

# Listas de Vibrações

Victor Locatelli

25 de abril de 2020

## Lista 2

**Questão 1** — Uma barra de torção da suspensão traseira do fusca, possui um comprimento de 40 cm e o diâmetro de 40 mm, sendo feita de ferro fundido dúctil. Tendo o veículo 800 kg e considerando que seu peso se distribua igualmente nas 4 rodas, determine sua rigidez elástica da barra de torção.

### Resolução:

Dados:  $m = 800\text{kg}$ ;  $l = 40\text{ cm}$ ;  $d = 40\text{ mm}$ ;

material: ferro fundido dúctil;

$E = 168,9\text{ GPa}$ ;  $G = 9,4\text{ GPa}$ ;  $\rho = 6,9\text{ Mg/m}^3$

Eixo oco:

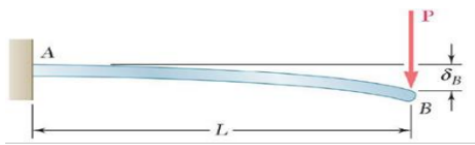
$$k_{eq} = \frac{\pi G \times (D^4 - d^4)}{32 L}$$

Eixo simples:

$$\begin{aligned} k_{eq} &= \frac{\pi \cdot G \cdot (D^4)}{32 L} = \\ &= \frac{\pi \cdot 9,4 \cdot (40 \times 10^{-3})^4}{32 \cdot 0,04} = 5906,2\text{ N/m} \end{aligned}$$

**Questão 2** — Uma viga mono engastada de seção transversal uniforme, suporta uma carga estática de 200kg, aplicada na extremidade B, sofrendo uma deflexão  $\delta$ . Sabendo que  $L = 3,5\text{ m}$ , feita em aço carbono com perfil quadrado de 3 mm de lado, determine:

- constante elástica de mola equivalente da viga
- após a colocação de uma mola na extremidade da viga a deformação reduziu 25%, qual a constante elástica desta mola instalada?



### Resolução:

Dados: viga mono engastada  $m = 200\text{kg}$   $L = 3,5\text{ m}$ , aço carbono, perfil quadrado  $a = 3\text{ mm}$ ;  $E = 206,8\text{ GPa}$ ;  $G = 11,7\text{ GPa}$

$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{(3 \times 10^{-3})^4}{12} = 6,75 \times 10^{-12}\text{ m}^4$$

**item a** — Antes de colocar a mola. Substituindo dados na equação:

$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3} = 0,098\text{ N/m}$$

**item b** — Após colocação da mola.  $W = 200\text{kg} \times 9,81 = 1962\text{ N}$

$$\delta_{sis} = 0,75\delta_0 = 0,75 \frac{WL^3}{3EI}$$

Substituindo os dados, a deformação do sistema fica:

$$\delta_{sis} = 15065,7\text{ m}$$

Sabendo que  $W = k_{eq} \times \delta$ ,

$$k_{eq} = \frac{1962}{15065,7} = 0,13\text{ N/m}$$

**Questão 3** — Um eixo da hélice de propulsão de um navio, é feito de aço carbono oco, o qual possui o diâmetro interno de 10 cm e o externo de 25 cm e comprimento de 2 m.

- Determine a rigidez equivalente deste eixo.
- Devido a constantes problemas de corrosão, o mesmo foi substituído por um eixo de aço inox, sendo que na parte oca, foi introduzido um material feito de ferro fundido cinzento. Analisando somente com relação à rigidez elástica. O novo eixo é equivalente ao original? Justifique.

### Resolução:

**item a** — O eixo é oco e sob torção:

$$k_t = \frac{\pi G (D^4 - d^4)}{32L} \quad (1)$$

Substituindo os dados na equação, obtemos:

$$k_t = 2,18 \times 10^6\text{ N/m}$$

**item b** — A fazer.

**Questão 4** — Uma viga de ferro fundido cinzento, é montada em balanço em uma máquina, e suporta uma carga de 45 kg. Para reduzir sua deformação foi montado dois apoios de molas em sua extremidade, conforme ilustrado na figura abaixo. Tendo as molas rigidez de 150 N/m cada, e o comprimento da viga é de 150 cm, sendo esta um perfil circular de diâmetro igual a 10 cm. Determine:

- A rigidez do sistema de sustentação do equipamento.
- Qual a flexão do sistema em mm.

