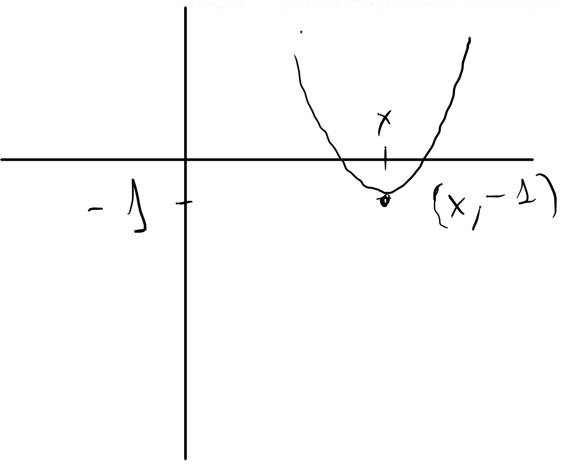
APLICACIONES DE LA DERIVADA

2ª Parte

3. Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^2 + ax - 6$ tenga un mínimo de valor -1



$$f'(x) = 0$$

$$2x + a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2}$$

$$f(x) = -1$$

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) - 6 = -1$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = 5$$

$$-\frac{a^2}{4} = 5$$

$$-a^2 = 20$$

$$a^2 = -20$$

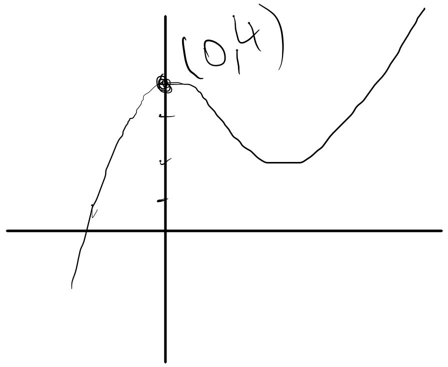
$$a = \pm\sqrt{-20} \quad \nexists a$$

4. *Halla b y c para que la curva $\underset{\substack{\shortparallel \\ }}{\overset{f(x)}{y}} = x^3 + bx + c$ tenga un máximo relativo en el punto (0,4)

$f'(x) = 3x^2 + b$

máximo relativo $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$

$3 \cdot 0^2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

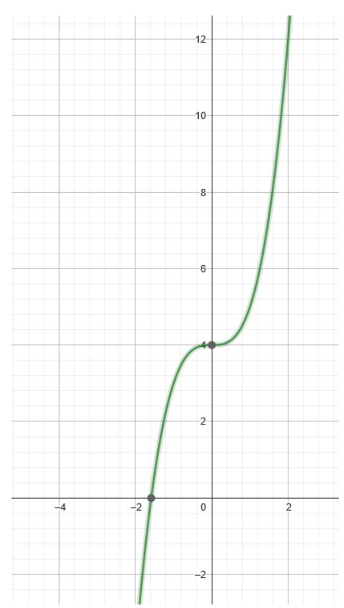


(0,4) $\Rightarrow$ $f(0) = 4$

$0^3 + b \cdot 0 + c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

Comprobar: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow$ NO es máximo relativo



$f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ en $x=0$ hay un punto de inflexión

7. Estudia la concavidad y convexidad, así como la existencia de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

i) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$ $\qquad$ $Dom(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 18x$ $\qquad$ $f''(x) = 12x - 18 = 6(2x-3)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

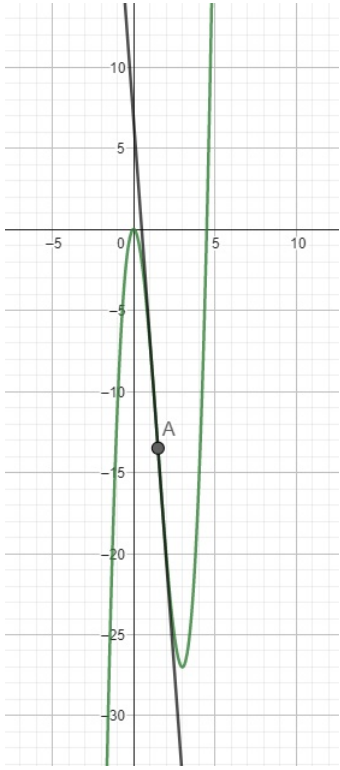
	$(-\infty, 3/2)$	$(3/2, +\infty)$
6	+	+
$2x-3$	−	+
	−	+
	CÓNCAVA	CONVEXA

En $(-\infty, \frac{3}{2})$ f es cóncava

En $(\frac{3}{2}, +\infty)$ f es convexa

$\Downarrow$

En $x = \frac{3}{2}$ hay un punto de inflexión



ii) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ Es continua en $\mathbb{R}$ (f. polinómica)

$f'(x) = 4x^3 - 24x$, $f''(x) = 12x^2 - 24$

$f''(x) = 0 \qquad 12(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
12	$+$	$+$	$+$
x^2-2	$+$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ hay ptos de inflexión

iii) $f(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

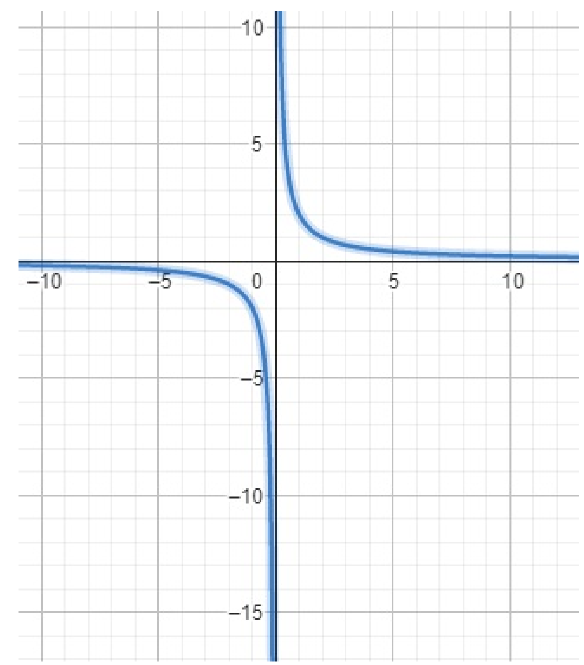
$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{x^3} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{x^3} = 0 \quad \nexists \text{ sol.}$$

