Лекция 5 (VI сем)

§ 12. Вторая вариация. Достаточные условия экстремума.

Пусть $F: D \to \mathbb{R}^1$, $D \subseteq B$ – лин. многообраз.

Рассм. $F[u+\alpha h] = \varphi(\alpha)$, $u \in D$, $h \in M$

($D = \{\hat{u}\} + M$)

Пусть $\varphi(\alpha)$ – C^2-гладкая в окрестн. $\alpha = 0$, точнее, $\varphi \in C^2[-1,1]$.

$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot\alpha + \frac{\varphi''(0)}{2}\alpha^2 + \underset{\alpha\to 0}{o}(\alpha^2) \quad (1)$$

или
$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) + \varphi'(0)\alpha + \frac{\varphi''(\theta\alpha)}{2}\alpha^2 \quad (2)$$

$\exists\, 0<\theta<1$ – форма Лагранжа.

$$\varphi'(0) = \frac{d}{d\alpha} F[u+\alpha h]\Big|_{\alpha=0} = \delta F(u,h).$$

Определение:
$$\boxed{\delta^2 F(u,h) \overset{def}{=} \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2} F[u+\alpha h]\Big|_{\alpha=0}} = \frac{\varphi''(0)}{2}.$$

наз. второй вариацией ф-ла F на эл-те u с прираш. h.

Выясним смысл $\frac{\varphi''(\theta)}{2}$ (в ф-ле (2) $\alpha=1$)

$$\frac{\varphi''(\theta)}{2} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2} F[u+\alpha h]\Big|_{\alpha=\theta} \underset{\alpha-\theta=\beta}{=} \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\beta^2} F[u+\theta h+\beta h]\Big|_{\beta=0}$$

$= \delta^2 F(u+\theta h, h)$. $\Rightarrow$

Рав-во (2) при $\alpha = 1$ имеет вид

$$\boxed{F[u+h] = F[u] + \delta F(u,h) + \delta^2 F(u+\theta h, h)} \quad (3)$$

где $0<\theta<1$.

Пусть u – экстремаль ф-ла F ($\delta F(u,h)=0$, $\forall h \in M$) и $u+h \in V_\delta(u)$: если $\delta^2 F(u+\theta h, h) \geq 0 \Rightarrow$

$F[u+h] - F[u] \geq 0$, $\forall v \in V_\delta(u) \Rightarrow$ u – точка лок. min.

Т.к. усл. $\delta^2 F(u+\theta h, h) \geqslant 0$ мы не можем проверить, $\theta \in (0,1)$ явно в разложении (2) не определяется, то мы огрубим усл-е $\delta^2 F(u+\theta h, h) \geqslant 0$, $\forall h \in M$

Теор. (достат. усл. лок min).
Пусть u - экстремаль ф-ла F и $\exists \rho > 0$ такое, что $\forall v \in D$, $\|v-u\| < \rho$, $\forall h \in M$: $\|h\| < \rho$ выполняется $\delta^2 F(v,h) \geqslant 0$. Тогда u - сообщает ф-лу F лок. min.

Д-во: Зафикс. $h \in M$, $\|h\| < \rho$. Пусть $v = u+\theta h$, $0<\theta<1$, $\Rightarrow \|v-u\| = \|\theta h\| < \|h\| < \rho \Rightarrow \delta^2 F(u+\theta h, h) \geqslant 0$ и согласно (3) $F[u+h] - F[u] = \delta^2 F(u+\theta h, h) \geqslant 0$, $\forall h \in M$, $\|h\| < \rho \Rightarrow u$ - точка лок. min. ∎

Теор. (необх. усл. min). Пусть u сообщает лок. min ф-лу F на D. Тогда $\delta^2 F(u,h) \geqslant 0$ $\forall h$ допуст.

Д-во. Известно, что необх. усл. экстремума: $\delta F(u,h) = 0$, $\forall h \in M$. Предположение, что утв. т-мы неверно, т.е. $\exists h_0 \neq 0$ $\delta^2 F(u, h_0) < 0$. Рассм. ф-ю $\varphi(\varepsilon) = F[u+\varepsilon h_0]$. Согласно рав-ву (1)

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \underbrace{\varphi'(0)}_{=0} \cdot \varepsilon + \frac{\varphi''(0)\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2), \ \varepsilon \to 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon^2} = \frac{\varphi''(0)}{2} + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}; \quad \frac{\varphi''(0)}{2} = \delta^2 F(u, h_0) \Rightarrow$$

$$\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon^2} = \underbrace{\delta^2 F(u, h_0)}_{<0} + \underbrace{\frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}}_{\to 0,\ \varepsilon \to 0}; \tag{4}$$

пусть $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow$

тогда правая часть равва (4) отриц.