### Resolução:

**item a** — Rigidez do sistema: (associação em paralelo)

$$k_{eqmola} = k_1 + k_2 = 300\text{ N/m}$$

$$k_{eqbarra} = \frac{3EI}{L^3}$$

A rigidez equivalente do sistema será:

$$k_{eqsis} = k_{eqmola} + k_{eqbarra}$$

$$k_{eqsis} = 451,58 \text{ kN/m}$$

**item b** – A deformação será:

$$W = k\delta$$

$$\delta = \frac{W}{k} = \frac{441,45 \text{ N}}{451,58 \times 10^3 \text{ N/m}} = 0,98 \text{ mm}$$

**Questão 5** – Um guindaste de construção civil, trabalha com um sistema de 2 cabos de aço-carbono para elevação de carga, considerando que ele pode atuar com altura máxima de 30 m e tendo os cabos o diâmetro de 20 mm, sendo o guindaste capaz de elevar até 1 tonelada, considere o caso extremo e responda: Determine a rigidez elástica do sistema.

#### Resolução:

A carga atuante é dada por:

$$W = 1000 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 = 9810 \text{ N}$$

Situação extrema:  $L = 30 \text{ m}$

Momento de inércia:

$$I = \frac{\pi \cdot 20^4}{64} = 7853,98 \text{ mm}^4$$

Cabo sob carregamento axial. Referência: RAO pg 14:

$$k_r = \frac{AE}{L} = \frac{\pi d^2 E}{4L} = \frac{\pi (20 \times 10^{-3})^2 \cdot 206,8 \times 10^9}{4 \cdot 30}$$

$$k_r = 2,16 \text{ MN/m}$$

Como são dois cabos associados em paralelo, temos:

$$k_{eq} = 2 \times k_r = 4,32 \text{ MN/m}$$

**Questão 6** – Duas viga de ferro fundido cinzento, é montada em balanço, sobre elas é montado um condensador de ar condicionado, cuja massa é de 25 kg. Sendo o comprimento da viga é de 50 cm, tendo esta um perfil quadrado de aresta igual a 2 cm. Considere que a carga esteja aplicada na extremidade da viga. Determine a flexão sofrida por cada viga em mm.

#### Resolução:

$$W = 25 \times 9,81 = 245,25 \text{ N}$$

$$E = 103,4 \text{ GPa}; I = \frac{a^4}{12} = 13,33 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \cdot 103,4 \times 10^9 \cdot 13,33 \times 10^{-9}}{0,5^3}$$

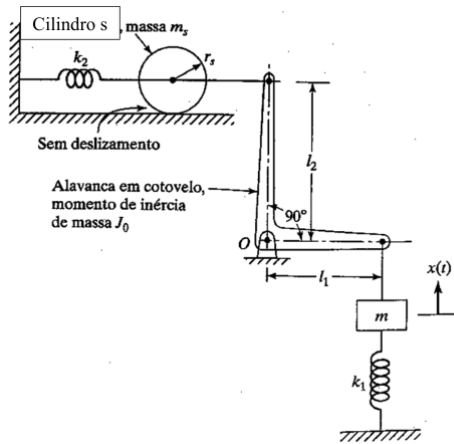
$$k_{eq} = 8269,9 \text{ N/m}$$

$\delta = \frac{W}{k}$ ; como são duas vigas, a carga  $W$  é dividida.

$$\delta = \frac{245,25}{2 \cdot 8269,9} = 0,0148 \text{ m} = 14,8 \text{ mm}$$

## Lista 3

**Questão 1** — Analisando a figura abaixo e considerando que entre o cilindro “s” e a superfície não tenha deslizamento, encontre a massa equivalente para o sistema; considerando como referência o cilindro s.



