Facultad de Ingeniería
de Sistemas e Informática

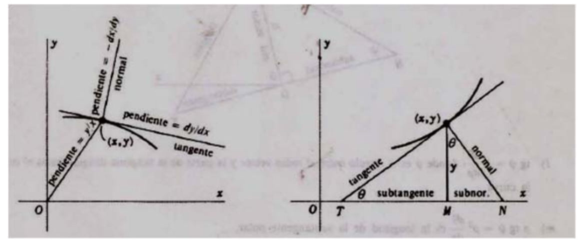
APLICACIONES GEOMÉTRICAS

La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.
René Descartes (1596 – 1650) filósofo y matemático francés

Lic. Manuel Tuesta Moreno Mgr.
Docente FISI - UNAP

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Propiedades de las curvas que implican la derivada.
COORDENADAS RECTANGULARES: Sea (x, y) un punto cualquiera de una curva $F(x, y) = 0$.



APLICACIONES GEOMÉTRICAS

COORDENADAS RECTANGULARES: Sea (x, y) un punto cualquiera de una curva $F(x, y) = 0$.

a) $\frac{dy}{dx}$ es la pendiente de la tangente a la curva en (x, y).

b) $-\frac{dx}{dy}$ es la pendiente de la normal a la curva en (x, y).

c) $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$ es la ecuación de la tangente en (x, y), donde (X, Y) son las coordenadas de un punto cualquiera de la tangente.

d) $Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$ es la ecuación de la normal en (x, y), siendo (X, Y) las coordenadas de un punto cualquiera de la normal.

e) $x - y\frac{dx}{dy}$ y $y - x\frac{dy}{dx}$ son los segmentos interceptados en los ejes X e Y por la tangente.

f) $x + y\frac{dy}{dx}$ y $y + x\frac{dx}{dy}$ son los segmentos interceptados por la normal.

g) $y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ y $x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ son las longitudes de la tangente entre (x, y) y los ejes X e Y.

h) $y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ y $x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ son las longitudes de la normal entre (x, y) y los ejes X e Y.

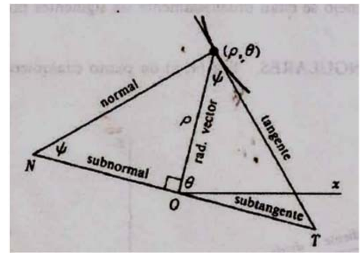
i) $y\frac{dx}{dy}$ y $y\frac{dy}{dx}$ son las longitudes de la subtangente y subnormal.

j) $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ es un elemento de longitud de arco.

k) ydx o xdy es un elemento de área.

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Propiedades de las curvas que implican la derivada.
COORDENADAS POLARES: Sea (ρ, θ) un punto cualquiera de una curva $\rho = f(\theta)$.



APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Propiedades de las curvas que implican la derivada.

COORDENADAS POLARES: Sea $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta})$ un punto cualquiera de una curva $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta})$.

l) $\boldsymbol{tg\psi}=\boldsymbol{\rho}\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{d\rho}}$, donde $\boldsymbol{\psi}$ es el ángulo entre el radio vector y la parte de la tangente dirigida hacia el origen de la curva.

m) $\boldsymbol{\rho\, tg\psi}=\boldsymbol{\rho}^2\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{d\rho}}$ es la longitud de la subtangente polar.

n) $\boldsymbol{\rho\, ctg\psi}=\frac{\boldsymbol{d\rho}}{\boldsymbol{d\theta}}$ es la longitud de la subnormal polar.

o) $\boldsymbol{\rho\, sen\psi}=\boldsymbol{\rho}^2\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{ds}}$ es la longitud de la perpendicular desde el polo a la tangente.

p) $\boldsymbol{ds}=\sqrt{(\boldsymbol{d\rho})^2+\boldsymbol{\rho}^2(\boldsymbol{d\theta})^2}=\boldsymbol{d\rho}\sqrt{\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\rho}^2\left(\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{d\rho}}\right)^2}=\boldsymbol{d\theta}\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{d\rho}}{\boldsymbol{d\theta}}\right)^2+\boldsymbol{\rho}^2}$ es un elemento de longitud de arco.

q) $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\rho}^2\boldsymbol{d\theta}$ es un elemento de área.