$\Rightarrow \varphi(\varepsilon) < \varphi(0)$, что противоречит предположе.

$F[u] \le F[v]$, $\forall v \in V_\delta(u)$. Следно, $\delta^2 F(u,h) \ge 0$

Утв-е 1. Пусть $\delta^2 F(v,h) \ge 0$ $\forall v \in D$, $h \in M$. Тогда, если u – экстремаль ф-ла F на D, тогда u сообщ. ф-лу F глоб. min на D.

Действительно, $\forall v \in D$ согласно равву (2) с $\alpha = 1$:

$$F[u+h] = F[u] + \overbrace{\delta F(u,h)}^{=0} + \delta^2 F(u+\theta h, h).$$

Полагая $v = u+h \Rightarrow F[v] = F[u] + \underbrace{\delta^2 F(u+\theta(v-u),h)}_{\ge 0}$

$\Rightarrow F[v] \ge F[u]$, $\forall v \in D$.

Примеры.

1) $F[u] = \int_a^b f(x,u,u')\,dx$, $u \in D = \{v \in C^1[ab] : v(a)=A,\ v(b)=B\}$

$$\delta^2 F(u,h) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_a^b f(x, u+\alpha h, u'+\alpha h')\,dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\int_a^b [f_u(x,u+\alpha h, u'+\alpha h')h + f_{u'}(x,u+\alpha h,u'+\alpha h')h']\,dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b [f_{uu}\cdot h^2 + \underline{f_{uu'}\cdot hh' + f_{u'u}\, h'h} + f_{u'u'}\, h'^2]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b [f_{uu}h^2 + f_{uu'}\cdot \underbrace{2hh'}_{\frac{d}{dx}(h^2)} + f_{u'u'}\cdot h'^2]\,dx \underset{\text{по частям}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \Big[\underbrace{f_{uu} - \frac{d}{dx}(f_{uu'})}_{P(x)}\Big]h^2 + \underbrace{f_{u'u'}}_{R(x)}\cdot h'^2]\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b (P\,h^2 + R h'^2)\,dx,$$

Если, в частности $f = f(x,u') \Rightarrow P \equiv 0$; $R = f_{u'u'}(x,u')$.

Если в этом случае $f_{u'u'}(x,u')>0$ $(f_{qq}(x,q)>0)$, (4)

тогда $\delta^2 F(v,h)\geq 0$, $\forall v\in D$, $\forall h\in \underbrace{C_0^1[a,b]}_{M}$,

причем $\delta^2 F(v,h)=0$ только при $h\equiv 0$.

Действит. $\delta^2 F(v,h)=\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{f_{v'v'}(x,v')}_{>0}\cdot h'^2\,dx=0 \Rightarrow$

$h'=0 \Rightarrow h=\text{const},\ h|_{x=a}=h|_{x=b}=0 \Rightarrow h\equiv 0$.

__Утв. 2.__ __Пусть $\delta^2 F(v,h)\geq 0$ $\forall v\in D$ и $h\in M$, причем__ __$\delta^2F(v,h)=0$ только при $h\equiv 0$. Тогда экстремаль и__ __сообщает ф-лу F единств. глоб. min на D.__

__Д-во__: Из усл-я Утв. 2 следует, что (5) $\delta^2 F(v,h)>0$ $\forall h\neq 0$.

Предпол., что $\exists\ u_1,u_2\in D$ — оба эл-та

~~сообщ~~ сообщ. min ф-лу F на D, т.е.

а) $F[u_1]\leq F[v]$, $\forall v\in D$; б) $F[u_2]\leq F[v]$, $\forall v\in D$

Тогда пусть $v=u_2$ в а) и $v=u_1$ в б);

$F[v]=F[u_2]=F[u_1]+\underbrace{\delta F(u_1,h_1)}_{=0}+\delta^2F(u_1+\theta h_1,h_1)>0 \Leftrightarrow$ $F[u_2]>F[u_1]$.

