# Лекция 1 (VI сем.)

## гл. I Вариационное исчисление

### §1. Введение

Пусть $F: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{B} \to R^1 \ (\mathbb{C})$ - функционал.

Задача: найти $\max\limits_{u\in \mathbb{D}} (\min) F[u]$.

Задачу о "max" сводим к задаче о "min", т.е. $\max\limits_{\mathbb{D}}(F) \Rightarrow \min\limits_{\mathbb{D}}(-F)$. Далее $V_\delta(u^0)=B_\delta(u^0)=\{u\in \mathbb{B}: \|u-u^0\|<\delta\}$

Опр. $F$ достигает на $u^0\in \mathbb{D}$ лок. min, if $\exists\, V_\delta(u^0)\subset \mathbb{B}$:
$F[u^0]\le F[u]$, $\forall\, u\in V_\delta(u^0)\cap \mathbb{D}$.

Опр. $F$ достигает глоб. min на эл-те $u^0\in \mathbb{D}$, if
$F[u^0]\le F[u]$, $\forall\, u\in \mathbb{D}$.

Есть 2 основных направления изучения вариац. задач: ① - нахождение н. и д. условий min; (более подробно - ⓐ).
② - прямые методы вар. исчисл.

Основной функционал - интегральный (приложения в механике).

Примеры 1) Задача геометрич. оптики: в неоднородной изотропной среде в $R^3$ задана скалярная ф-я скорости $v(M)=v(x,y,z)$. Требуется определить путь, по которому точка перейдёт из положения $M_0$ в т. $M_1$ за наименьшее время.

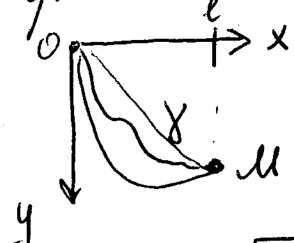

$\min T\{\gamma\}$, $\forall \gamma[M_0,M_1]$ ‖ $\gamma$: $y, z \in C^1[x^0,x^1]$,
$y(x^0)=y^0$, $y(x^1)=y^1$;
$z(x^0)=z^0$, $z(x^1)=z^1$ $\Big\} \in \mathbb{D}$

$\Delta T = \dfrac{\Delta S}{V}$;

$\gamma: \{x, y(x), z(x)\}$, $x\in[x^0,x^1]$

$$T\{\gamma\} = \int_\gamma \frac{ds}{v(M)} \Rightarrow T[y,z] = \int_{x^0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{v(x,y,z)} \to \min_{\mathbb{D}}$$

(2) Частный случай зад. (1): задача о брахистохроне (1696 г. J. Bernulli)
"Найти форму желоба, по которому, скатываясь без трения, матер. точка спустится из одного данн. положения в другое за min время.




$\gamma: \{y=y(x),\ y\in C^1[0,l],\ y(0)=0,\ y(l)=M\} = \mathbb{D}$

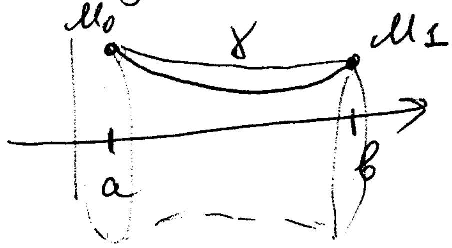
$\gamma: \{(x, y(x)),\ x\in[0,l],\ y\in\mathbb{D}\};\quad \Delta T = \frac{\Delta S}{V}$

$$T\{\gamma\} = T[y] = \int_0^l \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \to \min_{\mathbb{D}}.$$

$v(y)=\sqrt{2gy}$

($\gamma$ – часть циклоиды)

(3) Задача о min площади пов-ти вращения.

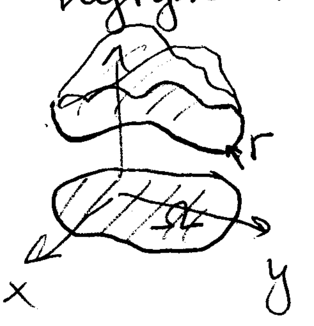



$\{y\in C^1[a,b],\ y(x)\geq 0,\ y(a)=A,\ y(b)=B\} = \mathbb{D}$

$$S[y] = 2\pi\int_{M_0}^{M_1} y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = 2\pi\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min_{\mathbb{D}}$$

Реш-е – цепная линия ($\exists$ 1, 2, $\varnothing$ реш. в завис. от расположения т. $M_0$ и $M_1$).

