Лекция 1 (VI сем.)

гл. I Вариационное исчисление

§1. Введение

Пусть $F: \mathbb{D}\subseteq \mathbb{B}\to R^1 \ (\mathbb{C})$ - функционал.

Задача: найти $\max\limits_{u\in\mathbb{D}} (\min) F[u]$.

Задачу о "max" сводим к задаче о "min", т.е. $\max\limits_{\mathbb{D}}(F) \Rightarrow \min\limits_{\mathbb{D}}(-F)$. Далее $V_\delta(u^0)=B_\delta(u^0)=\{u\in\mathbb{B}: \|u-u^0\|<\delta\}$

Опр. F достигает на $u^0\in\mathbb{D}$ лок. min, if $\exists V_\delta(u^0)\subset\mathbb{B}$:

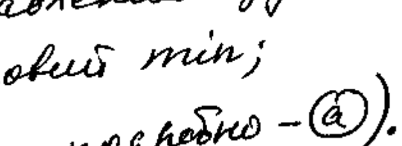
$F[u^0]\le F[u], \ \forall u\in V_\delta(u^0)\cap\mathbb{D}$.

Опр. F достигает глоб. min на эл-те $u^0\in \mathbb{D}$, if

$F[u^0]\le F[u], \ \forall u\in\mathbb{D}$.

Есть 2 основных направления изучения вариац. задач: ① - нахождение н. и д. условий min; (более подробно - ⓐ). ② - прямые методы вар. исчисл. Основной функционал - интегральный (приложения в механике).

Примеры 1) Задача геометрич. оптики: в неоднородной изотропной среде в R^3 задана скалярная ф-я скорости $v(M)=v(x,y,z)$. Требуется определить путь, по которому точка перейдёт из положения M_0 в т. M_1 за наименьшее время.



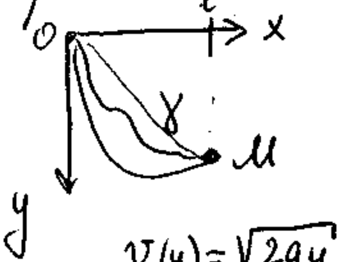
$\min\limits_{\forall\gamma[M_0,M_1]} T\{\gamma\}$ $\Big\|$ $\left.\begin{array}{l}\gamma: y, z\in C^1[x^0,x^1] \\ y(x^0)=y^0,\ y(x^1)=y^1; \\ z(x^0)=z^0,\ z(x^1)=z^1\end{array}\right\}\in\mathbb{D}$ $\quad \Delta T=\dfrac{\Delta S}{V}$;

$\gamma: \{x, y(x), z(x)\},\ x\in[x^0,x^1]$

$$T\{\gamma\} = \int_\gamma \frac{ds}{v(M)} \Rightarrow T[y,z] = \int_{x^0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{v(x,y,z)} \to \min_{\mathbb{D}}$$

② Частный случай зад. ①: задача о брахистохроне (1696 г. J. Bernulli)

"Найти форму желоба, по которому, скатываясь без трения, матер. точка спустится из одного фикс. положения в другое за min время.



$\gamma: \{y=y(x),\ y\in C^1[0,l],\ y(0)=0,\ y(l)=M\}=\mathbb{D}$

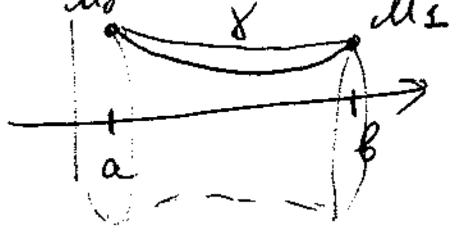
$\gamma: \{(x, y(x)),\ x\in[0,l],\ y\in \mathbb{D}\};\quad \Delta T=\frac{\Delta S}{v}$

$$T\{\gamma\}=T[y]=\int_0^l \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \to \min_{\mathbb{D}}.$$

$v(y)=\sqrt{2gy}$

(γ – часть циклоиды)

③ Задача о min площади пов-ти вращения.



$\{y\in C^1[a,b],\ y(x)\ge 0,\ y(a)=A,\ y(b)=B\}=\mathbb{D}$

$$S[y]=2\pi\int_{M_0}^{M_1} y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = 2\pi\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min_{\mathbb{D}}$$

Реш-е – цепная линия ($\exists$ 1, 2, $\varnothing$ реш. в завис. от расположения т. M_0 и M_1).

④ Найти поверхность наименьшей площади, натянутую на данный контур Γ (среди пов-тей, проект. на обл. $\Omega\subset\mathbb{R}^2$)

Пусть $S:\{z=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega\}$, $f|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y)$ | Ф-ия φ задаёт в $\mathbb{R}^3$ контур Γ

$$S[f]=\iint_\Omega\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy,\quad f|_{\partial\Omega}=\varphi$$

$$\mathbb{D}=\{f\in C^1(\bar\Omega),\ f|_{\partial\Omega}=\varphi\};\quad S[f]\to\min_{\mathbb{D}}$$

К вариац. задачам приходим при выводе ур. механики. Соответствующий вариац. принцип (Остроградского-Гамильтона) будет сформулирован позже (выведем ур-я колебаний струн, мембран).

§2. Первая вариация. Необходимое усл. экстремума.

Рассм. сначала $\mathbb{D} = \mathbb{B}$. Пусть $u \in \mathbb{B}$ сообщ. лок. min ф-лу $F[\cdot]$ на $\mathbb{B}$: $\exists\, \delta > 0$: $(*)$ $\boxed{F[u] \le F[v],\ \forall v \in V_\delta(u)}$, т.е. $\forall\, v: \|v-u\| < \delta$. Заметим: $\forall h \in \mathbb{B}$, $h \neq 0$, пусть $|t| < t_0$:

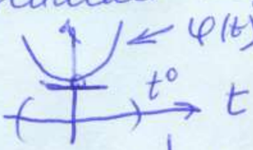
$t^0: \|th\| < t_0 \|h\| < \delta \Rightarrow \quad \|v-u\| = \|\underbrace{u+th}_{=v} - u\| = \|th\| < \delta$, т.е.

$v = u + th \in V_\delta(u)$ при $|t| < t_0$.

Рассм. $\varphi(t) = F[u+th]$, где u, h — фиксир.

$\varphi(t)$ опред. при $|t| < t_0$. Нер-во $(*)$ принимает вид

$$\varphi(0) \le \varphi(t), \quad \forall\, t: |t| < t_0.$$



Если ф-я $\varphi(t)$ дифферен, то Необх. усл. min: $\varphi'(0) = 0$,

т.е.
$$\boxed{\left.\frac{d}{dt} F[u+th]\right|_{t=0} = 0, \quad \forall h \in \mathbb{B}.}$$

Опред. Если $\exists \left.\frac{d}{d\alpha} F[u+\alpha h]\right|_{\alpha=0}$, то эта производная назыв. I вариацией ф-ла F на эл-те "u" с приращением "h", обозначаем: $\delta F(u,h)$.

Т.о., необх. усл. экстремума

$$\boxed{\delta F(u,h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{B}} \quad (**)$$

Опред. Функция u, удовлетвор. необх. усл. экстремума (**) назыв. экстремалью.

Замечание. Так как понятие δF определено для функционала, то оно верно и для ф-ции. Пусть $f(u)$ – ф-я одной веществ. перем, т.е. $u \in \mathbb{R}^1$. По определению

$$\delta F(u,h) = \frac{d}{d\alpha} f(u+\alpha h)\Big|_{\alpha=0} = f'(u+\alpha h)\,h\Big|_{\alpha=0} = f'(u)\cdot h =$$

$= d_h f(u)$ – I дифференциал ф-ции f в т. u с приращением h. (Для ф-й мн определяли дифференциал как главную линейную часть прираш. ф-ции.

Опр. Пусть F определён в окрестн. эл-та $u \in \mathbb{B}$. Если для фиксир. u $\exists\ l(u,h)$ – линейный по h ф-л, такой, что

$$F[u+h] - F[u] = l(u,h) + \underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|), \qquad (+)$$

то $l(u,h)$ называется дифференциалом (по Фреше) ф-ла F в т. u.

Сравните опред. (**) и (+).

Утв. "Если $\exists$ дифференциал $l(u,h)$ на эл-те u, то он совпадает с I вариацией $\delta F(u,h)$."

Док-во: Пусть верно (+). Составим "заготовку" производной $\frac{d}{d\alpha}F[u+\alpha h]\big|_{\alpha=0}$:

$$\frac{F[u+\alpha h]-F[u]}{\alpha} = \frac{l(u,\alpha h) + o(|\alpha|\,\|h\|)}{\alpha} = l(u,h) + \underbrace{\frac{o(|\alpha|\,\|h\|)}{\alpha}}_{\to 0}$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\alpha\to 0}$ (левой части) $\Rightarrow \exists\ \delta F(u,h) = l(u,h),\ \forall h$.

Замеч. Данное утв. в обратную стор. неверно, т.к. в общей ситуации $\delta F(u,h)$ не сохраняет свою линейность по h, а только однородность, т.е.

$\delta F(u, \mu h) = \mu\, \delta F(u,h)$.

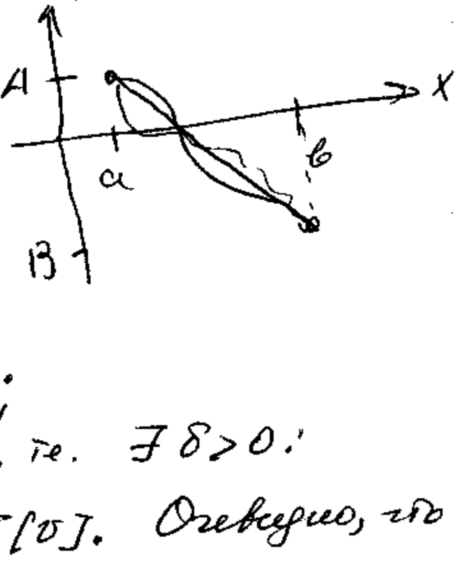
Опред. Если $\exists\ \delta F(u,h)$, то говорят, что ф-л F дифференцируем по Гато.

! Далее считаем, что ф-лы дифференцируемы в сильном смысле (по Фреше), т.е. $l(u,h) = \delta F(u,h)$.

Выше мы считали, что F опред. на $D = \mathbb{B}$.

Рассм. случай $D \subset \mathbb{B}$ и потребуем, чтобы D было линейным лено-аффинным множеством (или гов. линейным многообразием), т.е. $\boxed{D = \{\hat{u}\} + M,}$ где $\hat{u}$ – фикс. эл-т B, M – линейное мн.

Примеры .) Пусть $\mathbb{B} = C^1[ab]$, $D = \left\{ v \in C^1[ab] : \begin{matrix} v(a) = A \\ v(b) = B \end{matrix} \right\}$ – это лин. многообразие: Пусть $M = C_0^1[ab] = \{ v \in C^1[a.b] : v(a) = v(b) = 0\}$, зафикс. $\forall$ ф. $\in D$, например – линейную ф., $\hat{v}$ проход. через т. (a, A) и (b, B).



Тогда $D = \{\hat{v}\} + C_0^1[ab] = \{\hat{v}\} + M$.

Действит: $\forall$ $v = \hat{v} + h$, $h \in C_0^1[ab] \Rightarrow v \in D$. Обратно, зафикс. $\forall v \in D$ и представим её $v = \hat{v} + \underset{\in M}{(v - \hat{v})}$.

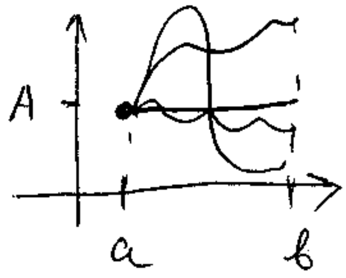
Пусть u – точка loc min, т.е. $\exists \delta > 0$: $\forall v \in V_\delta(u) \cap D$ выполн. $F[u] \le F[v]$. Очевидно, что $w = u + \underset{\in M}{h} \in D$, $\forall h \in M$, пусть $v = u + th$; $\|v - u\| = |t| \|h\| < \delta$ если $|t| < \frac{\delta}{\|h\|} = t_0$

$\Rightarrow v = u + th \in V_\delta(u) \cap D$, $|t| < t_0$

$\varphi(t) = F[u+th]$ $\Rightarrow \boxed{\delta F(u,h) = 0, \ \forall h \in M}$, т.е. M – лин-во допуст. возмущений

В данном сл. $\boxed{\delta F(u,h) = 0, \ \forall h \in C_0^1[ab].}$

2) Пусть $B = C^1[ab]$, $\mathcal{D}(F) = \{v \in C^1[ab]; v(a) = A\}$



Тогда самая простая ф. $\hat{v}(x) \equiv A$;

$M_1 = \{h \in C^1[ab] : h(a) = 0\}$.

Действит. $v(x) = A + h(x)$, $\forall h \in M_1$,

$\Rightarrow v \in D = \{\hat{v}\} + M_1$. Тогда н. усл. экстрем.

$$\boxed{\delta F(u, h) = 0, \quad \forall h_{доп} \in M_1.}$$

Замеч. Класс допуст. возмущ. h таков, чтобы при усл. $u \in \mathcal{D}$ выполн. $u + th \in \mathcal{D}$.

§3. Простейшая задача вариац. исчисл.

$F[u] = \int_a^b f(x, u, u')\,dx$, f – дважды дифф. по $x \in [a, b]$, $u, p \in \mathbb{R}^1$ ($f = f(x, u, p)$).

$$\min_{\mathbb{D}} F[u], \quad \mathbb{D} = \left\{u \in C^1[ab] \;\middle|\; \begin{matrix} u(a) = A \\ u(b) = B \end{matrix}\right\}.$$

$\mathbb{D} = \{\hat{u}\} + C_0^1[ab] \Rightarrow \boxed{\delta F(u, h) = 0, \ \forall h_{доп} \in C_0^1[a, b]}$ н. усл. экстр.

$$\delta F(u, h) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, u + \alpha h, u' + \alpha h')\,dx \Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \int_a^b [f_u(x, u + \alpha h, u' + \alpha h') \cdot h + f_{u'}(\dots) \cdot h']\,dx \Big|_{\alpha = 0} =$$

$$= \int_a^b [f_u(x, u, u')h + f_{u'}(x, u, u')h']\,dx = 0, \quad \forall h \in C_0^1[ab].$$

Какая информация следует из этого равен. для $u(x)$? Чтобы ответить, д-м 3 леммы.

<u>Лемма 1</u> (Лагранжа) Пусть $f \in C(\bar{\Omega})$, где Ω – огран. обл. в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Пусть для всех $h \in C_0^k(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega})$ и $D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}), |\alpha| \leq k;\ D^\alpha v|_{\partial\Omega} = 0,\ \forall |\alpha| \leq n-1\}$, $k \geq 1$, выполн. рав-во $\int\limits_\Omega f \cdot h\, dx = 0$. Тогда $f(x) \equiv 0$ в Ω.

<u>Д-во</u>: Обозначение $D^\alpha v(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ длина мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$.

От противного:
пусть $f(x^0) \neq 0$, для определённости $f(x^0) > 0$, $x^0 \in \Omega$. По непрер. f:
$\exists\ \delta > 0$, что $f(x) > 0$ в $V_\delta(x^0) = B_\delta(x^0) \subset \Omega$.

Рассм. ф-ю $\tilde{h}(x) = \begin{cases} (\delta^2 - |x - x^0|^2)^{k+1}, & |x - x^0| < \delta; \\ 0, & |x - x^0| \geq \delta. \end{cases}$

$\tilde{h} \in C_0^k(\bar{\Omega})$ – по построению.

Тогда $\int\limits_\Omega f \cdot \tilde{h}\, dx = 0$, но $\int\limits_{B_\delta(x^0)} \overset{0}{f} \cdot \overset{0}{\hat{h}}\, dx > 0$,

что противоречит предполож. $\Rightarrow f(x) \equiv 0$ в Ω. ∎

<u>Замечание</u>. В след. семестре мы докажем, что $[C_0^\infty(\Omega)]_{L^2} = L^2(\Omega)$;

Пусть некот. мн-во M: $C_0^\infty(\Omega) \subseteq M \subset L^2(\Omega) \Rightarrow$ переходя к замыканию по норме $L^2(\Omega)$:

$L^2(\Omega) = [C_0^\infty(\Omega)]_{L^2(\Omega)} = \bar{M} = L^2(\Omega) \Rightarrow [\bar{M}]_{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$; Пусть $M = C_0^k(\bar{\Omega})$ и верно $\int\limits_\Omega f(x) \cdot h(x)\, dx = 0$, $\forall h \in M$,

где $f \in L^2(\Omega)$, т.е. $(f, h) = 0$, $\forall h \in M$. Если дискр. $\forall \eta \in L^2(\Omega)$, $\exists\ \eta_n \in M$: $\|\eta_n - \eta\|_{2,\Omega} \to 0$. Вып-но: $(f, \eta_n) = 0$ $\forall n$

$\Rightarrow (f, \eta) = 0 \Leftrightarrow f \perp L^2(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$ п.в. в Ω

Лекция 2 (VI семестр)

Описки (Лекц. 1) 1) стр. 2, пример 3, III строка – пропущен "y'")

2) стр. 7, III строка сверху $|\alpha| \le \underline{\underline{k}}-1$

Лемма 2. Пусть $g \in C[a,b]$ и $\forall h \in C_0^1[ab]$ выполн. $\int_a^b g h' dx = 0$

$\Rightarrow g(x) \equiv const.$

Док-во: Обозначим $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx =: \fint_a^b g(x)dx$; $p(x) = \int_a^x (g(\tau)-\alpha)d\tau$

$\Rightarrow p \in C_0^1[a,b]$ $\left(p(b) = \int_a^b g(\tau)d\tau - \alpha\cdot(b-a) = 0\right)$; $p'(x) = g(x) - \alpha$.

Согласно предположе., $\int_a^b g\cdot p' dx = 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(g-\alpha)dx = 0$. (1)

Кроме того, $\alpha\cdot\int_a^b (g(x)-\alpha))dx = 0$ (2). Вычитая (1)-(2): $\int_a^b (g(x)-\alpha)^2 dx = 0$

$\Rightarrow g(x) \equiv \alpha$. ∎

Лемма 3. Пусть $A, B \in C[a,b]$, и $\left.\begin{array}{l}\int_a^b [A(x)h(x) + B(x)h'(x)]dx = 0 \\ \forall h \in C_0^1[ab].\end{array}\right\}(*)$

Тогда $\exists \frac{dB}{dx} = A$ на $[ab]$.

Док-во: Построим ф-ю $p(x) = \int_a^x A(t)dt$; $p'(x) = A(x)$, $A \in C[ab]$.

$\int_a^b A\cdot h\,dx = \int_a^b p'\cdot h\,dx = -\int_a^b p\cdot h' dx \Rightarrow 0 \underset{(*)}{=} \int_a^b (Ah + Bh')dx \Leftrightarrow$

$\int_a^b (B-p)h' dx = 0 \Rightarrow$ по л. 2 $B(x) - p(x) \equiv const. \Rightarrow B(x) = p(x) + C$

$\exists\ B'(x) = A(x)$, $x \in [ab]$. ∎

Вернемся к простейшей задаче: н. усл. экстремума получено в Лекц. 1: $\int_a^b (f_u\cdot h + f_{u'}\cdot h')dx = 0 \quad \forall h \in C_0^1[ab]$.

$f_u(x, u(x), u'(x)) =: A(x)$

$f_{u'}(x, u(x), u'(x)) = B(x)$ $\quad\Rightarrow \int_a^b (Ah + Bh')dx = 0,\ \forall h \in C_0^1[ab]$.

По л. 3 $\exists \frac{dB}{dx} = A$ на $[ab]$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d}{dx} f_{u'}(x,u,u') = f_u(x,u,u')}$, $x \in [ab]$.

Т.о., мы получили усл. (необх.), которому должна удовл. экстремаль ф-ла $F[u] = \int_a^b f(x,u,u')dx$ при усл., что

$u \in D = \{u \in C^1[ab] : u(a) = A_0,\ u(b) = B_0\} \Rightarrow \delta F(u,h) = 0,\ \forall h \in C_0^1[ab]$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_{u'}(x,u,u') - f_u(x,u,u') = 0 \\ u(a) = A_0, \quad u(b) = B_0 \end{cases} \quad (3)$$

← ур. Эйлера (Эйлера-Лагранжа)

Если $\exists\, u''$, то $\frac{d}{dx}\left(f_{u'}(x,u,u')\right) = f_{u'x} + f_{u'u}\cdot u' + f_{u'u'}\cdot \underline{\underline{u''}}$

Структура ур. Эйлера $\begin{cases} p(x,u,u')\cdot u'' + \Phi(x,u,u') = 0, \quad x\in[a,b] \\ u(a) = A_0, \quad u(b) = B_0 \end{cases}$

Опр. Ур-е, линейное относит. старшей производной, наз-ся. квазилинейным.

$\circ\ \exists\ u''?$ Утв. В тех точках x, где вдоль экстремали $u(x)$ $f_{u'u'}(x, u(x), u'(x)) \neq 0$, $\exists\, u''(x)$.

Д-во: Рассм. отношение, которое в пределе даёт полную производную $\frac{d}{dx}(f_{u'})$:

$$\frac{\Delta f_{u'}}{\Delta x} = \frac{f_{u'}(x+\Delta x, \overbrace{u+\Delta u}^{= u(x+\Delta x) - u(x)}, u'+\Delta u') - f_{u'}(x,u,u')}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\tilde f_{u'x}\cdot\Delta x + \tilde f_{u'u}\cdot\Delta u + \tilde f_{u'u'}(\Delta u')}{\Delta x} = \tilde f_{u'x} + \tilde f_{u'u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \tilde f_{u'u'}\cdot\frac{\Delta u'}{\Delta x}.$$

"~" здесь означает, что аргументы берутся между $(x+\Delta x, u+\Delta u, u'+\Delta u')$ и (x,u,u'). При $\Delta x\to 0$ $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_{u'}}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f_{u'}$,

$\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0} \tilde f_{u'x} = f_{u'x}(x,u,u')$; $\exists \lim\limits_{\Delta\to 0} \tilde f_{u'u}\cdot\underline{\underline{\frac{\Delta u}{\Delta x}}} = f_{u'u}(x,u,u')\cdot \underline{\underline{u'(x)}} \Rightarrow$

Если в т. x $f_{u'u'}(x, u(x), u'(x)) \neq 0$, то при $|\Delta x| \ll 1$ $\tilde f_{u'u'} \neq 0 \Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0} \tilde f_{u'u'} = f_{u'u'}(x,u,u') \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u'}{\Delta x} = \frac{1}{f_{u'u'}}\underbrace{\left[\frac{df_{u'}}{dx} - f_{u'x} - f_{u'u}\cdot u'\right]}$

т.е. $\exists\, u'' = \frac{1}{f_{u'u'}(x,u,u')}[\ \ldots\ ]$. ▣

$\tilde f_{u'x} = f_{u'x}(x+\theta\Delta x, u+\theta\Delta u, u'+\theta\Delta u')$ и т.д.

$0<\theta<1$

§4. Обобщение простейшей задачи на случай кратных интегралов

(1) $\begin{cases} \min\limits_{D} F[u], \quad F[u] = \int\limits_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x))\,dx, \\ D = \{u \in C^1(\bar\Omega) : u|_S = \varphi\} \end{cases}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, огран. $S = \partial\Omega$ – кус. гладк.

Воспольз. ф-лой Гаусса – Остроград.

$n=3$ $\quad \iiint\limits_{B} \operatorname{div} \vec{a}(M)\,dB = \iint\limits_{S} (\vec{a}, \vec{n})\,dS;$ $\quad \vec{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M)).$

$\vec{n}(x) = (\cos(\vec{n}, \bar{x}), \cos(\vec{n}, \bar{y}), \cos(\vec{n}, \bar{z}));$ $\quad M = (x, y, z)$

Пусть $Q = R = 0 \Rightarrow \iiint\limits_{B} (P)'_x\,dB = \iint\limits_{S} P \cdot \cos(\vec{n}, \bar{x})\,dS$

$P = u \cdot v \Rightarrow \iiint\limits_{B} (u'_x \cdot v + u \cdot v'_x)\,dB = \iint\limits_{S} u \cdot v \cdot \cos(\vec{n}, \bar{x})\,dS$

$\Rightarrow \iiint\limits_{B} \to \int\limits_{B}; \quad \iint\limits_{S} \to \int\limits_{S} \Rightarrow \left\{ \int\limits_{B} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v\,dB = -\int\limits_{B} u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\,dB + \int\limits_{S} u \cdot v \cdot \cos(\vec{n}, \bar{x})\,dS \right.$

Аналогично, если

$P, R = 0, Q \neq 0 \Rightarrow \int\limits_{B} Q'_y\,dB = \int\limits_{S} Q \cos(\vec{n}, \bar{y})\,dS \Rightarrow$

$Q = u \cdot v \qquad \int\limits_{B} u_y \cdot v\,dB = -\int\limits_{B} u \cdot v_y\,dB + \int\limits_{S} uv \cos(\vec{n}, \bar{y})\,dS$

$\Rightarrow$ если $R \neq 0$, $P, Q = 0$ $\Big| \Rightarrow \int\limits_{B} u_z \cdot v\,dB = -\int\limits_{B} u \cdot v_z\,dB + \int\limits_{S} uv \cdot \cos(\vec{n}, \bar{z})\,dS$

Общий случай: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $S = \partial\Omega$ – кус. гладкая (кус. C^1).

$$\left| \int\limits_{\Omega} u_{x_i} \cdot v\,dx = -\int\limits_{\Omega} u \cdot v_{x_i}\,dx + \int\limits_{S} u \cdot v \cdot \cos(\vec{n}, \bar{x}_i)\,dS \quad \forall i = 1, \dots, n \right| \quad (*)$$

для ф-й $u, v \in C^1(\bar\Omega)$.

$n = 1 \quad \int\limits_{a}^{b} u' \cdot v\,dx = -\int\limits_{a}^{b} u \cdot v'\,dx + u \cdot v\Big|_a^b \quad \left[\begin{array}{l} du = u'dx \\ dv = v'dx \end{array} \right.$

Необх. усл. для задачи (1): $\delta F(u,h)=0,\ \forall h\in C_0^1(\bar\Omega)$

$(u\in\mathcal{D}$, хотим: $u(x)+\alpha h(x)\in\mathcal{D}) \Rightarrow h_{\text{доп}}\big|_{\partial\Omega}=0$. $\quad \nabla u=(u_{x_1},\dots,u_{x_n})$

$$\delta F(u,h)=\frac{d}{d\alpha}\int_\Omega f(\overset{n}{x},\overset{1}{\overbrace{u+\alpha h}},\overset{n}{\overbrace{\nabla u+\alpha\nabla h}})\,dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_\Omega\Big[f_u(\dots)\cdot h+\sum_{i=1}^n f_{u_{x_i}}(\dots)h_{x_i}\Big]dx\Big|_{\alpha=0}\Rightarrow$$

Необх. усл. экстр.:

$$(2)\quad \boxed{0=\int_\Omega\Big[f_u(x,u,\nabla u)h+\sum_{i=1}^n f_{u_{x_i}}(x,u,\nabla u)\cdot h_{x_i}\Big]dx \quad \forall h\in C_0^1(\bar\Omega).}$$

$\int_{\partial\Omega} f_{u_{x_i}}\cdot h\cdot\cos(\bar n,\bar x_i)=0$, т.к. $h|_S=0$

Преобразов. (2):

$$\int_\Omega\Big[f_u\cdot h-\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx_i}(f_{u_{x_i}})\cdot h\Big]dx=0 \Leftrightarrow \int_\Omega h\underbrace{\Big[f_u-\sum_i\frac{d}{dx_i}f_{u_{x_i}}\Big]}_{Lu}dx=0$$

По л. Лагранжа (считаем $Lu\in C(\bar\Omega)$)

$$(3)\ \begin{cases} Lu=0, & x\in\bar\Omega.\\ u\big|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

Здесь $\underline{Lu=0}$ – ур. Эйлера (-Остроградск.)

$$\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx_i}(f_{u_{x_i}})-f_u=0$$ ур. квазилин. II порядка

$$f_{u_{x_i}x_i}+f_{u_{x_i}u}\cdot u_{x_i}+f_{u_{x_i}x_j}\cdot\underline{\underline{u_{x_ix_j}}}=0 \quad (\textstyle\sum \text{ подразумев.})$$

$$\sum_{i,j}f_{u_{x_i}u_{x_j}}(x,u,\nabla u)\cdot u_{x_ix_j}+\Phi(x,u,\nabla u)=0$$

Примеры: 1) $\mathbb{D}[u]=\int_\Omega\left(\frac12|\nabla u|^2+g(x)\cdot u\right)dx,\ g\in C(\bar\Omega)$

– интеграл Дирихле $\qquad \min\limits_{u\in\mathcal{D}}\mathbb{D}[u],\quad \mathcal{D}=\left\{u\in C^1(\bar\Omega),\ u|_S=\varphi\right\}$

$$\delta\mathbb{D}(u,h)=\frac{d}{d\alpha}\int_\Omega\Big[\frac12\sum_{j=1}^n(u_{x_j}+\alpha h_{x_j})^2+g(x)(u+\alpha h)\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_\Omega\Big(\sum_{j=1}^n u_{x_j}\cdot h_{x_j}+g\cdot h\Big)dx=-\sum_{j=1}^n\int_\Omega u_{x_jx_j}\cdot h\,dx+\sum_j\int_S u_{x_j}h\cdot\cos\bar n_{x_j}\,ds$$
$$+\int_\Omega g\cdot h\,dx$$

$$-\int\limits_\Omega \Delta u \cdot h\,dx + \int\limits_S \underbrace{(\nabla \bar u \cdot \bar n)}_{\frac{\partial u}{\partial n}} \cdot \underset{0}{\overset{\|}{h}}\, dS + \int\limits_\Omega g h\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int\limits_\Omega (-\Delta u + g)\, h = 0, \qquad \forall h \in C_0^1(\bar\Omega) \Rightarrow$$ по л. Лагр.

ур. Эйлера $\longrightarrow \begin{cases} \Delta u = g(x), & x \in \bar\Omega \\ u\big|_S = \varphi. \end{cases}$ $\Big| \Leftarrow$ необх. усл. экстрем.

