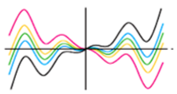
Facultad de Ingeniería
de Sistemas e Informática

ORIGEN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES



Lic. Manuel Tuesta Moreno Mg.
Docente FISI - UNAP

ORIGEN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ECUCACIÓN DIFERENCIAL es una ecuación que contiene derivadas. Por ejemplo:

1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 3) $xy' + y = 3$

4) $y''' + 2(y'')^2 + y' = cosx$ 5) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

6) $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$ 7) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

Si hay una sola variable independiente, como en $(1) - (5)$, las derivadas son derivadas ordinarias y la ecuación se denomina "Ecuación Deferencial Ordinaria".
Si hay dos o más variables independientes, como $(6) - (7)$, las derivadas son derivadas parciales y la ecuación se denomina "Ecuación Entre Derivadas Parciales".
El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que interviene en ella.
El grado de una ecuación diferencial que puede escribirse como un polinomio respecto a las derivadas es el grado de la derivada de mayor orden que interviene en ella.

ORIGEN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Con frecuencia es deseable describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, sean físicos, sociológicos o hasta económicos. La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama modelo matemático y se construye con ciertos objetivos. Por ejemplo, podemos desear entender los mecanismos de cierto ecosistema al estudiar el crecimiento de la población animal en ese sistema, o podemos desear datar fósiles y analizar el decaimiento de una sustancia radiactiva ya sea en el fósil o en el estrato en que éste fue descubierto. En otros casos, una ecuación diferencial puede provenir de problemas geométricos o de primitivas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

P-01) Se define una curva por la condición de que en cada uno de sus puntos (x, y) su pendiente dy/dxes igual al doble de la suma de las coordenadas del punto. Exprese la condición mediante una ecuación diferencial. R: $dy/dx = 2(x + y)$

P-02) Una curva está definida por la condición de que la suma de los segmentos x e y interceptados por sus tangentes en los ejes coordenados es siempre igual a 2. Expresar la condición por medio de una ecuación diferencial. $R: x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x + y - 2)\frac{dy}{dx} + y = 0$

P-03) Cien gramos de azúcar de caña que están en agua se convierten en dextrosa a una velocidad que es proporcional a la cantidad que aún no se ha convertido. Hállese la ecuación diferencial que exprese la velocidad de conversión después de t minutos. R: $dq/dt = k(100 - q)$

P-04) Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una línea recta (el eje x) estando sujeta a 1) una fuerza proporcional a su desplazamiento x desde un punto fijo O en su trayectoria y dirigida hacia O y 2) una fuerza resistente proporcional a su velocidad. Expresar la fuerza total como una ecuación diferencial. $R: m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2\frac{dx}{dt}$

P-05) Demostrar que en cada una de las ecuaciones a) $y = X^2 + A + B$, b) $y = Ae^{x+B}$, c) $y = A + Ln(Bx)$ solamente es esencial una de las dos constantes arbitrarias.
P-06) Obtener la ecuación diferencial asociada con la primitiva $y = Ax^2 + Bx + C$. R: $d^3y/dx^3 = 0$
P-07) Obténgase la ecuación diferencial asociada con la primitiva $x^2y^3 + x^3y^5 = C$.

$$R: \left(2xy^3dx + 3x^2y^2dy\right) + \left(3x^2y^5dx + 5x^3y^4dy\right) = 0$$

P-08) Obtener la ecuación diferencial asociada con la primitiva $y = A\cos ax + B\,sen\,ax$, siendo A y B constante arbitrarias y a una constante fija.

$$R: \frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$$

P-09) Obtener la ecuación diferencial asociada con la primitiva $y = Ae^{2x} + Be^x + C$. R: $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$.
P-10) Obtener la ecuación diferencial asociada con la primitiva $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^x$.

$$R: \frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

P-11) Obtener la ecuación diferencial asociada con la primitiva $y = Cx^2 + C^2$. R: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^3\frac{dy}{dx} - 4x^2y = 0$
P-12) Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio fijo r cuyos centros están en el eje X. R: $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = r^2$

P-13) Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas cuyos focos están en el origen y cuyos ejes están sobre el eje X. R: $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$
P-14) Formar la ecuación diferencial que represente todas las tangentes a la parábola $y^2 = 2x$.

$$R: 2x(y')^2 - 2yy' + 1 = 0$$

P-14) Expresar mediante ecuaciones diferenciales cada uno de los siguientes principios físicos.
a) El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad Q del radio presente. R: $dQ/dt = kQ$.
b) La población P de una ciudad aumenta a una velocidad proporcional a la población y a la diferencia entre 200000 y la población. R: $dP/dt = kP(200000 - P)$