		0	
4	+		+
x^3	−		+
	−		+
	CÓNCAVA		CONVEXA

$x = 0$ no es punto de inflexión

$$f'''(x) = -\frac{12}{x^4}$$

$$f'''(0) \neq 0$$



iv) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ $\Rightarrow$ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{x^2+4<0\} = \mathbb{R}$

$x^2 < -4$ $\nexists$ sol.

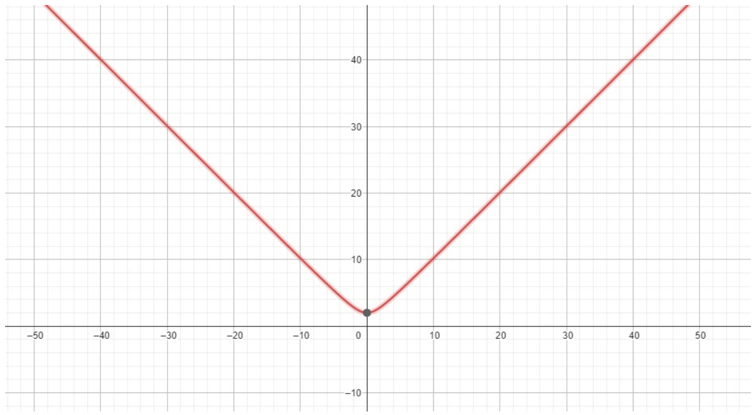
$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} = \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}\,(x^2+4)} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{x^2+4}\,(x^2+4)} > 0 \text{ para todo } x$$

$\Downarrow$

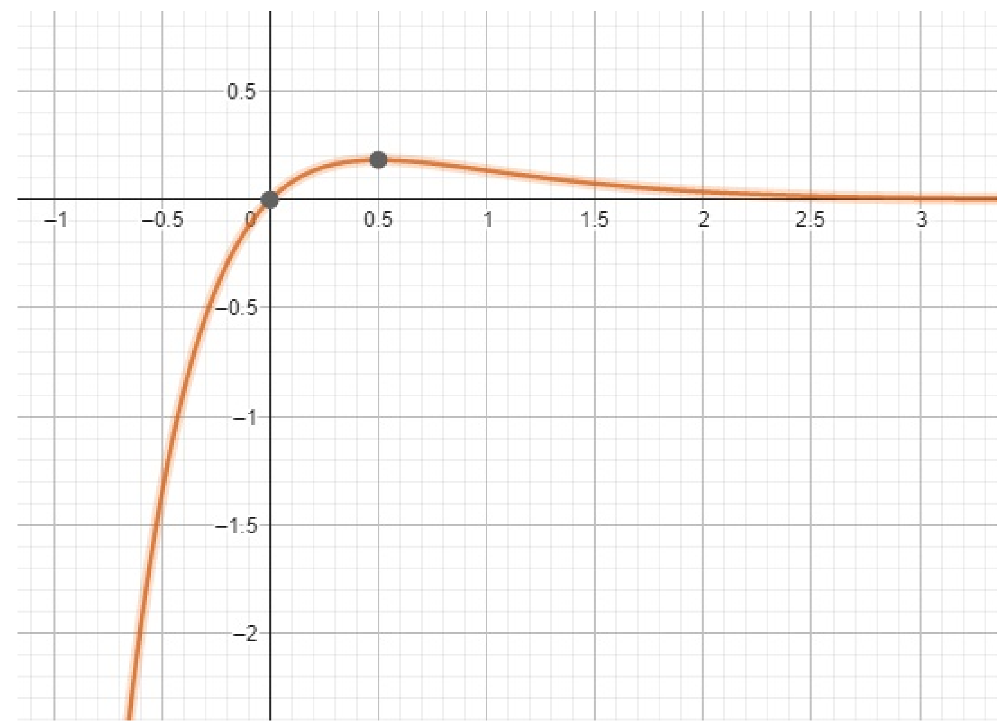
CONVEXA en $\mathbb{R}$



v) $f(x) = x.e^{-2x}$ $\quad$ $Dom(f) = \mathbb{R}$

$$f''(x) = 4(x-1)e^{-2x} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
4	+		+
$x-1$	−		+
e^{-2x}	+		+
	−		+
	CÓNCAVA		CONVEXA