<u>Пример 2</u>: $\quad \min\limits_{D} S[u] = \iint\limits_\Omega \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy;$

$D = \{u \in C^1(\bar\Omega) : u\big|_S = \varphi\}$

$$\delta S(u,h) = \frac{d}{d\alpha}\left(\iint\limits_\Omega \sqrt{1+(u_x+\alpha h_x)^2+(u_y+\alpha h_y)^2}\,dx\,dy\right)\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \iint\limits_\Omega \frac{2[(u_x+\alpha h_x)\cdot h_x + (u_y+\alpha h_y) h_y]}{2\sqrt{\dots\dots}}\,dx\,dy\,\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \iint\limits_\Omega \left\{\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\cdot h_x + \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\cdot h_y\right\} dx\,dy =$$ по Гауссу

$$= -\iint\limits_\Omega \Bigg[\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_y^2+u_y^2}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_y^2+u_x^2}}\right)}_{\|\atop Lu}\Bigg] h\,dx\,dy +$$

$$+ \int\limits_S \frac{(u_x \cdot h \cdot \cos(\bar n, \bar x) + u_y \cdot h \cdot \cos(\bar n, \bar y))}{\sqrt{}}\,dS = -\iint\limits_\Omega Lu \cdot h\,dx\,dy +$$

$$+ \int\limits_S \frac{\frac{\partial u}{\partial n}\cdot h^{=0}}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\,dS = 0 \Rightarrow \begin{cases} Lu = 0, & x \in \Omega \\ u\big|_S = \varphi(x,y) \end{cases}$$

Ур-е $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{u_y}{\sqrt{\dots}}\right) = 0$ канон. ур-ние min пов-ти

---

§ 5. Естественные краевые условия.

① Рассм. сначала прост. фл: $F[u]=\int_a^b f(x,u,u')dx$ на мн-ве $D=\{v\in C^1[ab]: v(a)=A\} \Rightarrow \mathcal{D}=\{\hat{u}\}+M$, где $\hat{u}$ – $\forall$ C^1-гладкая ф-я, $\hat{u}(a)=A$; $M=\{h\in C^1[ab]: h(a)=0\}$

$\delta F(u,h)=0$, $\forall h\in M$: (1) $\boxed{\int_a^b [f_u h + f_{u'}\cdot h']dx=0, \ \forall h\in M}$

Отметим, что $C_0^1[ab]\subset M$ и рассм. сначала (1) для $h\in C_0^1[ab]$:

$\Leftrightarrow$ было док-но, что тогда $\exists \frac{d}{dx}f_{u'}$ и из (1) выводится ур. Эйлера: $\int_a^b \underbrace{\left(f_u-\frac{d}{dx}f_{u'}\right)}_{Lu} h\,dx=0, \ \forall h\in C_0^1[ab] \Rightarrow$

ур. (2) $\boxed{Lu=0, \ x\in[ab]}$. Вернёмся теперь к рав-ву (1) – н. усл. экст.

и пусть теперь h – произв. ф. из M:

В рав-ве (1) проинтегр. по частям:

$$\int_a^b \left(f_u\cdot h-\frac{d}{dx}f_{u'}\right)h\,dx + f_{u'}\cdot h\Big|_a^b=0 \quad (3)$$

В рав-ве (3) в силу (2) и усл. $h(a)=0$ остается

$$\int_a^b 0\cdot h\,dx + f_{u'}\Big|_{x=b} h(b) - f_{u'}\Big|_{x=a}\cdot \overbrace{h(a)}^{=0}=0. \quad (4)$$

Т.к. $h(b)$ – $\forall$ вещ. число, то из рав-ва $f_{u'}\Big|_{x=b}\cdot h(b)=0$

$$\Rightarrow \boxed{f_{u'}(x,u(x),u'(x))\Big|_{x=b}=0} \quad (5)$$

Опред. Краевое усл., полученное как необх. усл. экстрем. из равва нулю первой вариации наз-в. естественным краевым условием.

Т.о.

$$\delta F=0 \swarrow Lu=0, \quad \searrow f_{u'}\Big|_{x=b}=0$$

Замеч. Если $D = C^1[ab]$, то $M = D = C^1[ab]$ — т.е. краевые усл. для простейш. ф-ла не фиксированы. Тогда вводим ур. $\boxed{Lu=0}$ так, как ранее, рассм. только $h \in C_0^1[ab]$,

В общей ситуации в

$$\delta F = 0 \Rightarrow \int_a^b \underbrace{Lu}_{0}\cdot h\,dx + f_{u'}|_{x=b}\, h(b) - f_{u'}|_{x=a}\, h(a) = 0$$

см. (4) т.к. $h(b)$ и $h(a)$ — произв. знач. и независимы, то

$$\Rightarrow f_{u'}|_{x=b} = 0 \quad \text{и} \quad f_{u'}|_{x=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad Lu = 0$$

$+$ 2 естеств. усл.

2) Случай кратных интегралов! $(n > 1)$

Вернёмся к примеру с интегр. Дирихле

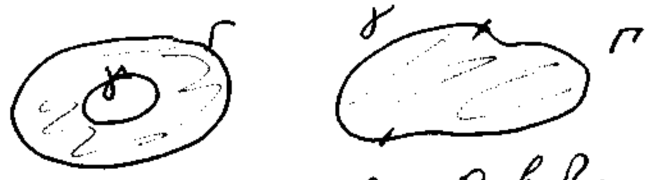
$$0 = \delta \mathbb{D}(u,h) = \int_\Omega (u_{x_i} h_{x_i} + gh)\,dx = \int_\Omega (-\Delta u + g)\,h\,dx + \int_S \frac{\partial u}{\partial n} h\,dS$$

$\sum_i$ — подразум.

(см. стр. 5)

$\Rightarrow$ при усл., что $D = \{u \in C^1(\bar\Omega) : u|_\gamma = \varphi\}$,

где $\gamma \cup \Gamma = \partial\Omega$, $|\Gamma|_{n-1} > 0$



Предположим сначала, что $h \in C_0^1(\bar\Omega) \Rightarrow \int_S \frac{\partial u}{\partial n} h\,dS = 0 \Rightarrow -\Delta u + g = 0$ в Ω,

т.е. ур. Эйлера $\Delta u = g(x)$, $x \in \Omega$, — выполняется.

Затем вернёмся к $\delta \mathbb{D} = 0$ и рассм.

$$\forall h \in M = \{h \in C^1(\bar\Omega) : h|_\gamma = 0\} \Rightarrow$$

$$\delta \mathbb{D}(u,h) = \int_\Omega 0 \cdot h\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} h\,dS = 0 \Rightarrow \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} h\,dS = 0$$

$$\forall h|_\Gamma \in C(\Gamma) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0}$$ — естеств. краев. усл.

Необх. усл.

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{в } \Omega \\ u|_\gamma = \varphi; \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

<u>Пример</u> (на ест. усл-я) $\min\limits_{D} \int_0^1 \left(\left(\frac{u''}{2}\right)^2 + \sin^2 u\right)dx$,

$D = \{u \in C^2[0,1] : u(0)=1,\ u'(0)=2\}$

$D = \{\hat{u}\} + M, \quad M = \{h \in C^2[0,1] : h(0)=0,\ h'(0)=0\}$

$\delta F(u,h) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 \left[\left(\frac{u''+\alpha h''}{2}\right)^2 + \sin^2(u+\alpha h)\right]dx \Big|_{\alpha=0} =$

$= \int_0^1 \left[(u''+\alpha h'')h'' + 2\sin(u+\alpha h)\cdot\cos(u+\alpha h)\cdot h\right]dx\Big|_{\alpha=0} =$

$= \int_0^1 (u''h'' + \sin 2u \cdot h)\,dx = 0, \quad \forall h \in M.$

Преобразуем $\int_0^1 u''h''dx = -\int_0^1 u'''\cdot h'dx + u''\cdot h'\Big|_0^1 =$

$= +\int_0^1 u^{(4)}\cdot h\,dx - u'''\cdot h\Big|_0^1 + u''h'\Big|_0^1$

$\Rightarrow \int_0^1 (u^{(4)} + \sin 2u)h\,dx - u'''(1)\cdot h(1) + u''(1)\cdot h'(1) = 0$

$\Rightarrow$ 1) если $h \in C_0^2[0,1] \Rightarrow \int_0^1 (u^{(4)} + \sin 2u)h\,dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{u^{(4)} + \sin 2u = 0,\ x \in [0,1]}$ ← ур. Эйлера

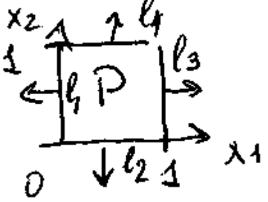
2) если $\forall h \in M \Rightarrow \int_0^1 0\cdot h\,dx - u'''(1)\cdot h(1) + u''(1)\cdot h'(1) = 0$

Т.к. значения $h(1)$ и $h'(1)$ — вещ. $\forall$, независимые числа, то

$\underbrace{u'''(1)=0,\ u''(1)=0}_{\text{естеств. кр. усл}} \Rightarrow$ Необх. усл. экстремума

$$\begin{cases} u^{(4)} + \sin 2u = 0, & x \in [0,1] \\ u(0) = 1, & u'(0) = 2 \\ u''(1) = 0, & u'''(1) = 0 \end{cases}$$

$\min\limits_{\mathcal{D}} F[u]$, $\quad F[u]=\int\limits_P\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2+e^{5x}\cdot u\right)dx$, $P=(0,1)\times(0,1)$



$\bigcup\limits_{i=1}^{4} l_i=\partial P \qquad \mathcal{D}=\{v\in C^1(\bar P):\ v|_{l_1}=1,\ v|_{l_3}=1\}$

$M=\{h\in C^1(\bar P):\ h|_{l_1}=0,\ h|_{l_3}=0\}$ — мн-во

$\mathcal{D}=\{\hat v\}+M.$

$$\delta F(u,h)=\frac{d}{d\alpha}\int\limits_P\left[(u_{x_1}+\alpha h_{x_1})^2+(u_{x_2}+\alpha h_{x_2})^2\right]\cdot\frac{1}{2}+e^{5x}\cdot(u+\alpha h)\,\underset{dx_1dx_2}{\underset{\parallel}{dx}}\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int\limits_P\left\{(u_{x_1}+\alpha h_{x_1})h_{x_1}+(u_{x_2}+\alpha h_{x_2})h_{x_2}+e^{5x}\cdot h\right\}dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int\limits_P\left(u_{x_1}\cdot h_{x_1}+u_{x_2}\cdot h_{x_2}\right)dP+\int\limits_P e^{5x}\cdot h\,dx=-\int\limits_P\left(u_{x_1x_1}\cdot h+u_{x_2x_2}\cdot h\right)dx$$

$$+\int\limits_{\partial P}\left(u_{x_1}h\cdot\cos(\bar n,x_1)+u_{x_2}h\cdot\cos(\bar n,x_2)\right)ds+\int\limits_P e^{5x}\cdot h\,dx=$$

$l_2\cup l_4$

$$=\int\limits_P\left(-\Delta u+e^{5x}\right)h\,dx+\int\limits_{l_2}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=-u_{x_2}}\cdot h\,ds+\int\limits_{l_4}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=u_{x_2}}h\,ds=0$$

$\Rightarrow$ if $h\in C_0^1(\bar P)\Rightarrow \boxed{\Delta u=e^{5x}}$

if $h\in M$ – произв. $\quad\int\limits_P 0\cdot h\,dx-\int\limits_0^1 u_{x_2}(x_1,0)\cdot h(x_1,0)\,dx_1+$

$+\int\limits_0^1 u_{x_2}(x_1,1)\,h(x_1,1)\,dx_1=0$, $\Rightarrow$ a) $h|_{l_4}=0\Rightarrow\int\limits_0^1 u_{x_2}(x_1,0)\,h(x_1,0)\,dx_1=0$

$\Rightarrow u_{x_2}|_{l_2}=0$; аналогично: $u_{x_2}|_{l_4}=0.$

Итого: $\begin{cases}\Delta u=e^{5x}\ \text{в}\ P;\\ u|_{l_1}=1,\ u|_{l_3}=1;\ \underbrace{u_{x_2}|_{l_2}=u_{x_2}|_{l_4}=0}_{\text{естеств. усл.}}\end{cases}$

Лекция 3 (VI сем.)

§ 6. Принцип Острогр.-Гамильтона. Вывод ур-я колебаний мембран.

Пусть фиксир. контин. или дискр. сист. и значения T - кинетич. энергии, Π - потенц. эн. — зависят от времени

$$D = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi)\, dt$$ — интеграл действия, $(t_1, t_2) \in (0, \infty)$

фиксир. промеж.

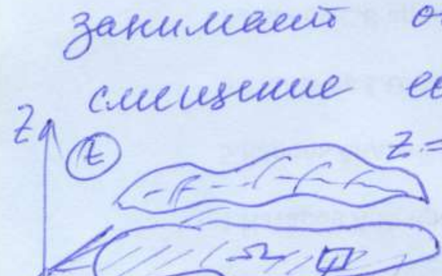
Принцип Остр.-Гамильтона: "Из всех допустимых перемещений из одного фиксир. положения в другое система выбирает то, кот. является экстремалью ф-ла действия:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi)\, dt = 0 \quad (*), \quad \forall (t_1, t_2) \subset (0, \infty)$$

Выведем уравнение (малых) колебаний мембраны с помощью этого принципа.

Мембрана - плоский упругий об'ект, который "работает на растяжение."

Пусть в положении равновесия мембрана занимает обл. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. В момент времени t её смещение есть ф-я $u(x, y, t)$, $(x, y) \in \Omega_{огр.}$, $t > 0$.



Предпол., что мембрана однородная $\rho(x,y) = \rho = const.$ - плотность мемб.

$\Delta m = \rho\, dx\, dy$; $f(x,y,t)\, dx\, dy$ - сила, вертик. приложена на эл-т $dx\, dy$

$$\Delta T = \frac{\Delta m\, u_t^2}{2} \Rightarrow T = \iint\limits_{\Omega} \rho \frac{u_t^2}{2}\, dx\, dy; \quad \Pi = A_{\substack{упр.\,сил\\ растян.}} + A_{\substack{сопр.\\ внешн.\\ силе}}$$

$\Delta A_{упр.} = K \Delta S$, $K > 0$ - постоянная, ΔS - растяж. площади пов-ти мемб. $\Rightarrow \Delta A = K\left(\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1\right) dx\, dy \simeq$

$\overset{(+)}{\approx} k\left(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}\right)dxdy.$ Чтобы верно было соотн. (+) предпол., что $|u_x|+|u_y|<<1$, тогда

$$\sqrt{1+\underbrace{u_x^2+u_y^2}_{\alpha}}: \underbrace{\sqrt{1+\alpha}}_{f(\alpha)} = \underset{f(0)}{1} + \underset{=\frac{1}{2}}{f'(0)}\alpha + o(\alpha) \approx 1+\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1 \approx \frac{u_x^2+u_y^2}{2} \Rightarrow A_{упр.} = k\iint_\Omega \frac{u_x^2+u_y^2}{2}dxdy.$$

$A_{\substack{сопрот.\\внешн}} = -A_{внешн.}$; $\Delta A_{внешн.} = f\,dxdy\cdot u \Rightarrow$

$A_{внешн.} = \iint_\Omega f\cdot u\,dxdy.$ Интеграл действия:

$$\int_{t_1}^{t_2}(T-\Pi)dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\iint_\Omega}_{=Q}\Big\{\rho\frac{u_t^2}{2} - \underbrace{\Big(\frac{k(u_x^2+u_y^2)}{2} - f\cdot u\Big)}_{\Pi}\Big\}dxdydt =$$

$$D[u] = \int_Q\Big[\rho\frac{u_t^2}{2} - \frac{k(u_x^2+u_y^2)}{2} + fu\Big]dxdydt;\quad Q = \Omega\times(t_1,t_2)$$

Согласно (*) $\boxed{\delta D(u,h) = 0,\ \forall h \text{ допуст.}}$ (?)

Из принц. Остр-Гам. $u|_{t_1} = u+\alpha h|_{t_1}$; $u|_{t_2} = u+\alpha h|_{t_2}$

$\Rightarrow h|_{t_1} = h|_{t_2} = 0.$ Считаем ф-ции $u(x,y,t)$ и $h(x,y,t)$ принадлеж. $C^1(\overline{Q})$.

(1) $\delta D(u,h) = \int_Q[\rho u_t h_t + fh - k(u_x h_x + u_y h_y)]dxdydt = 0$

Для вывода ур-я будем считать, что $h\in C_0^1(\overline{Q})$;

$$\int_Q[-\rho u_{tt} + k(u_{xx}+u_{yy}) + f]h\,dQ = 0,\quad \forall h\in C_0^1(\overline{Q})$$

$\Rightarrow \rho u_{tt} - k\Delta u = f$; в станд. форме

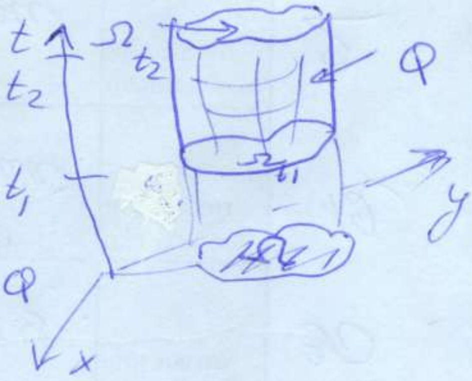
(2) $\underline{u_{tt} - a^2\Delta u = F(x,y,t)}$, где $a^2 = \frac{k}{\rho}$, $F = \frac{f(x,y,t)}{\rho}$

— ур-е колебаний мембраны.

О краевых условиях

а) $u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = \varphi(x,y,t)$ — задано перемещение точек $\partial\Omega$ во времени.

$\Rightarrow u+\alpha h|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = \varphi \Rightarrow h|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0$, т.е. $h=0$ на боковой пов-ти цилиндра Q.



+ известно, что $h|_{\Omega_{t_1}} = h|_{\Omega_{t_2}} = 0$

$\Rightarrow h \in C_0^1(\bar\Omega)$ и дополнит. гран. усл-й не получаем:

$$(3)\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = F & \text{в } Q \\ u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = \varphi \end{cases}$$

(б) u не закреплена на $\partial\Omega$ при $t>0$. Тогда $u+\alpha h|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}$ — принимает произв. значения. Из равен. (1) получаем после интегр. по частям

$$\iint_Q [-\rho u_{tt} + k(u_{xx}+u_{yy}) + f]\, h\, dQ + \iint_{\partial Q} [\rho u_t h\cdot\cos(\bar n, t) - k u_x h\cdot\cos(\bar n,\bar x) - k u_y h\cdot\cos(\bar n,\bar y)]\, ds = 0.$$

При $h\in C_0^1(\bar Q)$ мы уже вывели ур-е колеб. мембр. (2). Рассм. $\iint_{\partial Q}[\dots]\, ds = 0$. Т.к. $h|_{t_1} = h|_{t_2} = 0$, то $\iint_{\partial Q}[\dots] h\, ds =$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}[\rho u_t \underbrace{\overset{?=0}{\cos(\bar n, \bar t)}}_{=0} - k\frac{\partial u}{\partial n}]\, h\, \underbrace{ds}_{d(\partial\Omega)\,dt} = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\, h\, d\partial\Omega\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega\times(t_1,t_2)} = 0}_{} \quad \left(\text{например, } h = \frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

это естеств. кр. усл.

$$\Rightarrow (4)\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = F & \text{в } Q \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0 \end{cases}$$

Замечание: В ситуациях (3) и (4) задачу следует доопределить двумя начальн. усл-ями.

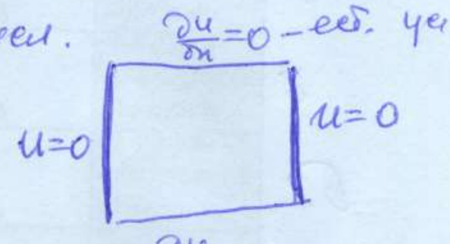
Т.о., для полной постановки задачи (4) мы задаем 2 нач. усл. $u|_{t=0}=\varphi_0(x,y)$ — нач. профиль струны и $u_t|_{t=0}=\psi_0(x,y)$ — нач. скорость.

При условиях закрепления мембраны ($u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=0$) или описании перемещения её гран: $u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=\varphi(x,y,t)$ получаем нач-краевую задачу:

НУ:
$$(5)\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=F(x,y,t), & (x,y)\in\Omega,\ t>0;\\ u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=\varphi(x,y,t); & \text{— 1 краев. усл.}\\ u|_{t=0}=\varphi_0(x,y);\quad u_t|_{t=0}=\psi_0(x,y) & \text{— 2 нач. усл.}\end{cases}$$

Если краев. условие не фиксировать, то дополняем зад. (4):
$$(6)\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=F(x,y,t), \ (x,y)\in\Omega,\ t>0;\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=0;\\ u|_{t=0}=\varphi_0(x,y);\quad u_t|_{t=0}=\psi_0(x,y)\end{cases}$$

Возможна комбинация краев. усл.

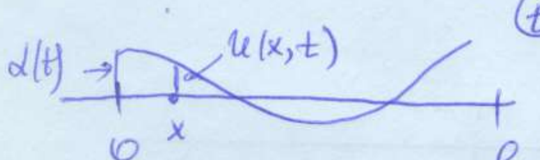


Если $F=F(x,y)$ $\Rightarrow$
$u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)}=\varphi(x,y)$ $\Rightarrow u=u(x,y)$

Тогда (5) $\Rightarrow$
$$(5^0)\begin{cases}\Delta u=\Phi(x,y)\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y)\end{cases},\quad \Phi=-\frac{F(x,y)}{a^2}$$

Из (6) $\Rightarrow$
$$(6^0)\begin{cases}\Delta u=\Phi(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

Частный случай: ур-е колебаний струны.



однородная упругая нить, которая "работает на растяжение".

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x,t) \\ u|_{x=0} = \alpha(t);\quad u|_{x=l} = \beta(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x);\quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

естеств. кр. усл. $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$

На практике: вывод краевых усл. для струны, конец кот. закреплен упруго с помощью пружины.

§7. Изопериметрическая задача

Пример (задача Дидоны)

$$l[u] = \int_a^b \sqrt{1+(u')^2}\,dx = l_0$$

$b-a < l_0 < \pi\frac{(b-a)}{2}$

$$S[u] = \int_a^b u(x)\,dx \to \max$$

$\{u \in C_0^1[ab],\ l[u] = l_0\}$

Постановка

$\min F[u]$, $\quad D = \{\hat u\} + M_{лин.} \subset B$,

(*) $\begin{cases} u \in D \\ G[u] = l \end{cases}$ где F, G — диффер. ф-ии на D.

Т. Эйлера: Пусть u — реш. изопер. задачи (*) и $u(x)$ — не экстремаль ф-ла G на D. Тогда $\exists \lambda \in R^1$, что $\delta(F+\lambda G)(u,h) = 0$, $\forall h_{доп} \in M$.

Док-во: Рассм. $u + \underbrace{\alpha h + \beta \eta}_{\in M}$, где $h, \eta \in M$

Для этой ф-ции должны вып-ся соотнош.

(1) $G[u+\alpha h+\beta\eta]=l$; (2) $F[u]\le F[u+\alpha h+\beta\eta]$

Пусть $\psi(\alpha,\beta)=G[u+\alpha h+\beta\eta]$. Очевидно, $\psi(0,0)=l$

Хотим, чтобы $\psi(\alpha,\beta)=l$. Воспольз. т. о неявных ф-ях: Вычислим $\psi'_\beta(0,0)$:

$$\psi'_\beta(0,0)=\frac{d}{d\beta}G[u+\alpha h+\beta\eta]\Big|_{\substack{\beta=0\\ \alpha=0}}=\delta G(u,\eta).$$

Т.к. u - не экстремаль ф-ла G, то $\exists\,\eta\in M:\ \delta G(u,\eta)\ne 0\Rightarrow$

При таком фиксир. далее η $\psi'_\beta(0,0)\ne 0$. По т. о неявных ф-ях $\exists$ ф-я $\beta(\alpha)$ в окрест. т. $\alpha=0$ такая, что $\psi(\alpha,\beta(\alpha))=l$, причем $\beta(0)=0$. Полученное рав-во

означает, что $G[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]=l$, $\forall h\in M$, $|\alpha|\ll 1$

Кроме того, из (2): $F[u]\le \underbrace{F[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]}_{\Phi(\alpha)}$, $|\alpha|<\alpha_0$ $(\exists\,\alpha_0)$

Верно нер-во $\boxed{\Phi(0)\le\Phi(\alpha),\ |\alpha|<\alpha_0}\Rightarrow \Phi'(0)=0\Rightarrow$

$$0=\Phi'(0)=\frac{d}{d\alpha}F[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]\Big|_{\alpha=0}=\frac{\partial F}{\partial\alpha}[u+\alpha h+\beta\eta]\Big|_{\alpha=0}+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial\beta}[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]\Big|_{\substack{(\alpha=0)\\ \beta=0}}\cdot\beta'(0)=0\Rightarrow \delta F(u,h)+\delta F(u,\eta)\cdot\beta'(0)=0\quad(3)$$

Что такое $\beta'(0)$?

Продифферер. по α рав-во $G[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]=l$ и положим $\alpha=0$:

$$\frac{\partial G}{\partial\alpha}[u+\alpha h+\beta\eta]\Big|_{\alpha=0}+\frac{\partial G}{\partial\beta}[u+\alpha h+\beta\eta]\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\cdot\beta'(0)=0$$

$$\Rightarrow \delta G(u,h)+\underbrace{\delta G(u,\eta)}_{\ne 0}\cdot\beta'(0)=0\Rightarrow \beta'(0)=-\frac{\delta G(u,h)}{\delta G(u,\eta)}$$

Теперь из рав-ва (3) следует:

(7)

$$\delta F(u,h) - \frac{\delta G(u,h)}{\delta G(u,\eta)} \cdot \delta F(u,\eta) = 0$$ эл-т η - фикс. $\Rightarrow$

Пусть $\lambda = -\frac{\delta F(u,\eta)}{\delta G(u,\eta)} \Rightarrow$

$$\boxed{\delta F(u,h) + \lambda \delta G(u,h) = 0, \ \forall h \in M}$$

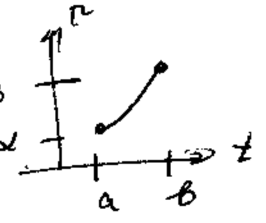
$\Leftrightarrow \quad \delta(F + \lambda G)(u,h) = 0, \ \forall h \in M$, ч.т.д.

Лекция 4 (VI сем.)

§ 8. Специфика задач в параметр. форме

Пусть на плоскости кривая γ задана в параметрич. форме $\gamma: \{x(t), y(t)\}$, $t \in [a,b]$; сделаем замену $\tau = \tau(t)$, $\tau'(t) > 0$; пусть $\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau))$, $\tilde{y}(\tau) = y(t(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$. Т.о.,

$\gamma: \{\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)\}$, $\tau \in [\alpha, \beta]$. Таких параметриз. ∞ много.



!! Чтобы вариац. задачи в параметрич. форме имела смысл, необходимо, чтобы значение функционала не зависело от способа параметризации, а зависело только от кривой, которую эти параметризации задают: $F[x(t), y(t)] = F[\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)]$.

Какие усл. это накладывает на F?

Рассм. сначала случай, когда $\gamma: y = y(x)$, $x \in [a,b]$, т.е. возможно определить единств. ф-ю $y(x)$, кот. опред. γ.

$$\Rightarrow F\{\gamma\} = F[y] = \int_a^b f(x, y, y'(x))\,dx = (*) \quad \begin{cases} \text{пусть } t \in [\alpha, \beta] \\ \text{и } x = x(t); \\ \quad y = y(t) \end{cases}$$

$$(*) = \int_\alpha^\beta \underbrace{f\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t)}_{=\varphi(x(t), y(t), \dot{x}, \dot{y})} dt.$$

В этом случае 1) φ явно не зависит от t;
2) φ – положит. однородна I степени по аргументам $\dot{x}, \dot{y}$, т.е. $\varphi(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\,\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, $\forall k > 0$.

Покажем, что справедливо след. утв-е:

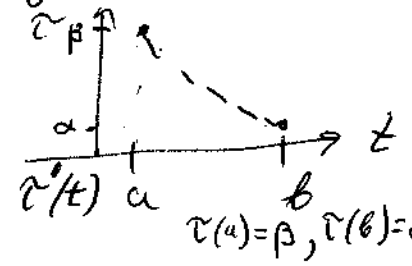
Утв. Пусть $F[x, y] = \int_a^b f(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt$.

Если 1) f явно не зависит от t, т.е. $f = f(x, y, \dot{x}, \dot{y})$;
2) $f(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\,f(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, $\forall k > 0$, (положит. однородн.)

тогда значение ф-ла F не зависит от способа параметризации. (2)

Док-во:

Пусть $\tau = \tau(t)$, $\tau'(t) > 0$ (если $\tau' < 0$, то изменим направл. обхода)



$$F\{\gamma\} = \int_a^b f(x(t), y(t), \dot x(t), \dot y(t))\,dt = \oplus$$

$\tilde x(\tau) = x(t(\tau))$ $\quad \tilde x'_\tau = \dot x(t)\cdot \frac{dt}{d\tau}$; $\quad \dot x(t) = \tilde x'_\tau \cdot \tau'(t)$

$$\oplus = \int_\alpha^\beta f\left(\tilde x(\tau), \tilde y(\tau), \tilde x'_\tau \cdot \frac{d\tau}{dt}, \tilde y'_\tau \cdot \frac{d\tau}{dt}\right) \frac{dt}{d\tau}\, d\tau = \text{однородность}$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\tilde x(\tau), \tilde y(\tau), \tilde x'(\tau), \tilde y'(\tau))\, d\tau = F\{\gamma\}. \ \blacksquare$$

Пример

Пусть $l\{\gamma\} = l_0$; $S\{\gamma\} \to \max$
площадь

$\gamma: \{x(t), y(t)\}$
$t \in [t_1, t_2]$

В парамет. форме

$$l\{\gamma\} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\, dt = l_0$$

$$S\{\gamma\} = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot y - y\dot x)\, dt$$

оба функционала удовл. усл. 1) и 2).

Как получается ↑? Из формулы Грина на плоскости

$$\int_G (Q_x - P_y)\, dG = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

Пусть $P = -\frac{y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$

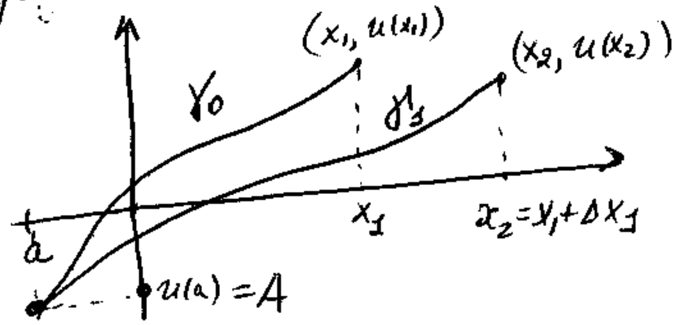
$\Rightarrow Q_x - P_y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; $\quad \int_G dG = |G| = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$;

$$\boxed{S\{\gamma\} = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{y}{2}\dot x + \frac{x}{2}\dot y\right) dt.}$$

Замечание: Пусть выполн. усл. Утверждения и вар. задача имеет смысл. Тогда $F\{\gamma\} = F[x(t), y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} f(x, y, \dot x, \dot y)\, dt$. Необх. усл. экстремума: система ур. Эйлера: $\frac{d}{dt} f_{\dot x} - f_x = 0$; $\frac{d}{dt} f_{\dot y} - f_y = 0$. Можно показ., что эти ур-я зависимы (т.е. одно — следствие другого). Для нахождения экстремали следует интегрировать одно из ур-й и учесть условие параметриз. Например $\dot x^2 + \dot y^2 = 1$, если t — длина дуги.

