Facultad de Ingeniería
de Sistemas e Informática

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO

Si he conseguido ver más lejos, es porque
me he aupado en hombres de gigantes.
Isaac Newton.

Lic. Manuel Tuesta Moreno Mg.
Docente FISI - UNAP

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y REDUCCIÓN A ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Ejemplo: Resolver $\boldsymbol{ydx + xdy = 0}$

Nota: Esta ecuación diferencial se puede resolver por separación de variables o por diferencial del producto $\boldsymbol{x}$ *por* $\boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{ydx + xdy = d(xy) = 0 \rightarrow xy = c}$$

Recuerde: Si $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ es una función con primeras derivadas parciales continuas en una región $\boldsymbol{R}$ del plano $\boldsymbol{XY}$, su diferencial (que también se llama la diferencial total) es: $\boldsymbol{dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$ ... $(\mathbf{1})$

a) DIFERENCIAL TOTAL. Si $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R^2 \rightarrow R}$, es una función diferenciable en $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R^2}$, entonces la diferencial total de $\boldsymbol{f}$ es la función $\boldsymbol{df}$, cuyo valor está dado por:

$$\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{\partial f(x, y)}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{dx} + \frac{\boldsymbol{\partial f(x, y)}}{\boldsymbol{\partial y}}\boldsymbol{dy}$$

b) DIFERENCIAL EXACTA. Una expresión de la forma $\boldsymbol{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0}$, se denomina exacta si existe una función
$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R^2} \rightarrow \boldsymbol{R}$ tal que:

$$\boldsymbol{df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy}$$

Es decir, que toda expresión que es la diferencial total de alguna función de $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ se llama diferencial exacta.

c) DEFINICIÓN. Considere la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0} \quad \ldots \quad (\boldsymbol{\alpha})$$

si existe una función $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ tal que:

$$\frac{\boldsymbol{\partial f(x, y)}}{\boldsymbol{\partial x}} = \boldsymbol{M(x, y)} \wedge \frac{\boldsymbol{\partial f(x, y)}}{\boldsymbol{\partial y}} = \boldsymbol{N(x, y)}$$

diremos que $(\boldsymbol{\alpha})$ es una ecuación diferencial exacta.

d) TEOREMA. La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial $\boldsymbol{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0}$, sea exacta, es que:

$$\frac{\boldsymbol{\partial M(x, y)}}{\boldsymbol{\partial y}} = \frac{\boldsymbol{\partial N(x, y)}}{\boldsymbol{\partial x}} \quad \ldots \quad (\boldsymbol{\beta})$$

e) MÉTODO DE SOLUCIÓN: Dada una ecuación de la forma $\boldsymbol{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0}$ se determina si es válida la igualdad $(\boldsymbol{\beta})$. En caso afirmativo, existe una función $\boldsymbol{f}$ para la cual $\frac{\boldsymbol{\partial f(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}} = \boldsymbol{M(x, y)}$. Podemos determinar $\boldsymbol{f}$ si integramos $\boldsymbol{M(x, y)}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$, manteniendo $\boldsymbol{y}$ constante:

$$\boldsymbol{f(x, y)} = \int \boldsymbol{M(x, y)\,dx + g(y)} \quad \ldots \quad (\boldsymbol{i})$$

en donde la función arbitraria $\boldsymbol{g(y)}$ es la "constante" de integración. Ahora derivamos $(\boldsymbol{i})$ con respecto a $\boldsymbol{y}$, y suponemos que $\frac{\boldsymbol{\partial f(x,y)}}{\boldsymbol{\partial y}} = \boldsymbol{N(x, y)}$

Entonces:

$$\frac{\boldsymbol{\partial f(x, y)}}{\boldsymbol{\partial y}} = \frac{\boldsymbol{\partial \int M(x, y)\,dx}}{\boldsymbol{\partial y}} + \boldsymbol{g\grave{}(y) = N(x, y)}$$

Esto da:

$$\boldsymbol{g\grave{}(y) = N(x, y)} - \frac{\boldsymbol{\partial \int M(x, y)\,dx}}{\boldsymbol{\partial y}} \quad \ldots \quad (\boldsymbol{ii})$$

Por último integramos $(\boldsymbol{ii})$ con respecto a $\boldsymbol{y}$, y sustituimos el resultado en la ecuación $(\boldsymbol{i})$. La solución de la ecuación es $\boldsymbol{f(x, y) = c}$.

En los siguientes problemas, resuelva cada ecuación diferencial sujeta a la condición inicial indicada.

P-01) $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0; y(1)=1$

$$R1)\ \frac{1}{3}x^3+x^2y+xy^2-y=\frac{4}{3}$$

P-02) $(4y+2x-5)dx+(6y+4x-1)dy=0$

$$y(-1)=2$$

$$R2)\ 4xy+x^2-5x+3y^2-y=8$$

NOTA

1° La solución de la ecuación no es $f(x,y)$, sino que es $f(x,y)=c$ ò $f(x,y)=0$, si se usa una constante en la integración de $g`(y)$.

