金融教程

Frank’s Lab

July 17, 2025

目录

第 1 章 Hedging with futures

1.1 Basis 与 Basis Risk

基差风险基差是现货与期货之间的价差。在到期前存在基差风险

Basis = Spot - Future

- F_1：建立对冲时的期货价格
- F_2：购买资产时的期货价格
- S_2：购买时的资产价格
- b_2：购买时的基差

1.1.1 对冲计算

资产成本	S_2
期货收益	$F_2 - F_1$
净支付金额	$S_2 - (F_2 - F_1) = F_1 + b_2$

1.1.2 什么是多头对冲

多头对冲是指买入期货合约来对冲未来购买现货资产时的价格上涨风险。适用于计划在未来购买某种资产的情况。

1.1.3 对冲机制解析

资产成本：直接购买资产的成本为 S_2。

期货收益：

- 期货头寸盈利 = $F_2 - F_1$
- 因为是多头头寸，期货价格上涨时获利

净支付金额：

$$\text{净支付} = S_2 - (F_2 - F_1) = F_1 + b_2$$

1.1.4 空头对冲

空头对冲（**Short Hedge**）是指卖出期货合约来对冲未来出售现货资产时的价格下跌风险。适用于已经持有资产或确定将来会持有资产，并计划在未来某个时间出售的情况。

变量说明

- F_1：建立对冲时（卖出期货时）的期货价格
- F_2：出售资产时（平仓期货时）的期货价格
- S_2：实际出售资产时的现货价格
- $b_2 = S_2 - F_2$：出售时的基差

对冲机制分析

1. 资产销售收入

直接出售资产获得的收入为 S_2

2. 期货头寸盈亏

- 期初：卖出期货（空头），价格为 F_1

- 期末：买入期货平仓，价格为 F_2
- 期货盈利 = $F_1 - F_2$（价格下跌时获利）

3. 净收入计算

$$净收入 = S_2 + (F_1 - F_2) = F_1 + b_2 \tag{1.1}$$

假设一个农民计划 **3** 个月后出售小麦：

时间点 **1**（建立对冲）：

- 当前小麦期货价格 $F_1 = 200$ 元/吨
- 操作：卖出期货合约

时间点 **2**（出售小麦）：

- 现货价格 $S_2 = 180$ 元/吨（下跌了）
- 期货价格 $F_2 = 182$ 元/吨
- 基差 $b_2 = 180 - 182 = -2$ 元/吨

计算结果：

- 现货收入：180 元/吨
- 期货盈利：$200 - 182 = 18$ 元/吨
- 净收入：$180 + 18 = 198 = 200 + (-2)$ 元/吨

通过对冲，农民将收入锁定在约 200 元/吨的水平，有效规避了价格下跌的风险。

空头对冲与多头对冲对比

对比项	空头对冲	多头对冲
期货操作	卖出期货	买入期货
保护目标	防止价格下跌	防止价格上涨
适用情况	未来要出售资产	未来要购买资产
净结果	$F_1 + b_2$	$F_1 + b_2$

两种对冲的净结果形式相同，但经济含义相反：空头对冲锁定销售收入，多头对冲锁定购买成本。

1.2 最优对冲比率

概念定义

最优对冲比率是指为了最小化对冲组合的风险，应该对冲的风险敞口比例。它告诉我们：对于每一单位的现货头寸，应该使用多少单位的期货合约进行对冲。

公式推导

最优对冲比率的公式为：

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{1.2}$$

其中：

- h^*：最优对冲比率
- σ_S：现货价格变化 ΔS 的标准差
- σ_F：期货价格变化 ΔF 的标准差
- ρ：ΔS 和 ΔF 之间的相关系数

推导原理

最优对冲比率通过最小化对冲组合的方差得出。设对冲组合的价值变化为：

$$\Delta V = \Delta S - h\Delta F \tag{1.3}$$

对冲组合的方差为：

$$\mathrm{Var}(\Delta V) = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F \tag{1.4}$$

对 h 求导并令其等于零：

$$\frac{\partial \text{Var}(\Delta V)}{\partial h} = 2h\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_F = 0 \tag{1.5}$$

解得最优对冲比率：

$$h^* = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{1.6}$$

经济含义

1. 完美相关情况（$\rho = 1$）

- $h^* = \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$
- 对冲比率仅取决于波动率比率
- 如果期货价格波动是现货的 2 倍，则只需 0.5 单位期货对冲 1 单位现货