§9. Общая форма I вариации. Условие на свободном конце.

Рассм. простейший ф-л $F[u]=\int_a^{x_1} f(x,u,u')\,dx$, где $x_1>a$ не фиксирован; $D=\{u\in C^1\{x\geq a\},\ u(a)=A\}$. Значения $(x_1,u(x_1))$ меняются на плоскости, т.е. правый конец "плавает" по кривой, задаваемой ф-ей $y=u(x)$, $x\geq a$, плоскости.



При вычислении δF следует варьировать u и x_1. Чтобы избежать варьирования верхнего lim, перейдём к парамет. форме.

Введём параметр $t\in[t_0,t_1]$ — это фиксир. интервал и запишем

$\gamma_0:\{x(t),u(t)\}$, $\gamma_1=\{x(t)+h(t),\ u(t)+\eta(t)\}$, где

$x(t_0)=a,\ u(t_0)=A$; $\left.\begin{matrix} x(t_0)+h(t_0)=a \\ u(t_0)+\eta(t_0)=A \end{matrix}\right\}\Rightarrow h(t_0)=\eta(t_0)=0.$

Пусть min F достиг. на γ_0 и мы рассм. семью $\gamma_\alpha:\{x(t)+\alpha h(t),\ u(t)+\alpha\eta(t)\}$, $|\alpha|\leq 1$.

Тогда $F\{\gamma_0\}\leq F\{\gamma_\alpha\}\Rightarrow$

Необх. усл. экстремума $\boxed{\left.\frac{d}{d\alpha}F\{\gamma_\alpha\}\right|_{\alpha=0}=0}$ (*)

Чтобы записать усл. (*), перейдём к парамет. форме записи ф-ла F:

$$F\{\gamma\}=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{f\left(x,u,\frac{\dot u}{\dot x}\right)\dot x}_{=\varphi(x,u,\dot x,\dot u)}\,dt$$

$$F\{\gamma_\alpha\}=\int_{t_0}^{t_1}\varphi(x+\alpha h,\ u+\alpha\eta,\ \dot x+\alpha\dot h,\ \dot u+\alpha\dot\eta)\,dt;\ \text{тогда (*):}$$

$$\delta F=\frac{d}{d\alpha}\left.\int_{t_0}^{t_1}\varphi(x+\alpha h,\ u+\alpha\eta,\ \dot x+\alpha\dot h,\ \dot u+\alpha\dot\eta)\,dt\right|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}(\varphi_x\cdot h+\varphi_u\eta+\varphi_{\dot x}\cdot\dot h+\varphi_{\dot u}\cdot\dot\eta)\,dt=0$$

(аргументы у $\varphi_x,\varphi_u,\ldots$ $(x,u,\dot x,\dot u)$)

(4)

Интегрируя по частям в получ. равве:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\varphi_x-\frac{d}{dt}\varphi_{\dot x}\right)h\,dt+\varphi_{\dot x}h\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\left(\varphi_u-\frac{d}{dt}\varphi_{\dot u}\right)\eta\,dt+$$

$$+\varphi_{\dot u}\eta\Big|_{t_2}^{t_1}=0.$$ Сначала считаем, что $h\big|_{t=t_1}=\eta\big|_{t=t_1}=0$ и выбираем независимо $\Rightarrow$ т.е. $h,\eta\in C_0^1[t_0,t_1]$.

$\Rightarrow$ Выводим ур-я $\boxed{\varphi_x-\frac{d}{dt}\varphi_{\dot x}=0;\quad \varphi_u-\frac{d}{dt}\varphi_{\dot u}=0.}$

Остаётся естеств. усл-е

!! $\boxed{\varphi_{\dot x}h+\varphi_{\dot u}\cdot\eta\big|_{t=t_1}=0}$

Вернемся к старым обозначениям:

$\varphi(x,u,\dot x,\dot u)=f\left(x,u,\frac{\dot u}{\dot x}\right)\cdot\dot x$,

тогда $\varphi_{\dot x}=f_{u'}\left(-\frac{\dot u}{(\dot x)^2}\right)\cdot\dot x+f\left(x,u,\frac{\dot u}{\dot x}\right)=f(x,u,u')-$

$-f_{u'}\cdot u'$; $\quad\varphi_{\dot u}=f_{u'}\frac{\dot x}{\dot x}=f_{u'}$. В результате

естеств. усл. принимает вид $(f-f_{u'}\cdot u')\big|_{x_1}h(t_1)+f_{u'}\big|_{x_1}\eta(t_1)=0$

$h(t_1)=\delta x_1$, $\eta(t_1)=\delta y_1\Rightarrow$

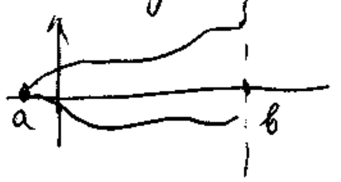
Условие на своб. конце

(**) $\boxed{(f-f_{u'}\cdot u')\,\delta x_1+f_{u'}\cdot\delta y_1\big|_{x=x_1}=0}$

---

2 следствия получаем сразу:

1). Пусть $x_1=b$, т.е. $\delta x_1=0\Rightarrow\boxed{f_{u'}\big|_{x=b}=0}$ - естеств. усл., полученное ранее



2) $y_1=\psi(x_1)$ - конец перемещается по заданной линии, кот. называется трансверсалью:

$\Delta y_1=\Delta\psi(x_1)=\psi(x_1+\Delta x_1)-\psi(x_1)\simeq$

$\simeq\psi'(x_1)\,dx_1=\delta y_1$

Подставим δy_1 в (**):

$$(f-f_{u'}\cdot u')\delta x_1+f_{u'}\cdot\psi'\cdot\delta x_1=0.$$ Т.к. δx_1 — $\forall$, то

усл-е трансверсальности:

$$\boxed{f+f_{u'}(\psi'-u')\Big|_{x=x_1}=0}$$

(+ усл. $u(x_1)=\psi(x_1)$)

Пример: Пусть $F[y]=\int\limits_a^{x_1}\underbrace{A(x,y)\sqrt{1+y'^2}}_{f}\,dx$, $A>0$

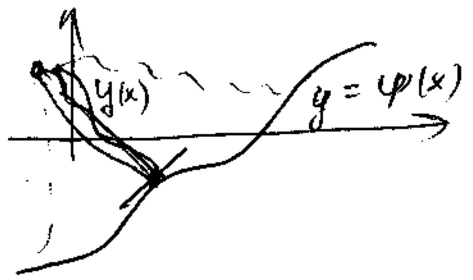
— это функционал типа геом. оптики (брахистохрона, мин. пов. вращ.)

усл. трансверсальности:

$$f_{y'}=\frac{Ay'}{\sqrt{1+y'^2}};\quad A\cdot\sqrt{1+y'^2}+\frac{A\cdot y'(\psi'-y')}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1}=0$$

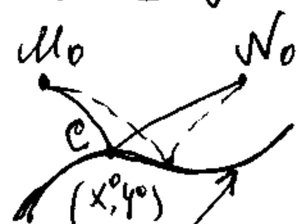
$$\Rightarrow \frac{\overset{\neq 0}{A}\{(1+\cancel{y'^2})+y'\psi'-\cancel{y'^2}\}}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1}=0\Rightarrow\boxed{1+y'\psi'\Big|_{x=x_1}=0}$$

это усл. ортогон. подхода



§ 10. Экстремали с угловыми точками.

п.1 Задача об отражении экстремалей



$y=\psi(x)$

$(y^0=\psi(x^0))$

Найти кривую, реализ. экстремум для ф-ла

$$F[y]=\int\limits_a^b f(x,y,y')\,dx,\quad y(a)=A,\quad y(b)=B,$$ при

условии, что в некот. точке (x^0,y^0) кривая отражается от линии $\gamma:\{y=\psi(x),\ x\in[a,b]\}$, $M_0, N_0\notin\gamma$.

Точка C при возмущениях перемещ. вдоль γ.

$$\Rightarrow \delta F=\delta\int\limits_a^{x_0}f\,dx-\delta\int\limits_b^{x_0}f\,dx=\underbrace{(f-y'f_{y'})\Big|_{x_0-0}\delta x_0+f_{y'}\Big|_{x_0-0}\cdot\delta y_0}$$

$$\underbrace{-(f-y'f_{y'})\Big|_{x_0+0}\delta x_0-f_{y'}\Big|_{x_0+0}\delta y_0}=0\Rightarrow$$

$$\delta y_0=\psi'(x^0)\,\delta x_0$$

$$\left(f+(\varphi'-y')\cdot f_{y'}\right)\Big|_{x^0-0}\cdot\Delta x_0-\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}\right)_{x^0+0}\cdot\Delta x_0=0$$

$$\forall\,\Delta x_0\neq0 \Rightarrow \left(f+(\varphi'-y')f_{y'}\right)\Big|_{x^0-0}=\left(f+(\varphi'-y')f_{y'}\right)_{x^0+0} \Longleftrightarrow$$

т.е. $\left[f+(\varphi'-y')f_{y'}\right]_{x^0}=0$, скачок ф-ции $f+(\varphi'-y')f_{y'}$ равен $=0$

Замеч. Для ф-лов с $f=A(x,y)\sqrt{1+y'^2}$ – это усл. означает, что угол падения = углу отражения (см. Эльсгольц...)

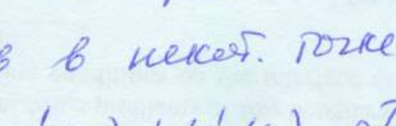
п.2 Экстремали с изломом.

В некоторых задачах для гладких $f(x,y,y')$ не удаётся найти C^1-гладкую экстремаль (и т. min)

Пример: $F[y]=\int_{-1}^{1} y^2(1-y')^2\,dx$, $y(-1)=0$, $y(1)=1$

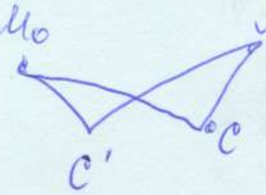
$y^0(x)=\begin{cases}0, & x\le0\\ x, & x>0\end{cases} \Rightarrow F[y^0]=0$, т.е. y_0 доставл. абс. min F,

но $y^0\notin C^1[-1,1]$



Разумно допустить кус-гладкие экстремали.

Допустим что в простейшей задаче вариац. исчисления экстремаль в некот. точке имеет излом, т.е. $y_-(x_1)=y_+(x_1)$, но $y'_-(x_1)\neq y'_+(x_1)$. Точка C



N_0 – точка излома свободно перемещ. по плоскости при возмущениях. $C:\{x_1,y_1\}$

Из условия $\delta F=\delta\int_a^{x_1}f-\delta\int_b^{x_1}f=\ldots=$

$$=(f-y'f_{y'})\big|_{x_1-0}\cdot\delta x_1+f_{y'}\big|_{x_1-0}\delta y_1-(f-y'\cdot f_{y'})\big|_{x_1+0}\cdot\delta x_1-f_{y'}\big|_{x_1+0}\cdot\delta y_1=0.$$

Т.к. δx_1 и δy_1 – независимы, то можно рассм: $\delta x_1\neq0$, $\delta y_1=0$ и $\delta x_1=0$, $\delta y_1\neq0$

$$\Rightarrow \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=x_1} = 0; \quad \left[f_{y'}\right]_{x=x_1} = 0,$$ где

$[g]_{x_1} = g(x_1+0) - g(x_1-0)$ — скачок. Полученные условия — кажв. усл. Вейерштрасса–Эрдманна.

Например, в простейшей ситуации $F[y] = \int_0^1 y'^2 \, dx$

$f_{y'} = 2y' \Rightarrow [f_{y'}]_{x_1} = 0 \Leftrightarrow [y']_{x_1} = 0$, т.е. $y'(x_1-0) = y'(x_1+0)$ — во всех точках экстремаль гладкая (в данном случ. — прямые).

§11. Задача на выпуклом замкн. мн-ве

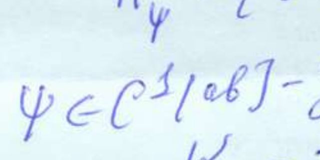
Пример: (Задача с препятствием.)

$K_\psi = \{ v \in C^1[ab],\ v(a) = A,\ v(b) = B,\ v(x) \geq \psi(x)$ на $[ab] \}$,

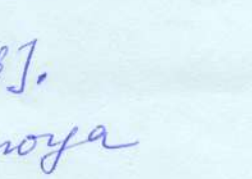
$\psi \in C^1[ab]$ — заданная ф-я. K_ψ не явл. аффинным мн., но K_ψ — замкн. выпуклое мн. в $C^1[ab]$.

Действительно, пусть $u, v \in K_\psi$, тогда

$w(x) = \alpha u(x) + \beta v(x) \geq \alpha \psi(x) + \beta \psi(x) = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{1} \psi(x)$, $\beta = 1 - \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$



$w \geq \psi$, $w(a) = A$, $w(b) = B \Rightarrow$ $\boxed{w \in K_\psi}$



Рассм. общую постановку:

$\min\limits_{u \in K} F[u]$, где $K \subset \mathbb{B}$, K — вып. замкн. мн.

Необх. усл. min: пусть $u \in K$:

$F[u] \leq F[w]$, $\forall w \in K$

Рассм. $v_\alpha(x) = u(x) + \alpha(w(x) - u(x)) \in K$, $\alpha \in [0, 1]$

т.к. $v_\alpha = (1-\alpha)u + \alpha w \in K$.

Верно нер-во $F[u] \leq \overbrace{F[u + \alpha(w-u)]}^{=\varphi(\alpha)}$, $\alpha \in [0, 1]$

$\varphi(0) \le \varphi(\alpha), \quad \alpha \in [0,1]$

Необх. усл. $\varphi'(0) \geq 0$, т.е.

$\frac{d}{d\alpha} F[u+\alpha(w-u)]\Big|_{\alpha=0} \geq 0$

Вариац. неравенство

$\Rightarrow \boxed{\delta F(u, w-u) \geq 0, \ \forall w \in K.}$

это необх. усл. min на K

Вернёмся к задаче с препятствием.

$$\delta F(u, w-u) = \int_a^b [f_u \cdot (w-u) + f_{u'}(w'-u')]dx \geq 0, \quad (+)$$
$$\forall w \in K_\varphi.$$

1). пусть $w = u+h$, где $h \in C_0^1[ab]$, $h \geq 0$; $\Rightarrow w = u+h \geq \varphi \Rightarrow w \in K_\varphi$

$\Rightarrow$ из $(+)$: $\int_a^b [f_u \cdot h + f_{u'} \cdot h']dx \geq 0, \quad h \in C_0^1[ab], h \geq 0$

$\Rightarrow$ после интегр. по частям: $\int_a^b \underbrace{(f_u - \frac{d}{dx} f_{u'})}_{Lu} \overset{\geq 0}{h}\, dx \geq 0$

$\Rightarrow Lu \geq 0$ на $[ab]$.

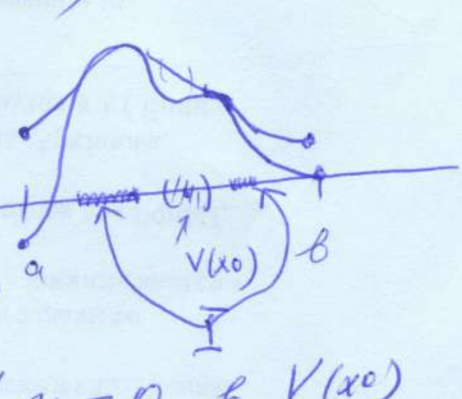
2). обозначим $I = \{x \in [ab] : u(x) = \varphi(x)\}$ — мн-во налегания на препятствие

Зафикс. $V(x^0) \subset [ab] \setminus I$

(считаем $\varphi(a) < A = u(a)$, $\varphi(b) < B = u(b)$)

Пусть ?$\text{spt}\, h \subset V(x^0)$, и $h \geq 0$,

$w = u \pm \varepsilon h \geq \varphi$ на $[ab]$ при $\varepsilon \ll 1$



$\Rightarrow \int_a^b Lu \cdot (w-u)\,dx \overset{?}{=} \int_{V(x^0)} Lu(\pm\varepsilon h)dx \geq 0$

$\Rightarrow \pm\varepsilon \int_{V(x^0)} Lu \cdot \underset{\geq 0}{h}\, dx \geq 0 \Rightarrow Lu = 0$ в $V(x^0)$

т.е. $Lu = 0$ на мн-ве $[ab] \setminus I$.

Необх. усл. min:

$$? \begin{cases} Lu \geq 0, \ u \geq \varphi, \ x \in [ab] \\ Lu \cdot (u-\varphi) = 0 \text{ на } [ab], \\ u(a) = A, \ u(b) = B \end{cases}$$

Лекция 5 (VI сем)

§ 12. Вторая вариация. Достаточные условия экстремума.

Пусть $F: D \to \mathbb{R}^1$, $D \subseteq B$ — лин. многообраз.

Рассм. $F[u+\alpha h] = \varphi(\alpha)$, $u \in D$, $h \in M$
$(D = \{\hat{u}\} + M)$

Пусть $\varphi(\alpha)$ — C^2-гладкая в окрестн. $\alpha = 0$, точнее, $\varphi \in C^2[-1, 1]$.

$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot\alpha + \frac{\varphi''(0)}{2}\alpha^2 + \underset{\alpha\to 0}{o}(\alpha^2) \quad (1)$$

или
$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) + \varphi'(0)\alpha + \underbrace{\frac{\varphi''(\theta\alpha)\alpha^2}{2}}_{} \quad (2)$$

$\exists\, 0<\theta<1$ — форма Лагранжа.

$$\varphi'(0) = \frac{d}{d\alpha} F[u+\alpha h]\Big|_{\alpha=0} = \delta F(u,h).$$

Определение: $\boxed{\delta^2 F(u,h) \overset{def}{=} \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2} F[u+\alpha h]\Big|_{\alpha=0}} = \frac{\varphi''(0)}{2}$. на эл-те u с

назыв. второй вариацией ф-ла F на эл-те u с приращ. h.

Выясним смысл $\frac{\varphi''(\theta)}{2}$ (в ф-ле (2) $\alpha=1$)

$$\frac{\varphi''(\theta)}{2} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}F[u+\alpha h]\Big|_{\alpha=\theta} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\beta^2}F[u+\theta h+\beta h]\Big|_{\beta=0}$$

$\alpha - \theta = \beta$

$= \delta^2 F(u+\theta h, h)$. $\Rightarrow$

Рав-во (2) при $\alpha = 1$ имеет вид

$$\boxed{F[u+h] = F[u] + \delta F(u,h) + \delta^2 F(u+\theta h, h)} \quad (3)$$

где $0<\theta<1$.

Пусть u — экстремаль ф-ла F $(\delta F(u,h) = 0,\ \forall h\in M)$ и $u+h \in V_\delta(u)$: если $\delta^2 F(u+\theta h, h) \geq 0 \Rightarrow$

$F[u+h] - F[u] \geq 0$, $\forall v \in V_\delta(u) \Rightarrow$ u — точка лок min.

Т.к. усл. $\delta^2 F(u+\theta h, h) \geq 0$ мы не можем (2) проверить, $\theta \in (0,1)$ явно в разложении (2) не определяется, то мы огрубим усл-е $\delta^2 F(u+\theta h, h) \geq 0$, $\forall h \in M$

Теор. (достат. усл. лок min).
Пусть u - экстремаль ф-ла F и $\exists \rho > 0$ такое, что $\forall v \in D$, $\|v-u\| < \rho$, $\forall h \in M$: $\|h\| < \rho$ выполняется $\delta^2 F(v,h) \geq 0$. Тогда u - сообщает ф-лу F лок. min.

Д-во: Зафикс. $h \in M$, $\|h\| < \rho$. Пусть $v = u + \theta h$, $0 < \theta < 1$, $\Rightarrow \|v-u\| = \|\theta h\| < \|h\| < \rho \Rightarrow \delta^2 F(u+\theta h, h) \geq 0$

и согласно (3) $F[u+h] - F[u] = \delta^2 F(u+\theta h, h) \geq 0$,
$\forall h \in M$, $\|h\| < \rho \Rightarrow u$ - точка лок. min. ∎

Теор. (необх. усл. min). Пусть u сообщает лок. min ф-лу F на D. Тогда $\delta^2 F(u,h) \geq 0$ $\forall h$ допуст.

Д-во. Известно, что необх. усл. экстремума: $\delta F(u,h) = 0$, $\forall h \in M$. Предположим, что утв. т-мы неверно, т.е. $\exists h_0 \neq 0$ $\delta^2 F(u,h_0) < 0$. Рассм. ф-ю $\varphi(\varepsilon) = F[u+\varepsilon h_0]$. Согласно рав-ву (1)

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \underbrace{\varphi'(0)}_{=0} \cdot \varepsilon + \frac{\varphi''(0)\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2), \ \varepsilon \to 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon^2} = \frac{\varphi''(0)}{2} + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}; \quad \frac{\varphi''(0)}{2} = \delta^2 F(u,h_0) \Rightarrow$$

$$(4) \quad \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon^2} = \underbrace{\delta^2 F(u,h_0)}_{<0} + \underbrace{\frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}}_{\to 0,\ \varepsilon \to 0}; \quad \text{пусть } \varepsilon \ll 1 \Rightarrow$$

тогда правая часть равна (4) отриц.

$\Rightarrow \varphi(\varepsilon) < \varphi(0)$, что противоречит предположению.

$F[u] \le F[v]$, $\forall v \in V_\delta(u)$. Следно, $\delta^2 F(u,h) \geq 0$

Утв-е 1. Пусть $\delta^2 F(v,h) \geq 0 \quad \forall v \in D, h \in M$. Тогда, если u – экстремаль ф-ла F на D, тогда и соотв. ф-лу F глоб. min на D.

Действительно, $\forall v \in D$ согласно равну (2) с $\alpha = 1$:

$$F[u+h] = F[u] + \overbrace{\delta F(u,h)}^{=0} + \delta^2 F(u+\theta h, h).$$

Полагая $v = u + h \Rightarrow F[v] = F[u] + \underbrace{\delta^2 F(u+\theta(v-u), h)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow F[v] \geq F[u]$, $\forall v \in D$.

Примеры.

1) $F[u] = \int_a^b f(x,u,u')\,dx$, $\quad u \in D = \{v \in C^1[a,b] : v(a) = A,\ v(b) = B\}$

$$\delta^2 F(u,h) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_a^b f(x, u+\alpha h, u'+\alpha h')\,dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\int_a^b [f_u(x,u+\alpha h, u'+\alpha h')h + f_{u'}(x,u+\alpha h, u'+\alpha h')h']\,dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b [f_{uu}\cdot h^2 + \underline{f_{uu'}\cdot hh'} + \underline{f_{u'u}\,h'h} + f_{u'u'}\,h'^2]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b [f_{uu}h^2 + f_{uu'}\cdot \underbrace{2hh'}_{\frac{d}{dx}(h^2)} + f_{u'u'}\cdot h'^2]\,dx \underset{\text{по частям}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b [\underbrace{f_{uu} - \frac{d}{dx}(f_{uu'})}_{P(x)}]h^2 + \underbrace{f_{u'u'}}_{R(x)}\cdot h'^2]\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b (P\,h^2 + R\,h'^2)\,dx,$$

Если, в частности $f = f(x,u') \Rightarrow P \equiv 0$; $R = f_{u'u'}(x,u')$.

Если в этом случае $f_{u'u'}(x,u')>0$ $(f_{qq}(x,q)>0)$,

тогда $\delta^2 F(v,h)\geq 0$, $\forall v\in D$, $\forall h\in \underbrace{C_0^1[a,b]}_{M}$,

причем $\delta^2 F(v,h)=0$ только при $h\equiv 0$.

Действит. $\delta^2 F(v,h)=\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{f_{v'v'}(x,v')}_{>0}\cdot h'^2\,dx=0 \Rightarrow$

$h'=0 \Rightarrow h=const,\ h|_{x=a}=h|_{x=b}=0 \Rightarrow h\equiv 0.$

Утв. 2. Пусть $\delta^2 F(v,h)\geq 0$ $\forall v\in D$ и $h\in M$, причем $\delta^2 F(v,h)=0$ только при $h\equiv 0$. Тогда экстремаль и сообщает ф-лу F единств. глоб. min на D.

Док-во: Из усл-я Утв. 2 следует, что (5) $\delta^2 F(v,h)>0$ $\forall h\neq 0$.

Предпол., что $\exists\ u_1, u_2\in D$ — оба э/л-ла

~~сообщ.~~ min ф-лу F на D, т.е.

а) $F[u_1]\leq F[v]$, $\forall v\in D$; б) $F[u_2]\leq F[v]$, $\forall v\in D$

Тогда пусть $v=u_2$ в а) и $v=u_1$ в б);

$F[v]=F[u_2]=F[u_1]+\underbrace{\delta F(u_1,h_1)}_{=0}+\delta^2 F(u_1+\theta h_1,h_1)>0 \Leftrightarrow F[u_2]>F[u_1]$.

$u_2=u_1+\underbrace{h_1}_{u_2-u_1}$

из нер. б): $F[v]=F[u_1]=F[u_2]+\underbrace{\delta F(u_2,h_2)}_{0}+\delta^2 F(u_2+\theta h_2,h_2)>0$

$u_1=u_2+\underbrace{h_2}_{u_1-u_2}$

$\Leftrightarrow F[u_1]>F[u_2]$.

Т.о., получаем: $F[u_1]<F[u_2]<F[u_1]$, чего не м.б.

Пример: $E[v]=\int_0^l[p(x)(v')^2+q(x)v^2+2f(x)v]\,dx$; $v\in C^1[0,l]$, $v(0)=A$, $v(l)=B$

A_1) $p(x)\in C^1[0,l]$, $q,f\in C[0,l]$; $p(x)\geq p_0>0$, $q(x)\geq 0$ на $[0,l]$.

$\delta E(v,h)=\frac{d}{d\alpha}\int_0^l\{p(v'+\alpha h')^2+q(v+\alpha h)^2+2f(v+\alpha h)\}\,dx\Big|_{\alpha=0}=$

$=2\int_0^l[p(v'+\alpha h')h'+q(v+\alpha h)h+fh]\,dx\Big|_{\alpha=0}=$

$=2\int_0^l(pv'h'+qvh+fh)\,dx=2\int_0^l[-(pv')'+qv+f]h\,dx$

3

$\varphi(x, v, v') = p(v')^2 + q v^2 + 2 f v$; пусть v – экстремаль,

$\varphi_{v'v'} = p(x) \geq p_0 > 0 \Rightarrow \exists \frac{d}{dx}(p v') \in C[0, l]$ (см. Лемму о $\exists v'' \in C[0,l]$)

$\Rightarrow$ ур. Эйлера: $\to$ (*) $\begin{cases} -(p v')' + q v = F(x), \\ v(0) = A, \ v(l) = B \end{cases}$ $F = -f$.

Пусть v – экстремаль. Покажем, что реш. (*) соотвует единств. глоб. min для $E[v]$ на D.

Вычислим $\forall w \in D$

$$\delta^2 E(w, h) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^l [p(w' + \alpha h')^2 + q(w + \alpha h)^2 + 2f(w + \alpha h)] dx \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{2}{2} \int_0^l (\underbrace{\overset{\geq p_0}{p} h'^2 + q h^2}_{\geq 0}) dx, \ \forall h \in C_0^1[0, l] \Rightarrow$$

Пусть $\delta^2 E(w, h) = 0 \Rightarrow h' = 0 \Rightarrow h = const. \Rightarrow h \equiv 0$.

$\Rightarrow \delta^2 E(w, h) > 0, \ \forall w \in D, \forall h \in M, \ h \neq 0. \Rightarrow$ Экстремаль

v соотв. единств. глоб. min $E[w]$ на D.

Пример: $F[u] = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \ n \geq 2, \ \Omega$ – огр. с кус.-гладкой гр. $\partial\Omega$ ("C^1")

$\min F$ на $D = \{v \in C^1(\bar\Omega), \ v|_{\partial\Omega} = \varphi\}$

$$\delta^2 F(v, h) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_\Omega f(x, v + \alpha h, \nabla v + \alpha \nabla h) dx \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} \int_\Omega \Big[f_v(x, v + \alpha h, \nabla v + \alpha \nabla h) \cdot h + \sum_{i=1}^n f_{v_{x_i}}(x, v + \alpha h, \nabla v + \alpha \nabla h) \cdot (h_{x_i}) \Big] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \Big[f_{vv} \cdot h^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^n f_{v v_{x_j}} h \cdot h_{x_j} + \sum_{j=1}^n f_{v_{x_j} v} \cdot h_{x_j} \cdot h}_{2 \sum f_{v v_{x_j}} \frac{d}{dx_j}(h^2)} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f_{v_{x_j} v_{x_k}} \cdot h_{x_j} h_{x_k} \Big] dx \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \Big[\underbrace{\Big(f_{vv} - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j}(f_{v v_{x_j}}) \Big)}_{D(x)} h^2 + \sum_{k, j \leq n} \underbrace{f_{v_{x_j} v_{x_j}}}_{R_{ij}(x)} h_{x_j} h_{x_k} \Big] dx$$

Част. сл. $f = f(x, \nabla v) \Rightarrow D(x) = 0$. Если квадрат. форма $\sum_{k,j} f_{q_j q_k}(x, q) \xi_k \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \ \forall q \in \mathbb{R}^n, \ \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

70

?

$$\delta^2 F(v, h) \geq \frac{\nu}{2} \int_\Omega |\nabla h|^2 dx \Rightarrow$$ Экстремаль единств. и соотв. ф-лу абс. min

Интеграл Дирихле

$$E[u]=\int_\Omega\left(\frac{k(x)}{2}|\nabla u|^2+g(x)u\right)dx \qquad \mathcal{D}=\{u\in C^1(\bar\Omega),\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\}$$

$$M=C_0^1(\bar\Omega).$$

$$\boxed{\delta E(u,h)=0 \atop \forall h\in C_0^1(\bar\Omega)} \Rightarrow (*)\begin{cases}-\operatorname{div}(k(x)\nabla u)+g=0\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases} \Bigg| \quad k(x)\geq k_0>0$$

$$\delta^2E(u,h)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_\Omega\left[\frac{k(x)}{2}\sum_{j=1}^n(u_{x_j}+\alpha h_{x_j})^2+g(u+\alpha h)\right]dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\int_\Omega\left(k(x)\sum_{j=1}^n(u_{x_j}+\alpha h_{x_j})h_{x_j}+g\,h\right)dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega k(x)\sum_{j=1}^n h_{x_j}^2\,dx\geq\frac{k_0}{2}\int_\Omega|\nabla h|^2dx\Rightarrow$$

$\forall u\in\mathcal{D}:\ \delta^2E(u,h)>0,\ h\neq0,\Rightarrow$ реш. $(*)$ опред. единств. глоб. min в $\mathcal{D}$.

