21. Resolver $x \cos y\, y''' - 3x \operatorname{sen} y\, y' y'' - \cos y\, y'' x \cos y\, (y')^3 + \operatorname{sen} y (y')^2 + x \cos y\, y' - \operatorname{sen} y = 0$.

Como $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{x}\right) = \dfrac{x \cos y\, y' - \operatorname{sen} y}{x^2}$, los últimos dos términos de la ecuación dada sugieren $\dfrac{1}{x^2}$ como un posible factor integrante. Empleándole e integrando,

$$\frac{\cos y\, y'' - \operatorname{sen} y\, (y')^2}{x} + \frac{\operatorname{sen} y}{x} = C_1 \quad \text{o} \quad \cos y\, y'' - \operatorname{sen} y\, (y')^2 + \operatorname{sen} y = C_1 x.$$

La sustitución $\operatorname{sen} y = z$ reduce esta ecuación a $z'' + z = C_1 x$ cuya solución completa es

$$z = \operatorname{sen} y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver

22. $y'' + (y')^2 + 1 = 0$ *Sol.* $y = \ln \cos(x - C_1) + C_2$

23. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x^{-3}$ $y = C_1 + C_2 \operatorname{arc\,tg} x + 1/x$

24. $xy'' - y' = -2/x - \ln x$ $y = C_1 x^2 + C_2 + (x+1)\ln x$

25. $y''' + y'' = x^2$ $y = C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3 + x^2(x^2 - 4x + 12)/12$

26. $yy'' + (y')^3 = 0$ $x = C_1 + C_2 y + y \ln y$

27. $yy'' + (y')^2 = 2$ $y^2 = 2x^2 + C_1 x + C_2$

28. $yy'' = (y')^2(1 - y' \cos y + yy' \operatorname{sen} y)$ $x = C_1 + C_2 \ln y + \operatorname{sen} y$

29. $(2x - 3)y''' - (6x - 7)y'' + 4xy' - 4y = 8$ $y = C_1 x + C_2 e^x + C_3 e^{2x} - 2$

Sugerencia: $y = x$ es una integral particular de la ecuación reducida.

30. $(2x^3 - 1)y''' - 6x^2 y'' + 6xy' = 0$ $y = C_1(x^4 + 4x) + C_2 x^2 + C_3$

31. $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$ $\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
Sugerencia: Utilizar $\ln y = z$.

32. $(x + 2y)y'' + 2(y')^2 + 2y' = 2$ $y(x + y) = x^2 + C_1 x + C_2$

33. $(1 + 2y + 3y^2)y''' + 6y'[y'' + (y')^2 + 3yy''] = x$ $y + y^2 + y^3 = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + x^4/24$

34. $3x[y^2 y''' + 6yy'y'' + 2(y')^3] - 3y[yy'' + 2(y')^2] = -2/x$
Sugerencia: $1/x^2$ es un factor integrante. *Sol.* $y^3 = C_1 x^3 + C_2 x + C_3 + x \ln x$

35. $yy''' + 3y'y'' - 2yy'' - 2(y')^2 + yy' = e^{2x}$ *Sol.* $y^2 = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + e^{2x}$

Sugerencia: e^{-x} es un factor integrante. Resuélvase también empleando $y^2 = v$.

36. $2(y + 1)y'' + 2(y')^2 + y^2 + 2y = 0$ *Sol.* $y^2 + 2y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$
Sugerencia: Utilizar $y^2 + 2y = v$.