7. Comprobar que $y = e^x$, $y = xe^x$, $y = x^2e^x$ e $y = e^{-2x}$ son cuatro soluciones linealmente independientes de la ecuación del Problema 6 y escribir la primitiva.

Según el Problema 6, $y = e^x$ e $y = e^{-2x}$ son soluciones. Sustituyendo directamente en la ecuación dada se halla que las otras también son soluciones.

Como $$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x & e^{-2x} \\ e^x & xe^x + e^x & x^2e^x + 2xe^x & -2e^{-2x} \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2e^x + 4xe^x + 2e^x & 4e^{-2x} \\ e^x & xe^x + 3e^x & x^2e^x + 6xe^x + 6e^x & -8e^{-2x} \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & -8 \end{vmatrix} = -54e^x \neq 0,$$

estas soluciones son linealmente independientes y la primitiva es

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + C_4e^{-2x}.$$

8. Comprobar que $y = e^{-2x}\cos 3x$ y $y = e^{-2x}\,\text{sen}\, 3x$ son soluciones de $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$ y escribir la primitiva.

Sustituyendo y y sus derivadas se ve que se satisface la ecuación.

Como $W = 3e^{-4x} \neq 0$, las soluciones son linealmente independientes.
Luego la primitiva es $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \,\text{sen}\, 3x)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

9. Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes:

a) $\text{sen}\, ax, \cos ax$
b) $e^{ax}\,\text{sen}\, bx,\ e^{ax}\cos bx$
c) $1, x, x^2$
d) $e^{ax}, e^{bx}, e^{cx} \quad (a \neq b \neq c)$
e) $\ln x,\ x\ln x,\ x^2 \ln x$

Formar la ecuación diferencial cuya primitiva es la dada.

10. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ — *Sol.* $y'' + y' - 6y = 0$

11. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x}$ — $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

12. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{5x}/12$ — $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

13. $y = C_1\cos 3x + C_2\,\text{sen}\, 3x + (4x\cos x + \text{sen}\, x)/32$ — $y'' + 9y = x\cos x$

14. $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x$ — $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

15. $y = C_1x + C_2x\ln x + C_3x\ln^2 x + x^4/9$ — $x^3y''' + xy' - y = 3x^4$

16. $y = C_1\,\text{sen}\, x^2 + C_2\cos x^2$ — $xy'' - y' + 4x^3y = 0$

17. $y = \ln\,\text{sen}\,(x - C_1) + C_2$ — $y'' + (y')^2 \quad 1 = 0$

18. $y^2 = C_1x + C_2 + 2x^2$ — $yy'' + (y')^2 = 2$

19. $x = C_1 + C_2y + y\ln y$ — $yy'' + (y')^3 = 0$