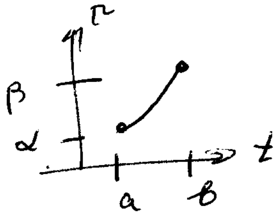
Лекция 4 (VI сем.)

§ 8. Специфика задач в параметр. форме

Пусть на плоскости кривая γ задана в параметрич. форме
$\gamma: \{x(t), y(t)\}$, $t\in[a,b]$; сделаем замену $\tau=\tau(t)$, $\tau'(t)>0$;
пусть $\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau))$, $\tilde{y}(\tau) = y(t(\tau))$, $\tau\in[\alpha,\beta]$. Т.о.,
$\gamma: \{\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)\}$, $\tau\in[\alpha,\beta]$. Таких параметриз. ∞ много.



(!) Чтобы вариац. задачи в параметрич. форме имела смысл, необходимо, чтобы значение функционала не зависело от способа параметризации, а зависело только от кривой, которую эти параметризации задают: $\Phi[x(t), y(t)] = \Phi[\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)]$.

Какие усл. это накладывает на Φ?

Рассм. сначала случай, когда $\gamma: y=y(x)$, $x\in[a,b]$, т.е. возможно определить единств. ф-ю $y(x)$, кот. опред. γ.

$$\Rightarrow \Phi\{\gamma\} = \Phi[y] = \int_a^b f(x,y,y'(x))\,dx = (*) \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{пусть } t\in[\alpha,\beta] \\ \text{и } x=x(t); \\ \quad y=y(t) \end{array}\right.$$

$$(*) = \int_\alpha^\beta \underbrace{f\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)}_{=\varphi(x(t),\,y(t),\,\dot{x},\,\dot{y})}\,dt.$$

В этом случае 1) φ явно не зависит от t;
2) φ — положит. однородна I степени по аргументам $\dot{x}, \dot{y}$, т.е. $\varphi(x,y,k\dot{x},k\dot{y}) = k\,\varphi(x,y,\dot{x},\dot{y})$, $\forall k>0$.

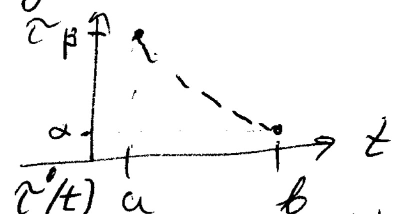
Покажем, что справедливо след. утв-е:

Утв. Пусть $\Phi[x,y] = \int_a^b f(t,x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))\,dt$.
Если 1) f явно не зависит от t, т.е. $f=f(x,y,\dot{x},\dot{y})$;
2) $f(x,y,k\dot{x},k\dot{y}) = k\,f(x,y,\dot{x},\dot{y})$, $\forall k>0$, (положит. однородн.)

тогда значение ф-ла F не зависит от способа параметризации.

Док-во:

Пусть $\tau=\tau(t)$, $\tau'(t)>0$ (если $\tau'<0$, то изменим направл. обхода)



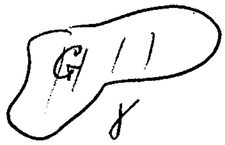
$$F\{\gamma\}=\int_a^b f(x(t),y(t),\dot x(t),\dot y(t))dt=\oplus$$

$\tilde x(\tau)=x(t(\tau))$ $\quad \tilde x'_\tau=\dot x(t)\cdot\frac{dt}{d\tau}$; $\quad \dot x(t)=\tilde x'_\tau\cdot\dot\tau(t)$ $\quad \tau(a)=\beta,\ \tau(b)=\alpha$

$$\oplus=\int_\alpha^\beta f\left(\tilde x(\tau),\tilde y(\tau),\tilde x'_\tau\cdot\frac{d\tau}{dt},\tilde y'_\tau\frac{d\tau}{dt}\right)\frac{dt}{d\tau}\,d\tau=$$ однородность

$$=\int_\alpha^\beta f(\tilde x(\tau),\tilde y(\tau),\tilde x'(\tau),\tilde y'(\tau))\,d\tau=F\{\gamma\}.\ \blacksquare$$

Пример



Пусть $l\{\gamma\}=l_0$; $S\{\gamma\}\to\max$ площадь

$\gamma:\{x(t),y(t)\}$, $t\in[t_1,t_2]$

В парамет. форме

$$l\{\gamma\}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt=l_0$$

$$S\{\gamma\}=\frac12\int_{t_1}^{t_2}(x\dot y-y\dot x)\,dt$$

оба функционала удовл. усл. 1) и 2).

