Listas de Vibrações

Victor Locatelli

26 de abril de 2020

Lista 2

Questão 1 – Uma barra de torção da suspensão traseira do fusca, possui um comprimento de 40 cm e o diâmetro de 40 mm, sendo feita de ferro fundido dúctil. Tendo o veículo 800 kg e considerando que seu peso se distribua igualmente nas 4 rodas, determine sua rigidez elástica da barra de torção.

Resolução:

Dados: $m = 800\text{kg}$; $l = 40\,\text{cm}$; $d = 40\,\text{mm}$;

material: ferro fundido dúctil;

$E = 168{,}9\,\text{GPa}$; $G = 9{,}4\,\text{GPa}$; $\rho = 6{,}9\,\text{Mg/m}^3$

Eixo oco:

$$k_{eq} = \frac{\pi\, G \times (D^4 - d^4)}{32\, L}$$

Eixo simples:

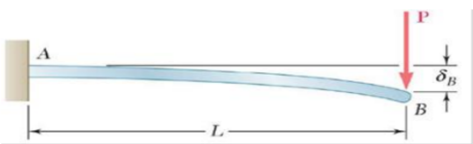
$$k_{eq} = \frac{\pi \cdot G \cdot (D^4)}{32\, L} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 9,4 \cdot (40 \times 10^{-3})^4}{32 \cdot 0,04} = 5906{,}2\,\text{N/m}$$

Questão 2 – Uma viga mono engastada de seção transversal uniforme, suporta uma carga estática de 200kg, aplicada na extremidade B, sofrendo uma deflexão δ. Sabendo que L = 3,5 m, feita em aço carbono com perfil quadrado de 3 mm de lado, determine:

a) constante elástica de mola equivalente da viga

b) após a colocação de uma mola na extremidade da viga a deformação reduziu 25%, qual a constante elástica desta mola instalada?



Resolução:

Dados: viga mono engastada $m = 200\text{kg}$ $L = 3,5\text{m}$, aço carbono, perfil quadrado $a = 3\text{mm}$; $E = 206{,}8\,\text{GPa}$; $G = 11{,}7\,\text{GPa}$

$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{(3 \times 10^{-3})^4}{12} = 6{,}75 \times 10^{-12}\,\text{m}^4$$

item a – Antes de colocar a mola. Substituindo dados na equação:

$$k_{eq} = \frac{3\,EI}{L^3} = 0{,}098\,\text{N/m}$$

item b – Após colocação da mola. $W = 200\text{kg} \times 9,81 = 1962\text{N}$

$$\delta_{sis} = 0,75\delta_0 = 0,75\frac{WL^3}{3EI}$$

Substituindo os dados, a deformação do sistema fica:

$$\delta_{sis} = 15065,7\text{m}$$

Sabendo que $W = k_{eq} \times \delta$,

$$k_{eq} = \frac{1962}{15065,7} = 0{,}13\,\text{N/m}$$

Questão 3 – Um eixo da hélice de propulsão de um navio, é feito de aço carbono oco, o qual possui o diâmetro interno de 10 cm e o externo de 25 cm e comprimento de 2 m.

a) Determine a rigidez equivalente deste eixo.

b) Devido a constantes problemas de corrosão, o mesmo foi substituído por um eixo de aço inox, sendo que na parte oca, foi introduzido um material feito de ferro fundido cinzento. Analisando somente com relação à rigidez elástica. O novo eixo é equivalente ao original? Justifique.

Resolução:

item a – O eixo é oco e sob torção:

$$k_t = \frac{\pi\, G\left(D^4 - d^4\right)}{32L} \tag{1}$$

Substituindo os dados na equação, obtemos:

$$k_t = 2{,}18 \times 10^6\,\text{N/m}$$

item b – A fazer.

Questão 4 – Uma viga de ferro fundido cinzento, é montada em balanço em uma máquina, e suporta uma carga de 45 kg. Para reduzir sua deformação foi montado dois apoios de molas em sua extremidade, conforme ilustrado na figura abaixo. Tendo as molas rigidez de 150 N/m cada, e o comprimento da viga é de 150 cm, sendo esta um perfil circular de diâmetro igual a 10 cm. Determine:

a) A rigidez do sistema de sustentação do equipamento. b) Qual a flexão do sistema em mm.

