UNAP

Facultad de Ingeniería
de Sistemas e Informática

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN n

La Matemática, como todos los restantes temas, debe ser ahora sometida al microscopio, y revelar al mundo cualquier debilidad que pueda existir en sus fundamentos. F. W. Westaway

Lic. Manuel Tuesta Moreno Mg.
Docente FISI - UNAP

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN "n"

"No sé lo que el mundo pensará de mí, pero a mí me parece ser tan solo un muchacho que juega en la playa y que se divierte al encontrar canto rodado o una concha más hermosa que de ordinario, mientras el gran océano de la verdad yace ante mis ojos sin descubrir".
Isaac Newton

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN "n"

1. Ecuaciones lineales de orden n.
2. Problemas de valor inicial y de valor en la frontera.
3. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.
4. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Métodos para obtener una integral particular.
5. Ecuaciones lineales con coeficientes variables: Las ecuaciones lineales de Cauchy y Legendre; Ecuación de segundo orden y otros tipos.
6. Sistema de ecuaciones lineales simultáneas.
7. Ecuaciones diferenciales totales.

1. ECUACIONES LINEALES DE ORDEN "n"

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=Q \quad (1)$$

Donde $P_0\neq 0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ y Q son funciones de x o constantes.
Si $Q=0$, (1) tiene la forma:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=0 \quad (2)$$

(2) se llama homogénea para indicar que todos sus términos son del mismo grado (primer) en y y sus derivadas.

Soluciones

1) Si $y=y_1(x)$ es una solución de (2), entonces $y=C_1y_1(x)$, donde C_1 es una constante arbitraria, también es una solución.
2) Sea el conjunto de soluciones $y=y_1(x), y=y_2(x), y=y_3(x), \ldots y=y_n(x)$. Una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de n soluciones sea linealmente independiente es que el wronskiano sea diferente de cero ($W\neq 0$). Si el conjunto de soluciones son linealmente independientes de (2) entonces $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ es la primitiva de (2).

Soluciones

3) Si $y=R(x)$ es una solución particular, llamada también integral particular de (1), entonces $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)+R(x)$ es la primitiva de (1).

$$y_c=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x);\ y_p=R(x)$$

La primitiva de (1) es $y=y_c+y_p \ldots (\textit{solución complementaria}+\textit{solución particular})$.
NOTA: En general, la primitiva de una ecuación diferencial no es necesariamente la solución completa de la ecuación, sin embargo, cuando la ecuación es lineal, la primitiva es su solución completa. Así pues la primitiva de (1) y (2) pueden ser llamadas soluciones completas respectivamente.

2. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE VALOR EN LA FRONTERA

VALOR INICIAL. Para una ecuación diferencial lineal, un problema de valores iníciales de orden n es resolver

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

sujeto a

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1; \dots ; y^{n-1}(x_0)=y_{n-1}$$

Manuel Tuesta Moreno 7

VALOR EN LA FRONTERA. Para una ecuación diferencial de segundo orden, otros pares de condiciones en la frontera podrían ser

$$y'(a)=y_0, \qquad y(b)=y_1$$
$$y(a)=y_0, \qquad y'(b)=y_1$$
$$y'(a)=y_0, \qquad y'(b)=y_1$$

donde y_0 y y_1 denotan constantes arbitrarias. Estos pares de condiciones son sólo casos especiales de las condiciones en la frontera generales.

$$\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=\gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=\gamma_2$$

Manuel Tuesta Moreno 8

3. ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=0 \quad (2)$$

Donde $P_0\neq 0, P_1, P_2, \dots, P_n$ son constantes.

$$Dy=\frac{dy}{dx}, D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}, \dots, D^ny=\frac{d^ny}{dx^n}$$

En la ecuación (2)

$$F(D)=(D-m_1)(D-m_2)\dots(D-m_n)=0$$

Manuel Tuesta Moreno 9

La primitiva:

a) Si $m_1\neq m_2\neq\cdots\neq m_n$, entonces

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots+c_ne^{m_nx}$$

que comprende de n soluciones linealmente independientes.

b) Si hubiera una raíz m que aparezca r veces y $n-r$ son las demás raíces y distintas, entonces la primitiva es:

$$y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}+\cdots c_{r-1}x^{r-2}e^{mx}+c_rx^{r-1}e^{mx}+$$
$$+c_{r+1}e^{m_{r+1}x}+c_{r+2}e^{m_{r+2}x}+\cdots+c_ne^{m_nx}$$

Manuel Tuesta Moreno 10

La primitiva:

c) Si hubiera raíces complejas $a+bi$ y $a-bi$, entonces la primitiva es:

$$y=e^{ax}(c_1cosbx+c_2senbx), y=c_1e^{ax}sen(bx+c_2) \text{ ó}$$
$$y=c_1e^{ax}cos(bx+c_2)$$

FÓRMULAS:

$$e^{ibx}=cosbx+isenbx;\ e^{-ibx}=cosbx-isenbx$$
$$cosbx=\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}; senbx=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}$$
$$coshbx=\frac{e^{bx}+e^{-bx}}{2}; senhbx=\frac{e^{bx}-e^{-bx}}{2}$$
$$e^{bx}=coshbx+senhbx;\ e^{-bx}=coshbx-senhbx$$

Manuel Tuesta Moreno 11

PROBLEMAS PROPUESTOS ARCHIVO 12.1

PROBLEMAS PROPUESTOS ARCHIVO 13.1

Manuel Tuesta Moreno 12

4. MÉTODOS PARA OBTENER UNA INTEGRAL PARTICULAR

1° método: Consiste en resolver una sucesión de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden como sigue:

$$F(D)y = Q \to y = \frac{1}{F(D)}Q \to$$

$$y = \frac{1}{D-m_1} \cdot \frac{1}{D-m_2} \cdots \frac{1}{D-m_n} Q$$

Póngase	Resuélvase	Obténgase
$u = \frac{1}{D-m_n}.Q$	$\frac{du}{dx} - m_n u = Q$	$u = e^{m_n x}\int Qe^{-m_n x}\,dx$
$v = \frac{1}{D-m_{n-1}}.u$ $\vdots$	$\frac{dv}{dx} - m_{n-1}v = u$ $\vdots$	$v = e^{m_{n-1}x}\int ue^{-m_{n-1}x}\,dx$ $\vdots$
$y = \frac{1}{D-m_1}.w$	$\frac{dy}{dx} - m_1 y = w$	$y = e^{m_1 x}\int we^{-m_1 x}\,dx$

$$y = e^{m_1 x}\int e^{(m_2-m_1)x}\int e^{(m_3-m_2)x}\cdots\int e^{(m_n-m_{n-1})x}\int e^{-m_n x}\,(dx)^n$$