Как получается ↑? Из формулы Грина на плоскости

$$\int_G(Q_x-P_y)\,dG=\int_\gamma P\,dx+Q\,dy.$$

Пусть $P=-\frac{y}{2}$, $Q=\frac{x}{2}$

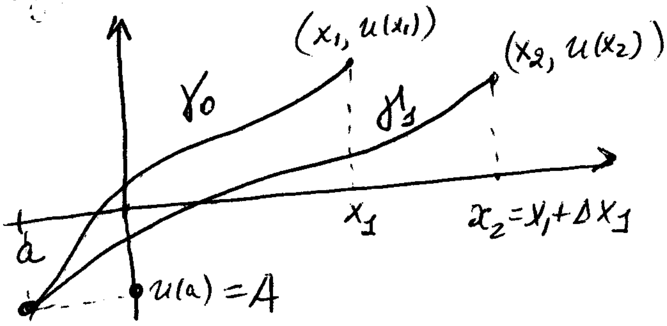
$\Rightarrow Q_x-P_y=\frac12+\frac12=1$; $\quad \int_G dG=|G|=\int_\gamma P\,dx+Q\,dy$;

$$S\{\gamma\}=\int_{t_1}^{t_2}\left(-\frac{y}{2}\dot x+\frac{x}{2}\dot y\right)dt.$$

Замечание: Пусть выполнены усл-я Утверждения и вар. задача имеет смысл. Тогда $F\{\gamma\}=F[x(t),y(t)]=$ $=\int_{t_1}^{t_2}f(x,y,\dot x,\dot y)\,dt$. Необх. усл. экстремума: система ур. Эйлера: $\frac{d}{dt}f_{\dot x}-f_x=0$; $\frac{d}{dt}f_{\dot y}-f_y=0$. Можно показ., что эти ур-я зависимы (т.е. одно — следствие другого). Для нахождения экстремали следует интегрировать одно из ур-й и учесть условие параметриз. Например $\dot x^2+\dot y^2=1$, если t — длина дуги

§9. Общая форма I вариации. Условие на свободном конце.

Рассм. простейший ф-л $F[u]=\int_a^{x_1} f(x,u,u')\,dx$, где $x_1>a$ не фиксирован; $D=\{u\in C^1\{x\geq a\},\ u(a)=A\}$. Значения $(x_1,u(x_1))$ меняются на плоскости, т.е. правый конец "плавает" по кривой, задаваемой ф-ей $y=u(x)$, $x\geq a$, в плоскости.



При вычислении δF следует варьировать u и x_1. Чтобы избежать варьирования верхнего lim, перейдём к парамет. форме.

Введём параметр $t\in[t_0,t_1]$ — это фиксир. интервал и запишем

$\gamma_0:\ \{x(t),u(t)\}$, $\quad\gamma_1=\{x(t)+h(t),\ u(t)+\eta(t)\}$, где

$x(t_0)=a,\ u(t_0)=A$; $\quad \left.\begin{aligned}x(t_0)+h(t_0)=a\\ u(t_0)+\eta(t_0)=A\end{aligned}\right\}\Rightarrow h(t_0)=\eta(t_0)=0.$

Пусть min F достиг. на γ_0 и мы рассм. семейство $\gamma_\alpha:\ \{x(t)+\alpha h(t),\ u(t)+\alpha\eta(t)\}$, $|\alpha|\leq 1$.