$u_2=u_1+\underbrace{h_1}_{u_2-u_1}$

из нер. б): $F[v]=F[u_1]=F[u_2]+\underbrace{\delta F(u_2,h_2)}_{0}+\delta^2F(u_2+\theta h_2,h_2)>0$

$u_1=u_2+\underbrace{h_2}_{u_1-u_2}$

$\Leftrightarrow F[u_1]>F[u_2]$.

Т.о., получаем: $F[u_2]<F[u_1]$, $F[u_1]<F[u_2]$, чего не м.б.

__Пример__: $E[v]=\int_0^l[p(x)(v')^2+\underbrace{q(x)v^2}_{\geq 0}+2f(x)v]\,dx$; $v\in C^1[0,l]$, $v(0)=A$, $v(l)=B$

$A_1)$ $p(x)\in C^1[0,l]$, $q,f\in C[0,l]$; $p(x)\geq p_0>0$, $q(x)\geq 0$ на $[0,l]$.

$\delta E(v,h)=\frac{d}{d\alpha}\int_0^l\{p(v'+\alpha h')^2+q(v+\alpha h)^2+2f(v+\alpha h)\}dx\Big|_{\alpha=0}=$

$=2\int_0^l[p(v'+\alpha h')h'+q(v+\alpha h)h+fh]dx\Big|_{\alpha=0}=$

$=2\int_0^l(pv'h'+qvh+fh)dx=2\int_0^l[-(pv')'+qv+f]h\,dx$

$\varphi(x, v, v') = p(v')^2 + qv^2 + 2fv$; пусть v — экстремаль,

$\varphi_{v'v'} = p(x) \geqslant p_0 > 0 \Rightarrow \exists \frac{d}{dx}(pv') \in C[0,l]$ (см. Лемму о $\exists v'' \in C[0,l]$)

$\Rightarrow$ ур. Эйлера: $\to (*) \begin{cases} -(pv')' + qv = F(x), \\ v(0) = A, \ v(l) = B \end{cases}$ $F = -f$.

Пусть v — экстремаль. Покажем, что реш. $(*)$ доставляет единств. глоб. min для $E[v]$ на D.

Вычислим $\forall w \in D$

$$\delta^2 E(w, h) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_0^l [p(w' + \alpha h')^2 + q(w+\alpha h)^2 + 2f(w+\alpha h)]dx\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^l (\underbrace{\overset{\geqslant p_0}{p}\, h'^2 + q\overset{\geqslant 0}{h^2}}) dx, \ \forall h \in C_0^1[0,l] \Rightarrow$$

Пусть $\delta^2 E(w,h) = 0 \Rightarrow h' = 0 \Rightarrow h = \text{const.} \Rightarrow h \equiv 0.$

$\Rightarrow \delta^2 E(w,h) > 0, \ \forall w \in D, \forall h \in M, h \neq 0. \Rightarrow$ Экстремаль v соотв. единств. глоб. min $E[w]$ на D.

Пример: $F[u] = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)dx$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, Ω — огр. с кус.-гладкой гр. $\partial\Omega$ (C^1)

$\min F$ на $D = \{v \in C^1(\bar\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = u\}$

$$\delta^2 F(v,h) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_\Omega f(x, v + \alpha h, \nabla v + \alpha\nabla h)dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\int_\Omega [f_v(x, v+\alpha h, \nabla v + \alpha\nabla h)\cdot h + \sum_{i=1}^n f_{v_{x_i}}(x, v+\alpha h, \nabla v + \alpha\nabla h)\cdot h_{x_i}]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega [f_{vv}\cdot h^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^n f_{vv_{x_j}} h\cdot h_{x_j} + \sum_{j=1}^n f_{v_{x_j}v}\cdot h_{x_j}\cdot h}_{\cancel{2}\sum f_{vv_{x_j}}\frac{d}{dx_j}(h^2)} + \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n f_{v_{x_j}v_{x_k}}\cdot h_{x_j}h_{x_k}]dx\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega [\underbrace{(f_{vv} - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j}(f_{vv_{x_j}}))}_{P(x)} h^2 + \sum_{k,j\leqslant n} \underbrace{f_{v_{x_j}v_{x_k}}}_{R_{ij}(x)} h_{x_j}h_{x_k}]dx$$