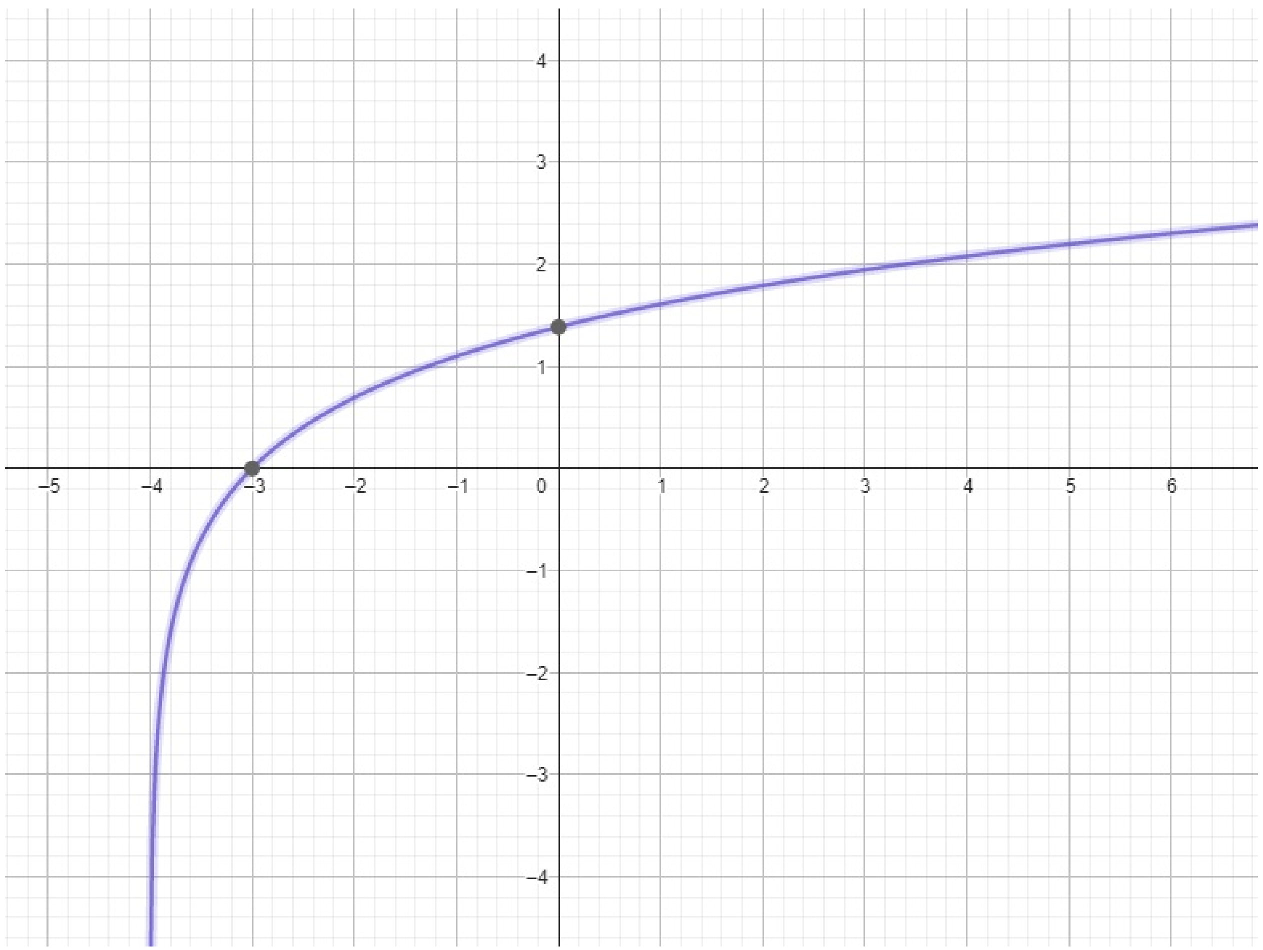
En $x = 1$ hay punto de inflexión

vi) $f(x) = \ln(x+4)$ $\longrightarrow$ $Dom(f) = (-4, \infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x+4}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{\underbrace{(x+4)^2}_{>0}}$ $\Rightarrow$ $f''(x) < 0 \quad \forall x$

$\Downarrow$

CÓNCAVA

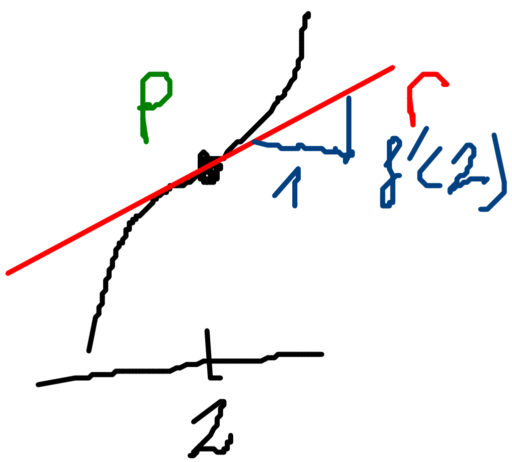


8. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ en su punto de inflexión.

Pto de inflexión: $y' = 3x^2 - 12x + 16$, $y'' = 6x - 12 \Rightarrow y'' = 0$, $x = 2$

$y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow$ En $x = 2$ hay pto inflex.

$\uparrow$ y es cont. y derivable en $x = 2$



$$r \equiv \begin{cases} P(2, f(2)) \\ m = f'(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 11 = 5 \\ f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 16 = \underset{m}{\overset{\shortparallel}{4}} \end{array}$$

$r \equiv y = mx + n \ \wedge \ (2,5) \in r$

$5 = 4 \cdot 2 + n$

$-3 = n \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 4x - 3}$

9. En la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, halla a, b y c para que la función tenga un máximo relativo en $x=1$ y un punto de inflexión en $(0,0)$

$\rightarrow f''(0) = 0$

$f'(1) = 0$

Si $(0,0)$ está en la gráfica

$\Downarrow$

$f(0) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f''(x) = 6ax \Rightarrow f'''(x) = 6a$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c = 0 \\ 3a + b = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{b}{3}, \ b \text{ cualquier número} \neq 0, \ c = 0}$$

11. De la función f(x) = ax^3+bx sabemos que pasa por (1,1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta 3x+y=0.
i) Halla a y b   ii) determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$y = -3x$