(4) Найти поверхность наименьшей площади, натянутую на данный контур $\Gamma$ (среди пов-тей, проект. на обл. $\Omega\subset\mathbb{R}^2$)




Пусть $S:\{z=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega\}$, $f|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y)$ | Ф-я $\varphi$ задаёт в $\mathbb{R}^3$ контур $\Gamma$

$$S[f] = \iint_\Omega \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy,\quad f|_{\partial\Omega}=\varphi$$

$$\mathbb{D} = \{f\in C^1(\bar\Omega),\ f|_{\partial\Omega}=\varphi\};\quad S[f]\to\min_{\mathbb{D}}$$

К вариац. задачам приходим при выводе ур. механики. Соответствующий вариац. принцип (Остроградского–Гамильтона) будет сформулирован позже (выведем ур-я колебаний струн, мембран).

## §2. Первая вариация. Необходимое усл. экстремума.

Рассм. сначала $\mathbb{D} = \mathbb{B}$. Пусть $u \in \mathbb{B}$ доставл. лок. min ф-лу $F[\cdot]$ на $\mathbb{B}$: $\exists\, \delta > 0$: (*) $F[u] \le F[v],\ \forall v \in V_\delta(u)$, т.е. $\forall v : \|v-u\| < \delta$. Зафикс. $\forall h \in \mathbb{B}$, $h \ne 0$, пусть $|t| < t_0$:

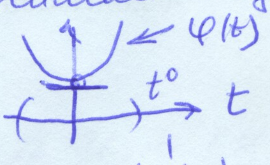
$t_0 : \|th\| < t_0\|h\| < \delta \Rightarrow \|v-u\| = \|\underbrace{u+th}_{v} - u\| = \|th\| < \delta$, т.е.

$v = u + th \in V_\delta(u)$ при $|t| < t_0$.

Рассм. $\varphi(t) = F[u+th]$, где $u, h$ — фиксир.

$\varphi(t)$ опред. при $|t| < t_0$. Нер-во (*) принимает вид

$$\varphi(0) \le \varphi(t), \quad \forall t : |t| < t_0 .$$




Если ф-я $\varphi(t)$ дифферен., то Необх. усл. min: $\varphi'(0) = 0$,

т.е.
$$\boxed{\left.\frac{d}{dt} F[u+th]\right|_{t=0} = 0, \quad \forall h \in \mathbb{B}.}$$

**Опред.** Если $\exists \left.\frac{d}{d\alpha} F[u+\alpha h]\right|_{\alpha=0}$, то эта производная назыв. I вариацией ф-ла $F$ на эл-те "$u$" с приращением "$h$", обозначаем: $\delta F(u,h)$.

Т.о., необх. усл. экстремума:

$$\boxed{\delta F(u,h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{B}} \quad (**)$$

Опред. Функция $u$, удовлетвор. необх. усл. экстремума (**) назыв. экстремалью.

Замечание. Так как понятие $\delta F$ определено для функционала, то оно верно и для ф-ции. Пусть $f(u)$ – ф-я одной веществ. перем, т.е. $u \in \mathbb{R}^1$. По определению

$$\delta F(u,h) = \frac{d}{d\alpha} f(u+\alpha h)\Big|_{\alpha=0} = f'(u+\alpha h)\,h\Big|_{\alpha=0} = f'(u)\cdot h =$$

$= d_h f(u)$ – I дифференциал ф-ции $f$ в т. $u$ с приращением $h$. (Для ф-й мн определяли дифференциал как главную линейную часть приращ. ф-ции.

Опр. Пусть $F$ определён в окрест. эл-та $u \in \mathbb{B}$. Если для фиксир. $u$ $\exists\ l(u,h)$ – линейный по $h$ ф-л, такой, что

$$F[u+h] - F[u] = l(u,h) + \underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|), \quad (+)$$

то $l(u,h)$ называется дифференциалом (по Фреше) ф-ла $F$ в т. $u$.

Сравните опред. (**) и (+).

Утв. "Если $\exists$ дифференциал $l(u,h)$ на эл-те $u$, то он совпадает с I вариацией $\delta F(u,h)$."