Resolução:

item a – Rigidez do sistema: (associação em paralelo)

$$k_{eq_{mola}} = k_1 + k_2 = 300\,\text{N/m}$$

$$k_{eq_{barra}} = \frac{3EI}{L^3}$$

A rigidez equivalente do sistema será:

$k_{eq_{sis}} = k_{eq_{mola}} + k_{eq_{barra}}$

$$k_{eq_{sis}} = 451,58\text{kN/m}$$

item b – A deformação será:

$W = k\delta$

$$\delta = \frac{W}{k} = \frac{441{,}45\,\text{N}}{451{,}58 \times 10^3\,\text{N/m}} = 0,98\text{mm}$$

Questão 5 –

Um guindaste de construção civil, trabalha com um sistema de 2 cabos de aço-carbono para elevação de carga, considerando que ele pode atuar com altura máxima de 30 m e tendo os cabos o diâmetro de 20 mm , sendo o guindaste capaz de elevar até 1 tonelada, considere o caso extremo e responda: Determine a rigidez elástica do sistema.

Resolução:

A carga atuante é dada por:

$W = 1000\,\text{kg} \times 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 9810\,\text{N}$

Situação extrema: $L = 30\,\text{m}$

Momento de inércia:

$$I = \frac{\pi \cdot 20^4}{64} = 7853{,}98\,\text{mm}^4$$

Cabo sob carregamento axial. Referência: RAO pg 14:

$$k_r = \frac{AE}{L} = \frac{\pi d^2 E}{4L} = \frac{\pi(20 \times 10^{-3})^2 \cdot 206,8 \times 10^9}{4 \cdot 30}$$

$k_r = 2{,}16\,\text{MN/m}$

Como são dois cabos associados em paralelo, temos:

$k_{eq} = 2 \times k_r = 4{,}32\,\text{MN/m}$

Questão 6 –

Duas viga de ferro fundido cinzento, é montada em balanço, sobre elas é montado um condensador de ar condicionado, cuja massa é de 25 kg. Sendo o comprimento da viga é de 50 cm, tendo esta um perfil quadrado de aresta igual a 2 cm. Considere que a carga esteja aplicada na extremidade da viga. Determine a flexão sofrida por cada viga em mm.

Resolução:

$W = 25 \times 9,81 = 245{,}25\,\text{N}$

$E = 103{,}4\,\text{GPa}$; $I = \frac{a^4}{12} = 13{,}33 \times 10^{-9}\,\text{m}^4$

$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \cdot 103,4 \times 10^9 \cdot 13,33 \times 10^{-9}}{0,5}$$

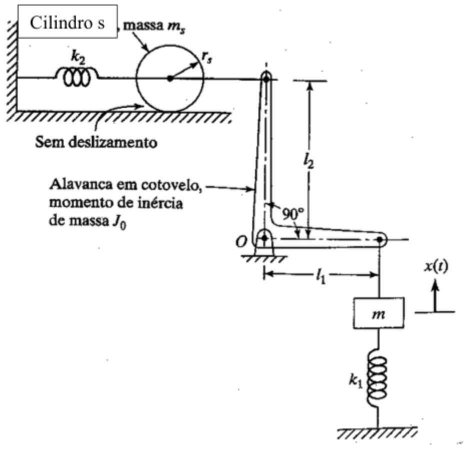
$$k_{eq} = 8269{,}9\,\text{N/m}$$

$\delta = \frac{W}{k}$; como são duas vigas, a carga W é dividida.

$$\delta = \frac{245,25}{2 \cdot 8269,9} = 0{,}0148\,\text{m} = 14{,}8\,\text{mm}$$

Lista 3

Questão 1 – Analisando a figura abaixo e considerando que entre o cilindro "s" e a superfície não tenha deslizamento, encontre a massa equivalente para o sistema; considerando como referência o cilindro s.



Resolução:

As equações que regem o sistema são:

$$E_c = \frac{1}{2}m_s \cdot \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}J_s\theta_s^2 + \frac{1}{2}J_0\theta_0^2 + \frac{1}{2}m \cdot \dot{x}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m_{eq} \cdot \dot{x}_{eq}^2 = \frac{1}{2}m_{eq} \cdot \dot{x}_s^2$$

Encontrando termos em comum para substituir nas equações...

