UNAP
Facultad de Ingeniería
de Sistemas e Informática

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y GRADO SUPERIOR

La Matemática, como todos los restantes temas, debe ser ahora sometida al microscopio, y revelar al mundo cualquier debilidad que pueda existir en sus fundamentos. F. W. Westaway

Lic. Manuel Tuesta Moreno Mg.
Docente FISI - UNAP

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y GRADO SUPERIOR

De $f(x,y,y')=0$ se tiene $f(x,y,p)=0$, donde: $y'=\frac{dy}{dx}=p$.

La ecuación general de primer orden y grado n se puede escribir en forma:

$$p^n+P_1(x,y)p^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(x,y)p+P_n(x,y)=0 \quad (1)$$

1) ECUACIONES QUE SE RESUELVEN RESPECTO DE p

De (1): $(p-F_1)(p-F_2)\ldots(p-F_n)=0$, donde las F son funciones de x e y.

$$p-F_1=0\rightarrow\frac{dy}{dx}=F_1(x,y)\rightarrow f_1(x,y,c)=0$$

$$\vdots$$

$$p-F_n=0\rightarrow\frac{dy}{dx}=F_n(x,y)\rightarrow f_n(x,y,c)=0$$

La primitiva de (1) es el producto:
$f_1(x,y,c).f_2(x,y,c).\ldots.f_n(x,y,c)=0$ de las n soluciones.

PROBLEMAS

Hallar la primitiva

P-01) $x^2p^2+xyp-6y^2=0$

R: $(y-cx^2)(y-cx^{-3})=0$

P-02) $xp^2+(y-1-x^2)p-x(y-1)=0$

R: $(2y-x^2+c)(xy-x+c)=0$

P-03) $p^4-(x+2y+1)p^3+(x+2y+2xy)p^2-2xyp=0$

R: $(y-c)(y-x-c)(2y-x^2-c)(y-ce^{2x})=0$

P-04) $xyp^2+(x^2+xy+y^2)p+x^2+xy=0$

R: $(2xy+x^2-c)(x^2+y^2-c)=0$

2) ECUACIONES QUE SE RESUELVEN RESPECTO DE y

$$y=f(x,p)\rightarrow\frac{dy}{dx}=p=\frac{\partial}{\partial x}f(x,p)+\frac{\partial}{\partial p}f(x,p)\frac{dp}{dx}=F\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)$$

Se obtiene una ecuación de primer orden y primer grado: $p=F\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)$ … (α)

Resolviendo (α), se obtiene $\varphi(x,p,c)=0$; obtenga la primitiva eliminando p entre $y=f(x,p)$ y $\varphi(x,p,c)=0$ cuando sea posible o expresar $x=x(p)$ e $y=y(p)$ separados como funciones de p.

Hallar la primitiva

P-05) $16x^2+2p^2y-p^3x=0$. R: $2+c^2y-c^3x^2=0$

P-06) $y=2px+p^4x^2$. R: $\left(y-c^2\right)^2=4cx$

P-07) $x=yp+p^2$. R: $\begin{cases} x=-\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}Ln\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)+\frac{cp}{\sqrt{p^2-1}} \\ y=-p-\frac{Ln\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)}{\sqrt{p^2-1}}+\frac{c}{\sqrt{p^2-1}} \end{cases}$

P-08) $y=(2+p)x+p^2$. R: $\begin{cases} x=2(2-p)+ce^{-p/2} \\ y=8-p^2+(2+p)ce^{-p/2} \end{cases}$

3) ECUACIONES QUE SE RESUELVEN RESPECTO DE x

$$x=f(y,p)\rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial}{\partial y}f(y,p)+\frac{\partial}{\partial p}f(y,p)\frac{dp}{dy}=F\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)$$

Se obtiene una ecuación de primer orden y primer grado: $\frac{1}{p}=F\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)$ … (β)

Resolviendo (β), se obtiene $\varphi(y,p,c)=0$; obtenga la primitiva eliminando p entre $x=f(y,p)$ y $\varphi(y,p,c)=0$ cuando sea posible o expresar $x=x(p)$ e $y=y(p)$ separados como funciones de p.

Hallar la primitiva

P-09) $y = 3px + 6p^2y^2$. R: $y^3 = 3cx + 6c^2$

P-10) $p^3 - 2xyp + 4y^2 = 0$. R: $2y = c(c - x)^2$

P-11) $4x = py(p^2 - 3)$

$$\begin{cases} y = \dfrac{c}{(p^2-4)^{9/10}(p^2+1)^{3/5}} \\ x = \dfrac{cp(p^2-3)}{4(p^2-4)^{9/10}(p^2+1)^{3/5}} \end{cases}$$

