VARIABLES ALEATORIAS.

1. Completa la siguiente tabla de probabilidades y calcula sus parámetros.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,5	0,1

$0,5 = 1 - 0,1 - 0,3 - 0,1$

Media o esperanza de X

$$\boxed{E(x) = \mu = \sum x_i p_i} = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,1 = 1,6$$

$$\boxed{Var = \sum x_i^2 p_i - \mu^2} = 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,5 + 3^2 \cdot 0,1 - 1,6^2 =$$

$$= 0,3 + 2 + 0,9 - 1,6^2 = 3,2 - 1,6^2 = 0,64$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{Var}} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

2. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es:

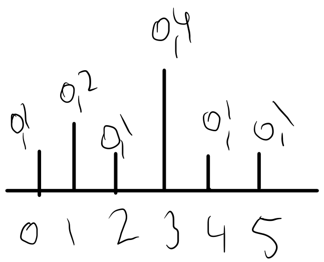
x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1

i) Representa gráficamente la función de probabilidad

ii) Calcula sus parámetros

iii) Calcula $P(X<4,5)$, $P(X\geq 3)$, $P(3\leq X<4,5)$

i)



ii) $E(X) = \mu = \sum x_i p_i = 0\cdot 0,1 + 1\cdot 0,2 + 3\cdot 0,4 + 4\cdot 0,1 + 5\cdot 0,1 = 2,5$

$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 p_i - \mu^2} = \sqrt{0^2\cdot 0,1 + 1^2\cdot 0,2 + \dots + 5^2\cdot 0,1 - 2,5^2} = \sqrt{2,05} = 1.43178210632764$

iii) $P(X<4,5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$

$= 1 - P(X=5) = 1 - 0,1 = 0,9$

$P(X\geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0,4 + 0,1 + 0,1 = 0,6$

$P(3\leq X<4,5) = P(X=3) + P(X=4) = 0,4 + 0,1 = 0,5$

3. Sacamos dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases (0, 1 o 2).
   i) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?
   ii) Calcula la media y la desviación típica.

i)

Sucesos	Variable aleat. X	Número	distrib. de probabilidad P	Probabilidad
0 ases	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$
1 as	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	$P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) = 2 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{36}{39} = \frac{12}{65}$
2 ases	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

x_i	p_i
0	$\frac{21}{26}$
1	$\frac{12}{65}$
2	$1/130$

ii)

$$\mu = E(X) = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{21}{26} + 1 \cdot \frac{12}{65} + 2 \cdot \frac{1}{130} = 0{,}2$$

$$Var = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = 0^2 \cdot \frac{21}{26} + 1^2 \cdot \frac{12}{65} + 2^2 \cdot \frac{1}{130} - 0{,}2^2 = 0.175384615384615$$

$$\sigma = \sqrt{Var} = 0.418789464271268$$

4. Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Se hacen tres extracciones sin reemplazamiento y se anota el número de bolas rojas extraídas

   i) Haz la tabla de la distribución de probabilidad

   ii) Haz otra tabla suponiendo que la extracción se hace con reemplazamiento.

i) S.R

$P(0\ \text{Rojas}) = P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3) = \frac{7}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{5}}{8} = \frac{7}{24}$

$P(1\ \text{Roja}) = P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3) + P(\bar{R}_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3) + P(R_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3) =$

$= \cancel{3} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_4} = \frac{21}{40}$

$P(2\ \text{Rojas}) = \cancel{3} \cdot \frac{\cancel{3}}{10} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{9}} \cdot \frac{7}{\cancel{8}_4} = \frac{7}{40}$

$P(3\ \text{Rojas}) = \frac{\cancel{3}}{\cancel{10}_5} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$

Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes.