$\dot{x}_s = \dot{\theta}_s \cdot r_s \rightarrow \dot{\theta}_s = \frac{\dot{x}_s}{r_s}$

Velocidade angular em $\dot{\theta}_0$:

$$\theta_0 = \frac{\dot{x}_s}{l_2}$$

$$\dot{x} = \theta_0 \cdot l_1 \rightarrow \dot{x} = \frac{\dot{x}_s}{l_1}$$

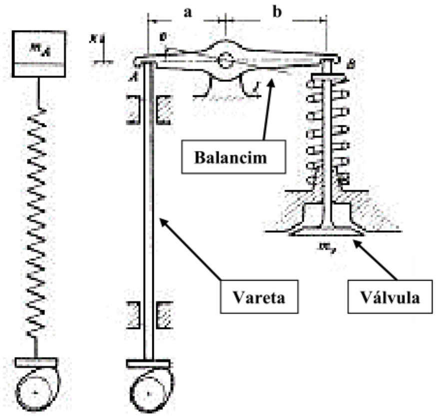
Substituindo na equação principal, temos:

$$E_c = \frac{1}{2}m_s \cdot \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}J_s \cdot \left(\frac{\dot{x}_s}{r_s}\right)^2 + \frac{1}{2}J_0 \cdot \left(\frac{\dot{x}_s}{l_2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\dot{x}_s \cdot l_1}{l_2}\right)^2$$

Multiplicando ambos os lados da equação por 2 e dividindo por $\dot{x}_s$ cancela-se esses termos obtendo a equação:

$$m_{eq} = m_s + J_s \cdot \frac{1}{r_s^2} + J_0 \cdot \frac{1}{{l_2}^2} + \frac{{l_1}^2}{{l_2}^2}$$

Questão 2 – Analisando a figura abaixo, que representa um sistema de acionamento de válvula de um motor de combustão interna, encontre a massa equivalente para o sistema; tendo como referência a vareta.



Resolução:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_b\theta_b^2 + \frac{1}{2}m_v \cdot \dot{x}_v^2 \tag{2}$$

$$\dot{\theta}_b = \frac{\dot{x}}{a} \quad ; \dot{\theta}_b = \frac{\dot{x}_v}{b}$$

Igualando uma com a outra e isolando $\dot{x}_v$:

$$\dot{x}_v = \frac{\dot{x}}{a} \cdot b \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2):

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_b \cdot \left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}m_v \left(\frac{\dot{x} \cdot b}{a}\right)^2$$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}m_{eq} \cdot \cancel{\dot{x}^2} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}m \cdot \cancel{\dot{x}^2} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}J_b \cdot \left(\frac{\cancel{\dot{x}}}{a}\right)^2 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}m_v \cdot \left(\frac{\cancel{\dot{x}}b}{a}\right)^2$$

$$m_{eq} = m + \frac{J_b}{a^2} + m_v \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

Lista 4

E 2.1 – Constata-se que uma viga simples bi engastada com seção transversal quadrada de 5 mm x 5 mm e comprimento de 1 m, que suporta uma massa de 2,3 kg em seu ponto médio tem uma frequência natural de vibração transversal de 30 rad/s. Determine o módulo de Young (Elasticidade) da viga.

Resolução – 2.1

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{4}$$

Em que ω_n é frequência natural; g é gravidade e δ_{st} é a deformação.

Isolando a equação 4 para δ_{st} obtemos:

$$\delta_{st} = \frac{g}{\omega_n^2}$$

$$\delta_{st} = \frac{9,81}{30} = 0{,}0109\,\mathrm{m}$$

Cálculo de k (coeficiente elástico) $W = k \cdot \delta_{st}$

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{2,3 \cdot 9,8}{0,0109} \rightarrow k = 2049{,}1\,\mathrm{N/m}$$

O momento de inércia para uma seção transversal quadrada é:

$$I = \frac{a^4}{12} \tag{5}$$

$$I = \frac{0,005^4}{12} \rightarrow I = 5{,}208 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^4$$

A resistência elástica equivalente para uma viga bi-engastada com carga no meio é:

$$k_{eq} = \frac{192 \cdot E \cdot I}{L^3} \rightarrow E = \frac{k_{eq} \cdot L^3}{192 \cdot I}$$

$$E = \frac{2049{,}1\,\mathrm{N/m} \cdot 1^3\mathrm{m}^3}{192 \cdot 5{,}208 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^4}$$

$$E = 205\,\mathrm{GPa}$$

E 2.2 – Um corpo de massa desconhecida é colocado sobre uma mola sem peso, que se comprime 2,54 cm. Determine (**a**) a frequência natural de vibração do sistema massa-mola em rad/s e em Hz e (**b**) o período natural.

