VECTORES EN EL ESPACIO

1.- Las componentes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en una cierta base de V_3 son $\vec{u} = (2,0-1)$, $\vec{v} = (-3,1,2)$ y $\vec{w} = (4,-2,7)$. Halla, en esa misma base las componentes de los siguientes vectores:

i) $5.\vec{u} + 6.\vec{v}$ ii) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ iii) $2.\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$

SOL: (Point3D(−8, 6, 7), Point3D(−5, 3, −6), Point3D(8.33333333333333, −1.66666666666667, −1.66666666666667))

i) $5(2,0,-1)+6(-3,1,2)=(10,0,-5)+(-18,6,12)=(-8,6,7)$

ii) $(2,0,-1)+(-3,1,2)-(4,-2,7)=(-5,3,-6)$

iii) $2(2,0,-1)-(-3,1,2)+\frac{1}{3}(4,-2,7)=\left(\frac{25}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$

2.- Las componentes de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{s}$ en una cierta base de V_3 son:

$$\vec{u} = (1,2,3) \qquad \vec{v} = (-4,1,7) \qquad \vec{w} = (0,-2,-5) \quad \vec{s} = (-2,-1,-3)$$

Expresa $\vec{s}$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

$$\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

$$(-2,-1,-3) = a(1,2,3) + b(-4,1,7) + c(0,-2,-5)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}}_{A \Rightarrow |A| = -7} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Cramer

$$a = \frac{\Delta a}{|A|} = \frac{-22}{-7} = \frac{22}{7} \qquad b = \frac{\Delta b}{|A|} = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7} \qquad c = \frac{\Delta c}{|A|} = \frac{-30}{-7} = \frac{30}{7}$$

3.- Halla los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que cumplen:

$$\begin{cases} 2.\vec{u} + 3.\vec{v} = (5,3,2) \\ 3.\vec{u} - 2.\vec{v} = (1,-2,3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 3v_1 = 5 \\ 3u_1 - 2v_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2u_2 + 3v_2 = 3 \\ 3u_2 - 2v_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2u_3 + 3v_3 = 2 \\ 3u_3 - 2v_3 = 3 \end{cases}$$

ó

$$\begin{cases} 2\vec{u} + 3\vec{v} = (5,3,2) \\ 3\vec{u} - 2\vec{v} = (1,-2,3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 6\vec{u} + 9\vec{v} = (15,9,6) \\ 6\vec{u} - 4\vec{v} = (2,-4,6) \end{cases}$$

$$13\vec{v} = (13,13,0)$$

$$\boxed{\vec{v} = (1,1,0)}$$

$$2\vec{u} = (5,3,2) - 3(1,1,0)$$

$$2\vec{u} = (2,0,2) \longrightarrow \boxed{\vec{u} = (1,0,1)}$$

4.- Prueba que los vectores $\vec{u} = (0,1,1)$ $\vec{v} = (1,2,3)$ $\vec{w} = (5,7,12)$ son linealmente dependiente

$(0,0,0) = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (Homogéneo)

- Si S.C.D $(a=0, b=0, c=0)$

$\Downarrow$

l.i

- Si SCI $\Rightarrow$ l.d

Como $|A| = 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow$ No es SCD

$\Downarrow$

l.d

4.- Prueba que los vectores $\vec{u} = (0,1,1)$ $\vec{v} = (1,2,3)$ $\vec{w} = (5,7,12)$ son linealmente dependiente

Otra forma de hacerlo:

$(0,0,0) = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

- Si S.C.D $(a=0, b=0, c=0)$ $\Downarrow$ l.i
- Si SCI $\Rightarrow$ l.d

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 12 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$0 \cdot c = 0 \Rightarrow \boxed{c = \lambda}$ S.C.I $\Rightarrow$ l.d

$b + 5c = 0 \Rightarrow \boxed{b = -5\lambda}$

$a + 2b + 7c = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3\lambda}$

Comprobación: Si $\lambda = 1 \Rightarrow a = 3, b = 5, c = 1$

$(0,0,0) = 3(0,1,1) - 5(1,2,3) + (5,7,12)$

$5(1,2,3) = 3(0,1,1) + (5,7,12) \Rightarrow (1,2,3) = \frac{3}{5}(0,1,1) + \frac{1}{5}(5,7,12) \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ l.d

4.- Prueba que los vectores $\vec{u} = (0,1,1)$ $\vec{v} = (1,2,3)$ $\vec{w} = (5,7,12)$ son linealmente dependiente

Otra forma de hacerlo:

Vamos a ver si se puede poner un vector como combinación lineal del resto.