Частн. сл. $f = f(x, \nabla v) \Rightarrow P(x) = 0$. Если квадрат. форма $\sum_{k,j} f_{q_j q_k}(x,q)\xi_k\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2, \ \forall q \in \mathbb{R}^n, \ \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\delta^2 F(v,h) \geqslant \frac{\nu}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 dx \Rightarrow$ Экстремаль единств. и соотв. ф-лу абс. min

Интеграл Дирихле

$$E[u]=\int_\Omega\left(\frac{k(x)}{2}|\nabla u|^2+g(x)u\right)dx \qquad D=\{u\in C^1(\bar\Omega),\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\}$$

$$M=C_0^1(\bar\Omega).$$

$$\boxed{\begin{gathered}\delta E(u,h)=0\\ \forall h\in C_0^1(\bar\Omega)\end{gathered}} \Rightarrow (*)\begin{cases}-\operatorname{div}(k(x)\nabla u)+g=0\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases} \Big| \quad \underline{k(x)\geq k_0>0}$$

$$\delta^2E(u,h)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_\Omega\left[\frac{k(x)}{2}\sum_{j=1}^n(u_{x_j}+\alpha h_{x_j})^2+g(u+\alpha h)\right]dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\int_\Omega\left(k(x)\sum_{j=1}^n(u_{x_j}+\alpha h_{x_j})h_{x_j}+gh\right)dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega k(x)\sum_{j=1}^n h_{x_j}^2\,dx\geq\frac{k_0}{2}\int_\Omega|\nabla h|^2dx\Rightarrow$$

$\forall u\in D:\ \delta^2E(u,h)>0,\ h\neq0, \Rightarrow$ реш. $(*)$ опред. единств. глоб. min в D.

Упражн. Вычислить $\delta^2S(u,h)$ для интеграла площадей $S[u]=\iint_\Omega\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy$, $D=\{u\in C^1(\bar\Omega): u|_{\partial\Omega}=\varphi\}$.

§ 13. Исследование δ^2F в простейшей задаче. Условия Лежандра и Якоби.

Как было показано в § 12, если $F[u]=\int_a^b f(x,u,u')dx$, $D=\{v\in C^1[ab]: v(a)=A,\ v(b)=B\}$, то

$$2\cdot\delta^2F(u,h)=\int_a^b\left(R(x)h'^2+P(x)h^2\right)dx.$$ Пусть u – экстремаль и $R(x)=f_{u'u'}(x,u(x),u'(x))$, $P(x)=f_{uu}(x,u,u')-\frac{d}{dx}f_{uu'}(\dots)$ – вычислены вдоль экстремали.

Утв. Чтобы $\delta^2F(u,h)\geq0$ (u – экстремаль, $\forall h\in M$), необходимо, чтобы $R(x)=f_{u'u'}(x,u(x),u'(x))\geq0$, $x\in[ab]$.

Док: Предпол., что $\exists\ x^0 \in (a,b) : R(x^0) < 0$.

По непрер. $R(x)$ $\exists\ V_\rho(x^0) \in (a b) : R(x) < 0,\ \forall x \in V_\rho(x^0)$,

Рассм. $\forall\ \xi \in C_0^1[-1,1]$; $|\xi(y)| \le 1$, $|\xi'(y)| \le m$.

Тогда $h(x) = \xi\left(\frac{x - x^0}{\rho}\right) \in C_0^1[x^0 - \rho, x^0 + \rho]$; $h'(x) = \xi'(x) \cdot \frac{1}{\rho}$

$$\int_a^b [\underbrace{R(x)}_{} h'(x)^2 + \underbrace{P(x)}_{\text{огр.}} h^2(x)]\,dx = \int_{x^0-\rho}^{x^0+\rho} \Big[\underbrace{\frac{\overset{<0}{R(x)} (\xi')^2}{\rho^2}}_{<0} + \underbrace{P(x)}_{\text{огр.}} \overset{\le 1}{h^2}\Big] dx \ge 0$$

(в силу необх. усл. min) $\delta^2 F \ge 0$, но $\Rightarrow \delta^2 F(u,h) < 0$, что против.

$\Rightarrow R(x) \ge 0$.

Опред. Усл. $R(x) = f_{u'u'}(x, u(x), u'(x)) \ge 0$, (вдоль экстремали) $x \in [a,b]$,

назыв. усл. Лежандра на $[ab]$ назыв. усиленным усл.