Док-во: Пусть верно (+). Составим "заготовку" производной $\frac{d}{d\alpha} F[u+\alpha h]\Big|_{\alpha=0}$:

$$\frac{F[u+\alpha h]-F[u]}{\alpha} = \frac{l(u,\alpha h) + o(|\alpha|\,\|h\|)}{\alpha} = l(u,h) + \underbrace{\frac{o(|\alpha|\,\|h\|)}{\alpha}}_{\to 0}$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\alpha\to 0}$ (левой части) $\Rightarrow \exists\ \delta F(u,h) = l(u,h),\ \forall h$.

Замеч. Данное утв. в обратную стор. неверно, т.к. в общей ситуации $\delta F(u,h)$ не сохраняет св-во линейности по $h$, а только однородность, т.е.

$\delta F(u, \mu h) = \mu \cdot \delta F(u,h)$.

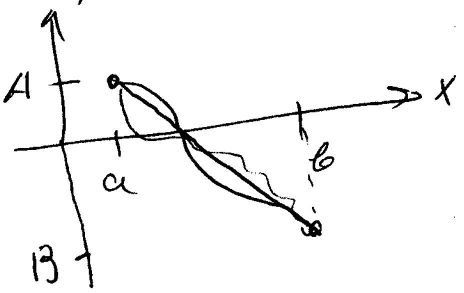
Опред. Если $\exists\ \delta F(u,h)$, то говорят, что ф-л $F$ дифференцируем по Гато.

! Далее считаем, что ф-лы дифференцируемы в сильном смысле (по Фреше), т.е. $l(u,h) = \delta F(u,h)$.

---

Выше мы считали, что $F$ опред. на $D = B$. Рассм. случай $D \subset B$ и потребуем, чтобы $D$ было линейно-аффинным множеством (или гов., линейным многообразием), т.е. $\boxed{D = \{\hat u\} + M,}$ где $\hat u$ - фикс. эл-т $B$, $M$ - линейное мн.

Примеры. 1) Пусть $B = C^1[ab]$, $D = \{v \in C^1[ab]: \begin{matrix} v(a)=A \\ v(b)=B \end{matrix}\}$ - это лин. многообразие: Пусть $M = C_0^1[ab] = \{v \in C^1[a,b]: v(a)=v(b)=0\}$, зафикс. $\forall$ ф. $\in D$, например - линейную ф., $\hat v$ проход. через т. $(a, A)$ и $(b, B)$. Тогда $D = \{\hat v\} + C_0^1[ab] = \{\hat v\} + M$.




Действит.: если $v = \hat v + h$, $h \in C_0^1[ab] \Rightarrow v \in D$. Обратно, зафикс. $\forall v \in D$ и представим её $v = \hat v + \underbrace{(v - \hat v)}_{\in M}$.

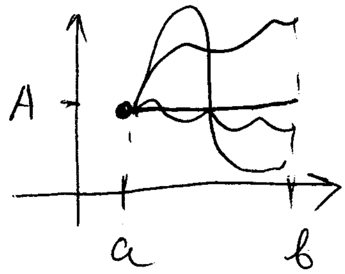
Пусть $u$ - точка loc min, т.е. $\exists\ \delta > 0$: $\forall v \in V_\delta(u) \cap D$ выполн. $F[u] \le F[v]$. Очевидно, что $w = u + \underbrace{h}_{\in M} \in D$, $\forall h \in M$, пусть $v = u + th$; $\|v - u\| = |t|\|h\| < \delta$ если $|t| < \frac{\delta}{\|h\|} = t_0$

$\Rightarrow v = u + th \in V_\delta(u) \cap D$, $|t| < t_0$

$\varphi(t) = F[u+th]$ $\Rightarrow \boxed{\delta F(u,h) = 0, \ \forall h \in M}$, т.е. $M$ - мн-во допуст. возмущений

В данном сл. $\delta F(u,h) = 0, \ \forall h \in C_0^1[ab]$.

2) Пусть $B = C^1[ab]$, $\mathcal{D}(F) = \{v \in C^1[ab];\ v(a) = A\}$




Тогда самая простая ф. $\hat{v}(x) \equiv A$;

$M_1 = \{h \in C^1[ab] : h(a) = 0\}$.

Действит. $v(x) = A + h(x)$, $\forall h \in M_1$,

$\Rightarrow v \in D = \{\hat{v}\} + M_1$. Тогда н. усл. экстрем.

$$\boxed{\delta F(u, h) = 0, \quad \forall h_{доп} \in M_1.}$$

Замеч. Класс допуст. возмущ. $h$ таков, чтобы при усл. $u \in \mathcal{D}$ выполн. $u + th \in \mathcal{D}$.

