17. ¿Puede aplicarse el teorema de los extremos absolutos de Weierstrass a la función:

$$f(x) = -2x^2 + 5x + 2$$

en el intervalo [0,3]. En caso afirmativo, halla los extremos absolutos de la función en el intervalo.

$f(x)$ es continua en $[0,3]$ $\Rightarrow$ Se puede aplicar W.

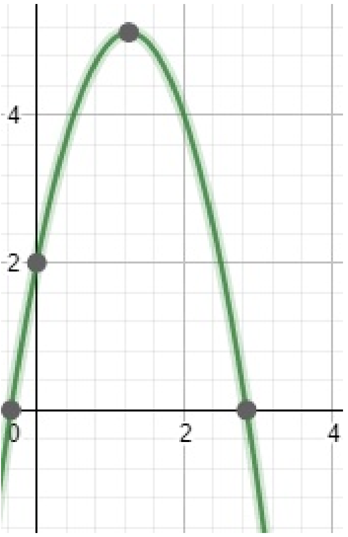
↳ Por ser polinómica (cuadrática)

f es una parábola orientada hacia abajo

Vértice: $x \to \dfrac{-5}{-4} = \dfrac{5}{4} \in [0,3]$

$y \to f\left(\dfrac{5}{4}\right) = -2 \cdot \dfrac{25}{16} + \dfrac{25}{4} + 2 = \dfrac{-50 + 100 + 32}{16} = \dfrac{82}{16} = \dfrac{41}{8}$

Máximo absoluto: $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{41}{8}\right)$



$f(0) = 2$

$-1 < 2$

$f(3) = -18 + 15 + 2 = -1$ $\Rightarrow$ Mínimo absoluto: $(3, -1)$

T.B.

18. Usando el teorema de Bolzano, demuestra que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución c tal que $1<c<2$

$f(x) = x^3+x-5$ es continua en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ es continua en $(1,2)$

$f(1) = 1+1-5 = -3 < 0$

$f(2) = 8+2-5 = 5 > 0$

$\Downarrow$ Por T.B.

$\exists\ c \in (1,2)$ tal que $f(c)=0 \Rightarrow c$ es solución de $x^3+x-5=0$

19. Comprueba que la ecuación $x^4 - x^2 - 20 = 0$ tiene alguna solución real y determina un intervalo de amplitud menor o igual a 0,5 donde se encuentre dicha solución.

$f(x) = x^4 - x^2 - 20$ es continua en $\mathbb{R}$

$f(0) = -20 < 0$

$f(1) = 1 - 1 - 20 = -20 < 0$

$f(2) = 16 - 4 - 20 = -8 < 0$ $\Longrightarrow$ La solución está en $(2,3)$

$f(3) = 81 - 9 - 20 = 52 > 0$ T.B.

$f(2{,}5) = 12.8125 > 0$ $\Longrightarrow$ La solución está en $(2, 2{,}5)$

T.B.

20. ¿Se puede afirmar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ corta al eje de abscisas en al menos un punto del intervalo (-1,0)? ¿Y del (0,1)?

son ptos donde la componente $y = 0$

f es continua en $\mathbb{R}$.

$f(-1) = 8 > 0$

$f(0) = 1 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -4 < 0 \end{array}\right\} \underset{\text{T. B.}}{\Longrightarrow} \exists\, c \in (0,1) \text{ tal que } f(c) = 0$$

$\Updownarrow$

f corta al eje OX en $(c, 0)$

21. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{7-(16)^{\frac{1}{x}}}{1+(16)^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

i) Determina los puntos en que f(x) es continua.

ii) Demuestra que existe un punto del intervalo (2,4) en el que f(x) toma el valor 1.

i) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{7-16^{-\infty}}{1-16^{-\infty}} = \dfrac{7-0}{1-0} = 7$ | $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{7}{16^{1/x}} - 1}{\frac{1}{16^{1/x}} + 1} = \dfrac{-1}{1} = -1$

$\Rightarrow$ f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

ii) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{f(x) - 1}_{g(x)} = 0$ g(x) es continua en (2,4) por

