Лекция 2 (VI семестр)

Описки (лекц. 1) 1) стр. 2, пример 3, III строка – пропущен "у")

2) стр. 7, III строка сверху $|\alpha| \le \underline{k}-1$

Лемма 2. Пусть $g \in C[a,b]$ и $\forall h \in C_0^1[ab]$ выполн. $\int_a^b g h' dx = 0$

$\Rightarrow g(x) \equiv const.$

Док-во: Обозначим $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx =: \fint_a^b g(x)dx$; $p(x) = \int_a^x (g(\tau)-\alpha)d\tau$

$\Rightarrow p \in C_0^1[a,b]$ $(p(b) = \int_a^b g(\tau)d\tau - \alpha\cdot(b-a) = 0)$; $p'(x) = g(x)-\alpha$.

Согласно предположе., $\int_a^b g\cdot p' dx = 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(g-\alpha)dx = 0$. (1)

Кроме того, $\alpha\cdot\int_a^b (g(x)-\alpha))dx = 0$ (2). Вычитая (1)−(2): $\int_a^b (g(x)-\alpha)^2 dx = 0$

$\Rightarrow g(x) \equiv \alpha.$ ∎

Лемма 3. Пусть $A, B \in C[a,b]$, и $\left.\begin{array}{r}\int_a^b [A(x)h(x) + B(x)h'(x)]dx = 0\\ \forall h \in C_0^1[ab].\end{array}\right\}(*)$

Тогда $\exists \frac{dB}{dx} = A$ на $[ab]$.

Док-во: Построим ф-ю $p(x) = \int_a^x A(t)dt$; $p'(x) = A(x)$, $A \in C[ab]$.

$\int_a^b A\cdot h dx = \int_a^b p'\cdot h\, dx = -\int_a^b p\cdot h' dx \Rightarrow 0 \underset{(*)}{=} \int_a^b (Ah + Bh')dx \Leftrightarrow$

$\int_a^b (B-p)h' dx = 0 \Rightarrow$ по л. 2 $B(x) - p(x) \equiv const. \Rightarrow B(x) = p(x) + C$

$\exists\ B'(x) = A(x)$, $x \in [ab]$. ∎

Вернемся к простейшей задаче: н. усл. экстремума получено в лекц. 1: $\int_a^b (f_u\cdot h + f_{u'}\cdot h')dx = 0 \quad \forall h \in C_0^1[ab]$.

$f_u(x, u(x), u'(x)) =: A(x)$

$f_{u'}(x, u(x), u'(x)) = B(x)$ $\quad \Rightarrow \int_a^b (Ah + Bh')dx = 0$, $\forall h \in C_0^1[ab]$.

По л.3 $\exists \frac{dB}{dx} = A$ на $[ab]$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d}{dx} f_{u'}(x,u,u') = f_u(x,u,u'),}$ $x \in [ab]$.

Т.о., мы получили усл. (необх.), которому должна удовл. экстремаль ф-ла $F[u] = \int_a^b f(x,u,u')dx$ при усл., что $u \in D = \{u \in C^1[ab]: u(a) = A_0,\ u(b) = B_0\} \Rightarrow \delta F(u,h) = 0, \forall h \in C_0^1[ab]$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_{u'}(x,u,u') - f_u(x,u,u') = 0 \\ u(a) = A_0, \quad u(b) = B_0 \end{cases} \quad (3)$$

← ур. Эйлера (Эйлера-Лагранжа)

Если $\exists\, u''$, то $\dfrac{d}{dx}\left(f_{u'}(x,u,u')\right) = f_{u'x} + f_{u'u}\cdot u' + f_{u'u'}\cdot \underline{\underline{u''}}$

Структура ур. Эйлера $\begin{cases} p(x,u,u')\cdot u'' + \Phi(x,u,u') = 0, \quad x\in[a,b] \\ u(a)=A_0, \quad u(b) = B_0 \end{cases}$

Опр. Ур-е, линейное относит. старшей производной, назыв. квазилинейным.

$\circ\ \exists\, u''$?

Утв. В тех точках x, где вдоль экстремали $u(x)$ $f_{u'u'}(x, u(x), u'(x)) \neq 0$, $\exists\, u''(x)$.

