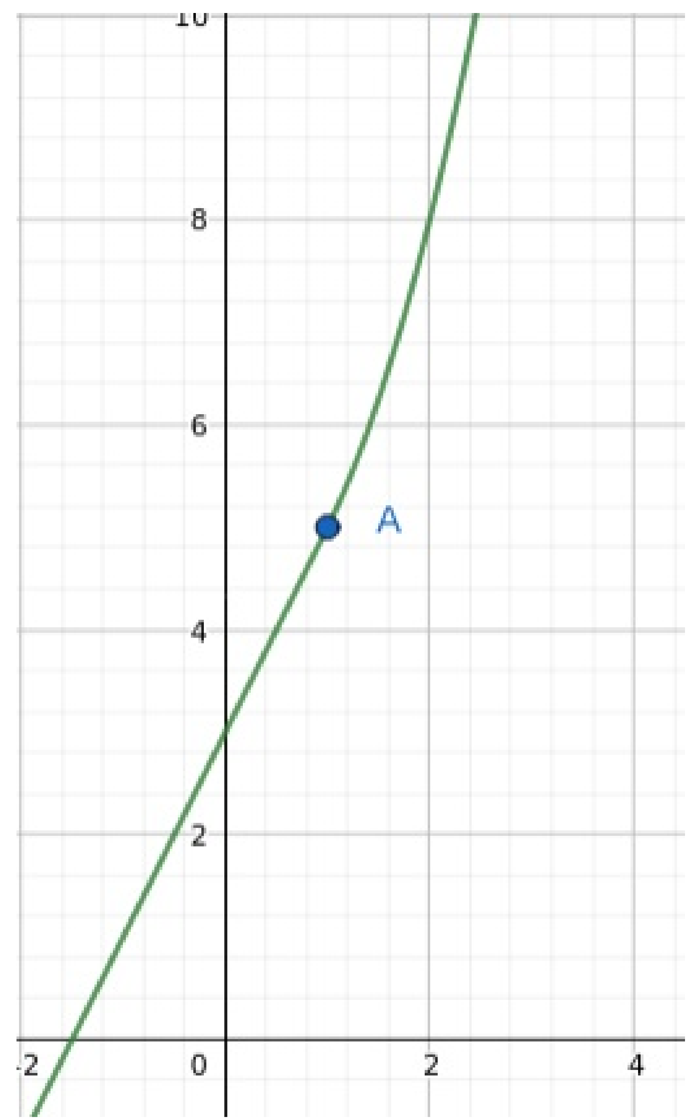
CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+4 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$ es continua en $x_0 = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= 2\cdot 1+3=5 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= 1^2+4=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 5$$



2. Comprueba que las siguientes funciones son continuas en el punto x_0 que se indica.

i) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 9$ en $x_0 = -2$

f es continua en todo su dominio:

$-2 \in Dom(f) \Rightarrow$

f es continua en $x_0 = -2$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

ii) $g(x) = \dfrac{x-6}{x^2+2}$ en $x_0 = 4$

$Dom(g) = \mathbb{R} - \{x / x^2+2=0\} = \mathbb{R}$

$4 \in Dom(g)$

$\Downarrow$

g es continua en $x_0 = 4$

iii) $h(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \leq 3 \\ -x+11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en $x_0=3$

$\lim_{x \to 3^-} h = 3 \cdot 3 - 1 = 8$

$\lim_{x \to 3^+} h = -3 + 11 = 8$

Como $\lim_{x \to 3} h = h(3) = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Es continua en $x_0 = 3$

iv) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x_0=0$

$\lim_{x \to 0^-} i = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\lim_{x \to 0^+} i = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

Como $\lim_{x \to 0} i = i(0) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ es continua en $x_0 = 0$