2. 不完全相关情况（$0 < \rho < 1$）

- 需要调整对冲比率
- 相关性越低，最优对冲比率越小
- 反映了期货不能完全对冲现货风险的事实

实际应用示例

示例 **1**：股票组合对冲

假设投资者持有某股票组合，计划使用股指期货对冲：

- 股票组合日收益率标准差：$\sigma_S = 2\%$
- 股指期货日收益率标准差：$\sigma_F = 1.5\%$
- 相关系数：$\rho = 0.9$

最优对冲比率：

$$h^* = 0.9 \times \frac{2\%}{1.5\%} = 1.2 \tag{1.7}$$

这意味着每 100 万元的股票组合，需要卖出价值 120 万元的股指期货。

示例 **2**：外汇风险对冲

某出口企业需要对冲美元收入：

- 美元现汇汇率波动率：$\sigma_S = 0.5\%$
- 美元期货汇率波动率：$\sigma_F = 0.48\%$
- 相关系数：$\rho = 0.95$

最优对冲比率：

$$h^* = 0.95 \times \frac{0.5\%}{0.48\%} = 0.99 \tag{1.8}$$

几乎是 1:1 的对冲比率。

实践考虑因素

1. 参数估计

- 使用历史数据估计 σ_S、σ_F 和 ρ
- 选择合适的时间窗口（如 30 天、60 天或 90 天）
- 考虑参数的时变性

2. 合约规格

- 期货合约有标准化的规格
- 实际对冲比率需要四舍五入到整数合约
- 可能存在剩余风险敞口

3. 动态调整

- 市场条件变化时，最优对冲比率也会变化
- 需要定期重新计算和调整
- 权衡调整成本和对冲效果

对冲效果评估

使用最优对冲比率后，对冲组合的最小方差为：

$$\text{Var}(\Delta V)_{min} = \sigma_S^2(1-\rho^2) \tag{1.9}$$

对冲有效性（Hedge Effectiveness）可以表示为：

$$HE = \rho^2 \tag{1.10}$$

ρ^2 也称为 R-squared，表示期货价格变化能够解释现货价格变化的比例。例如，如果 $\rho = 0.9$，则 $HE = 0.81$，表示 81% 的现货价格风险可以通过期货对冲消除。

1.3 Beta 方法与 Rho 方法的数学关系与转换

1.3.1 基本定义与核心公式

Beta 系数定义：

$$\beta = \frac{\text{Cov}(R_p, R_m)}{\text{Var}(R_m)} = \rho_{p,m} \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \tag{1.11}$$

最优对冲比率（**Rho** 方法）：

$$h^* = \rho_{S,F} \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{1.12}$$

其中：

- $\rho_{p,m}$：投资组合与市场指数的相关系数
- σ_p, σ_m：投资组合和市场指数的标准差
- $\rho_{S,F}$：现货与期货的相关系数
- σ_S, σ_F：现货和期货的标准差

1.3.2 数学等价性证明

从协方差的定义出发：

$$\beta = \frac{\text{Cov}(R_p, R_m)}{\text{Var}(R_m)} = \frac{\rho_{p,m} \cdot \sigma_p \cdot \sigma_m}{\sigma_m^2} = \rho_{p,m} \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \tag{1.13}$$

对比两个公式结构，可得：

$$\boxed{\beta = h^* \quad \text{当将股票组合视为" 现货"，股指期货视为" 期货" 时}} \tag{1.14}$$

1.3.3 应用场景对比

特征	**Beta 方法**	**Rho 方法**
应用场景	股票组合 vs 股指	商品现货 vs 期货
风险度量	系统性风险敞口	总体价格风险
计算重点	相对市场的敏感度	相关性与波动率

1.3.4 特殊情况分析

1. 完美相关（$\rho = 1$）：

$$\beta = h^* = \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \tag{1.15}$$

2. 相同波动率（$\sigma_p = \sigma_m$）：

$$\beta = h^* = \rho \tag{1.16}$$

3. 指数基金（$\rho \approx 1, \sigma_p \approx \sigma_m$）：

$$\beta = h^* \approx 1 \tag{1.17}$$

1.3.5 实践意义

两种方法的数学等价性揭示了对冲的统一本质：寻找最小化风险的最优比率。

- 对于股票组合对冲，两种方法理论上等价
- 选择依据：数据可得性和计算便利性
- 交叉对冲时必须使用 Rho 方法

核心结论：Beta 本质上是 Rho 方法在股票市场的特殊应用，当满足转换条件时，两者可以相互转换。

第 2 章 interest rate Futures

2.1 公式介绍 (Formula Introduction)