ii) Con reemplazamiento:

$$P(0 \text{ rojas}) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \left(\frac{7}{10}\right)^3$$

$$P(1 \text{ roja}) = 3 \cdot P(R_1 \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}) = 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10}$$

$$P(2 \text{ rojas}) = 3\, P(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) = 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}$$

$$P(3 \text{ rojas}) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \left(\frac{3}{10}\right)^3$$

5. Se lanzan dos dados y se anotan la diferencia entre la mayor y la menor de las puntuaciones.
   i) Haz la tabla con la distribución de probabilidad y represéntala gráficamente.
   ii) Calcula la media y la desviación típica

$D_2 \backslash D_1$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$X \rightarrow$ Diferencia entre mayor y menor

i) $P(X=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(X=1) = \frac{10}{36}$

$P(X=2) = \frac{8}{36}$, $P(X=3) = \frac{6}{36}$

$P(X=4) = \frac{4}{36}$, $P(X=5) = \frac{2}{36}$

i) $E(X) = \mu = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{70}{36}$

ii) $Var = \left(\sum x_i^2 \cdot p_i\right) - \mu^2 = \left(0^2 \cdot \frac{6}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + 2^2 \cdot \frac{8}{36} + 3^2 \cdot \frac{6}{36} + 4^2 \cdot \frac{4}{36} + 5^2 \cdot \frac{2}{36}\right) - \left(\frac{70}{36}\right)^2$

$\sigma = \sqrt{Var}$

9. La última novela de cierto afamado autor ha tenido un importante éxito, hasta el punto de que el 80% de los lectores ya la han leído. Un grupo de 4 amigos son aficionados a la lectura

   i) Describe la novela que indica el número de individuos del grupo que han leído la novela

   ii) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan leído la obra 2 personas? ¿Y al menos 2?

i) $X \sim B(4; 0{,}8)$

ii) $P(X=2) = \binom{4}{2} 0{,}8^{2} \cdot 0{,}2^{4-2} =$ 0.1536

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$$

$$= 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) \right) =$$ 0.9728

10. La probabilidad de que un jugador de baloncesto enceste una canasta de 3 puntos es 0,6. Si tira 6 veces, calcula la probabilidad:

i) de que enceste 3
ii) de que enceste al menos 1
iii) de que enceste mas de 3

$X \sim B(6; 0{,}6)$

i) $P(X=3) = \binom{6}{3} \cdot 0{,}6^{3} \cdot 0{,}4^{6-3} =$ 0.27648

ii) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 -$ 0.004096 $=$ 0.995904

iii) $P(X > 3) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) =$ 0.54432

11. Un examen de tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:
   i) ¿cuál es la probabilidad de que conteste correctamente 4 preguntas?
   ii) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?
   iii) Calcula la probabilidad de que conteste mal a todas las preguntas

$X \sim B\left(10; \frac{1}{4}\right)$

i) $P(X=4)$

ii) $P(X>2) = 1-\big(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\big)$

iii) $P(X=0)$

12. Una urna contiene 5 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota su color y se devuelve a la urna. Si este experimento se repite 5 veces, calcula la probabilidad de obtener:

i) Tres bolas rojas
ii) Menos de tres rojas
iii) Más de tres rojas
iv) Alguna roja

$$X \rightsquigarrow B\left(5; \frac{5}{12}\right)$$

i) $P(X=3)$

ii) $P(X<3)$

iii) $P(X>3) = 1-\left(P(X<3)+P(X=3)\right)$

iv) $P(X>0) = 1-P(X=0)$

18. En una estación de ferrocarril se sabe que la probabilidad de que un tren llegue a la hora es del 95%. Un determinado día en el que llegan 20 trenes a la estación, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 18 lleguen a la hora ¿Y la de que como máximo 1 no llegue a la hora?