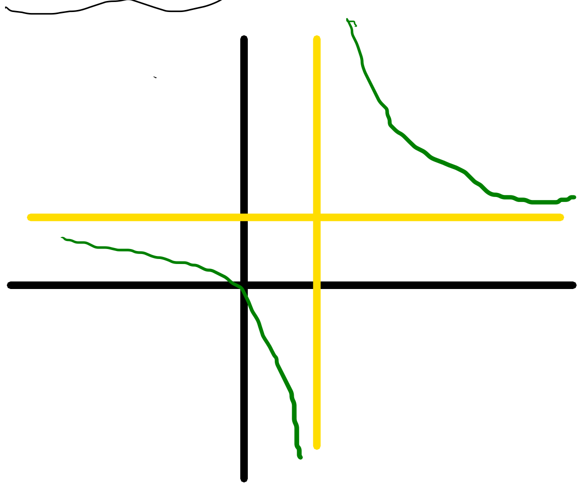
3. Comprueba que las siguientes funciones no son continuas en el punto x_0 que se indica.

i) $f(x) = \dfrac{x+4}{x-1}$ en $x_0 = 1$

$x_0 = 1 \notin \text{Dom}(f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists\, f(1) \Rightarrow$ No es continua en $x_0 = 1$

Discontinuidad de salto ∞



ii) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -5 \\ x+8 & \text{si } x \geq -5 \end{cases}$ en $x_0 = -5$

$\lim_{x \to -5^-} g = 25 - 2 = 23$

$\neq$

$\lim_{x \to -5^+} g = -5 + 8 = 3$

$\nexists \lim_{x \to -5} g \Rightarrow$ No es continua en $x_0 = -5$

Disc. de salto finito

4. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < -1 \\ x-1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 3 \\ -x^2+2x+5 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$ en los puntos $x_0 = -1, 3$

$\lim_{x \to -1^-} f = -(-1) = +1$, $\lim_{x \to -1^+} f = -1-1 = -2 \Rightarrow$ No es continua

$\lim_{x \to 3^-} f = 3-1 = 2$, $\lim_{x \to 3^+} f = -9+6+5 = 2 \Rightarrow$ Sí " "

5. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

i) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x<0 \\ x-2 & \text{si } 0\le x<3 \\ x^2-1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$ en $[0,3]$

En $(0,3)$ f es continua por serlo $y=x-2$ en $\mathbb{R}$

En $x=0$ (Ver pág siguiente)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f = 0-2=-2$

$\Downarrow$

NO ES CONTINUA EN $x=0$

En $x=3$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f = 3-2=1$

$\neq$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f = 9-1=8$

$\Downarrow$

NO ES CONTINUA EN $x=3$

ii) $g(x) = \sqrt{x-1}$ en $[1,+\infty)$

Una expresión analítica

$\Downarrow$

g es continua en todo su dominio

$Dom(g)=\{x / x-1\geq 0\}$

$x\geq 1$

$[1,\infty)$

$\Downarrow$

g es continua en $[1,+\infty)$

iii) $h(x) = x.|x|$

$h(x)=\begin{cases} x\cdot x, & \text{si } x\geq 0 \\ x\cdot(-x), & \text{si } x<0 \end{cases}$

$h(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\geq 0 \\ -x^2, & \text{si } x<0 \end{cases}$

Si $x\neq 0$ h es continua por serlo sus trozos

En $x=0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} 0^2=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -0^2=0 \\ h(0)=0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ h es cte en $x=0$

h es cte en $\mathbb{R}$

i) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x-2 & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$ en $[0,3]$

En $(0,3)$ f es continua por serlo $y = x-2$ en $\mathbb{R}$

¿En $x_0 = 0$ es continua por la derecha?

$$\lim_{x \to 0^+} f = 0 - 2 = -2$$

$$/\!/$$

$$f(0) = -2$$

$$\Downarrow$$

sí es continua por la derecha de 0

¿En $x_0 = 3$ es continua por la izqda?

$$\lim_{x \to 3^-} f = 3 - 2 = 1$$

$$\nparallel$$

$$f(3) = 3^2 - 1 = 8$$

$\Rightarrow$ No es cta por la izqda de 3

6. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si $x \neq 2 \Rightarrow f$ es continua por serlo sus trozos