4. MÉTODOS PARA OBTENER UNA INTEGRAL PARTICULAR

2° método: Expresando como la suma de n fracciones parciales:

$$F(D)y = Q \to y = \frac{1}{F(D)}Q \to y = \frac{1}{D-m_1} \cdot \frac{1}{D-m_2} \cdots \frac{1}{D-m_n} Q$$

$$y = \left(\frac{N_1}{D-m_1} + \frac{N_2}{D-m_2} + \cdots + \frac{N_n}{D-m_n}\right)Q$$

Entonces la integral particular es:

$$y = N_1 e^{m_1 x}\int Qe^{-m_1 x}\,dx + N_2 e^{m_2 x}\int Qe^{-m_2 x}\,dx + \cdots + N_n e^{m_n x}\int Qe^{-m_n x}\,dx$$

PROBLEMAS PROPUESTOS
ARCHIVO 14.1

4. MÉTODOS PARA OBTENER UNA INTEGRAL PARTICULAR

$$F(D)y = \left(D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + \cdots + P_{n-1}D + P_n\right)y = Q \quad \ldots \quad (3)$$

3° método: Variación de parámetros. De la solución complementaria:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

se reemplaza las "c" por las funciones desconocidas de "x", las L. El método consiste en un procedimiento para determinar las L de forma que (4) satisfaga (3).

$$y = L_1 y_1(x) + L_2 y_2(x) + \cdots + L_n y_n(x) \quad \ldots \quad (4)$$

4. MÉTODOS PARA OBTENER UNA INTEGRAL PARTICULAR

$$F(D)y = \left(D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + \cdots + P_{n-1}D + P_n\right)y = Q \quad \ldots \quad (3)$$

4° método: Coeficientes indeterminados

$$y = Ar_1(x) + Br_2(x) + Cr_3(x) + \cdots + Mr_n(x) \quad \ldots \quad (\beta)$$

Donde las funciones $r_1(x), r_2(x), r_3(x), \cdots, r_r(x)$ son los términos de Q y aquellos que se deducen de éstos mediante derivadas y $A, B, C, \cdots, M$ son constantes.

Si $F(D)y = secx$, el método falla; puesto que es infinito el número de términos nuevos que se obtienen derivando $Q = secx$.

Hay que modificar el procedimiento en el caso:
a) Un término de $\boldsymbol{Q}$ también es un término de la función complementaria. Si un término de $\boldsymbol{Q}$, por ejemplo, $\boldsymbol{u}$, también es un término de la función complementaria correspondiendo a una raíz $\boldsymbol{m}$, múltiple de orden $\boldsymbol{s}$, se introduce en $(\mathbf{3})$ un término $\boldsymbol{x^s u}$ más los términos que se deducen de él derivando.
b) Un término de $\boldsymbol{Q}$ es $\boldsymbol{x^r u}$ y $\boldsymbol{u}$ es un término de la función complementaria. Si $\boldsymbol{u}$ corresponde a una raíz $\boldsymbol{m}$, múltiple de orden $\boldsymbol{s}$, $(\mathbf{3})$ ha de contener el término $\boldsymbol{x^{r+s}u}$ más los términos que se deducen de él por derivación.

PROBLEMAS PROPUESTOS
ARCHIVO 15.1

4. MÉTODOS PARA OBTENER UNA INTEGRAL PARTICULAR

5° métodos abreviados: De una ecuación diferencial lineal $\boldsymbol{F(D)y = Q}$ con coeficientes constantes esta dado por $(\mathbf{5})$. Para ciertas formas de $\boldsymbol{Q}$ se puede abreviar notablemente el cálculo de este símbolo.

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{F(D)}.Q} \quad \ldots \quad (\mathbf{5})$$

5° métodos abreviados:
a) Si $\boldsymbol{Q}$ es de la forma $\boldsymbol{e^{ax}}$:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{F(D)}.e^{ax} = \frac{1}{F(a)}.e^{ax}; F(a) \neq 0}$$

b) Si $\boldsymbol{Q}$ es de la forma $\boldsymbol{sen(ax+b)}$ ó $\boldsymbol{cos(ax+b)}$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{F(D^2)}.sen(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}.sen(ax+b); F\left(-a^2\right) \neq 0}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{F(D^2)}.cos(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}.cos(ax+b); F\left(-a^2\right) \neq 0}$$

c) Si $\boldsymbol{Q}$ es de la forma $\boldsymbol{x^m}$:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{F(D)}.x^m = \left(a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n\right)x^m}$$

Obtenemos desarrollando $\mathbf{1}/\boldsymbol{F(D)}$ según potencias crecientes de "$\boldsymbol{D}$" y suprimiendo todos los términos después de $\boldsymbol{D^n}$, ya que $\boldsymbol{D^n x^m = 0}$ cuando $\boldsymbol{n > m}$.

d) Si $\boldsymbol{Q}$ es de la forma $\boldsymbol{e^{ax}V(x)}$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{F(D)}.e^{ax}V(x) = e^{ax}.\frac{1}{F(D+a)}.V(x)}$$

e) Si $\boldsymbol{Q}$ es de la forma $\boldsymbol{x.V(x)}$:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{F(D)}.xV(x) = x.\frac{1}{F(D)}.V(x) - \frac{F'(D)}{[F(D)]^2}.V(x)}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS
ARCHIVO 16.1

5. ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES VARIABLES

5.1) ECUACIÓN LINEAL DE CAUCHY

5.2) ECUACIÓN LINEAL DE LEGENDRE

5.3) ECUACIÓN DE SEGUNDO ORDEN

5.4) DIVERSOS TIPOS

5.1) ECUACIÓN LINEAL DE CAUCHY

$$P_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+P_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}x\frac{dy}{dx}+P_ny=Q \quad \ldots \quad (6)$$

en los que $P_0, P_1, \cdots, P_n$ son constantes.

Solución de la ecuación lineal de Cauchy

Transformación adecuada $x=e^z$, entonces si φ está definido por $\varphi=d/dz$:

$$Dy=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\rightarrow x.Dy=\varphi y$$

Solución de la ecuación lineal de Cauchy

$$D^2y=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right]=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)\rightarrow x^2D^2y=\varphi(\varphi-1)y$$

Sucesivamente:

$$\rightarrow x^rD^ry=\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)\cdots(\varphi-r+1)y$$

Haciendo las sustituciones en (6) se convierte en:

$$[P_0\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)\cdots(\varphi-n+1)$$
$$+P_1\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)\cdots(\varphi-n+2)+\cdots+P_{n-1}\varphi+P_n]y$$
$$=Q(e^z)$$

(una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes)

5.2) ECUACIÓN LINEAL DE LEGENDRE

$$P_0(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx}+P_ny=Q \quad (7)$$

en los que $P_0, P_1, \cdots, P_n$ son constantes.

