金融教程

Frank’s Lab

July 17, 2025

目录

第 1 章 Hedging with futures

1.1 Basis 与 Basis Risk

基差风险基差是现货与期货之间的价差。在到期前存在基差风险

Basis = Spot - Future

- F_1：建立对冲时的期货价格
- F_2：购买资产时的期货价格
- S_2：购买时的资产价格
- b_2：购买时的基差

1.1.1 对冲计算

资产成本	S_2
期货收益	$F_2 - F_1$
净支付金额	$S_2 - (F_2 - F_1) = F_1 + b_2$

1.1.2 什么是多头对冲

多头对冲是指买入期货合约来对冲未来购买现货资产时的价格上涨风险。适用于计划在未来购买某种资产的情况。

1.1.3 对冲机制解析

资产成本：直接购买资产的成本为 S_2。

期货收益：

- 期货头寸盈利 = $F_2 - F_1$
- 因为是多头头寸，期货价格上涨时获利

净支付金额：

$$\text{净支付} = S_2 - (F_2 - F_1) = F_1 + b_2$$

1.1.4 空头对冲

空头对冲（**Short Hedge**）是指卖出期货合约来对冲未来出售现货资产时的价格下跌风险。适用于已经持有资产或确定将来会持有资产，并计划在未来某个时间出售的情况。

变量说明

- F_1：建立对冲时（卖出期货时）的期货价格
- F_2：出售资产时（平仓期货时）的期货价格
- S_2：实际出售资产时的现货价格
- $b_2 = S_2 - F_2$：出售时的基差

对冲机制分析

1. 资产销售收入

直接出售资产获得的收入为 S_2

2. 期货头寸盈亏

- 期初：卖出期货（空头），价格为 F_1

- 期末：买入期货平仓，价格为 F_2
- 期货盈利 = $F_1 - F_2$（价格下跌时获利）

3. 净收入计算

$$净收入 = S_2 + (F_1 - F_2) = F_1 + b_2 \tag{1.1}$$

假设一个农民计划 **3** 个月后出售小麦：

时间点 **1**（建立对冲）：

- 当前小麦期货价格 $F_1 = 200$ 元/吨
- 操作：卖出期货合约

时间点 **2**（出售小麦）：

- 现货价格 $S_2 = 180$ 元/吨（下跌了）
- 期货价格 $F_2 = 182$ 元/吨
- 基差 $b_2 = 180 - 182 = -2$ 元/吨

计算结果：

- 现货收入：180 元/吨
- 期货盈利：$200 - 182 = 18$ 元/吨
- 净收入：$180 + 18 = 198 = 200 + (-2)$ 元/吨

通过对冲，农民将收入锁定在约 200 元/吨的水平，有效规避了价格下跌的风险。

空头对冲与多头对冲对比

对比项	空头对冲	多头对冲
期货操作	卖出期货	买入期货
保护目标	防止价格下跌	防止价格上涨
适用情况	未来要出售资产	未来要购买资产
净结果	$F_1 + b_2$	$F_1 + b_2$

两种对冲的净结果形式相同，但经济含义相反：空头对冲锁定销售收入，多头对冲锁定购买成本。

1.2 最优对冲比率

概念定义

最优对冲比率是指为了最小化对冲组合的风险，应该对冲的风险敞口比例。它告诉我们：对于每一单位的现货头寸，应该使用多少单位的期货合约进行对冲。

公式推导

最优对冲比率的公式为：

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{1.2}$$

其中：

- h^*：最优对冲比率
- σ_S：现货价格变化 ΔS 的标准差
- σ_F：期货价格变化 ΔF 的标准差
- ρ：ΔS 和 ΔF 之间的相关系数

推导原理

最优对冲比率通过最小化对冲组合的方差得出。设对冲组合的价值变化为：

$$\Delta V = \Delta S - h\Delta F \tag{1.3}$$

对冲组合的方差为：

$$\mathrm{Var}(\Delta V) = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F \tag{1.4}$$

对 h 求导并令其等于零：

$$\frac{\partial \mathrm{Var}(\Delta V)}{\partial h} = 2h\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_F = 0 \tag{1.5}$$

解得最优对冲比率：

$$h^* = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{1.6}$$

经济含义

1. 完美相关情况（$\rho = 1$）

- $h^* = \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$
- 对冲比率仅取决于波动率比率
- 如果期货价格波动是现货的 2 倍，则只需 0.5 单位期货对冲 1 单位现货

2. 不完全相关情况（$0 < \rho < 1$）

- 需要调整对冲比率
- 相关性越低，最优对冲比率越小
- 反映了期货不能完全对冲现货风险的事实

实际应用示例

示例 **1**：股票组合对冲

假设投资者持有某股票组合，计划使用股指期货对冲：

- 股票组合日收益率标准差：$\sigma_S = 2\%$
- 股指期货日收益率标准差：$\sigma_F = 1.5\%$
- 相关系数：$\rho = 0.9$

最优对冲比率：

$$h^* = 0.9 \times \frac{2\%}{1.5\%} = 1.2 \tag{1.7}$$

这意味着每 100 万元的股票组合，需要卖出价值 120 万元的股指期货。

示例 **2**：外汇风险对冲

某出口企业需要对冲美元收入：

- 美元现汇汇率波动率：$\sigma_S = 0.5\%$
- 美元期货汇率波动率：$\sigma_F = 0.48\%$
- 相关系数：$\rho = 0.95$

最优对冲比率：

$$h^* = 0.95 \times \frac{0.5\%}{0.48\%} = 0.99 \tag{1.8}$$

几乎是 1:1 的对冲比率。

实践考虑因素

1. 参数估计

- 使用历史数据估计 σ_S、σ_F 和 ρ
- 选择合适的时间窗口（如 30 天、60 天或 90 天）
- 考虑参数的时变性

2. 合约规格

- 期货合约有标准化的规格
- 实际对冲比率需要四舍五入到整数合约
- 可能存在剩余风险敞口

3. 动态调整

- 市场条件变化时，最优对冲比率也会变化
- 需要定期重新计算和调整
- 权衡调整成本和对冲效果

对冲效果评估

使用最优对冲比率后，对冲组合的最小方差为：

$$\mathrm{Var}(\Delta V)_{min} = \sigma_S^2(1-\rho^2) \tag{1.9}$$

对冲有效性（Hedge Effectiveness）可以表示为：

$$HE = \rho^2 \tag{1.10}$$

ρ^2 也称为 R-squared，表示期货价格变化能够解释现货价格变化的比例。例如，如果 $\rho = 0.9$，则 $HE = 0.81$，表示 81% 的现货价格风险可以通过期货对冲消除。

1.3 Beta 方法与 Rho 方法的数学关系与转换

1.3.1 基本定义与核心公式

Beta 系数定义：

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(R_p, R_m)}{\mathrm{Var}(R_m)} = \rho_{p,m} \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \tag{1.11}$$

最优对冲比率（**Rho** 方法）：

$$h^* = \rho_{S,F} \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{1.12}$$

其中：

- $\rho_{p,m}$：投资组合与市场指数的相关系数
- σ_p, σ_m：投资组合和市场指数的标准差
- $\rho_{S,F}$：现货与期货的相关系数
- σ_S, σ_F：现货和期货的标准差

1.3.2 数学等价性证明

从协方差的定义出发：

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(R_p, R_m)}{\mathrm{Var}(R_m)} = \frac{\rho_{p,m} \cdot \sigma_p \cdot \sigma_m}{\sigma_m^2} = \rho_{p,m} \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \tag{1.13}$$