$$\vec{v} \stackrel{?}{=} a\vec{u} + b\vec{w}$$

$$(1,2,3) = a(0,1,1) + b(5,7,12)$$

$$\begin{cases} 1 = 5b \Rightarrow b = 1/5 \\ 2 = a + 7b \longrightarrow 2 = a + \frac{7}{5} \Rightarrow a = \frac{3}{5} \\ 3 = a + 12b \longrightarrow \text{¿Cumple esta?} \end{cases}$$

$$3 \stackrel{?}{=} \frac{3}{5} + 12 \cdot \frac{1}{5}$$

$$3 = \frac{15}{5}$$

$$3 = 3 \checkmark \Rightarrow \text{l.d.}$$

4.- Prueba que los vectores $\vec{u} = (0,1,1)$ $\vec{v} = (1,2,3)$ $\vec{w} = (5,7,12)$ son linealmente dependiente

Otra forma de hacerlo:

Dado $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow ran(A) \equiv$ Nº de filas linealmente independientes

$|A| = 0 \Rightarrow ran(A) < 3$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow ran(A) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 filas linealmente independientes $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la 3ª depende de las otras dos $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ l.d

5.- Determina la independencia o dependencia lineal de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en los siguientes casos:

i) $\vec{u} = (4,1,-5)$ $\quad \vec{v} = (2,3-8)$ $\quad \vec{w} = (10,0,-7)$

ii) $\vec{u} = (2,0,9)$ $\quad \vec{v} = (3,-1,2)$ $\quad \vec{w} = (5,-1,4)$

iii) $\vec{u} = (3,-2,5)$ $\quad \vec{v} = (-3,5,2)$ $\quad \vec{w} = (1,1,6)$

iv) $\vec{u} = (1,-2,-3)$ $\quad \vec{v} = (-2,4,4)$ $\quad \vec{w} = (-6,3,0)$

$rg(A) = 2 \Longrightarrow$ 2 vectores independientes y el tercero dependiente

$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

i) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \\ 10 & 0 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \\ 10 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ *Linealmente Dependientes*

$\rightarrow 3F_1 - F_2$

ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 14 \rightarrow$ *Linealmente Independientes*

iii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow$ *Linealmente Independientes*

iv) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \rightarrow$ *Linealmente Independientes*

6.- Halla el rango de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{s}$ e indica, en cada caso, un subconjunto formado por el máximo número posible de vectores linealmente independiente

i) $\vec{u} = (4,1,-5)$ $\vec{v} = (2,3,-8)$ $\vec{w} = (10,0,-7)$ $\vec{s} = (-1,6,2)$

ii) $\vec{u} = (1,4,7)$ $\vec{v} = (2,5,8)$ $\vec{w} = (3,6,9)$ $\vec{s} = (1,3,5)$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

i) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \\ 10 & 0 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow ran(A) = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 159 \rightarrow \textit{Linealmente Independientes}$$

ii) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow ran(A) = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$F_2 : F_2 - 2F_1$ $\quad$ $F_3 : 3F_1 + 4F_2$

l.i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$2F_2 - F_1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ran(A) < 3$$

ó $(1,4,7) = a(2,5,8)$

$$\begin{cases} 1 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ 4 = 5a \Rightarrow a = \frac{4}{5} \\ 7 = 8a \end{cases}$$

l.i.

7.- Prueba que los vectores $\vec{u} = (0,1,1)$ $\vec{v} = (1,0,1)$ $\vec{w} = (1,1,0)$ forman una base de V_3. Calcula las coordenadas del vector $\vec{a} = (1,2,3)$ respecto de la base anterior.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ li} \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ Base de } \mathbb{R}_3$$

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego $\vec{a} = (2,1,0)$ respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

y $\vec{a} = (1,2,3)$ respecto de la base ortonormal o canónica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

8.- Probar que los vectores $\vec{u} = (-1,1,1)$ $\vec{v} = (1,-1,1)$ $\vec{w} = (1,1,-1)$ forman una base de V_3. Calcula las coordenadas del vector $\vec{a} = (2,4,2)$ respecto de la base anterior.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ l.i $\Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ Base de $\mathbb{R}_3$

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\vec{a} = (3,2,3)$ respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

9.- Determina los valores de a para los cuales resultan linealmente dependiente los vectores (-2,a,a) , (a,-2,a) y (a,a,-2). Obtén, en estos casos, la relación de dependencia.

$$\begin{bmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = (a-1)(a+2)(a+4)$$