Solución de la ecuación lineal de Legendre

Transformación adecuada $ax+b=e^z$, entonces si φ está definido por $\varphi=d/dz$:

$$Dy=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dz}\rightarrow(ax+b)Dy=a\varphi y$$

Solución de la ecuación lineal de Legendre

Transformación adecuada $ax+b=e^z$, entonces:

$$D^2y=\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dz}\right)=\frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)\rightarrow$$
$$\rightarrow(ax+b)^2D^2y=a^2\varphi(\varphi-1)y$$

Sucesivamente:

$$\rightarrow(ax+b)^rD^ry=a^r\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)\cdots(\varphi-r+1)y$$

Haciendo las sustituciones en (7), se convierte en:

$$[P_0a^n\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)\cdots(\varphi-n+1)$$
$$+P_1a^{n-1}\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)\cdots(\varphi-n+2)+\cdots+P_{n-1}a\varphi+P_n]y$$
$$=Q\left(\frac{e^z-b}{a}\right)$$

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

PROBLEMAS PROPUESTOS ARCHIVO 17.1

5.3) ECUACIÓN DE SEGUNDO ORDEN

$$\frac{d^2y}{dx^2}+R(x)\frac{dy}{dx}+S(x)y=Q(x) \quad \cdots \quad (8)$$

Procedimientos:

5.3.1. Cambio de variable dependiente
5.3.2. Cambio de variable independiente
5.3.3. Descomposición en factores de tipo operador

5.3.1) CAMBIO DE VARIABLE DEPENDIENTE

$y=uv, u=u(x)$ y $v=v(x)$, (8) se convierte:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+R_1(x)\frac{dv}{dx}+S_1(x)y=Q_1(x) \quad \cdots \quad (9)$$

Con:

$$R_1(x)=\frac{2}{u}\frac{du}{dx}+R(x) \quad \cdots \quad (\alpha)$$

$$S_1(x)=\frac{1}{u}\left[\frac{d^2u}{dx^2}+R(x)\frac{du}{dx}+S(x)u\right] \quad \cdots \quad (\beta)$$

$$Q_1(x)=\frac{Q(x)}{u} \quad \cdots \quad (\theta)$$

1° Halle por simple inspección, o de otra manera, una integral particular $u=u(x)$ de la ecuación que se tiene al hacer $Q(x)=0$. La sustitución $y=uv$ conducirá a una ecuación lineal en la que no aparecerá la variable dependiente. Esta ecuación es de primer orden en $dv/dx=P$ y $d^2v/dx^2=dp/dx$.

Para la ecuación $(D^2+RD+S)y=0$
a) $y=x$ es una integral particular, si $R+xS=0$
b) $y=e^x$ es una integral particular, si $1+R+S=0$
c) $y=e^{-x}$ es una integral particular, si $1-R+S=0$
d) $y=e^{mx}$ es una integral particular, si $m^2+mR+S=0$

2° Si no se puede hallar una integral particular, calcular: $S_1=S-\frac{1}{4}R^2-\frac{1}{2}\frac{dR}{dx}=A$. Se obtiene haciendo en (α) igual a cero.
$\frac{du}{dx}=-\frac{u}{2}R(x)$, hallando $\frac{d^2u}{dx^2}$ y reemplazando en (β).

i) Si A es una constante, (9) se convierte en $\frac{d^2v}{dx^2}+Av=\frac{Q}{u}$ que es una ecuación lineal con coeficientes constantes.
ii) Si $S_1=A/x^2$, (9) se convierte en: $x^2\frac{d^2v}{dx^2}+Av=\frac{Q}{u}x^2$, que es una ecuación de Cauchy y la sustitución $x=e^z$ le reducirá a coeficientes constantes.

5.3.2) CAMBIO DE VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea la transformación $z=\theta(x)$. Entonces,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx};\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}$$

y (8) se convierte en: $\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+R\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz}+Sy=Q$

o bien $\frac{d^2y}{dz^2}+\left[\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+R\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right]\frac{dy}{dz}+\frac{Sy}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad \cdots \quad (10)$

Haciendo: $\pm a^2=\frac{S}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\rightarrow\frac{dz}{dx}=\sqrt{\pm\frac{S}{a^2}}$. Cuyo signo es aquel que haga dz/dx real. Siendo a^2 una constante positiva cualquiera. Se puede , por tanto, tomar $a^2=1$.

5.3.2) CAMBIO DE VARIABLE INDEPENDIENTE

$\frac{dz}{dx}=\sqrt{\pm\frac{S}{a^2}}$ y sustituyendo en $\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+R\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=A$, si esta expresión es una constante, la transformación: $z=\int\sqrt{\pm\frac{S}{a^2}}dx$ conduce a una ecuación lineal con coeficientes constantes. (10) se convierte en:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+A\frac{dy}{dz}\pm a^2y=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

5.3.3) DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES DE TIPO OPERADOR

Se puede separar el miembro de la izquierda de

$$\{P(x)D^2 + R(x)D + S(x)\}y = Q(x)$$

en dos operadores lineales $F_1(D)$ y $F_2(D)$ de modo que

$$\{F_1(x).F_2(x)\}y = F_1(D)\{F_2(D)y\} = \{P(x)D^2 + R(x)D + S(x)\}y = Q(x)$$

Entonces, poniendo $F_2(D)y = v$ se convierte en $F_1(x)v = Q(x)$, una ecuación lineal de orden uno.

NOTA:

$$F_1(D).F_2(D)y \neq F_2(D).F_1(D)y$$

PROBLEMAS PROPUESTOS
ARCHIVO 18.1

5.4) DIVERSOS TIPOS

5.4.1. Ecuaciones en las que falta la variable dependiente
5.4.2. Ecuaciones en las que falta la variable independiente
5.4.3. Ecuaciones lineales con integral particular conocida
5.4.4. Ecuaciones exactas
5.4.5. Factor integrante

5.4.1. Ecuaciones en las que falta la variable dependiente

$$f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \cdots, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0 \quad \cdots \quad (11)$$

La sustitución $\frac{dy}{dx} = P, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx}, \cdots$ reducirá el orden en una unidad.

E-01) $y'' + (y')^2 + 1 = 0$. $R: y = Ln[cos(x - c_1)] + c_2$

E-02) $y''' + y'' = x^2$.

$$R: y = c_1e^{-x} + c_2x + c_3 + \frac{x^2(x^2 - 4x + 12)}{12}$$

5.4.2. Ecuaciones en las que falta la variable independiente

$$f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \cdots, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0 \quad \cdots \quad (12)$$

La sustitución

$$\frac{dy}{dx} = P; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx} = P\frac{dp}{dy}; \frac{d^3y}{dx^3} = P^2\frac{d^2P}{dy^2} + P\left(\frac{dP}{dy}\right)^2; etc.$$

reducirá el orden en una unidad.