对比两个公式结构，可得：

$$\boxed{\beta = h^* \quad \text{当将股票组合视为" 现货"，股指期货视为" 期货" 时}} \tag{1.14}$$

1.3.3 应用场景对比

特征	**Beta** 方法	**Rho** 方法
应用场景	股票组合 vs 股指	商品现货 vs 期货
风险度量	系统性风险敞口	总体价格风险
计算重点	相对市场的敏感度	相关性与波动率

1.3.4 特殊情况分析

1. 完美相关（$\rho = 1$）：

$$\beta = h^* = \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \tag{1.15}$$

2. 相同波动率（$\sigma_p = \sigma_m$）：

$$\beta = h^* = \rho \tag{1.16}$$

3. 指数基金（$\rho \approx 1, \sigma_p \approx \sigma_m$）：

$$\beta = h^* \approx 1 \tag{1.17}$$

1.3.5 实践意义

两种方法的数学等价性揭示了对冲的统一本质：寻找最小化风险的最优比率。

- 对于股票组合对冲，两种方法理论上等价
- 选择依据：数据可得性和计算便利性
- 交叉对冲时必须使用 Rho 方法

核心结论：Beta 本质上是 Rho 方法在股票市场的特殊应用，当满足转换条件时，两者可以相互转换。

第 2 章 Interest Rate

2.1 Rates

Fed Fund Rate： unsecured interbank overnight rate of interest allows banks to adjust cash on deposit with fed at the end of the day

Repo Rate: FI owns security agree to sell them for X and buy them back in the future for a slightly higher price Y. Repo rate is Y -X

Treasury Rate : Rate on instrument issused by a governmnet in its own currency

LIBOR : rate of interest at which AA bank can borrow money on an unsecured basis from another bank

SOFR（Secured Overnight Financing Rate）是美国新的基准利率，用于替代 LIBOR。

$$\text{SOFR} = \text{美国国债回购市场隔夜借贷成本的交易量加权中位数} \tag{2.1}$$

核心特征：

- 有担保：以美国国债为抵押
- 基于实际交易：非银行报价
- 交易量巨大：约 1 万亿美元/天
- 接近无风险利率：无信用风险

SOFR 的期限结构

由于 SOFR 是隔夜利率，需要构建期限结构：

1. 简单平均 **SOFR**：

$$\text{Simple SOFR} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\text{SOFR}_i \tag{2.2}$$

2. 复利 **SOFR**：

$$\text{Compounded SOFR} = \left[\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{\text{SOFR}_i \times d_i}{360}\right)\right] - 1 \tag{2.3}$$

3. 期限 **SOFR**（Term SOFR）：基于 SOFR 衍生品市场的前瞻性利率

1. 浮动利率贷款

$$\text{贷款利率} = \text{Term SOFR} + \text{信用利差} \tag{2.4}$$

2. 利率衍生品

- SOFR 期货
- SOFR 利率互换
- SOFR 期权

3. 浮息债券

$$\text{票息} = \text{Compounded SOFR} + \text{利差} \tag{2.5}$$

关键时间点：美元 LIBOR 已于 2023 年 6 月 30 日完全停止发布，SOFR 成为美国主要基准利率。

表 2.1: 美国主要基准利率对比

特征	Fed Funds Rate	SOFR	Treasury Rate
全称	Federal Funds Rate（联邦基金利率）	Secured Overnight Financing Rate	Treasury Yield（国债收益率）
定义	银行间隔夜拆借利率	国债回购隔夜利率	美国国债收益率
抵押物	无抵押	美国国债	不适用（直接购买）
期限	隔夜	隔夜	多种（1 个月-30 年）
市场参与者	商业银行	银行、对冲基金、政府机构等	全球投资者
交易量	约 500 亿美元/天	约 1 万亿美元/天	约 6000 亿美元/天
利率类型	政策利率/市场利率	市场利率	市场利率
设定方式	FOMC 设定目标区间 市场交易形成	市场交易决定（加权中位数）	拍卖/二级市场交易决定
风险特征	银行信用风险	接近无风险	无风险
用途	货币政策工具 短期融资基准	贷款/衍生品基准 LIBOR 替代品	无风险收益基准 资产定价基础
波动性	低（政策引导）	中等	高（期限越长越高）
发布频率	每日	每日	实时
发布机构	纽约联储	纽约联储	美国财政部
典型水平 **(2024 年)**	5.25%-5.50%	5.30%	1 个月：5.40% 10 年：4.20%
相互关系	Fed Funds Rate ≤ SOFR ≈ 短期 Treasury Rate		

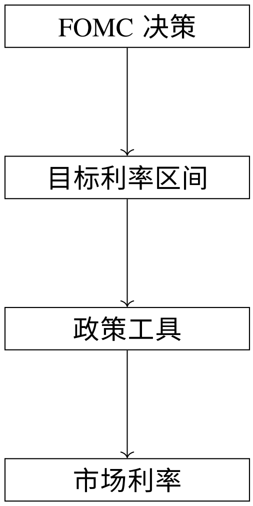
表 2.2: 三种利率的应用场景对比

应用领域	**Fed Funds Rate**	**SOFR**	**Treasury Rate**
货币政策	主要政策工具	政策传导指标	政策效果反映
银行业务	准备金管理 同业拆借定价	回购融资成本 贷款定价基准	资产配置基准 债券投资收益
衍生品	Fed Funds 期货	SOFR 期货/互换 利率期权	国债期货 利率互换基准
企业融资	间接影响 （通过银行）	浮动利率贷款 直接挂钩	债券定价基准 信用利差计算
风险管理	流动性风险指标	利率风险对冲 基准利率风险	无风险利率 久期管理

2.2 联邦基金利率的货币政策传导机制

2.2.1 政策工具体系

美联储通过联邦基金利率（Fed Funds Rate）实施货币政策的核心机制：



2.2.2 利率走廊机制

美联储通过" 利率走廊" 系统引导市场利率：

$$\text{IORB} \geq \text{Fed Funds Rate} \geq \text{ON RRP} \tag{2.6}$$

其中：

- **IORB**（Interest on Reserve Balances）：准备金利率，构成利率上限
- **ON RRP**（Overnight Reverse Repo）：隔夜逆回购利率，构成利率下限
- **Fed Funds Rate**：在走廊内波动

表 2.3: 利率走廊工具

工具	当前水平	作用	参与者
IORB	5.40%	利率上限	银行
ON RRP	5.30%	利率下限	货币市场基金等
Fed Funds 目标	5.25%-5.50%	政策信号	银行间市场

2.2.3 传导路径

2.2.3.1 直接传导

1. 银行间市场

$$\text{Fed Funds Rate} \uparrow \Rightarrow \text{银行资金成本} \uparrow \tag{2.7}$$

2. 货币市场

$$\text{Fed Funds Rate} \rightarrow \text{SOFR} \rightarrow \text{CP/CD 利率} \tag{2.8}$$

3. 存贷款利率

$$\text{Prime Rate} = \text{Fed Funds Rate} + 3\% \tag{2.9}$$

2.2.3.2 间接传导

表 2.4: 货币政策传导渠道

渠道	传导机制	经济影响
利率渠道	Fed Funds $\uparrow \rightarrow$ 市场利率 $\uparrow$	投资下降、消费减少
信贷渠道	银行成本 $\uparrow \rightarrow$ 贷款供给 $\downarrow$	信贷紧缩、经济放缓
汇率渠道	利率 $\uparrow \rightarrow$ 美元升值	出口下降、进口增加
资产价格	利率 $\uparrow \rightarrow$ 股票/房价 $\downarrow$	财富效应减弱
预期渠道	政策信号 $\rightarrow$ 通胀预期 $\downarrow$	消费和投资决策改变