$g(2) = \dfrac{7-\sqrt{16}}{1+\sqrt{16}} - 1 = \dfrac{3}{5} - 1 = -\dfrac{2}{5} < 0$

$g(4) = \dfrac{7-2}{1+2} - 1 = \dfrac{5}{3} - 1 = \dfrac{2}{3} > 0$

$\Rightarrow$ TB $\exists\, c \in (2,4)$ t.q. $g(c) = 0$

$\Updownarrow$

$f(c) = 1$

22. ¿Puedes afirmar que la ecuación cos x = x tiene una solución en el intervalo [0,1]?. Enuncia el teorema en que te apoyas. Determina un intervalo de longitud 0,25 en el que dicha ecuación tenga una solución.

$\cos x = x \iff \cos x - x = 0 \Rightarrow f(x) = \cos x - x$

$f(0) = \cos 0 - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$

$f(1) = \cos 1 - 1 \simeq \underbrace{0{,}54 - 1}_{-0{,}46} < 0$

$\Downarrow$ T.B.

$\exists c \in (0,1)$ t.q. $f(c) = 0$

$\Updownarrow$

solución de $\cos x = x$

$f(0{,}5) \simeq 0.377582561890373$

$f(0{,}75) \simeq -0.0183111311261791 \xRightarrow{\text{T.B}} c \in (0.5, 0.75)$

i) ii)

23. Comprueba que la función $3\text{tg}^2x + 1$ toma el valor 2 en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y calcula el valor c de este intervalo para el cual $f(c) = 2$.

i) $3\,tg^2x + 1 = 2 \iff \underbrace{3\,tg^2x - 1}_{g(x)} = 0$

$g(x)$ es continua en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ (No lo es en $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)

$(0) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1 < 0$, $\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2 > 0 \underset{T.B}{\Longrightarrow} \exists c \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ tal que $g(c) = 0 \Updownarrow f(c) = 2$