### Resolução:

As equações que regem o sistema são:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s \cdot \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2} J_s \theta_s^2 + \frac{1}{2} J_0 \theta_0^2 + \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$

$$E = \frac{1}{2} m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \cdot \dot{x}_s^2$$

Encontrando termos em comum para substituir nas equações...

$$\dot{x}_s = \dot{\theta}_s \cdot r_s \rightarrow \dot{\theta}_s = \frac{\dot{x}_s}{r_s}$$

Velocidade angular em  $\dot{\theta}_0$ :

$$\theta_0 = \frac{\dot{x}_s}{l_2}$$

$$\dot{x} = \theta_0 \cdot l_1 \rightarrow \dot{x} = \frac{\dot{x}_s}{l_2} \cdot l_1$$

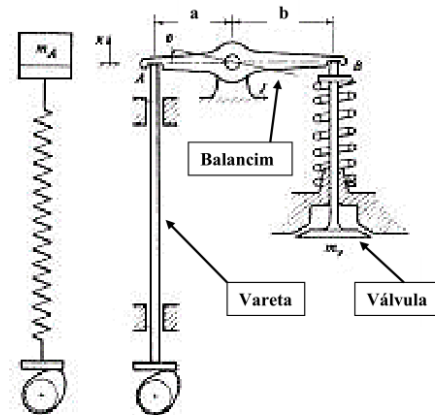
Substituindo na equação principal, temos:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s \cdot \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2} J_s \cdot \left( \frac{\dot{x}_s}{r_s} \right)^2 + \frac{1}{2} J_0 \cdot \left( \frac{\dot{x}_s}{l_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\dot{x}_s \cdot l_1}{l_2} \right)^2$$

Multiplicando ambos os lados da equação por 2 e dividindo por  $\dot{x}_s$  cancela-se esses termos obtendo a equação:

$$m_{eq} = m_s + J_s \cdot \frac{1}{r_s^2} + J_0 \cdot \frac{1}{l_2^2} + \frac{l_1^2}{l_2^2}$$

**Questão 2** — Analisando a figura abaixo, que representa um sistema de acionamento de válvula de um motor de combustão interna, encontre a massa equivalente para o sistema; tendo como referência a vareta.



### Resolução:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_b \theta_b^2 + \frac{1}{2} m_v \cdot \dot{x}_v^2 \quad (2)$$

$$\dot{\theta}_b = \frac{\dot{x}}{a} ; \dot{\theta}_b = \frac{\dot{x}_v}{b}$$

Igualando uma com a outra e isolando  $\dot{x}_v$ :

$$\dot{x}_v = \frac{\dot{x}}{a} \cdot b \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2):

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_b \cdot \left( \frac{\dot{x}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} m_v \cdot \left( \frac{\dot{x} \cdot b}{a} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} m_{eq} \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_b \cdot \left( \frac{\dot{x}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} m_v \cdot \left( \frac{\dot{x} b}{a} \right)^2$$

$$m_{eq} = m + \frac{J_b}{a^2} + m_v \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

## Lista 4

**E 2.1** – Constata-se que uma viga simples bi engastada com seção transversal quadrada de 5 mm x 5 mm e comprimento de 1 m, que suporta uma massa de 2,3 kg em seu ponto médio tem uma frequência natural de vibração transversal de 30 rad/s. Determine o módulo de Young (Elasticidade) da viga.

### Resolução – 2.1

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \quad (4)$$

Em que  $\omega_n$  é frequência natural;  $g$  é gravidade e  $\delta_{st}$  é a deformação.

Isolando a equação 4 para  $\delta_{st}$  obtemos:

$$\delta_{st} = \frac{g}{\omega_n^2}$$
$$\delta_{st} = \frac{9,81}{30^2} = 0,0109 \text{ m}$$

Cálculo de  $k$  (coeficiente elástico)  $W = k \cdot \delta_{st}$

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{2,3 \cdot 9,8}{0,0109} \rightarrow k = 2049,1 \text{ N/m}$$

O momento de inércia para uma seção transversal quadrada é:

$$I = \frac{a^4}{12} \quad (5)$$
$$I = \frac{0,005^4}{12} \rightarrow I = 5,208 \times 10^{-11} \text{ m}^4$$

A resistência elástica equivalente para uma viga bi-engastada com carga no meio é:

$$k_{eq} = \frac{192 \cdot E \cdot I}{L^3} \rightarrow E = \frac{k_{eq} \cdot L^3}{192 \cdot I}$$
$$E = \frac{2049,1 \text{ N/m} \cdot 1^3 \text{ m}^3}{192 \cdot 5,208 \times 10^{-11} \text{ m}^4}$$
$$E = 205 \text{ GPa}$$

**E 2.2** – Um corpo de massa desconhecida é colocado sobre uma mola sem peso, que se comprime 2,54 cm. Determine (a) a frequência natural de vibração do sistema massa-mola em rad/s e em Hz e (b) o período natural.