2° Al probar si una ecuación es exacta se debe asegurar que tiene la forma precisa $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. Quizá en ocasiones haya una ecuación diferencial de la forma $G(x,y)dx=H(x,y)dy$. En este caso se debe reformular primero como

$$G(x,y)dx-H(x,y)dy=0$$

y después identificar

$$M(x,y)=G(x,y)\ y\ N(x,y)=-H(x,y)$$

y sólo entonces aplicar la ecuación (β).

NOTA

3° A veces es posible transformar una ecuación diferencial no exacta,

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

en una exacta multiplicándola por un factor integrante $u(x,y)$. En los problemas 3 y 4 resuelva la ecuación respectiva comprobando que la función indicada, $u(x,y)$, sea un factor integrante.

P-03) $-y^2dx+(x^2+xy)dy=0; u(x,y)=\frac{1}{x^2y}$

P-04) $y(x+y+1)dx+(x+2y)dy=0; u(x,y)=e^x$

P-05) Revise el concepto de factor integrante que se presentó en los problemas 3 y 4. Las dos ecuaciones

$$Mdx+Ndy=0\ \ y\ \ uMdx+uNdy=0$$

¿son necesariamente equivalentes en el sentido que una solución de la primera también es una solución de la segunda o viceversa?

Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ no es exacta se buscará un factor integrante:

CASO 1. Si $\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=f(x)$, entonces $e^{\int f(x)dx}$ es un f. i. de $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

CASO 2. Si $\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{M(x,y)}=-g(y)$, entonces $e^{\int g(y)dy}$ es un f. i. de $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

CASO 3. Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es homogénea y $Mx+Ny\neq 0$, entonces $\frac{1}{Mx+Ny}$ es un f. i.

CASO 4. Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ se puede escribir en la forma $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$, donde $f(xy)\neq g(xy)$ entonces

$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{Mx-Ny}$ es un f. i.

CASO 5. En muchos casos el f.i. es $u(x,y)=f(x)g(y)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]-M\left[\frac{g`(y)}{g(y)}\right]$$

donde $M\ y\ N$ son funciones conocidas, por inspección se puede determinar $f(x)\ y\ g(y)$.

CASO 6. Para ciertos ejercicios su factor integrante es $u(x,y) = x^m . y^n$ donde m y n se determinan mediante la condición necesaria y suficiente de las ecuaciones diferenciales exactas.

CASO 7. A veces se halla un factor integrante por inspección, después de agrupar convenientemente los términos de la ecuación, al reconocer un cierto grupo de términos como formando parte de una diferencial exacta.

Grupo de términos	f. i.	Diferencial Exacta
$ydx - xdy$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
$ydx - xdy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
$ydx - xdy$	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{xdy - ydx}{xy} = d\left[Ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$
$ydx - xdy$	$-\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left[arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right]$
$ydx + xdy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{ydx + xdy}{xy} = d[Ln(xy)]$

Grupo de términos	f. i.	Diferencial Exacta
$ydx + xdy$	$\frac{1}{(xy)^n}$ $n > 1$	$\frac{ydx + xdy}{(xy)^n} = d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$
$ydy + xdx$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{ydy + xdx}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{1}{2}Ln(x^2 + y^2)\right]$
$ydy + xdx$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$ $n > 1$	$\frac{ydy + xdx}{(x^2 + y^2)^n} = d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}\right]$
$aydx + bxdy$ a, b const.	$x^{a-1}y^{b-1}$	$x^{a-1}y^{b-1}(aydx + bxdy) = d(x^a y^b)$

Resolver

P-06) $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0$

$$R06)\ 2yx^3 + x^2y^2 = c$$

P-07) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx +$

$$+(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$$

$$R07)\ x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$$

P-08) $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$

$$R08)\ y^4 = 4x^4Lnx + cx^4$$

P-09) $y(x^2y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2y^2)dy = 0$

$$R09)\ x = cy^2e^{\left(\frac{1}{x^2y^2}\right)}$$

P-10) $(xy + x^2y + y^3)dx + (x^2 + 2y^2)dy = 0$

$$R10)\ y^2e^{2x}(x^2 + y^2) = k$$

P-11) $2ydx - xdy = xy^3dy$

$$R11)\ 2Lnx - Lny - \frac{y^3}{3} = k$$

P-12) $xdx + ydy = (x^2 + y^2)dx$

$$R12)\ x^2 + y^2 = ce^{2x}$$

P-13) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

$$R13)\ xy = \frac{x^3}{3} + c$$

P-14) $\left(x\sqrt{x^2 + y^2} - y\right)dx + \left(y\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)dy = 0$

$$R14)\ (x^2 + y^2)^{3/2} - 3xy = c$$

P-15) $ydx + x(x^2y - 1)dy = 0$

$$R15)\ \frac{y}{x^3};\ \ 3y^2 - 2x^2y^3 = cx^2$$