UNAP

Facultad de Ingeniería
de Sistemas e Informática

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO

La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.
René Descartes (1596 – 1650) filósofo y matemático francés

Lic. Manuel Tuesta Moreno Mg.
Docente FISI - UNAP

ECUACIONES LINEALES Y ECUACIONES REDUCTIBLES A LINEALES

Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=f(x) \quad \dots \quad (1)$$

donde $a_1, a_2\ y\ f$ son funciones solamente de x ò constantes. De (1) se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{a_2(x)}{a_1(x)}y=\frac{f(x)}{a_1(x)};\ a_1(x)\neq 0$$

de donde se tiene:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \quad \dots \quad (2)$$

(2) se denomina ecuación diferencial lineal de primer orden en y.

1º. Si $Q(x)=0$, (2) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \quad \dots \quad (3)$$

(3) se denomina ecuación diferencial lineal homogénea y es de variable separable.
Solución:

$$y=Ke^{-\int P(x)dx}$$

2º. Si $Q(x)\neq 0$, (2) se denomina ecuación diferencial lineal no homogénea y no es exacta. Solución:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)\,dx+c\right]$$

P-01) Resolver $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$. $R: y=2+Ce^{x^2}$

P-02) Resolver $x\frac{dy}{dx}=y+x^3+3x^2-2x$
$R: 2y=x^3+6x^2-4xLnx+Cx$

P-03) Resolver $(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$
$R: y=(x-2)^3+C(x-2)$

P-04) Resolver $\frac{dy}{dx}+y\,ctgx=5e^{cosx}$. Hallar la solución particular, dadas las condiciones iniciales: $x=\pi/2, y=-4$. $R: y\,senx+5e^{cosx}=1$

P-05) Resolver $x^3\frac{dy}{dx}+(2-3x^2)y=x^3$
$R: 2y=x^3+Cx^3e^{1/x^2}$

P-06) Resolver $\frac{dy}{dx}-2y\,ctg(2x)=1-2x\,ctg(2x)-2cosec(2x)$
$R: y=x+cos(2x)+C\,sen(2x)$

P-07) Resolver $yLny\,dx+(x-Lny)dy=0$
$R: 2xLny=Ln^2y+C$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BERNOULLI

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n; n\neq 1 \quad \dots \quad (1)$$

(1) se denomina ecuación diferencial de Bernoulli. Multiplicando por y^{-n} se obtiene:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

Haciendo $z=y^{1-n} \rightarrow \frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

Solución:

$$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left[\int e^{\int(1-n)P(x)dx}.(1-n)Q(x)\,dx+c\right]$$

P-08) Resolver $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$. R: $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$

P-09) Resolver $\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$. R: $\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}$

P-10) Resolver $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$

$$R: \frac{1}{y^3} = -1 - 2x + Ce^x$$

P-11) Resolver $\frac{dy}{dx} + y = y^2(cosx - senx)$

$$R: \frac{1}{y} = -senx + Ce^x$$

P-12) Resolver $xdy - [y + xy^3(1 + Lnx)]dx = 0$

$$R: \frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3\left(\frac{2}{3} + Lnx\right) + C$$

SUSTITUCIONES DIVERSAS

P-13) Una ecuación de la forma $f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$ es una ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dv}{dx} + vP(x) = Q(x)$$

en la nueva variable $v = f(y)$

P-14) Resolver $seny\frac{dy}{dx} = cosx(2cosy - sen^2x)$

$$R: cosy = \frac{1}{2}sen^2x - \frac{1}{2}senx + \frac{1}{4} + Ce^{-2senx}$$

P-15) Resolver $seny\frac{dy}{dx} = cosy(1 - xcosy)$

$$R: secy = x + 1 + Ce^x$$

P-16) Resolver $x\frac{dy}{dx} - y + 3x^3y - x^2 = 0$

$$y = xe^{-x^3}\int e^{x^3}\,dx + Cxe^{-x^3}$$

P-17) Resolver $(4r^2s - 6)dr + r^3ds = 0$. $R: s = \frac{3}{r^2} + \frac{C}{r^4}$

P-18) Resolver $x\,sen\theta\,d\theta + (x^3 - 2x^2cos\theta + cos\theta)dx = 0$

$$R: 2cos\theta = x + Cxe^{x^2}$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE RICCATI

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \quad \dots \quad (1)$$

Donde $P(x), Q(x)$ y $R(x)$ son funciones sòlo de x.
Sea $y = v(x)$ una solución particular, entonces la solución de (1) es $y = v(x) + z$, z es la función incógnita que se va a determinar.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE RICCATI

$$\frac{dz}{dx} + [P(x) + 2Q(x)v(x)]z + Q(x)z^2 + \\ +[v`(x) + P(x)v(x) + Q(x)v^2(x) - R(x)] = 0$$

Como $v(x)$ es una solución de (1), entonces:

$$v`(x) + P(x)v(x) + Q(x)v^2(x) - R(x) = 0$$

Se tiene:

$$\frac{dz}{dx} + [P(x) + 2Q(x)v(x)]z = -Q(x)z^2 \quad \dots \quad (2)$$

(2) es una ecuación diferencial de Bernoulli.

Resolver

P-01) $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x}y + 1 - \frac{1}{4x^2}$, una solución es $v(x) = \frac{1}{2x} + tgx$

$$R: \ y = \frac{1}{2x} + \frac{ksenx + cosx}{kcosx - senx}$$

P-02) $\frac{dy}{dx} = -y^2 + xy + 1$, una solución es $v(x) = x$

P-03) $y' = x + (1-2x)y - (1-x)y^2$ una solución es $v(x) = 1$. $R: y = 1 + \frac{1}{x + Ce^x}$