2.2.4 政策实施工具

2.2.4.1 公开市场操作

- 回购操作（**Repo**）：注入流动性，压低利率
- 逆回购操作（**Reverse Repo**）：回收流动性，推高利率

$$\text{流动性过剩} \Rightarrow \text{Fed Funds Rate} < \text{目标下限} \Rightarrow \text{逆回购操作} \tag{2.10}$$

2.2.4.2 常备便利工具

工具	利率	功能
贴现窗口（Primary Credit）	Fed Funds + 0.1%	紧急流动性支持
常备回购便利（SRF）	Fed Funds + 0.25%	市场流动性保障

2.2.5 政策效果评估

2.2.5.1 泰勒规则

美联储的利率决策可用泰勒规则近似：

$$r_t = r^* + \pi_t + 0.5(\pi_t - \pi^*) + 0.5(y_t - y^*) \tag{2.11}$$

其中：

- r_t：联邦基金利率
- r^*：中性实际利率（约 0.5%）
- π_t：当前通胀率
- π^*：目标通胀率（2%）
- $y_t - y^*$：产出缺口

2.2.5.2 政策时滞

2.2.6 案例分析：2022-2024 加息周期

政策效果：

- 通胀从 9.1% 峰值回落至 3% 附近
- 失业率仅小幅上升至 4%
- 实现了" 软着陆" 目标

表 2.5: 货币政策时滞

类型	时长	说明
认知时滞	1-3 个月	识别经济问题
决策时滞	1-2 个月	FOMC 会议周期
实施时滞	即时	利率调整立即生效
影响时滞	6-18 个月	对实体经济的影响

表 2.6: 美联储加息路径与经济影响

时期	**Fed Funds**	**CPI**	政策意图
2022 年 3 月	0-0.25%	8.5%	开始紧缩
2022 年 12 月	4.25-4.50%	6.5%	快速加息
2023 年 7 月	5.25-5.50%	3.2%	接近终点
2024 年（预期）	5.25-5.50%	2.5%	维持限制性

2.2.7 前瞻性指引

美联储通过以下方式增强政策效果：

1. 点阵图：FOMC 成员利率预期
2. 经济预测：GDP、通胀、失业率预测
3. 政策声明：会后声明措辞变化
4. 主席讲话：解释政策意图

$$\text{市场预期} = f(\text{点阵图}, \text{经济数据}, \text{Fed 沟通}) \tag{2.12}$$

2.2.8 总结

联邦基金利率作为货币政策核心工具：

- 锚定作用：引导整个利率体系
- 信号功能：传递政策立场
- 传导机制：通过多渠道影响经济
- 灵活调整：应对经济周期变化

2.3 利率转换公式详解

2.3.1 基本定义

在金融计算中，同一个利率可以用不同的复利方式表示。主要包括：

- R_c：连续复利利率（Continuously Compounded Rate）
- R_m：年复利 m 次的利率（Rate with m Compounding Periods per Year）

2.3.2 核心原理

两种利率表示方式必须产生相同的终值：

$$\text{终值} = P \cdot e^{R_c \cdot t} = P \cdot \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{m \cdot t} \tag{2.13}$$

其中：

- P：本金
- t：时间（年）

- m：每年复利次数

2.3.3 转换公式推导

2.3.3.1 从离散复利到连续复利

由等值条件：

$$e^{R_c} = \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^m \tag{2.14}$$

两边取自然对数：

$$\boxed{R_c = m \ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)} \tag{2.15}$$

2.3.3.2 从连续复利到离散复利

由等值条件：

$$\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^m = e^{R_c} \tag{2.16}$$

解出 R_m：

$$\boxed{R_m = m\left(e^{R_c/m} - 1\right)} \tag{2.17}$$

2.3.4 常见复利频率

表 2.7: 常见复利频率及其对应的 m 值

复利频率	m 值	说明
年复利（Annual）	1	每年复利一次
半年复利（Semi-annual）	2	每半年复利一次
季度复利（Quarterly）	4	每季度复利一次
月复利（Monthly）	12	每月复利一次
日复利（Daily）	365	每日复利一次
连续复利（Continuous）	∞	连续复利

2.3.5 数值示例

例 **1**：将年利率 12%（月复利）转换为连续复利利率

给定：$R_{12} = 0.12$，$m = 12$

$$R_c = 12 \ln\left(1 + \frac{0.12}{12}\right) = 0.1194 \text{ 或} 11.94 \tag{2.18}$$

例 **2**：将连续复利 10% 转换为季度复利

给定：$R_c = 0.10$，$m = 4$

$$R_4 = 4\left(e^{0.10/4} - 1\right) = 0.1013 \text{ 或} 10.13 \tag{2.19}$$

2.3.6 转换表

表 2.8: 10% 名义利率的不同复利方式等值转换

复利方式	名义利率	有效年利率
年复利（$m = 1$）	10.00%	10.00%
半年复利（$m = 2$）	10.00%	10.25%
季度复利（$m = 4$）	10.00%	10.38%
月复利（$m = 12$）	10.00%	10.47%
日复利（$m = 365$）	10.00%	10.52%
连续复利（$m = \infty$）	10.00%	10.52%

2.3.7 特殊性质

极限关系

当 $m \to \infty$ 时：

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^m = e^{R_c} \tag{2.20}$$

这就是连续复利的数学定义。

泰勒展开

对于小的 $\frac{R_m}{m}$：

$$R_c \approx R_m - \frac{R_m^2}{2m} + \frac{R_m^3}{3m^2} - \cdots \tag{2.21}$$

当 R_m 较小时，$R_c \approx R_m$。

债券定价:

许多债券模型使用连续复利便于数学处理：

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-R_c t_i} + F e^{-R_c T} \tag{2.22}$$

2.4 Yiled

Bond Yield: The bond Yield is discount rate that makes the pv = market price of bond

Par Yield: the par yield for a certain maturity is the coupon rate that causes the bond price = face value

平价收益率（Par Yield）是使债券价格等于面值（平价发行）的票息率。对于平价债券：

- 债券价格 = 面值 = 100
- 票息率 = 到期收益率

2.4.1 平价收益率公式推导

2.4.1.1 关键变量定义

- c：年票息率（平价收益率）
- m：每年付息次数
- n：总付息次数
- d：\$1 面值在到期日的现值（贴现因子）
- A：每个付息日 \$1 年金的现值

2.4.1.2 债券定价公式

平价债券的定价条件：

$$100 = \frac{c}{m} \times 100 \times A + 100 \times d \tag{2.23}$$

其中：

- $\frac{c}{m} \times 100$：每期票息支付
- A：年金现值因子
- $100 \times d$：本金的现值

2.4.1.3 求解平价收益率

整理上述等式：

$$100 = \frac{100c}{m} \times A + 100d \tag{2.24}$$

$$1 = \frac{c}{m} \times A + d \tag{2.25}$$

$$1 - d = \frac{c}{m} \times A \tag{2.26}$$

$$c = \frac{(1-d)m}{A} \tag{2.27}$$

因此，平价收益率公式为：

$$\boxed{c = \frac{(100 - 100d)m}{A}} \tag{2.28}$$

2.4.2 现值因子的计算

2.4.2.1 贴现因子 d

$$d = \frac{1}{(1 + y/m)^{mn}} \tag{2.29}$$

其中 y 是相应期限的零息票收益率。

2.4.2.2 年金现值因子 A

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 + y_i/m)^i} \tag{2.30}$$

对于平坦的收益率曲线：

$$A = \frac{1 - (1 + y/m)^{-n}}{y/m} \tag{2.31}$$

2.4.3 数值示例

根据题目给出的数据：

- $m = 2$（半年付息）
- $d = 0.87284$
- $A = 3.70027$

计算平价收益率：

$$c = \frac{(100 - 100 \times 0.87284) \times 2}{3.70027} \tag{2.32}$$
$$= \frac{(100 - 87.284) \times 2}{3.70027} \tag{2.33}$$
$$= \frac{12.716 \times 2}{3.70027} \tag{2.34}$$
$$= \frac{25.432}{3.70027} \tag{2.35}$$
$$= 6.873\% \tag{2.36}$$