Усл. $R(x) > 0$ на $[ab]$ Лежандра.

Возник вопрос о возможности представить выраж. $Rh'^2 + Ph^2$ в виде полного квадрата – идея Лежандра

Идея: пусть $\omega \in C^1[a,b]$ – её выберем позже,

тогда $\int_a^b (\omega h^2)'\,dx = \omega h^2 \big|_a^b = 0$, $\forall h \in C_0^1[ab]$. Пусть $R(x) > 0$ на $[ab]$.

Представим $2\delta^2 F(u,h) = \int_a^b (Rh'^2 + Ph^2)\,dx =$

$$= \int_a^b \big(Rh'^2 + \underline{\omega' h^2 + \omega \cdot 2hh'} + Ph^2\big)\,dx =$$

$$= \int_a^b R\Big(h'^2 + \underline{\frac{2\omega}{R} h \cdot h'} \pm \left(\frac{\omega}{R}\right)^2 h^2 + \frac{(\omega' + P)}{R} h^2\Big)\,dx =$$

$$= \int_a^b \Big\{R\left(h' + \frac{\omega}{R} h\right)^2 + R\left[\frac{\omega' + P}{R} - \frac{\omega^2}{R^2}\right] h^2\Big\}\,dx = 0.$$

Хотим найти ω: $(*)\ \frac{\omega' + P}{R} - \frac{\omega^2}{R^2} = 0,\ x \in [a b]$

или $\underline{R(\omega' + P) = \omega^2}$ – нелин. ур-е

$\exists$ ли $\omega \in C^1[ab]$, удовл. ?

Лагранж указал, что нелин. ур. (*) может не иметь на $[a,b]$ C^1-гладкого реш-я $\omega(x)$. Якоби пок-л, как можно дополнить требование $R(x)>0$ на $[ab]$, чтобы $\exists\ \omega \in C^1[ab]$.

Сделаем замену в (*): $\omega = -\frac{Rv'}{v} \Rightarrow$

$\omega' = -\frac{(Rv')'}{v} + \frac{Rv' \cdot v'}{v^2}$; подставим в нелин. ур-е

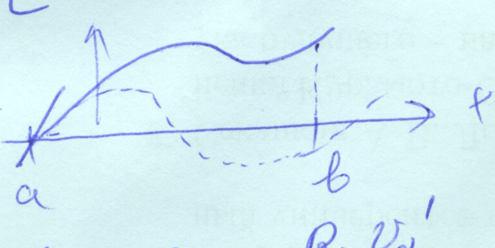
$$(\omega' + P) - \frac{\omega^2}{R} = 0 \Leftrightarrow P - \frac{(Rv')'}{v} + \frac{R(v')^2}{v^2} = \frac{(Rv')^2}{v^2 \cdot R}$$

$$\Rightarrow \boxed{-(Rv')' + Pv = 0, \quad x \in [a,b].} \quad (+)$$

Отметим, что мы получим ур. Эйлера для ф-ла $G[v] = \int_a^b (R(v')^2 + Pv^2)\,dx$.

Условие Якоби состоит в том, что задача Коши

$$\begin{cases} -(Rv')' + Pv = 0, & x \in [a,b]; \\ v(a) = 0, \ v'(a) = 1, \end{cases}$$ имеет реш. $v(x) > 0$ на $(a,b]$.



Тогда для $0 < \alpha \ll 1$ задача

$$\begin{cases} -(Rv')' + Pv = 0, & x \in [ab] \\ v(a) = \alpha, \ v'(a) = 1 \end{cases}$$ имеет реш. $v_\alpha(x) > 0$ на $[ab]$

и $\omega = -\frac{R v_\alpha'}{v_\alpha}$, $v_\alpha \in C^2[ab]$.

яв. ф-ей, кот. обеспечит выдел. полного квадрата для подинтегр. ф-ции $\delta^2 F(u,h)$. Далее доказыв. дополнительно 1) $\delta^2 F(u,h) \geq \nu \|h\|^2_{C^1[ab]}$, $\nu = const > 0$

2) $\delta^2 F(v,h) > 0$ для $v \in V_\delta(u)$, $h \in C_0^1[ab]$ (при некот. δ)

Вывод $\Rightarrow$ при выполнении усил. усл. Лежандра + усл. Якоби экстремаль ф-ла F на D сообщает этому ф-лу лок. min.