4) ECUACIÓN DE CLAIRAUT $y = px + f(p)$

Su primitiva es: $y = cx + f(c)$

P-12) $y = px + \sqrt{4 - p^2}$. R: $y = cx + \sqrt{4 - c^2}$

P-13) $(y - px)^2 = 1 + p^2$. R: $(y - cx)^2 = 1 + c^2$

P-14) $y = 3px + 6y^2p^2$. R: $y^3 = 3cx + 6c^2$

P-15) $cos^2y\, p^2 + senx\, cosx\, cosy\, p - seny\, cos^2x = 0$

R: $seny = c\, senx + c^2$

P-16) $(px - y)(py + x) = 2p$

$$R:\ y^2 = cx^2 - \frac{2c}{1+c}$$

SOLUCIONES SINGULARES. LUGARES GEOMÉTRICOS EXTRAÑOS

Ejemplo. Hallar la primitiva de: $y = px + 2p^2$

Su primitiva: $y = cx + 2c^2$

Solución singular $x^2 + 8y = 0$, envolvente de la primitiva $y = cx + 2c^2$

Una solución singular de una ecuación diferencial satisface dicha ecuación, pero no es una solución particular de la ecuación.

En cada punto de su lugar geométrico (envolvente) el número de direcciones distitntas que da la ecuación diferencial y el número de curvas distintas que da la primitiva correspondiente son menores que en los puntos que no pertenecen al lugar geométrico.

LAS SOLUCIONES SINGULARES, de una ecuación diferencial se encuentran expresando las condiciones:

a) Que la ecuación diferencial (ecuación p) tengan raíces múltiples.
b) Que la primitiva (ecuación c) tengan raíces múltiples.

En general, una ecuación de primer orden no tiene soluciones singulares:

a) Si es de primer grado no puede tener soluciones singulares.
b) Si $f(x, y, p) = 0$ puede resolverse según factores que sean lineales en p y racionales en x e y.

Discriminantes: Eliminando u entre $f(u) = 0$ y $f'(u) = 0$

De $au^2 + bu + c = 0$ es $b^2 - 4ac$

De $au^3 + bu^2 + cu + d = 0$ es

$$b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

DISCRIMINANTE p . El discriminante de la ecuación diferencial $f(x, y, p) = 0$, el discriminante p, igualado a cero incluye como un factor:

1. La ecuación de la envolvente o solución singular, una vez. Satisface la ecuación diferencial.
2. Puntos de retroceso, una vez. No satisface la ecuación diferencial al menos que sea también una solución singular o solución particular.
3. Lugares de choque, dos veces. No satisface la ecuación diferencial al menos que sea también una solución singular o particular.

DISCRIMINANTE c . El discriminante de la primitiva $g(x, y, c) = 0$, el discriminante c, igualado a cero incluye como un factor:

1. La ecuación de la envolvente o solución singular, una vez. Satisface la ecuación diferencial.
2. Puntos de retroceso, tres veces. No satisface la ecuación diferencial al menos que sea también una solución singular o solución particular.
3. Puntos dobles, dos veces. No satisface la ecuación diferencial al menos que sea también una solución singular o particular.

NOTA:

1) Si las curvas de la familia $g(x, y, c) = 0$ son líneas rectas, no hay lugares geométricos extraños.

2) Si las curvas de la familia $g(x, y, c) = 0$ son cónicas, no puede haber ni lugares de puntos de retroceso ni de puntos dobles.

Ejemplo. Investigar las soluciones singulares y los lugares geométricos extraños:

P-17) $\boldsymbol{y(3-4y)^2P^2 = 4(1-y)}$
Primitiva: $\boldsymbol{(x-c)^2 = y^3(1-y)}$ S.S. $\boldsymbol{y = 1}$
Un Punto de retroceso $\boldsymbol{y = 0}$
Un punto de choque: $\boldsymbol{y = {}^3\!/_4}$

P-18) $\boldsymbol{(3y-1)^2P^2 = 4y}$
Primitiva: $\boldsymbol{(x+c)^2 = y(y-1)^2}$ S.S. $\boldsymbol{y = 0}$
Un punto de choque: $\boldsymbol{y = {}^1\!/_3}$
Un punto doble: $\boldsymbol{y = 1}$

APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y GRADO SUPERIOR

P-19) Hallar la curva para la que cada uno de sus tangentes forme con los ejes coordenados un triángulo de área constante a^2. $\boldsymbol{R: 2xy = a^2}$

P-20) Hallar la curva para la que el producto de las distancias de los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ a las tangentes sea igual a K. $\boldsymbol{R: Kx^2 = (K + a^2)(K - y^2)}$

P-21) Hallar la curva para la que la proyección sobre el eje Y de la perpendicular desde el origen a cualquiera de sus tangentes sea igual a K.

$$\boldsymbol{R:\ x^2 = 4K(K-y)}$$

APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y GRADO SUPERIOR

P-22) Hallar la curva tal que el origen sea el punto medio del segmento que en el eje Y determina la tangente y la normal de cada uno de sus puntos.

$$\boldsymbol{R:\ x^2 + 2cy = c^2}$$

P-23) Hallar las curvas para las que la distancia al origen de cada tangente varíe con la distancia al origen del punto de contacto.

Sugerencia: $\boldsymbol{\dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}} = k\rho}$

$$\mathbf{R}:\ \boldsymbol{\rho = C.e^{\theta.\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}}}$$