაგრამის შესაბამისი უტოლობებიდან, რაც გვაძლევს 1 სისტემის მე-3 სტრიქონის ბოლო სამ შესაკრებს და მე-4 სტრიქონს.

ამგვარად მინიჭების სირთულის ფუნქციისთვის მნიშვნელობები და მოსალოდნელობები იქნება:

$$T(a,b,c,d) = \begin{cases} 1: & \frac{1}{4} & = \frac{6}{24} \\ 2: & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} & = \frac{11}{24} \\ 3: & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} & = \frac{6}{24} \\ 4: & \frac{1}{24} & = \frac{1}{24} \end{cases} \tag{1}$$

მინიჭების სირთულის ფუნქციის საშუალო გამოდის:

$$ET = 1\cdot\frac{6}{24} + 2\cdot\frac{7}{24} + 3\cdot\frac{6}{24} + 4\cdot\frac{1}{24} = \frac{50}{24} = 2.08(3) \tag{2}$$

**თანაბარი განაწილების შემთხვევა.** ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ 1.4 ამოცანისთვის არ ჩავატარეთ წილების ზუსტი გამოთვლა და ავიღეთ წილები თანაბარი ანუ ე.წ. თანაბარი განაწილება. რადგან მინიჭებათა სირთულის ფუნქციისთვის სულ ოთხი განხსხვავებული მნიშვნელობა გვაქვს, ეს ნიშნავს, რომ თითოეულს შევუსაბამებთ წილს/ალბათობას/მოსალოდნელობას/ზომას $\frac{1}{4}$. სირთულის ფუნქციის საშუალო იქნება:

$$ET = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} = 2.5$$

ასეთი მიახლოება არ გვაძლევს საშუალებას არჩევანი გავაკეთოთ სირთულის ფუნქციის მნიშვნელობებს 2-სა და 3-ს შორის.

## 1.5 ანალიზი $n$ ელემენტის შემთხვევაში.

ნებისმიერი შემავალი მონაცემებისთვის შედარებათა რაოდენობა უცვლელია და იცვლება მხოლოდ მაქსიმუმის მინიჭებათა რაოდენობა. ამდენად ანალიზის შესწავლის საგანია მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა. სიმარტივისთვის ანალიზი ჩავატაროთ ჯერ შემთხვევისთვის როდესაც მასივის ელემენტები ურთიერთგანსხვავებულია.

### 1.5.1 საუკეთესო შემთხვევა

როდესაც მასივის მაქსიმალური ელემენტი განლაგებულია $n-1$ პოზიციაში, მაშინ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა $0$-ია.

### 1.5.2 უარესი შემთხვევა

როდესაც მასივი დალაგებულია კლებადობით, ანუ მაქსიმალური პირველი ელემენტია, მაშინ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა $n-1$-ია.

### 1.5.3 საშუალო შემთხვევა

გამოვიყვანოთ ფორმულა მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობისთვის ნაბიჯ-ნაბიჯ და დავიწყოთ $n = 2$-დან. მასივისთვის $A[2] = A[a_0, a_1]$ გვაქვს სულ ორი შესაძლო შემთხვევა:

$$\begin{aligned} a_0 &< a_1 \\ a_1 &< a_0 \end{aligned} \tag{3}$$

პირველ შემთხვევაში მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა არის $0$ და მეორეში $1$. თუ $S(2)$-ით აღვნიშნავთ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობას $n = 2$-ის, გვექნება $S(2) = 1$.

$n = 3$ შემთხვევისთვის $A[3] = A[a_0, a_1, a_2]$ გვაქვს $6 = 3!$ განსხვავებული ვარიანტი და განვიხილოთ ისინი შემდეგ $3$ ჯგუფად:

$$\begin{aligned} a_0 &< a_1 < a_2 \\ a_0 &< a_2 < a_1 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a_1 &< a_0 < a_2 \\ a_1 &< a_2 < a_0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} a_2 &< a_0 < a_1 \\ a_2 &< a_1 < a_0 \end{aligned} \tag{6}$$

თუ შევხედავთ მხოლოდ მარჯვენა უტოლობებს დავინახავთ, რომ ჯგუფებში 4 და 5 გვაქვს ზუსტი ანალოგია 3 შემთხვევის - განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ 4-ში აღებულია ინდექსი 1 ინდექსი 0-ის ადგილას და ინდექსი 2 ინდექსი 1-ის ადგილას, ხოლო 5-ში აღებულია ინდექსი 2 ინდექსი 1-ის ადგილას.