Упражн. Вычислить $\delta^2S(u,h)$ для интеграла площадей $S[u]=\iint_\Omega\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy$, $\mathcal{D}=\{u\in C^1(\bar\Omega):u|_{\partial\Omega}=\varphi\}$.

§13. Исследование δ^2F в простейшей задаче. Условия Лежандра и Якоби.

Как было показано в §12, если $F[u]=\int_a^b f(x,u,u')dx$, $\mathcal{D}=\{v\in C^1[ab]:v(a)=A,\ v(b)=B\}$, то

$$2\cdot\delta^2F(u,h)=\int_a^b\left(R(x)h'^2+P(x)h^2\right)dx.$$ Пусть u — экстремаль и $R(x)=f_{u'u'}(x,u(x),u'(x))$, $P(x)=f_{uu}(x,u,u')-\frac{d}{dx}f_{uu'}(\dots)$ — вычислены вдоль экстремали.

Лив. Чтобы $\delta^2F(u,h)\geq0$ (u — экстремаль, $\forall h\in M$), необходимо, чтобы $R(x)=f_{u'u'}(x,u(x),u'(x))\geq0$, $x\in[ab]$.

7

Док: Предпол., что $\exists\, x^0 \in (a,b): R(x^0) < 0$.

По непрер. $R(x)$ $\exists\, V_\rho(x^0) \in (ab): R(x) < 0, \ \forall x \in V_\rho(x^0)$.

Рассм. $\forall\, \xi \in C_0^1[-1,1]; \ |\xi(y)| \le 1, \ |\xi'(y)| \le m$.

Тогда $h(x) = \xi\left(\frac{x-x^0}{\rho}\right) \in C_0^1[x^0-\rho, x^0+\rho]; \ h'(x) = \xi'(x)\cdot\frac{1}{\rho}$

$$\int_a^b [\underbrace{R(x)}_{} h'(x)^2 + \underbrace{P(x)}_{\text{огр.}} h^2(x)]\,dx = \int_{x^0-\rho}^{x^0+\rho} \Big[\underbrace{\frac{\overset{<0}{R(x)}(\xi')^2}{\rho^2}}_{<0} + \underbrace{P(x)}_{\text{огр.}} \overset{\le 1}{h^2}\Big] dx \ge 0$$

(в силу необх. усл. min) $\delta^2 F \ge 0$, но $\Rightarrow \delta^2 F(u,h) < 0$, что против.

$\Rightarrow R(x) \ge 0$.

Опред. Усл. $R(x) = f_{u'u'}(x, u(x), u'(x)) \ge 0$, (вдоль экстремали) $x \in [a,b]$,

наз. усл. Лежандра. Усл. $R(x) > 0$ на $[ab]$ наз. усиленным усл.

Лежандра.

Возник вопрос о возможности представить выраж. $Rh'^2 + Ph^2$ в виде полного квадрата – идея Лежандра.

Идея: пусть $\omega \in C^1[a,b]$ – её выберем позднее, $\forall h \in C_0^1[ab]$. Пусть $R(x) > 0$ на $[ab]$.

тогда $\int_a^b (\omega h^2)'\,dx = \omega h^2\big|_a^b = 0$,

Представим $2\delta^2 F(u,h) = \int_a^b (Rh'^2 + Ph^2)\,dx =$

$$= \int_a^b (Rh'^2 + \underbrace{\omega' h^2 + \omega\cdot 2hh'} + Ph^2)\,dx =$$

$$= \int_a^b R\Big(h'^2 + \underbrace{2\frac{\omega}{R} h\cdot h'} \pm \left(\frac{\omega}{R}\right)^2 h^2 + \left(\frac{\omega'+P}{R}\right)h^2\Big)dx =$$

$$= \int_a^b \Big\{R\left(h' + \frac{\omega}{R}h\right)^2 + R\left[\frac{\omega'+P}{R} - \frac{\omega^2}{R^2}\right]h^2\Big\}dx = 0.$$

Хотим найти ω: $(*)\ \underbrace{\frac{\omega'+P}{R} - \frac{\omega^2}{R^2} = 0}, \ x \in [ab]$

или $\underbrace{R(\omega' + P) = \omega^2}$ – нелин. ур-е

$\exists$ ли $\omega \in C^1[ab]$, удовл. ?

Лагранж указал, что нелин. ур. (*) может не иметь на $[a,b]$ C^1-гладкого реш-я $\omega(x)$. Якоби пок-л, как можно дополнить требование $R(x)>0$ на $[ab]$, чтобы $\exists\ \omega\in C^1[ab]$.

Сделаем замену в (*): $\omega=-\frac{Rv'}{v}$ $\Rightarrow$

$\omega'=-\frac{(Rv')'}{v}+\frac{Rv'\cdot v'}{v^2}$; подставим в нелин. ур-е

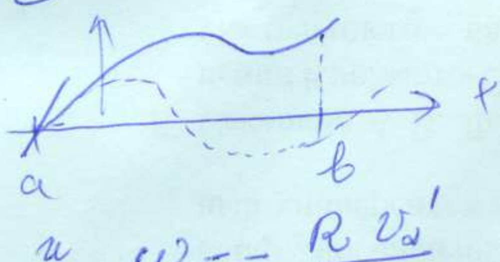
$$(\omega'+P)-\frac{\omega^2}{R}=0 \iff P-\frac{(Rv')'}{v}+\frac{R(v')^2}{v^2}=\frac{(Rv')^2}{v^2 R}$$

$$\Rightarrow \boxed{-(Rv')'+Pv=0,\quad x\in[a,b].}\ (+)$$

Отметим, что мы получим ур. Эйлера для ф-ла $G[v]=\int_a^b\left(R(v')^2+Pv^2\right)dx$.

Условие Якоби состоит в том, что задача Коши

$$\begin{cases}-(Rv')'+Pv=0, & x\in[ab];\\ v(a)=0,\ v'(a)=1, & \end{cases}$$ имеет реш. $v(x)>0$ на $(a,b]$.



Тогда для $0<\alpha\ll 1$ задача

$$\begin{cases}-(Rv')'+Pv=0, & x\in[ab]\\ v(a)=\alpha,\ v'(a)=1 & \end{cases}$$

имеет реш. $v_\alpha(x)>0$ на $[ab]$, $v_\alpha\in C^2[ab]$.

и $\omega=-\frac{Rv_\alpha'}{v_\alpha}$ яв. ф-ей, кот. обеспечит выдел. полного квадрата для подинтегр. ф-ции $\delta^2F(u,h)$. Далее доказыв. дополнительно 1) $\delta^2F(u,h)\geq \nu\|h\|^2_{C^1[ab]}$, $\nu=const>0$

2) $\delta^2F(v,h)>0$ для $v\in V_\delta(u)$, $h\in C_0^1[ab]$ (н/м некот. δ)

Вывод $\Rightarrow$ при выполнении усил. усл. Лежандра + усл. Якоби экстремаль ф-ла F на D сообщает этому ф-лу лок. min.

§ 14. О прямых методах вариац. исчисления.

Постановка задачи: $F: D \subseteq B \to \mathbb{R}^1$; $d = \inf\limits_D F[u] \geq -\infty$

"Последоват. $\{u_n\} \in D$ называется минимизирующей для F на D, если $F[u_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} d$.

Минимизирующая последовательность $\exists$ всегда;

а) $d > -\infty$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists u_n$: $F[u_n] < d + \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $d \leq F[u_n] < d + \frac{1}{n}$, переходя к $\lim\limits_{n\to\infty}$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_n F[u_n] = d$.

б) $d = -\infty$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists u_n$: $F[u_n] < -n \Rightarrow \lim\limits_n F[u_n] = -\infty$.

Вопросы 1) Как построить минимизир. последоват.?

2) Показать, что $\exists u_0 \in D$: $F[u_0] = d$.

3) Обосновать единственность u_0.

Доп. литература. М.М. Вайнберг "Вариац. метод и метод монотонных операт."

- Михлин С.Г. а) "Вариац. методы в математич. физике."
  б) "Численная реализация вариац. методов."
- Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариац. проблемы"
- Балакришнан А.В. "Прикладной функц. анализ."

Т. (Вейерштрасса). Пусть F непрер. ф-л на $K \subset B$, где K – комп. мн-во банах. пр-ва B. Тогда

1) $|\sup\limits_{u\in K} F[u]| \leq const$. 2) $\exists u^-, u^+ \in K$: $F[u^-] = \inf\limits_K F[u]$, $F[u^+] = \sup\limits_K F[u]$.

Док-во. Покажем, что $\exists C > 0$: $F[u] \leq C$. От противного: пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists u_n \in K$: $F[u_n] > n$.

Из компактности K: $\exists \{u_{n_k}\}$, $u_{n_k} \in K$ и $u_{n_k} \to u_0 \in K$. Из непрер-ти F: $F[u_{n_k}] \underset{k\to\infty}{\to} F[u_0]$, т.е. $\{F[u_{n_k}]\}$ – огранич. числ. послед, но по предполож. $F[u_{n_k}] > n_k$ $\Rightarrow$ противоречие. $\Rightarrow$ $\exists C$: $F[u] \le C$, $\forall u \in K$.

---

2). Пусть $\{u_n\}$ – минимизир. послед., т.е. $F[u_n] \to d = \inf F[u]$. Из компактности K: $\exists \{u_{n_k}\} \in K$: $u_{n_k} \to u^-$, $u^- \in K$, по непрер-ти F: $F[u_{n_k}] \to F[u^-] = d$.

Аналогично: $\exists u^+ \in K$: $F[u^+] = \sup_K F[u]$.

Замеч. 1) Компактность мн-ва – очень сильное огранич.
2) если нас интересует только $\inf_K F[u]$, тогда можно потреб. только п/н. снизу на K ф-ла F, тоже

Т.' (Вейерштрасса). Пусть F – п/н снизу на $K \subset \mathbb{B}$ ф-л, где K – комп. мн-во. Тогда $\exists u^0 \in K$: $F[u^0] = \inf_K F[u] = d$.

Действительно, пусть $\{u_n\}$ – минимизир. послед $u_n \in K$, т.е. $F[u_n] \underset{n\to\infty}{\to} d = \inf_K F[u]$. Из компакт. K: $\exists u_{n_k} \to u_0 \in K$. Из п/н. снизу: $F[u_0] \le \underline{\lim}_{n_k} F[u_{n_k}] = d$ $\Rightarrow$ $F[u_0] = d$.

Замеч. Усл-е компактности мн-ва K и усл. п/н. снизу F будем ослаблять.

Опред. Последоват. $v_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} v$ (слабо сход. в $\mathbb{B}$), если $\forall\, l \in \mathbb{B}^*$: $l(v_n) \underset{n\to\infty}{\to} l(v)$.

Если $\mathbb{B} = H$ – гильб., то в силу т. Рисса о представлении лин. непр. ф-лов слабая сходимость v_n к v в H: $(v_n, w) \underset{n\to\infty}{\to} (v, w)$ $\forall w \in H$.

Очевидно, что из сильной сходимости (по норме) следует слабая сходим. (обратное неверно). Действит., пусть $\|v_n - v\|_B \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ $\forall\, l \in B^*$ рассм. $|l(v_n) - l(v)| = |l(v_n - v)| \leq C\|v_n - v\| \to 0$

Опред. Функционал F слабо полунепрерывен снизу (с. п/н. с) на $D \subseteq B$, если $\forall\, u_n, u_0 \in D$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0 \Rightarrow F[u_0] \leq \underline{\lim}\, F[u_n]$.

Теор. 1 Пусть F – с. п/н. с. на мн-ве $D \subset B$ рефл. если D – огранич. и слабо замкн. мн-во в B, то F ограничен снизу и достигает наименьшего значения на D.

Док-во. Пусть $\{u_n\}$ – минимизир. послед. на D, т.е. $\lim\limits_n F[u_n] = d \geq -\infty$. Эта последоват. ограничена в рефлекс. пр-ве B $(B^{**} = B)$. В рефлексивных банах. пр-вах огранич. мн-во слабо предкомпактно, т.е. $\exists\, \{u_{n_k}\}$: $u_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{B} u_0$. Т.к. D – слабо замкн., то $u_0 \in D$. Из слабой п/н снизу F на D следует, что $F[u_0] \leq \underline{\lim\limits_{n_k}}\, F[u_{n_k}] = d \Rightarrow F[u_0] = d \Rightarrow (d > -\infty)$

Следствие Т.1. Если в усл. Т.1 D – огранич. выпуклое замкнутое мн-во, то утв. Т.1 верно.

т. Мазура) $\boxed{\forall \text{ выпукл} + \text{замкн. мн-во} \to \text{слабо замкнуто}}$ в рефлекс. пр-вах.

Откажемся от требования ограниченности мн-ва D.

Опред. Пусть F опред. на неогранич. мн. $D \subseteq B$. Если $F[u] \to +\infty$ при $\begin{cases} \|u\| \to +\infty \\ u \in D \end{cases}$, то F называется коэрцитивным на D.

Теор. 2. Пусть F – с. п/н. снизу ф-л на $D \subseteq B_{\text{реф}}$, D – выпуклое замкн. мн-во в B, $F[u] \underset{\substack{u \in D \\ \|u\| \to \infty}}{\to} +\infty$ (коэрц.) Тогда F достигает наименьшего значения на некот. $u_0 \in D$, т.е. $F[u_0] = d$.

Док-во. Зафикс. $\forall \tilde{u} \in D$ ($D \neq \emptyset$) и пусть $R > 0$ такое, что $\forall u \in D$, $\|u\| > R$ выполн. $F[u] > F[\tilde{u}]$ (из коэрц.)

Пусть $D_R = \underset{\text{вып.}}{D} \cap \underset{\text{вып}}{\overline{B_R(0)}}$ – вып. огранич. замкн. мн-во.

Из следствия к т.1 $\exists\, u_0 \in D_R$: $F[u_0] = \min\limits_{D_R} F[u]$.

Т.к. для $u \in D \setminus D_R$ $\|u\| > R$, то $F[u] > F[\tilde{u}] \geq F[u_0]$
$\Rightarrow F[u_0] = \inf\limits_{D} F[u] = d$, ч.т.д.

О слабой п/н снизу ф-ла F.

Сначала докажем полезное утв-е.

Опр. $F[u]$ – выпуклый функционал на выпуклом мн. $U \subset B$, если $\forall \alpha \in [0,1]$ и $\forall u, v \in U$ выполн.

$$F[\alpha u + (1-\alpha) v] \leq \alpha F[u] + (1-\alpha) F[v] \qquad (1)$$

Опр. Если F определен на некот. $D \subset B$ и $\forall u, u+h \in D$

$$F[u+h] = F[u] + l(u,h) + \underset{\|h\| \to 0}{o(\|h\|)}, \qquad (2)$$

где $l(u,h)$ – лин. непрер. (огранич.) по h ф-л, тогда будем гов., что $F \in C^1(D)$.

Как ранее отмечалось, в такой ситуации $l(u,h) = \delta F(u,h)$.

__Утв.__ Пусть на выпуклом мн. $U \subset B$ определён $F \in C^1(U)$. Чтобы F был выпуклым н. и д. чтобы

$$F[v] - F[u] \geq \delta F(u, v-u), \quad \forall u, v \in U. \qquad (2)$$

(Н) Пусть F выпукл. на U. Для $\forall u, v \in U$ и $t \in [0,1]$ рассм. ф-ю $\omega(t) := F[\underbrace{u + t(v-u)}_{\in U}]$ и покажем, что $\omega(t)$ выпукла. Зафикс. $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ и $\alpha \in [0,1]$. Треб. док.:

$$\omega(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2) \leq \alpha \omega(t_1) + (1-\alpha)\omega(t_2). \quad (3)$$

Рассм. разность $\alpha \omega(t_1) + (1-\alpha)\omega(t_2) - \omega(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2) =$
$= \alpha F[\underbrace{u + t_1(v-u)}_{y_1}] + (1-\alpha) F[\underbrace{u + t_2(v-u)}_{y_2}] - F[\underbrace{u + (\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2)(v-u)}_{\alpha u + (1-\alpha) u}]$
$= \alpha F[y_1] + (1-\alpha) F[y_2] - F[\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2] \geq 0$ – в силу выпукл. F.

Т.о., (3) верно. Известно, что если выпукл. ф-я дифференц-ема, то $\omega' \nearrow$ (не убывает). $\exists \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} F[u + t(v-u)]$ – т.к. F дифф. по предполож. $\Rightarrow \omega(1) - \omega(0) = \omega'(\xi) \geq \omega'(0)$

$\Leftrightarrow \quad F[v] - F[u] \geq \delta F(u, v-u)$, т.е. (3) верно.

(Д). Пусть (3) верно. Рассм. $\forall \alpha \in [0,1]$ разность

$\alpha F[u] + (1-\alpha) F[v] - F[\underbrace{\alpha u + (1-\alpha) v}_{\tilde{u}}] = (1 = \alpha + (1-\alpha)) =$
$= \alpha\{F[u] - F[\tilde{u}]\} + (1-\alpha)\{F[v] - F[\tilde{u}]\} \geq \alpha \cdot \delta F(\tilde{u}, (1-\alpha)(u-v)) +$
$+ (1-\alpha)\, \delta F(\tilde{u}, \alpha(v-u)) = \alpha(1-\alpha)\, \delta F(\tilde{u}, u-v) + (1-\alpha)\alpha\, \delta F(\tilde{u}, v-u) = 0.$

__Следствие.__ Если $\exists\ \delta^2 F$ на U и известно, что $\delta^2 F(u,h) \geq 0$, $\forall u \in U$, $h_{доп}$ $\Rightarrow$ из разложения

$$F[v] = F[u] + \delta F(u, v-u) + \underbrace{\delta^2 F(u + \theta(v-u), v-u)}_{\geq 0} \Rightarrow$$

$$F[v] - F[u] \geq \delta F(u, v-u),$$ т.е. верно (2).

Это означает, что из усл. $\delta^2 F \geq 0 \Longrightarrow$
F выпукла на U (U – выпукл. $\subseteq \mathbb{B}$).

Теорема*. Пусть F опред. на выпуклом мн. $U \subset \mathbb{B}$, $F \in C^1(U)$ и выпуклый на U. Тогда F – слабо полунепрерывна снизу (с. п/н. с) на U.

Док: Согласно Утв-ю, $F[v] - F[u] \geq \delta F(u, v-u)$, $\forall u, v \in U$.

Пусть $u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ в $\mathbb{B}$, $u_n, u \in U$, тогда $F[u_n] - F[u] \geq \ell(u, u_n - u)^*$ ($\delta F = \ell$ по предпол.)

Т.к. $\ell(u, u_n - u) \to 0$, то $F[u] \leq \underset{n}{\underline{\lim}} F[u_n]$, т.е. F – с. п/н. с. на U.

Замечание. Если F – дважды дифер. на вып. U и $\delta^2 F \geq 0$ на $U \Longrightarrow F$ – выпуклый и с. п/н. с. на U.

Из этого Замечания и Теор. 2 следует

Теор. 3. Пусть U – выпукл. замкнутое мн. в $\mathbb{B}$рефл.
Пусть F а) дважды дифер. и $\delta^2 F \geq 0$ на U;
б) F – коэрцитивн. на U.
Тогда $\exists u_0 \in U$: $F[u_0] = \inf\limits_U F[u]$.

Лекция №7 (6 семестр)

§15. Задача о минимуме квадратичного функционала.

Рассм. квадратичн. функционал

(1) $J[u]=\int_0^l [p(x)(u')^2+q(x)u^2+g(x)u]dx,\quad u(0)=u(l)=0$

(частн. случай $J_0[u]=\int_0^l\left[\frac{K(u'(x))^2}{2}-f(x)u\right]dx$ - потенц. энерг. струны под действ. вертик. прилож. силы $f(x)dx$ на $(x,x+dx)$)

$\Delta A_{\text{сил натяж.}}=K\Delta l=K(\sqrt{1+u'^2}\,dx-dx)\simeq\frac{Ku'^2}{2}dx\ (|u'|\ll 1)$

Мы ранее рассм. фл (1) в классе $C_0^1[0,l]$ при усл. (A1) $p\in C^1[0,l],\ q,f\in C[0,l];\ p(x)\geq p_0>0,\ q(x)\geq 0.$

Т.к. ф-л J - выпуклый $\left(\delta^2J\geq 0,\ \delta^2J=0,\ u=0\right)\Rightarrow$ нужно только исслед. задачу

(2) $\begin{cases}-(p(x)u')'+q(x)u=F\\ u(0)=u(l)=0,\quad F=-\frac{g(x)}{2}\end{cases}$

Пусть выполнен усл.

(A2) p,q - огранич. на $[0,l]$, $g\in L^2(0,l)$; $p(x)\geq p_0>0,\ q(x)\geq 0.$

(Можно считать, что $p,q\in L^\infty(0,l)$).

При усл-ях (A2) рассм. зад. (1) в более широком классе фй.

Опр. Рассмотрим линейное мн-во фй $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$:

1) $v(x)$ - абсолютно непрер. на $[0,l]$; $\Rightarrow\exists w\in L^1(0,l)$: $v(x)=\int_0^x w(s)ds+c$

2) $v'\in L^2(0,l)$;

3) $v(0)=v(l)=0$.

На мн-ве, удовл. усл. 1) - 3) определим скалярное произвед. $(u,v)=\int_0^l u'\cdot\bar v'dx$. Мн-во фй $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ с введённым скал. произведением называется пр-вом Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$. $\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}=\int_0^l|u'|^2dx$..

- Полноту пр-ва $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$ докажем позже.
- Если ф-ции u, v – веществ. значен, то $(u,v)=\int_0^\ell u'\cdot v'dx$.

- Можно писать $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,\ell]$ вместо $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$, т.к. ф-ции непрер. на $[0,\ell]$.

Справедливы неравенства

$$\boxed{\max_{[0,\ell]}|v(x)|\le\sqrt{\ell}\,\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}}\quad (а)$$

Действит., $v(x)=\underset{0}{\underset{\|}{v(0)}}+\int_0^x v'(\tau)d\tau$; $|v(x)|\le\int_0^\ell|v'(x)|dx\le$

$\le\left(\int_0^\ell|v'|^2dx\right)^{\frac12}\cdot\sqrt{\ell}\Rightarrow\|v\|_{C[0,\ell]}\le\sqrt{\ell}\,\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}$, чтд.

$$\|v\|_{L^2(0,\ell)}\le\ell\,\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}.\quad (б)$$

Док-во: $|v(x)|\le\int_0^\ell|v'(x)|dx\Rightarrow|v(x)|^2\le\left(\int_0^\ell|v'|dx\right)^2\le\int_0^\ell|v'|^2dx\cdot\ell\Rightarrow$

$\int_0^\ell|v|^2dx\le\ell^2\cdot\int_0^\ell|v'|^2dx\Rightarrow$ (б). чтд.

Утв-е. Пр-во $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$ – полное пр-во.

Док-во: Пусть послед. $\{v_n\}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$, $\|v_n-v_m\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}\underset{n,m\to\infty}{\to}0\Longleftrightarrow$

$\|v_n'-v_m'\|_{L^2(0,\ell)}\to0$. Из полноты $L^2(0,\ell)$: $\exists\, w\in L^2(0,\ell)$:

$v_n'\to w$ в $L^2(0,\ell)$. Кроме того, из неравенства (а):

$\|v_n-v_m\|_{C[0,\ell]}\le\sqrt{\ell}\,\|v_n-v_m\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}\underset{n,m\to\infty}{\to}0$. Из полноты

пр-ва $C[0,\ell]$: $\exists\, v\in C[0,\ell]$: $v_n\rightrightarrows v$ на $[0,\ell]$.

Верно представление: (*) $v_n(x)=\int_0^x v_n'(y)dy$, $n\in\mathbb{N}$

Оценим

$$\left|\int_0^x v_n'(y)\,dy-\int_0^x w(y)\,dy\right|\le\int_0^\ell|v_n'-w|\,dy\le\left(\int_0^\ell|v_n'-w|^2dy\right)^{\frac12}\sqrt{\ell}=$$

$$=\sqrt{\ell}\cdot\|v_n'-w\|_{L^2(0,\ell)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$ В равве (*) переходим к lim:

$v(x)=\int_0^x w(y)\,dy$, где $w\in L^2(0,\ell)$. Очевидно, что $v(0)=v(\ell)=0$

$\|v_n'-v'\|_{L^2}=\|v_n-v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}\to0$.

$\Rightarrow \boxed{v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell).}$ $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)=H$ – гильб. пр-во.

Вариац. задача $\left\|\begin{array}{l}\min J[u] \text{ при вн. усл.}\\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)\end{array}\right.$ (3) $A\|_2$

I способ. Определим энергетич. скал. произвед.

$$[u,v]=\int_0^\ell\left(p(x)u'\cdot\bar v'+q(x)u\cdot\bar v\right)dx;\quad |u|^2=\int_0^\ell(pu'^2+qu^2)\,dx.$$

"Нормы $|\cdot|$ и $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}$ эквивалентны:

1) $|u|^2\ge p_0\|u'\|^2_{L^2(0,\ell)}=p_0\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}$;

2) $|u|^2\le\underbrace{\sup_{[0,\ell]}p(x)}_{=p_+}\|u'\|^2_{L^2(0,\ell)}+q_+\|u\|^2_{L^2(0,\ell)}\overset{\text{нер. (8)}}{\le}p_+\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}+$

$+q_+\ell^2\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}=(p_++q_+\ell^2)\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)}\Rightarrow |u|\simeq\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}$.

Пр-во со скал. произвед. $[\cdot,\cdot]$ называется энергетич. пр-вом, будем обозначать H_L. (здесь веществ. ф-ции)

$$J[u]=[u,u]+\underbrace{(g,u)_{L^2(0,\ell)}}_{S[u]}=|u|^2+S[u],$$

$S[u]$ – лин. огранич. в H_L ф-л!

$$|S[u]|\le\|g\|_{L^2(0,\ell)}\|u\|_{L^2(0,\ell)}\overset{(8)}{\le}\ell\|g\|_2\cdot\underbrace{\|u'\|_{L^2(0,\ell)}}_{\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}}\le$$

$\le c\|g\|_2\cdot|u|,\ \forall u\in H_L\Rightarrow$ по т. Рисса $\exists F\in H_L$:

$\mathcal{S}[u] = [F, u] \Rightarrow \mathcal{I}[u] = [u,u] + [F,u] =$ (4)

$= \left[u + \frac{F}{2}, u + \frac{F}{2}\right] - \frac{1}{4}[F,F] \geq -\frac{1}{4}\|F\|^2$, причём знак "$=$"

при $u_0 = -\frac{F}{2}$. На этом u_0 ф-л $\mathcal{I}[u]$ достигает наименьшего значения.

II способ (применим Теор. 3 § 14). Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ $\Rightarrow h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ доп.

(4) $\boxed{\delta \mathcal{I}(u,h) = 2\int_0^l \left[p u' \cdot h' + q u \cdot h + \frac{g}{2} h\right] dx = 0}$

$\forall h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$. – необх. усл. экстр. в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$.

$\delta^2 \mathcal{I}(v,h) = \int_0^l (p(h')^2 + q h^2)\,dx \geq p_0 \|h'\|^2_{L_2(0,l)} = p_0 \|h\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} > 0$ $\forall h \neq 0$.

– $\mathcal{I}$ – выпуклый функционал в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l) \Rightarrow \mathcal{I}[u]$ слабо п/н снизу в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$.

Кроме того, $\mathcal{I}[u]$ – коэрцитивный ф-л в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$:

$\mathcal{I}[u] \geq p_0 \|u'\|_2^2 - |(g,u)_2| \underset{(5)}{\geq} p_0 \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} - \|g\|_2 \cdot l \|u'\|_2$

$(|(g,u)| \leq \|g\|_2 \|u\|_2 \underset{(5)}{\leq} l \|g\| \|u'\|_2)$

Воспользуемся нерав-м Коши с "ε":

$|a \cdot b| = \left|a\sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\right| \leq \frac{a^2 \varepsilon}{2} + \frac{b^2}{\varepsilon 2} \leftarrow |ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ $(a^2 - 2ab + b^2 > 0)$

$\Rightarrow \|g\|_2 \cdot l \, \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} \leq \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|g\|_2^2 l^2}{2\varepsilon}$

$\Rightarrow \mathcal{I}[u] \geq p_0 \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} - \frac{l^2}{2\varepsilon}\|g\|_2^2$.

Пусть $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{p_0}{2} \Rightarrow \mathcal{I}[u] \geq \frac{p_0}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} - \underbrace{\frac{l^2}{2p_0}\|g\|_2^2}_{\text{фикс.}} \to +\infty$ $\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \to \infty$

$\Rightarrow \mathcal{I}[u]$ – коэрцит. на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$

По т. 3 § 14 $\exists u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$: $\min\limits_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} \mathcal{I}[u] = \mathcal{I}[u^0]$.

Т.к. $\delta^2 \mathcal{I} > 0 \Rightarrow u^0$ – единств., удовл. тожд. (4). ∎

III способ. Пусть дополнит. известно, что выполнены условия (A₁). Тогда можно решить (∃ единств. реш., которое будет построено с помощью ф. Грина) ур-е
$$\begin{cases} -(pu')' + qu = F(x), & x \in [0,l] \quad F = -\frac{g}{2} \\ u(0) = u(l) = 0 & \leftarrow \text{(это задача (2).} \end{cases}$$
∃ единств. реш. $u \in C^2[0l]$. Эта ф-я удовл. тожд-ву (4), т.к. $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)$ и $\overline{C^1_0[0l]} = \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)$. Других экстремалей в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0l)$ нет и вариац. задача (3) однозначно разрешима.

Замечание. Функция $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)$, удовлетв. тождеству (4), называется обобщенным решением краевой задачи (2).

Лекция 8

Глава II. Задача Штурма–Лиувилля.

§ 1. Краевая задача Шт-Лиув.

Оператор $\mathcal{L} = (L, l_1, l_2)$ назыв. оператором Шт-Лиу!, где $Lv := -(p(x)v')' + q(x)v$; $l_1 v := \alpha_1 v'(0) - \beta_1 \cdot v(0)$;
$l_2 v := \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l)$;

Для $p(x)$ и $q(x)$ выполн усл-я H_1, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$; $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$.

Для операт. $\mathcal{L}$ рассм. краевая задача и задача на собств. ф-ции.

Краевая задача (1) $\begin{cases} Lv = f(x), \ x \in [0,l], \ f \in C[0,l]; \\ l_1 v = 0; \ l_2 v = 0. \end{cases}$

В частности, при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ задача (1) имеет вид

(2) $\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \ x \in [0,l]; \\ u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \end{cases}$ Задача (2) совпадает с задачей (*) на стр. 5, лекц 5-6 ($A = B = 0$). Решение зад. (2) в силу выпуклости ф-ла $E[\cdot]$ явл. глобальным единств. реш-ем ($u \in C^2[0,l]$) вариац. зад. – пример на с.4 л.5-6.