E-03) $yy'' + (y')^3 = 0; R: x = c_1 + c_2y + yLny$

E-04) $yy'' = 2(y')^2 - 2y'. R: \ c_1y = tg(c_1x + c_2)$

5.4.3. Ecuaciones lineales con integral particular conocida

Si se conoce una integral particular $y = u(x)$ de la ecuación: $(P_0D^n + P_1D^{n-1} + \cdots + P_{n-1}D + P_n)y = 0$

Entonces la sustitución $y = uv$ transformará

$$(P_0D^n + P_1D^{n-1} + \cdots + P_{n-1}D + P_n)y = Q(x)$$

en una ecuación del mismo orden, pero sin término con variable dependiente. Una vez así transformada se puede reducir el orden.

E-05) $y = x$ es una integral particular de la ecuación reducida $(2x - 3)y''' - (6x - 7)y'' + 4xy' - 4y = 8$

$$R: y = c_1x + c_2e^x + c_3e^{2x} - 2$$

E-06) Resolver:

$(2x^3 - 1)y''' - 6x^2y'' + 6xy' = 0. R: y = c_1(x^4 + 4x) + c_2x^2 + c_3$

5.4.4. Ecuaciones exactas

La ecuación diferencial:

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \cdots, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = Q(x) \quad \cdots \quad (13)$$

se denomina una ecuación exacta si se puede obtener derivando una vez una ecuación:

$$g\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \cdots, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = Q_1(x) \quad \cdots \quad (14)$$

de un orden menor en una unidad.

La ecuación: $(P_0D^n + P_1D^{n-1} + \cdots + P_{n-1}D + P_n)y = Q(x)$

es exacta siempre que:

$$P_n - P'_{n-1} + P''_{n-2} - P'''_{n-3} + \cdots + (-1)^n P_0^{(n)} = 0 \quad \cdots \quad (\alpha)$$

Resolver:

E-07) $x^3y''' + 5x^2y'' + (2x - x^3)y' - (2 + x^2)y = 40x^3 - 4x^5$

$$R: y = \frac{1}{x^2}(c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3x + x^5)$$

E-08) $yy'' + (y')^2 = 2.$ R: $y^2 = 2x^2 + c_1x + c_2$

E-09) $yy'' = (y')^2(1 - y'cosy + yy'seny)$

$$R: x = c_1 + c_2Lny + seny$$

E-10) $(1 + 2y + 3y^2)y'' + 6y'[y'' + (y')^2 + 3yy''] = x$

$$R: y + y^2 + y^3 = c_1x^2 + c_2x + c_3 + x^4/24$$

Resolver:

E-11) $(x + 2y)y'' + 2(y')^2 + 2y' = 2$

$$R: y(x + y) = x^2 + c_1x + c_2$$

E-12) $yy''' + 3y'y'' - 2yy'' - 2(y')^2 + yy' = e^{2x}$

$$R: y^2 = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x + e^{2x}$$

5.4.5. Factor integrante

Resolver:

E-13) $3x[y^2y''' + 6yy'y'' + 2(y')^3] - 3y[yy'' + 2(y')^2] = -2/x$

$Sug. f.i.\ 1/x^2$; R: $y^3 = c_1x^3 + c_2x + c_3 + xLnx$

E-14) $2(y + 1)y'' + 2(y')^2 + y^2 + 2y = 0$; $Sug.\ y^2 + 2y = v$

R: $y^2 + 2y = c_1cosx + c_2senx$

E-15) $yy'' - (y')^2 = y^2Lny$; $Sug.\ Lny = z$; $R: Lny = c_1e^x + c_2e^{-x}$

PROBLEMAS PROPUESTOS
ARCHIVO 19.1

6. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES LINEALES

6.1) APLICACIONES GEOMÉTRICAS

6.2) APLICACIONES FÍSICAS: MOVIMIENTO OSCILATORIO

6.3) VIGAS HORIZONTALES

6.4) CIRCUITOS ELÉCTRICOS

6.1. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

En coordenadas polares el radio de curvatura R de una curva $y = f(x)$ en un punto general de ella está dado por:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

P-01) Determinar la curva cuyo radio de curvatura en un punto cualquiera $P(x, y)$ es igual a la normal en P y tiene: a) el mismo sentido b) sentido opuesto

R: $a)\ y^2 + (x - c_1)^2 = c_2$; $b)\ y = \frac{1}{2}A[e^{(B\pm x)/A} + e^{-(B\pm x)/A}]$

6.2. APLICACIONES FÍSICAS

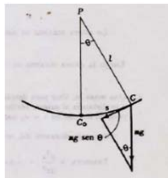
Movimiento de un péndulo

P-02) Un péndulo, de longitud "l" y masa "m", suspendido en P se mueve en un plano vertical que pasa por P. Prescindiendo de todas las fuerzas excepto de la gravedad, hállese su movimiento.

$$R: \theta = C_1 cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 sen\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$Amplitud = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

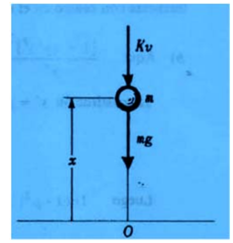
$$Periodo\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Movimiento a lo largo de una línea recta

P-03) Una masa "m" se proyecta verticalmente hacia arriba desde "O" con una velocidad inicial "v_0". Hallar la altura máxima alcanzada, suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad.

$$R: x_{máx} = \frac{1}{k}\left[v_0 - \frac{g}{k}Ln\left(\frac{g + kv_0}{g}\right)\right]$$



P-04) Una masa m, libre para desplazarse a lo largo del eje X, es atraída hacia el origen con una fuerza proporcional a su distancia al origen. Hallar el movimiento: a) si se pone en marcha en $x = x_0$ partiendo del reposo y b) si se pone en marcha en $x = x_0$ con una velocidad inicial v_0, alejándose del origen.

$$a)\ x = x_0 cos(kt); A = x_0; T = 2\pi/k$$

$$b) x = (v_0/k)sen(kt) + x_0 cos(kt);$$

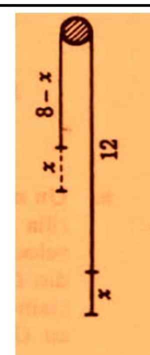
$$A = \sqrt{v_0^2 + k^2x_0^2}/k\,; T = 2\pi/k$$

Movimiento de un sistema complejo

P-05) Se ha colocado una cadena sobre una clavija pulida, colgando, de un lado, 8 dm y del otro 12 dm. Hallar el tiempo en que la cadena tarda, al resbalar, en caerse: a) si se prescinde del rozamiento y b) si el rozamiento es igual al peso de 1 dm de cadena.

$$R: a) t = \sqrt{10/g}\,Ln(5 + 2\sqrt{6})seg.$$

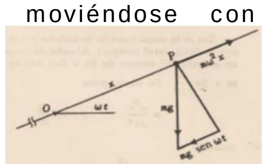
$$b) t = \sqrt{10/g}\,Ln[(19 + 4\sqrt{22})/3]$$