2.4.4 扩展分析

2.4.4.1 与零息票收益率的关系

平价收益率是零息票收益率的加权平均：

$$c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{2.37}$$

其中 w_i 是各期现金流的现值权重。

2.4.4.2 收益率曲线形状的影响

表 2.9: 收益率曲线形状对平价收益率的影响

曲线形状	平价收益率	说明
向上倾斜	< 长期零息票利率	早期现金流权重大
平坦	= 零息票利率	所有期限利率相同
向下倾斜	> 长期零息票利率	早期高利率影响大

2.5 常见的收益率（Yield）类型详解

2.5.1 收益率分类概览

表 2.10: 常见收益率类型一览

类别	收益率类型	主要用途
基础收益率	名义收益率	票息与面值比率
	当前收益率	票息与市价比率
	到期收益率 (YTM)	内部收益率
	赎回收益率 (YTC)	考虑赎回条款
市场收益率	零息票收益率	纯贴现收益率
	平价收益率	平价发行票息率
	远期收益率	未来期间收益率
风险调整收益率	信用利差	信用风险补偿
	期权调整利差 (OAS)	剔除期权价值
	Z-利差	相对零息票曲线
其他收益率	实际收益率	剔除通胀影响
	税后收益率	考虑税收影响

2.5.2 基础收益率详解

1. 名义收益率（**Nominal Yield / Coupon Yield**）

$$\text{名义收益率} = \frac{\text{年票息}}{\text{面值}} \times 100\% \tag{2.38}$$

特点：

- 固定不变，等于票息率
- 不考虑债券市场价格
- 仅反映票息支付水平

2. 当前收益率（**Current Yield**）

$$\text{当前收益率} = \frac{\text{年票息}}{\text{市场价格}} \times 100\% \tag{2.39}$$

示例：面值 \$1000，票息 6%，市价 \$950

$$\text{当前收益率} = \frac{60}{950} = 6.32\% \tag{2.40}$$

3. 到期收益率（**Yield to Maturity, YTM**）

债券价格等式：

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{F}{(1+y)^n} \tag{2.41}$$

其中 y 即为 YTM，需通过数值方法求解。

特点：

- 最常用的收益率指标
- 考虑所有现金流
- 假设票息可按 YTM 再投资

4. 赎回收益率（**Yield to Call, YTC**）

$$P = \sum_{t=1}^{n_c} \frac{C}{(1+y_c)^t} + \frac{\text{Call Price}}{(1+y_c)^{n_c}} \tag{2.42}$$

其中 n_c 是到赎回日的期数。

2.5.3 市场收益率曲线

1. 零息票收益率（**Zero-Coupon Yield / Spot Rate**）

$$P = \frac{F}{(1+z_n)^n} \tag{2.43}$$

因此：

$$z_n = \left(\frac{F}{P}\right)^{1/n} - 1 \tag{2.44}$$

应用：

- 贴现因子计算
- 衍生品定价基础
- 收益率曲线构建

2. 平价收益率（**Par Yield**）

使债券平价发行的票息率：

$$c = \frac{1 - d_n}{\sum_{i=1}^{n} d_i} \tag{2.45}$$

其中 d_i 是第 i 期的贴现因子。

3. 远期收益率（**Forward Rate**）

从 t_1 到 t_2 的远期利率：

$$f_{t_1,t_2} = \left[\frac{(1 + z_{t_2})^{t_2}}{(1 + z_{t_1})^{t_1}}\right]^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1 \tag{2.46}$$

2.5.4 利差类收益率

1. 信用利差（**Credit Spread**）

$$\text{信用利差} = \text{公司债 YTM} - \text{国债 YTM} \tag{2.47}$$

表 2.11: 典型信用利差水平

信用评级	利差范围 (bps)
AAA	20-50
AA	40-80
A	60-120
BBB	100-250
BB (高收益)	300-500
B	500-800

2. Z-利差（**Zero-Volatility Spread**）

使债券价格等于市价的平行移动利差：

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1 + z_t + \text{Z-spread})^t} \tag{2.48}$$

3. 期权调整利差（**Option-Adjusted Spread, OAS**）

$$\text{OAS} = \text{Z-spread} - \text{期权成本} \tag{2.49}$$

用于含权债券的真实信用利差评估。

2.5.5 特殊收益率指标

1. 实际收益率（**Real Yield**）

费雪方程：

$$(1 + r_{nominal}) = (1 + r_{real})(1 + \pi) \tag{2.50}$$

近似公式：

$$r_{real} \approx r_{nominal} - \pi \tag{2.51}$$

2. 税后收益率（**After-Tax Yield**）

$$\text{税后收益率} = \text{税前收益率} \times (1 - \text{税率}) \tag{2.52}$$

3. 持有期收益率（**Holding Period Return**）

$$HPR = \frac{P_1 - P_0 + 票息}{P_0} \tag{2.53}$$

2.5.6 收益率之间的关系

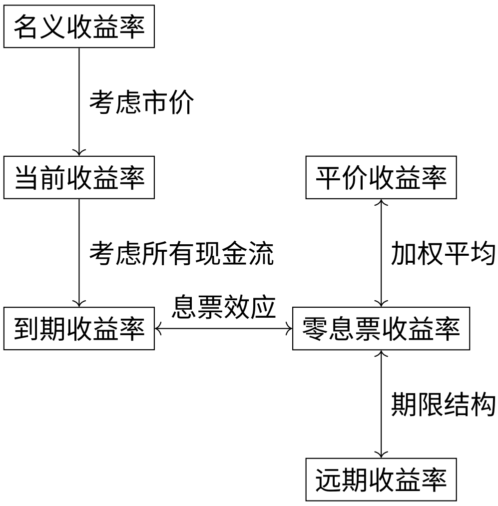


图 2.1: 各类收益率之间的关系

2.5.7 实务应用指南

表 2.12: 不同场景下的收益率选择

应用场景	推荐收益率	原因
债券比较	YTM	综合考虑所有现金流
新债发行	平价收益率	确定合适票息率
衍生品定价	零息票收益率	精确贴现
信用分析	OAS	剔除期权影响
投资决策	税后实际收益率	考虑税收和通胀
短期交易	持有期收益率	反映实际收益

2.6 Bootstrap 方法详解

概述

Bootstrap 方法在金融中主要指从市场可观察的债券价格中逐步推导出零息票收益率曲线（Zero-Coupon Yield Curve）或贴现因子的过程。这是构建收益率曲线的核心技术之一。