$m = -3$

$f(1) = 1$, $f'(1) = -3$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{cases}$$

$2a = -4$

$\boxed{a = -2}$

$\boxed{b = 1 + 2 = 3}$

$x \quad 48-x$

13. Descomponer el número 48 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

$$f(x) = 5x^2 + 6(48-x)^2$$

$$f'(x) = 22x - 576 \longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{288}{11}$$

$$f''(x) = 22 > 0 \qquad f''\left(\frac{288}{11}\right) = 22 > 0 \Rightarrow \text{En } x = \frac{288}{11} \text{ hay un mínimo}$$

$$f\left(\frac{288}{11}\right) = \frac{69120}{11}$$

Los números son

$$\underbrace{\frac{288}{11}}\ \text{y}\ 48 - \frac{288}{11} = \underbrace{\frac{240}{11}}$$

x

14. Halla el número positivo cuya suma, con 4 veces su recíproco, sea mínima.

$\frac{4}{x}$

Función a optimizar:

$f(x) = x + \frac{4}{x}$

Primera derivada:

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = -2, x = 2$

Segunda derivada:

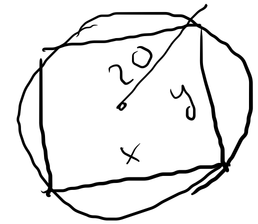
$f''(x) = \frac{8}{x^3}$

Extremos relativos:

- El punto $(-2, -4)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(-2) = -1$

- El punto $(2, 4)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(2) = 1$

15. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio.



$x^2 + y^2 = 40^2$ (Pitágoras)

$y^2 = 40 - x^2$

$y = \sqrt{40 - x^2}$

$A = x \cdot y$

$f(x) = x \cdot \sqrt{40 - x^2}$

Función a optimizar:

$$f(x) = x\sqrt{-x^2 + 40^2}$$

Primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2\cdot(800 - x^2)}{\sqrt{1600 - x^2}}$$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = -20\sqrt{2}, x = 20\sqrt{2}$

Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 2400)}{(1600 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Extremos relativos:

- El punto $\left(-20\sqrt{2}, -800\right)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(-20\sqrt{2}) = 4$

- El punto $\left(20\sqrt{2}, 800\right)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(20\sqrt{2}) = -4$

----

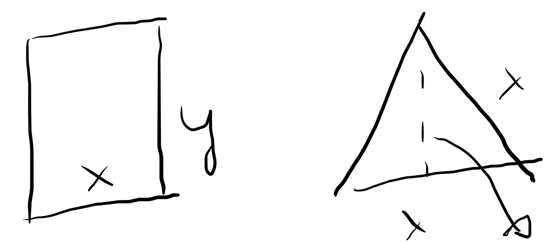
16. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero. Sabiendo
que el perímetro de la ventana es de 6,6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

$$3x + 2y = 6,6$$

$$y = \frac{6.6 - 3x}{2}$$

$$A = x\left(\frac{6,6 - 3x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{2}$$

$$\text{''} \quad f(x)$$



$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Función a optimizar:

$$f(x) = \frac{x(6.6-3x)}{2} + \frac{x\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{2}$$

Primera derivada:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{2\sqrt{x^2}} - 3x + \frac{33}{10}$$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{6}{5}$

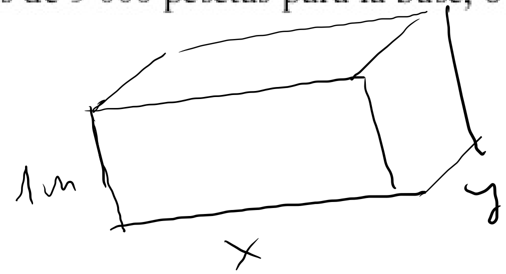
Segunda derivada:

$$f''(x) = -3 - \frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2}}{4x} + \frac{3\sqrt{3}(x^2)^{\frac{3}{2}}}{4x^3}$$

Extremos relativos:

- El punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{6}{5}, \frac{255157676649773}{100000000000000}\right)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{6}{5}) = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

17. Halla las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro sabiendo que el volumen ha de ser de 9 m^3 su altura 1 m y el coste de construcción por m^2 es de 5 000 pesetas para la base, 6 000 pesetas para la tapa y 4 000 pesetas para cada pared lateral.



$V = x \cdot y \cdot 1$

$9 = x \cdot y \Rightarrow y = \frac{9}{x}$

$f(x)$

Coste: $5000\,xy + 6000\,xy + 2\left[4000(x+y)\right]$

$f = 11000\,xy + 8000\,x + 8000\,y$

$f = 11000 \cdot 9 + 8000\,x + 8000 \cdot \frac{9}{x}$

$f = 99000 + 8000\left(x + \frac{9}{x}\right)$

Función a optimizar:

$f(x) = 8000\left(x + \frac{9}{x}\right) + 99000$

Primera derivada:

$f'(x) = 8000 - \frac{72000}{x^2}$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = -3, x = 3$

Segunda derivada:

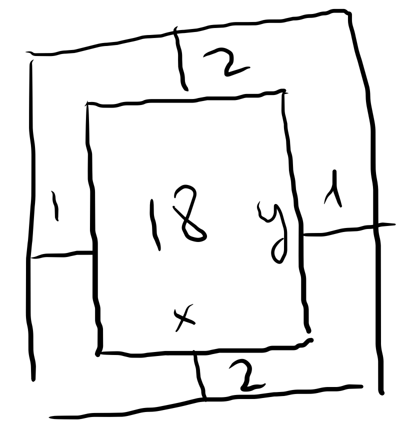
$f''(x) = \frac{144000}{x^3}$

Extremos relativos:

- El punto $(-3, 51000)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(-3) = -\frac{16000}{3}$

- El punto $(3, 147000)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(3) = \frac{16000}{3}$

18. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén, razonadamente, las dimensiones que minimizan la superficie de papel.