Д-во: Рассм. отношение, которое в пределе даёт полную производную $\dfrac{d}{dx}(f_{u'})$:

$$\frac{\Delta f_{u'}}{\Delta x} = \frac{f_{u'}(x+\Delta x, \overbrace{u+\Delta u}^{u(x+\Delta x) = u(x)}, u'+\Delta u') - f_{u'}(x,u,u')}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\tilde{f}_{u'x}\cdot\Delta x + \tilde{f}_{u'u}\cdot\Delta u + \tilde{f}_{u'u'}\Delta u'}{\Delta x} = \tilde{f}_{u'x} + \tilde{f}_{u'u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \tilde{f}_{u'u'}\cdot\frac{\Delta u'}{\Delta x}.$$

"~" здесь означает, что аргументы берутся между $(x+\Delta x, u+\Delta u, u'+\Delta u')$ и (x,u,u'). При $\Delta x\to 0$ $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f_{u'}}{\Delta x} = \dfrac{d}{dx} f_{u'}$,

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\tilde{f}_{u'x} = f_{u'x}(x,u,u'); \ \exists \lim_{\Delta\to 0}\tilde{f}_{u'u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = f_{u'u}(x,u,u')\cdot u'(x) \Rightarrow$$

Если в т. x $f_{u'u'}(x, u(x), u'(x)) \neq 0$, то при $|\Delta x| \ll 1$ $\tilde{f}_{u'u'} \neq 0 \Rightarrow$

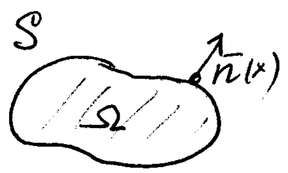
$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\tilde{f}_{u'u'} = f_{u'u'}(x,u,u') \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u'}{\Delta x} = \frac{1}{f_{u'u'}}\underbrace{\left[\frac{d f_{u'}}{dx} - f_{u'x} - f_{u'u}\cdot u'\right]}$$

т.е. $\exists\, u'' = \dfrac{1}{f_{u'u'}(x,u,u')}[\ \ldots\ ]$. ⊠

$\tilde{f}_{u'x} = f_{u'x}(x+\theta\Delta x, u+\theta\Delta u, u'+\theta\Delta u')$ и т.д.

$0 < \theta < 1$

§4. Обобщение простейшей задачи на случай кратных интегралов



$$(1)\begin{cases} \min\limits_{D} F[u], \quad F[u]=\int\limits_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x))\,dx, \quad \Omega\subset\mathbb{R}^n, \text{ огран.} \\ D=\{u\in C^1(\bar\Omega): u|_S=\varphi\} \quad S=\partial\Omega \text{ — кус. гладк.} \end{cases}$$

Воспольз. ф-лой Гаусса–Острогр.

$n=3$
$$\iiint\limits_{B} \operatorname{div} \vec{a}(M)\,dB=\iint\limits_{S}(\vec{a},\vec{n})\,dS; \quad \vec{a}(M)=(P(M),Q(M),R(M)).$$

$\vec{n}(x)=(\cos(\vec{n},\bar{x}), \cos(\vec{n},\bar{y}), \cos(\vec{n},\bar{z}))$; $M=(x,y,z)$

Пусть $Q=R=0 \Rightarrow \iiint\limits_{B}(P)'_x\,dB=\iint\limits_{S} P\cdot\cos(\vec{n},\bar{x})\,dS$

$$P=u\cdot v \Rightarrow \iiint\limits_{B}(u'_x\cdot v+u\cdot v'_x)\,dB=\iint\limits_{S} u\cdot v\cdot\cos(\vec{n},\bar{x})\,dS$$

$$\Rightarrow \iiint\limits_{B}\to\int\limits_{B}; \quad \iint\limits_{S}\to\int\limits_{S} \Rightarrow \begin{cases}\int\limits_{B}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot v\,dB=-\int\limits_{B} u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\,dB+ \\ \quad +\int\limits_{S} u\cdot v\cdot\cos(\vec{n},\bar{x})\,dS\end{cases}$$

Аналогично, если

$$P,R=0,\ Q\neq 0 \Rightarrow \int\limits_{B} Q'_y\,dB=\int\limits_{S} Q\cos(\vec{n},\bar{y})\,dS \Rightarrow$$

$Q=u\cdot v$
$$\int\limits_{B} u_y\cdot v\,dB=-\int\limits_{B} u\cdot v_y\,dB+\int\limits_{S} uv\cos(\vec{n},\bar{y})\,dS$$

$\Rightarrow$ если $R\neq 0$, $P,Q=0$ $\Big| \Rightarrow \int\limits_{B} u_z\cdot v\,dB=-\int\limits_{B} u\cdot v_z\,dB+\int\limits_{S} uv\cdot\cos(\vec{n},\bar{z})\,dS$

Общий случай: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$; $S=\partial\Omega$ — кус. гладкая (кус. C^1).