- Si $x = 2$ $\quad \lim\limits_{x \to 2^-} f = 2^2 = 4$ $\quad \neq \quad \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 2}$

  $\lim\limits_{x \to 2^+} f = 2$

$\Rightarrow$ NO ES CONTINUA EN $x = 2$

7. Hallar k para que la función f(x) sea continua $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1^-} f = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f = 2$$

$f(1) = K \Rightarrow$ Para que sea continua

$$\boxed{K = 2}$$

8. Calcula k en la siguiente función, para que f sea continua $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x}{x} & \text{si } x<0 \\ k & \text{si } x=0 \\ 2x+3 & \text{si } x>0 \end{cases}$

- Si $x \neq 0$, f es continua por serlo sus trozos

- Si $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}} = 3 \\ \lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to 0^+} 2\cdot 0+3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f = 3$$

$$f(0) = K$$

f será continua en $x=0 \iff \lim_{x\to 0} f = f(0)$

$$3 = K$$

9. Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ es discontinua en $x_0=2$, y determina el tipo de discontinuidad.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f = 2-1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f \Rightarrow f \text{ no es continua en } x=2$$

$$\Downarrow$$

Discont. de salto infinito

10. Hallar el dominio de discontinuidad de las siguientes funciones, clasificando sus puntos de discontinuidad.

i) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ ii) $y = \dfrac{2x-1}{2x^2-5x+2}$ iii) $y = \dfrac{x-1}{x^4-3x^3+6x-4}$

iv) $y = \sqrt{2x^2-5x+2}$ v) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$ vi) $y = \dfrac{2}{|x|-2}$

vii) $y = \dfrac{2}{|x-2|-2}$ viii) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ ix) $y = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{x+3}{x-5} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

x) $y = x.e^{x^2}$ xi) $y = \log(x+3)$ xii) $y = \operatorname{sen} x^2 . \cos x$

i) $\{x \mid x^2+1=0\} = \{\emptyset\}$ cta en $\mathbb{R}$

ii) $\{x \mid 2x^2-5x+2=0\} = \{2, 1/2\}$ $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1/2 \end{matrix} \right.$

iii) $\{x \mid x^4-3x^3+6x-4=0\} = \{1, 2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

iv) $\{x \mid \underbrace{2x^2-5x+2}_{(x-2)(2x-1)} < 0\} = (1/2, 2)$

		$1/2$		2	
$x-2$	$-$		$-$		$+$
$2x-1$	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

x) $y = x.e^{x^2}$

Es continua

en $\mathbb{R}$

xi) $y = \log(x+3)$

$\{x \mid x+3 \leq 0\} =$

$= (-\infty, -3]$

xii) $y = \text{sen}\, x^2 . \cos x$

Es continua

en $\mathbb{R}$

viii) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

$\{x \mid x \leq 0\} \cup \{x \mid \ln x = 0\} =$

$= (-\infty, 0] \cup \{x \mid e^0 = x\} =$

$= (-\infty, 0] \cup \{1\}$

ix) $y = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{x+3}{x-5} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

$\lim_{x \to -2^-} y = -2 + 4 = 2$

$\lim_{x \to -2^+} y = \dfrac{-2+3}{-2-5} = -\dfrac{1}{7}$

$\{x \mid x - 5 = 0\} \cup \{-2\} =$

$= \{5, -2\}$

vi) $y = \dfrac{2}{|x|-2}$

$\{x \mid |x|-2=0\} = \{x \mid |x|=2\} = \{-2, 2\}$

vii) $y = \dfrac{2}{|x-2|-2}$

$\{x \mid |x-2|-2=0\} = \{x \mid |x-2|=2\} = \{x \mid x-2=-2\} \cup$

$\{x \mid x-2=2\} = \{0, 4\}$

v) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$

$$\left\{ x \,/\, \frac{x+1}{x-3} < 0 \right\} = (-1, 3)$$

		-1		3	
$(x+1)$	$-$		$+$		$+$
$(x-3)$	$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$