ამგვარად ჯგუფებში 4 და 5-ის გვექნება თითოეულში თითო ინდექსის შეცვლა.

ჯგუფ 6-ში, რადგან $a_2$ მინიმალურია, ამიტომ ყოველი სტრიქონი აუცილებლად გამოიწვევს მინიმუმ ერთ მაქსიმუმის შეცვლას, ანუ იმდენ შეცვლას რამდენი სტრიქონიცაა $= 2!$ ამ შემთხვევაში. მაგრამ ასეთი შეცვლის შემდეგ ისევ ავღმოჩნდებით 3-ის ანალოგიურ სიტაციაში.

ამგვარად ჯგუფში 6 გვექნება მაქსიმუმის 3 შეცვლა.

სულ $n = 2$ შემთხვევისთვის გამოდის 5 შეცვლა და თუ $S(3)$-ით აღვნიშნავთ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობას, მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმულა

$$S(3) = 3S(2) + 2! \tag{7}$$

განვხილოთ $n = 4$ შემთხვევაც, ანუ $A[4] = A[a_0, a_1, a_2, a_3]$. ცხადია ამ შემთხვევაში გვაქვს $24 = 4!$ განსხვავებული ვარიანტი და $n = 3$ შემთხვევის ანალოგიურად განვიხილოთ 4 ჯგუფი, სადაც თითოეულში ფიქსირებული ელემენტია პირველ ადგილას:

$$\begin{array}{llll}
a_0 < a_1 < a_2 < a_3 & a_1 < a_0 < a_2 < a_3 & a_2 < a_0 < a_1 < a_3 & a_3 < a_0 < a_1 < a_2 \\
a_0 < a_1 < a_3 < a_2 & a_1 < a_0 < a_3 < a_2 & a_2 < a_0 < a_3 < a_1 & a_3 < a_0 < a_2 < a_1 \\
a_0 < a_2 < a_3 < a_1 & a_1 < a_2 < a_3 < a_0 & a_2 < a_1 < a_0 < a_3 & a_3 < a_1 < a_0 < a_2 \\
a_0 < a_2 < a_1 < a_3 & a_1 < a_2 < a_0 < a_3 & a_2 < a_1 < a_3 < a_0 & a_3 < a_1 < a_2 < a_0 \\
a_0 < a_3 < a_2 < a_1 & a_1 < a_3 < a_0 < a_2 & a_2 < a_3 < a_0 < a_1 & a_3 < a_2 < a_0 < a_1 \\
a_0 < a_3 < a_1 < a_2 & a_1 < a_3 < a_2 < a_0 & a_2 < a_3 < a_1 < a_0 & a_3 < a_2 < a_1 < a_0
\end{array} \tag{8}$$

პირველი 3 ჯგუფის ყოველი მარჯვენა სამი სვეტი ზუსტად იმეორებს $n = 3$ შემთხვევას ანუ თითოეულში არის $S(3)$ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა. ხოლო მეოთხე ჯგუფში $a_3$ მინიმალურია და ამიტომ მაქსიმუმის 1 შეცვლა მოხდება ყოველ სტრიქონში ე.ი. აუცილებლად გვექნება $6 = 3!$ მაქსიმუმის შეცვლა. მაგრამ ამის შემდეგ მივიღებთ ზუსტად $(2) - (3) - (4)$ სიტუაციას, რომლისთვისაც მაქსიმუმის შევლათა რაოდენობა არის $S(3)$.

ამგვარად $n = 4$-ის მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$S(4) = 4S(3) + 3! \tag{9}$$

ანალოგიური მსჯელობა სამართლიანია ზოგადად $n - 1$-დან $n$-ზე გადასვლის შემთხვევაშიც.

