第六章 多元函数微分学

6.1 n维欧式空间

球形邻域、方形邻域、内点、开集、闭集、边界点、开区域（连通的开集）、闭区域、有界集、无界集、直径

柯西收敛准则、闭矩形套收敛准则、致密性定理

6.2 多元函数的极限与连续

一致连续、有界性、最值性、介值性

典型题

例 2.4 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0; \\ 0, & xy=0,\ (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

在原点(0,0)的极限是0.

上例说明,由于高维空间几何的复杂性,多元函数极限的讨论要远比一元函数困难的多. 多元函数必需是点 P 在定义域内以任何方式或途径趋近于 P_0 时,$f(P)$都有极限且极限都相等,才能保证$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$存在. 因此

(1) 若点 P 以两种不同方式或途径趋于P_0 时,$f(P)$趋向不同的数,则可断定$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$不存在.

(2) 已知 P 以几种方式或途径趋于P_0 时,$f(P)$趋于同一个数,这时不能断定 $f(P)$有极限.

(3) 如果已知$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$存在,则可取一特殊的途径来求极限.

定义 2.3 设二元函数 $f(P)$在 D 上有定义,$P_0(x_0, y_0)$是 D 的内点或边界点. 若$\forall M>0, \exists \delta>0$,当 $P\in \mathring{U}(P_0, \delta)\cap D$ 时,有

$$f(P)\geqslant M,$$

则称 $f(P)$在 D 上当$P\to P_0$ 时为正无穷大,记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=+\infty \text{ 或} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=+\infty \text{ 或} \lim_{(0, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=+\infty.$$

仿此可定义

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=-\infty \quad \text{与} \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=\infty.$$

6.3 偏导数和全微分

偏改变量、偏导数

全微分：如果函数可微，那么我们就把那个最好的线性近似部分 $A\Delta x + B\Delta y$ 定义为函数在该点的全微分

全改变量：$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

可微的条件：$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

全微分的定义： $dz|_{(x_0,y_0)} = A\Delta x + B\Delta y$

可微的必要条件：如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微，那么它在该点一定存在两个偏导数 $f‘_x(x_0, y_0)$ 和 $f’_y(x_0, y_0)$，并且全微分表达式 $dz = A\Delta x + B\Delta y$ 中的 A 就是偏导数 $f‘_x$，B 就是偏导数 $f’_y$

可微的充分条件：如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f‘_x$ 和 $f’_y$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内都存在，并且这两个偏导数在点 (x_0, y_0) 本身是连续的，那么函数在该点一定可微**

偏导数连续是函数可微的充分不必要条件

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6.4 方向导数和梯度

方向导数：如果函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微，那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，并且可以用以下公式计算

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} \cos\gamma$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦

梯度：

$$(f_1', f_2', f_3')\ |_{P_0}$$

6.5 复合函数微分法和高阶偏导数

链式法则

克莱罗定理定理：如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内存在二阶混合偏导数并且这两个混合偏导数在点 P_0 处连续，那么它们在该点必然相等

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$$

拉普拉斯算子:Δ = ∂²/∂x² + ∂²/∂y² + ∂²/∂z²

6.6多元泰勒公式与极值

展开式

函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 附近的泰勒级数展开为：

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right]^m f(x_0,y_0)$$

其中，$h = x - x_0$，$k = y - y_0$。

二元中值定理

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\,h + f'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\,k$$

极值必要条件：驻点

极值充分条件：B²-AC

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有二阶连续偏导数，且 P_0 是函数的**驻点**（即满足 $f'_x(P_0) = 0$, $f'_y(P_0) = 0$）。

$$f''_{xx}(P_0) = A,\quad f''_{xy}(P_0) = B,\quad f''_{yy}(P_0) = C$$

判别式 Δ 的情况	结论
(1) 当 $\Delta < 0$ 时	P_0 是**极值点**。
• 若 $A < 0$ (或 $C < 0$)	P_0 是**极大值点**。
• 若 $A > 0$ (或 $C > 0$)	P_0 是**极小值点**。
(2) 当 $\Delta > 0$ 时	P_0 **不是极值点**（是一个**鞍点**）。