Тогда $F\{\gamma_0\}\leq F\{\gamma_\alpha\}\Rightarrow$

Необх. усл. экстремума $\boxed{\left.\frac{d}{d\alpha}F\{\gamma_\alpha\}\right|_{\alpha=0}=0}$ (*)

Чтобы записать усл. (*), перейдём к парамет. форме записи ф-ла F:

$$F\{\gamma\}=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{f\left(x,u,\frac{\dot u}{\dot x}\right)\dot x}_{=\varphi(x,u,\dot x,\dot u)}\,dt$$

$$F\{\gamma_\alpha\}=\int_{t_0}^{t_1}\varphi(x+\alpha h,\ u+\alpha\eta,\ \dot x+\alpha\dot h,\ \dot u+\alpha\dot\eta)\,dt;$$ тогда (*):

$$\delta F=\frac{d}{d\alpha}\int_{t_0}^{t_1}\varphi(x+\alpha h,\ u+\alpha\eta,\ \dot x+\alpha\dot h,\ \dot u+\alpha\dot\eta)\,dt\Big|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}(\varphi_x\cdot h+\varphi_u\eta+$$
$$+\varphi_{\dot x}\cdot\dot h+\varphi_{\dot u}\cdot\dot\eta)\,dt=0$$

(аргумент у $\varphi_x,\varphi_u\ldots$ $(x,u,\dot x,\dot u)$)

Интегрируя по частям в получ. равве:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\varphi_x - \frac{d}{dt}\varphi_{\dot x}\right) h\,dt + \varphi_{\dot x}\, h\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\varphi_u - \frac{d}{dt}\varphi_{\dot u}\right)\eta\,dt + \varphi_{\dot u}\,\eta\Big|_{t_2}^{t_1} = 0.$$

Сначала считаем, что $h|_{t=t_1} = \eta|_{t=t_1} = 0$ и выбираем независимо $\Rightarrow$ т.е. $h, \eta \in C_0^1[t_0, t_1]$.

$\Rightarrow$ Выводим ур-я $\boxed{\varphi_x - \frac{d}{dt}\varphi_{\dot x} = 0; \quad \varphi_u - \frac{d}{dt}\varphi_{\dot u} = 0.}$

Остаётся естеств. усл-е

!! $\boxed{\varphi_{\dot x}\, h + \varphi_{\dot u}\,\eta\big|_{t=t_1} = 0}$

Вернемся к старым обозначениям:

$\varphi(x, u, \dot x, \dot u) = f\left(x, u, \frac{\dot u}{\dot x}\right)\cdot \dot x$, $f(x,u,u')$ — тогда $\varphi_{\dot x} = f_{u'}\left(-\frac{\dot u}{(\dot x)^2}\right)\cdot\dot x + f\left(x, u, \frac{\dot u}{\dot x}\right) = f(x,u,u') - f_{u'}\cdot u'$; $\quad \varphi_{\dot u} = f_{u'}\,\frac{\dot x}{\dot x} = f_{u'}$. В результате естеств. усл. принимает вид $\left(f - f_{u'}\cdot u'\right)\Big|_{x_1} h(t_1) + f_{u'}\Big|_{x_1}\eta(t_1) = 0$

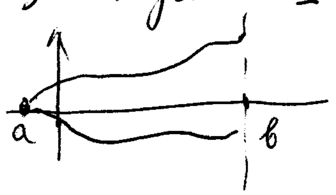
$h(t_1) = \delta x_1$, $\quad \eta(t_1) = \delta y_1 \Rightarrow$

Условие на своб. конце

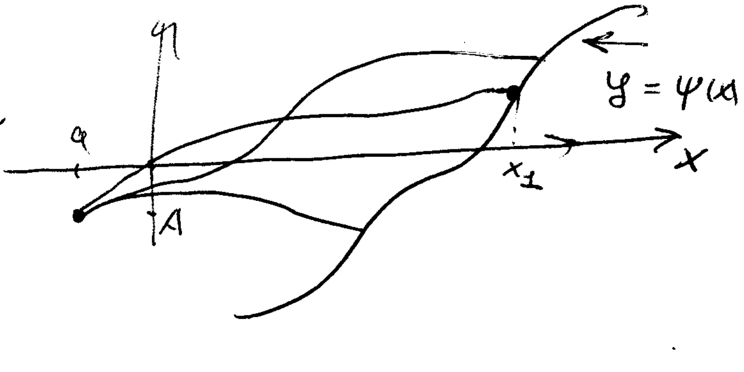
$$(**)\qquad \boxed{\left(f - f_{u'}\cdot u'\right)\delta x_1 + f_{u'}\cdot\delta y_1\Big|_{x=x_1} = 0}$$