ზოგადი ფორმულა იქნება:

$$S(n) = n \cdot S(n-1) + (n-1)! \tag{10}$$

აქედან ადვილია ზოგადი $n$-ის (არა რეკურენტული) ფორმულის მიღებაც:

$$\begin{aligned}
S(n) &= n \cdot S(n-1) + (n-1)! = \\
&= n \cdot \Big[(n-1)S(n-2) + (n-2)!\Big] + (n-1)! = \\
&= n(n-1)S(n-2) + n \cdot (n-2)! + (n-1)! = \\
&= n(n-1)S(n-2) + \frac{n!}{n-1} + \frac{n!}{n} = \\
&= \ldots = \\
&= n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot S(2) + \frac{n!}{3} + \frac{n!}{4} + \ldots + \frac{n!}{n-1} + \frac{n!}{n} = \\
&= \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \frac{n!}{4} + \ldots + \frac{n!}{n-1} + \frac{n!}{n} = n! \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

მასივისთვის $A[n] = A[a_0, .., a_{n-1}]$ გვაქვს $n!$ დალაგება ურთიერთგანსხვავებული რიცხვების. თუ ჩავთლით, რომ ყოველი დალაგების ვარიანტი ერთნაირად მოსალოდნელია, გამოდის, რომ მოსალოდნელობის ზომა თითოეულისთვის იქნება $\frac{1}{n!}$. მაშინ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობის საშუალო დაითვლება ფორმულით

$$\frac{S(n)}{n!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 1 \tag{12}$$

მიღებული ჯამი ცნობილია **ჰარმონიული ჯამი**ს ([1]75გვ.) სახელით და ალგორითმების ანალიზში მისთვის გვაქვს სპეციალური აღნიშვნა

$$\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{13}$$

ჰარმონიული ჯამის ერთერთი მნიშვნელოვანი თვისებაა მისი კავშირი ლოგარითმულ ფუნქციასთან

$$\mathcal{H}_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \varepsilon_n = \ln n + O(1), n \to \infty \tag{14}$$

სადაც $\gamma$ არის ცნობილი ეილერ-მასკერონის (Euler–Mascheroni [3]) კონსტანტა, $\gamma \approx 0.57721$, და $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{8n^2}, n \to \infty$.

უკანასკნელი ფორმულის გათვალისწინებით მაქსიმუმის შეცვლათა საშუალო რაოდენობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$\frac{S(n)}{n!} = \mathcal{H}_n - 1 = \ln n + O(1), n \to \infty \tag{15}$$

ამგვარად, $n$ ელემენტიან $A[n]$ მასივში მაქსიმუმის შეცვლა საშუალოდ მოგვიწევს დაახლოებით $\ln n$-ჯერ. ეს ნიშნავს, რომ საუკეთესოს 100 კანდიდატიდან ამოვარჩევთ საშუალოდ 4 პრეტენდენტის გამოცვლის შემდეგ. 10 000 კანდიდატისთვის დაგვჭირდება საშუალოდ 9 პრეტენდენტის გამოცვლა. 2021 წლის ნოემბრის მონაცემებით ([4]) დედამიწაზე დაახლოებით ცხოვრობს 7 900 000 000 ადამიანი - ნებისმიერი ნიშნით მათ შორის საუკეთესოს ვიპოვით საშუალოდ 22 პრეტენდენტის გამოცვლის შემდეგ.

**შენიშვნა.** მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობის მაგივრად, რომ შეგვესწავლა მინიჭებათა რაოდენობა, მაშინ 11 ფორმულაში $S(n)$-ს დაემატებოდა კიდევ $n!$ მინიჭება, ანუ $S^*(n) = S(n) + n!$, სადაც $S^*$ მინიჭებათა რაოდენობაა. ამდენად მინიჭებათა საშუალო რაოდენობა გამოდის

$$\frac{S^*(n)}{n!} = \mathcal{H}_n \tag{16}$$

### 1.5.4 ჰარმონიული ჯამის ფორმულის (14) დამტკიცება

დამტკიცებას დავაფუძნებთ ცნობილ ზღვარზე $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, რომელიც ხშირად მიიღება როგორც $e$-ს, ე.წ. ნეპერის რიცხვის, განმარტება. განვიხილოთ მიმდევრობა $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. ერთი მხრივ ცხადია, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$. მეორე მხრივ, უტოლებებიდან

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}\cdot\frac{n+1}{n} < \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\cdot\frac{n+1}{n} < 1$$

ჩანს, რომ $y_n$ კლებადია, ამდენად მეტია თავის ზღვარზე ე.ი. სრულდება $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n$. უკანასკნელი უტოლობა ტოლფასია უტოლობის $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0 \quad (a)$.