ii) $3\,tg^2x + 1 = 2$

$3\,tg^2x = +1$

$tg^2x = \frac{1}{3}$

$tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}$

x= $\frac{\pi}{6}$ rad $x = 30^\circ$

24. Estudia si la ecuación $3\ln x = x$ tiene alguna solución real en el intervalo $(1,3)$.

$f(x) = 3\ln x - x$ es cta en $(0,+\infty) \Rightarrow$ en $(1,3)$

$f(1) = 3\ln 1 - 1 = -1 < 0$, $f(3) = 3\ln 3 - 1 \simeq$ 0.295836866004329 > 0

$\Downarrow$ T.B

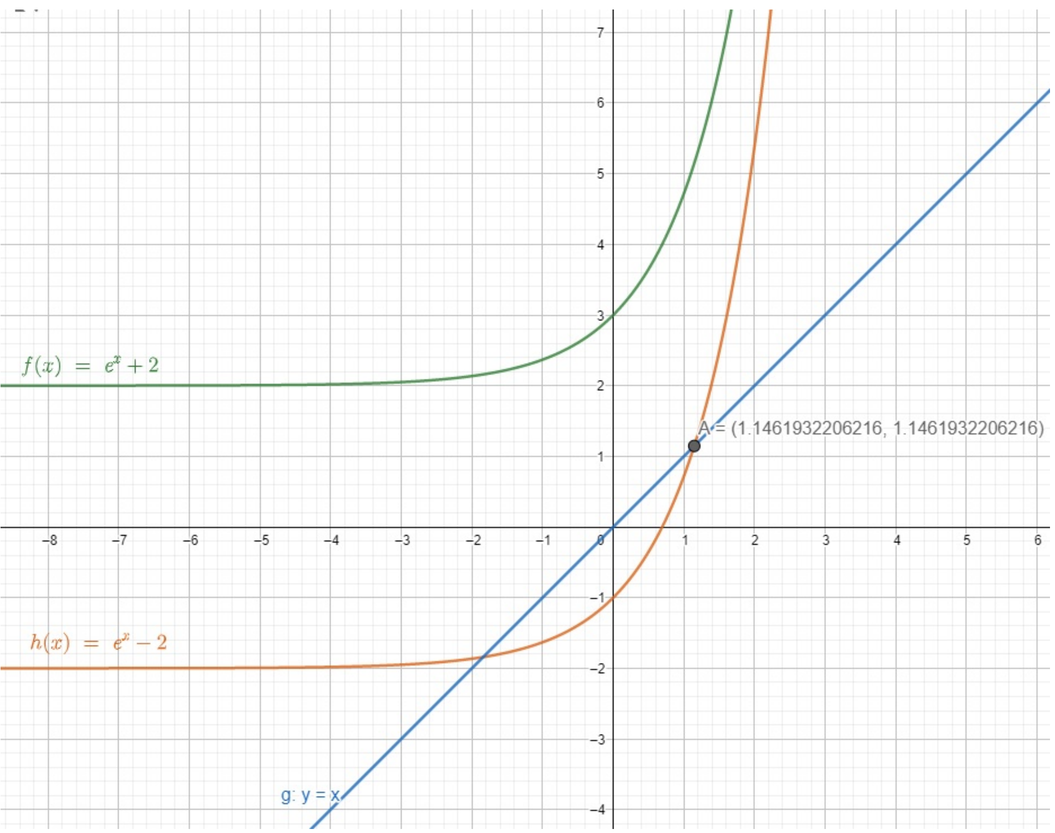
$\exists\ c \in (1,3)$ t.q. $f(c) = 0$

$\Updownarrow$

c es solución de $3\ln x = x$

28. Demostrar que la ecuación $e^x \cancel{+2=} x$ tiene al menos una solución real.

$$e^x - 2 = x \iff \underbrace{e^x - 2 - x}_{f(x)} = 0$$



$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \rightarrow$

$\rightarrow$ es continua en cualquier intervalo

$f(0) = e^0 - 2 - 0 = -1 < 0$

$f(1) = e^1 - 2 - 1 \simeq -0.281718171540955 < 0$

$f(2) \simeq 3.38905609893065 > 0$

$\Downarrow$ T.B.

$\exists\, c \in (1,2)$ t.q $f(c) = 0$

$e^c - 2 - c = 0$

c es solución de $e^x - 2 - x = 0$

" " " " $e^x - 2 = x$

25. La función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ toma el valor -1 para $x = 0$ y el valor $\dfrac{1}{2}$ para $x = 3$. ¿Podemos deducir de este hecho que existe un valor de x en el intervalo $(0,3)$ para el cual la función se anula?. Justifica tu respuesta.

$f(0) = -1 < 0 \quad \wedge \quad f(3) = \frac{1}{2} > 0$

f es cta en $\mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ NO es continua en $(0,3)$

$\Downarrow$

NO PUEDO APLICAR BOLZANO

26. Comprueba que la función $f(x) = x^2 + x + 1$ toma el valor 10 en el intervalo (-2 , 3). Calcula el valor $c \in (-2, 3)$, con un error menor que 0,1, para el cual la función alcanza el valor 10.

$f(c) = c^2 + c + 1 = 10 \Rightarrow c^2 + c + 1 - 10 = 0$

$\Downarrow$

$g(x) = x^2 + x - 9$ cta en $(-2, 3)$

$g(-2) = 4 - 2 - 9 = -7 < 0 \qquad g(3) = 9 + 3 - 9 = 3 > 0$

$\Downarrow$ T.B

$\exists\, c \in (-2, 3)$ tq. $g(c) = 0$

$g(0) = -9 \Rightarrow \exists\, c \in (0, 3)$

$g(1) = -7 \Rightarrow \exists\, c \in (1, 3)$

$g(2) = -3 \Rightarrow \exists\, c \in (2, 3)$

$g(2{,}5) = -0{,}25 \Rightarrow \exists\, c \in (2{,}5, 3)$

$g(2{,}8) = 1{,}64 \Rightarrow$ " " " $(2{,}5, 2{,}8)$

$g(2{,}7) \simeq$ 0.990000000000001

$g(2{,}6) = 2{,}36 > 0$

$\Downarrow$

$\boxed{\exists\, c \in (2{,}5, 2{,}6)}$