Лекция №7 (6 семестр)

§15. Задача о минимуме квадратичного функционала.

Рассм. квадратичн. функционал

(1) $J[u]=\int_0^l [p(x)(u')^2+q(x)u^2+g(x)u]dx$, $u(0)=u(l)=0$

(частн. случай $J_0[u]=\int_0^l \left[\frac{k(u'(x))^2}{2}-f(x)u\right]dx$ - потенц. энерг. струны под действ. вертик. прилож. силы $f(x)dx$ на $(x,x+dx)$)

$\Delta A_{\text{сил натяж.}}=k\Delta l=k(\sqrt{1+u'^2}\,dx-dx)\simeq\frac{ku'^2}{2}dx$ $(|u'|<<1)$

Мы ранее рассм. ф-л (1) в классе $C_0^1[0,l]$ при

усл. A_1 $p\in C^1[0,l]$, $q,f\in C[0,l]$; $p(x)\geq p_0>0$, $q(x)\geq 0$.

Т.к. ф-л J - выпуклый $\left(\begin{matrix}\delta^2 J\geq 0\\ \delta^2 J=0, u=0\end{matrix}\right)$ $\Rightarrow$ нужно только исслед. задачу

(2) $\begin{cases}-(p(x)u')'+q(x)u=F\\ u(0)=u(l)=0,\ F=-\frac{g(x)}{2}\end{cases}$

Пусть выполнен усл.

A_2 p,q - огранич. на $[0,l]$, $g\in L^2(0,l)$; $p(x)\geq p_0>0$, $q(x)\geq 0$.

(Можно считать, что $p,q\in L^\infty(0,l)$).

При усл-ях A_2 рассм. зад. (1) в более широком классе ф-й.

Опред. Рассмотрим линейное мн-во ф-й $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$:

1) $v(x)$ - абсолютно непрер. на $[0,l]$; $\Rightarrow \exists w\in L^1(0,l)$: $v(x)=\int_0^x w(s)ds+c$

2) $v'\in L^2(0,l)$;

3) $v(0)=v(l)=0$.

На мн-ве, удовл. усл. 1)-3) определим скалярное произвед. $(u,v)=\int_0^l u'\cdot\bar{v}'dx$. Мн-во ф-й $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ с введённым скал. произведением называется пр-вом Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$. $\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}=\int_0^l |u'|^2dx$..

②

- Полноту пр-ва $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ докажем позже.
- Если ф-ции u, v – веществ. значен, то $(u,v)=\int_0^l u'\cdot v'dx$.

- Можно писать $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,l]$ вместо $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$, т.к. ф-ции непрер. на $[0,l]$.

Справедливы неравенства

$$\boxed{\max_{[0,l]}|v(x)|\le\sqrt{l}\,\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}}\quad ⓐ$$

Действит., $v(x)=\underset{0}{\underbrace{v(0)}}+\int_0^x v'(\tau)d\tau$; $|v(x)|\le\int_0^l|v'(x)|dx\le$

$\le\left(\int_0^l|v'|^2dx\right)^{\frac12}\cdot\sqrt{l}\Rightarrow\|v\|_{C[0,l]}\le\sqrt{l}\,\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}$, чтд.

$$\|v\|_{L^2(0,l)}\le l\,\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}.\quad ⓑ$$

Док-во: $|v(x)|\le\int_0^l|v'(x)|dx\Rightarrow|v(x)|^2\le\left(\int_0^l|v'|dx\right)^2\le\int_0^l|v'|^2dx\cdot l\Rightarrow$

$\int_0^l|v|^2dx\le l^2\cdot\int_0^l|v'|^2dx\Rightarrow$ ⓑ, чтд.

Утв-е. Пр-во $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ – полное пр-во.

Док-во: Пусть послед. $\{v_n\}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$, $\|v_n-v_m\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0\Leftrightarrow$

$\|v_n'-v_m'\|_{L^2(0,l)}\to0$. Из полноты $L^2(0,l)$: $\exists\, w\in L^2(0,l)$:

$v_n'\to w$ в $L^2(0,l)$. Кроме того, из неравенства ⓐ:

$\|v_n-v_m\|_{C[0,l]}\le\sqrt{l}\,\|v_n-v_m\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0$. Из полноты

пр-ва $C[0,l]$: $\exists\, v\in C[0,l]$: $v_n\rightrightarrows v$ на $[0,l]$.

Верно представление: (*) $v_n(x)=\int_0^x v_n'(y)dy$, $n\in N$

Оценим

$$\left|\int_0^x v_n'(y)\,dy - \int_0^x w(y)\,dy\right| \le \int_0^x |v_n' - w|\,dy \le \left(\int_0^\ell |v_n'-w|^2 dy\right)^{\frac12}\sqrt{\ell} =$$

$$= \sqrt{\ell}\cdot \|v_n' - w\|_{L^2(0,\ell)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ В равве (*) переходим к lim:

$v(x) = \int_0^x w(y)\,dy$, где $w \in L^2(0,\ell)$. Очевидно, что $v(0)=v(\ell)=0$

$\|v_n' - v'\|_{L^2} = \|v_n - v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \to 0.$

$\Rightarrow v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell).$ $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell) = H$ – гильб. пр-во.