基本原理

核心思想

1. 从短期债券开始，逐步推导长期利率
2. 利用已知的短期利率来剥离长期债券中的票息影响
3. 递归地构建完整的期限结构

数学基础

债券价格可表示为：

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1 + z_t)^t} \tag{2.54}$$

其中：

- P：债券价格
- CF_t：第 t 期现金流
- z_t：第 t 期的零息票利率（待求）

2.6.1 Bootstrap 步骤详解

步骤 1：从最短期债券开始

对于 1 年期零息票债券：

$$P_1 = \frac{100}{1+z_1} \Rightarrow z_1 = \frac{100}{P_1} - 1 \tag{2.55}$$

步骤 2：求解 2 年期零息票利率

对于 2 年期付息债券（假设年付息）：

$$P_2 = \frac{C}{1+z_1} + \frac{100+C}{(1+z_2)^2} \tag{2.56}$$

已知 z_1，可求解 z_2：

$$z_2 = \left(\frac{100+C}{P_2 - \frac{C}{1+z_1}}\right)^{1/2} - 1 \tag{2.57}$$

步骤 3：递归求解更长期限

对于 n 年期债券：

$$P_n = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C}{(1+z_t)^t} + \frac{100+C}{(1+z_n)^n} \tag{2.58}$$

求解 z_n：

$$z_n = \left(\frac{100+C}{P_n - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C}{(1+z_t)^t}}\right)^{1/n} - 1 \tag{2.59}$$

2.6.2 具体算例

表 2.13: 市场债券数据

期限 (年)	票息率	价格	付息频率
0.5	0%	97.50	-
1.0	0%	95.00	-
1.5	3%	98.50	半年
2.0	4%	99.00	半年

计算过程：

1. 6 个月零息票利率：

$$z_{0.5} = \left(\frac{100}{97.50}\right)^2 - 1 = 5.13\% \tag{2.60}$$

2. 1 年零息票利率：

$$z_1 = \frac{100}{95.00} - 1 = 5.26\% \tag{2.61}$$

3. 1.5 年零息票利率：

$$98.50 = \frac{1.5}{1.0256^{0.5}} + \frac{1.5}{1.0526^1} + \frac{101.5}{(1+z_{1.5})^{1.5}} \tag{2.62}$$

$$98.50 = 1.463 + 1.425 + \frac{101.5}{(1+z_{1.5})^{1.5}} \tag{2.63}$$

$$z_{1.5} = 5.35\% \tag{2.64}$$

4. 2 年零息票利率：类似计算得 $z_2 = 5.42\%$

2.6.3 与其他方法的比较

表 2.14: 收益率曲线构建方法比较

方法	精确性	平滑性	复杂度	稳健性
Bootstrap	高	低	低	中
样条插值	中	高	中	高
Nelson-Siegel	低	高	中	高
主成分分析	中	高	高	高

2.7 Forward Rate 与瞬时远期利率的推导与解释

2.7.1 Forward Rate（远期利率）公式

假设市场中存在连续复利（continuously compounded）下的零息利率 R_1 与 R_2，分别对应到期时间 T_1 与 T_2，则从 T_1 到 T_2 的远期利率 f_{T_1,T_2} 由无套利原理给出：

$$f_{T_1,T_2} = \frac{R_2T_2 - R_1T_1}{T_2 - T_1} \tag{2.65}$$

推导：
由于连续复利下未来的终值为：

$$e^{R_2T_2} = e^{R_1T_1} \cdot e^{f_{T_1,T_2}(T_2-T_1)}$$

两边取自然对数：

$$R_2T_2 = R_1T_1 + f_{T_1,T_2}(T_2 - T_1)$$

解得：

$$f_{T_1,T_2} = \frac{R_2T_2 - R_1T_1}{T_2 - T_1}$$

该公式表明，从当前时点看，若希望在 $[T_1, T_2]$ 时间段内签订借贷合同，则市场隐含的利率水平为 f_{T_1,T_2}。

形象理解：将 R_1T_1 和 R_2T_2 理解为“总高度”，该远期利率即为“在 $[T_1, T_2]$ 段的平均坡度”。

2.7.2 瞬时远期利率（Instantaneous Forward Rate）

当时间间隔趋近于零，即 $T_2 \to T_1$ 时，我们定义从某个未来时间点 T 开始，极短时间段内适用的瞬时远期利率 $f(T)$：

$$f(T) = R(T) + T \cdot \frac{\partial R}{\partial T} \tag{2.66}$$

其中，$R(T)$ 表示当前观察到的 T 年期连续复利零息利率。
推导：
从一般远期利率公式出发，令 $T_1 = T$，$T_2 = T + \Delta T$，有：

$$f(T, T + \Delta T) = \frac{R(T + \Delta T)(T + \Delta T) - R(T)T}{\Delta T}$$

取极限：

$$f(T)=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{R(T+\Delta T)(T+\Delta T)-R(T)T}{\Delta T}=\frac{d}{dT}[R(T)\cdot T]=R(T)+T\cdot\frac{dR}{dT}$$

直观解释：

瞬时远期利率表示"从时间 T 时刻开始、持续一个无限小时间段的借贷利率"。它等价于 $R(T)\cdot T$ 的导数，体现了瞬时变化率的思想。

2.7.3 两种远期利率的对比

内容	远期利率 f_{T_1,T_2}	瞬时远期利率 $f(T)$
定义区间	T_1 到 T_2 之间的平均利率	T 时刻之后瞬间的利率
数学表达	$\frac{R_2T_2-R_1T_1}{T_2-T_1}$	$R(T)+T\cdot\frac{dR}{dT}$
推导方式	无套利 + 等价收益公式	极限思想（导数）
应用场景	FRA、IRS 定价、期限结构拟合	HJM/CIR 等利率建模、forward curve 构建

表 2.15: 远期利率与瞬时远期利率的对比

2.7.4 收益率曲线斜率与各类利率关系

收益率曲线（Yield Curve）展示了不同期限的利率结构形态。在实际分析中，主要考察三类利率的相对大小关系：

- **Forward Rate**：远期利率，表示从未来 T_1 到 T_2 的隐含利率。
- **Zero Rate**：零息利率，从当前时点到某一期限的连续复利年化收益。
- **Par Yield**：票面收益率，使得债券价格等于面值时的等效利率。

当收益率曲线呈不同斜率形状时，这三种利率会呈现出典型的相对大小关系：

上升型收益率曲线（**Upward Sloping Yield Curve**）：

此时长期利率高于短期利率，通常出现在经济扩张或市场预期加息时期。

$$\text{Forward Rate} > \text{Zero Rate} > \text{Par Yield} \tag{2.67}$$

- 市场预期未来利率上升，导致远期利率比当前零息利率更高；
- 零息利率是从现在到某期限的平均利率；
- 票面利率（Par Yield）以均值贴现现金流，因此最小。

下降型收益率曲线（**Downward Sloping Yield Curve**）：

此时短期利率高于长期利率，常见于经济衰退预期或宽松货币政策下。

$$\text{Par Yield} > \text{Zero Rate} > \text{Forward Rate} \tag{2.68}$$

- 市场预期未来利率下降，forward rate 最低；
- Zero Rate 折中考虑了短期高利率与长期低利率；
- Par Yield 权重偏重短期高利率，因此最高。

直观解释：

可将三类利率类比为骑车上坡/下坡的情形：

- **Par Yield**：整体平均骑行速度（所有现金流平均收益率）；
- **Zero Rate**：从起点到终点的平均坡度；
- **Forward Rate**：你站在某点，看未来路段的瞬时坡度（隐含未来利率）。

