12. Determinar las trayectorias de 45° de la familia de circunferencias concéntricas $x^2 + y^2 = C$.

La ecuación diferencial de la familia de circunferencias es $x + yy' = 0$.

La ecuación diferencial de las trayectorias de 45°, obtenida sustituyendo $y'$ en la anterior ecuación por $\dfrac{y' - \operatorname{tg} 45°}{1 + y' \operatorname{tg} 45°} = \dfrac{y' - 1}{1 + y'}$, es $x + y\dfrac{y' - 1}{1 + y'} = 0$, o sea $(x + y)dy + (x - y)dx = 0$.

Mediante la transformación $y = vx$, esta ecuación se reduce a

$$(v^2 + 1)dx + x(v + 1)dv = 0, \qquad \text{de donde} \qquad \frac{dx}{x} + \frac{v + 1}{v^2 + 1}dv = 0.$$

Integrando $\ln x + \frac{1}{2}\ln(v^2 + 1) + \operatorname{arc\,tg} v = \ln K_1$, $\ln x^2(1 + v^2) = \ln K - 2 \operatorname{arc\,tg} v$, y $x^2 + y^2 = Ke^{-2 \operatorname{arc\,tg} y/x}$.

En coordenadas polares, la ecuación toma la forma $\rho^2 = Ke^{-2\theta}$ o bien $\rho e^{\theta} = C$.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

13. Hallar la ecuación de la curva para la que:

a) La normal en un punto cualquiera $(x, y)$ pasa por el origen. *Sol.* $x^2 + y^2 = C$

b) La pendiente de la tangente en un punto cualquiera $(x, y)$ es la mitad de la pendiente de la recta que va del origen al punto. *Sol.* $y^2 = Cx$

c) La normal en un punto cualquiera $(x, y)$ y la recta que une el origen con ese punto forma un triángulo isósceles que tiene el eje $x$ como base. *Sol.* $y^2 - x^2 = C$

d) El segmento de la normal trazada en el punto $(x, y)$, cuyos extremos son este punto y el de intersección con el eje $x$, es cortado en dos partes iguales por el eje $y$. *Sol.* $y^2 + 2x^2 = C$

e) El segmento de perpendicular desde el origen a una recta tangente de la curva es igual a la abscisa del punto de contacto $(x, y)$. *Sol.* $x^2 + y^2 = Cx$

f) La longitud del arco desde el origen al punto variable $(x, y)$ es igual al doble de la raíz cuadrada de la abscisa del punto. *Sol.* $y = \pm(\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}) + C$

g) La subnormal polar es el doble del seno del ángulo vectorial. *Sol.* $\rho = C - 2\cos\theta$

h) El ángulo entre el radio vector y la tangente es la mitad del ángulo vectorial. *Sol.* $\rho = C(1 - \cos\theta)$

i) La subtangente polar es igual a la subnormal polar. *Sol.* $\rho = Ce^{\theta}$

14. Hallar las trayectorias ortogonales de cada una de las siguientes familias de curvas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $x + 2y = C$ | *Sol.* $y - 2x = K$ | f) $y = x - 1 + Ce^{-x}$ | *Sol.* $x = y - 1 + Ke^{-y}$ |
| b) $xy = C$ | $x^2 - y^2 = K$ | g) $y^2 = 2x^2(1 - Cx)$ | $x^2 + 3y^2\ln(Ky) = 0$ |
| c) $x^2 + 2y^2 = C$ | $y = Kx^2$ | h) $\rho = a\cos\theta$ | $\rho = b\,\operatorname{sen}\theta$ |
| d) $y = Ce^{-2x}$ | $y^2 = x + K$ | i) $\rho = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$ | $\rho = b(1 - \operatorname{sen}\theta)$ |
| e) $y^2 = x^3/(C - x)$ | $(x^2 + y^2)^2 = K(2x^2 + y^2)$ | j) $\rho = a(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)$ | $\rho = be^{-\operatorname{sen}\theta}$ |