Facultad de Ingeniería
de Sistemas e Informática

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO

Si he conseguido ver más lejos, es porque
me he aupado en hombres de gigantes.
Isaac Newton.

Lic. Manuel Tuesta Moreno Mg.
Docente FISI - UNAP

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO

Se representa en una de las siguientes formas:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

despejando la derivada $\frac{dy}{dx}$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

También se puede expresar como:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

SEPARACIÓN DE VARIABLES Y REDUCCIÓN A SEPARACIÓN DE VARIABLES

SEPARACIÓN DE VARIABLES. Las variables de la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se pueden separar si es posible escribir la ecuación de la forma

$$f_1(x).\, g_2(y)dx + f_2(x).\, g_1(y)dy = 0 \quad (1)$$

El factor integrante $\frac{1}{f_2(x).g_2(y)}$ hallado simplemente observando la forma de la ecuación, transforma (1) en

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0$$

de donde se puede obtener por integración la primitiva.

P-01) Resolver $x^3dx + (y + 1)^2dy = 0$

$$R: 3x^4 + 4(y + 1)^3 = c$$

P-02) Resolver $x^2(y + 1)dx + y^2(x - 1)dy = 0$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + 2Ln(x - 1)(y + 1) = c$$

P-03) Resolver $4xdy - ydx = x^2dy$

$$R: Ln(x - 4) - Lnx + 4Lny = c \text{ ó } bien\ (x - 4)y^4 = cx$$

P-04) Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$

$$R: Cx^4y^3 = e^y\ o\ bien\ x^4y^3 = Ce^y$$

P-05) Hallar la solución particular de $(1 + x^3)dy - x^2ydx = 0$ que satisfaga las condiciones iniciales $x = 1, y = 2$. R: $y^3 = 4(1 + x^3)$

ECUACIONES HOMOGÉNEAS. Una función $f(x, y)$ se llama homogénea de grado n si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

La ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se denomina homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas y del mismo grado.

La transformación $dy = udx + xdu$ reduce cualquier ecuación homogénea a la forma

$$P(x, u)dx + Q(x, u)du = 0$$

en la que las variables se pueden separar. Después de integrar, se sustituye u por y/x para recobrar las variables originales.

P-06) Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es homogénea, demostrar que con la transformación $y = ux$ se conseguirá la separación de las variables.

P-07) Resolver $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$.

$$R:\ x^3 - 2y^3 = Cx$$

P-08) Resolver $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}dx = 0$.

$$R: Cx = e^{arc\ sen(y/x)}$$

P-09) Resolver

$$\left(2x\,Sh\left(\frac{y}{x}\right)+3y\,Ch\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx-3x\,Ch\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$$

$$R:\ x^2=C\,Sh^3\frac{y}{x}$$

P-10) Resolver $(2x+3y)dx+(y-x)dy=0$

$$R: Ln\left(y^2+2xy+2x^2\right)-4arc\,tg\frac{x+y}{x}=C$$

P-11) Resolver $\left(1+2e^{x/y}\right)dx+2e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$

$$R: x+2ye^{x/y}=C$$

ECUACIONES EN LAS QUE $M(x,y)$ Y $N(x,y)$ SON LINEALES, PERO NO HOMOGÉNEAS

a) La ecuación

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0, a_1b_2-a_2b_1=0$$

se reduce por la transformación

$$a_1x+b_1y=t, dy=\frac{dt-a_1dx}{b_1}$$

a la forma

$$P(x,t)dx+Q(x,t)dt=0$$

en la que las variables son separables.

ECUACIONES EN LAS QUE $M(x,y)$ Y $N(x,y)$ SON LINEALES, PERO NO HOMOGÉNEAS

b) La ecuación

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0, a_1b_2-a_2b_1\neq 0$$

se reduce a la forma homogénea

$$(a_1x'+b_1y')dx'+(a_2x'+b_2y')dy'=0$$

mediante la transformación $x=x'+h, y=y'+k$

en la que $x=h, y=k$ son las soluciones de las ecuaciones

$$a_1x+b_2y+c_2=0\ \ Y\ \ a_2x+b_2y+c_2=0$$

P-12) Resolver $(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$

$$R: x+3y+2Ln(2-x-y)=C$$

P-13) Resolver $(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$

$$R:\ (4y-x-3)(y+2x-3)^2=C$$

P-14) Resolver $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$

$$R: Ln\left[4y^2+(x-1)^2\right]+arc\,tg\frac{2y}{x-1}=C$$

Otra forma de transformar a una ecuación diferencial homogénea, las ecuaciones diferenciales que no son homogéneas, es mediante la sustitución de la variables $y=z^\alpha$, ocurriendo esto cuando todos los términos de la ecuación son del mismo grado.

P-15) Resolver $4xy^2dx+\left(3x^2y-1\right)dy=0$

$$R: y\left(1-x^2y\right)^2=K$$

P-16) Resolver $\left(y^4-3x^2\right)dy=-xydx$

$$R:\ x^2=y^4+Ky^6$$

ECUACIONES DE LA FORMA

$$y.f(xy)dx+x.g(xy)dy=0$$

La sustitución

$$xy=z, y=\frac{z}{x}, dy=\frac{xdz-zdx}{x^2}$$

reduce una ecuación de este tipo a la forma

$$P(x,z)dx+Q(x,z)dz=0$$

en la que las variables son separables.

P-17) Resolver $y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$

$$R: 2x^2y^2 Lny - 2xy - 1 = Cx^2y^2$$

P-18) Resolver $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0$

$$R: x = Cye^{xy}$$

P-19) Resolver $(1 - xy + x^2y^2)dx + (x^3y - x^2)dy = 0$

$$R: Lnx = xy - \frac{1}{2}x^2y^2 + C$$

SUSTITUCIONES DIVERSAS

P-20) Resolver $\frac{dy}{dx} = (y-4x)^2$. R: $\frac{y-4x+2}{y-4x-2} = Ce^{-4x}$

P-21) Resolver $tg^2(x+y)dx - dy = 0$.

$$R: 2(x-y) = C + sen[2(x+y)]$$

P-22) Resolver $(2 + 2x^2y^{1/2})ydx + (x^2y^{1/2} + 2)xdy = 0$

$$R: xy(x^2y^{1/2} + 3) = C$$

P-23) Resolver

$$(2x^2 + 3y^2 - 7)xdx - (3x^2 + 2y^2 - 8)ydy = 0$$

$$R: (x^2 - y^2 - 1)^5 = C(x^2 + y^2 - 3)$$

P-24) Resolver $x^2(xdx + ydy) + y(xdy - ydx) = 0$

$$R: (x^2 + y^2)(x+1)^2 = Cx^2$$