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_i}\cdot v\,dx=-\int\limits_{\Omega} u\cdot v_{x_i}\,dx+\int\limits_{S} u\cdot v\cdot\cos(\vec{n},x_i)\,dS \quad \forall i=1,\dots,n \qquad (!)$$

для ф-й $u, v\in C^1(\bar\Omega)$.

$$n=1 \quad \int\limits_a^b u'\cdot v\,dx=-\int\limits_a^b u\cdot v'\,dx+u\cdot v\Big|_a^b \quad \Big[\begin{matrix} du=u'dx \\ dv=v'dx\end{matrix}$$

Необх. усл. для задачи (1): $\delta F(u,h)=0,\ \forall h\in C_0^1(\bar\Omega)$

($u\in D$, хотим: $u(x)+\alpha h(x)\in D$) $\Rightarrow h_{доп}\big|_{\partial\Omega}=0$. $\quad\nabla u=(u_{x_1},\dots,u_{x_n})$

$$\delta F(u,h)=\frac{d}{d\alpha}\int_\Omega f(\overset{n}{x},\ \overset{1}{\overbrace{u+\alpha h}},\ \overset{n}{\overbrace{\nabla u+\alpha\nabla h}})\,dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_\Omega\Big[f_u(\dots)\cdot h+\sum_{i=1}^n f_{u_{x_i}}(\dots)h_{x_i}\Big]dx\Big|_{\alpha=0}\Rightarrow$$

Необх. усл. экстр.:

$$(2)\quad \boxed{0=\int_\Omega\Big[f_u(x,u,\nabla u)h+\sum_{i=1}^n f_{u_{x_i}}(x,u,\nabla u)\cdot h_{x_i}\Big]dx \quad \forall h\in C_0^1(\bar\Omega).}$$

Преобразов. (2):

$$\int_{\partial\Omega} f_{u_{x_i}}\cdot h\cdot\cos(\bar n,x_i)=0,\ \text{т.к. } h|_S=0$$

$$\int_\Omega\Big[f_u\cdot h-\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx_i}(f_{u_{x_i}})\cdot h\Big]dx=0\Leftrightarrow\int_\Omega h\underbrace{\Big[f_u-\sum_i\frac{d}{dx_i}f_{u_{x_i}}\Big]}_{Lu}dx=0$$

По л. Лагранжа (считаем $Lu\in C(\bar\Omega)$)

$$(3)\begin{cases}Lu=0, & x\in\bar\Omega.\\ u\big|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

Здесь $\boxed{Lu=0}$ – ур. Эйлера (-Остроградск.)

$$\boxed{\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx_i}(f_{u_{x_i}})-f_u=0}$$ ур. квазилин. II порядка

$$\boxed{f_{u_{x_i}x_i}+f_{u_{x_i}u}\cdot u_{x_i}+f_{u_{x_i}x_j}\cdot\underline{\underline{u_{x_ix_j}}}=0}\quad(\Sigma \text{ подразумев.})$$

$$\underline{\sum_{i,j}f_{u_{x_i}u_{x_j}}(x,u,\nabla u)\cdot u_{x_ix_j}+\Phi(x,u,\nabla u)=0}$$

Примеры: 1) $\mathbb{D}[u]=\int_\Omega\left(\frac12|\nabla u|^2+g(x)\cdot u\right)dx,\ g\in C(\bar\Omega)$

– интеграл Дирихле $\quad \min_{u\in D}\mathbb{D}[u],\quad D=\left\{\begin{array}{l}u\in C^1(\bar\Omega)\\ u|_S=\varphi\end{array}\right\}$

$$\delta\mathbb{D}(u,h)=\frac{d}{d\alpha}\int_\Omega\Big[\frac12\sum_{j=1}^n(u_{x_j}+\alpha h_{x_j})^2+g(x)(u+\alpha h)\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_\Omega\Big(\sum_{j=1}^n u_{x_j}\cdot h_{x_j}+g\cdot h\Big)dx=-\sum_{j=1}^n\int_\Omega u_{x_jx_j}\cdot h\,dx+\sum_j\int_S u_{x_j}\,h\cdot\cos\bar n_{x_j}\,ds$$
$$+\int_\Omega g\cdot h\,dx$$

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot h\,dx + \int_S (\underbrace{\nabla \bar u \cdot \bar n}_{\frac{\partial u}{\partial n}}) \cdot \underset{0}{\overset{}{h}}\,ds + \int_\Omega g h\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u + g) h = 0, \qquad \forall h \in C_0^1(\bar\Omega) \Rightarrow$$ по л. Лагр.