P-06) Un abalorio se desliza sin rozamiento a lo largo de una varilla recta de masa despreciable cuando la varilla gira con velocidad angular constante w alrededor de su punto medio O. Determinar el movimiento a) si el abalorio está inicialmente en reposo en O y b) si el abalorio está inicialmente en O moviéndose con velocidad $g/2w$.

$$R: a) x = (g/2w^2)[sen(wt) - senh(wt)]$$

$$b) x = (g/2w^2)sen(wt)$$

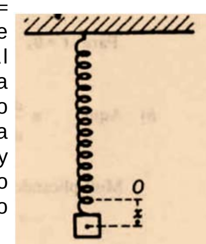


Resortes

P-07) Un resorte, para el que $K = 48\,Kg/dm$, cuelga verticalmente teniendo fijo su extremo superior. Al extremo inferior se sujeta una masa que pesa $16Kg$. Una vez en equilibrio el sistema se tira de la masa hacia abajo haciéndola desplazar $1/6\,dm$ y se suelta. Discutir el movimiento resultante de la masa despreciando la resistencia del aire.

$$x = (1/6)cos(\sqrt{96}t); M.A.S.; A = 1/6$$

$$T = 2\pi/\sqrt{96}\,seg; f = \sqrt{96}/2\pi\,ciclo/seg$$



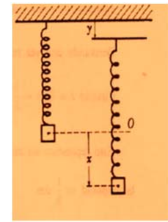
P-08) Resolver el problema 07, si el medio ofrece una resistencia ($\boldsymbol{Kg}$) igual a: a) $\boldsymbol{v/64}$ y b) $\boldsymbol{64v}$, donde $\boldsymbol{v}$ se expresa en $\boldsymbol{dm/seg}$.

$\boldsymbol{a)x = e^{-0.0156t}\left[\frac{1}{6}cos(9.8t) + 0.000265sen(9.8t)\right]}$ movimiento oscilatorio amortiguado. $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{9.8/2\pi = 1.56\,ciclos/seg}$.

$\boldsymbol{b)x = 0.166e^{-0.76t} - 0.001e^{-127.24t}}$ el movimiento no es vibratorio. Después del desplazamiento inicial, la masa se mueve despacio hacia la posición de equilibrio a medida que $\boldsymbol{t}$ aumenta.

P-09) Resolver el problema 08 ($\boldsymbol{a}$) si, además, al soporte del resorte se le da un movimiento $\boldsymbol{y = cos(4t)dm}$.

$\boldsymbol{R: x = e^{-0.0156t}[-0.0333cos(9.8t) - 0.0008sen(9.8t)] +}$
$\boldsymbol{+0.0019sen(4t) + 1.2cos(4t)}$



El movimiento consta de un movimiento armónico amortiguado que gradualmente se desvanece (fenómeno transitorio) y un movimiento armónico que permanece (fenómeno de régimen permanente). Al cabo de cierto tiempo el único movimiento efectivo es el del régimen permanente. Estas oscilaciones del régimen permanente tendrán un periodo y una frecuencia iguales a los de la función, de forzamiento $y = cos4t$, $T = 2\pi/4 = 1.57seg; f = 4/2\pi = 0.637; A = \sqrt{(0.0019)^2 + (1.2)^2} = 1.2dm$

P-10) Un resorte experimenta un alargamiento de $2.5cm$ por haber suspendido de él una masa de $20Kg$. Al extremo superior del resorte se le da un movimiento $y = 4(sen2t + cos2t)dm$. Hallar la ecuación del movimiento prescindiendo de la resistencia del aire.

$R: x = -0.13cos(\sqrt{128}t) - 0.73sen(\sqrt{128}t) + 4.13[sen(2t) + cos(2t)]$

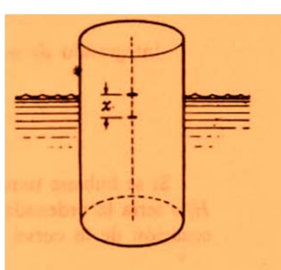
P-11) Una masa de $64Kg$ se suspende de un resorte para el que $k = 50\,Kg/dm$, con lo que se interrumpe el estado de reposo en que se encontraba. Hallar la posición de la masa al cabo de un tiempo t si se aplica al sistema una fuerza igual a $4sen(2t)$.

$\boldsymbol{R: x = -0.038sen5t + 0.095sen2t}$ el desplazamiento es aquí la suma algebraica de dos desplazamientos armónicos de periodos diferentes.

P-12) Al suspender una masa de $16kg$ de un resorte para el que $K = 48\,Kg/dm$ se interrumpe su estado de reposo. Hallar el movimiento de la masa si al soporte del resorte se le imprime un movimiento $y = sen(\sqrt{3g}t)dm$.

$\boldsymbol{R: x = \frac{1}{2}sen(\sqrt{3gt}) - \frac{\sqrt{3g}}{2}tcos(\sqrt{3gt})}$ El primer término representa un movimiento armónico simple mientras que el segundo representa un movimiento vibratorio con amplitud creciente (debido al factor t). Cuando $t$aumenta, la amplitud de la oscilación aumenta hasta que se produce una avería mecánica.

P-13) Una boya cilíndrica de $2dm$ de diámetro está en un líquido (densidad $62.4\,Kg/dm^3$) de modo que su eje permanece vertical. Se ha observado que si se empuja suavemente y se suelta tiene un periodo de vibración de $2seg$. Hallar el peso del cilindro.

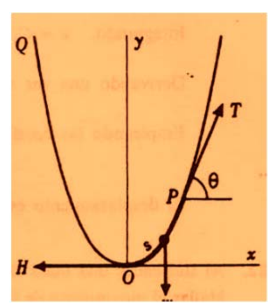


$\boldsymbol{R: 640Kg}$

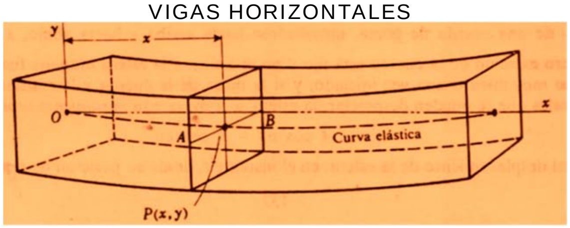
Cable suspendido

P-14) Determinar la forma que adopta un cable uniforme, suspendido de sus dos extremos, y sometido únicamente a la acción de su propio peso, $w\ Kg/m$ de longitud.

$$\boldsymbol{y = \frac{H}{w}\left[Ch\left(\frac{w}{H}x\right) - 1\right]}$$



VIGAS HORIZONTALES



$$M = EI/R \quad \ldots \quad (\alpha)$$

$\boldsymbol{M}$:Momento; $\boldsymbol{E}$: Módulo de elasticidad de la viga
$\boldsymbol{I}$:Momento de inercia de la sección transversal con respecto a $\boldsymbol{AB}$; $\boldsymbol{R}$: Radio de curvatura de la curva elástica en $\boldsymbol{P}$.