2 следствия получаем сразу:

1). Пусть $x_1 = b$, т.е. $\delta x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{f_{u'}\big|_{x=b} = 0}$ — естеств. усл., полученное ранее



2) $y_1 = \psi(x_1)$ — конец перемещается по заданной линии, кот. называется трансверсалью:



$\Delta y_1 = \Delta\psi(x_1) = \psi(x_1 + \Delta x_1) - \psi(x_1) \simeq$

$\simeq \psi'(x_1)\,dx_1 = \delta y_1$

Подставим δy_1 в $(**)$:

$(f - f_{u'} \cdot u')\,\delta x_1 + f_{u'} \cdot \psi' \cdot \delta x_1 = 0$. Т.к. δx_1 — $\forall$, то

усл-е трансверсальности:

$$\boxed{f + f_{u'}(\psi' - u')\big|_{x=x_1} = 0}$$

+ усл. $u(x_1) = \psi(x_1)$

Пример: Пусть $F[y] = \int_a^{x_1} \underbrace{A(x,y)\sqrt{1+y'^2}}_{f}\,dx$, $A > 0$

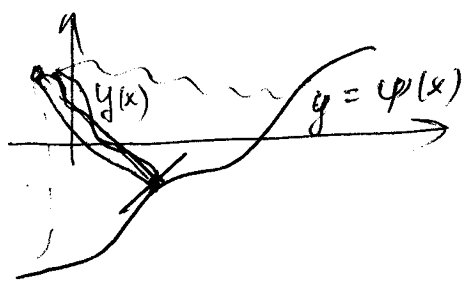
— это функционал типа геом. оптики (брахистохрона, мин. пов. вращ.)

$f_{y'} = \dfrac{Ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$; усл. трансверсальности:

$$A\sqrt{1+y'^2} + \frac{A \cdot y'(\psi' - y')}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1} = 0$$

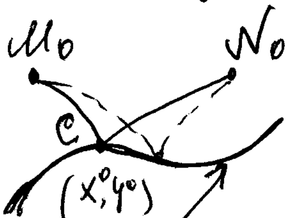
$$\Rightarrow \frac{\overset{\neq 0}{A}\{(1+y'^2) + y'\psi' - y'^2\}}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow \boxed{1 + y'\psi'\big|_{x=x_1} = 0}$$

это усл. ортогон. подхода



§ 10. Экстремали с угловыми точками.

п.1 Задача об отражении экстремалей



Найти кривую, реализ. экстремум для ф-ла

$$F[y] = \int_a^b f(x,y,y')\,dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

при условии, что в некот. точке (x^0, y^0) кривая отражается от линии $\gamma: \{y = \psi(x),\ x \in [a,b]\}$, $M_0, N_0 \notin \gamma$.

$y = \psi(x)$

$(y^0 = \psi(x^0))$

Точка C при возмущениях перемещ. вдоль γ.

$$\Rightarrow \delta F = \delta\int_a^{x_0} f\,dx - \delta\int_b^{x_0} f\,dx = \underbrace{(f - y' f_{y'})\big|_{x_0-0}\,\delta x_0 + f_{y'}\big|_{x_0-0} \cdot \delta y_0}$$

$$\underbrace{-(f - y' f_{y'})\big|_{x_0+0}\,\delta x_0 - f_{y'}\big|_{x_0+0}\,\delta y_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\delta y_0 = \psi'(x^0)\,\delta x_0$$

$$\left(f+(\varphi'-y')\cdot f_{y'}\right)\Big|_{x^0-0}\cdot\Delta x_0-\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}\right)_{x^0+0}\cdot\Delta x_0=0$$

$$\forall\, \Delta x_0\neq 0 \Rightarrow \left(f+(\varphi'-y')f_{y'}\right)\Big|_{x^0-0}=\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}\right)_{x^0+0} \Longleftrightarrow$$

т.е. $\left[f+(\varphi'-y')f_{y'}\right]_{x^0}=0$, скачок ф-ции $f+(\varphi'-y')f_{y'}$ равен $=0$

Замеч. Для флов с $f=A(x,y)\sqrt{1+y'^2}$ – это усл. означает, что угол падения = углу отражения (см. Эльсгольц...)