A $\|_2$

Вариац. задача $\left\|\begin{array}{l}\min J[u] \quad \text{при внш. усл.} \\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell) \quad (3)\end{array}\right.$

I способ. Определим энергетич. скал. произвед.

$$[u,v] = \int_0^\ell \left(p(x)u'\cdot\bar v' + q(x)u\cdot\bar v\right)dx;\quad |u|^2 = \int_0^\ell (pu'^2 + qu^2)\,dx.$$

Нормы $|\cdot|$ и $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}$ эквивалентны:

1) $|u|^2 \ge p_0 \|u'\|^2_{L^2(0,\ell)} = p_0 \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}$;

нер. 8

2) $|u|^2 \le \underbrace{\sup_{[0,\ell]} p(x)}_{=p_+} \|u'\|^2_{L^2(0,\ell)} + q_+ \|u\|^2_{L^2(0,\ell)} \le p_+ \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} +$

$+ q_+ \ell^2 \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)} = (p_+ + q_+\ell^2)\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)} \Rightarrow |u| \simeq \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}.$

Пр-во со скал. произвед. $[\cdot,\cdot]$ называется энергетич. пр-вом, будем обозначать H_L. (здесь веществ. ф-ции)

$$J[u] = [u,u] + \underbrace{(g,u)_{L^2(0,\ell)}}_{S[u]} = |u|^2 + S[u],$$

$S[u]$ – лин. огранич. в H_L ф-л:

$$|S[u]| \le \|g\|_{L^2(0,\ell)}\|u\|_{L^2(0,\ell)} \overset{8}{\le} \ell\|g\|_2\cdot \overbrace{\|u'\|_{L^2(0,\ell)}}^{\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}} \le$$

$$\le c\|g\|_2\cdot|u|,\ \forall u\in H_L \Rightarrow \text{по т. Рисса } \exists F \in H_L:$$

$S[u] = [F, u] \Rightarrow J[u] = [u,u] + [F,u] =$

$= \left[u + \frac{F}{2}, u + \frac{F}{2}\right] - \frac{1}{4}[F,F] \geq -\frac{1}{4}\|F\|^2$, причем знак "$=$"

при $u_0 = -\frac{F}{2}$. На этом u_0 ф-л $J[u]$ достигает наименьшего значения.

II способ (применим Теор. 3 § 14). Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ $\Rightarrow h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$

$$(4)\ \boxed{\delta J(u,h) = 2\int_0^l \left[p u' \cdot h' + q u \cdot h + \frac{g}{2} h\right] dx = 0}$$

$\forall h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$. — необх. усл. экстр. в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$.

$$\delta^2 J(v,h) = \int_0^l (p(h')^2 + q h^2)\, dx \geq p_0 \|h'\|^2_{L_2(0,l)} = p_0 \|h\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} > 0 \quad \forall h \neq 0.$$

— J — выпуклый функционал в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l) \Rightarrow J[u]$ слабо п/н снизу в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$.

Кроме того, $J[u]$ — коэрцитивный ф-л в:

$$J[u] \geq p_0 \|u'\|_2^2 - |(g,u)_2| \underset{(5)}{\geq} p_0 \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} - \|g\|_2 \cdot l \|u'\|_2$$

$(|(g,u)| \leq \|g\|_2 \|u\|_2 \underset{(5)}{\leq} l\|g\| \|u'\|_2)$

Воспользуемся нерав. Коши с "ε":

$$|a \cdot b| = \left|a\sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\right| \leq \frac{a^2 \varepsilon}{2} + \frac{b^2}{\varepsilon 2} \qquad (a^2 - 2ab + b^2 > 0) \quad |ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow \|g\|_2 \cdot l \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} \leq \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|g\|_2^2 l^2}{2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow J[u] \geq p_0 \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} - \frac{l^2}{2\varepsilon}\|g\|_2^2.$$

Пусть $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{p_0}{2} \Rightarrow J[u] \geq \frac{p_0}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} - \underbrace{\frac{l^2}{2p_0}\|g\|_2^2}_{\text{фикс.}} \to +\infty$ $\quad \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \to \infty$

$\Rightarrow J[u]$ — коэрцит. на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$

По т. 3 § 14 $\exists u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$: $\min\limits_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} J[u] = J[u^0]$.

Т.к. $\delta^2 J > 0 \Rightarrow u^0$ — единств., удовл. тожд. (4). ☒

III способ. Пусть дополнит. известно, что выполнены условия A_1. Тогда можно решить ($\exists$ единств. реш., которое будет построено с помощью ф. Грина) ур-е

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = F(x), \ x \in [0, l] \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad F = -\frac{g}{2}$$

(это задача (2).

$\exists$ единств. реш. $u \in C^2[0, l]$. Эта ф-я удовл. тожд-ву (4), т.к. $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, l)$ и ясно $\overline{C_0^1[0, l]} = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, l)$. Других экстремалей в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, l)$ нет и вариац. задача (3) однозначно разрешима.

Замечание. Функция $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, l)$, удовлетв. тождеству (4), называется обобщенным решением краевой задачи (2).