$$R = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}};\ \frac{dy}{dx} \to 0;\ R = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

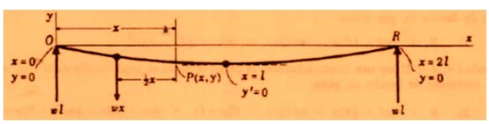
Entonces $(\boldsymbol{\alpha})$ se reduce a:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \quad \ldots \quad (\beta)$$

Se dice que una viga está *empotrada* en un extremo si se mantiene horizontal en él gracias a una adecuada obra de albañilería; caso contrario se dice que está ahí simplemente *apoyada.*

Vigas horizontales

P-15) Una viga horizontal de 27 metros de longitud está apoyada en sus extremos. Hallar la ecuación de su curva elástica y su máxima deformación vertical (flecha) cuando tiene una carga uniformemente distribuida de $w\,Kg/m$.

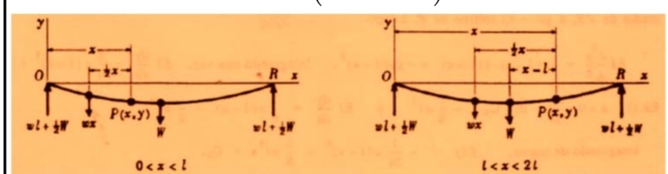


$$y = \frac{w}{24EI}\left(4lx^3 - x^4 - 8l^3x\right);\ y_{mzx} = -\frac{5wl^4}{24EI}$$

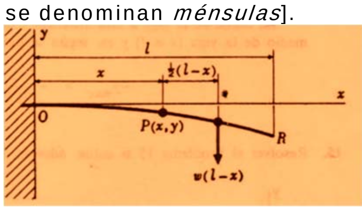
P-16) Resolver el problema 15 si actúa, además, una carga de $W\ Kg$ en medio de la viga.

$$y = \frac{w}{24EI}\left(4lx^3 - x^4 - 8l^3x\right) + \frac{W}{12EI}\left(3lx^2 - |l-x|^3 - 6l^2x + l^3\right)$$

$$y_{máx} = -\left(\frac{5wl^4}{24EI} + \frac{Wl^3}{6EI}\right)$$



P-17) Una viga horizontal de "l" metros de longitud está empotrada en un extremo y libre en el otro. Hallar la ecuación de su curva elástica y la flecha máxima si la carga uniformemente repartida es $w\ Kg/m$. [Las vigas de este tipo se denominan *ménsulas*].



$$R: y = \frac{w}{24EI}\left(4lx^3 - 6l^2x^2 - x^4\right);\ -y_{máx} = \frac{wl^4}{8EI}$$

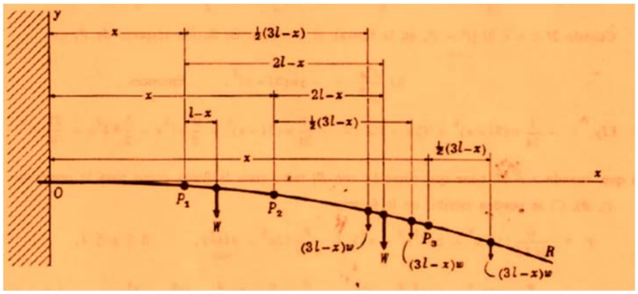
P-18) Sea una ménsula de $3l$ metros de longitud, cuyas cargas son una carga uniformemente repartida de $w\,Kg/m$ y dos cargas de $W\,Kg$ aplicadas cada una en los puntos que distan l y $2l$ metros del extremo fijo. Hallar la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima. (ver figura en la diapositiva siguiente). *Respuesta:*

$$y = \frac{w}{24EI}\left(12lx^3 - 54l^2x^2 - x^4\right) + \frac{W}{6EI}\left(2x^3 - 9lx^2\right);\ 0 \le x \le l$$

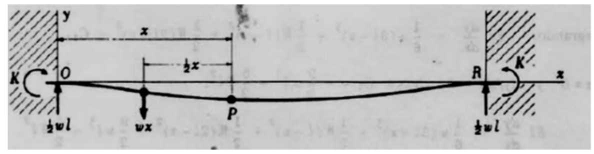
$$y = \frac{w}{24EI}\left(12lx^3 - 54l^2x^2 - x^4\right) + \frac{W}{6EI}\left(x^3 - 6lx^2 - 3l^2x + l^3\right);\ l \le x \le 2l$$

$$y = \frac{w}{24EI}\left(12lx^3 - 54l^2x^2 - x^4\right) + \frac{W}{2EI}\left(3l^3 - 5l^2x\right);\ 2l \le x \le 3l$$

$$Flecha: -y_{máx} = \frac{1}{8EI}\left(81wl^4 + 48Wl^3\right)$$

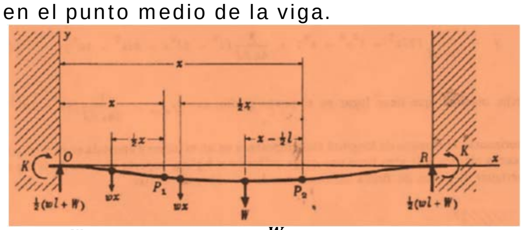


P-19) Una viga horizontal de "l" metros de longitud está empotrada en ambos extremos. Hallar la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima si tiene una carga uniformemente distribuida de $w\,Kg/m$.



$$R: y = \frac{wx^2}{24EI}(2lx - l^2 - x^2); -y_{máx} = \frac{wl^4}{384EI}$$

P-20) Resolver el problema 19 si además actúa un peso $W\,Kg$ en el punto medio de la viga.

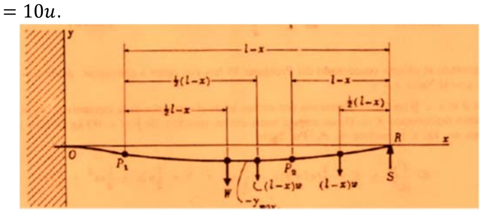


$$y = \frac{w}{24EI}(2lx^3 - l^2x^2 - x^4) + \frac{W}{48EI}(4x^3 - 3lx^2); 0 \le x \le l/2$$

$$y = \frac{w}{24EI}(2lx^3 - l^2x^2 - x^4) + \frac{W}{48EI}(l^3 - 6l^2x + 9lx^2 - 4x^3); l/2 \le x \le l$$

$$-y_{máx} = \frac{1}{384EI}(wl^4 + 2Wl^3)$$

P-21) Una viga horizontal de "l" metros de longitud está empotrada en un extremo y apoyada en el otro. a) Hallar la ecuación de la curva elástica si la viga tiene una carga uniforme $w\,Kg/m$ y soporta un peso de WKg en el punto medio. b) Averiguar el punto de flecha máxima cuando $l = 10$ y $W = 10u$.