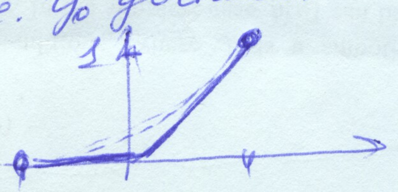
п.2 Экстремали с изломами.

В некоторых задачах для гладких $f(x,y,y')$ не удаётся найти C^1-гладкую экстремаль (и о. min)

Пример: $F[y]=\int\limits_{-1}^{1} y^2(1-y')^2\,dx$, $y(-1)=0$, $y(1)=1$

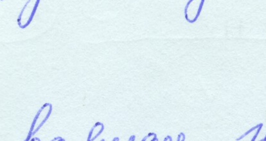
$y^0(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases} \Rightarrow F[y^0]=0$, т.е. y_0 достав. абс. min F,

но $y^0\notin C^1[-1,1]$



Разумно допустить кус-гладкие экстремали.

Допустим что в простейшей задаче вариац. исчисления экстремаль в некот. точке имеет излом, т.е. $y_-(x_1)=y_+(x_1)$, но $y'_-(x_1)\neq y'_+(x_1)$. Точка C – точка излома свободно перемещ. по плоскости при возмущениях. $C:\{x_1,y_1\}$



Из условия $\delta F=\delta\int\limits_a^{x_1} f-\delta\int\limits_b^{x_1} f=\ldots=$

$$=\left(f-y'f_{y'}\right)\Big|_{x_1-0}\cdot\delta x_1+f_{y'}\Big|_{x_1-0}\delta y_1-\left(f-y'\cdot f_{y'}\right)\Big|_{x_1+0}\cdot\delta x_1-$$

$-f_{y'}\Big|_{x_1+0}\cdot\delta y_1=0$. Т.к. δx_1 и δy_1 – независимы, то можно рассм: $\delta x_1\neq 0$, $\delta y_1=0$ и $\delta x_1=0$, $\delta y_1\neq 0$

$$\Rightarrow \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=x_1} = 0; \quad \left[f_{y'}\right]_{x=x_1} = 0, \text{ где}$$

$[g]_{x_1} = g(x_1+0) - g(x_1-0)$ — скачок. Полученные условия — угл. усл. Вейерштрасса–Эрдманна.

Например, в простейшей ситуации $F[y] = \int_0^1 y'^2 dx$

$f_{y'} = 2y' \Rightarrow [f_{y'}]_{x_1} = 0 \Leftrightarrow [y']_{x_1} = 0$, т.е. $y'(x_1-0) = y'(x_1+0)$ — во всех точках экстремаль гладкая (в данном случ. — прямые).

§11. Задача на выпуклом замкн. мн-ве

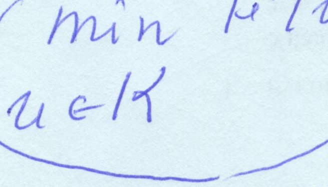
Пример: (Задача с препятствием.)

$K_\psi = \{ v \in C^1[ab],\ v(a) = A,\ v(b) = B,\ v(x) \ge \psi(x) \text{ на } [ab] \}$,

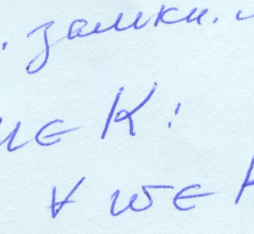
$\psi \in C^1[ab]$ — заданная ф-я. K_ψ не явл. аффинным мн., но K_ψ — замкн. выпуклое мн. в $C^1[ab]$.

