Лекция 3 (VI сем.)

§6. Принцип Остроград.-Гамильтона. Вывод ур-я колебаний мембран.

Пусть фиксир. контин. или дискр. сист. и значения T - кинетич. энергии, $П$ - потенц. эн. — зависят от времени

$$D = \int_{t_1}^{t_2} (T - П)\, dt$$ — интеграл действия, $(t_1, t_2) \in (0, \infty)$

фиксир. произв.

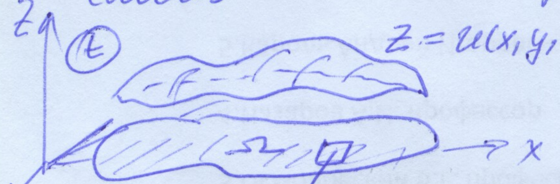
[Принцип Остр.-Гамильтона: "Из всех допустимых перемещений из одного фиксир. положения в другое система выбирает то, кот. является экстремалью ф-ла действия:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - П)\, dt = 0, \quad \forall (t_1, t_2) \subset (0, \infty) \qquad (*)$$

Выведем уравнение (малых) колебаний мембраны с помощью этого принципа.

Мембрана - плоский упругий об'ект, который "работает на растяжение."

Пусть в положении равновесия мембрана занимает обл. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. В момент времени t её смещение есть ф-я $u(x,y,t)$, $(x,y) \in \Omega_{огр.}$, $t > 0$.



Предпол., что мембрана однородная $\rho(x,y) = \rho = const.$ - плотность мембр.

$\Delta m = \rho\, dx dy$; $f(x,y,t)\, dx dy$ - сила, вертик. приложена на эл-т $dx dy$

$$\Delta T = \frac{\Delta m\, u_t^2}{2} \Rightarrow T = \iint_\Omega \rho \frac{u_t^2}{2}\, dx dy; \quad П = A_{\substack{упр. сил\\ растяж.}} + A_{\substack{сопр.\\ внешн.\\ силе}}$$

$\Delta A_{упр.} = K \Delta S$, $K > 0$ - постоянная, ΔS - растяж. площади пов-ти мембр. $\Rightarrow \Delta A = K\left(\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1\right) dx dy \approx$

$$\overset{(+)}{\approx} k\left(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}\right)dx\,dy.$$ Чтобы верно было соотн. (+) предпол., что $|u_x|+|u_y| << 1$, тогда

$$\underbrace{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}_{\alpha} : \underbrace{\sqrt{1+\alpha}}_{f(\alpha)} = \underset{f(0)}{1} + \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}}{f'(0)}\alpha + o(\alpha) \approx 1+\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1 \approx \frac{u_x^2+u_y^2}{2} \Rightarrow \quad A_{упр.} = k\iint\limits_{\Omega} \frac{u_x^2+u_y^2}{2}dx\,dy.$$

$$A_{\substack{сопрот.\\внешн}} = -A_{внешн.}; \quad \Delta A_{внешн.} = f\,dx\,dy\cdot u \Rightarrow$$

$$A_{внешн.} = \iint\limits_{\Omega} f\cdot u\,dx\,dy.$$ Интеграл действия:

$$\int_{t_1}^{t_2}(T-\Pi)\,dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\iint\limits_{\Omega}}_{=Q}\Big\{\rho\frac{u_t^2}{2} - \underbrace{\Big(\frac{k(u_x^2+u_y^2)}{2} - f\cdot u\Big)}_{\Pi}\Big\}dx\,dy\,dt =$$

$$D[u]F\int_Q\Big[\rho\frac{u_t^2}{2} - \frac{k(u_x^2+u_y^2)}{2} + fu\Big]dx\,dy\,dt; \quad Q = \Omega\times(t_1,t_2)$$

Согласно (*) $\Big|\ \delta D(u,h) = 0, \ \forall h$ допуст. (?)

Из принц. Остр-Гам. $\quad u|_{t_1} = u+\alpha h|_{t_1}; \quad u|_{t_2} = u+\alpha h|_{t_2}$

$\Rightarrow h|_{t_1} = h|_{t_2} = 0.$ Считаем ф-ции $u(x,y,t)$ и $h(x,y,t)$ принадлеж. $C^1(\overline{Q})$.

(1) $$\delta D(u,h) = \int_Q\big[\rho\,u_t h_t + fh - k(u_x h_x + u_y h_y)\big]dx\,dy\,dt = 0$$

Для вывода ур-я будем считать, что $h\in C_0^1(\overline{Q})$;

$$\int_Q\big[-\rho u_{tt} + k(u_{xx}+u_{yy}) + f\big]h\,dQ = 0, \quad \forall h\in C_0^1(\overline{Q})$$

$\Rightarrow \rho u_{tt} - k\Delta u = f$; в станд. форме

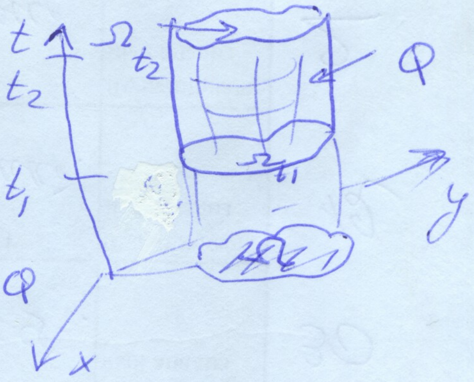
(2) $$\boxed{u_{tt} - a^2\Delta u = F(x,y,t)}, \text{ где } a^2 = \frac{k}{\rho}, \ F = \frac{f(x,y,t)}{\rho}$$

— ур-е колебаний мембраны.

