1. 二次型

对于一个二次齐次多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，我们希望通过坐标变换，将其转为标准型 $f(x_1', x_2', \cdots x_n') = k_1 x_1'^2 + \cdots + k_n x_n'^2$，即对任意 $x_i x_j$ 这一项，其系数为0。

我们把二次齐次函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2$
$+ 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n$

称为二次型。当 $j>i$ 时，我们令 $a_{ij} = a_{ji}$，则有 $f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

转化矩阵表示二次型 $f = x^T A x$，其中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

显然对于任意二次型 f，我们都可以找到一个对称阵 A，使得 $f = x^TAx$

由于对称阵必然可以对角化，$A = PDP^T$，其中 P 为正交阵
所以我们可以对 x 做线性变化，令 $x = Py$，那有
$f = y^TP^TAPy = y^TDy$，f 转为标准型

2、正定矩阵
设二次型 $f(x) = x^TAx$，如果对于任意 $x \neq 0$，都有 $f(x) > 0$ 则称 f 为正定二次型，对称阵 A 为正定的；如果对任何 $x \neq 0$ 都有 $f(x) < 0$，则称 f 为负定二次型，对称阵 A 为负定的

A为正定矩阵的充分必要条件：
(1) A的标准型系数全为正
(2) A的特征值全为正（特征值就是标准型系数）
(3) A的各阶主子式都为正

A为负定矩阵的充分必要条件：
(1) 奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正
(2) A的标准型系数全为负
(3) A的特征值全为负（特征值就是标准型系数）