应用启示：

- 利率相对关系有助于判断市场对未来利率的隐含预期；
- 可用于构建期限套利策略，如利用 forward rate 高于 spot rate 的期限结构套利；
- 在利率建模（如 HJM、LMM）中，用于构建 forward curve 的形状约束。

第 3 章 Duration

3.1 Key Duration Relationship

Duration leads the key relationship between bond price and time 债券久期关系 (Bond Duration Relationship)

3.1.1 基本久期

久期是衡量债券价格对收益率变化敏感性的重要指标。其基本关系式为：

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y \tag{3.1}$$

其中：

- ΔB = 债券价格变化
- B = 债券当前价格
- D = 久期
- Δy = 收益率变化

关键要点：

- 久期衡量了债券价格对收益率变化的敏感程度
- 负号表示价格与收益率反向变动
- 久期越大，价格对收益率变化越敏感

3.1.2 修正久期 (Modified Duration)

当收益率按复利计算时，需要使用修正久期：

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1 + y/m} \tag{3.2}$$

修正久期定义为：

$$\text{修正久期} = \frac{D}{1 + y/m} \tag{3.3}$$

其中：

- m = 每年复利次数
- y = 年收益率
- D = 麦考利久期 (Macaulay Duration)

麦考利久期的定义

麦考利久期是债券现金流的加权平均到期时间：

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t \cdot CF_t}{(1+y/m)^{tm}}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+y/m)^{tm}}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot PV(CF_t)}{B} \tag{3.4}$$

其中：

- CF_t = 第 t 期现金流
- $PV(CF_t)$ = 第 t 期现金流现值
- B = 债券当前价格

修正久期的推导

债券价格对收益率的一阶导数：

$$\frac{dB}{dy} = -\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{n}\frac{t \cdot CF_t}{(1+y/m)^{tm+1}} \tag{3.5}$$

整理得到：

$$\frac{dB}{dy} = -\frac{B \cdot D_{Mac}}{1+y/m} \tag{3.6}$$

因此修正久期定义为：

$$D_{Mod} = \frac{D_{Mac}}{1+y/m} \tag{3.7}$$

价格敏感性关系：

$$\frac{\Delta B}{B} = -D_{Mod} \cdot \Delta y \tag{3.8}$$

3.1.3 两种久期的关系与区别

3.1.3.1 数学关系

$$D_{Mod} = \frac{D_{Mac}}{1+y/m} \tag{3.9}$$

其中：

- D_{Mac} = 麦考利久期
- D_{Mod} = 修正久期
- y = 年收益率
- m = 每年复利次数

3.1.3.2 关键区别

特征	麦考利久期	修正久期
定义	现金流加权平均时间	价格敏感性指标
单位	年	百分比变化/收益率变化
用途	理论分析	风险管理
数值关系	$D_{Mac} > D_{Mod}$	$D_{Mod} < D_{Mac}$

3.1.3.3 实际影响因素

调整因子 $\frac{1}{1+y/m}$ 的影响：

- 收益率水平：收益率越高，修正久期相对麦考利久期的折扣越大
- 复利频率：复利次数越高，调整幅度越小
- 数值示例：
  - 年收益率 6%，年复利 1 次：调整因子 = $\frac{1}{1.06} = 0.943$
  - 年收益率 6%，半年复利 2 次：调整因子 = $\frac{1}{1.03} = 0.971$
  - 年收益率 6%，连续复利：调整因子 = $e^{-0.06} = 0.942$

3.1.4 实际应用

3.1.4.1 风险管理应用

- 投资组合风险评估：使用修正久期计算组合的利率风险暴露
- 对冲策略设计：根据修正久期匹配资产负债的利率敏感性
- **VaR** 计算：修正久期是利率 VaR 模型的核心参数

3.1.4.2 投资决策应用

- 利率预期管理：
  - 预期利率上升 → 选择低修正久期债券
  - 预期利率下降 → 选择高修正久期债券
- 免疫策略：匹配资产和负债的修正久期

3.1.4.3 数值示例

假设一个债券的麦考利久期为 5 年，年收益率为 4%，半年付息：

$$D_{Mod} = \frac{D_{Mac}}{1 + y/m} \tag{3.10}$$

$$= \frac{5}{1 + 0.04/2} \tag{3.11}$$

$$= \frac{5}{1.02} \tag{3.12}$$

$$= 4.902\text{年} \tag{3.13}$$

如果收益率上升 100 个基点（1%），债券价格预期变化：

$$\frac{\Delta B}{B} = -4.902 \times 0.01 = -4.902\% \tag{3.14}$$

3.2 债券凸性 (Bond Convexity)

3.2.1 凸性的定义

凸性是衡量债券价格对收益率变化的二阶敏感性指标：

$$C = \frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} c_t t^2 e^{-yt}}{B} \tag{3.15}$$

3.2.2 改进的价格敏感性公式

包含凸性的更准确关系式：

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2 \tag{3.16}$$

其中：

- 第一项：久期效应（线性项）
- 第二项：凸性效应（二次项，总是正数）

3.2.3 凸性的重要性

久期的局限性：久期假设价格与收益率呈线性关系，但实际上债券价格曲线是凸向原点的非线性关系。

凸性的优势：

- 提供下行风险保护
- 增强上行收益潜力
- 收益率下降时的价格上升 > 收益率上升时的价格下降

3.2.4 影响因素

凸性大小受以下因素影响：

- 到期时间越长 → 凸性越大
- 票息率越低 → 凸性越大
- 收益率水平越低 → 凸性越大

3.3 20 年期国债价格变化计算推导

3.3.1 债券基本参数

给定条件：

- 到期时间：$T = 20$ 年
- 收益率：$y = 4.5\% = 0.045$
- 票息率：$c = 4.5\% = 0.045$（假设）
- 面值：$F = \$100$
- 付息频率：$m = 2$（半年付息）
- 收益率变化：$\Delta y = -0.0001$（下降 1BP）

3.3.2 债券定价公式

债券价格的一般公式：

$$B = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1 + y/m)^t} + \frac{F}{(1 + y/m)^n} \tag{3.17}$$

其中：

- $C = \frac{c \cdot F}{m} = \frac{0.045 \times 100}{2} = \$2.25$（每期付息）
- $n = T \times m = 20 \times 2 = 40$（总付息期数）
- $y/m = 0.045/2 = 0.0225$（每期收益率）

3.3.3 麦考利久期计算

麦考利久期定义：

$$D_{Mac} = \frac{1}{B} \sum_{t=1}^{n} \frac{t \cdot C_t}{(1 + y/m)^t} \tag{3.18}$$

其中 C_t 是第 t 期的现金流。

计算过程：

$$D_{Mac} = \frac{1}{B} \left[\sum_{t=1}^{39} \frac{t \cdot 2.25}{(1.0225)^t} + \frac{40 \cdot 102.25}{(1.0225)^{40}} \right] \tag{3.19}$$

3.3.4 修正久期计算

修正久期公式：

$$D_{Mod} = \frac{D_{Mac}}{1 + y/m} = \frac{D_{Mac}}{1 + 0.0225} = \frac{D_{Mac}}{1.0225} \tag{3.20}$$

3.3.5 凸性计算

凸性定义：

$$C = \frac{1}{B} \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1) \cdot C_t}{m^2 \cdot (1 + y/m)^{t+2}} \tag{3.21}$$

简化为：

$$C = \frac{1}{B(1 + y/m)^2} \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1) \cdot C_t}{m^2 \cdot (1 + y/m)^t} \tag{3.22}$$