$x \cdot y = 18 \qquad y = \frac{18}{x}$

Dimensiones $(y+4)\cdot(x+2)$

$f(x) = \left(\frac{18}{x}+4\right)\cdot(x+2)$

Función a optimizar:

$f(x) = \left(4 + \frac{18}{x}\right)(x+2)$

Primera derivada:

$f'(x) = 4 - \frac{36}{x^2}$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = -3, x = 3$

Segunda derivada:

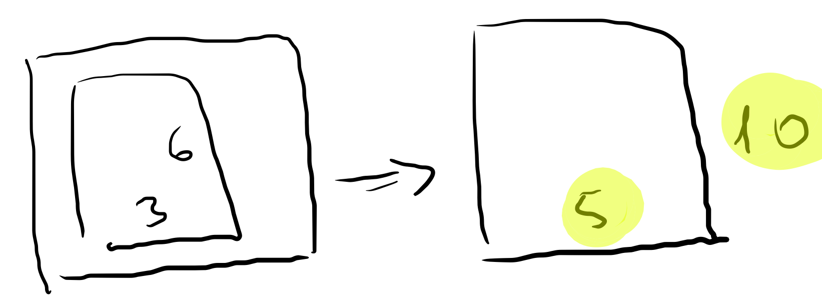
$f''(x) = \frac{72}{x^3}$

Extremos relativos:

- El punto $(-3, 2)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(-3) = -\frac{8}{3}$

- El punto $(3, 50)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(3) = \frac{8}{3}$

$\hookrightarrow x = 3,\ y = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow$



19. Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente en forma de prisma recto de base cuadrada, de 500 m^3 de capacidad y que tenga un revestimiento de coste mínimo.

Función a optimizar:

$f(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$

Primera derivada:

$f'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2}$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = 10, x = -5 - 5\sqrt{3}i, x = -5 + 5\sqrt{3}i$

Segunda derivada:

$f''(x) = 2 + \frac{4000}{x^3}$

Extremos relativos:

- El punto $(10, 300)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(10) = 6$

$\hookrightarrow$

$y = \frac{500}{10^2} = 5$

$x^2 \cdot y = 500$

$y = \frac{500}{x^2}$

Revestimiento $= x^2 + 4xy$

$f(x) = x^2 + \frac{500}{x} \cdot 4$

$f(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$

20. Un triángulo isósceles, de perímetro 10 m, gira alrededor de la altura relativa al lado desigual engendrando un cono. Halla la longitud de sus lados para que el cono tenga volumen máximo.

$$V = \frac{\pi \cdot \left(\frac{10-2x}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{x^2-(5-x)^2}}{3}$$

$$V = \frac{\pi\,(5-x)^2 \cdot \sqrt{10x-25}}{3}$$

```
Función a optimizar:
```

$$f(x) = \frac{\pi(5-x)^2\sqrt{10x-25}}{3}$$

```
Primera derivada:
```

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{5}\pi(x-5)(x-3)}{3\sqrt{2x-5}}$$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = 3, x = 5$

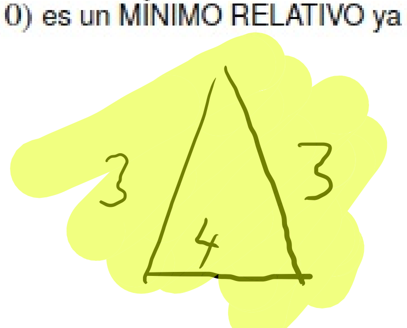
```
Segunda derivada:
```

$$f''(x) = \frac{5\sqrt{5}\pi(3x^2-18x+25)}{3(2x-5)^{\frac{3}{2}}}$$

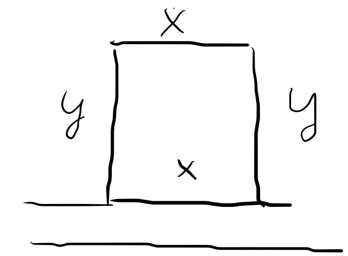
```
Extremos relativos:
```

- El punto $\left(3, \frac{4\pi\sqrt{30-25}}{3}\right)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(3) = -\frac{40\pi}{3\sqrt{30-25}} - \frac{100\pi}{3(30-25)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\pi\sqrt{30-25}}{3}$

- El punto $(5, 0)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(5) = \frac{2\pi\sqrt{50-25}}{3}$



21. Queremos vallar un campo rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 euros/m y la de los otros tres lados, 0,625 euros/m. Halla el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 euros.