$p = 0{,}95$ $\qquad X \sim B(20; 0{,}95)$

92,45 %

i) $P(X \geq 18) = P(X=18) + P(X=19) + P(X=20) =$ 0.924516326211503

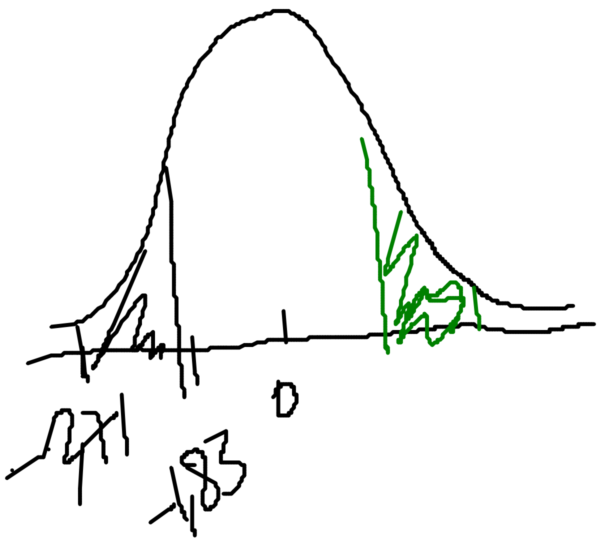
ii) P(1 no llegue a la hora como máximo) = P(lleguen 19 o lleguen 20)

$= P(X=19) + P(X=20) =$ 0.735839524943849

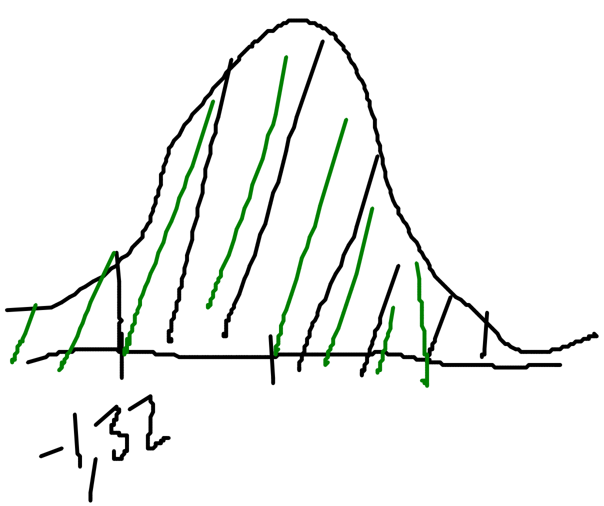
2ª FORMA: $Y \sim B(20; 0{,}05)$ $\qquad P(Y \leq 1) =$ 0.735839524943849

19. En una distribución N(0 , 1) calcula las siguientes probabilidades:

$P(-2{,}71 \le Z \le -1{,}83) = P(Z < 2{,}71) - P(Z < 1{,}83)$



$P(Z \ge -1{,}32) = P(Z < 1{,}32)$



$P(Z \leq 1{,}83)$ $\quad$ $P(Z \geq 0{,}27)$ $\quad$ $P(Z \leq -0{,}78)$ $\quad$ $P(Z \geq -2{,}4)$

$P(Z = 1{,}6)$ $\quad$ $P(-2{,}71 \leq Z \leq -1{,}83)$ $\quad$ $P(1{,}5 \leq Z \leq 2{,}5)$

$P(-1{,}87 \leq Z \leq 1{,}25)$ $\quad$ $P(Z \geq 1{,}32)$ $\quad$ $P(Z \geq -1{,}32)$ $\quad$ $P(Z \leq -2{,}17)$