3.3.6 数值计算结果

通过数值计算得到：

$$B = \$100.00 \tag{3.23}$$

$$D_{Mac} = 13.39\ \text{年} \tag{3.24}$$

$$D_{Mod} = \frac{13.39}{1.0225} = 13.10 \tag{3.25}$$

$$C = 225.09 \tag{3.26}$$

3.3.7 价格变化计算

使用泰勒展开的二阶近似：

$$\frac{\Delta B}{B} = -D_{Mod}\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2 \tag{3.27}$$

代入数值：

$$\frac{\Delta B}{B} = -13.10 \times (-0.0001) + \frac{1}{2} \times 225.09 \times (-0.0001)^2 \tag{3.28}$$

$$= 0.001310 + \frac{1}{2} \times 225.09 \times 0.00000001 \tag{3.29}$$

$$= 0.001310 + 0.000001126 \tag{3.30}$$

$$= 0.001311126 \tag{3.31}$$

3.3.8 最终结果

百分比价格变化：

$$\frac{\Delta B}{B} = 0.1311\% \tag{3.32}$$

美元价格变化：

$$\Delta B = 0.001311126 \times 100 = \$0.1311 \tag{3.33}$$

效应分解：

- 久期效应：0.1310%
- 凸性效应：0.000113%
- 总效应：0.1311%

3.3.9 结论

当 20 年期 4.5% 国债的收益率下降 1 个基点时，债券价格上升约 \$0.1311（按 \$100 面值计算），其中久期效应占主导地位，凸性效应在小幅收益率变化时可忽略不计。

第 4 章 Determination of Forward and Future Price

4.1 期货产品定价

期货定价基于无套利原理：在有效市场中，不应存在无风险套利机会。

4.2 基本公式

4.2.1 不支付收益的资产

$$F_0 = S_0 e^{rT} \tag{4.1}$$

4.2.2 支付已知收益率的资产

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \tag{4.2}$$

4.2.3 支付已知收入的资产

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT} \tag{4.3}$$

其中：

- F_0 = 期货价格
- S_0 = 标的资产现价
- r = 无风险利率
- q = 收益率
- I = 收入现值
- T = 到期时间

4.3 数学推导

4.3.1 不支付收益资产的推导

构建套利组合：

策略 **A**：买入期货 + 借钱买入现货

- 初始成本：0
- 到期收益：$S_T - F_0 + S_T - S_0 e^{rT} = 2S_T - F_0 - S_0 e^{rT}$

策略 **B**：卖出期货 + 卖空现货并投资

- 初始成本：0
- 到期收益：$F_0 - S_T - S_T + S_0 e^{rT} = F_0 - 2S_T + S_0 e^{rT}$

无套利条件：两策略收益均为零

$$F_0 = S_0 e^{rT} \tag{4.4}$$

4.3.2 支付收益率资产的推导

构建组合：

- 买入 e^{-qT} 单位标的资产
- 卖出一份期货合约

初始投资： S_0e^{-qT}

到期价值：

- 由于股息再投资，e^{-qT} 单位资产增长为 1 单位，价值 S_T
- 期货收益：$F_0 - S_T$
- 总价值：$S_T + F_0 - S_T = F_0$

等价投资策略：投资 S_0e^{-qT} 于无风险资产，到期价值：

$$S_0e^{-qT} \cdot e^{rT} = S_0e^{(r-q)T} \tag{4.5}$$

无套利条件：

$$F_0 = S_0e^{(r-q)T} \tag{4.6}$$

4.3.3 支付已知收入资产的推导

构建组合：

- 买入标的资产：成本 S_0
- 卖出期货合约
- 在收到收入 I 时投资于无风险资产

现金流分析：

- 期初：支付 S_0
- 期间：收到收入 I，投资获得 $Ie^{r(T-t)}$
- 期末：交割获得 F_0，总收入 $F_0 + Ie^{r(T-t)}$

等价策略：投资 $(S_0 - I)$ 于无风险资产，到期价值：

$$(S_0 - I)e^{rT} \tag{4.7}$$

无套利条件：

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT} \tag{4.8}$$

4.4 经济解释

4.4.1 成本收益分析

期货价格可以理解为：

$$\text{期货价格} = \text{现货价格} + \text{持有成本} - \text{持有收益} \tag{4.9}$$

4.4.2 时间价值

期货价格反映了货币的时间价值：

- 避免资金占用
- 获得资金机会成本收益 r
- 放弃持有资产收益 q

4.5 实际应用

4.5.1 股票期货

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \tag{4.10}$$

其中 q 为股息收益率

4.5.2 债券期货

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT} \tag{4.11}$$

其中 I 为期间内票息收入现值

4.5.3 外汇期货

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T} \tag{4.12}$$

其中 r_f 为外国无风险利率

4.5.4 商品期货

$$F_0 = (S_0 + U)e^{(r-y)T} \tag{4.13}$$

其中 U 为存储成本，y 为便利收益率

4.6 总结

期货定价理论基于无套利原理，核心思想：

- 期货价格必须防止套利机会
- 反映持有标的资产的成本和收益
- 体现货币的时间价值

4.7 远期合约估值

4.7.1 基本原理

远期合约估值的核心思想是通过比较两个不同交割价格的远期合约来推导估值公式。考虑两个远期合约：

- 合约 A：交割价格为 K
- 合约 B：交割价格为 F_0（当前远期价格）

4.7.2 估值公式

多头远期合约的价值：

$$\text{多头价值} = (F_0 - K)e^{-rT} \tag{4.14}$$

空头远期合约的价值：

$$空头价值 = (K - F_0)e^{-rT} \tag{4.15}$$

其中：

- F_0 = 当前远期价格
- K = 合约交割价格
- r = 无风险利率
- T = 剩余期限

4.7.3 数学推导

构建投资组合差异：

考虑两个多头远期合约：

- 合约 1：交割价格为 K，到期收益 $= S_T - K$
- 合约 2：交割价格为 F_0，到期收益 $= S_T - F_0$

两合约收益差异：

$$(S_T - K) - (S_T - F_0) = F_0 - K \tag{4.16}$$

现值差异：由于这个差异是确定的，其现值为：

$$(F_0 - K)e^{-rT} \tag{4.17}$$

4.7.4 经济解释

4.7.4.1 多头远期合约

对于多头远期合约价值 $(F_0 - K)e^{-rT}$：

- 当 $F_0 > K$ 时，价值为正：合约有利，因为可以较低价格买入
- 当 $F_0 < K$ 时，价值为负：合约不利，因为要以较高价格买入
- 当 $F_0 = K$ 时，价值为零：合约处于平价状态

4.7.4.2 空头远期合约

对于空头远期合约价值 $(K - F_0)e^{-rT}$：

- 当 $K > F_0$ 时，价值为正：合约有利，因为可以较高价格卖出
- 当 $K < F_0$ 时，价值为负：合约不利，因为要以较低价格卖出

4.7.5 数值示例

假设：

- 当前远期价格 $F_0 = 105$
- 已有合约交割价格 $K = 100$
- 无风险利率 $r = 5\%$
- 剩余期限 $T = 0.5$ 年

多头远期合约价值：

$$\begin{aligned} \text{价值} &= (105-100)e^{-0.05\times0.5} && (4.18)\\ &= 5e^{-0.025} && (4.19)\\ &= 5\times0.9753 && (4.20)\\ &= 4.88 && (4.21)\end{aligned}$$

这意味着该多头远期合约目前价值 4.88 元。

4.7.6 关键要点

1. 估值基准：使用当前远期价格 F_0 作为基准
2. 时间价值：通过 e^{-rT} 折现到现值
3. 对称性：多头和空头的价值互为相反数
4. 无套利：估值基于无套利原理，确保市场一致性