Справедлива след. теорема.

Теорема ($\exists$ ф. Грина и разрешим. краевой задачи (1).) (Вып. усл. H_1 и). Если задача (1°) $Lu = 0; \ l_1 u = 0, \ l_2 u = 0$ имеет только трив. реш-е, то задача (1) однозначно разрешима при $\forall f \in C[0,l]$, и её решение можно найти с помощью ф-ции Грина $G(x,y)$, т.е. $\boxed{u(x) = \int_0^l G(x,y) f(y)\,dy.}$ (3)

Док-во этой теор. – на практике.

Замечание: Предполож. т-мы равносильно усл-ю, что задача (1) может иметь не более 1 реш-я.

§ 2. Задача о собственных ф-ях.

Рассмотрим задачу (1) $\begin{cases} Lu = \lambda u, & x \in [0, l], \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$ Найти с.ч. λ и соотв. с.ф. $u(x)$

Т.о., далее мы рассм. частн. случай $l_i v$: $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2$.

Классической постановке $u(x) \in C^2[0, l]$, $u \not\equiv 0$.
(1) сопоставим обобщ. постановку: $\lambda \in \mathbb{C}$ назыв. обобщенным с. числом оператора $(L, I|_{x=0}, I|_{x=l})$, а ф-я $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (комплекснозначная), $u \not\equiv 0$, назыв. обобщенной с. ф., если u удовлетворяет интегр. тождеству

(2) $\int_0^l (p u' \cdot \bar{h}' + q u \cdot \bar{h})\, dx = \lambda \int_0^l u \cdot \bar{h}\, dx$, $\forall h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Очевидно, что при рассмотрении обобщ. постановки задачи достат. предположить, что выполн только усл. A_2 для ф-й p и q.

Далее мы будем изучать зад. (1) в обобщ. постановке (2), а затем покажем, что при выполнении усл. A_1 все с. ф. $\in C^2[0, l]$, т.е. верно (1), причём все с. числа λ – веществ.

Как и ранее, мы определим для $\forall v, h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,l]$ энергетич. скалярное (в данном случае – комплексозн. пр. $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$) произведение, тогда тождество (2) примет вид

$$[u, h] = \lambda (u, h)_2, \quad \forall h \in H_L \quad (3)$$

Рассм. линейный огранич. в комплекснозначном H_L ф-л $l_u[h] = (h, u)$; $|l_u[h]| \le \|h\|_2 \cdot \|u\|_2 \le C\|u\|_2 \|h\|$

$\Rightarrow$ по т. Рисса для $\forall$ фикс. u $\exists Ku \in H_L$:

$l_u[h] = [h, Ku] \Rightarrow (u, h) = \overline{(h, u)} = \overline{[h, Ku]} = [Ku, h]$ $\forall h \in H_L$.

③

Теперь рав-во (3) принимает вид:

$$[u,h]=\lambda[Ku,h] \Leftrightarrow [u-\lambda Ku,h]=0, \quad \forall h\in H_L$$

$\Leftrightarrow u\in H_L$ удовлетв. ур-ю

$$\boxed{u=\lambda Ku} \quad (5)$$

Далее мы изучаем св-ва операт. K. $\left(\mu=\frac{1}{\lambda};\ Ku=\mu u\right)$

μ – с.ч. опер. K

λ – хар. ч. опер. K

Утв 1. K – линейный, огранич. в H_L и с/с.

1) Линейность: пусть $(v_1,h)=[Kv_1,h]$, $(v_2,h)=[Kv_2,h]$

$$(\alpha v_1+\beta v_2,h)=[K(\alpha v_1+\beta v_2),h]$$

$$\alpha(v_1,h)+\beta(v_2,h)=\alpha[Kv_1,h]+\beta[Kv_2,h]=[\alpha Kv_1+\beta Kv_2,h],\ \forall h$$

$$\Rightarrow \boxed{K(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha Kv_1+\beta Kv_2}$$

2). Огранич-сть: пусть $h=Kv \Rightarrow$ из (4): $[Kv,Kv]=(v,Kv)_2\le$

$$\le\|v\|_2\cdot\|Kv\|_2\overset{⑧}{\le}\ell\|v\|_2\cdot\|Kv\|_{W_2^1(0,\ell)}\le C\|v\|_2\cdot|Kv| \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\boxed{|Kv|\le C\|v\|_2.}\quad (*) \underset{\text{оц. ⑥}}{\Rightarrow} \boxed{|Kv|\le C_1|v|,}\quad \forall v\in H_L$$

3) K – с/с в H_L операт: $[Kv,h]=(v,h)_2=\overline{(h,v)_2}=\overline{[Kh,v]}=[v,Kh]$ $\forall v,h\in H_L$.

(K – огр. на H_L и симм $\Rightarrow$ с/с).

Утв.2. Операт. K – компакт. в H_L.

Зафикс. $\forall$ огран. мн-во $M\subset H_L$: $\exists R>0$: $|v|\le R$, $\forall v\in M$.

Из оц. ⓐ: $\|v\|_{C[0,\ell]}\le\sqrt{\ell}\|v\|_{W_2^1}\le C|v|\le CR$, $\forall v\in M \Rightarrow$

мн-во ф-й из M – равномерно огранич. на $[0,\ell]$.

Далее, $\forall x,y\in[0,\ell]$, $y>x$:

$$v(y)-v(x)=\int_x^y v'(\tau)\,d\tau \Rightarrow |v(y)-v(x)|\le\int_x^y|v'|\,d\tau\le\left(\int_0^\ell|v'|^2dx\right)^{\frac12}|x-y|^{\frac12}\le$$

$$\le C|v|\cdot|x-y|^{\frac12}\le CR|x-y|^{\frac12} \Rightarrow$$ семья ф-й из M равностепенно непрерывно.

По т. Арцела M – предкомпактное мн. в $C[0,\ell]$.

(4)

Покажем, что мн-во $K(M)$ — предкомп. в H_L.

Пусть $\{v_n\} \in K(M)$ — огранич. в H_L мн-во. Треб. док-ть, что $\exists \{v_{n_k}\} : \|v_{n_k} - v_{n_j}\| \underset{k,j\to\infty}{\to} 0$.

По определ. для $\forall v_n \in K(M)$ $\exists u_n \in M : K(u_n) = v_n$.

Т.к. M — предкомп. в $C[0,l]$, то $\exists \{u_{n_k}\} \in M$:

$\|u_{n_k} - u_{n_j}\|_{C[0,l]} \underset{k,j\to\infty}{\to} 0$. Из нер-ва (*) на стр. 3:

$$\|K(u_{n_k} - u_{n_j})\| = \|\underbrace{Ku_{n_k}}_{v_{n_k}} - \underbrace{Ku_{n_j}}_{v_{n_j}}\| \overset{(*)}{\le} c\|u_{n_k} - u_{n_j}\|_2 \le c_1 \underbrace{\|u_{n_k} - u_{n_j}\|_{C[0,l]}}_{\to 0}$$

$\Rightarrow \|v_{n_k} - v_{n_j}\| \underset{k,j\to\infty}{\to} 0$. ∎

Вывод: • Согласно теории Фредгольма для $K: H_L \to H_L$, K — комп., равно $Ku = \mu u$, определяет, что 1) мн-во с.ч. $\{\mu_j\}$ не более чем счётно; 2) $\forall \mu_j \neq 0$ соотв. конечное число с. ф-й; 3) $|\mu_j| \le \|K\|$, единств. возможн. т. сгущ. $\mu = 0 \Rightarrow$ т.е. $|\lambda| \to \infty$, $\Rightarrow$ для характер. чисел λ нет конечной точки сгущения. (Напомним, что хар. числа λ — опер. K являются обобщ. с. числами опер. Шт-Лиув. (см. (1)).)

• Т.к. K — с/с оператор, то все μ_j — веществ., а собств. ф., соотв. разным μ_j — ортогональны в H_L: $[\underbrace{Ku_1}_{\mu_1[u_1,u_2]}, u_2] = [u_1, Ku_2] = \mu_2[u_1, u_2]$; если $\mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow [u_1, u_2] = 0$, т.е. собств. ф. ортогон. в H_L. С. ф. можно взять веществ.

• Опер. K — компакт. + с/с. $\Rightarrow$ спектр не пуст.

Согласно теореме Гильберта-Шмидта, если обозначить с. ф-ции $\{u_j\}$ опер. K, тогда $\forall v \in H_L$ справедливо разложение $v = \sum_j [f, u_j] u_j + h$, $Kh = 0$.

Согласно опред. опер. K: $[\underbrace{Kh}_{0}, h] = (h,h) = \|h\|_2^2 \Rightarrow$

$h = 0$, т.е. ядро опер. $K = \{0\}$. $\Rightarrow$

5

$\Rightarrow$ $v = \sum_j [f, u_j] u_j$. $\forall v \in H_L$ Если предпол., что $\exists$ только конечн. число $\{u_j\}$, то пр-во H_L должно быть конечномерно $\Rightarrow$ $j = 1, \ldots$

$v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} [f, u_j] u_j(x), \ \forall v \in H_L$ $\Rightarrow$ система обобщ. с. ф-й $\{u_j\}$ полна в H_L. (То, что спектр простой докажем позже).

Утв. 3. Система с. ф. операт. K полна в H_L и $L^2(0, \ell)$.

Осталось д-ть полноту в $L^2(0,\ell)$. Для этого заметим, что оператор K можно считать определ. на $L^2(0,\ell)$, т.е. $K: L^2(0,\ell) \to H_L$. Действит., $\forall g \in L^2(0,\ell)$ $\underline{(g, h)}$ – ограничн. по h ф-л в H_L $\forall h \in H_L$ (см. оц. (*)) $S(h) = (h, g)$ $\forall g \in L^2$ $\Rightarrow \exists Kg \in H_L$ по т. Рисса:

$(g, h) = [Kg, h]$, $\forall h \in H_L$ и $g \in L^2(0,\ell)$. Требуется д-ть, что если для функц. $g \in L^2(0,\ell)$ выполн: $(g, u_j)_2 = 0 \Rightarrow g = 0$.

Верно равво: $(g, u_j)_2 = [Kg, u_j] = 0$, т.е. $Kg \perp \forall u_j$ в H_L $\Rightarrow$ из полноты сист. $\{u_j\}$ в H_L $\Rightarrow Kg = 0$, но ядро опер. $K = \{0\}$

$\Rightarrow g = 0$, чтд. Т.к. нас интересуют с.в.а обобщ. с.ч. и с. ф. опр. Шт-Лиувилля, а $\lambda = \frac{1}{\mu}$, то мы доказали следующий рез-т.

Следствие: Обобщенные собств. ф-ции задачи Шт-Лиув. образуют полную ортогон. систему в H_L и $L^2(0,\ell)$; обобщ. с. числа веществ. и $|\lambda_j| \to \infty$.

Далее, пусть u – об. с.ф., λ – хар. ч. опер. K:

$\lambda K u = u \Rightarrow \lambda [Ku, u] = \|u\|^2 \Rightarrow \lambda (u, u)_2 = \|u\|^2 \Rightarrow$

$\lambda = \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2} > 0$. $\Rightarrow$ Все хар. числа опер. K, т.е. все обобщ. с. числа опер. Шт-Лиув, можно занумеровать по возрастанию:

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_j < \ldots$

⑥

Теорема (о гладкости обобщ. с. ф-й)

Пусть вып-ны усл. гладкости A_1, тогда $\forall$ обобщ. с. ф-я u из $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ принадлежит $C^2[0,l]$ и явл. классич. собств. ф-ей зад. Шт-Лиув. (т.е. явл. реш-ем зад. (1)).

Д-во: Рассм. краевую задачу

$$(6)\ \begin{cases} Lv = \lambda u, & x\in[0,l]; \\ v(0)=v(l)=0; \end{cases} \quad f(x)=\lambda u(x), \text{ где } u\text{ – об. с. ф-я}, \lambda\text{ – об. с. ч.}$$

Заметим, что однородное ур-е $Lv=0$ при усл. $v(0)=v(l)=0$ имеет только трив. решение (мы рассм. краев. зад. в классе $C^2[0,l]$)

$$\int_0^l(-(pv')'h+qvh)\,dx=0, \xrightarrow{\text{при } h=v} \int_0^l(\underset{\geq p_0}{p}v'^2+\underset{\geq 0}{q}v^2)\,dx=0 \Rightarrow v\equiv 0.$$

Для задачи (6) воспольз. усл. $\exists$ ед. реш. $v\in C^2[0,l]$ зад. (6). Для $\forall h\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ зад. (6). $\Rightarrow \exists$ ед. $v\in C^2[0,l]$ зад. (6).

ф-я v удовл. интегр. тожд-ву

$$(7)\ \int_0^l(pv'h'+qvh)\,dx=\lambda\int_0^l uh\,dx.$$

Т.к. u – об. с. ф-я, то по определению:

$$(8)\ \int_0^l(pu'h'+quh)\,dx=\lambda\int_0^l uh\,dx, \quad \forall h\in\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$$

Обозначим $w=v-u\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$, вычитая из (7) – (8)

$$\Rightarrow \int_0^l(pw'h'+qwh)\,dx=0, \text{ полагая } h=w \Rightarrow$$

$$\int_0^l[p(w')^2+qw^2]\,dx=0 \Rightarrow w=0 \Leftrightarrow v(x)=u(x) \Rightarrow$$

$u\in C^2[0,l]$.

Замечание. С. ф. задачи Шт-Лиув. простые (т.е. кратность $=1$).

Действительно, пусть λ – с. число и $u_1(x), u_2(x)$ – 2 собств. ф., соотв. λ. Краевое условие в т. $x=l$ запишем в виде

$$(9)\ \begin{cases} 0\cdot u_1'(l)+\beta_2 u_1(l)=0 \\ 0\cdot u_2'(l)+\beta_2 u_2(l)=0 \end{cases} \quad 1=\beta_2\neq 0$$

определитель системы есть транспониров. вронскиан. Если однородная алгебр. система имеет нетрив. реш-е, то определитель системы равен нулю. $\Rightarrow$ $W(\ell) = \begin{vmatrix} u_1(\ell) & u_2(\ell) \\ u_1'(\ell) & u_2'(\ell) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

тогда $W(x) = 0$, $\forall x \in [0, \ell]$ и ф-ции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ линейно зависимы как реш-я однородного ур-я, т.е. $u_2(x) = C u_1(x)$. ∎

Теорема (вариац. принцип нахожд. собств. чисел.)

Пусть λ_j, $\varphi_j(x)$, $j \in \mathbb{N}$, — собств. числа и с. ф. (обобщ.) задачи Шт-Лиув, т.е. $\varphi_j \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$. Тогда

$$\lambda_k = \inf_{v \in H^{(k)}} \frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2} = \frac{\|\varphi_k\|^2}{\|\varphi_k\|_2^2}, \quad H^{(k)} = \{v \in H_L : [v, \varphi_j] = 0, \ \forall j = 1, \dots k-1, \ v \neq 0\}$$

$$H^{(1)} = H_L \supset H^{(2)} \supset \dots$$

Док-во: Пусть $v \in H^{(k)}$, $[v, \varphi_j] = 0$, $j \leq k-1$.

Зафикс. $N >> k$ и рассм. $v^N(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j(x) = \sum_{j=k}^{N} c_j \varphi_j(x)$

где $c_j = [v, \varphi_j]$. Известно, что $v^N \to v$ в H_L.

Рассм. $[v, v^N] = [v, \sum_{j=k}^{N} c_j \varphi_j] = \sum_{j=k}^{N} c_j [v, \varphi_j] = \sum_{j=k}^{N} |[v, \varphi_j]|^2 \overset{(*)}{=}$

$[v, \varphi_j] = c_j$

λ_j, φ_j — характ. число и с. ф. операт. K, т.е. $\lambda_j K \varphi_j = \varphi_j$ верно рав-во:

$$[v, \varphi_j] = [v, \lambda_j K \varphi_j] = \lambda_j [v, K \varphi_j] \underset{\text{опред. } K}{=} \lambda_j [Kv, \varphi_j] = \lambda_j (v, \varphi_j)_2.$$

тогда $(*) = \sum_{j=k}^{N} \lambda_j^2 |(v, \varphi_j)_2|^2 = \sum_{j=k}^{N} \lambda_j |(v, \hat{\varphi}_j)_2|^2 \geq \lambda_k \sum_j |(v, \hat{\varphi}_j)|^2$

нормир. в L^2: $\hat{\varphi}_j = \sqrt{\lambda_j}\, \varphi_j$ (подставь $v = \varphi_j$ в)

$= \lambda_k \sum_{j=k}^{N} |(v, \hat{\varphi}_j)|^2$. Получили нер-во

$$[v, v^N] \geq \lambda_k \sum_{j=k}^{N} |(v, \hat{\varphi}_j)|^2, \quad N \to \infty:$$

$\|v\|^2 \geq \lambda_k \|v\|_2^2$ (справа применили рав-во Парсеваля.)

(8)

Т.о., мы получили для $\forall v \in H^{(k)}$

нер-во $\lambda_k \le \frac{[v]^2}{\|v\|^2}$.

Для $\varphi_k \in H^{(k)}$ и вычислим $\frac{[\varphi_k]^2}{\|\varphi_k\|_2^2} = \frac{[\varphi_k, \lambda_k K \varphi_k]}{\|\varphi_k\|_2^2} =$

$= \lambda_k \frac{[K\varphi_k, \varphi_k]}{\|\varphi_k\|^2} \overset{def}{=} \lambda_k \frac{(\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|_2^2} = \lambda_k$, т.е. на эл-те

$v = \varphi_k$ достиг. $\min\limits_{H^{(k)}}$ ф-ла $\frac{[v]^2}{\|v\|_2^2}$.

О нулевом с. числе (при общих краевых усл-ях)

В теореме о разрешимости краевой задачи (1) предполагается, что задача (1^0) (при $f=0$) имеет только трив. реш-е. Это можно трактовать как предположение, что $\lambda = 0$ <u>не</u> является с. числом:

$\begin{cases} Lu = 0 \cdot u, \\ l_1 u = 0;\ l_2 u = 0. \end{cases}$ Таким образом, этот рез-т можно сформулир. так:

"Пусть вып. усл. A_1 и $\lambda = 0$ не явл. с. числом операт. (L, l_1, l_2), тогда для $\forall f \in C[0,l]\ \exists\, u \in C^2[0,l]$ — единств. реш-е задачи (1), причем $u(x) = \int_0^l G(x,y) f(y)\,dy$."

Выделим все ситуации, когда $\lambda = 0$ явл. с. числом.

<u>Лемма</u> (о нулевом с. числе). "$\lambda = 0$ явл. с. числом операт. (L, l_1, l_2) тогда и т. тогда, когда одновременно $q(x) \equiv 0$, и $\beta_1 = \beta_2 = 0$."

<u>Док-во</u>: 1) Пусть $\lambda = 0$ — с.ч., а $u(x)$ — собств. ф. ($u(x) \not\equiv 0$). Ур-е $Lu = 0$ умножим на с. ф. $u(x)$ и проинтегр. по $(0,l)$:

$\int_0^l Lu \cdot u\,dx = 0 \underset{\text{по частям}}{\Rightarrow} (10)\ \int_0^l (pu'^2 + qu^2)\,dx - pu'u\Big|_0^l = 0$

Уточним выражение для внеинт. подстан.

Сначала предпол., что $\alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 \neq 0 \Rightarrow \underline{u(0) = 0}$ (9)

$\Rightarrow$ подстановка при $x=0$ исчезает.

Аналогично, если $\alpha_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 \neq 0 \Rightarrow \underline{u(\ell)=0} \Rightarrow$

подстан. $= 0$. Далее, пусть $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$.

Тогда $u'(0) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} u(0)$; $u'(\ell) = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} u(\ell)$.

Вернемся к равву (10):

$$\int_0^\ell (pu'^2 + qu^2)\,dx + p(\ell)\frac{\beta_2}{\alpha_2} u^2(\ell) + p(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1} u^2(0) = 0.$$

Все слаг. $\geq 0 \Rightarrow$ $\forall$ слагаемое $= 0$. $\Rightarrow$

$\int_0^\ell (\underset{\geq p_0}{p}u'^2 + qu^2)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^\ell u'^2\,dx = 0 \Rightarrow u' = 0$, $u(x) \equiv C_0 \neq 0$;

$\int_0^\ell \underset{\geq 0}{q(x)} C_0^2\,dx = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{q(x) \equiv 0}$ на $[0, \ell]$; далее $\frac{p(\ell)\beta_2}{\alpha_2} C_0^2 = 0$

$\Rightarrow \underset{\sim}{\beta_2 = 0}$, аналогично $p(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1} u^2(0) = p(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1} \underset{\neq 0}{C_0^2} = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{\beta_1 = 0}$.

2) Пусть $q(x) \equiv 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$; $\begin{cases} -(pu'(x))' = 0 \text{ на } [0,\ell] \\ u'(0) = 0,\ u'(\ell) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u(x) \equiv \text{const} \neq 0$ – собств. ф., причем других реш. нет.

/

Лекция 9

Часть 3. "Постановка краевых задач"

В нашем курсе изучаются краевые задачи для дифф. ур. II порядка в частных произв., имеющие физический смысл. В качестве моделей мы рассм. 1) волновое ур-е; 2) ур-е теплопроводности; 3) ур-е Лапласа. С ур-ями 1) и 3) мы уже знакомы, поэтому начнем с вывода ур-я теплопроводности.

§1. Вывод ур. теплопроводности. Классические краевые зад.

Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ - произвольная огранич. область с C^1-гладкой границей S. Предположим, что область B заполнена однородной изотропной средой со следующими физич. хар-ками: ρ - плотность среды; c - удельная теплоёмкость; k - коэффициент теплопроводности. Пусть $f(x,t)$ - интенсивность источников тепла в т. $x=(x_1,x_2,x_3)\in B$ в момент времени $t \geq 0$. Мы хотим определить температуру $u(x,t)$, $x \in B$, $t>0$ ($u|_{t=0}$ будет задана).

Пусть Q_1 - кол-во тепла, поступающего в B за счёт распол. в B источников (стоков) тепла; Q_2 - кол-во тепла, поступающего в B через поверхность $S=\partial B$; Q_3 - кол-во тепла, затраченное на изменение температуры за время $(t, t+\Delta t)$. Т.о., за время $(t, t+\Delta t)$ мы получаем соотношение

(*) $\boxed{Q_1+Q_2=Q_3}$ ← это ур-е теплового баланса.

Из этого соотн. мы выведем ур-е для температ. $u(x,t)$.

① За счёт источников тепла в элемент объема ΔB поступает за время $(t,t+\Delta t)$: $\Delta Q_1 \simeq f(x,t)\Delta B \cdot \Delta t \Rightarrow$

$$Q_1 = \iiint_B f(x,t)\,dB \cdot \Delta t.$$

② Выделим на поверх. S уч-к ΔS, т. $x \in \Delta S$, пусть $n(x)$ - внешняя к B нормаль в т. x. Согласно закону Фурье через ΔS в "1" времени проходит кол-во тепла, пропорц. $\left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right)$ и $|\Delta S|$, т.е. $\Delta Q_n \simeq \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right)|\Delta S|$.

коэфф. пропорциональности к назыв. коэфф. теплопроводности: $\Delta Q_n = -k\frac{\partial u}{\partial n}|\Delta S|$. Тогда

$Q_n = -k\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS\cdot\Delta t$ — кол-во тепла, прохор. через S в напр. $n(x)$ за время $(t, t+\Delta t)$. Нас интересует кол-во тепла, поступающее внутрь B, т.е.

$$Q_2 = k\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS\cdot\Delta t = \iint\limits_S (k\nabla u, n)\,dS \overset{\Delta t}{\underset{(*)}{=}} \iiint\limits_B \operatorname{div}(k\nabla u)\,dB\,\Delta t$$

(*) - ф-ла Гаусса-Остроград.

~~Как изменится темпер. внутри B за $(t, t+\Delta t)$.~~

Чтобы изменить температуру на величину $\Delta_t u := u(x,t+\Delta t) - u(x,t)$ в элементе ΔB, требуется затратить кол-во тепла $\Delta Q_3 = c\cdot\underbrace{\rho\Delta B}_{\Delta m}\cdot\Delta_t u$, где $c>0$ - удельная теплоёмкость, т.е. $Q_3 = \iiint\limits_B c\rho\,\Delta_t u\,dB \simeq \iiint\limits_B c\rho\,\underline{u_t}\,\Delta t\,dB$,

т.к. $\Delta_t u \simeq \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Delta t$.

Обращаясь к ур-ю (*) и сокращая равенство на Δt, получаем $\iiint\limits_B (k\Delta u + f - c\rho u_t)\,dB = 0$.

Т.к. объем B был ~~выбран~~ произвольно, то $(\dots)=0$, т.е.

$$c\rho u_t - k\Delta u = f \Longleftrightarrow \boxed{u_t - a^2\Delta u = F} \quad (2)$$

стандартная форма ур. теплопр.

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$; $F = \frac{f(x,t)}{c\rho}$.

О дополнит. условиях

Если мы изучаем распространение тепла в $\mathbb{R}^3$, $t\geq 0$, то дополнит. нужно считать известным распред. $u(x,t)$ при $t=0$, т.е. дополнит. к (2) задаём начальное усл.

$$\boxed{u|_{t=0} = \varphi(x)} \quad (3)$$

Задача (2), (3) будет исследоваться в след. семестре. Это задача Коши для ур-я теплопроводности. Мы определяем в этом случае u на всем $\mathbb{R}^3\times\{t\geq 0\}$.

Предпол. теперь, что $x\in\Omega$, Ω - огран. обл. в $\mathbb{R}^3$, $S=\partial\Omega\in C^1$. Очевидно, что кроме ур-я (2) в $Q=\Omega\times(0,\infty)$ и усл. (3) при $x\in\Omega$, требуется определить, что происходит на границе $\partial\Omega$ при $t>0$, т.е. на $\Gamma=\partial\Omega\times(0,\infty)$. (3)

Рассм. 3 классич. усл-я на Γ:

1) $u|_\Gamma=\varphi_1(x,t)$ – это I краевое усл., т.е. мы знаем, как изменяется температ. на $\partial\Omega$ во все моменты $t>0$.

2) Т.к. $-k\frac{\partial u}{\partial n}$ – плотность теплового потока из B в направл. $n(x)$, то можно рассм. усл. $-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=\varphi_2(x,t)$, т.е. мы считаем известным кол-во тепла, проход. через $\partial\Omega$ из обл. Ω в направл. n. В частности, если боковая поверхность тела Ω теплоизолирована, то $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0$.

3). В случае теплообмена со средой (по закону Ньютона) $-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=h(u-g)$, где $h>0$ – коэфф. теплообмена, g – температ. окруж. среды. (Поток тепла тем больше, чем больше разность температур на Γ: $u-g$). Стандартный вид этого усл-я $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{h}{k}u\right)\Big|_\Gamma=\frac{h}{k}g$.

Всем суммировать все 3 возможных условия, то можно их записать так
$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\Big|_\Gamma=\varphi(x,t),\quad (4)$$
$\alpha,\beta\geq0$, $\alpha^2+\beta^2\neq0$. Т.о., мы получаем начально-краевую задачу (2),(3),(4). Можно рассм. зад. в $Q^T=\Omega\times(0,T)$, где $T>0$ фикс. произвольно.

Мы покажем, как можно построить реш. задач (2)–(4) в виде ряда Фурье. (Этому будет посвящено достат. времени на практ. занятиях след. семестра).

§2. Классификация ур-й II порядка

В волновом ур. и ур-нии теплопроводности рассматриваем $u(x,t)$ как $u(\underbrace{x_1,x_2,x_3}_{x},x_4)$, т.е. $t=x_4$.

Возникает вопрос, как разбить все ур-я II порядка в частных производных на классы так, чтобы невырожд. замена переменных не выводила ур-е из определённого класса.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассм. ур-е

$$a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее $a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j}$.

Ур-е (1) – квазилинейное, т.е. линейное относит. старших ($\mathrm{II}^х$) производных. Предположим, что матр. $\{a_{ij}(x)\}$ непрерывна по x, Φ – тоже гладкая ф-я своих аргументов, а ф-я $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ (или локально: $u \in C^2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Пусть для простоты $\Omega = \mathbb{R}^n$. Не умаляя общности, т.к. $\{a_{ij}\}$ – симметричная матр. с вещ. коэфф. $\forall$ матр. $\{a_{ij}(x)\}$ пере- $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$, то можно эл-ты распределить так, что $\hat{a}_{ij}(x) = \frac{a_{ij}(x) + a_{ji}(x)}{2}$, где $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}$. Далее считаем, что $\{a_{ij}(x)\}$ – симметр. $[n \times n]$-матрица с вещ. элементами. Сделаем C^2-гладкое невырожд. преобразование переменных $y = y(x)$, $\det\left\{\frac{\partial y}{\partial x}\right\} \neq 0$. Тогда $\exists$ обратное преобр. $x = x(y)$. Перепишем ур-е (1) в новых переменных ($u_{x_i} = \tilde{u}_{y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$;

$u_{x_i x_j} = \tilde{u}_{y_k y_m} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \tilde{u}_{y_k} \cdot \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$):

$$\underbrace{a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j}}_{\tilde{a}_{km}} \tilde{u}_{y_k y_m} + \underbrace{\left(a_{ij}\, \tilde{u}_{y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x(y), \tilde{u}, \nabla_y \tilde{u} \cdot \tfrac{\partial y}{\partial x}) \right)}_{\tilde{\Phi}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{a}_{km}(y)\, \tilde{u}_{y_k y_m} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0,} \quad (2)$$

где $\boxed{\tilde{a}_{km}(y) = a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j}.}$ (3)

Очевидно, что структура ур-й (1) и (2) одинакова. Что произошло с матр. $\{a_{ij}(x)\}$?

Зафикс. x^0, обозн. $y^0 = y(x^0)$. Пусть $b_{ki} = \frac{\partial y_k(x^0)}{\partial x_i}$, тогда в т. y^0 равво (3) примет вид

$$\boxed{\tilde{a}_{km}(y^0) = a_{ij}(x^0)\, b_{ki}\, b_{mj} \iff \tilde{A} = BAB^T} \quad (4)$$

здесь $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{km}(y^0)\}$.

Из алгебры известно, что $\forall$ симметр. матр. A приводится к диаг. виду с помощью невырожд. матр. S: $A = SDS^T$. Тогда из (4) следует

$$\tilde{A} = B(SDS^T)B^T = (BS)D(BS)^T.$$

Это означает, что с пом. матр. BS матр. $\tilde{A}$ приводится к диаг. матр. D (как и матр. A), где $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$.