О краевых условиях

а) $u\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = \varphi(x,y,t)$ — задано перемещение точек $\partial\Omega$ во времени.

$\Rightarrow u+\alpha h\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = \varphi \Rightarrow h\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0$, т.е. $h=0$ на боковой пов-ти цилиндра Q.



+ известно, что $h\big|_{\Omega_{t_1}} = h\big|_{\Omega_{t_2}} = 0$

$\Rightarrow h \in C_0^1(\bar\Omega)$ и дополнит. гран. усл-й не получаем:

$$(3)\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = F & \text{в } Q \\ u\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = \varphi \end{cases}$$

(б) u не закреплена на $\partial\Omega$ при $t>0$. Тогда $u+\alpha h\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}$ — принимает произв. значения. Из равва (1) получаем после интегр. по частям

$$\iint_Q [-\rho u_{tt} + k(u_{xx}+u_{yy}) + f]\, h\, dQ + \iint_{\partial Q} [\rho u_t h\cdot\cos(\bar n, t) - k u_x h\cdot\cos(\bar n,\bar x) - k u_y h\cdot\cos(\bar n,\bar y)]\, ds = 0.$$

При $h\in C_0^1(\bar Q)$ мы уже вывели ур-е колеб. мембр. (2). Рассм. $\iint_{\partial Q}[\dots]\,ds = 0$, т.к. $h\big|_{t_1} = h\big|_{t_2} = 0$, то $\iint_{\partial Q}[\dots]\,h\,ds =$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\Big[\rho u_t\cdot\underbrace{\cos(\bar n, t)}_{0} - k\frac{\partial u}{\partial n}\Big] h \underbrace{ds}_{d(\partial\Omega)\,dt} = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n} h\, d\partial\Omega\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega\times(t_1,t_2)} = 0}\quad \Big(\text{например, } h = \frac{\partial u}{\partial n}\Big)$$

это естеств. кр. усл.

$$\Rightarrow (4)\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = F & \text{в } Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0 \end{cases}$$

<u>Замечание</u>: В ситуациях (3) и (4) задачу следует доопределить двумя <u>начальн.</u> усл-ями.

Т. о., для полной постановки задачи (4) мы задаем 2 нач. усл. $u|_{t=0}=\varphi_0(x,y)$ – нач. профиль струны и $u_t|_{t=0}=\psi_0(x,y)$ – нач. скорость.

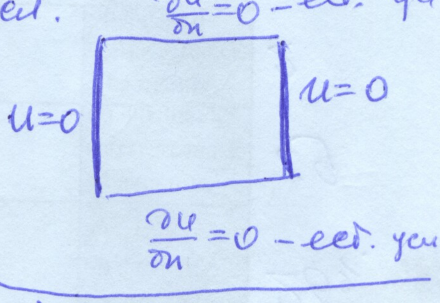
При условиях закрепления мембраны ($u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=0$) или описании перемещения её ф-ей: $u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=\varphi(x,y,t)$ получаем нач-краевую задачу:

$$\text{чу}:\quad (5)\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=F(x,y,t), & (x,y)\in\Omega,\ t>0; \\ u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=\varphi(x,y,t); & \text{– 1 краев. усл.} \\ u|_{t=0}=\varphi_0(x,y);\quad u_t|_{t=0}=\psi_0(x,y) & \text{– 2 нач. усл.} \end{cases}$$

Если краев. условие не фиксировать, то дополняем зад. (4):

$$(6)\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=F(x,y,t), & (x,y)\in\Omega,\ t>0; \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=0; \\ u|_{t=0}=\varphi_0(x,y);\quad u_t|_{t=0}=\psi_0(x,y) \end{cases}$$

Возможна комбинация краев. усл.

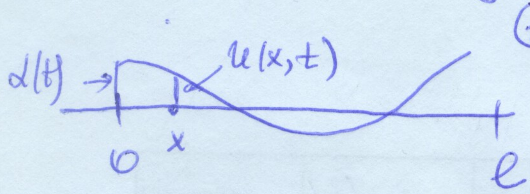


Если $F=F(x,y)\Rightarrow$
$u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=\varphi(x,y)$ $\Rightarrow u=u(x,y)$

Тогда (5) $\Rightarrow$
$$(5^\circ)\begin{cases} \Delta u=\Phi(x,y) \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y) \end{cases},\quad \Phi=-\frac{F(x,y)}{a^2}$$

Из (6) $\Rightarrow$
$$(6^\circ)\begin{cases} \Delta u=\Phi(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

Частный случай: ур-е колебаний струны.