§ 14. О прямых методах вариац. исчисления.

Постановка задачи: $F: D \subseteq B \to \mathbb{R}^1$; $d = \inf_D F[u] \geq -\infty$

"Последоват. $\{u_n\} \in D$ называется минимизирующей для F на D, если $F[u_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} d$.

Минимизирующая последовательность $\exists$ всегда;

а) $d > -\infty$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists u_n$: $F[u_n] < d + \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $d \leq F[u_n] < d + \frac{1}{n}$, переходя к $\lim_{n\to\infty}$ $\Rightarrow$ $\exists \lim_n F[u_n] = d$.

б) $d = -\infty$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists u_n$: $F[u_n] < -n$ $\Rightarrow$ $\lim_n F[u_n] = -\infty$.

Вопросы 1) Как построить минимизир. последоват.?

2) Показать, что $\exists u_0 \in D$: $F[u_0] = d$.

3) Обосновать единственность u_0.

Доп. литература. М.М. Вайнберг "Вариац. метод и метод монотонных операт."

- Михлин С.Г. а) "Вариац. методы в математич. физике." б) "Численная реализация вариац. методов."
- Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариац. проблемы
- Балакришнан А.В. "Прикладной функц. анализ."

Т. (Вейерштрасса). Пусть F непрер. ф-л на $K \subset B$, где K - комп. мн-во банах. пр-ва B. Тогда

1) $\left| \sup_{u \in K} F[u] \right| \leq const.$ 2) $\exists u^-, u^+ \in K$: $F[u^-] = \inf_K F[u]$, $F[u^+] = \sup_K F[u]$.

Док-во. Покажем, что $\exists C > 0$: $F[u] \leq C$. От противного: пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists u_n \in K$: $F[u_n] > n$.

Из компактности K: $\exists \{u_{n_k}\}$, $u_{n_k} \in K$ и $u_{n_k} \to u_0 \in K$. Из непрер-ти F: $F[u_{n_k}] \xrightarrow[k\to\infty]{} F[u_0]$, т.е. $\{F[u_{n_k}]\}$ – огранич. числ. послед, но по предполож. $F[u_{n_k}] > n_k$ $\Rightarrow$ противоречие. $\Rightarrow \exists C$: $F[u] \leq C$, $\forall u \in K$.

2). Пусть $\{u_n\}$ – минимизир. послед., т.е. $F[u_n] \to d = \inf F[u]$. Из компактности K: $\exists \{u_{n_k}\} \in K$: $u_{n_k} \to u^-$, $u^- \in K$, по непрер-ти F: $F[u_{n_k}] \to F[u^-] = d$.

Аналогично: $\exists u^+ \in K$: $F[u^+] = \sup\limits_K F[u]$.

Замеч. 1) Компактность мн-ва – очень сильное огранич.
2) если нас интересует только $\inf\limits_K F[u]$, тогда можно потреб. только п/н. снизу на K ф-ла F, тогда

Т.' (Вейерштрасса). Пусть F – п/н снизу на $K \subset B$ ф-л, где K – комп. мн-во. Тогда $\exists u^0 \in K$: $F[u^0] = \inf\limits_K F[u] = d$.

Действительно, пусть $\{u_n\}$ – минимиз. послед. $u_n \in K$, т.е. $F[u_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} d = \inf\limits_K F[u]$. Из компакт. K: $\exists\ u_{n_k} \to u_0 \in K$. Из п/н. снизу: $F[u_0] \leq \varliminf\limits_{n_k} F[u_{n_k}] = d$ $\Rightarrow F[u_0] = d$.

Замеч. Усл-е компактности мн-ва K и усл. п/н. снизу F будем ослаблять.

Опред. Последоват. $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ (слабо сход. в B), если $\forall\, l \in B^*$: $l(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l(v)$.

Если $B = H$ – гильб., то в силу т. Рисса о представлении лин. непр. ф-лов слабая сходимость v_n к v в H: $(v_n, w) \xrightarrow[n\to\infty]{} (v, w)$ $\forall\, w \in H$.