Coste $1800 = 5x + 0{,}625(x+2y)$

$1800 = 5{,}625x + 2\cdot 0{,}625y$

$$y = \frac{1800 - 5{,}625x}{2\cdot 0{,}625}$$

max. $\text{Área} = x\cdot y$

$$f = x \cdot \frac{1800 - 5{,}625x}{2\cdot 0{,}625}$$

Función a optimizar:

$$f(x) = \frac{x(1800-5.625x)}{0.625\cdot 2}$$

Primera derivada:

$$f'(x) = 1440 - 9x$$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = 160$

Segunda derivada:

$$f''(x) = -9.0$$

Extremos relativos:

- El punto (160, 115200) es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(160) = -9$

$x = 160$

$115200 = 160 \cdot y$

$y = 720$

22. Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Halla las dimensiones del cilindro para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.


```
Función a optimizar:
```

$f(x) = x^2 + \frac{160}{\pi x}$

```
Primera derivada:
```

$f'(x) = 2x - \frac{160}{\pi x^2}$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = \frac{2\cdot\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{\pi}}, x = -\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{\pi}} - \frac{\sqrt[3]{10}\sqrt{3}i}{\sqrt[3]{\pi}}, x = -\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{\pi}} + \frac{\sqrt[3]{10}\sqrt{3}i}{\sqrt[3]{\pi}}$

```
Segunda derivada:
```

$f''(x) = 2 + \frac{320}{\pi x^3}$

```
Extremos relativos:
```

- El punto $\left(\frac{2\cdot\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{\pi}}, \frac{12\cdot 10^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}\right)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(\frac{2\cdot\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{\pi}}) = 6$

$V = \pi x^2 \cdot y \Rightarrow y = \frac{160}{\pi x^2}$

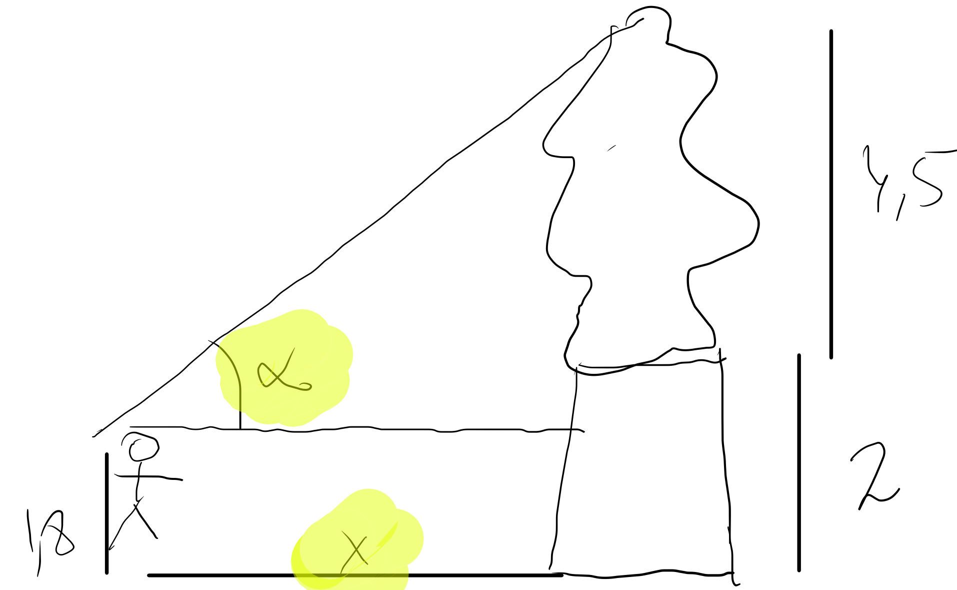
$f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi \cancel{x} \cdot \frac{160}{\pi x^{\cancel{2}}}$

$= 2\pi\left(x^2 + \frac{160}{\pi \cancel{x}}\right)$

Min $g(x) =$ Min $x^2 + \frac{160}{\pi x}$

Sol: $x = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$, $y = \frac{160}{\pi\cdot 4}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{10^2}} = 40\sqrt[3]{\frac{1}{100\pi}} = \frac{40}{\sqrt[3]{100\pi}}$

23. En los jardines de un museo está expuesta una estatua de 4,5 m de altura sobre un pedestal a 2 m del suelo. ¿A qué distancia debe colocarse un crítico de arte de 1,8 m de estatura para ver dicha estatua bajo el mayor ángulo posible?



$6,5 - 1,8 = 4,7$

$tg\,\alpha = \frac{4,7}{x}$

$\alpha = arctg\left(\frac{4,7}{x}\right)$

$\max \alpha \Rightarrow \max\left(arctg\,\frac{4,7}{x}\right)$

Función a optimizar:

$$f(x) = \operatorname{atan}\left(\frac{47}{10x}\right)$$

Primera derivada:

$$f'(x) = -\frac{470}{100x^2+2209}$$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = \nexists$

No hay máximos ni mínimos relativos.

Hay que buscar el máximo absoluto. Al ser arctg(x) continua, el máximo absoluto estará en $x=0$ ó $x=\infty$

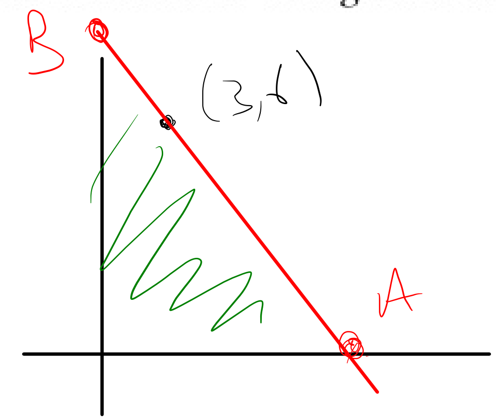
$\boxed{x=0}$ $arctg(\infty) = 90° = \boxed{\frac{\pi}{2} = \alpha}$

$x=\infty$ $arctg(0) = 0$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ es el máximo absoluto

$y = arctg\left(\frac{4,7}{x}\right)$

24. Halla la recta que pasa por el punto P(3,6) y forma con los semiejes positivos de coordenadas un triángulo de área mínima.