ур. Эйлера $\longrightarrow \begin{cases} \Delta u = g(x), & x \in \bar\Omega \\ u\big|_S = \varphi. \end{cases}$ $\Big| \Leftarrow$ необх. усл. экстрем.

<u>Пример 2</u>: $\min\limits_{D} S[u] = \iint\limits_\Omega \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy$;

$D = \{ u \in C^1(\bar\Omega) : u\big|_S = \varphi \}$

$$\delta S(u,h) = \frac{d}{d\alpha}\left(\iint_\Omega \sqrt{1+(u_x+\alpha h_x)^2 + (u_y+\alpha h_y)^2}\,dxdy \right)\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \iint_\Omega \frac{2[(u_x+\alpha h_x)\cdot h_x + (u_y+\alpha h_y) h_y]}{2\sqrt{\ldots}}\,dxdy \Big|_{\alpha=0} =$$

по габлем

$$= \iint_\Omega \left\{ \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \cdot h_x + \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \cdot h_y \right\} dxdy =$$

$$= -\iint_\Omega \Bigg[\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_y^2+u_y^2}} \right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_y^2+u_x^2}} \right)}_{= Lu} \Bigg] h\,dxdy +$$

$$+ \int_S \frac{(u_x \cdot h \cdot \cos(\bar n, \bar x) + u_y \cdot h \cdot \cos(\bar n, \bar y))}{\sqrt{}}\,ds = -\iint_\Omega Lu \cdot h\,dxdy +$$

$$+ \int_S \frac{\frac{\partial u}{\partial n} \cdot h^{=0}}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\,ds = 0 \Rightarrow \begin{cases} Lu = 0, & x \in \Omega \\ u\big|_S = \varphi(x,y) \end{cases}$$

Ур-е $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{u_y}{\sqrt{\ldots}} \right) = 0$ кароев. ур-ем min пов-ти

---

§5. Естественные краевые условия.

1 Рассм. сначала прост. фл: $F[u]=\int_a^b f(x,u,u')dx$ на мнве $D=\{v\in C^1[ab]: v(a)=A\} \Rightarrow \mathcal{D}=\{\hat{u}\}+M$, где $\hat{u}$ – $\forall$ C^1-гладкая ф-я, $\hat{u}(a)=A$; $M=\{h\in C^1[ab]: h(a)=0\}$

$\delta F(u,h)=0$, $\forall h\in M$: (1) $\boxed{\int_a^b [f_u h + f_{u'}\cdot h]dx=0, \ \forall h\in M}$

Отметим, что $C_0^1[ab]\subset M$ и рассм. сначала (1) для $h\in C_0^1[ab]$: $\Leftrightarrow$ было пок-но, что тогда $\exists \frac{d}{dx}f_{u'}$ и из (1) выводится ур. Эйлера: $\int_a^b(\underbrace{f_u-\frac{d}{dx}f_{u'}}_{Lu})h\,dx=0$, $\forall h\in C_0^1[ab] \Rightarrow$

ур. (2) $\boxed{Lu=0,\ x\in[ab]}$. Вернёмся теперь к равв (1) – н. усл. экст.

и пусть теперь h – произв. ф. из M:

В равве (1) проинтегр. по частям:
$$\int_a^b\left(f_u\cdot h-\frac{d}{dx}f_{u'}\right)h\,dx+f_{u'}\cdot h\Big|_a^b=0 \quad (3)$$
В равве (3) в силу (2) и усл. $h(a)=0$ остается
$$\int_a^b 0\cdot h\,dx+f_{u'}\Big|_{x=b}h(b)-f_{u'}\Big|_{x=a}\cdot \overbrace{h(a)}^{=0}=0. \quad (4)$$
Т.к. $h(b)$ – $\forall$ вещ. число, то из равв $f_{u'}\Big|_{x=b}\cdot h(b)=0$
$$\Rightarrow \boxed{f_{u'}(x,u(x),u'(x))\Big|_{x=b}=0} \quad (5)$$