Очевидно, что из сильной сходимости (по норме) следует слабая сходим. (обратное неверно). Действит., пусть $\|v_n - v\|_B \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow$ $\forall l \in B^*$ рассм. $|l(v_n) - l(v)| = |l(v_n - v)| \le C\|v_n - v\| \to 0$

Опред. Функционал F слабо полунепрерывен снизу (с. п/н. с) на $D \subseteq B$, если $\forall u_n, u_0 \in D$, $u_n \underset{n\to\infty}{\to} u_0 \Rightarrow F[u_0] \le \underline{\lim} F[u_n]$.

Теор. 1 Пусть F – с. п/н. с. на мн-ве $D \subset B$ рефл. если D – огранич. и слабо замкн. мн-во в B, то F ограничен снизу и достигает наименьшего значения на D.

Док-во. Пусть $\{u_n\}$ – минимизир. послед. на D, т.е. $\lim_n F[u_n] = d \ge -\infty$. Эта последоват. ограничена в рефлекс. пр-ве B $(B^{**} = B)$. В рефлексивных банах. пр-вах огранич. мн-во слабо предкомпактно, т.е. $\exists \{u_{n_k}\}$: $u_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{B} u_0$. Т.к. D – слабо замкн., то $u_0 \in D$. Из слабой п/н снизу F на D следует, что $F[u_0] \le \underline{\lim}_{n_k} F[u_{n_k}] = d \Rightarrow F[u_0] = d \Rightarrow (d > -\infty)$.

Следствие Т.1. Если в усл. Т.1 D – огранич. выпуклое замкнутое мн-во, то утв. Т.1 верно.

т. Мазура $\boxed{\forall \text{ выпукл + замкн. мн-во} \to \text{слабо замкнуто}}$ в рефлекс. пр-вах.

Откажемся от требования ограниченности мн-ва D.

Опред. Пусть F опред. на неогранич. мн. $D \subseteq B$. Если $F[u] \underset{\substack{\|u\|\to+\infty \\ u\in D}}{\longrightarrow} +\infty$, то F называется коэрцитивным на D.

Теор. 2. Пусть F – сл. п/н. снизу ф-л на $D \subseteq \mathbb{B}_{\text{реф}}$, D – выпуклое замкн. мн-во в B, $F[u] \underset{\substack{u\in D \\ \|u\|\to\infty}}{\longrightarrow} +\infty$ (коэрц.) Тогда F достигает наименьшего значения на некот. $u_0 \in D$, т.е. $F[u_0] = d$.

Док-во. Зафикс. $\forall \tilde{u} \in D$ ($D \neq \emptyset$) и пусть $R > 0$ такое, что $\forall u \in D$, $\|u\| > R$ выполн. $F[u] > F[\tilde{u}]$ (из коэрц.)

Пусть $D_R = \underset{\text{вып.}}{D} \cap \underset{\text{вып}}{\overline{B_R(0)}}$ – вып. огранич. замкн. мн-во.

Из следствия к Ст. 1 $\exists\, u_0 \in D_R$: $F[u_0] = \min\limits_{D_R} F[u]$.

Т.к. для $u \in D \setminus D_R$ $\|u\| > R$, то $F[u] > F[\tilde{u}] \geq F[u_0]$

$\Rightarrow F[u_0] = \inf\limits_{D} F[u] = d$, ч.т.д.

О слабой п/н снизу ф-ла F.

Сначала докажем полезное утв-е.

Опр. $F[u]$ – выпуклый функционал на выпуклом мн. $V \subset \mathbb{B}$, если $\forall \alpha \in [0,1]$ и $\forall\, u, v \in V$ выполн.

$$F[\alpha u + (1-\alpha) v] \leq \alpha F[u] + (1-\alpha) F[v] \qquad (1)$$

Опр. Если F определен на некот. $D \subset \mathbb{B}$ и $\forall u, u+h \in D$

$$F[u+h] = F[u] + l(u,h) + \underset{\|h\|\to 0}{o(\|h\|)}, \qquad (2)$$

где $l(u,h)$ – лин. непрер. (огранич.) по h ф-л, тогда будем гов., что $F \in C^1(D)$.

Как ранее отмечалось, в такой ситуации $l(u,h)=\delta F(u,h)$.