$P(1{,}52 \leq Z < 2{,}05)$ $\quad$ $P(-2{,}03 < Z \leq 1{,}52)$

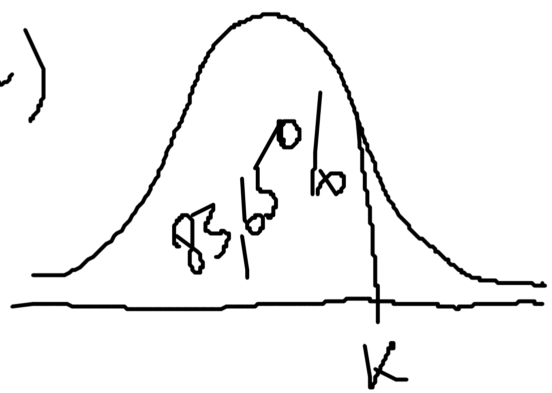
```
[0.966375030580372, 0.39358012680196, 0.217695437585733, 0.991802464075404, 0,
 0.0302608090129591, 0.0605975359430819, 0.863608317403679, 0.0934175089934718
, 0.906582491006528, 0.0150034229737322, 0.0440732724132314, 0.914566242538392
]
```

20. Calcula el valor de k en cada uno de los siguientes casos:

i) $P(Z < k) = 0{,}8365$ 　　 ii) $P(Z > k) = 0{,}8365$

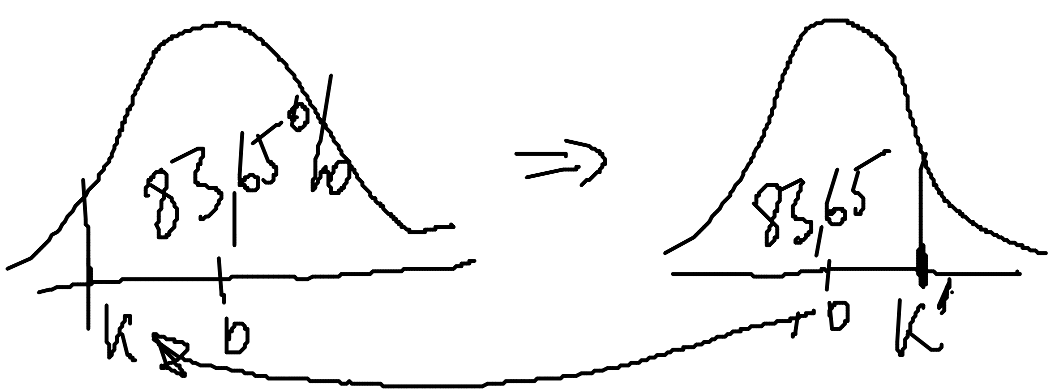
iii) $P(Z < k) = 0{,}1894$ 　　 iv) $P(-k < Z < k) = 0{,}95$

i)



$K =$ 0.9801744787417053

ii)