11. Halla el valor que debe tener k para que la función $f(x) = \dfrac{2x^2+4kx+10}{x-1}$ tenga una discontinuidad evitable en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1} f = \frac{2+4K+10}{1-1} = \frac{4K+12}{0} = \begin{cases} 4K+12=0 & \frac{0}{0} \\ 4K+12\neq 0 & \frac{\square}{0} = \pm\infty \quad \text{(NO EVITABLE)} \end{cases}$$

$$\text{Si} \quad 4K+12=0 \Rightarrow \boxed{K=-3}$$

$$\text{Si} \quad K=-3 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2-12x+10}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-12x+10}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(2x-10)}{\cancel{(x-1)}} = -8$$

$\exists \lim_{x\to 1} f$ finito, pero $\nexists f(1) \Rightarrow$ Discontinuidad evitable en $x=1$

12. Hallar el valor que debe tener k para que la función $f(x) = \dfrac{kx^2 - 3x + 7}{x - 2}$ tenga una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x_0=2$

SALTO INFINITO si $\lim_{x\to 2} f(x) = \dfrac{\square^{\neq 0}}{0} = \pm\infty$

$$k \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7 \neq 0$$

$$4k - 6 + 7 \neq 0$$

$$4k + 1 \neq 0$$

$$\boxed{k \neq -\frac{1}{4}}$$

13. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-x-2}$ ii) $f(x) = x^2 + \ln(x-4)$ iii) $f(x) = e^{2 \cdot \text{sen}\, x}$

iv) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+3}$ v) $f(x) = \dfrac{\cos 2^x}{\ln x^2}$

Las funciones son continuas en todo su dominio

i) $\{x / x^2 - x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 2\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$

ii) $\{x / x-4 > 0\} = (4, +\infty)$ iii) $\mathbb{R}$

iv) $\{x / x+1 \geq 0 \wedge x^2+3 \neq 0\} = [-1, \infty) \cap \mathbb{R} = [-1, \infty)$

$x^2+3=0$ $\nexists$ sol.

v) $\{x / x^2 > 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

14. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x<1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x<1 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x<-1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Si $x \neq 1$

f es continua por serlo sus trozos en sus dominios

Si $x=1$

$\lim_{x\to 1^-} f = e^1 = e$

$\neq$

$\lim_{x\to 1^+} f = \ln 1 = 0$

Discontinua en $x=1$

Si $x=0$, f es discontinua

$\lim_{x\to 0} f = \frac{1}{0} = \pm\infty$

si $x=1$

$\lim_{x\to 1^-} f = \frac{1}{1} = 1$

$\neq$

$\lim_{x\to 1^+} f = 1-1=0$

$\Downarrow$

f es discontinua en $x=0$ y en $x=1$

Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$

f es continua por serlo sus trozos en sus dominios.

$\lim_{x\to -1^-} f = |-1+2| = 1$

$\lim_{x\to -1^+} f = (-1)^2 = 1$

$f(-1)=1 \Rightarrow$ Cta en $x=-1$

$\lim_{x\to 1^-} f = 1^2 = 1$

$\times$

$\lim_{x\to 1^+} f = 2\cdot 1+1 = 3$

Discontinua en $x=1$

15. Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas:

i) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 2 \\ k-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \le 0 \\ x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

iv) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ k & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

i) $2+1 = K-2$

$3 = K-2$

$\boxed{5 = K}$

ii) $0+K = 0-1$

$\boxed{K=-1}$

iii) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+1)(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2\cdot 2 = 4$

$f(1) = K \Rightarrow \boxed{K=4}$

iv) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{(\sqrt{x}+1)\cancel{(\sqrt{x}-1)}} = \dfrac{1}{2}$

