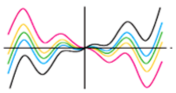
Facultad de Ingeniería
de Sistemas e Informática

SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES



Lic. Manuel Tuesta Moreno Mg.
Docente FISI - UNAP

SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación diferencial de la forma $\boldsymbol{y' = g(x,y)}$ en la que:

a) $\boldsymbol{g(x,y)}$ es continua y uniforme en una región $\boldsymbol{R}$ de puntos $\boldsymbol{(x,y)}$,

b) $\boldsymbol{\partial g/\partial y}$ existe y es continua en todos los puntos de $\boldsymbol{R}$,

admite infinitas soluciones $\boldsymbol{f(x,y,C)=0}$ (siendo $\boldsymbol{C}$ una constante arbitraria), tales que por cada punto de $\boldsymbol{R}$ pasa una y solo una curva de la familia $\boldsymbol{f(x,y,C)=0}$.

UNA SOLUCIÓN PARTICULAR de una ecuación diferencial se obtiene de la primitiva dando valores definidos a las constantes arbitrarias.

Geométricamente, la primitiva, es la ecuación de una familia de curvas y una solución particular es la ecuación de una de las curvas. Estas curvas se llaman *curvas integrales* de la ecuación diferencial.

Puede ocurrir que una forma dada de la primitiva no incluya todas las soluciones particulares. Aún más: es posible, que una ecuación diferencial tenga soluciones que no se puedan obtener de la primitiva ni operando con la constante arbitraria. Se considerarán tales soluciones, denominadas *soluciones singulares.*

La primitiva de una ecuación diferencial se denomina normalmente *la solución general* de la ecuación. Algunos, debido a las observaciones reseñadas, la denominan *una solución general* de la ecuación.

PROBLEMAS PROPUESTOS

P-01) Demostrar por sustitución directa en la ecuación diferencial, comprobando las constantes arbitrarias, que cada primitiva da lugar a la correspondiente ecuación diferencial.

a) $\boldsymbol{y = c_1 senx + c_2 x}$; $\quad \boldsymbol{(1 - x\,ctg\,x)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0}$

b) $\boldsymbol{y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + 2x^2 e^x}$; $\boldsymbol{\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 8e^x}$

P-02) Demostrar que $\boldsymbol{y = 2x + Ce^x}$ es la primitiva de la ecuación diferencial $\boldsymbol{dy/dx - y = 2(1-x)}$ y hallar la solución particular satisfecha por $\boldsymbol{x = 0, y = 3}$.

$\boldsymbol{R\!:Sol.part.\,y = 2x + 3e^x}$

P-03) Demostrar que $\boldsymbol{y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x}$ es la primitiva de la ecuación diferencial $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x - 3}$ y hallar la ecuación de la curva integral que pase por los puntos $\boldsymbol{(0,0)}$ y $\boldsymbol{(1,0)}$.

$$\boldsymbol{R\!: y = x + \frac{e^x - e^{2x}}{e^2 - e}}$$

P-04) Demostrar que $\boldsymbol{(y - C)^2 = Cx}$ es la primitiva de la ecuación diferencial $\boldsymbol{4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0}$ y hallar las ecuaciones de las curvas integrales que pasan por el punto $\boldsymbol{(1,2)}$.

$\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{(y-1)^2 = x}$; $\boldsymbol{(y-4)^2 = 4x}$

P-05) La primitiva de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ es $y = cx$. Hallar la ecuación de la curva integral que pasa por a) $(1, 2)$ y b) $(0, 0)$.

$$R\colon a)\ y = 2x;\ b)\ c \text{ es indeterminada}$$

P-06) Dado la primitiva $xy = C(x-1)(y-1)$, obtener la ecuación diferencial.

$$R\colon x(x-1)\frac{dy}{dx} + y(y-1) = 0$$

P-07) A partir de la primitiva $y = Cx + 2C^2$ obtener la ecuación diferencial.

$$R\colon 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) - y = 0$$

P-08) Comprobar que $y = C_1 cosx + C_2 senx$ y $y = Acos(x+B)$ son primitivas de $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, demostrando también ambas ecuaciones son, en realidad, una sola.

P-09) Demostrar que $Lnx^2 + Ln\frac{y^2}{x^2} = A + x$ se puede escribir así: $y^2 = Be^x$.

P-10) Demostrar que $arc\,sen\,x - arc\,sen\,y = A$ se puede escribir así: $x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = B$.

P-11) Demostrar que $Ln(1+y) + Ln(1+x) = A$ se puede escribir como $xy + x + y = C$.

P-12) Demostrar que $Sh\,y + Ch\,y = Cx$ se puede escribir como $y = Lnx + A$.

NOTA

Con frecuencia nos interesan problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial tal que $y(x)$satisface condiciones prescritas, es decir, condiciones impuestas sobre una $y(x)$ desconocida o sus derivadas. En algún intervalo I que contiene a x_0 el problema: Resolver $\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, sujeto a $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas se llama *problemas con valores iniciales* (PVI). Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0 ; $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se llaman *condiciones iniciales*.

NOTA

PROBLEMA CON VALORES EN LA FRONTERA Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación diferencial lineal de orden dos o mayor en que la variable dependiente "y" o sus derivadas se especifican en *diferentes puntos*. Un problema tal como

Resolver: $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

Sujeto a: $y(a) = y_0, y(b) = y_1$

se llama problema con valores en la frontera (PVF). Los valores prescritos $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_1$ se llaman condiciones en la frontera. Una solución del problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo I, que contiene a a y b.

NOTA

PROBLEMA CON VALORES EN LA FRONTERA

Para una ecuación diferencial de segundo orden, otros pares de condiciones en la frontera podrían ser

$$y'(a) = y_0, \qquad y(b) = y_1$$
$$y(a) = y_0, \qquad y'(b) = y_1$$
$$y'(a) = y_0, \qquad y'(b) = y_1$$

donde y_0 y y_1 denotan constantes arbitrarias. Estos pares de condiciones son sólo casos especiales de las condiciones en la frontera generales.

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$