### Resolução – 2.2

mola sem massa associada com um corpo de massa desconhecida. Como a massa é desconhecida, a carga atuante será  $W = 9,81m\text{N}$

**item a** – Frequência natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,0254}} = 19,65 \text{ rad/s}$$

Converter de rad/s para Hz:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{19,65}{2\pi} = 3,127 \text{ Hz}$$

**item b** – Período natural:

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{3,127} = 0,32 \text{ s}$$

**E 2.3** – Quando um colar de 3 kg é colocado sobre o prato que é preso à mola de rigidez desconhecida, observa-se que a deflexão estática adicional do prato é de 42 mm. Determine a constante da mola  $k$  em N/m.

### Resolução – 2.3

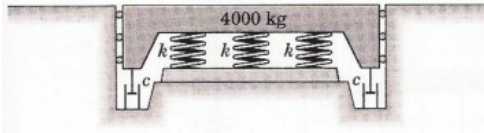
$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado e isolando  $k$ , temos:

$$\frac{g}{\delta_{st}} = \frac{k}{m} \rightarrow k = m \times \frac{g}{\delta_{st}}$$
$$k = 3 \text{ kg} \times \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{0,042 \text{ m}} \rightarrow k = 700,7 \text{ N/m}$$

## Lista 5

**E 3.2** – Um aprimoramento do projeto original da plataforma de pesagem é mostrado aqui com dois amortecedores viscosos que foram introduzidos limitando para 4 a razão entre amplitudes positivas sucessivas da vibração vertical na condição descarregada. Determine o coeficiente de amortecimento viscoso  $c$  para cada um dos amortecedores. Admita  $m = 4000 \text{ kg}$  e  $k = 474 \text{ kN/m}$ .



### Resolução:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 = 1422 \text{ kN/m}$$

$$c_c = 2\sqrt{k \cdot m} = 2 \cdot \sqrt{1422 \cdot 10^3 \cdot 4000}$$

$$c_c = 1,51 \times 10^5 \text{ kg/s}$$

Como a questão diz que  $\zeta = 4$ , temos:

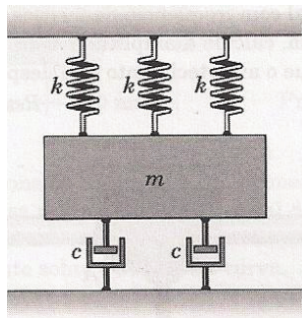
$$\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c} \rightarrow c_{eq} = 4 \times 1,51 \times 10^5$$

$$c_{eq} = 6,03 \times 10^5 \text{ kg/s}$$

Como há dois amortecedores, para determinarmos o coeficiente de amortecimento viscoso para cada um, basta dividirmos por dois:

$$c = \frac{c_{eq}}{2} = \frac{6,03 \times 10^5}{2} = 3,02 \times 10^5 \text{ kg/s}$$

**E 3.4** – Determine o valor do coeficiente de amortecimento  $c$  para o qual o sistema é criticamente amortecido se  $k = 70 \text{ kN/m}$  e  $m = 100 \text{ kg}$ .



### Resolução:

$$k_{eq} = 70 + 70 + 70 = 210 \text{ kN/m}$$

$$c_c = 2 \cdot \sqrt{210 \times 10^3 \times 100} = 9165,1 \text{ kg/s}$$

Como o sistema é **criticamente** amortecido, temos que  $\zeta = 1$

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

Logo, o coeficiente de amortecimento ( $c$ ) será igual ao coeficiente de amortecimento crítico ( $c_c$ )