ახლა განვიხილოთ მიმდევრობა $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n$. რადგან $x_{n+1}-x_n = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$ მიღებული $(a)$ უტოლობის მიხედვით, ამიტომ $x_n$ კლებადია. მეორე მხრივ მიმდევრობა $x_n$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან:

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n > \ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n =$$
$$= \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$$

ამიტომ მიმდევრობას $x_n$ გააჩნია ზღვარი, რომელიც აღვნიშნოთ $\gamma$-თი .
მაშინ გვექნება $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \gamma+\ln n+\varepsilon_n$ სადაც $\varepsilon_n\to 0, n\to\infty$.

### 1.5.5 (1.4) და (1.5) მეთოდების შედარება

$$\frac{S^*(4)}{4!} = \mathcal{H}_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 2.08(3) \tag{17}$$

რაც კარგად ეთანხმება 2 -ში მიღებულ შედეგს $ET = \dfrac{50}{24} = 2.08(3)$

შევნიშნოთ, რომ კიდევ 17 შეიძლება სხვანაირად ჩავწეროთ:

$$\frac{S(4)}{4!} = \ln 4+\gamma+\frac{1}{2\cdot 4}-\varepsilon_4-1 \approx$$
$$\approx 1.386294361+0.57721+0.125-1-\varepsilon_4 \approx 1.088504361$$

# 2 საშუალო არათანაბარი მოსალოდნელობის პირობებში

დავუშვათ, რომ მაქსიმალური ელემენტის პირველივე ნაბიჯზე პოვნის მოსალოდნელობა არ არის თანაბარი ყველა სხვა შესაძლო ვარიანტთან და არის, მაგალითად, $\dfrac{1}{2}$.

როგორც ვიცით $n$ ელემენტიან $A[n]$ მასივში, ურთიერთგანსხვავებული ელემენტების შემთხვევაში, ელემენტების დალაგების ყველა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობაა $n!$. აქედან ვარიანტების რაოდენობა, სადაც $a_{n-1}$ არის მაქსიმალური არის $(n-1)!$. განხსახილველად არჩეულ შემთხვევაში ყოველი მათგანის მოსალოდნელობის ზომა გამოდის $\frac{1}{2\cdot(n-1)!}$. რჩება $n! - (n-1)! = (n-1)\cdot(n-1)!$ ვარიანტი და თითოეულისთვის მოსალოდნელობის ზომა იქნება $\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot(n-1)!}$.

თუ შევნიშნავთ, რომ (11) ფორმულაში მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა ყველა იმ შემთხვევისთვის, როდესაც $a_{n-1}$ არის მაქსიმალური წარმოადგენს $0$-ს, მაშინ გამოვა, რომ (11) ფორმულა ფაქტიურად გვაძლევს მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობას იმ შემთხვევებისთვის, სადაც $a_{n-1}$ არ არის მაქსიმალური.

ამგვარად საშუალო დაითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot(n-1)!}\cdot S(n) = \frac{n!}{2\cdot(n-1)\cdot(n-1)!}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-1\right) = \\ &= \frac{n}{2(n-1)}\left(\ln n + O(1)\right) = \frac{\ln n}{2} + O(1), n\to\infty \end{aligned} \tag{18}$$

როგორც მოსალოდნელი იყო მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა საშუალოდ განახევრდა.

# ლიტერატურა


[1] Donald Ervin Knuth, *The Art of Computer Programming*, Volume 1, Third Edition

[2] Thomas H. Cormen Charles E. Leiserson Ronald L. Rivest Clifford Stein , *Introduction to Algorithms*, Third Edition

[3] Euler–Mascheroni

[4] world-population