$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x,t) \\ u|_{x=0} = \alpha(t); \quad u|_{x=l} = \beta(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x); \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

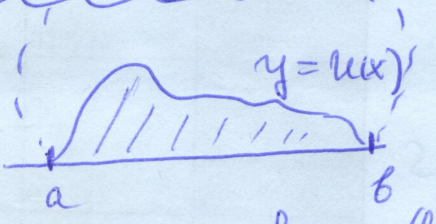
однородная упругая нить, которая «работает на растяжение».

естеств. кр. усл. $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$

На практике: вывод краевых усл. для струны, конец кот. закреплен упруго с помощью пружины.

§7. Изопериметрическая задача

Пример (задача Дидоны)



$$l[u] = \int_a^b \sqrt{1+(u')^2}\,dx = l_0$$

$$S[u] = \int_a^b u(x)\,dx \to \max$$

$b - a < l_0 < \pi \frac{(b-a)}{2}$

$\left\{ u \in C_0^1[ab],\ l[u] = l_0 \right\}$

Постановка

$\min F[u]$, $D = \{\hat{u}\} + M_{лин.} \subset B$,

$$(*)\begin{cases} u \in D \\ G[u] = l \end{cases}$$ где F, G — диффер. ф-ии на D.

Т. Эйлера: Пусть u — реш. изопер. задачи (*) и $u(x)$ — не экстремаль ф-ла G на D. Тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}^1$, что $\delta(F + \lambda G)(u, h) = 0$, $\forall h_{доп} \in M$.

Д-во: Рассм. $u + \underbrace{\alpha h + \beta \eta}_{\in M}$, где $h, \eta \in M$

Для этой ф-ции должны вып-ся соотнош.

(1) $G[u+\alpha h+\beta\eta]=\ell$; (2) $F[u]\le F[u+\alpha h+\beta\eta]$

Пусть $\psi(\alpha,\beta)=G[u+\alpha h+\beta\eta]$. Очевидно, $\psi(0,0)=\ell$

Хотим, чтоб $\psi(\alpha,\beta)=\ell$. Воспольз. т. о неявных ф-ях: Вычислим $\psi'_\beta(0,0)$:

$$\psi'_\beta(0,0)=\frac{d}{d\beta}G[u+\alpha h+\beta\eta]\Big|_{\substack{\beta=0\\ \alpha=0}}=\delta G(u,\eta).$$

Т.к. u - не экстремаль ф-ла G, то $\exists\,\eta\in M:\ \delta G(u,\eta)\ne 0\Rightarrow$

При таком фиксир. далее η $\psi'_\beta(0,0)\ne 0$. По т. о неявных ф-ях $\exists$ ф-я $\beta(\alpha)$ в окрест. т. $\alpha=0$ такая, что

$\psi(\alpha,\beta(\alpha))=\ell$, причем $\beta(0)=0$. Полученное равво означает, что $G[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]=\ell$, $\forall h\in M$, $|\alpha|\ll 1$

Кроме того, из (2): $F[u]\le \underbrace{F[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]}_{=\Phi(\alpha)}$, $|\alpha|<\alpha_0$ $(\exists\,\alpha_0)$

Верно нерво $\Phi(0)\le\Phi(\alpha)$, $|\alpha|<\alpha_0\Rightarrow \Phi'(0)=0\Rightarrow$

$$0=\Phi'(0)=\frac{d}{d\alpha}F[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]\Big|_{\alpha=0}=\frac{\partial F}{\partial\alpha}[u+\alpha h+\beta\eta]\Big|_{\alpha=0}+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial\beta}[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]\Big|_{\substack{(\alpha=0)\\ \beta=0}}\cdot\beta'(0)=0\Rightarrow \delta F(u,h)+\delta F(u,\eta)\cdot\beta'(0)=0\quad(3)$$

Что такое $\beta'(0)$?

Продифферен. по α равво $G[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]=\ell$ и положим $\alpha=0$:

$$\frac{\partial G}{\partial\alpha}[u+\alpha h+\beta\eta]\Big|_{\alpha=0}+\frac{\partial G}{\partial\beta}[u+\alpha h+\beta\eta]\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\cdot\beta'(0)=0$$

$$\Rightarrow \delta G(u,h)+\underbrace{\delta G(u,\eta)}_{\ne 0}\cdot\beta'(0)=0\Rightarrow \beta'(0)=-\frac{\delta G(u,h)}{\delta G(u,\eta)}$$

Теперь из равва (3) следует:

$$\delta F(u,h) - \frac{\delta G(u,h)}{\delta G(u,\eta)} \cdot \delta F(u,\eta) = 0$$ эл-т η-дикс. $\Rightarrow$

Пусть $\lambda = -\frac{\delta F(u,\eta)}{\delta G(u,\eta)} \Rightarrow$

$$\boxed{\delta F(u,h) + \lambda \delta G(u,h) = 0, \ \forall h \in M}$$

$\Leftrightarrow \quad \delta(F + \lambda G)(u,h) = 0, \ \forall h \in M$, ч.т.д.