判别式 Δ 的情况	结论
(3) 当 $\Delta = 0$ 时	**方法失效**，无法用此法判断，需借助其他方法（如极值定义或更高阶导数）。

6.7隐函数存在定理及其微分法

隐函数存在定理：对于一个二元方程 $F(x,y)=0$，若满足以下条件，则可确定一个隐函数 $y=f(x)$

1. 光滑性条件：函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内具有连续的偏导数。
2. 初始条件：点 P_0 满足原方程，即 $F(x_0,y_0)=0$。
3. 非退化条件：函数在 P_0 点关于 y 的偏导数不为零，即 $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$。

如果上述条件成立，则有如下结论：
存在性与唯一性：在点 P_0 的某个邻域内，方程 $F(x,y)=0$ 唯一地确定了一个定义在 x_0 某邻域内的函数 $y=f(x)$。
函数值：该函数满足初始条件 $f(x_0)=y_0$。
光滑性：函数 $y=f(x)$ 是连续可微的（即其导数存在且连续）。
导数公式：即使函数 $f(x)$ 的具体解析式难以求出，其导数也可由以下公式计算：

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

反函数求导（何来正反）

6.8条件极值：拉格朗日数乘法

6.9空间曲线

切线和法平面（线）

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)} \tag{9.3}$$

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

切平面和法线（面）

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}$$

曲率

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$$

第七章 多元函数的积分学

7.1 流形上的积分

积分中值定理、二重积分、三重积分

第一型曲线积分

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x)) \cdot \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$$

第一型曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy。$$

换元积分法

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv$$

第八章 向量值函数的积分

8.1 第二型曲线积分

$$W = \int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_c P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

8.2 格林公式

若函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 以及 $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在光滑或逐段光滑的简单闭曲线 c 所围成的闭区域 D 上连续，则

$$\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

8.3 曲线积分与路径无关

定理 3.1 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$在区域 D 连续,则下述命题等价.

(1) 曲线积分

$$\int_l P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

与路径无关;

(2) (3.1)式的被积表达式在 D 内是某一函数 $u(x,y)$的全微分;

(3) 对于 D 内的任意光滑或逐段光滑闭曲线 c,有

$$\oint_c P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

8.4 全微分方程

如果一阶微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

的左端恰好是某一函数u(x,y)的全微分，则称该方程为全(恰当)微分方程。

8.5 第二型曲面积分

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S (Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)$$

8.6 奥-高公式

设三维空间 R^3 中的有界闭区域 Ω 是由光滑的闭曲面 S 所围成，函数 P,Q,R 及其偏导数在 Ω 上连续，则

$$\oiint_S Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

其中曲面 S 取外侧。

8.7 斯托克斯公式（一点也看不懂）

设光滑的开曲面S的边界是光滑或逐段光滑闭曲线c, 函数P, Q, R及其偏导数在曲面S上连续, 则

$$\oint_c Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

这里曲面S的正侧与曲线c的正向构成右手系.

重要结论

例 5.5 设 $u=u(x, y)$可微,在极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 下,证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

利用这一性质可将一元函数的和、差、积、商的微分法则推广到多元函数上去.

$$d(u \pm v)=du \pm dv,$$

$$d(uv)=v du+u dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v du-u dv}{v^2} \quad (v \neq 0),$$

其中 u 与 v 都是某些自变量的可微函数.

高阶全微分

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz)=d(f'_x dx+f'_y dy) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f'_x dx+f'_y dy)dx+\frac{\partial}{\partial y}(f'_x dx+f'_y dy)dy \\ &= f''_{xx}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}dy^2, \end{aligned}$$

其中 $dx^2=(dx)^2$, $dy^2=(dy)^2$.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{5.6}$$

为**拉普拉斯方程**. 这是一个重要的偏微分方程.

例 5.9 设 $u = \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 证明 u 满足拉普拉斯方程

隐函数求导

应用与提示

- **核心价值**：这个定理的强大之处在于，它允许我们在**不知道函数** $y = f(x)$ **具体形式**的情况下，讨论它的存在性、唯一性、连续性和可微性，并计算其导数。
- **推广**：这个定理可以推广到更多元的情形。例如，由方程 $F(x,y,z) = 0$ 在 $F'_z \neq 0$ 的条件下可以确定一个函数 $z = f(x,y)$，并且有：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

积分换元

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi.$$