这种估值方法广泛应用于风险管理、投资组合评估和衍生品定价中。

4.8 现货与远期、期货价格的定价关系解析

本节将通过两个图表所表达的内容，系统地解释外汇市场和期货市场中现货、远期和期货价格之间的关系。

4.8.1 图表一：现货与远期价格的关系

4.8.1.1 核心思想

该图表展示了外汇市场中现货价格与远期价格之间的等价关系。其基本出发点是通过两种不同投资策略的比较，说明在无套利条件下，远期价格的计算方式。

4.8.1.2 投资策略比较

4.8.1.2.1 策略 A（直接投资外币）

- 时间 0：投资 1000 单位外币；
- 外币以年化利率 r_f 增长；
- 时间 T 时，获得 $1000e^{r_fT}$ 单位外币；
- 若将其按远期汇率 F_0 转换为美元，则得到：

$$1000F_0e^{r_fT} \text{ 美元}$$

4.8.1.2.2 策略 B（美元投资 + 远期合约）

- 时间 0：投资 $1000S_0$ 美元；
- 美元以年化利率 r 增长；
- 时间 T 时，获得：

$$1000S_0e^{rT} \text{ 美元}$$

4.8.1.3 无套利条件

由于两种策略本质上在时间 T 都能得到 1000 单位外币，因此，为避免套利，其成本必须相等：

$$1000F_0e^{r_fT} = 1000S_0e^{rT}$$

两边同时除以 1000，得：

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T}$$

这就是经典的外汇远期定价公式。

4.8.2 图表二：期货价格与预期未来现货价格的关系

4.8.2.1 核心概念

在风险中性世界中，所有资产的期望收益率等于无风险利率。我们可以基于这一原则对期货价格进行建模和推导。

4.8.2.2 数学推导

4.8.2.2.1 投资组合构建

- 投资 $F_0 e^{-rT}$ 于无风险资产；
- 同时买入期货合约；

4.8.2.2.2 结果分析

- 无风险资产到期价值：

$$F_0 e^{-rT} \cdot e^{rT} = F_0$$

- 期货合约到期价值：$S_T - F_0$
- 总投资组合价值：

$$F_0 + (S_T - F_0) = S_T$$

4.8.2.3 关键公式推导

根据风险中性世界的定价原则，有：

$$F_0 e^{-rT} \cdot e^{kT} = \mathbb{E}[S_T]$$

其中，k 为投资者要求的期望收益率。
整理得：

$$F_0 = \mathbb{E}[S_T] e^{(r-k)T}$$

4.8.2.4 经济含义分析

1. 当 $k = r$ 时：

$$F_0 = \mathbb{E}[S_T]$$

   此时期货价格等于预期现货价格，说明资产为风险中性；
2. 当 $k > r$ 时：

$$F_0 < \mathbb{E}[S_T]$$

   即期货价格低于预期现货价格，资产具有正的风险溢价；
3. 当 $k < r$ 时：

$$F_0 > \mathbb{E}[S_T]$$

即期货价格高于预期现货价格，资产具有负的风险溢价。

4.8.2.5 实际意义

该关系揭示了：

- 期货价格不一定等于预期的未来现货价格；
- 两者之间的差异反映了市场所要求的风险溢价；
- 风险溢价是对资产系统性风险的一种补偿；

这是期货定价理论的一个重要组成部分，连接了无套利定价框架与金融市场中风险管理的核心理念。

第 5 章 interest rate Futures

5.1 公式介绍 (Formula Introduction)

美国国库券的定价采用折扣收益率方法，其核心公式为：

$$P = \frac{360}{n}(100 - Y) \tag{5.1}$$

其中：

- P = 报价价格 (Quoted Price)
- Y = 每 100 美元面值的现金价格 (Cash Price per \$100 face value)
- n = 到期天数 (Days to maturity)
- 360 = 银行年度天数惯例 (Banking year convention)

5.2 公式推导 (Formula Derivation)

国库券的定价基于折扣机制，投资者以低于面值的价格购买，到期时按面值赎回。

5.2.1 基本关系

折扣率 d 定义为：

$$d = \frac{\text{面值} - \text{购买价格}}{\text{面值}} \times \frac{360}{n} \tag{5.2}$$

设面值为 100 美元，购买价格为 Y，则：

$$d = \frac{100 - Y}{100} \times \frac{360}{n} \tag{5.3}$$

5.2.2 报价价格计算

在美国国库券市场中，报价价格 P 实际上表示的是年化折扣率（以百分比形式），因此：

$$P = d \times 100 = \frac{100 - Y}{100} \times \frac{360}{n} \times 100 \tag{5.4}$$

简化得到：

$$\boxed{P = \frac{360}{n}(100 - Y)} \tag{5.5}$$

5.3 公式应用示例 (Application Examples)

5.3.1 示例 1

假设一张 91 天到期的国库券，每 100 美元面值的现金价格为 98.5 美元：

$$\begin{aligned}
P &= \frac{360}{91}(100 - 98.5) && (5.6)\\
&= \frac{360}{91} \times 1.5 && (5.7)\\
&= 3.956 \times 1.5 && (5.8)\\
&\approx 5.93\% && (5.9)
\end{aligned}$$

5.3.2 示例 2

如果报价价格为 4.2%，91 天到期，求现金价格：

$$4.2 = \frac{360}{91}(100 - Y) \tag{5.10}$$

$$4.2 = 3.956(100 - Y) \tag{5.11}$$

$$100 - Y = \frac{4.2}{3.956} \tag{5.12}$$

$$100 - Y = 1.062 \tag{5.13}$$

$$Y = 98.938 \tag{5.14}$$

因此现金价格为每 100 美元面值 98.938 美元。

5.4 公式特点分析 (Formula Analysis)

5.4.1 时间因子影响

- 随着到期时间 n 增加，$\frac{360}{n}$ 减小
- 相同的价格差异 $(100 - Y)$ 会产生更低的年化报价价格
- 体现了时间价值的影响

5.4.2 价格关系

- $Y < 100$：国库券以折扣价交易
- Y 越小，折扣越大，报价价格 P 越高
- 报价价格与现金价格呈反向关系

5.4.3 360 天惯例

- 使用 360 天而非 365 天是银行业惯例
- 简化计算，便于标准化
- 与货币市场其他工具保持一致

5.5 实际应用注意事项 (Practical Considerations)

1. 市场惯例：美国国库券市场使用这种报价方式已有数十年历史
2. 计算精度：实际交易中通常保留更多小数位
3. 到期计算：n 的计算需要考虑交割日和到期日之间的实际天数
4. 最小变动单位：通常为 0.01%（1 个基点）

5.6 与其他金融工具的比较 (Comparison with Other Instruments)

5.7 结论 (Conclusion)

美国国库券定价公式 $P = \frac{360}{n}(100 - Y)$ 是货币市场的重要工具，它：

- 提供了标准化的报价方法

金融工具	报价方式	年度天数惯例
国库券	折扣收益率	360 天
商业票据	折扣收益率	360 天
银行承兑汇票	折扣收益率	360 天
国库债券	收益率到期日	365 天

表 **5.1:** 不同金融工具的报价惯例

- 便于不同期限国库券之间的比较
- 反映了时间价值和风险的关系
- 与整个货币市场体系保持一致

理解这个公式对于参与货币市场交易、风险管理和投资组合构建都具有重要意义。