Опред. Краевое усл., полученное как необх. усл. экстрем. из равва нулю первой вариации наз. **естественным краевым условием.**

Т.о.
$$\delta F=0$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$Lu=0 \qquad f_{u'}\Big|_{x=b}=0$$

Замеч. Если $D = C^1[ab]$, то $M = D = C^1[ab]$ — т.е. краевые усл. для простейш. ф-ла не фиксированы. Тогда вводим ур. $\boxed{Lu = 0}$ так, как ранее, рассм. только $h \in C_0^1[ab]$.

В общей ситуации в

$$\delta F = 0 \Rightarrow \int_a^b \underbrace{Lu}_{0} \cdot h\,dx + f_{u'}\big|_{x=b} h(b) - f_{u'}\big|_{x=a} h(a) = 0$$

см (4) Т.к. $h(b)$ и $h(a)$ — произв. знач. и независимы, то

$$\Rightarrow \underbrace{f_{u'}\big|_{x=b} = 0 \quad \text{и} \quad f_{u'}\big|_{x=a} = 0}_{} \Rightarrow Lu = 0 \; + 2 \text{ естеств. усл.}$$

2) Случай кратных интегралов: $(n > 1)$

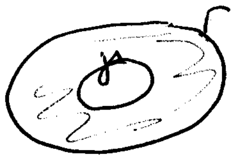
Вернёмся к примеру с интегр. Дирихле

$$0 = \delta \mathbb{D}(u,h) = \int_\Omega (u_{x_i} h_{x_i} + gh)\,dx = \int_\Omega (-\Delta u + g)\, h\,dx + \int_S \frac{\partial u}{\partial n} h\,dS$$

$\sum_i$ — подразум. (см. стр. 5)

$\Rightarrow$ при усл., что $D = \{u \in C^1(\bar\Omega) : u|_\gamma = \varphi\}$,

где $\gamma \cup \Gamma = \partial\Omega$, $|\Gamma|_{n-1} > 0$



Предположим сначала, что $h \in C_0^1(\bar\Omega) \Rightarrow \int_S \frac{\partial u}{\partial n} h\,dS = 0 \Rightarrow -\Delta u + g = 0$ в Ω,

т.е. ур. Эйлера $\Delta u = g(x)$, $x \in \Omega$, — выполняется.

Затем вернемся к $\delta \mathbb{D} = 0$ и рассм.

$$\forall h \in M = \{h \in C^1(\bar\Omega) : h|_\gamma = 0\} \Rightarrow$$

$$\delta \mathbb{D}(u,h) = \int_\Omega 0 \cdot h\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} h\,dS = 0 \Rightarrow \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} h\,dS = 0$$

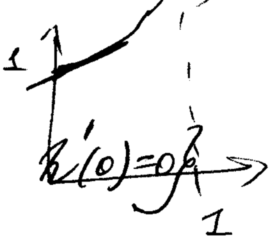
$$\forall h|_\Gamma \in C(\Gamma) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0}$$ — естеств. краев. усл.

Необх. усл.

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{в } \Omega \\ u|_\gamma = \varphi; \; \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

Пример (на ест. усл-я) $\min\limits_{D} \int_0^1 \left(\left(\frac{u''}{2}\right)^2 + \sin^2 u\right) dx$,

$D = \{ u \in C^2[0,1] : u(0) = 1,\ u'(0) = 2 \}$



$D = \{\hat{u}\} + M, \quad M = \{ h \in C^2[0,1] : h(0) = 0,\ h'(0) = 0 \}$

$$\delta F(u,h) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 \left[\left(\frac{u'' + \alpha h''}{2}\right)^2 + \sin^2(u + \alpha h)\right] dx \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_0^1 \left[(u'' + \alpha h'') h'' + 2\sin(u+\alpha h)\cdot\cos(u+\alpha h)\cdot h\right] dx \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_0^1 (u'' h'' + \sin 2u \cdot h)\, dx = 0, \quad \forall h \in M.$$

Преобразуем $\int_0^1 u'' h'' dx = -\int_0^1 u''' h' dx + u''\cdot h' \Big|_0^1 =$

$$= + \int_0^1 u^{(4)} h\, dx - u'''\cdot h \Big|_0^1 + u'' h' \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (u^{(4)} + \sin 2u) h\, dx - u'''(1)\cdot h(1) + u''(1)\cdot h'(1) = 0$$