<u>Вывод</u>: При $\forall$ невырожд. замене переменных сохраняется число положительных, отрицат. и нулевых эл-тов в диагональной форме!

Другими словами, число "+", "−" и "0" с. чисел матриц сохраняется.

<u>Определение</u>. Будем говорить, что ур. (1) имеет в т. x^0 тип (α, β, γ), если при приведении к диагон. виду на диагонали будет α положит. эл-тов, β – отрицат., и γ – нулевых!

Очевидно, что $\alpha + \beta + \gamma = n$. Кроме того, если ур-е (1) умножить на (-1), то α и β поменяются местами $\Rightarrow$ не различаем типы (α, β, γ) и (β, α, γ).

<u>Определение</u>. "Ур-е (1) имеет в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ тип (α, β, γ), если оно имеет такой тип в $\forall$ т. $x \in \Omega$.

<u>Основные типы</u>: 1) $(n, 0, 0)$ или $(0, n, 0)$ – эллиптический тип;
2) $(n-1, 1, 0)$ или $(1, n-1, 0)$ – гиперболический тип;
3) $(n-1, 0, 1)$ или $(0, n-1, 1)$ – параболический тип.

Наши модельные ур-я имеют постоянные коэфф. и диагональную структуру главных матриц. (6)

<u>Примеры</u> 1) Ур-е Лапласа $\Delta u = f \Rightarrow a_{ij}(x) = \delta_i^j$

$$\{a_{ij}(x)\} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}$$ — ур-е <u>эллиптич. типа</u>

2) волновое ур-е: $u_{x_4x_4} - a^2 \sum\limits_{i\le 3} u_{x_ix_i} = f \Rightarrow$

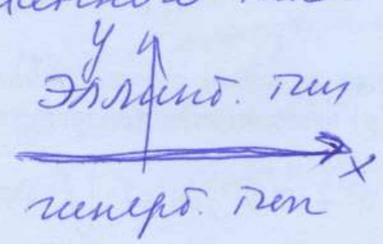
$t = x_4$

$$\begin{pmatrix} -a^2 & & & 0 \\ & -a^2 & & \\ & & -a^2 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$ тип $(1, 3, 0)$ — <u>гиперб. тип</u>

3) теплопроводность: $u_{x_4} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_ix_i} = f$ $\begin{pmatrix} -a^2 & & & 0 \\ & -a^2 & & \\ & & -a^2 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Тип $(0, 3, 1)$ — <u>параболический</u>

4) пример смешанного типа $y u_{xx} + u_{yy} = 0$, где $(x,y) \in \mathbb{R}^2$



1) $y > 0$ $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ <u>элл. тип</u>

2) $y < 0$ $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ гипербол. тип

ось $\{y=0\}$ — линия вырождения типов

О канонической форме ур-я

Пусть матр. $\{a_{ij}(x)\}$ в (1) недиагональна. Для фиксир. $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и матр. $A_0 = \{a_{ij}(x_0)\}$ рассм. линейную замену $y = Bx$, где $\det B \ne 0$, и матр. B приводит A_0 к диаг. виду, т.е. $D = B A_0 B^T$. В новых перем. y (в точке y^0!) ур-е имеет вид

$$\lambda_1 \tilde{u}_{y_1y_1} + \dots \lambda_n \tilde{u}_{y_ny_n} + \tilde{\Phi} = 0.$$

Такая форма ур-я назыв. <u>канонической</u>.

Если матр. A — постоянна, то канон. вид сохран. $\forall y$, в противном случае при $y \ne y_0$ диагон. структура матрицы "расплывётся" в окрестн. $y = y_0$.

! Исключением явл. случай $n=2$. В этом случае с помощью спец. замены переменных удается привести ур-я к канонич. виду в зоне сохранения типа.

$\Longrightarrow$ см. практику. [6]

Лекция 10.

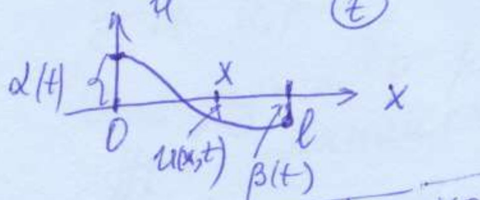
§3. Условия согласования. Пример. Постановки краевой задачи и задачи Коши.

Для полной характеристики физич. процесса кроме уравнения нужно задать дополнит. условия.

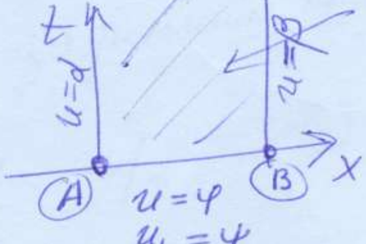
Пример. Найти $u(x,t)$, которая является решением след. задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in [0,l], \quad t \geq 0; \quad (1) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in [0,l]; \quad (2) \\ u|_{x=0} = \alpha(t), \quad u|_{x=l} = \beta(t), & t \geq 0. \quad (3) \end{cases}$$

Это задача о нахождении смещения $u(x,t)$ от положения равновесия конечной струны длины l, вызванное приложе. вертикально силой интенсивности $f(x,t)$, а также учитывающие перемещения её концов по законам $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Начальное смещение струны описано ф-ей $\varphi(x)$, начальная скорость определена фей $\psi(x)$. Напомню, что ур-е колебаний (1) было выведено с помощью вариационного принципа. В фиксиров. момент времени картина такая:



Функция u определена в $\overline{Q}$, где $Q = (0,l)\times(0,\infty)$:



Мы хотим найти классич. решение $u \in C^2(\overline{Q})$ задачи (1)-(3). Необходимо согласовывать усл-я на ф-ю $u(x,t)$ в точках (A) и (B).

1) $u \in C(\overline{Q})$ $\Rightarrow$ Тогда необх. потребовать непр. в т. (A) и (B)

$$\boxed{\alpha(0)=\varphi(0); \quad \beta(0)=\varphi(l)} \quad (4)$$

Это условия согласов. нулевого порядка.

② $u \in C^1(\bar{Q})$. Дополнительно к усл. (4) необходимо потребовать, чтобы

$$\boxed{\alpha'(0) = \varphi(0), \qquad \beta'(0) = \varphi(l).} \quad (5)$$

Это усл-я согласования I порядка.

③ $u \in C^2(\bar{Q})$. Тогда дополнит. к усл. (4) и (5) следует потребовать, чтобы в т. Ⓐ и Ⓑ выполн. ур-е (1):

$$\boxed{\alpha''(0) - a^2\varphi''(0) = f(0,0), \quad \beta''(0) - a^2\varphi''(l) = f(l,0)} \quad (6)$$

Т.о., чтобы искать решение в классе $C^2(\bar{Q})$ необходимо потребовать, чтобы усл. (4)–(6) выполнялись. (Мы предполагаем, что α, φ, β – C^2-гладкие функции.)

V Краевая задача для ур-я в частных произв. задается в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при условии, что на $\partial\Omega$ заданы дополнит. усл-я.

Например, в задаче о температуре тела, занимающего область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, при условии, что температура $u = u(x)$ (не зависит от t), $f = f(x)$,

Тогда мы имеем задачу

$$(7)\begin{cases} -a^2\Delta u = F(x), \ x \in \Omega; \\ \left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$$

Здесь $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Это задача о решении ур-я Лапласа (эллиптич. ур-я) при заданном краевом условии. Задача (7) при усл. $u|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ называется задачей Дирихле;

при условии $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ – задачей Неймана.

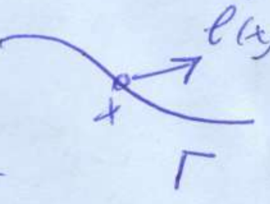
Если $\alpha, \beta \neq 0$, то это задача с III краевым услов.

Методы решения задачи (7) – в след. семестре.

Задача Коши. В этом случае сначала задаем гладкую поверхность $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, на ней $\vec{l}(x)$ - любое некасательное направл. Количество условий на Γ зависит от порядка дифферен. ур-я.

Например, для ур-я $Lu = f(x)$ II порядка определяем на Γ 2 условия Коши

$$\boxed{u\big|_\Gamma = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\Gamma = \psi(x),} \quad (8)$$



и ищем решение ур-я $Lu = f$ в некоторой окрестности этой пов-ти Γ.

Задача Коши для уравнения колебаний струны. Пусть $x \in \mathbb{R}^1$ — струна ∞. Найти $u(x,t)$ в окрестности $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2;\ t = 0\}$ - ось "x".

Т.о. речь идет о колебании ∞ струны.

Условия Коши: $\boxed{u\big|_{t=0} = \varphi(x);\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}^1}$

+ ур-е: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$. В данном случае $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Очевидно, что это направление ортогонально оси "x"-ов.

Смешанная (начально-краевая) задача.

Если вернуться к задаче (1)-(3), то это смешанная задача: на концах струны - краевые усл-я (3), в нач. момент — 2 условия Коши (усл. (2)).

§4. О корректности (краевой) задачи.

Определение. Пусть A - оператор из X в Y, где X, Y - банах. пр-ва, A - линейный и огранич. (б.м. определен не на всем X, т.е. $D(A) \subset X$).

Задача $\boxed{Ax = y}$ назыв. корректно разрешимой,

в паре банах. пр-в (X, Y), если $\forall y \in Y$ (4)
$\exists !\, x \in X$, и из усл. $y_n \xrightarrow{Y} y \Rightarrow x_n \xrightarrow{X} x$.

Т.о. корректность включает 3 пункта
1) $\forall y \in Y$ $\exists$ реш. $x \in X$; 2) это реш. единственно;
3) решение непрер. зависит от правой части ур-я
(устойчивость по отнош. к возмущению $y \in Y$).

Лемма: Корректная разрешим. задачи $\Leftrightarrow$
$\exists$ огранич. обратного оператора A^{-1}, определ. на пр-ве Y.
(Это хорошее упр. — самим).

Наша задача — доказать корректность задач матем. физики (в основном $\exists$ и $!$)

Приведём классич. пример Адамара некоррект. задачи (он ввёл понятие корректности).

Пусть $\Omega = \{(x, y):\ x \in \mathbb{R}^1,\ y \in (0, \delta)\}$, $\forall \delta > 0$;
$\Gamma = \{y = 0\}$ - ось "x". Задача Коши:

$$(*) \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, (x, y) \in \Omega \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

Пусть $X = CB(\overline{\Omega})$ - пр-во непрер. и огранич. ф-й в $\overline{\Omega}$;
$\|v\|_X = \sup\limits_{(x,y) \in \Omega} |v(x, y)| < +\infty$. $Y = CB(\mathbb{R}^1)$, где $\|g\|_Y = \sup\limits_{\mathbb{R}^1} |g| < +\infty$.

Определим оператор задачи $(*)$ $A = \{\Delta, I|_\Gamma, \frac{\partial}{\partial y}|_\Gamma\}$;
пусть $\Phi = \{0, \varphi, 0\}$. $D(A) = \{v \in X:\ v$ имеет непрер. производные до II порядка включит. в $\overline{\Omega}$, $\frac{\partial v}{\partial y}|_{y=0} = 0\}$.
Т.о., $D(A) \subset X$ и $(*)$ принимает вид $\boxed{Au = \Phi}$
где $\varphi \in Y$.

Разделяя переменные доказывается, что при $\varphi = 0$ реш. $u \equiv 0$, т.е. единств. реш., и находится вид решения; если $\varphi_n(x)=\frac{\cos nx}{n},\ n\in\mathbb{N}$, $\boxed{5}$

$\Rightarrow u_n(x,y)=\frac{\cos nx}{n}\cdot \operatorname{ch} ny.$ $\left(\operatorname{ch} ny=\frac{e^{ny}+e^{-ny}}{2}\right)$

Проверим п.3 определения корректности: $\|\varphi_n\|_Y=\left\|\frac{\cos nx}{n}\right\|_Y=\sup\limits_x\frac{|\cos nx|}{n}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$;

$$\|u_n\|_X=\sup_{\substack{y\in(0,\delta)\\ x\in\mathbb{R}^1}}\frac{|\cos nx|}{n}\operatorname{ch} ny=\frac{\operatorname{ch} n\delta}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty.$$

Т.о., устойчивость решения задачи (*) в паре фиксир. пр-в (X,Y) не выполняется. $\Rightarrow$ В данной паре пр-в задача (*) некорректна.

§5. Теорема Коши–Ковалевской.

Рассмотрим класс задач Коши, для которого доказана общая теорема однозначной разрешимости, причём выберем постановку, в которой искомая ф-я $u(x,t)$, $x=(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$; $t\geq 0$. В качестве поверхности Γ рассм. гиперплоскость $\{t=0\}$:

Чтобы сформулировать т-му, напомню **Опр.** Если ф-я $F(y_1,\dots y_s)$ представляется в окрестн. т. $y^0=(y_1^0,\dots y_s^0)$ в виде сходящегося ряда

$$F(y_1,\dots y_s)=\sum_{|\gamma|=0}^{\infty}A_\gamma(y-y^0)^\gamma=\sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1\dots\gamma_s)\\|\gamma|=0}}^{\infty}A_{\gamma_1\dots\gamma_s}(y_1-y_1^0)^{\gamma_1}\cdots(y_s-y_s^0)^{\gamma_s},$$

то F – аналитич. ф-я аргументов $(y_1,\dots y_s)$ в окрестн. т. y^0.

Рассмотрим задачу

$$(+)\ \begin{cases}\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}=F\left(t,x,u,\dots\dfrac{\partial^r}{\partial t^r}D^{(\alpha)}u\right)\\[2mm] \left.\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\varphi^k(x),\quad k=0,\dots m-1\end{cases}$$

Здесь допустимы параметры

$$\boxed{r+|\alpha| \le m,\ r<m,} \quad (++)$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_n$; $D^{(\alpha)} u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Ясно, что не всякое ур-е можно разрешить таким образом относит. старшей производной по t.

Справедлива след. т-ма.

Теорема (Коши-Ковал.) Пусть $\varphi_0, .. \varphi_{m-1}$ аналитич. ф. в окрестн. точки $x = x^0 \in \mathbb{R}^n$; F – аналитич. для всех своих аргум. в окрестности точки $t=0, x=x^0, u=\varphi_0(x^0)$, ... $\frac{\partial^r}{\partial t^r} D^{(\alpha)} u = D^{(\alpha)} \varphi_r(x^0)$. Тогда задача Коши (+) имеет единств. аналитич. реш-е $u(x,t)$ в окрестн. точки $t=0$, $x=x^0$.

Очевидно, что эта теорема гарантирует локальную разрешимость задачи.

Проверим выполнение усл. этой т-мы для наших нестационарных ур-й.

1) $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \ge 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$ $\Rightarrow$ не выполн. усл-я (++) $m=1$, $|\alpha|=2$.

2) $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \ge 0. \\ u|_{t=0} = \varphi(x); & u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$ Здесь $m=2$, $|\alpha|=2$, можно применять теорему К.-К.

Замечание: Имеются различные обобщения этой теоремы. Недостаток – локальность результата. Например, для задачи Коши 2) мы получили формулы глобального по t и x реш-я в случаях $n=1,2,3$.

Лекция 11 (1)

§. Характеристические поверхности.

Пусть дано ур-е II порядка
$$a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \Phi(x,u,\nabla u) = 0,\ x\in\mathbb{R}^n \quad (1)$$
Составим по матрице $\{a_{ij}(x)\}_{i,j\le n}$ ур-е I порядка
$$\boxed{a_{ij}(x)\omega_{x_i}\omega_{x_j} = 0.} \quad (2)$$
Это ур-е называется ур-ем характеристик.
Его можно записать так: $(A(x)\nabla\omega, \nabla\omega) = 0$

Опр. Если существует ф-я $\omega(x_1\dots x_n)$, удовлетворяющая ур-ю (2), причем $|\nabla\omega(x)| \neq 0$, то поверхность, определяемая ур-ем $\omega(x_1,\dots x_n) = c, \quad \forall c\in\mathbb{R}^1$

называется характеристической поверхностью
(if $n=2$ $\Rightarrow$ характеристической линией).

Прежде, чем станет ясно, зачем нам нужно знать что-то о характ. поверхности ур-я (1), покажем, что наше определение корректно, т.е. покажем, что харак тер. пов-ти не меняется при невырожд. замене переменных.

Утв. 1. Характеристическое ур-е инвариантно относит. невырожденной замены переменных.

Док: Определим $y=y(x)$, $\left|\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right| \neq 0$. Тогда пусть $\tilde u(y) = u(x(y))$, $\tilde u_{y_k} = u_{x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_k}$, или $u(x) = \tilde u(y(x))$,
$u_{x_i} = \tilde u_{y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$; $u_{x_ix_j} = \tilde u_{y_ky_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \tilde u_{y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j}$. Подставим производные в новых переменных в ур-е (1):
$$a_{ij}(x(y))\,\tilde u_{y_ky_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \underbrace{a_{ij}\tilde u_{y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j} + \tilde\Phi(x(y),\tilde u,\nabla_y\tilde u)}_{\text{младшие члены}} = 0$$

Определим

$$\tilde{a}_{kl}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j},$$ или коротко

$$\boxed{\tilde{a}_{kl} = a_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}.} \quad (3)$$

Ур-е (1) в новых переменных имеет след. вид

$$\tilde{a}_{kl}(y)\tilde{u}_{y_k y_l} + F(y, \tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) = 0. \quad (4)$$

Формально, ур-е характеристик для ур-я (4) имеет вид

$$\tilde{a}_{kl}(y)\tilde{\omega}_{y_k}\tilde{\omega}_{y_l} = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(y_1, \dots y_n)$. $\Rightarrow$ Сравним ур. (2) и (5), сделав замену перем. в (2). Пусть $\omega(x) = \hat{\omega}(y)$, тогда $\omega_{x_i} = \hat{\omega}_{y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ и ур. (2) принимает вид

$$\underline{a_{ij}}\,\hat{\omega}_{y_k}\underline{\frac{\partial y_k}{\partial x_i}}\,\hat{\omega}_{y_l}\underline{\frac{\partial y_l}{\partial x_j}} = 0; \Rightarrow \tilde{a}_{kl}\hat{\omega}_{y_k}\hat{\omega}_{y_l} = 0,$$

т.е. это ур-е совпадает с ур. (5).

<u>Вывод</u>: При невырожд. замене перем. ур-е хар-к переходит в ур-е хар-к. ∎

Оказалось, что при постановке задачи ~~Коши~~ важно знать, <u>является ли поверхность Коши характеристической</u>. Сначала докажем вспомогат. утв.

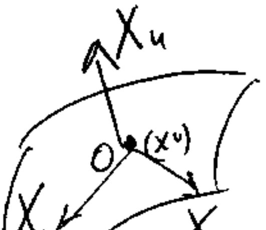
<u>Утв. 2</u>. На поверхности Коши можно вычислить все I производные решения только по данным Коши.

<u>Док-во</u>: Рассм. задачу
$$\begin{cases} a_{ij}u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \\ u|_\Gamma = \varphi;\ \frac{\partial u}{\partial \ell}\Big|_\Gamma = \psi \end{cases} \quad (6)$$

Напомню, что Γ — поверхность, несущая данные Коши (поверхность Коши–Ковалевской), C^1-гладкая гиперповерхность в пр-ве $\mathbb{R}^n$; $\frac{\partial}{\partial e(x)}$ — любое некасательное направление в т. $x \in \Gamma$:

Ур-е (6) требуется решить в окр-ти пов-ти Γ.

Зафиксируем т. $x^0 \in \Gamma$ и построим в ней местн. систему координат $(X_1, .. X_n)$ так, что $x^0 \to$ "0"; $X_1, .. X_{n-1} \in \mathcal{P}_{касат.\ пл.}(x^0)$, $X_n \parallel \vec{N}(x^0)$, где $\vec{N}(x^0)$ — нормаль к пов-ти в т. x^0 (направление нормали фиксир.)



Очевидно, что дифференцирование по касательным напр. X_r, $r \le n-1$, в точке O (т.е. x^0) даёт рав-ва $\left.\frac{\partial u}{\partial X_r}\right|_{(x^0 \to "0")} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_r}$, $r \le n-1$

Далее,

$$\psi(x^0) = \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{x=x^0} = (\nabla u, l) = \frac{\partial u}{\partial X_j} \cdot \cos(l, X_j) =$$

$$= \sum_{j \le n-1} \frac{\partial \varphi(x^0)}{\partial X_r} \cdot \cos(l, X_r) + \frac{\partial u}{\partial X_n} \cdot \underbrace{\cos(l, N(x^0))}_{\neq 0} \Rightarrow \text{отсюда}$$

выражаем $\left.\frac{\partial u}{\partial X_n}\right|_{x=x^0}$. Т.о., мы знаем как через φ и ψ определить все $\frac{\partial u}{\partial X_j}$, $j = 1..n$, в местн. системе коорд. $X_1, .. X_n$.

Вернёмся к исходной системе $(x_1, .. x_n)$, где орты обозначим $e_1, .. e_n$. Тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_\Gamma = (\nabla_X u, e_k) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left.\frac{\partial u}{\partial X_j}\right|_\Gamma}_{\text{эти произв. уже выражены через } \varphi \text{ и } \psi.} \cdot \cos(X_j, e_k)$$

$\Rightarrow$ В исходной системе все I произв. выражаются через φ, ψ. ■

<u>Простой пример</u>: $u = u(x_1, .. x_n, t)$, $t = x_{n+1}$;
$\Gamma = \{t = 0\}$.

Пусть усл-я Коши: $u|_{t=0}=\varphi(x)$; $u_t|_{t=0}=\psi(x)$. (4)

Тогда $u_{x_i}|_{t=0}=\varphi_{x_i}(x)$, $i=1,..n$; $\frac{\partial u}{\partial l}=u_t|_{t=0}=\psi(x) \Rightarrow$

$\nabla u|_\Gamma=(\varphi_{x_1},..\varphi_{x_n},\psi)$. В этой ситуации не треб. переходить к местной сист. координат, "распрямляя" пов. Г.

полный градиент по всем $(x_1,..x_{n+1})$

Теорема. На характеристической поверхности данные Коши связаны некоторым соотношением

Д-во: Пусть пов-сть Коши Г определена в $\mathbb{R}^n$ ур-ем $\xi(x_1,..x_n)=0$, где ξ – достат. гладкая ф-я и (C^2 – гладкая) условия Коши имеют вид

$$u|_\Gamma=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\Gamma=\psi. \qquad (7)$$

Согласно Утв. 2, в $\forall$ системе коорд. все I произв решения задачи Коши (6) можно вычислить на Г через φ и ψ. Т.к. Г – характер. повер., то

$$a_{ij}\,\xi_{x_i}\xi_{x_j}=0. \qquad (8)$$

Введём новые переменные в $\mathbb{R}^n$: $(\xi_1,..\xi_n)$, где $\xi_n=\xi(x)$, а остальные $\xi_1,.\xi_{n-1}$ так, чтобы вся замена была невырожденной, т.е. $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|\neq 0$.

В новых переменных Г определ. ур-ем $\boxed{\xi_n=0.}$ В силу инвариантн. хар. пов-ти относит. замены переменных имеем $a_{ij}(\xi_n)_{x_i}(\xi_n)_{x_j}=0$

Рассм. ур-е $a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\Phi(..)=0$ в новых переменных

$$(9)\quad \tilde a_{kl}(\xi)\tilde u_{\xi_k\xi_l}+\tilde\Phi(..)=0, \text{ где}$$

$\tilde a_{kl}=a_{ij}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}$; в частн. $\tilde a_{nn}=a_{ij}\frac{\partial\xi_n}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_n}{\partial x_j}=0$.

Т.о., в новых переменных ур. (9) принимает вид

$$\underset{0}{\underline{\tilde a_{nn}}}\,\tilde u_{\xi_n\xi_n}+\sum_{(k,l)\ne(n,n)}\tilde a_{kl}\,\tilde u_{\xi_k\xi_l}+\tilde\Phi(\xi,\tilde u,\nabla\tilde u)=0$$

Рассм. это ур-е на Γ:

$$\sum_{(k,l)\ne(n,n)}\tilde a_{kl}\,\tilde u_{\xi_k\xi_l}\Big|_\Gamma+\tilde\Phi(\xi,\tilde u,\nabla\tilde u)\Big|_\Gamma=0. \qquad (10)$$

Очевидно, что II слагаемое в (10) выраж. через φ и ψ (см. Утв. 2). Т.к. $\nabla_\xi\tilde u\big|_\Gamma$ известен и выраж. через φ,ψ, то для неск. ф-ций $g_k(\varphi,\psi)$ имеем равво

$$(\tilde u)_{\xi_k}\Big|_\Gamma=g_k(\varphi,\psi),\quad k=1,\dots n.$$

Дифференцируя это равво по $\xi_1,\dots\xi_{n-1}$ (касат. напр), мы получим равва $(\tilde u_{\xi_k})_{\xi_l}\big|_\Gamma=(g_k(\varphi,\psi))_{\xi_l}$, $l\le n-1$,

т.о. в равве (10) первая сумма на Γ также выражается через φ,ψ и их производные.

$\Rightarrow$ Равво (10) на Γ определяет связь между ф-ями φ,ψ и их производными. $\boxed{}$

<u>Следствие</u> (!) <u>На характеристич. пов-ти нельзя произвольно ставить данные Коши.</u>

<u>Примеры:</u> 1) $\Delta u=f(x)$. Матр $a_{ij}(x)=\delta_j^i$ – символ Кронекера

Хар. ур. (2): $\omega_{x_1}^2+\dots\omega_{x_n}^2=0$, т.е. $\nabla\omega\equiv0\Rightarrow$

$\omega(x)\equiv\mathrm{const}$. не определяет никакой пов-ти в $\mathbb R^n$

$\Rightarrow$ <u>Нет</u> (веществ.) характеристик. (Например, при $n=2$ на практике находим комплексн. хар-ки)

Можно рассм. и более общий случай эллиптич. ур-я. Пусть есть ур-е

$a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \Phi(x,u,\nabla u) = 0$, где

$a_{ij}(x)\theta_i\theta_j = (A\theta,\theta) \geq \nu|\theta|^2$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\forall \theta\in\mathbb{R}^n$; (или $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$)

$\nu = const > 0$.

Это означает, что ур-е в Ω (или в $\mathbb{R}^n$) имеет элл. тип $(n,0,0)$. почему?

Тогда ур. хар-к

$a_{ij}(x)\omega_{x_i}\omega_{x_j} \geq \nu\sum_{i=1}^{n}\omega_{x_i}^2 = \nu|\nabla\omega|^2$. С другой стор. ур-е характ $a_{ij}(x)\omega_{x_i}\omega_{x_j} = 0 \Leftrightarrow \nabla\omega\equiv 0 \Leftrightarrow \omega(x)\equiv const$ — не опред. в $\mathbb{R}^n$ поверх.

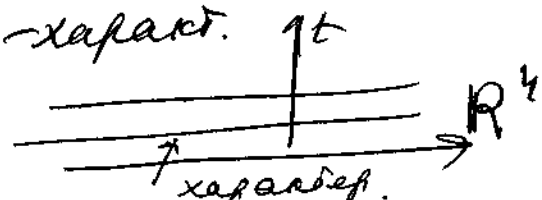
$\Rightarrow$ Эллипт. ур-я не имеют вещ. характ $\Rightarrow$ ставим 2 условия Коши.

2) ур-е теплопроводности $u_t - a^2\Delta u = f(x,t)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$

матр. $\begin{pmatrix} -a^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -a^2 & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$ ур-е хар-к: $-a^2\sum_{i=1}^{n}\omega_{x_i}^2(x,t) = 0$

$\Rightarrow$ т.е. $\omega = \omega(t)$. Мы предполаг., что $|\nabla\omega|\neq 0 \Rightarrow \omega'(t)\neq 0$. Ур-е хар-к $\omega(t) = C$ разрешимо относит. t $\Rightarrow$ можно писать в форме $\boxed{t = const}$

т.е. плоскости $\{t = const\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ — характ.



При расст. нач. усл-й для функ $u(x,t)$ мы ставим усл. на линии $\{t=0\}$, т.е. на характеристике. Если задать II ур. $u_t|_{t=0} = a^2\Delta u + f|_{t=0} = a^2\Delta\varphi + f(x,0) \stackrel{?}{=} \psi(x)$

Т.о., если задать $u|_{t=0} = \varphi$, то этого достаточно, а $u_t|_{t=0} = \psi$ (при произв. ψ) будет противоречиво.

! **Вывод**: Для ур. теплопров. ставим одно усл. $\boxed{u|_{t=0} = \varphi}$

3). Волновое ур-е $u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t)$.

$u = u(x_1,\dots,x_n,t)$, $t = x_{n+1}$.

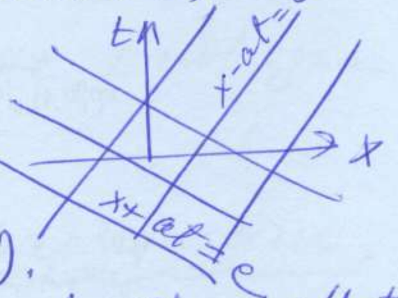
Матрица $a(x,t)$: $\begin{pmatrix} -a^2 & & 0 \\ & \ddots -a^2 & \\ 0 & & +1 \end{pmatrix}$

ур-е харак

$$\boxed{-a^2\sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i}^2 + \omega_t^2 = 0} \quad (11)$$

$x_1 = x,\ x_2 = t$

Это ур-е на практике интегрируется ($n=1$) предварительной заменой перем. Напомню, что получаем хар. линии $\begin{cases} x-at=c \\ x+at=c \end{cases}$

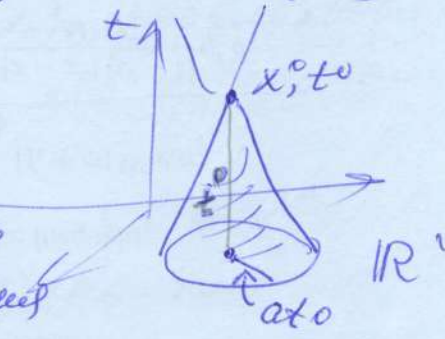


В общем случае ($n>1$) проверяем подстановкой, что ф-я

$\omega(x,t) = |x-x^0| \pm a(t-t^0)$ явл. реш. (11).

Тогда ур-е харак: $\omega(x,t)=0 \Leftrightarrow |x-x^0| = \pm a(t-t^0)$

(Роль произв. постоянной c выполняют коорд. $(x^0;t^0)$ — вершин конусов (2 полости)



Часть конуса $K^-(x^0;t^0)$:

$|x-x^0| = a(t^0-t)$, огранич. плоскостью $\{t=0\}$ играет важную роль в объяснении распространения возмущения в пространстве.

Непосредственно подстановка ф-ции $\omega = t$ в ур. (11) показывает, что она не удовл. этому ур-ю, т.к. $-a^2\cdot 0 + 1 \neq 0$. Следовательно, пл-ти $\boxed{t_0 = const}$ не явл. характер. для волнов. ур-я и при постановке задачи Коши для волн. ур-я требуется задать 2 усл. $\boxed{u|_{t=0} = \varphi;\ u_t|_{t=0} = \psi}$.