Función a optimizar:

$f(x) = -\frac{9(2-x)^2}{2x}$ ← x es la m de r

Primera derivada:

$f'(x) = -\frac{9}{2} + \frac{18}{x^2}$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = -2, x = 2$

Segunda derivada:

$f''(x) = -\frac{36}{x^3}$

Extremos relativos:

- El punto $(-2, 36)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(-2) = \frac{9}{2}$

- El punto $(2, 0)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(2) = -\frac{9}{2}$

$m = -2$

$\Downarrow$

$y = -2x + 3(2-(-2)) \Rightarrow y = -2x + 12$

$r \equiv \begin{cases} y = mx + n \\ P(3,6) \end{cases} \Rightarrow 6 = 3m + n$

$n = 3(2-m)$

$\Downarrow$

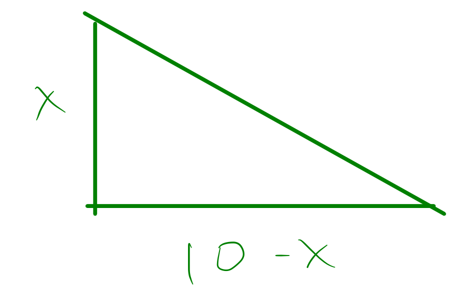
$r \equiv y = mx + 3\cdot(2-m)$

$A = r \cap \{x=0\} \Rightarrow A(0, 3(2-m))$

$B = r \cap \{y=0\} \Rightarrow B\left(\frac{-3(2-m)}{m}, 0\right)$

$\text{Área} = \frac{3(2-m)\cdot\left(\frac{-3(2-m)}{m}\right)}{2} = \frac{-9(2-m)^2}{2m}$

25. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm halla las dimensiones de aquél cuyo área es máxima



$$A = \frac{x(10-x)}{2}$$

Función a optimizar:

$$f(x) = \frac{x(10-x)}{2}$$

Primera derivada:

$$f'(x) = 5 - x$$

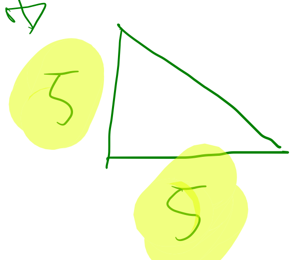
Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = 5$

Segunda derivada:

$$f''(x) = -1$$

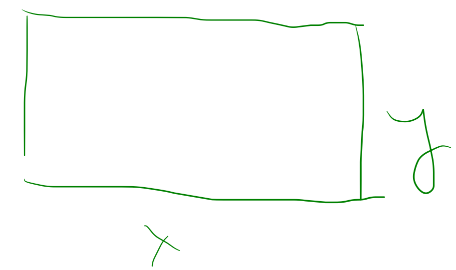
Extremos relativos:

- El punto $\left(5, \frac{25}{2}\right)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(5) = -1$



---

26. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?



$$2x+2y=12$$
$$x+y=6$$
$$y=6-x$$
$$d=\sqrt{x^2+(6-x)^2}$$

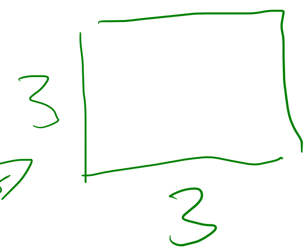
Función a optimizar:

$$f(x)=\sqrt{x^2+(6-x)^2}$$

Primera derivada:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)}{\sqrt{x^2+(x-6)^2}}$$

Si $f'(x)=0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x=3$



Segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{9\sqrt{2}}{(x^2-6x+18)^{\frac{3}{2}}}$$

Extremos relativos:

- El punto $(3, 3\sqrt{2})$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(3)=\frac{\sqrt{2}}{3}$

2º forma:

$\sqrt{x^2+(6-x)^2}$ será máximo cuando lo sea $x^2+(6-x)^2$

Función a optimizar:

$$f(x)=x^2+(6-x)^2$$

Primera derivada:

$$f'(x)=4x-12$$

Si $f'(x)=0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x=3$

$x=3$

$6-x=3$

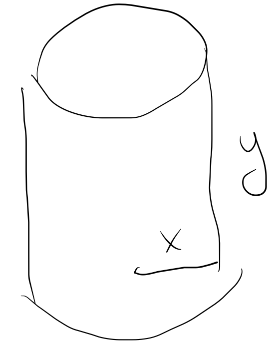
Segunda derivada:

$$f''(x)=4$$

Extremos relativos:

- El punto $(3, 18)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(3)=4$

27. Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que puedo construirse con la menor cantidad posible de hojalata



Función a optimizar:

$f(x) = 2\left(\pi x^2 + \frac{628}{100x}\right)$

Primera derivada:

$f'(x) = 4\pi x - \frac{314}{25x^2}$

COMPLEJAS

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = \frac{\sqrt[3]{3140}}{10\sqrt[3]{\pi}}$, $\cancel{x = -\frac{\sqrt[3]{3140}}{20\sqrt[3]{\pi}} - \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3140}i}{20\sqrt[3]{\pi}}}$, $\cancel{x = -\frac{\sqrt[3]{3140}}{20\sqrt[3]{\pi}} + \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3140}i}{20\sqrt[3]{\pi}}}$

Segunda derivada:

$f''(x) = 4\pi + \frac{628}{25x^3}$

Extremos relativos:

- El punto $\left(\frac{\sqrt[3]{3140}}{10\sqrt[3]{\pi}}, \frac{3\cdot\sqrt[3]{1232450}\sqrt[3]{\pi}}{25}\right)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''\left(\frac{\sqrt[3]{3140}}{10\sqrt[3]{\pi}}\right) = 12\pi$