Resolução – 2.2

mola sem massa associada com um corpo de massa desconhecida. Como a massa é desconhecida, a carga atuante será $W = 9,81m$N

item a – Frequência natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,0254}} = 19{,}65\,\mathrm{rad/s}$$

Converter de rad/s para Hz:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{19,65}{2\pi} = 3{,}127\,\mathrm{Hz}$$

item b – Período natural:

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{3,127} = 0{,}32\,\mathrm{s}$$

E 2.3 – Quando um colar de 3 kg é colocado sobre o prato que é preso à mola de rigidez desconhecida, observa-se que a deflexão estática adicional do prato é de 42 mm. Determine a constante da mola k em N/m.

Resolução – 2.3

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

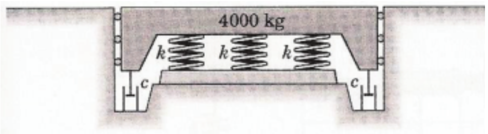
Elevando os dois lados da equação ao quadrado e isolando k, temos:

$$\frac{g}{\delta_{st}} = \frac{k}{m} \rightarrow k = m \times \frac{g}{\delta_{st}}$$

$$k = 3\,\mathrm{kg} \times \frac{9,81\,\mathrm{m/s}^2}{0,042\,\mathrm{m}} \rightarrow k = 700{,}7\,\mathrm{N/m}$$

Lista 5

E 3.2 – Um aprimoramento do projeto original da plataforma de pesagem é mostrado aqui com dois amortecedores viscosos que foram introduzidos limitando para 4 a razão entre amplitudes positivas sucessivas da vibração vertical na condição descarregada. Determine o coeficiente de amortecimento viscoso c para cada um dos amortecedores. Admita $m = 4000\,\text{kg}$ e $k = 474\,\text{kN/m}$.



Resolução:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 = 1422\,\text{kN/m}$$

$$c_c = 2\sqrt{k \cdot m} = 2 \cdot \sqrt{1422 \cdot 10^2 \cdot 4000}$$

$$c_c = 1{,}51 \times 10^5\,\text{kg/s}$$

Como a questão diz que $\zeta = 4$, temos:

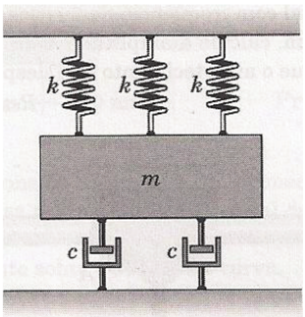
$$\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c} \rightarrow c_{eq} = 4 \times 1,51 \times 10^5$$

$$c_{eq} = 6{,}03 \times 10^5\,\text{kg/s}$$

Como há dois amortecedores, para determinarmos o coeficiente de amortecimento viscoso para cada um, basta dividirmos por dois:

$$c = \frac{c_{eq}}{2} = \frac{6,03 \times 10^5}{2} = 3{,}02 \times 10^5\,\text{kg/s}$$

E 3.4 – Determine o valor do coeficiente de amortecimento c para o qual o sistema é criticamente amortecido se $k = 70\,\text{kN/m}$ e $m = 100\,\text{kg}$.



Resolução:

$$k_{eq} = 70 + 70 + 70 = 210\,\text{kN/m}$$

$$c_c = 2 \cdot \sqrt{210 \times 10^3 \times 100} = 9165{,}1\,\text{kg/s}$$

Como o sistema é **criticamente** amortecido, temos que $\zeta = 1$

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

Logo, o coeficiente de amortecimento (c) será igual ao coeficiente de amortecimento crítico (c_c)