Лекция 12

Часть IV. Решение смешанных (нач-кр.) задач методом Фурье.

§1. Смешанная задача для ур-я параболич. типа.

Пусть $Lu = -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u$, где $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $x = (x_1, \dots x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, Ω - огран. область с гладкой гр-цей.

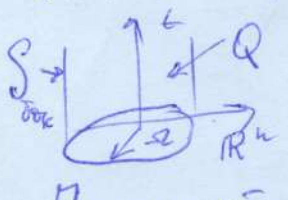
Рассм. задачу для $u(x,t)$, $(x,t) \in Q = \Omega \times (0, \infty)$:

$$(1)\begin{cases} u_t + Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q; \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_{S_{бок}} = \psi(x,t); \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $\alpha, \beta \geq 0$.

главн. матрица

$$\begin{pmatrix} -p(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -p(x) \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ в } \forall \text{ т. } x \in \Omega \text{ тип } (0, n, 1) \text{ - параб.}$$



Частный случай $n = 1$, $\Omega = (0, l)$, $p(x) = a^2$, $q(x) = 0$

$$\Rightarrow (2)\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x,t) \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\Big|_{S_{бок}} = \psi(x,t) \iff \begin{cases} \alpha u_x + \beta u\big|_{\substack{x=l \\ t>0}} = \psi(l,t) \\ -\alpha u_x + \beta u\big|_{\substack{x=0 \\ t>0}} = \psi(0,t) \end{cases} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

<u>Замечание 1</u>. Для реализации метода Фурье важно, что $p = p(x)$, $q = q(x)$ - не зависят от t (!)

Задачи конкретные для ур-я теплопроводности будем решать в след. семестре. Здесь я объясню, как применять метод Фурье для реш-я конкретной задачи при $n = 1$.

(дополнительно) (1а)

Формальная схема метода Фурье (параб. ур.)

① Свести краевое условие (1) к нулевому, т.е. $\psi(x,t)=0$.

② Сделать разделение перем. для реш. $v(x,t)$ модельной задачи: $\begin{cases} v_t + Lv = 0 \text{ в } Q \\ \alpha \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v \Big|_{\partial\Omega \times (0,T)} \end{cases}$ (2) $\quad v(x,t) = g(x)\cdot q(t)$

$$\Rightarrow (2') \begin{cases} q'(t)\cdot g(x) + Lg(x)\cdot q(t) = 0, \; x\in\Omega, t>0; \\ \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial n} + \beta g\right)\Big|_{\partial\Omega} \cdot q(t) = 0. \end{cases}$$

Считаем, что $v \neq 0$ в Ω и $q(t) \neq 0$ при $t>0$

из (2') получаем $\frac{q'(t)}{q(t)} + \frac{Lg(x)}{g(x)} = 0, \; \forall x\in\Omega, t>0$

$$\Rightarrow \frac{Lg(x)}{g(x)} = -\frac{q'(t)}{q(t)} = \lambda \quad \Rightarrow \begin{cases} Lg(x) = \lambda g(x), \; x\in\Omega \\ -q'(t) = \lambda q(t) \end{cases}$$

из краев. усл. (2'):

$$\alpha \frac{\partial g}{\partial n} + \beta g\Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \Rightarrow (*) \begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla g(x)) + q(x) g(x) = \lambda g(x), \; x\in\Omega \\ \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial n} + \beta g\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Задача (*) – зад. о с. числах и с. ф. оператора

$\mathcal{L} g = (Lg, lg|_{\partial\Omega})$, где $lg := \alpha \frac{\partial g}{\partial n} + \beta g$. | В случае $x\in(0,l) = \Omega$;

$\Downarrow$

Задача (*) имеет вид $\begin{cases} -(p(x)g'(x))' + q(x)g(x) = \lambda g(x) \\ l_2 g := \alpha g'(l) + \beta g(l) = 0 \\ l_1 g := -\alpha g'(0) + \beta g(0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ при усл. A_3 и A_2, $\alpha=0$, эта задача исследована, при усл. A_1, $g_k \in C^2[0,l]$

$\exists \{g_k(x)\}$ – п.о.с. в H_L и $L^2(0,l)$,

Для общей задачи (*) можно провести аналог. исследование, полнота сист. $\{g_k(x)\}$ сохраняется, но с. числа $\lambda_k \geq 0$ могут иметь конечную кратность.

③. Рассм. ряд $\sum_{k\geq 0} T_k(t) g_k(x) = u(x,t)$ и;

(15)

подставив в ур-е (1), вывести ур-е для коэфф. $T_k(t)$; формально: $u_t = \sum T_k'(t) g_k(x)$;

$$Lu = \sum_k T_k(t) \underbrace{L g_k(x)} = \sum_k T_k(t) \cdot \underbrace{\lambda_k g_k(x)} \Rightarrow$$

$$\sum_{k\geq 0} \left(T_k'(t) + \lambda_k T_k(t)\right) g_k(x) = \sum_{k\geq 0} \overbrace{\left(f(x,t)\cdot g_k(x)\right)}^{\text{,,}c_k(t)} g_k(x)$$

Скалярно в $L^2(\Omega)$ умножаем это равво на $g_m(x)$, т.е.

$(g_k, g_m) = \int_\Omega g_k(x) g_m(x)\, dx = \delta_m^k$, если $\{g_k\}$ уже нормир. в $L^2(\Omega)$

$\Rightarrow \forall m$ длиие. $\boxed{T_m'(t) + \lambda_k T_m(t) = C_m(t)}$, $\forall m \geq 0$ $(m \geq 1)$

Подставляем $u|_{t=0} = \varphi(x) \Rightarrow \sum_{k\geq 0} T_k(0) g_k(x) = \varphi(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow T_k(0) = \underbrace{(\varphi(x), g_k(x))_{L_2(\Omega)}}_{=\alpha_k} \Rightarrow$ т.о. для $\forall m \geq 0$ получим задачи Коши: (4) $\begin{cases} T_m'(t) + \lambda_m T_m(t) = C_m(t) \\ T_m(0) = \alpha_m \end{cases}$

Решаем задачу (4) $\Rightarrow$

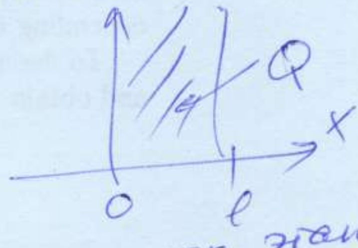
получаем формальный реш $\boxed{u(x,t) = \sum_{k\geq 0} T_k(t) g_k(x)}$ (5)

Далее — обоснование сходим. (5)

Задача. Определить температуру однородного (2)
конечного стержня с постоянным сечением, боковая поверхность которого теплоизолирована, а на торцах поддерживается нулевая температура. В начальный момент температура зависела только от выбора сечения.

Очевидно, что при $t>0$ температура будет меняться от сечения к сечению, т.е. $u = u(x,t)$, $x\in(0,\ell)$. Источники тепла в стержне отсутствуют, т.е. $f(x,t)=0$. Для простоты вычислений будем считать $a^2=1$ в ур. (2). Тогда задача имеет след. вид:

$$(3)\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x,t)\in Q=(0,\ell)\times(0,\infty)\\ u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0, & \\ u|_{t=0} = \varphi(x). & \end{cases}$$



Здесь $\varphi(x)$ — начальн. темпер. в т. $x\in[0,\ell]$.

Решение (пока формальное!) состоит из неск. этапов.

(1) Свести (если нужно) краевые условия к нулевым.
В задаче (3) они уже "0"!

(2) Рассм. упрощенную задачу:
$$(4)\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & \text{в } Q\\ w|_{x=0} = w|_{x=\ell} = 0 \end{cases}$$

Пусть $w(x,t) = g(x)S(t)$, где $g\not\equiv 0$ на $(0,\ell)$, $S(t)\neq 0$, $t>0$, и сделаем разделение перем. в (4):
$$\frac{S'(t)\cdot g(x) - g''(x)S(t)}{S(t)g(x)} = 0 \iff \underbrace{\frac{S'}{S}}_{\text{зав. от } t} = \underbrace{\frac{g''}{g}}_{\text{зав. от } x}$$

Если при произв. значениях перем. t и x выполняется равво, то л. и пр. части равенства — постоянны. Обозначим эту пост. $-\lambda$, т.е.

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = -\lambda \quad \text{и} \quad \frac{g''(x)}{g(x)} = -\lambda;$$

Из краевых усл. (4): $g(0)\underbrace{S(t)}_{\neq 0}=0$; $g(\ell)\underbrace{S(t)}_{\neq 0}=0$

В результате получим задачу

(5) $\begin{cases} g''(x)+\lambda g(x)=0 \\ g(0)=0,\ g(l)=0 \end{cases}$ | Это задача Штурма–Лиув. о собств. числах и ф-ях.

Формально: $\begin{cases} -g''(x)=\lambda g(x) \\ g(0)=0,\ g(l)=0 \end{cases}$ (т.е. $p(x)=1$, $q(x)=0$)

Известно, что $\exists$ счетное мн-во с. чисел $\lambda_k>0$ (находятся из вариац. принципа); с. функции $\{g_k(x)\}$ образуют полную ортогон. сист. в $L^2(0,l)$.

В данном случае $g(x)=c\cos\sqrt{\lambda}x+d\sin\sqrt{\lambda}x$

$g(0)=0=c\cdot 1+d\cdot 0 \Rightarrow c=0; \Rightarrow g(x)=d\sin\sqrt{\lambda}x;\ g(l)=0$

$\Rightarrow \underset{\neq 0}{d}\cdot\sin\sqrt{\lambda}\,l=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,l=\pi k;\ \lambda_k=\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,\ k\in\mathbb{N}$

(Далее исключит. для простоты счёта пусть $l=\pi$) $\Rightarrow$

$\lambda_k=k^2;\quad g_k(x)=d\sin kx.$ Нормируем в $L^2(0,\pi)$:

$1=\int_0^\pi g_k^2(x)\,dx=d^2\int_0^\pi \sin^2 kx\,dx=d^2\int_0^\pi \frac{1-\cos 2kx}{2}\,dx=d^2\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$d^2=\frac{2}{\pi}$, выбираем $d=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Итак, получая О.Н.С.

$g_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx,\ k\in\mathbb{N}$. Это базис для нахожд. решения задачи (3).

Отметим, что для $S(t)$ имеем задачу

$s'(t)=-k^2 S(t) \Rightarrow S_k(t)=c_k e^{-k^2 t}$. Каждое произведение $S_k(t)\cdot g_k(x)$ – удовл. ур-ю (3) и краевым усл-ям.

(3) Представим реш-е $u(x,t)$ зад. (3) в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t}\cdot g_k(x);\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \text{т.е.}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(x)=\varphi(x) \Leftrightarrow c_k$ – коэфф. Фурье ф-ции $\varphi(x)$

$$c_k=(\varphi(x),g_k(x))=\int_0^\pi \varphi(x)\cdot\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin kx\,dx \Rightarrow$$

Таким образом, формальный ряд Фурье имеет вид

$$\boxed{u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\varphi(x)\cdot\sin kx\,dx\right)e^{-k^2t}\cdot\sin kx} \quad (6)$$

Обоснование метода: Назовём классическим реш-ем задачи (3) ф-ю $u\in C(\overline{Q})\cap C^{2,1}_{x,t}(Q)$.

Теорема. Пусть $\varphi\in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2}(0,\pi)$. Тогда ряд (6) определяет классическое реш-е зад. (3) при $l=\pi$.

Д-во: Преобразуем, интегрируя по частям коэфф.

$$a_k=\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx=\int_0^{\pi}\varphi(x)\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)'dx=\int_0^{\pi}\varphi'(x)\frac{\cos kx}{k}\,dx-\underbrace{\varphi\cdot\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}}_{=0}$$

$$=\frac{1}{k}(\varphi',\cos kx)=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\left(\varphi',\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cos kx\right)}_{=b_k}.$$

Здесь b_k – коэфф. Фурье ф-ции $\varphi'\in L^2(0,\pi)$ по нормир., но не полной системе $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos kx\right\}^{k\geq 1}$. По нер-ву Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2\leq\|\varphi'\|^2_{L^2(0,\pi)}=\int_0^{\pi}(\varphi')^2dx<+\infty.$$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$ab=\frac{(a-b)^2-a^2-b^2}{2}$

$\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(a-b)^2}{2}\geq 0$

$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$

Зафиксируем $\forall\, T>0$ и оценим на компакт. мн-ве $\overline{Q^T}=[0,\pi]\times[0,T]$ правую часть ряда (6):

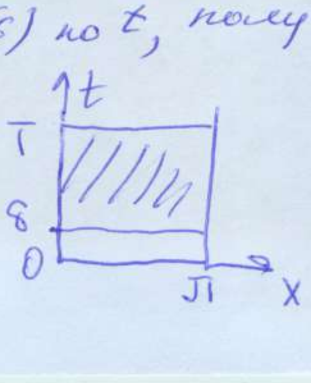
$$|\text{пр. часть}|\leq\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k\geq 1}\frac{|b_k|}{k}\leq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left(b_k^2+\frac{1}{k^2}\right)<+\infty.$$

Ряд (6) из непрер. слагаемых на $\overline{Q^T}$ сход. абс. и равном., определяя по т. Вейерштрасса ф-ю $u\in C(\overline{Q^T})$. Т.к. $T>0$ мы фиксировали произвольно, то $u\in C(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$.

Далее, пусть $\delta>0$ фиксировано и мы рассм. ряд (6) на мн-ве $\overline{\Omega}\times[\delta,T]$.

После формального дифференц. ряда (6) по t, получаем:

$$u_t\sim\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}a_k(-k^2)e^{-k^2t}\cdot\sin kx.$$



Оценим правую часть ряда

$$\Big|\sum_{k\geq 1} a_k k^2 e^{-k^2 t}\sin kx\Big| \leq \sum_{k\geq 1}\frac{|a_k| k^2}{e^{k^2\delta}} \leq \int_0^\pi |\varphi|dx\cdot\sum_{k\geq 1}\frac{k^2}{e^{k^2\delta}} < +\infty$$

Отметим, что мы можем дифф-ть (6) по x и t любое число раз, будем получать мажоранту в виде абсол. сход. числового ряда. Например,

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} u(x,t) \sim \sum a_k e^{-k^2 t} k^m \begin{pmatrix}\sin kx \\ \text{или} \\ \cos kx\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|\text{пр. часть}| \leq \int_0^\pi |\varphi|dx\cdot\sum_{k\geq 1}\frac{k^m}{e^{k^2\delta}} < +\infty.$$

Т. о., ряд (6) при $t\geq\delta$ можно дифф-ть сколько угодно раз $\Rightarrow$ на мн-ве $\overline{\Omega}\times[\delta,T]$ существ. непрер. произв. по x и t всех порядков, т.е. $u\in C^\infty(\overline{\Omega}\times[\delta,T])$. Т.к. $\delta>0$ и $T>0$ фиксированы произвольно, то $u\in C^\infty(\overline{\Omega}\times(0,\infty))$, но непрерывность вплоть до $\{t=0\}$ есть только для u. □

§2. Смешанная задача для ур-я гиперболич. типа.

Пусть $Lu = -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u$, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $Q=\Omega\times(0,\infty)$.

$p(x)\geq p_0>0$, $q(x)\geq 0$;

Найти $u(x,t)$ – реш-е след. задачи:

$$(1)\begin{cases} u_{tt} + Lu = f(x,t), \ (x,t)\in Q; \\ \left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_{S_{бок}} = \psi(x,t) \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x), \ u_t|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{cases}$$

главная матр.

$$\begin{pmatrix} -p(x) & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & -p(x) & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ – тип гиперб. } (1, n, 0)$$

Идею метода рассм. на примере.

Задача. Определить колебания конечной струны с закреплёнными концами, вызванные начальным возмущением.

(6)

Пусть $l=\pi$, $a^2=1$, тогда ур-е колеб. струн

$$(2)\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ (x,t)\in Q=(0,\pi)\times(0,\infty); \\ u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=0; \ u|_{t=0}=\varphi_0(x); \ u_t|_{t=0}=\varphi_1(x) \end{cases}$$

Здесь $\varphi_0(x)$ определяет начальное смещение струны, и $\varphi_1(x)$ – нач. скорость.

① Проверяем, что краевые усл. нулевые.

② Ищем базисную систему на $[0,\pi]$ для будущего ряда. Для этого повторяем процедуру разделения переменных: пусть $w(x,t)=g(x)S(t)$ – реш-е упрощенной задачи: $\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \text{ в } Q \\ w|_{x=0}=w|_{x=\pi}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{S''(t)\cdot g(x)-g''(x)S(t)=0}{S(t)\cdot g(x)} \Rightarrow$$

$\dfrac{S''(t)}{S(t)}=\dfrac{g''(x)}{g(x)}$ при всех значениях $t\geq 0$, $x\in[0,\pi]$, $\dfrac{S''(t)}{S(t)}=-\lambda$ и $\dfrac{g''(x)}{g(x)}=-\lambda$

$\Rightarrow \exists$ постоянная, пусть это $-\lambda$;

из краевых усл. $\left.\begin{matrix} g(0)S(t)\overset{\neq 0}{=}0 \\ g(\pi)S(t)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g(0)=g(\pi)=0. \Rightarrow$

Для ф-ции $g(x)$ получим задачу: найти λ, при которых $\exists$ <u>нетрив.</u> реш-е $g(x)$ (согласно методу мн зачем на $g(x)$)

т.о. $(3)\begin{cases} -g''(x)=\lambda g(x), \ x\in[0,\pi] \\ g(0)=g(\pi)=0. \end{cases}$ Эта задача (3) совпадает с зад. (5) §1. $\Rightarrow$

Получаем $g_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$, $k\in\mathbb{N}$; – полная о.н. сист. в $L^2(0,\pi)$; $\lambda_k=k^2$

Обращаемся к ур-ю для $S(t)$;

$S''(t)+k^2S(t)=0 \Rightarrow$ общее реш-е $S_k(t)=c_k\cos kt+ d_k\sin kt$.

③ Ищем реш-е задачи (2) в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k\geq 1}(c_k\cos kt+d_k\sin kt)\,g_k(x) \qquad (4)$$

Для нахождения коэфф. c_k и d_k обратимся к нач. условиям:

$$u\big|_{t=0} = \sum_{k\geq 1} c_k g_k(x) = \varphi_0(x) \Rightarrow c_k = (\varphi_0, g_k) = \int_0^\pi \varphi_0 g_k\,dx;$$

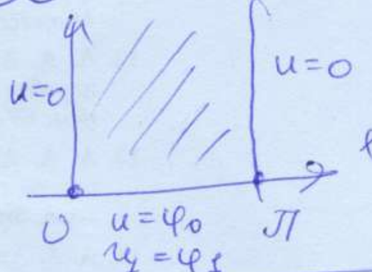
$$u_t\big|_{t=0} = \sum_{k\geq 1}\left(-c_k k\cdot \sin kt + d_k\cdot k\cos kt\right) g_k(x)\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{k\geq 1} \underbrace{k\cdot d_k}_{\text{коэфф. Фурье}}\, g_k(x) = \varphi_1(x) \Rightarrow k\cdot d_k = (\varphi_1, g_k) \Rightarrow$$

$$d_k = \frac{1}{k}(\varphi_1, g_k) = \frac{1}{k}\int_0^\pi \varphi_1(x)\cdot g_k(x)\,dx.$$ Т.о. формальн. ряд

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\int_0^\pi \varphi_0(x)\cdot\sin kx\,dx}_{\alpha_k}\cdot\cos kt + \underbrace{\int_0^\pi \frac{\varphi_1(x)\cdot\sin kx\,dx}{k}}_{\frac{\beta_k}{k}}\cdot\sin kt\Big)\cdot\sin kx. \quad (5)$$

Назовём класс. реш-ем задачи (2) ф-ю $u \in C^2([0,\pi]\times[0,\infty))$.



Как было отмечено в §3 (лекция 10), должны угл. точк выполняться след. усл-я согласов.

$$(*)\ \boxed{\varphi_0(0)=\varphi_0(\pi)=0;\quad \varphi_1(0)=\varphi_1(\pi)=0;\quad \varphi_0''(0)=\varphi_0''(\pi)=0}$$

Для д-ва, что ряд (5) опр. классич. реш-е, потребуем, чтобы

$$\boxed{\varphi_0 \in C^3[0,\pi],\ \varphi_1 \in C^2[0,\pi].} \quad (6)$$

Заметим, что первая очевидная оценка ряда (5) имеет вид

$$|\text{пр. часть}| \leq \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 1}\left(|\alpha_k| + \frac{|\beta_k|}{k}\right). \quad (7)$$

(Все вычисления и оценки на след. лекции)

Лекция 13.

Формальный ряд (5) представляет решение задачи (2). Мы хотим показать, что при выполн. усл. (6) и усл. соглас. (*), $u \in C^2([0,\pi]\times[0,\infty))$.

Очевидно, что при формальном дифференцировании ряда (5) 2 раза в числителе появится коэффициент k^2. Например

$$u_{xx}(x,t) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\alpha_k k^2\cos kt - \frac{\beta_k}{k}\cdot k^2 \sin kt\right)\sin kx$$

Очевидно, что коэфф. α_k и β_k должны достат. быстро убывать, чтобы полученный ряд сходился.

Преобразуем коэфф. α_k и β_k:

1) $\alpha_k = -\int_0^\pi \varphi_0(x)\cdot\left(\frac{\cos kx}{k}\right)' dx = +\int_0^\pi \varphi_0'(x)\frac{\cos kx}{k}dx + \underbrace{\varphi_0\cdot\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^\pi}_{\overset{(*)}{=}0} =$

$= \int_0^\pi \frac{\varphi_0'(x)}{k}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)' dx = +\int_0^\pi \frac{\varphi_0'(x)}{k^2}(\sin kx)' dx = -\int_0^\pi \frac{\varphi_0''(x)}{k^2}\sin kx\,dx +$

$+ \underbrace{\frac{\varphi_0'(x)}{k^2}\sin kx\Big|_0^\pi}_{=0} = +\int_0^\pi \frac{\varphi_0''(x)}{k^2}\left(\frac{\cos kx}{k}\right)' dx = -\int_0^\pi \frac{\varphi_0'''(x)}{k^3}\cos kx\,dx +$

$+ \underbrace{\frac{\varphi_0''(x)}{k^2}}_{\overset{(*)}{0}}\cos kx\Big|_0^\pi = -\frac{(\varphi_0''', \cos kx)}{k^3} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot k^{-3}\underbrace{\left(\varphi_0''', \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos kx\right)}_{a_k},$

здесь a_k — коэфф. Фурье ф-ции φ_0''' по неполной ортонормир. в $L^2(0,\pi)$ системе $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos kx\}$. Верно нер-во Бесселя: $k \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leq \|\varphi_0'''\|^2_{L^2(0,\pi)} < +\infty, \quad (8)$$

$$\boxed{\alpha_k = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{a_k}{k^3};} \quad (9)$$

2) $\beta_k := \int_0^\pi \varphi_1(x)\sin kx\,dx = -\int_0^\pi \varphi_1(x)\left(\frac{\cos kx}{k}\right)' dx = +\int_0^\pi \varphi_1'\cdot\frac{\cos kx}{k}dx$

$- \underbrace{\varphi_1(x)\cdot\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^\pi}_{\overset{(*)}{=}0} = \int_0^\pi \frac{\varphi_1'(x)}{k}\cdot\left(\frac{\sin kx}{k}\right)' dx = -\int_0^\pi \frac{\varphi_1''(x)}{k^2}\sin kx\,dx + 0$

②

$$\Rightarrow \boxed{\beta_k = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, k^{-2} b_k};\quad \left\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin kx\right\} \text{ — полная о. н. с. в } L^2(0,\pi)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \|\varphi_1''\|^2_{L^2(0,\pi)} < +\infty \quad (10)$$

где $b_k = (\varphi_1'', \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin kx)$.

Теперь вернемся к формально продифф. 2 раза по x или t ряду (5):

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{a_k}{k^3}\cos kt + \frac{b_k}{k^3}\sin kt\right)\sin kx. \quad (11)$$

Для $\forall$ фикс. $T>0$ на компл. мн-ве $\overline{Q^T} = [0,\pi]\times[0,T]$ ряд (11) сход. абс. и $\rightrightarrows$ к непрер. сумме ряда (соотв. производной II пор.)

Действит.

$$|(11)| \le \sum\left(\frac{|a_k|}{k} + \frac{|b_k|}{k}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k^2}{2} + \frac{1}{2k^2} + \frac{b_k^2}{2} + \frac{1}{2k^2}\right) < +\infty$$

Т.о. на $\forall\ \overline{Q^T}$ после двукратного дифф-я получим $\exists$ и непрер. u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}. $\Rightarrow u \in C^2(\overline{Q^T}) \Rightarrow u \in C^2([0,\pi]\times[0,\infty))$. $\square$

| Достат. потреб. $\varphi_0''', \varphi_1'' \in L^2(0,\pi)$! |

§. Принцип max для ур-я теплопроводности. Теорема единственности нач-кр. задачи.

Пусть Ω — огран. обл. в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$; $\forall T>0$ фиксир. Обозначим $Q^T = \Omega\times(0,T)$, $S^T = \partial\Omega\times[0,T]$,

$\hat{Q}^T = Q_T \cup \Omega^T$, где $\Omega^\tau = \Omega\times\{t=\tau\}$; $\Gamma^T = S^T \cup \Omega^0 =: $

$=: \partial_p Q^T$ — параболич. гр-ца цилиндра Q^T ("стакан")

Теорема (принцип max). Пусть $u \in C(\overline{Q^T}) \cap C^2(\hat{Q}^T)$ — решение однородного ур-я теплопроводности. Тогда

$$\min_{\partial_p Q^T} u \overset{①}{\le} u(x,t) \overset{②}{\le} \max_{\partial_p Q^T} u, \quad (x,t)\in\overline{Q^T}. \quad (1)$$

<u>Док-во</u>. Достаточно д-ть одно из нер-в (1), предположим нер-во (2). Пусть для реш-я $u(x,t)$ верно (2). Т.к. "$-u(x,t)$" — тоже реш-е однор. ур-я, то для этой ф-ции (2): $-u(x,t) \le \max\limits_{\partial_p Q^T}(-u) \iff$

$\iff u(x,t) \geqslant -\max\limits_{\partial_p Q^T}(-u) = \min u$.

Т.о., мы хотим д-ть нер-во (2).

Обозначим $M = \max\limits_{\overline{Q^T}} u(x,t)$; $\mu = \max\limits_{\partial_p Q^T} u$; $\mu \le M$ очевидно.

Хотим показать, что $\mu = M$.

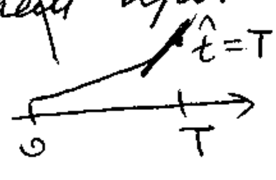
Предположим противное: $\mu < M$ и рассм. вспомогат. ф-ю $v(x,t) = u(x,t) + \frac{(M-\mu)(t^0-t)}{2T}$, где через (x^0,t^0) мы обозн. точку max ф-ции u в $\overline{Q^T}$, т.е. $\max\limits_{\overline{Q^T}} u(x,t) = M = u(x^0,t^0)$. Из предполож. $\mu < M$ следует, что $(x^0,t^0) \in Q^T \cup \Omega^T$.

Заметим, что $v(x^0,t^0) = u(x^0,t^0) = M$, и

$v|_{\Gamma^T} \le \mu + \frac{M-\mu}{2} = \frac{M+\mu}{2} < M$. Т.о., ф-я v достиг. max значения внутри Q^T или на Ω^T. Пусть это точка $(\hat{x},\hat{t})$. В точке max ф-ции v справедливы соотношения: $v_{x_i}(\hat{x},\hat{t}) = 0$, $v_t(\hat{x},\hat{t}) \geqslant 0$, $v_{x_i x_i}(\hat{x},\hat{t}) \le 0$.

$Lv|_{(\hat{x},\hat{t})} = v_t - a^2 \Delta v|_{(\hat{x},\hat{t})} \geqslant 0$, с другой стороны:

$Lv = -\frac{(M-\mu)}{2T} + \underbrace{Lu}_{0} < 0$ $\Rightarrow$ получаем противоречие, т.е.



$\boxed{\mu = M}$. □

<u>Следствие 1</u>. (Теор. ед-ти I начально-краевой зад. для ур. теплопров.)

Пусть $u \in C(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ реш-е задачи $\Longrightarrow$

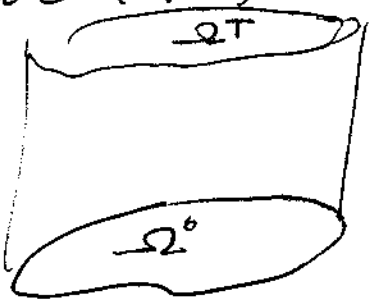
$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x,t), \\ u|_{S_{бок}} = \varphi(x,t), \\ u|_{t=0} = \psi(x), \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $Q = \Omega \times (0,\infty)$.

Предположим, что
$\exists$ 2 решения задачи (3): $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$.
Тогда $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовл. соотнош.

$$(3)\ \begin{cases} w_t - a^2 \Delta w = 0 \quad \text{в } Q \\ w\big|_{S_{бок}} = 0;\ w\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Пусть $T>0$ фикс., тогда $w \in C(\overline{Q^T}) \cap C^2(\widehat{Q^T})$



$w\big|_{\partial_p Q^T} = 0$, w — реш. однородного ур-я теплопров. $\Rightarrow$

$$\min_{\partial_p Q^T} \overset{=0}{w} \le w(x,t) \le \max_{\partial_p Q^T} \overset{=0}{w}$$

в $\overline{Q^T}$. Т.к. $T>0$ — произв.

$\Rightarrow w(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0,\infty)$. $\square$

$\Rightarrow u_1 = u_2$

Упражнение: Из принципа max следует, что

$$\max_{\overline{Q^T}} |u(x,t)| = \max_{\partial_p Q^T} |u|.$$

Док-ть это рав-во.

Следствие 2. Теперь мы можем утв-ть, что построенное в виде ряда реш-е задачи о температ. стержня — единственно (см. §1, ряд (6)).

Теорема единств. для волнового ур-я (I нач.-краев. задача)

Пусть $u \in C^2(\overline{Q})$ решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t),\ (x,t) \in Q; \\ u\big|_{S_{бок}} = \psi(x,t);\quad u\big|_{t=0} = \varphi_0(x);\quad u_t\big|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $S_{бок} = \partial\Omega \times [0,\infty)$, $\partial\Omega$ — кус. гладк.

Теор. В классе $C^2(\overline{Q})$ задача (4) имеет единств. решение.