Como os amortecedores estão associados em paralelo, temos:

$$c_{eq} = c_1 + c_2$$

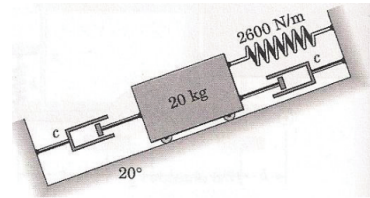
Como  $c_1 = c_2 = c$ :

$$c = \frac{9165,1}{2} = 4582,5 \text{ kg/s}$$

**E 3.6** – Determine o valor do coeficiente de amortecimento viscoso  $c$  para o qual o sistema mostrado na figura apresenta uma taxa de amortecimento de

a) 0,5

b) 1,5



### Resolução:

Apesar do conjunto massa + amortecedor estar em um plano inclinado, não haverá diferença no cálculo do amortecimento, uma vez que a força atuante não é pertinente pois as equações utilizam apenas a massa.

item a)

item b)

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

$$0,5 = \frac{c}{456,07}$$

$$1,5 = \frac{c}{456,07}$$

$$c = 228 \text{ kg/s}$$

$$c = 684 \text{ kg/s}$$

## Equações:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (6)$$

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \quad (7)$$

$$x_t = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (8)$$

Em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são calculados com a equação 9 abaixo:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (9)$$

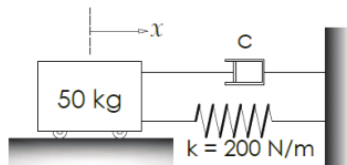
Ou ainda da forma expandida:

$$x_t = A_1 e^{\left[ \omega_n (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right] t} + A_2 e^{\left[ \omega_n (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right] t} \quad (10)$$

- Sistema Superamortecido:  $\zeta > 1$
- Sistema criticamente amortecido:  $\zeta = 1$
- Sistema sub-amortecido:  $\zeta < 1$

## Lista 6

**Questão 3.9** – A massa do sistema mostrado na figura é liberada a partir do repouso em  $x_0 = 125$  mm, quando  $t=0$ . Determine o deslocamento  $x$  em  $t = 0,65$  s se  $c = 300$  N s/m.



### Resolução:

Cálculo de  $c_c$  e  $\zeta$ :

Substituindo a equação (7) em (6), temos:

$$\zeta = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}} = \frac{300}{2 \cdot \sqrt{200 \cdot 50}} = 1,5$$

$\zeta > 1$  constitui um sistema supercrítico.

Cálculo de  $\omega_n$ :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = 2 \text{ rad/s}$$

Cálculo de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ : da equação 9, temos:

$$\lambda_1 = 2 \cdot (-1,5 + \sqrt{1,5^2 - 1}) = -0,76$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot (-1,5 - \sqrt{1,5^2 - 1}) = -5,23$$

Temos então a equação 8 na forma:

$$x_t = A_1 e^{-0,76t} + A_2 e^{-5,23t}$$

Encontrar os valores de  $A_1$  e  $A_2$ :

Derivando  $x_t$ , obtemos a equação da velocidade  $\dot{x}_t$ :

$$\dot{x}_t = -0,76A_1 e^{-0,76t} - 5,23A_2 e^{-5,23t}$$

Substituindo  $t = 0$  na equação da posição, temos:

$$x_0 = A_1 e^0 + A_2 e^0 \rightarrow x_0 = A_1 + A_2$$

Do enunciado, temos que  $x_0 = 125$  mm, obtendo

$$125 \text{ mm} = A_1 + A_2$$

Substituindo  $t = 0$  na equação da velocidade:

$$\dot{x}_0 = -0,76A_1 - 5,23A_2 = 0$$

Como a velocidade  $\dot{x}_0 = 0$  no instante  $t = 0$ , temos:

$$0,76A_1 = 5,23A_2 \rightarrow A_1 = -6,88A_2$$

Com isso, podemos substituir  $A_1$  na equação da posição, obtendo:

$$125 = -6,88A_2 + A_2 \rightarrow A_2 = -21,26 \text{ mm}$$

Com  $A_2$  determinado, encontramos  $A_1$  substituindo em  $125 = A_1 + A_2$ :

$$A_1 = 125 - (-21,26) \rightarrow A_1 = 146,26 \text{ mm}$$

A equação da posição completa será então:

$$x_t = 146,26 e^{-0,76t} - 21,26 e^{-5,23t}$$

Para  $t = 0,65$  s, temos:

$$x_{0,65} = 146,26 e^{-0,76 \cdot 0,65} - 21,26 e^{-5,23 \cdot 0,65}$$

$$x_{0,65} = 88,53 \text{ mm}$$