TRAYECTORIAS

Cualquier curva que corte a cada uno de los miembros de una familia dada de curvas bajo un ángulo constante ω se llama una *trayectoria* ω de la familia. La trayectoria de 90º de una familia se denomina comúnmente una *trayectoria ortogonal* de la familia.

PROBLEMAS

P-01) En cada punto $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ de una curva el segmento que la tangente intercepta en el eje $\boldsymbol{Y}$ es igual a $\boldsymbol{2xy^2}$. Hallar la curva. $\boldsymbol{R}: \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x^2y}=\boldsymbol{Cy}$.

P-02) En cada punto (x,y) de una curva la subtangente es proporcional al cuadrado de la abscisa. Hallar la curva si pasa también por el punto $(1,e)$.

$$\boldsymbol{R}: \boldsymbol{k\, Lny}=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}$$

P-03) Hallar la familia de curvas para las que la longitud de la parte de la tangente entre el punto de contacto (x,y) y el eje Y es igual al segmento interceptado en y por la tangente.

$$\boldsymbol{R}: \boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{y^2}=\boldsymbol{Cx}$$

P-04) Por un punto cualquiera (x,y) de una curva que pasa por el origen se trazan dos rectas paralelas a los ejes coordenados. Hallar la curva de modo que divida al rectángulo formado por las dos rectas y los ejes coordenados en dos superficies, una de las cuales sea triple de la otra. $R: y=Cx^3$; $y^3=Cx$

P-05) La superficie limitada por el eje X, una ordenada fija $x=a$, una ordenada variable y la parte de una curva interceptada por las ordenadas gira alrededor del eje X. Hallar la curva si el volumen engendrado es proporcional a: a) la suma de las dos ordenadas, b) la diferencia de las dos ordenadas.

$$\boldsymbol{R}: \boldsymbol{a})\ \nexists \quad \boldsymbol{b})\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{\pi x})=\boldsymbol{k}$$

P-06) Hallar una curva tal que en cualquier punto de ella el ángulo entre el radio vector y la tangente sea igual a un tercio del ángulo de inclinación de la tangente. R: $\rho=C_1 sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=C(1-cos\theta)$

P-07) La superficie del sector formado por un arco de una curva y los radios vectores de sus puntos extremos es la mitad de la longitud del arco. Hallar la curva. $\rho=1$; $\rho==sec(C+\theta)$

P-08) Hallar la curva para la que la porción de la tangente entre el punto de contacto y el pie de la perpendicular trazada por el polo a la tangente es un tercio del radio vector del punto de contacto.

$$\boldsymbol{R}: \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\theta}/2\sqrt{2}};\ \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\theta}/2\sqrt{2}}$$

P-09) Hallar las trayectorias ortogonales de las hipérbolas $xy=C$. R: $y^2-x^2=C$

P-10) Demostrar que la familia de cónicas homofocales $\frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{C-\lambda}=1$, donde C es una constante arbitraria, es autoortogonal.

P-11) Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de cardioides $\rho=C(1+sen\theta)$. R: $\rho=C(1-sen\theta)$

P-12) Determinar las trayectorias de 45° de la familia de circunferencias concéntricas $x^2+y^2=C$.

$$\boldsymbol{R}: \boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{y^2}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}^{-2\, arctg(y/x)}\ \text{ó}\ \textbf{en coordenadas polares}$$

$$\boldsymbol{\rho^2}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}^{-2\boldsymbol{\theta}}\ \text{ó}\ \textbf{bien}\ \boldsymbol{\rho e^{\theta}}=\boldsymbol{C}$$