Док: Зададим $T>0$ и покажем, что справ. ф-ла в $\forall\ \overline{Q^T} = \Omega\times[0,T]$. (5)

Пусть $\exists\ u_1$ и u_2 — реш. зад. (4) $\Rightarrow$ $w = u_1 - u_2$ явл. решением след. задачи

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2\Delta w = 0 & \text{в } Q^T, \\ w\big|_{S^T} = 0, \quad w\big|_{t=0} = w_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Домножим ур-е (5) на произв. $\underbrace{\text{гладкую}}$ пока ф-ю h и проинтегрир. по частям:

$$\int\limits_{Q^T} w_{tt}\cdot h\, dz = a^2 \int\limits_{Q^T} \Delta w\cdot h\, dz \quad (6)$$

$$(\text{л.ч.}) = -\int\limits_{Q^T} w_t\cdot h_t\, dz + \int\limits_{\partial Q^T} w_t h\cdot\cos(\bar n, t)\,dS =$$

$$\cos(\bar n, t)\big|_{S_{\text{бок}}} = 0$$

$$= -\int\limits_{Q^T} w_t h_t\, dz + \int\limits_{\Omega^T} w_t h\, dx - \int\limits_{\Omega^0} w_t h\, dx.$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = (\nabla w, n)$$

$$(\text{пр.ч.}) = -a^2 \int\limits_{Q^T} \nabla w\cdot\nabla h\, dz + \int\limits_{\partial Q^T} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} w_{x_i} \cos(n, x_i)}\, h\, dS$$

$$\cos(n, x_i)\big|_{\Omega^T\cup\Omega^0} = 0$$

$$= -a^2 \int\limits_{Q^T} \nabla w\cdot\nabla h\, dz + \int\limits_{S^T} \frac{\partial w}{\partial n} h\, dS.$$

Положим $h = \int\limits_t^T w(x,\tau)\,d\tau.$

Св-ва ф-ции h:

$$\begin{cases} h\big|_{t=T} = 0; \quad h\big|_{S^T} = \int\limits_t^T w(x,\tau)\big|_{S^T}\, d\tau = 0; \quad h_t = -w(x,t) \\ \Rightarrow w_{x_i}(x,t) = -h_{x_i t}, \quad i\le n. \end{cases}$$

Тогда

$$\text{л.ч.} = \int\limits_{Q^T} w_t w\, dz + 0 - 0 \overset{?}{=} \int\limits_{Q^T} \left(\frac{|w|^2}{2}\right)'_t dz =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{|w(x,T)|^2}{2} dx - \int\limits_{\Omega} \underbrace{\frac{|w(x,0)|^2}{2}}_{=0} dx = \int\limits_{\Omega} \frac{|w(x,T)|^2}{2} dx$$

(6)

$(\text{пр. часть}) = +a^2 \int\limits_{Q^T} \sum_i h_{x_i t} \cdot h_{x_i}\, dz + 0 =$

$= a^2 \int\limits_{Q^T} \left(\frac{\sum_i h_{x_i}^2}{2}\right)'_t dz = \frac{a^2}{2} \int\limits_{\Omega^T} |Dh(x,T)|^2 dx -$

$- \frac{a^2}{2} \int\limits_{\Omega} \frac{|Dh(x,0)|^2}{2} dx.$ Т.к. $h\big|_{t=T} = 0 \Rightarrow h_{x_i}\big|_{t=T} = 0$ $\forall i \le n$

$\Rightarrow$ пр. ч. $= -\frac{a^2}{2} \int\limits_{\Omega} |Dh(x,0)|^2 dx.$

$\Rightarrow (\text{Л.ч.}) - (\text{пр.ч}) = \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |w(x,T)|^2 dx}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{a^2}{2}\int\limits_{\Omega} |Dh(x,0)|^2 dx}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_{\Omega} |w(x,T)|^2 dx = 0$ при $\forall T > 0 \Rightarrow w(x,T) = 0$

$\Rightarrow w(x,t) = 0,\ \forall\, t \geq 0,\ x \in \overline{\Omega};$ $\Leftrightarrow u_1 = u_2$ в $\overline{Q}$. $\square$

~~$\Rightarrow u_1 = u_2$ в $\overline{Q}$~~. **Следствие.** В §2 мы построили гладкое реш-е задачи о колебании струны (см. §2, ф-ла (5)). Из доказанной теор., в частности, следует, что это реш-е единственно.

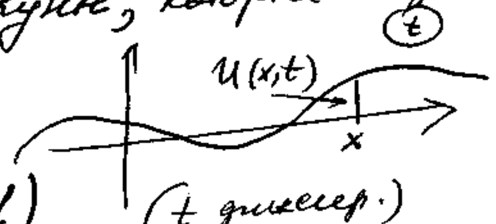
Следующая глава будет посвящена реш-ю задачи Коши для волнового ур-я. В этом семестре мы подробно рассм-м только $n=1$, т.е. задачу о колебании бесконечной струны: $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^1$ $(n=1)$. Кроме того, будет рассм. задача о колебании полуограниченной струны. Эта задача содержательна сама по себе и будет востребована в след. семестре при рассмотрении радиально симметричного распространения возмущения в пр-ве $\mathbb{R}^3$.

Лекция 14.

Часть V. Задача Коши для волнового ур-я.

§1. Задача о колебании ∞ струны. Случай однородного ур-я.

Задача: Определить колебания ∞ струны, которые вызваны начальным возмущением.



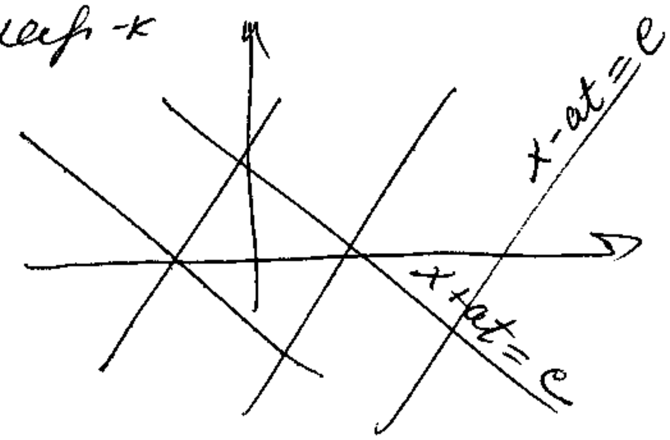
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \ t \geq 0; \\ u|_{t=0} = \varphi(x); \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \qquad (1)$$

Задачу решаем методом характеристик (см. практику). Ур-е характеристик $\boxed{-a^2\omega_x^2 + \omega_t^2 = 0}$ (2) определяет характер. линию на

Пусть $\omega(x,t) = c$

плоскости (x,t). Вдоль этой линии: $d\omega = 0 \Leftrightarrow$ $\omega_x dx + \omega_t dt = 0$. Это равенство приводит к пропорции $\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega_t}{\omega_x}$. Подставляя эту пропорцию в ур. (2) приходим к следующ. ур-ю $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm a \Rightarrow \boxed{x - at = c; \ x + at = c}$ (3)

получаем 2 семейства хар-к при $\forall$ значениях пост. c.



Запишем ур. (1) в характеристич. переменных

$$\boxed{\xi = x - at; \ \eta = x + at,} \quad (4)$$

полагая $u(x,t) = \tilde{u}(\xi(x,t), \eta(x,t)) \Rightarrow$

$$u_x = \tilde{u}_\xi \cdot \xi_x + \tilde{u}_\eta \cdot \eta_x = \tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta; \quad u_t = \tilde{u}_\xi \cdot \xi_t + \tilde{u}_\eta \cdot \eta_t = \tilde{u}_\xi(-a) + \tilde{u}_\eta \cdot (a)$$

и т.д. $\Rightarrow$ $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$

ур-е (1) в характер. переменных (ξ,η) принимает вид $\boxed{\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta)=0.}$ (5)

Такое ур-е можно проинтегрировать последовательно по η и ξ: $\gamma_1(\xi)$

$$(\tilde{u}_\xi)_\eta = 0 \Rightarrow \tilde{u}_\xi(\xi,\eta)=\alpha(\xi); \quad \int \tilde{u}_\xi \, d\xi = \int \alpha(\xi)\, d\xi + \beta(\eta)$$

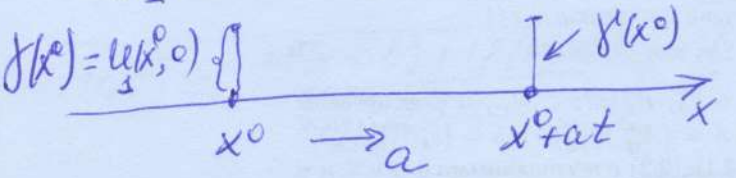
$$\Rightarrow \boxed{\tilde{u}(\xi,\eta)=\gamma(\xi)+\beta(\eta).} \quad (6)$$

Это реш-е ур-я (1) в характ. переменных.

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=\gamma(x-at)+\beta(x+at),} \quad (7)$$

где $\gamma(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ произвольные ф-ции, каждая от одной переменной.

Чтобы понять смысл каждого слагаемого рассм. ф-ю $\gamma(x-at)=u_1(x,t)$. Ф-я смещения u_1 в т. x^0 при $t=0$ равна $u_1(x^0,0)=\gamma(x^0)$



Пусть наблюдатель идёт со скор. a направо из т. x^0. В момент времени t он перейдет в т. $x=x^0+at$. Получаем

$u_1(x,t)=\gamma(\underbrace{x^0+at}_{x}-at)=\gamma(x^0)$. Т.о., возмущение перемещается направо со скор. a. Аналогично ф-я $u_2(x,t)=\beta(x+at)$ определяет перемещ. нач. возмущения со скор. $(-a)$, т.е. налево. Суммируя сказанное, ф-я $u(x,t)$ есть наложение (суперпозиция) двух волн, которые перемещаются направо и налево со скор. a.

Рав-во (7) представляет общее реш-е ур-я (1).

Определим ф-ции $\gamma(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ из начальных условий.

$$u\big|_{t=0} = \gamma(x)+\beta(x)=\varphi(x)$$
$$u_t\big|_{t=0} = \gamma'(x)(-a)+a\beta'(x)=\psi(x)$$

получили систему $2^х$ ур-й.

Интегрируя ур-е (2) получаем: (x^0 – $\forall$ точка)

$$\begin{cases}\gamma(x)+\beta(x)=\varphi(x)\\ \beta(x)-\gamma(x)=\frac{1}{a}\int\limits_{x^0}^{x}\psi(s)\,ds\end{cases}$$

$\Rightarrow$ складывая эти ур-я $\Rightarrow$

$$\cancel{2}\beta(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x^0}^{x}\psi(s)\,ds;$$

теперь из (1) ур-я системы

$$\gamma(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_{x^0}^{x}\psi(s)\,ds \Rightarrow$$

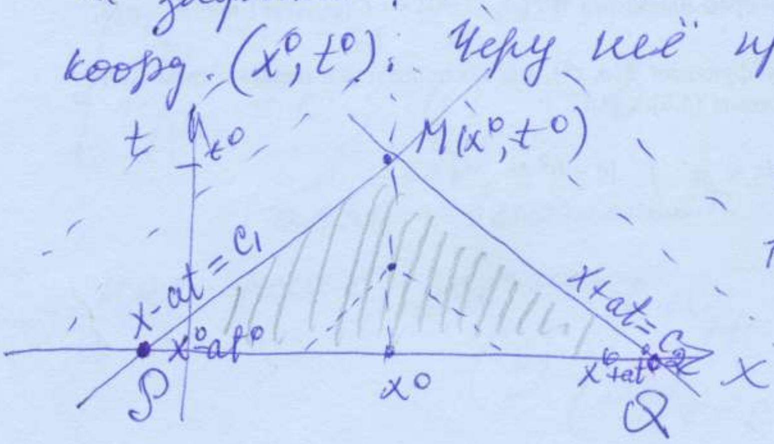
подставим нужные аргументы ф-й $\gamma(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ согласно ф-ле (7):

$$u(x,t)=\left(\frac{\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_{x^0}^{x-at}\psi(s)\,ds\right)+\left(\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x^0}^{x+at}\psi(s)\,ds\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(s)\,ds} \quad (8)$$

Это ф-ла Даламбера

Чтобы понять как происходит распространение возмущения, рассмотрим фазовую плоскость (x,t) и задачке. $\forall$ т. $x^0\in\mathbb{R}^1$. Обозначим M – точку с коорд. (x^0,t^0). Через неё проходят 2 характ. линии



Находим коорд. точек P и Q:

$x^0-at^0=c_1$ $\qquad$ $x^0+at^0=c_2$

т.к. т. $M\in$ этим прямым $\Rightarrow$

$x-at=x^0-at^0$; $P=(x^0-at^0;0)$

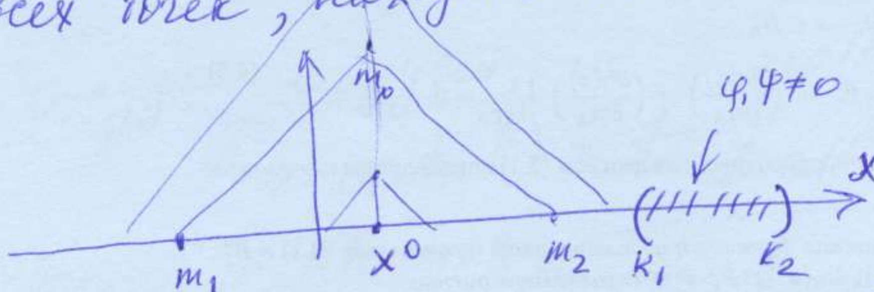
$x+at=x^0+at^0$; $Q=(x^0+at^0;0)$

Ф-лу (8) можно записать так: (4)

$$u(M) = \frac{\varphi(P)+\varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{[PQ]} \psi(s)\,dS \qquad (9)$$

Из (9) видно, что на значение u в т. x^0 в момент времени t^0 влияет информация о нач. возмущении, заданном на интервале $[PQ]$.

Треугольник PMQ назыв. характеристическим. Из сказанного следует, что основание этого треугольника определяет зону влияния для всех точек, находящихся в этом Δ.



Пусть нач. возмущ. было сосредоточено на отрезке (k_1, k_2). Тогда ~~на m_1, m_2~~ в $\Delta\, m_1 m_0 m_2$ $u\equiv 0$.

Замечание. Чтобы ф-ла Даламбера определяла классич. реш-е задачи (1), следует потребовать $\varphi\in C^2(\mathbb{R}^1)$ и $\psi\in C^1(\mathbb{R}^1)$.

§2. Случай неоднородного ур-я. Метод Дюамеля.

Этот метод можно использ. и для других задач Коши. !!!

Пусть требуется решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^1,\ t\geq 0; \\ u|_{t=0}=0; \quad u_t|_{t=0}=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Рассм. вспомогат. ф-ю $w(x,t;\tau)$ при $\forall\tau>0$ фиксир. как реш-е задачи

$$(2)\ \begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0, & x\in\mathbb{R}^1,\ t\geq\tau; \\ w|_{t=\tau}=0; \quad w_t|_{t=\tau}=f(x,\tau). \end{cases}$$

Сделаем замену перем. $t \to \hat{t} = t - \tau$;
пусть $\tilde{\omega}(x, \hat{t}; \tau) = \omega(x, \hat{t} + \tau; \tau) = \omega(x, t; \tau)$, тогда задача (2) принимает вид

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{\hat{t}\hat{t}} - a^2 \tilde{\omega}_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \ \hat{t} \geq 0; \\ \tilde{\omega}\big|_{\hat{t}=0} = 0; \quad \tilde{\omega}_{\hat{t}}\big|_{\hat{t}=0} = f(x, \tau). \end{cases} \qquad (3)$$

По ф-ле Даламбера ($\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = f(x, \tau)$)
получаем

$$\tilde{\omega}(x, \hat{t}; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x - a\hat{t}}^{x + a\hat{t}} f(s, \tau)\, ds,$$

откуда следует, что

$$\omega(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f(s, \tau)\, ds. \qquad (4)$$

Покажем, что ф-я

$$(5) \quad u(x, t) = \int_0^t \omega(x, t; \tau)\, d\tau$$

– решение задачи (1).

Действительно,
$u\big|_{t=0} = 0$; $\quad u_t(x, t) = \underbrace{\omega(x, t; t)}_{=0, \text{ т.к. } \omega|_{t=\tau} = 0 \text{ (см. (2))}} + \int_0^t \omega_t(x, t; \tau)\, d\tau$

$\Rightarrow u_t\big|_{t=0} = 0.$

Далее, $u_{tt}(x, t) = \omega_t(x, t; t) + \int_0^t \omega_{tt}(x, t; \tau)\, d\tau =$

$= \omega_t\big|_{t=\tau} + \int_0^t a^2 \omega_{xx}\, d\tau = f(x, t) + a^2 \left(\int_0^t \omega\, d\tau \right)_{xx} = f(x, t) +$

$+ a^2 u_{xx}$, т.е. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$, что и т.д.

Теперь подставляем (4) в (5) и получаем:

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f(s, \tau)\, ds \right) d\tau} \qquad (6)$$

решение задачи (1).

Общий случай:

$$(7)\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & x\in R^1, t\geq 0;\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x), & u_t\big|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

Представим $u=v+w$, где v и w — реш-я след. задач:

$$(8)\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, & x\in R^1, t\geq 0;\\ v\big|_{t=0}=\varphi(x), & v_t\big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases} \qquad\Big\| \qquad (9)\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=f(x,t);\\ w\big|_{t=0}=0, \ w_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

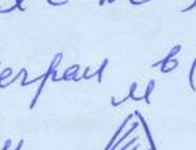
Решение зад. (8) получаем по ф-ле Даламбера (§1, ф.(8)); решение (9) представлено ф-лой (6) этого §.

Итого: решение задачи (7):

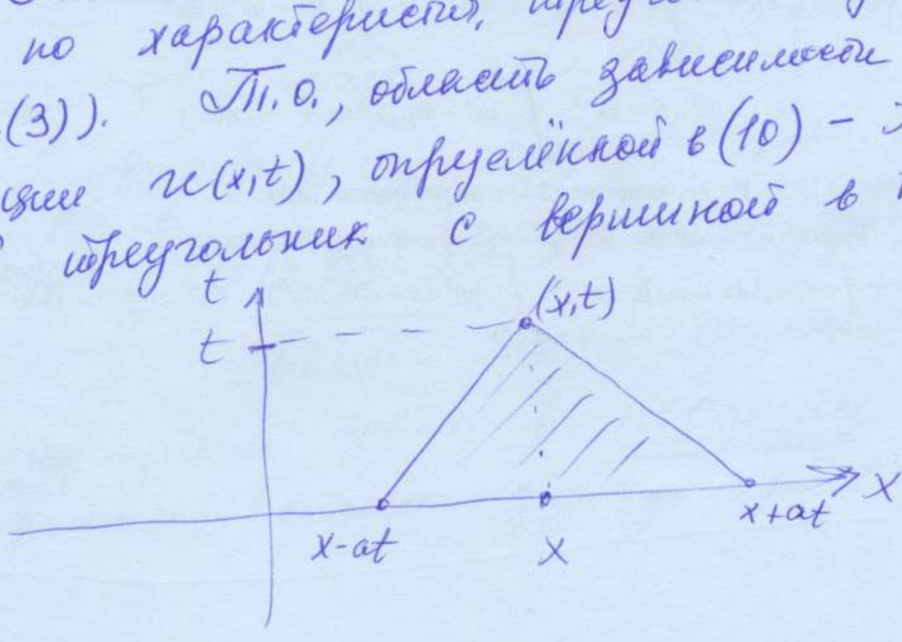
$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\Big(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\Big)d\tau. \qquad (10)$$

Замечание: Чтобы ф-ла (10) представляла класс. реш. $u\in C^2(\mathbb{R}^1\times\{t\geq 0\})$ задачи (7) следует потребовать, чтобы $\varphi\in C^2(\mathbb{R}^1)$, $\psi\in C^1(\mathbb{R}^1)$, f и $f'_x\in C^1(R^1\times\{t\geq 0\})$.

! Единственность класс. реш-я задачи (7) будет доказана сразу для всех размерностей $x\in\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$.

Отметим, что последний интеграл в (10) вычисл. по характеристич. треугольнику 

(см. ф.(3)). Т.о., область зависимости для ф-ции $u(x,t)$, определённой в (10) — характеристический треугольник с вершиной в т. (x,t):



Замечание. Как было отмечено, метод Дюамеля дает возможность определить решение задачи Коши для неоднородного ур-я, если уже известно решение задачи с $f=0$. В след. семестре мы будем пользоваться этим подходом.

Пример: Задача Коши для ур-я теплопроводности

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, \ n \geq 1, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) & (**) \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Пусть известно реш-е задачи

$$(*) \begin{cases} v_t - a^2 \Delta v = 0 \\ v\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

(Мы выведем ф-лу этого реш-я в след. семестре.)

$\boxed{u = v + w}$

Чтобы найти методом Дюамеля реш-е задачи

$$\begin{cases} w_t - a^2 \Delta w = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, \ n \geq 1; \ t \geq 0, \\ w\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

следует для $\forall$ фикс. $\tau > 0$ рассм-ть вспомог. задачу

$$\begin{cases} \omega_t - a^2 \Delta \omega = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \ t \geq \tau; \\ \omega\big|_{t=\tau} = f(x,\tau). \end{cases}$$

Перейти к ф-ции $\tilde{\omega}(x, \hat{t}; \tau)$, $\hat{t} = t - \tau$, и воспользоваться тем, что известно реш. $(*)$. Тогда

$$w(x,t) = \int_0^t \omega(x,t;\tau)\,d\tau \text{ — реш. задачи } (**).$$

Общая идея — снести правую часть неоднородного ур-я в последнее усл. Коши и решить вспомог. задачу при $t \geq \tau$.

Лекция 15.

§3. Распространение волн на полуограниченной прямой.

Пусть один конец струны ($x=0$) перемещается в вертик. направлении по закону $\mu(t)$, а второй - уходит в ∞. Задано начальное возмущение. Определить смещение $u(x,t)$, $x\geq 0$, $t>0$.

$\mathcal{P}=(0,\infty)\times(0,\infty)$;

$$(1)\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad (x,t)\in\overline{\mathcal{P}}; \\ u|_{x=0}=\mu(t); \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$$

Будем искать реш-е $u\in C^2(\overline{\mathcal{P}})$. В точке $(0,0)\in\overline{\mathcal{P}}$ ставим условия согласования вплоть до II порядка.

$\varphi(0)=\mu(0)$ (2)

$\mu'(0)=\psi(0)$ (3)

$\mu''(0)=a^2\varphi''(0)$ (4)

Решение $u=v+w$, где

$$(5)\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, \quad (x,t)\in\overline{\mathcal{P}}; \\ v|_{x=0}=0; \quad v|_{t=0}=\varphi(x), \quad v_t|_{t=0}=\psi(x); \end{cases}$$

w — реш-е задачи

$$\left.\begin{aligned} &w_{tt}-a^2w_{xx}=0, \quad (x,t)\in\overline{\mathcal{P}}; \\ &w|_{x=0}=\mu(t); \quad w|_{t=0}=w_t|_{t=0}=0 \end{aligned}\right\} (6)$$

Задача 5. Начнем с формального продолжения (не следим за гладкостью) нечётно ф. φ и ψ на мн-во $\{x<0\}$:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0,\\ -\varphi(-x), & x<0,\end{cases}\quad \Bigg\| \quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0,\\ -\psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

Для ф-й $\Phi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$ рассм. задачу о колебании ∞ струны:

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2 v_{xx}=0, & x\in\mathbb{R}^1,\ t\geq 0;\\ v\big|_{t=0}=\Phi(x), & v_t\big|_{t=0}=\Psi(x).\end{cases}\quad (7)$$

Согласно ф-ле Даламбера

$$v(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(s)\,ds.\quad (8)$$

Покажем, что при $x\geq 0$, $t\geq 0$, ф-я v удовл. всем условиям (5), кроме уравнения (!)

Действительно,

$$v\big|_{x=0}=\frac{\Phi(at)+\Phi(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at}\Psi(s)\,ds=0+0,$$

используем нечётность Φ и Ψ.

$$v\big|_{t=0}=\frac{\Phi(x)+\Phi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x}^{x}\Psi\,ds=\Phi(x)\underset{\{x\geq 0\}}{=}\varphi(x).$$

$$v_t\big|_{t=0}=\frac{\Phi'(x+at)\cdot a-a\,\Phi'(x-at)}{2}\Bigg|_{t=0}+\frac{1}{2a}\Big\{\Psi(x+at)\cdot a-$$

$$-\Psi(x-at)(-a)\Big\}\Big|_{t=0}=0+\frac{1}{2}\cdot 2\,\Psi(x)=\Psi(x)\underset{\{x\geq 0\}}{=}\psi(x).$$

Распишем решение задачи (8) при $x>0$ на множествах $\{x-at\geq 0\}$ и $\{x-at<0\}$:

$$v(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds, & \text{if } x-at\geq 0;\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)\,ds, & \text{if } x-at<0.\end{cases}\quad (9)$$

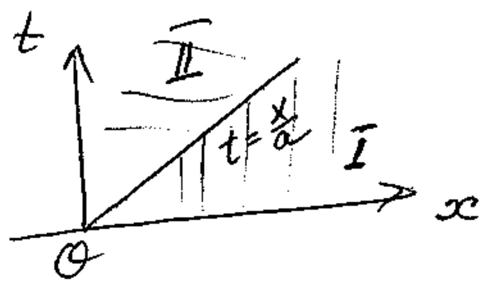
Покажем, как получается интеграл во II строке ф-лы (9).

Из (8) ~~при~~ получаем при $x-at<0$:

$$\int_{x-at}^{x+at}\Psi(s)\,ds=\int_{x-at}^{0}\Psi(s)\,ds+\int_{0}^{x+at}\underbrace{\Psi(s)}_{\psi(s)}ds=-\int_{x-at}^{0}\Psi(-s)\,ds+\int_{0}^{x+at}\psi(s)\,ds$$

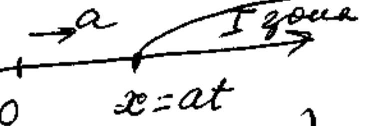
$$\underset{\substack{(\tau=-s)\\ \tau>0}}{=}\int_{at-x}^{0}\Psi(\tau)\,d\tau+\int_{0}^{x+at}\psi(s)\,ds=\int_{at-x>0}^{0}\psi(\sigma)\,d\sigma+\int_{0}^{x+at}\psi(s)\,ds=$$

$$=\int_{0}^{x+at}\psi(s)\,ds-\int_{0}^{at-x}\psi(s)\,ds=\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)\,ds,\ \text{ч.т.д.}$$



Очевидно, что согласно рав-ву (9) в I зоне решение $v(x,t)$ представляется ф-лой Даламбера, т.е. возмущение распростран. так, как при колебании ∞ струны (нет влияния краевого условия).

$\Rightarrow$ Влияние краевого условия распространяется из точки O направо со скоростью a:



(до момента $t=\frac{x}{a}$ в т. x нет влияния краев. усл.)

Этот факт подсказывает, что решение задачи (6) следует искать в форме $w(x,t)=f(x-at)$.

Из краев. усл.: $w|_{x=0}=f(-at)=\mu(t)$, т.е. $f(z)=\mu(-\frac{z}{a})$

$$\Rightarrow w(x,t)=f(x-at)=\mu\left(-\frac{(x-at)}{a}\right)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

Это формально, но $\mu(\cdot)$ определена на R^1_+, т.е. при $t-\frac{x}{a}<0$ она не определена.

Положим: $\mu(\tau)=0$ при $\tau<0$.

Проверим теперь нач. усл-я для w:

$$w\big|_{t=0} = \mu\left(-\frac{x}{a}\right) \underset{\{x>0\}}{=} 0\ ; \quad w_t\big|_{t=0} = \mu'\left(-\frac{x}{a}\right) \underset{\{x\geq 0\}}{=} 0.$$

Т.о., все усл-я, кроме ур-я, для $w(x,t)$ выполнены:

$$w(x,t) = \begin{cases} 0, & x \geq at; \\ \mu\left(t-\frac{x}{a}\right), & x < at. \end{cases} \quad (10)$$

Т.к. $u = v + w$, то из (9) + (10) получаем

$$\underset{\{x\geq 0,\ t\geq 0\}}{u(x,t)} = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds, & x-at \geq 0; \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(s)\,ds, & x-at < 0. \end{cases}$$

ф-ла (11)

Все усл. выполнены для u, т.к. мы их проверили для v и w.

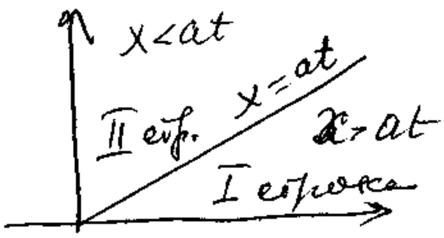
Осталось проверить, что $u \in C^2(\bar{P})$.

Справедлива след. утв-е.

<u>Теорема</u>. <u>Пусть</u> $\varphi, \mu \in C^2\{x \geq 0\}$; $\psi \in C^1\{x \geq 0\}$, <u>и</u> <u>выполнены усл-я соглас.</u> (2) – (4). <u>Тогда</u> ф-ла (11) <u>представл.</u> реш-е $u \in C^2(\bar{P})$ <u>задачи</u> (1).

<u>Д-во</u>: При сделанных усл-х гладкости ф-ий φ, ψ и μ, можно утв-ть, что в зоне I и II ф-я $u(x,t)$ – C^2-гладкая. Требуется пок-ть, что u и её произв. по x и t до II порядка включит. <u>непрерывны</u> при переходе через линию $x = at$.

Проверим непрер. $u(x,t)$ при $x \to at+0$ и $x \to at-0$.



$$u(x,t)\Big|_{x\to at+0} = \frac{\varphi(2at)+\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{2at}\psi\,d\xi.$$

$$u(x,t)\Big|_{x\to at-0} = \mu(0) + \frac{\varphi(2at)-\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{2at}\psi\,d\xi.$$

Скачок $[u]_{x=at} = \varphi(0)-\mu(0)=0$ (по усл. согл. (2)).

$\Rightarrow u\in C(\overline{\mathcal{P}})$.

Далее, покажем, что $[u_x]_{x=at}=0$:

$$u_x\Big|_{x\to at+0} = \frac{\varphi'(2at)+\varphi'(0)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\psi(2at)-\psi(0)\right]$$

$$u_x\Big|_{x\to at-0} = \mu'(0)\left(-\frac{1}{a}\right)+\frac{\varphi'(2at)+\varphi'(0)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\psi(2at)+\psi(0)\right]$$

$[u_x]_{x=at} = \frac{1}{a}\left(\mu'(0)-\psi(0)\right)=0$ — по усл. соглас. (3).

Сами: $[u_{xx}]_{x=at}=0$; $[u_{xt}]_{x=at}=0$;

$[u_t]_{x=at}=0$ — по усл. соглас. □

Конец семестра !!!

А. Архипов