美国国库券的定价采用折扣收益率方法，其核心公式为：

$$P = \frac{360}{n}(100 - Y) \tag{2.1}$$

其中：

- P = 报价价格 (Quoted Price)
- Y = 每 100 美元面值的现金价格 (Cash Price per \$100 face value)
- n = 到期天数 (Days to maturity)
- 360 = 银行年度天数惯例 (Banking year convention)

2.2 公式推导 (Formula Derivation)

国库券的定价基于折扣机制，投资者以低于面值的价格购买，到期时按面值赎回。

2.2.1 基本关系

折扣率 d 定义为：

$$d = \frac{\text{面值} - \text{购买价格}}{\text{面值}} \times \frac{360}{n} \tag{2.2}$$

设面值为 100 美元，购买价格为 Y，则：

$$d = \frac{100 - Y}{100} \times \frac{360}{n} \tag{2.3}$$

2.2.2 报价价格计算

在美国国库券市场中，报价价格 P 实际上表示的是年化折扣率（以百分比形式），因此：

$$P = d \times 100 = \frac{100 - Y}{100} \times \frac{360}{n} \times 100 \tag{2.4}$$

简化得到：

$$\boxed{P = \frac{360}{n}(100 - Y)} \tag{2.5}$$

2.3 公式应用示例 (Application Examples)

2.3.1 示例 1

假设一张 91 天到期的国库券，每 100 美元面值的现金价格为 98.5 美元：

$$\begin{aligned}
P &= \frac{360}{91}(100 - 98.5) && (2.6)\\
&= \frac{360}{91} \times 1.5 && (2.7)\\
&= 3.956 \times 1.5 && (2.8)\\
&\approx 5.93\% && (2.9)
\end{aligned}$$

2.3.2 示例 2

如果报价价格为 4.2%，91 天到期，求现金价格：

$$4.2 = \frac{360}{91}(100 - Y) \tag{2.10}$$

$$4.2 = 3.956(100 - Y) \tag{2.11}$$

$$100 - Y = \frac{4.2}{3.956} \tag{2.12}$$

$$100 - Y = 1.062 \tag{2.13}$$

$$Y = 98.938 \tag{2.14}$$

因此现金价格为每 100 美元面值 98.938 美元。

2.4 公式特点分析 (Formula Analysis)

2.4.1 时间因子影响

- 随着到期时间 n 增加，$\frac{360}{n}$ 减小
- 相同的价格差异 $(100 - Y)$ 会产生更低的年化报价价格
- 体现了时间价值的影响

2.4.2 价格关系

- $Y < 100$：国库券以折扣价交易
- Y 越小，折扣越大，报价价格 P 越高
- 报价价格与现金价格呈反向关系

2.4.3 360 天惯例

- 使用 360 天而非 365 天是银行业惯例
- 简化计算，便于标准化
- 与货币市场其他工具保持一致

2.5 实际应用注意事项 (Practical Considerations)

1. 市场惯例：美国国库券市场使用这种报价方式已有数十年历史
2. 计算精度：实际交易中通常保留更多小数位
3. 到期计算：n 的计算需要考虑交割日和到期日之间的实际天数
4. 最小变动单位：通常为 0.01%（1 个基点）

2.6 与其他金融工具的比较 (Comparison with Other Instruments)

2.7 结论 (Conclusion)

美国国库券定价公式 $P = \frac{360}{n}(100 - Y)$ 是货币市场的重要工具，它：

- 提供了标准化的报价方法

金融工具	报价方式	年度天数惯例
国库券	折扣收益率	360 天
商业票据	折扣收益率	360 天
银行承兑汇票	折扣收益率	360 天
国库债券	收益率到期日	365 天

表 **2.1:** 不同金融工具的报价惯例

- 便于不同期限国库券之间的比较
- 反映了时间价值和风险的关系
- 与整个货币市场体系保持一致

理解这个公式对于参与货币市场交易、风险管理和投资组合构建都具有重要意义。