Como os amortecedores estão associados em paralelo, temos:

$$c_{eq} = c_1 + c_2$$

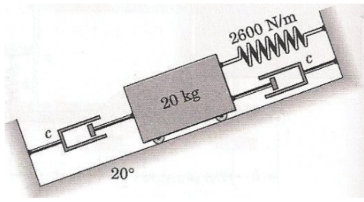
Como $c_1 = c_2 = c$:

$$c = \frac{9165,1}{2} = 4582{,}5\,\text{kg/s}$$

E 3.6 – Determine o valor do coeficiente de amortecimento viscoso c para o qual o sistema mostrado na figura apresenta uma taxa de amortecimento de

a) $0,5$

b) $1,5$



Resolução:

Apesar do conjunto massa + amortecedor estar em um plano inclinado, não haverá diferença no cálculo do amortecimento, uma vez que a força atuante não é pertinente pois as equações utilizam apenas a massa.

item a)

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

$$0,5 = \frac{c}{456,07}$$

$$c = 228\,\text{kg/s}$$

item b)

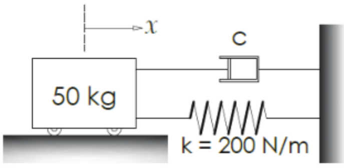
$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

$$1,5 = \frac{c}{456,07}$$

$$c = 684\,\text{kg/s}$$

Lista 6

Questão 3.9 – A massa do sistema mostrado na figura é liberada a partir do repouso em $x_0 = 125\,\text{mm}$, quando t=0. Determine o deslocamento x em $t = 0{,}65\,\text{s}$ se $c = 300\,\text{N s/m}$.



Resolução:

Cálculo de c_c e ζ:

Substituindo a equação (7) em (6), temos:

$$\zeta = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}} = \frac{300}{2 \cdot \sqrt{200 \cdot 50}} = 1,5$$

$\zeta > 1$ constitui um sistema supercrítico.

Cálculo de ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = 2\,\text{rad/s}$$

Cálculo de λ_1 e λ_2: da equação 9, temos:

$$\lambda_1 = 2 \cdot (-1,5 + \sqrt{1,5^2 - 1}) = -0,76$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot (-1,5 - \sqrt{1,5^2 - 1}) = -5,23$$

Temos então a equação 8 na forma:

$$x_t = A_1 e^{-0,76t} + A_2 e^{-5,23t}$$

Encontrar os valores de A_1 e A_2:

Derivando x_t, obtemos a equação da velocidade $\dot{x}_t$:

$$\dot{x}_t = -0,76 A_1 e^{-0,76t} - 5,23 A_2 e^{-5,23t}$$

Substituindo $t = 0$ na equação da posição, temos:

$$x_0 = A_1 e^0 + A_2 e^0 \rightarrow x_0 = A_1 + A_2$$

Do enunciado, temos que $x_0 = 125\,\text{mm}$, obtendo

$$125\,\text{mm} = A_1 + A_2$$

Substituindo $t = 0$ na equação da velocidade:

$$\dot{x}_0 = -0,76 A_1 - 5,23 A_2 = 0$$

Como a velocidade $\dot{x}_0 = 0$ no instante $t = 0$, temos:

$$0,76 A_1 = 5,23 A_2 \rightarrow A_1 = -6,88 A_2$$

Com isso, podemos substituir A_1 na equação da posição, obtendo:

$$125 = -6,88 A_2 + A_2 \rightarrow A_2 = -21{,}26\,\text{mm}$$

Com A_2 determinado, encontramos A_1 substituindo em $125 = A_1 + A_2$:

$$A_1 = 125 - (-21,26) \rightarrow A_1 = 146{,}26\,\text{mm}$$

A equação da posição completa será então:

$$x_t = 146,26 e^{-0,76t} - 21,26 e^{-5,23t}$$

Para $t = 0{,}65\,\text{s}$, temos:

$$x_{0,65} = 146,26 e^{-0,76 \cdot 0,65} - 21,26 e^{-5,23 \cdot 0,65}$$

$$x_{0,65} = 88{,}53\,\text{mm}$$

Equações:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \tag{6}$$

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \tag{7}$$

$$x_t = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \tag{8}$$

Em que λ_1 e λ_2 são calculados com a equação 9 abaixo:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \tag{9}$$

Ou ainda da forma expandida:

$$x_t = A_1 e^{\left[\omega_n (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\right] t} + A_2 e^{\left[\omega_n (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\right] t} \tag{10}$$

- Sistema Superamortecido: $\zeta > 1$
- Sistema criticamente amortecido: $\zeta = 1$
- Sistema sub-amortecido: $\zeta < 1$