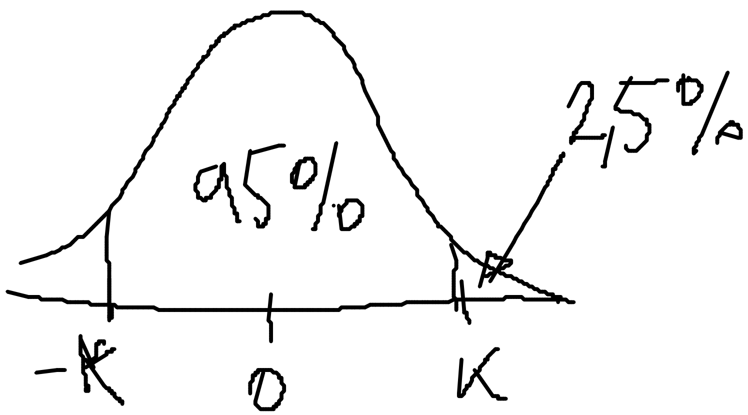
K y K' son opuestos

$K' =$ 0.9801744787417053

$\Downarrow$

$K = -$ 0.9801744787417053

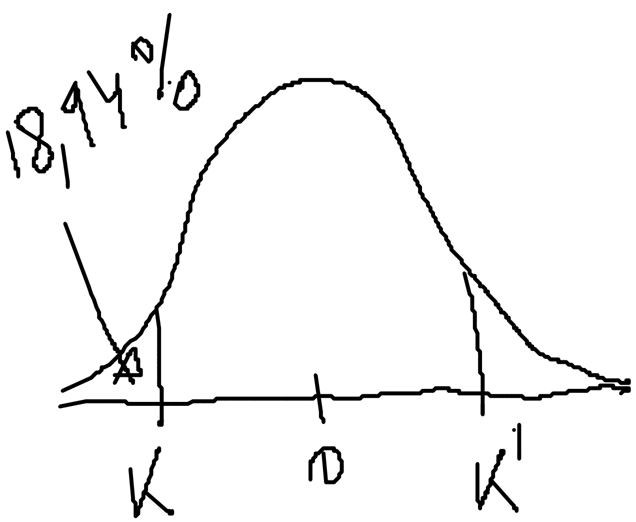
iv) $P(-k<Z<k)=0{,}95$



$P(Z<K)=1-0{,}025=0{,}975$

$\Downarrow$

$K=1.959963984540054$



$P(Z<K')=1-0{,}1894$ $K'=0.8801094874493673$

$\Downarrow$

$K=-0.8801094874493673$

24. La duración media de un lavavajillas es de 15 años, con una desviación típica igual a 0,5 años. Si la vida útil del electrodoméstico se distribuye normalmente, halla la probabilidad de que al comprar un lavavajillas, este dure más de 16 años.

$X \sim N(15, 0.5)$ $P(X>16) =$ 0.0227501319481792

25. Las precipitaciones anuales en una región son, en media, de 2000 l/m^2, con una desviación típica de 300 l/m^2. Suponiendo que el volumen anual de precipitaciones por metro cuadrado sigue una distribución normal, calcula la probabilidad de que un año determinado la lluvia no supere los 1200 l/m^2.

$X \sim N(2000, 300)$ $P(X<1200) =$ 0.00383038056758974

26. Las tallas de 800 recién nacidos se distribuyen normalmente con una media de 50 cm y una desviación típica de 5. Calcula cuántos recién nacidos cabe esperar con tallas comprendidas entre 47 y 52 cm.

$X \sim N(50, 5)$ $P(47<X<52) =$ 0.381168623860251

38,12 % de 800 $\simeq$ 305 recien nacidos

27. Según las informaciones médicas actuales, el nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal centrada en el valor 192 y con una desviación típica de 12 unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol inferior a 186 unidades?

$X \rightsquigarrow N(192, 12)$ $P(X < 186) =$ 0.308537538725987

28. Una máquina produce recipientes cuyas capacidades sIguen una distribución N(10; 0,1). Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9,9 y 10,1. ¿Qué probabilidad tiene un recipiente de ser considerado defectuoso?

$X \rightsquigarrow N(10, 0{,}1)$ $P(D) = 1 - P(\text{Válido}) = \underbrace{1 - P(9{,}9 < X < 10{,}1)}_{\shortparallel}$

0.317310507862915

29. En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media de 23° y desviación típica de 5°. Calcula el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°.

$X \rightsquigarrow N(23, 5)$

$P(21 < X < 27) =$ 0.443566343026927 $\rightarrow 44{,}36\%$

$44{,}36\%$ de 30 días $\simeq 13$ días

30. Los pesos de los habitantes adultos de una ciudad se distribuyen normalmente con media de 75 kg y desviación típica de 4 kg.

i) ¿Cuál será la probabilidad de que el peso de un habitante de esa ciudad esté entre 61 y 83 kg?

ii) ¿Qué probabilidad hay de que una persona de esa ciudad pese más de 105 kg?

$X \sim N(75, 4)$

i) $P(61 < X < 83) =$ 0.977017238972785

ii) $P(X > 105) \simeq 0$

31. Las alturas, expresadas en centímetros, de un colectivo de 300 estudiantes se distribuyen según la distribución normal con una media de 160 y una desviación típica de 20.

i) Calcula cuántos estudiantes del grupo miden menos de 170.

ii) ¿Qué porcentaje de alumnos mide más de 140?