Circuitos eléctricos

P-22) Un circuito eléctrico consta de una inductancia de 0,1 henrios, una resistencia de 20 ohmios y un condensador cuya capacidad es de 25 microfaradios ($1\,microfaradio = 10^{-6}faradios$). Hallar la carga "$q$" y la corriente "$i$" en el tiempo t , siendo las condiciones iniciales a) $q = 0{,}05$ culombios, $i = dq/dt = 0$ para $t = 0$, b) $q = 0{,}05$ culombios, $i = -0{,}2$ amperios para $t = 0$.

***Respuesta** (a)*

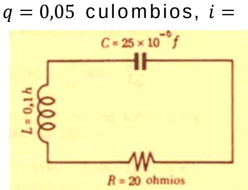
$q = e^{-100t}(0.05cos624.5t + 0.008sen624.5t)$

$i = -0.32e^{-100t}sen624.5t$

***Respuesta** (b)*

$q = e^{-100t}(0.05cos624.5t + 0.0077sen624.5t)$

$i = e^{-100t}(-0.2cos624.5t - 32.0sen624.5t)$

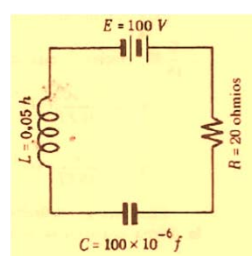


P-23) Un circuito consta de una inductancia de 0,05 henrios, una resistencia de 20 ohmios, un condensador cuya capacidad es de 100 microfaradios y una f.e.m. de $E = 100\,voltios$. Hallar "i" y "q" siendo las condiciones iniciales $q = 0$, $i = 0$ para $t = 0$.

$R: q = e^{-200t}(-0.01cos400t - 0.005sen400t) + 0.01$

$i = 5e^{-200t}sen400t$

Aquí i se hace despreciable muy pronto mientras que q, en todo caso, llega a ser $q = 0.01\,culombios$.



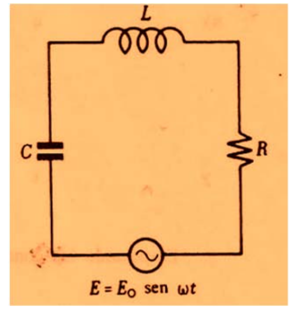
P-24) Resolver el problema 23 suponiendo que hay una f.e.m. variable $\boldsymbol{E(t)=100cos(200t)}$.

$\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{q=e^{-200t}[-0.01cos(400t)-0.0075sen(400t)]+}$
$\boldsymbol{+0.01cos(200t)+0.005sen(200t)}$
$\boldsymbol{i=e^{-200t}[-cos(400t)+5.5sen(400t)]-}$
$\boldsymbol{-2sen(200t)+cos(200t)}$

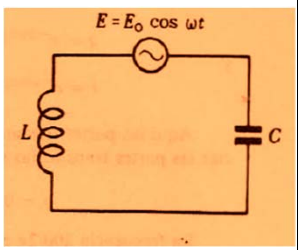
Aquí las partes transitorias de $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{i}$ se hacen muy pronto despreciables. Por esta razón, si se pueden despreciar las partes transitorias solo es necesario hallar las soluciones de régimen permanente.

P-25) Deducir la fórmula para la corriente de régimen permanente en el caso de un circuito que contenga una inductancia "L", una resistencia "R", una capacidad "C" y una f.e.m. $E(t)=E_0 sen(wt)$.

$\boldsymbol{R}$:



P-26) Un circuito consta de una inductancia "L", un condensador de capacidad "C" y una f.e.m. "E" conocida como un oscilador armónico. Hallar "q" e "i" cuando $E=E_0 cos(wt)$ y las condiciones iniciales son $q=q_0, i=i_0$ para $t=0$.



PROBLEMAS PROPUESTOS ARCHIVO 20.1

7. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con coeficientes constantes (con una variable independiente)

Nota: El número de constantes arbitrarias independientes que aparecen en la solución general del sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f_1(D)+g_1(D)=h_1(t)} \\ \boldsymbol{f_2(D)+g_2(D)=h_2(t)} \end{cases}$$

es igual al grado de $\boldsymbol{D}$ en el determinante: $\Delta=\begin{vmatrix} \boldsymbol{f_1(D)} & \boldsymbol{g_1(D)} \\ \boldsymbol{f_2(D)} & \boldsymbol{g_2(D)} \end{vmatrix}$

siempre que Δ no sea idénticamente nulo. Si $\Delta=\boldsymbol{0}$, el sistema es independiente, tales sistemas no se considerarán aquí. Se puede generalizar el teorema al caso de "$\boldsymbol{n}$" variables dependientes.

PROBLEMAS PROPUESTOS ARCHIVO 21.1

8. ECUACIONES DIFERENCIALES TOTALES

- La condición de integrabilidad.
- Las condiciones para que sea exacta.
- Resolución de una ecuación diferencial total integrable.
- Pares de ecuaciones diferenciales con tres variables.

ECUACIONES DIFERENCIALES TOTALES

Las ecuaciones diferenciales cuya forma general es: $\boldsymbol{P(x,y,z,\dots t)dx+Q(x,y,z,\dots t)dy+\ \dots+T(x,y,z,\dots t)dt=0}$ se denominan ecuaciones diferenciales totales.

Ejemplo:

$\boldsymbol{A)}$ $\boldsymbol{(3x^2y^2-e^xz)dx+(2x^3y+senz)dy+(ycosz-e^x)dz=0}$

$\boldsymbol{B)}$ $\boldsymbol{(3xz+2y)dx+xdy+x^2dz=0}$

$\boldsymbol{C)}$ $\boldsymbol{ydx+dy+dz=0}$

Se puede comprobar rápidamente que (A) es la diferencial exacta de:

$\boldsymbol{f(x,y,z)=x^3y^2-e^xz+ysenz=c}$

Siendo c una constante arbitraria. Una ecuación así se denomina exacta.

La ecuación (B) no es exacta, pero si se introduce "x" como factor integrante se tiene:
$(3x^2z + 2xy)dx + x^2dy + x^3dz = 0$ que es la diferencial exacta de: $x^3z + x^2y = c$.
Las ecuaciones (A) y (B) se denominan integrables.
La ecuación (C) no es integrable, es decir, no se puede hallar para ella ninguna primitiva.

$$f(x, y, z) = c \ \dots \ (1)$$

Para las ecuaciones de esta clase se puede obtener una solución (1) compatible con cualquier relación dada $g(x, y, z) = 0$ de las variables.

La condición de integrabilidad de la ecuación diferencial total.