$\Rightarrow$ 1) если $h \in C_0^2[0,1] \Rightarrow \int_0^1 (u^{(4)} + \sin 2u) h\, dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{u^{(4)} + \sin 2u = 0,\ x \in [0,1]}$ ← ур. Эйлера

2) если $\forall h \in M \Rightarrow \int_0^1 0 \cdot h\, dx - u'''(1)\cdot h(1) + u''(1)\cdot h'(1) = 0$

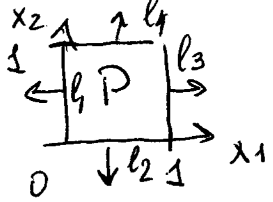
Т.к. значения $h(1)$ и $h'(1)$ — вещ. $\forall$, независимые числа, то

$\underbrace{u'''(1) = 0,\ u''(1) = 0}_{\text{естеств. кр. усл}} \Rightarrow$ Необх. усл. экстремума

$$\begin{cases} u^{(4)} + \sin 2u = 0, & x \in [0,1] \\ u(0) = 1, & u'(0) = 2 \\ u''(1) = 0, & u'''(1) = 0 \end{cases}$$

$\min F[u]$, $\quad F[u]=\int\limits_P\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2+e^{5x}\cdot u\right)dx$, $P=(0,1)\times(0,1)$

$\mathcal{D}$



$\bigcup\limits_{i=1}^{4} l_i=\partial P$ $\qquad \mathcal{D}=\{v\in C^1(\overline{P}):\ v|_{l_1}=1,\ v|_{l_3}=1\}$

$M=\{h\in C^1(\overline{P}):\ h|_{l_1}=0,\ h|_{l_3}=0\}$ – мн-во

$\mathcal{D}=\{\hat{v}\}+M.$

$$\delta F(u,h)=\frac{d}{d\alpha}\int\limits_P\left[(u_{x_1}+\alpha h_{x_1})^2+(u_{x_2}+\alpha h_{x_2})^2\right]\cdot\frac{1}{2}+e^{5x}\cdot(u+\alpha h)\underset{dx_1dx_2}{\underset{\shortparallel}{dx}}\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int\limits_P\left\{(u_{x_1}+\alpha h_{x_1})h_{x_1}+(u_{x_2}+\alpha h_{x_2})h_{x_2}+e^{5x}\cdot h\right\}dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int\limits_P(u_{x_1}\cdot h_{x_1}+u_{x_2}\cdot h_{x_2})dP+\int\limits_P e^{5x}\cdot h\,dx=-\int\limits_P(u_{x_1x_1}\cdot h+u_{x_2x_2}\cdot h)dx$$

$$+\int\limits_{\partial P}\left(u_{x_1}h\cdot\cos(\overline{n},x_1)+u_{x_2}h\cdot\cos(\overline{n},x_2)\right)ds+\int\limits_P e^{5x}\cdot h\,dx=$$

$l_2\cup l_4$

$$=\int\limits_P\left(-\Delta u+e^{5x}\right)h\,dx+\int\limits_{l_2}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=-u_{x_2}}\cdot h\,ds+\int\limits_{l_4}\underset{u_{x_2}}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial u}{\partial n}}}h\,ds=0$$

$\Rightarrow$ if $h\in C_0^1(\overline{P})\Rightarrow\boxed{\Delta u=e^{5x}}$

if $h\in M$ – произв. $\quad\int\limits_P 0\cdot h\,dx-\int\limits_0^1 u_{x_2}(x_1,0)\cdot h(x_1,0)dx_1+$

$+\int\limits_0^1 u_{x_2}(x_1,1)\,h(x_1,1)\,dx_1=0$, $\Rightarrow$ $\quad$ а) $h|_{l_4}=0\Rightarrow\int\limits_0^1 u_{x_2}(x_1,0)\,h(x,0)dx_1=0$

$\Rightarrow u_{x_2}|_{l_2}=0$; аналогично: $u_{x_2}|_{l_4}=0.$

Итого: $\begin{cases}\Delta u=e^{5x}\ \text{в}\ P;\\ u|_{l_1}=1,\ u|_{l_3}=1;\ \underbrace{u_{x_2}|_{l_2}=u_{x_2}|_{l_4}=0}_{\text{естеств. усл.}}\end{cases}$