Действительно, пусть $u, v \in K_\psi$, тогда

$w(x) = \alpha u(x) + \beta v(x) \ge \alpha \psi(x) + \beta \psi(x) = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{1} \psi(x)$, $\beta = 1-\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$



$w \ge \psi$, $w(a) = A$, $w(b) = B \Rightarrow \boxed{w \in K_\psi}$



Рассм. общую постановку:

$\min\limits_{u \in K} F[u]$, где $K \subset B$, K — вып. замкн. мн.

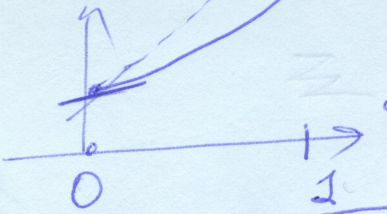
Необх. усл. min: пусть $u \in K$: $F[u] \le F[w]$, $\forall w \in K$

Рассм. $v_\alpha(x) = u(x) + \alpha(w(x) - u(x)) \in K$, $\alpha \in [0, 1]$

т.к. $v_\alpha = (1-\alpha)u + \alpha w \in K$.

Верно нерво $F[u] \le \overbrace{F[u + \alpha(w-u)]}^{=\varphi(\alpha)}$, $\alpha \in [0, 1]$

$\varphi(0) \leq \varphi(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$



Необх. усл. $\varphi'(0) \geq 0$, т.е.

$$\frac{d}{d\alpha} F[u+\alpha(w-u)]\Big|_{\alpha=0} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta F(u, w-u) \geq 0, \quad \forall w \in K.}$$

Вариац. неравенство

это необх. усл. $\min$ на K

Вернёмся к задаче с препятствием.

$$\delta F(u, w-u) = \int_a^b [f_u \cdot (w-u) + f_{u'}(w'-u')]dx \geq 0, \quad (+)$$

$\forall w \in K_\varphi$.

1). пусть $w = u+h$, где $h \in C_0^1[ab]$, $h \geq 0$; $\Rightarrow w = u+h \geq \varphi \Rightarrow w \in K_\varphi$

$\Rightarrow$ из $(+)$: $\int_a^b [f_u \cdot h + f_{u'} \cdot h']dx \geq 0$, $h \in C_0^1[ab]$, $h \geq 0$

$\Rightarrow$ после интегр. по частям: $\int_a^b \underbrace{\left(f_u - \frac{d}{dx} f_{u'}\right)}_{Lu} h\, dx \geq 0$

$\Rightarrow Lu \geq 0$ на $[ab]$.

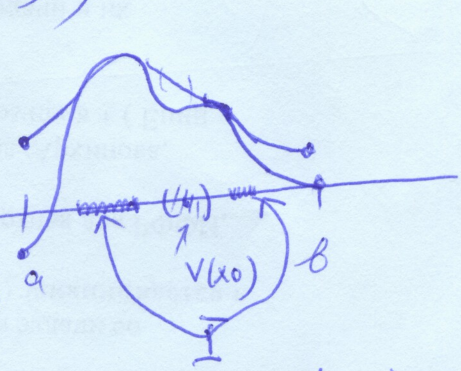
2). Обозначим $I = \{x \in [ab] : u(x) = \varphi(x)\}$ - мн-во налегания на препятствие

Зафикс. $V(x^0) \subset [ab] \setminus I$

(считаем $\varphi(a) < A = u(a)$, $\varphi(b) < B = u(b)$)

Пусть $\operatorname{spt} h \subset V(x^0)$, и $h \geq 0$,

$w = u \pm \varepsilon h \geq \varphi$ на $[ab]$ при $\varepsilon \ll 1$



$$\Rightarrow \int_a^b Lu \cdot (w-u)\,dx = \int_{V(x^0)} Lu(\pm\varepsilon h)dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \pm\varepsilon \int_{V(x^0)} Lu \cdot \underset{\geq 0}{h}\, dx \geq 0 \Rightarrow Lu = 0 \text{ в } V(x^0)$$

т.е. $Lu = 0$ на мн-ве $[ab] \setminus I$.

Необх. усл. $\min$:

$$\begin{cases} Lu \geq 0, \ u \geq \varphi, \ x \in [ab] \\ Lu \cdot (u-\varphi) = 0 \text{ на } [ab], \\ u(a) = A, \ u(b) = B \end{cases}$$