$V = \pi \cdot x^2 \cdot y \Rightarrow y = \frac{6{,}28}{\pi x^2}$

$A = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot y$

$A = 2\pi x^2 + \frac{2 \cdot 6{,}28}{x} =$

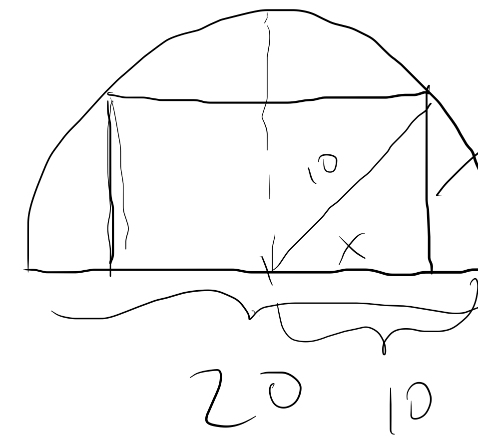
$= 2 \cdot \left(\pi x^2 + \frac{6{,}28}{x}\right)$

$x = \sqrt[3]{\frac{3{,}140}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}28}{2\pi}}$

$y = \frac{6{,}28}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{6{,}28}{2\pi}\right)^2}} =$

28. En un jardín con Forma de semicírculo de radio 10 m se va a Instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.

$\sqrt{10^2 - x^2}$



Función a optimizar:

$f(x) = 2x\sqrt{-x^2 + 10^2}$

Primera derivada:

$f'(x) = \frac{4\cdot(50-x^2)}{\sqrt{100-x^2}}$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = -5\sqrt{2}, x = 5\sqrt{2}$

Segunda derivada:

$f''(x) = \frac{4x(x^2-150)}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$A = 2 \cdot x \cdot \sqrt{10^2 - x^2}$

Extremos relativos:

- El punto $(-5\sqrt{2}, -100)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(-5\sqrt{2}) = 8$

- El punto $(5\sqrt{2}, 100)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(5\sqrt{2}) = -8$

$2x = 10\sqrt{2}$

$\sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - 25\cdot 2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$ $\boxed{100\ m^2}$ $5\sqrt{2}$

$10\sqrt{2}$

29. Halla el radio de la base y la altura del cilindro de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de 5 cm de radio.

Función a optimizar:

$f(x) = 2\pi x^2 \sqrt{-x^2 + 5^2}$

Primera derivada:

$f'(x) = \frac{2\pi x(50-3x^2)}{\sqrt{25-x^2}}$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow$ Puntos críticos: $x = 0, x = -\frac{5\sqrt{6}}{3}, x = \frac{5\sqrt{6}}{3}$

Segunda derivada:

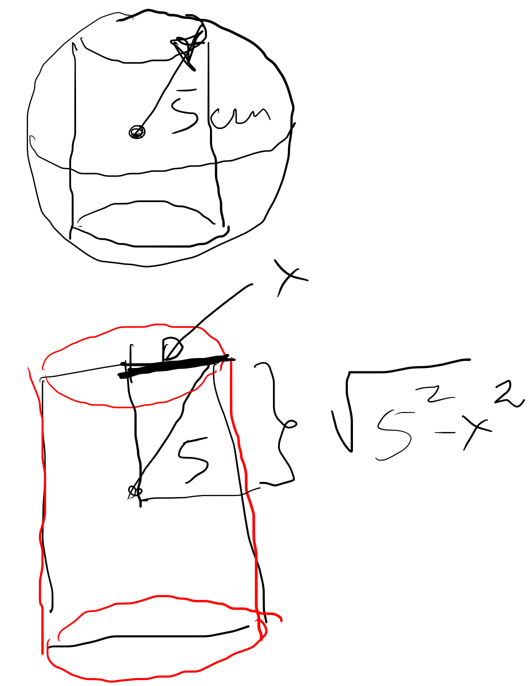
$f''(x) = \frac{2\pi\left(-x^4-5x^2\cdot(25-x^2)+2(25-x^2)^2\right)}{(25-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Extremos relativos:

- El punto $(0,0)$ es un MÍNIMO RELATIVO ya que $f''(0) = 20\pi$

- El punto $\left(-\frac{5\sqrt{6}}{3}, \frac{500\sqrt{3}\pi}{9}\right)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(-\frac{5\sqrt{6}}{3}) = -40\sqrt{3}\pi$

- El punto $\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}, \frac{500\sqrt{3}\pi}{9}\right)$ es un MÁXIMO RELATIVO ya que $f''(\frac{5\sqrt{6}}{3}) = -40\sqrt{3}\pi$



$V = \pi x^2 \cdot 2\sqrt{5^2 - x^2}$

Radio $= \frac{5\sqrt{6}}{3}$ y altura $= 2\sqrt{25 - \left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}$

30. Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativo a ese lado de 5 m. Encuentra un punto sobre la altura tal que la suma de distancias a los tres vértices sea mínima.

31. Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.

32. Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrado y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

33.- Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?

34.- Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

35.- Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices. Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo. Si la altura de la caja no puede pasar de 2 dm ¿cuál es la medida del lado del cuadrado que debemos recortar?

36.- De todas las rectas que pasan por el punto $(1\ ,2)$, encuentra la que determina con los ejes coordenados, y en el primer cuadrante un triángulo de área máxima

37.- Calcula la generatriz y el radio que debe tener un bote cilíndrico de leche condensada cuyo área total (incluyendo las dos tapas) es de $150\ \text{cm}^2$ para que su volumen sea máximo.

38.- Dos postes de 12 y 18 m de altura distan entre sí 30 m, Se desea tender un cable uniendo un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de éstos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

39.- Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

40.- Dentro del triángulo limitado por los ejes OX y OY y la recta $2x + y = 8$ se inscribe un rectángulo de vértices (a 0) (0, 0) (a, b) y (0, b). Determina el punto (a,b) al que corresponde el rectángulo de área máxima.