Si $a=-4$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -4 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{ran(A)=2} \qquad \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 4-16=-12\neq 0$$

$$(-2,-4,-4) = x(-4,-2,-4) + y(-4,1,-2)$$

$$\begin{cases} -2 = -4x - 4y \\ -4 = -2x + y \\ -4 = -4x - 2y \end{cases}$$

$-4 = -2x + y \rightarrow y = 2x-4$

$-2 = -4x - 4(2x-4)$

$-2 = -4x - 8x + 16$

$12x = 18 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

$\rightarrow \boxed{y = -1}$

$\rightarrow -4 = -4\cdot\frac{3}{2} - 2(-1)$

$-4 = -6 + 2$

$-4 = -4$

$$(-2,-4,-4) = \frac{3}{2}(-4,-2,-4) - (-4,1,-2)$$

Si $a=1$ $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \text{ran}(A)=2$

$(-2,1,1) = x(1,-2,1) + y(1,1,-2)$

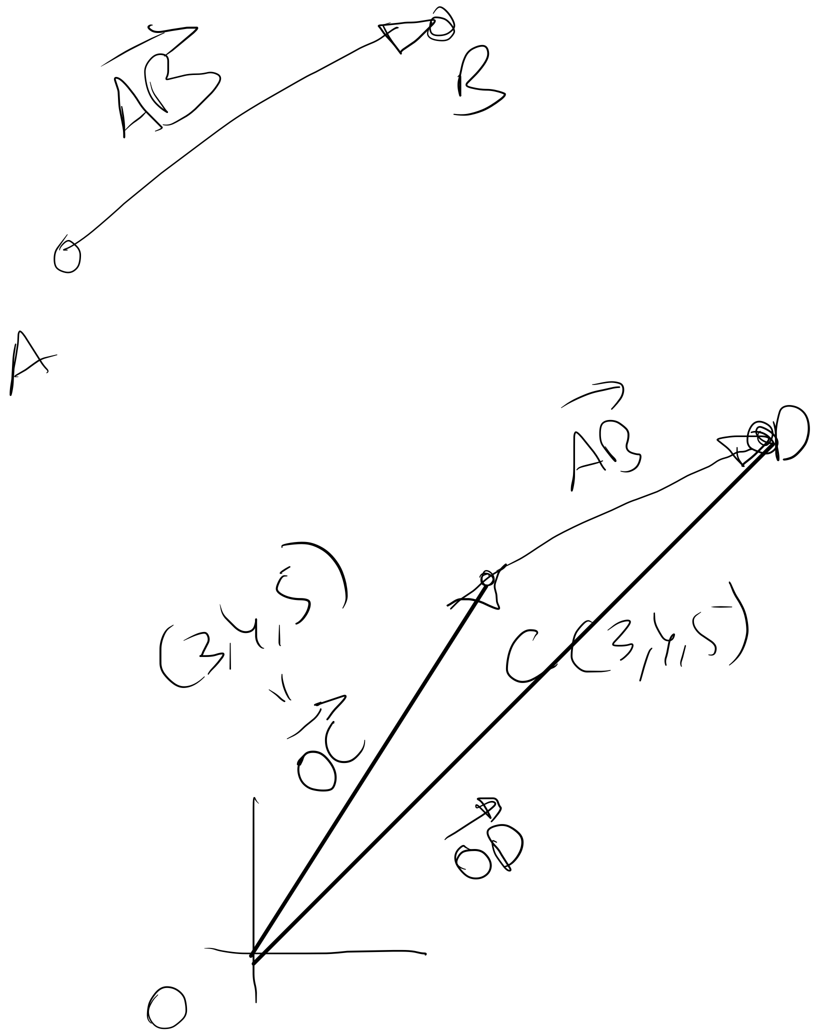
$\begin{cases} -2 = x + y \\ 1 = -2x + y \\ 1 = x - 2y \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ $3 = -3x \Rightarrow \boxed{x=-1}$ $\quad -2 = -1 + y \Rightarrow \boxed{y=-1}$

$1 = x - 2y \to 1 = -1 - 2(-1) = -1 + 2 = 1$ ✓

Si $a=-2$ $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \text{ran}(A)=2$

$(-2,-2,-2) = 1(-2,-2,-2) + 0(-2,1,-2)$

10.- Dados los puntos A(7,2,-1) y B(1,6,-3), determina las componentes del vector libre $\overrightarrow{AB}$. ¿Cuál será el extremo de uno de sus representantes con origen en el punto C(3,4,5)?



$$\overrightarrow{AB} = (1-7, 6-2, -3-(-1))$$

$$\overrightarrow{AB} = (-6, 4, -2)$$

$$\underline{D} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} =$$

$$= (3,4,5) + (-6, 4, -2) =$$

$$= \underline{(-3, 8, 3)}$$

11.- Calcula los valores del parámetro a para que los vectores $\vec{u} = (a,3,1)$ $\vec{v} = (1,1,a)$ $\vec{w} = (1,1,1)$ expresados en cierta base sean linealmente dependiente

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-3)(a-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A) = 0 \iff a = 3 \text{ ó } a = 1$$

Si $a = 3$ ó $a = 1 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ l.d.