§3. Простейшая задача вариац. исчисл.

$F[u] = \int_a^b f(x, u, u')\,dx$, $f$ – дважды дифф. по $x \in [a, b]$, $u, p \in \mathbb{R}^1$ ($f = f(x, u, p)$).

$$\min_{\mathbb{D}} F[u], \quad \mathbb{D} = \left\{u \in C^1[ab] \;\middle|\; \begin{matrix} u(a) = A \\ u(b) = B \end{matrix}\right\}.$$

$$\mathbb{D} = \{\hat{u}\} + C_0^1[ab] \Rightarrow \boxed{\delta F(u, h) = 0, \quad \forall h_{доп} \in C_0^1[a, b]}$$ н. усл. экстр.

$$\delta F(u, h) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, u + \alpha h, u' + \alpha h')\,dx \Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \int_a^b [f_u(x, u + \alpha h, u' + \alpha h') \cdot h + f_{u'}(\ldots) \cdot h']\,dx \Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \int_a^b [f_u(x, u, u')\,h + f_{u'}(x, u, u')\,h']\,dx = 0, \quad \forall h \in C_0^1[ab].$$

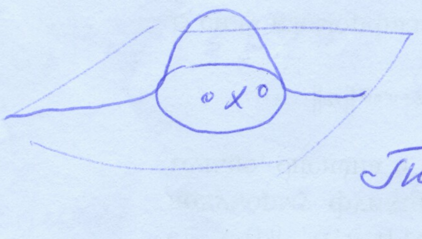
Какая информация следует из этого равве(нства) для $u(x)$? Чтобы ответить, д-м 3 леммы.

Лемма 1 (Лагранжа) Пусть $f\in C(\bar\Omega)$, где $\Omega$ — огран. обл. в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$. Пусть для всех $h\in C_0^k(\bar\Omega) = \{v\in C(\bar\Omega)$ и $D^\alpha v\in C(\bar\Omega)$, $|\alpha|\le k$; $D^\alpha v|_{\partial\Omega}=0$, $\forall|\alpha|\le n-1\}$,
$k\geq 1$, выполн. равво $\int_\Omega f\cdot h\,dx=0$. Тогда $f(x)\equiv 0$ в $\Omega$.

Док-во: Обозначение $D^\alpha v(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$ длина мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

От противного: пусть $f(x^0)\neq 0$, для определённости $f(x^0)>0$, $x^0\in\Omega$. По непрер. $f$: $\exists\,\delta>0$, что $f(x)>0$ в $V_\delta(x^0)=B_\delta(x^0)\subset\Omega$.

Рассм. ф-ю $\tilde h(x)=\begin{cases}(\delta^2-|x-x^0|^2)^{k+1}, & |x-x^0|<\delta;\\ 0, & |x-x^0|\geq\delta.\end{cases}$




$\tilde h\in C_0^k(\bar\Omega)$ — по построению.

Тогда $\int_\Omega f\cdot\tilde h\,dx=0$, но $\int_{B_\delta(x^0)} f\cdot\tilde h\,dx>0$,

что противоречит предполож. $\Rightarrow f(x)\equiv 0$ в $\Omega$. ∎

Замечание. В след. семестре мы докажем, что $[C_0^\infty(\Omega)]_{L^2} = L^2(\Omega)$.

Пусть некот. мн-во $M$: $C_0^\infty(\Omega)\subseteq M\subset L^2(\Omega) \Rightarrow$ переходя к замыканию по норме $L^2(\Omega)$:

$L^2(\Omega)=[C_0^\infty(\Omega)]_{L^2(\Omega)} = \bar M = L^2(\Omega) \Rightarrow [\bar M]_{L^2(\Omega)}=L^2(\Omega)$; Пусть $M=C_0^k(\bar\Omega)$

и верно $\int_\Omega f(x)\cdot h(x)\,dx=0$, $\forall h\in M$,

где $f\in L^2(\Omega)$, т.е. $(f,h)=0$, $\forall h\in M$. Если фиксир. $\forall\,\eta\in L^2(\Omega)$, $\exists\,\eta_n\in M: \|\eta_n-\eta\|_{2,\Omega}\to 0$. Вып-но: $(f,\eta_n)=0$ $\forall n$

$\Rightarrow (f,\eta)=0 \Leftrightarrow f\perp L^2(\Omega) \Leftrightarrow f=0$ п.в. в $\Omega$