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \ \dots \ (2)$$

es:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \ \dots \ (3)$$

Ejemplo 1. Para la ecuación (B):

$$P = 3xz + 2y;\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2;\ \frac{\partial P}{\partial z} = 3x$$

$$Q = x;\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$R = x^2;\ \frac{\partial R}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

y sustituyendo en (3), se comprueba la identidad. Por lo tanto la ecuación (B) es integrable.

Ejemplo 2. Para la ecuación (C):

$$P = y;\ \frac{\partial P}{\partial y} = 1;\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$Q = 1;\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$R = 1;\ \frac{\partial R}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

y sustituyendo en (3), se comprueba que no cumple la identidad. Por lo tanto la ecuación (C) no es integrable.
Las condiciones para que se exacta

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \ \dots \ (2)$$

son:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \ \dots \ (4)$$

Ejemplo 3. Para la ecuación (A):

$$P = 3x^2y^2 - e^xz;\ \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y;\ \frac{\partial P}{\partial z} = -e^x$$

$$Q = 2x^3y + senz;\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y;\ \frac{\partial Q}{\partial z} = cosz$$

$$R = ycosz - e^x;\ \frac{\partial R}{\partial x} = -e^x;\ \frac{\partial R}{\partial y} = cosz$$

y satisfacen las condiciones (4), la ecuación es exacta.
Ejemplo 4. Del ejemplo 1 se deduce inmediatamente que no satisface las condiciones (4), por lo que se desprende que (B) no es exacta.

Resolución de una ecuación diferencial total integrable con tres variables.

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \ \dots \ (2)$$

a) Si (2) es exacta, la solución es evidente después, a lo más, de agrupar términos.

b) Si (2) no es exacta puede ser posible hallar un factor integrante.

c) Si (2) es homogénea se puede separar una variable, por ejemplo "z" de las otras mediante las transformaciones $x = uz; y = uz$.

d) Si no se puede hallar un factor integrante considérese una de las variables, por ejemplo z, como una constante. Intégrese la ecuación resultante, designando la constante de integración por $\emptyset(z)$. Hállese la diferencial total de la integral que se acaba de obtener y comparase los coeficientes de sus diferenciales con las de la ecuación diferencial dada, determinando así $\emptyset(z)$.

Pares de ecuaciones diferenciales con tres variables. La solución de las ecuaciones diferenciales totales simultáneas:

$$P_1dx + Q_1dy + R_1dz = 0 \ \dots \ (5)$$
$$P_2dx + Q_2dy + R_2dz = 0 \ \dots \ (6)$$

consta de un par de relaciones:

$$f(x, y, z) = c_1 \ \dots \ (7)$$
$$g(x, y, z) = c_2 \ \dots \ (8)$$

PARA RESOLVER UN PAR DADO DE ECUACIONES:

e) Si tanto (5) como (6) son integrables se puede resolver cada una por algunos o varios de los procedimientos (a) – (d). Entonces se dice que (7) es la solución completa (primitiva) de (5), y (8) la solución completa de (6).

f) Si (5) es integrable, pero no lo es (6), se dice entonces que (7) es la solución completa de (5). Para obtener (8) se utilizan (5), (6) y (7), para eliminar una variable y su diferencial y se integra la ecuación resultante.

g) Si no es integrable ninguna ecuación se puede utilizar el método de «sistema de ecuaciones lineales», tratando dos de las variables, por ejemplo, x e y, como funciones de la tercera variables z.

h) A veces se puede simplificar el procedimiento como sigue: Eliminase primero dy y después dz (o cualquier otro par) entre (5) y (6) obteniendo:

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} dx - \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix} dz = 0$$

$$\begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix} dx - \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix} dy = 0$$

y expresar en la forma simétrica:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \ \dots \ (9)$$

De la forma simétrica:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \ \dots \ (9)$$

donde:

$$X = \lambda \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix}; Y = \lambda \begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix}; Z = \lambda \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix}; \ \lambda \neq 0$$

Obsérvese que éste es el procedimiento para obtener la forma simétrica de las ecuaciones de una línea recta cuando se dan los dos planos.

De las tres ecuaciones

$$Ydx = Xdy; Xdz = Zdx; Zdy = Ydz \ \dots \ (9')$$

deducidos de (9) se puede obtener una cualquiera de las otras dos. Por tanto, obteniendo (9), se puede reemplazar simplemente el par original de ecuaciones diferenciales por un par equivalente, esto es, dos ecuaciones cualesquiera de (9´).

Sin son integrables dos ecuaciones de (9´) se procede como en (e).

Pero si solo es integrable una ecuación de (9´), se procede como (f).

Y si no es integrable ninguna ecuación de (9´) se aumenta el número de ecuaciones posibles por un buen conocido principio:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{l_1dx + m_1dy + n_1dz}{l_1X + m_1Y + n_1Z}$$

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{l_2dx + m_2dy + n_2dz}{l_2X + m_2Y + n_2Z}$$

donde l, m, n son funciones arbitrarias de las variables tales como: $lX + mY + nZ \neq 0$.

Mediante una adecuada elección de multiplicadores es posible obtener una ecuación integrable así: $\frac{dy}{Y} = \frac{ldx+mdy+ndz}{lX+mY+nZ}$ o bien:

$$\frac{adx + bdy + cdz}{aX + bY + cZ} = \frac{pdx + qdy + rdz}{pX + qY + rZ}$$

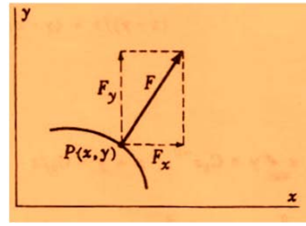
Si se logra esto se procede como en (f).
Si $lX + mY + nZ = 0$, entonces también $ldx + mdy + ndz = 0$.
Si ahora $ldx + mdy + ndz = 0$ es integrable, se integra y se tiene una de las relaciones pedidas.

PROBLEMAS PROPUESTOS ARCHIVO 22.1

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES TOTALES Y SIMULTÁNEAS

En coordenadas rectangulares: Las componentes de la fuerza:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y$$

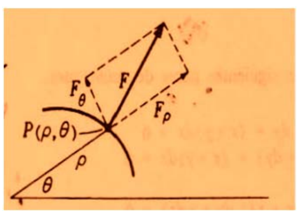


APLICACIONES DE LAS ECUACIONES TOTALES Y SIMULTÁNEAS

En coordenadas polares: Las componentes de la fuerza:

$$m\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = F_\rho$$

$$m\left(2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = F_\theta$$



PROBLEMAS PROPUESTOS ARCHIVO 23.1

Cuando veo tus cielos, obra de tus dedos, La luna y las estrellas que tú formaste, 4 Digo: ¿Qué es el hombre, para que tengas de él memoria, Y el hijo del hombre, para que lo visites?
5 Le has hecho poco menor que los ángeles, Y lo coronaste de gloria y de honra.