12.- Las componentes de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{a}$ en una cierta base son:

$\vec{u} = (1,2,1)$ $\vec{v} = (2,1,0)$ $\vec{w} = (0,1,3)$ y $\vec{a} = (-3,3,10)$

i) Comprueba que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forman base en V_3

ii) Halla las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base del apartado anterior.

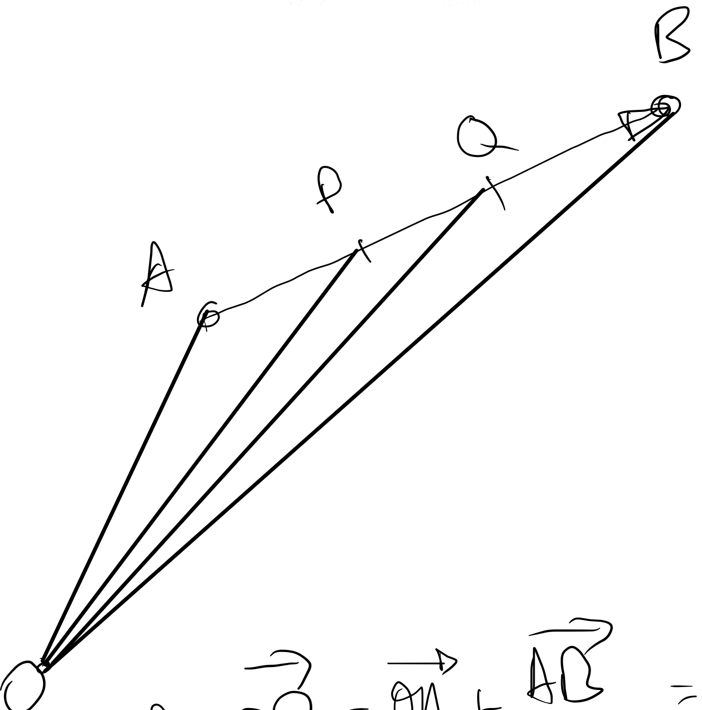
i) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ l.i.} \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ Base de } \mathbb{R}_3$$

ii) $$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = (1,-2,3) \text{ respecto de } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$$

13.- Determina las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento de extremos A(-3,6,10) y B(6,0,-2) en tres partes iguales.



$$\overrightarrow{AB} = (6-(-3),\ 0-6,\ -2-10) = (9,-6,-12)$$

$$P = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = (-3,6,10) + (3,-2,-4) = (0,4,6)$$

$$Q = A + \frac{AB}{3} \cdot 2 = (-3,6,10) + (6,-4,-8) = (3,2,2)$$

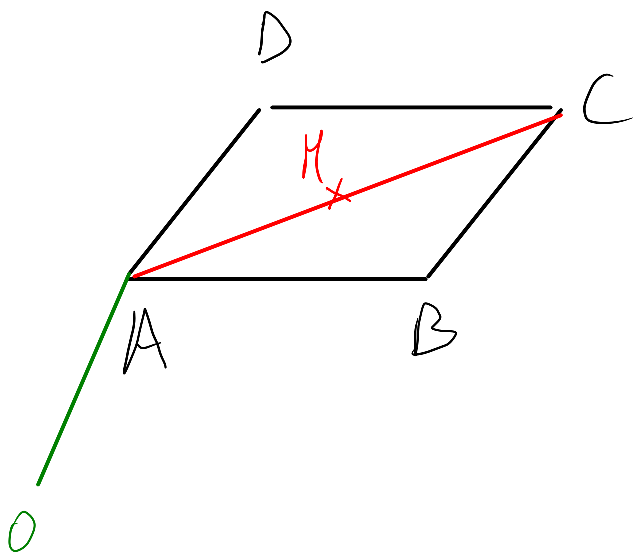
14.- Averigua los valores del parámetro a para que los vectores $\vec{u} = (a,a,1)$ $\vec{v} = (2,a,2)$ $\vec{w} = (0,0,a)$ no formen base de V_3. Razona la respuesta.

$$\begin{bmatrix} a & a & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2\,(a-2)$$

Si $a=0$ o $a=2 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \vec{u},\vec{v},\vec{w}$ l.d $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ no forman base de $\mathbb{R}_3$

15.- Sean A(1,3,5), B(2,1,4) y C(-3,0,1) tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Calcula las coordenadas del cuarto vértice, D, y las del centro del paralelogramo.



$$D = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} =$$

$$= (1,3,5) + (-3-2, 0-1, 1-4) =$$

$$= (1,3,5) + (-5, -1, -3) = (-4, 2, 2)$$

$$M = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = (1,3,5) + \frac{1}{2}(-3-1, 0-3, 1-5) =$$

$$= (1,3,5) + \frac{1}{2}(-4,-3,-4) = (1,3,5) + \left(-2, -\frac{3}{2}, -2\right) =$$

$$= \left(-1, \frac{3}{2}, 3\right)$$