$n = 300 \qquad X \rightsquigarrow (160, 20)$

i) $P(X < 170) =$ 0.691462461274013 $\Rightarrow$ 69,15% de 300 $\approx$ 207

ii) $P(X > 140) =$ 0.841344746068543 $\Rightarrow$ 84.13 %

32. Las puntuaciones de un grupo de 500 alumnos en una prueba de razonamiento numérico (X) se distribuyen normalmente con una media de 5 y una desviación típica de 2.

i) ¿Qué porcentaje de alumnos obtiene una nota inferior a 9? ¿Cuántos alumnos son?

ii) ¿Cuántos alumnos tienen una puntuación mayor de 3?

$X \sim N(5,2)$

i) $P(X<9) =$ 0.977249868051821 $\Rightarrow$ 97,72% de 500 $\approx$ 489

ii) $P(X>3) =$ 0.841344746068543 $\Rightarrow$ 84,13% de 500 $\approx$ 421

33. Martín es un estudiante de Bachillerato que va andando desde su casa al instituto todos los días. El tiempo que tarda en recorrer ese trayecto es una variable normal con media de 14 minutos y desviación típica de 2,5 minutos.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde más de 20 minutos en ir desde su casa al centro?

ii) Martín sale siempre de su casa a las 8.45. ¿Qué porcentaje de días llegará más tarde de las 9.00?

$X \sim N(14, 2.5)$

i) $P(X > 20) = 0.00819753592459612$

ii) $P(X > 15) = 0.344578258389676 \Rightarrow 34{,}46\%$

34. El peso medio de los estudiantes de un colegio es de 60 kg, y la desviación típica es de 6 kg. Suponiendo que los pesos están normalmente distribuidos:

i) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante pese menos de 64 kg?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante pese 57 kg o más?

iii) Si los estudiantes son 200, ¿cuántos cabe esperar que pesen más de 57 kg y menos de 64?

$n = 200$ $\quad X \sim N(60, 6)$

i) $P(X < 64) =$ 0.747507462453077

ii) $P(X \geq 57) =$ 0.691462461274013

iii) $P(57 < X < 64) =$ 0.43896992372709

43,90% de 200 $\simeq 88$

35. Una compañía de autobuses realiza un estudio sobre el número de veces que semanalmente utilizan el autobús los usuarios. Se sabe que los datos se distribuyen en una normal N{ 10, 3). Calcula la probabilidad de que un usuario utilice el autobús:

i) Más de 11 veces.

ii) Menos de 8 veces

$X \sim N(10, 3)$

i) $P(X > 11) =$ 0.369441340181764

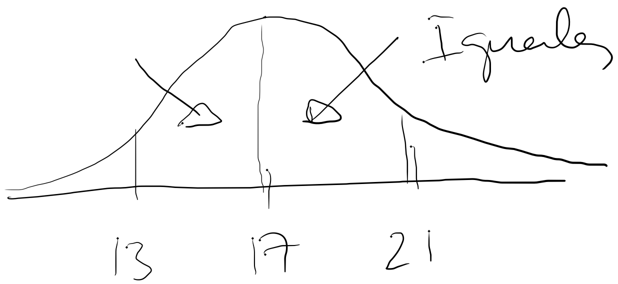
ii) $P(X < 8) =$ 0.252492537546923

36. El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un centro sanitario se distribuye según una variable normal de media 17 minutos y desviación típica 3 minutos

i) Calcula la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 13 y 21 minutos

ii) ¿Para qué valor de t, la probabilidad de que la ambulancia emplee más de t minutos en llegar es del 5%?