Утв. Пусть на выпуклом мн. $U\subset B$ определён $F\in C^1(U)$. Чтобы F был выпуклым н. и д. чтобы

$$F[v]-F[u]\geq \delta F(u, v-u), \quad \forall u,v\in U. \quad (2)$$

(Н) Пусть F выпукл. на U. Для $\forall u,v\in U$ и $t\in[0,1]$ рассм. ф-ю $\omega(t):=F[\underbrace{u+t(v-u)}_{\in U}]$ и покажем, что $\omega(t)$ выпукла. Зафикс. $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ и $\alpha\in[0,1]$. Треб. док.:

$$\omega(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)\leq \alpha\omega(t_1)+(1-\alpha)\omega(t_2). \quad (3)$$

Рассм. разность $\alpha\omega(t_1)+(1-\alpha)\omega(t_2)-\omega(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)=$

$$=\alpha F[\underbrace{u+t_1(v-u)}_{y_1}]+(1-\alpha)F[\underbrace{u+t_2(v-u)}_{y_2}]-F[\underbrace{u+(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)(v-u)}_{=\alpha u+(1-\alpha)u}]$$

$=\alpha F[y_1]+(1-\alpha)F[y_2]-F[\alpha y_1+(1-\alpha)y_2]\geq 0$ – в силу выпукл. F.

Т.о., (3) верно. Известно, что если выпукл. ф-я дифференц-ема, то $\omega'\nearrow$ (не убывает). $\exists\ \frac{d\omega}{dt}=\frac{d}{dt}F[u+t(v-u)]$ – т.к. F дифф. по предполож. $\Rightarrow \omega(1)-\omega(0)=\omega'(\xi)\geq\omega'(0)$

$\Leftrightarrow F[v]-F[u]\geq\delta F(u, v-u)$, т.е. (3) верно.

(Д). Пусть (3) верно. Рассм. $\forall\alpha\in[0,1]$ разность.

$$\alpha F[u]+(1-\alpha)F[v]-F[\underbrace{\alpha u+(1-\alpha)v}_{\tilde u}]=\left(1=\alpha+(1-\alpha)\right)=$$

$$=\alpha\{F[u]-F[\tilde u]\}+(1-\alpha)\{F[v]-F[\tilde u]\}\geq\alpha\cdot\delta F(\tilde u,(1-\alpha)(u-v))+$$

$$+(1-\alpha)\delta F(\tilde u,\alpha(v-u))=\alpha(1-\alpha)\delta F(\tilde u,u-v)+(1-\alpha)\alpha\,\delta F(\tilde u,v-u)=0.$$

Следствие. Если $\exists\ \delta^2F$ на U и известно, что $\delta^2F(u,h)\geq 0$, $\forall u\in U$, $h_{\text{доп}}$ $\Rightarrow$ из разложения

$$F[v]=F[u]+\delta F(u,v-u)+\underbrace{\delta^2F(u+\theta(v-u),v-u)}_{\geq 0}\Rightarrow$$

$$F[v]-F[u]\geq\delta F(u,v-u),$$ т.е. верно (2).

Это означает, что из усл. $\delta^2 F \geq 0 \Longrightarrow$ F выпукла на U (U — выпукл. $\subseteq \mathbb{B}$).

Теорема*. Пусть F опред. на выпуклом мн. $U \subset \mathbb{B}$, $F \in C^1(U)$ и выпуклый на U. Тогда F — слабо полунепрерывен снизу (с. п/н. с) на U.

Док: Согласно утв-ю, $F[v] - F[u] \geq \delta F(u, v-u)$, $\forall u, v \in U$.

Пусть $u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ в $\mathbb{B}$, $u_n, u \in U$, тогда $F[u_n] - F[u] \geq \ell(u, u_n - u)^*$ ($\delta F = \ell$ по предпол.)

Т.к. $\ell(u, u_n - u) \to 0$, то $F[u] \leq \varliminf_n F[u_n]$, т.е. F — с. п/н. с. на U.

Замечание. Если F — дважды диффер. на вып. U и $\delta^2 F \geq 0$ на $U \Longrightarrow F$ — выпуклый и с. п/н. с. на U.

Из этого Замечания и Теор. 2 следует

Теор. 3. Пусть U — выпукл. замкнутое мн. в Врефл. Пусть F а) дважды диффер. и $\delta^2 F \geq 0$ на U;

б) F — коэрцитивн. на U.

Тогда $\exists\, u_0 \in U$: $F[u_0] = \inf\limits_U F[u]$.