$X \sim N(17,3)$



i) $P(13 < X < 21) = 2P(17 < X < 21) =$

$= 2\left[P(X < 21) - 0{,}5\right] =$

$= 2\left[0.908788780274132 - 0{,}5\right] = 0.817577560548264$

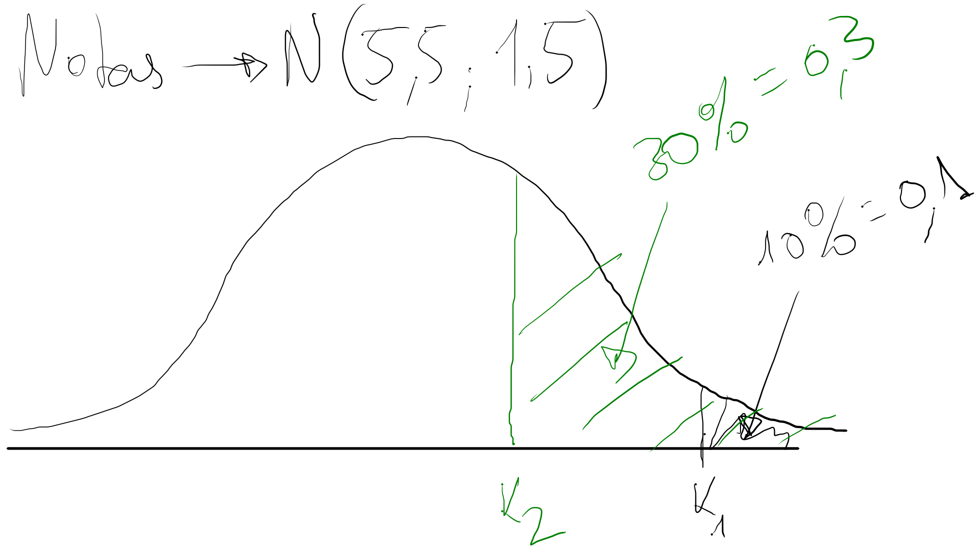
ii)

$P(X < t) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(Z < \frac{t-17}{3}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow \frac{t-17}{3} = 1.6448536269514722 \Rightarrow t = 21.934560880854416$

37. La calificación media de un cierto examen ha sido de 5,5 con una desviación típica de 1,5, y el conjunto de notas se ajusta a una distribución normal. El profesor quiere calificar con sobresaliente al 10% de la clase, y con notable al 30%. ¿A partir de que nota se conseguirá el sobresaliente y de cuál el notable?

Notas $\to N(5{,}5\,;\,1{,}5)$



SOBRESALIENTE

$$P(X \geq K_1) = 0{,}1 \Rightarrow P(X < K_1) = 0{,}9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{K_1 - 5{,}5}{1{,}5}\right) = 0{,}9$$

$$\frac{K_1 - 5{,}5}{1{,}5} = 1.2815515655446004 \Rightarrow K_1 = 7.422327348316901$$

NOTABLE

$$P\left(Z < \frac{K_2 - 5{,}5}{1{,}5}\right) = 0{,}7 \Rightarrow K_2 = 6.286600769062061$$

39. En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múl- PAU tiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contestan más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcula la probabilidad de aprobar el examen.

$X \rightsquigarrow B(\underset{n}{200}, \underset{p}{\tfrac{1}{2}}) \Rightarrow X \rightsquigarrow X' \underset{\text{se aproxima}}{\rightsquigarrow} N\left(\underset{np}{200 \cdot \tfrac{1}{2}}, \underset{\sqrt{npq}}{\sqrt{200 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}}}\right) = N(100, \sqrt{50})$

$n \cdot p = 100 \geq 5$

$n \cdot (1-p) = 100 \geq 5$

$P(X \geq 110) = P(X' \geq 110 - 0{,}5) = 1 - P\left(Z < \frac{109{,}5 - 100}{\sqrt{50}}\right) =$ 0.089554596363361 $\Rightarrow \approx 9\%$

Aproximación de la Binomial a la normal. No entra en la EVAU