$f(1) = K \Rightarrow \boxed{K = \dfrac{1}{2}}$

16. Halla a y b de modo que las siguientes funciones sean continuas:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \operatorname{sen}(b+x) & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{x} & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$

i)
$$\lim_{x \to 0^-} f = \lim_{x \to 0^+} f \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = b \\ \\ a + b = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{a = 2, \; b = 0}$$
$$\lim_{x \to 1^-} f = \lim_{x \to 1^+} f \Rightarrow$$

iii)
$$\lim_{x \to 1^-} f = \lim_{x \to 1^+} f \Rightarrow \ln 1 = a + b$$
$$0 = a + b \Rightarrow \boxed{b = -a}$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \operatorname{sen}(b+x) & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{x} & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f = \lim_{x \to 0^+} f$$

$$\lim_{x \to \pi^-} f = \lim_{x \to \pi^+} f$$

$\Rightarrow$

$a = \operatorname{sen} b$

$\operatorname{sen}(b+\pi) = 1$

$-\operatorname{sen} b = 1$

$\operatorname{sen} b = -1$

$$\boxed{\begin{array}{c} b = \dfrac{3\pi}{2} \\ a = -1 \end{array}}$$

17. ¿Puede aplicarse el teorema de los extremos absolutos de Weierstrass a la función:

$$f(x) = -2x^2 + 5x + 2$$

en el intervalo [0,3]. En caso afirmativo, halla los extremos absolutos de la función en el intervalo.

18. Usando el teorema de Bolzano, demuestra que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución c tal que $1<c<2$

19. Comprueba que la ecuación $x^4 - x^2 - 20 = 0$ tiene alguna solución real y determina un intervalo de amplitud menor o igual a 0,5 donde se encuentre dicha solución.

20. ¿Se puede afirmar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ corta al eje de abscisas en al menos un punto del intervalo $(-1,0)$? ¿Y del $(0,1)$?

21. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{7-(16)^{\frac{1}{x}}}{1+(16)^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

i) Determina los puntos en que $f(x)$ es continua.

ii) Demuestra que existe un punto del intervalo $(2,4)$ en el que $f(x)$ toma el valor 1.

22. ¿Puedes afirmar que la ecuación $\cos x = x$ tiene una solución en el intervalo $[0,1]$?. Enuncia el teorema en que te apoyas. Determina un intervalo de longitud 0,25 en el que dicha ecuación tenga una solución.

23. Comprueba que la función $3\text{tg}^2x + 1$ toma el valor 2 en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y calcula el valor c de este intervalo para el cual $f(c) = 2$.

24. Estudia si la ecuación $3\ln x = x$ tiene alguna solución real en el intervalo $(1,3)$.

25. La función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ toma el valor -1 para $x = 0$ y el valor $\dfrac{1}{2}$ para $x = 3$. ¿Podemos deducir de este hecho que existe un valor de x en el intervalo $(0,3)$ para el cual la función se anula?. Justifica tu respuesta.

26. Comprueba que la función $f(x) = x^2 + x + 1$ toma el valor 10 en el intervalo $(-2, 3)$. Calcula el valor $c \in (-2, 3)$, con un error menor que 0,1, para el cual la función alcanza el valor 10.

27. Aplica el Teorema de Bolzano para probar que las gráficas de $f(x) = Lx$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto y localízalo aproximadamente.

28. Demostrar que la ecuación $e^x + 2 = x$ tiene al menos una solución real.

29. ¿Tiene alguna raíz la siguiente ecuación?: $\text{sen } x + 2x + 1 = 0$ Si la respuesta es afirmativa, determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

30. Comprobar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ posee alguna solución real en $[0,\pi]$.

31. Se sabe que $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$. ¿Es posible asegurar que para algún punto c del intervalo $[a,b]$ se cumple que $f(c) = 7$. Razona tu respuesta e ilústrala con ejemplos.

32. Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$, tales que $f(a)>g(a)$ y $f(b)<g(b)$. Demuestra que $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

33. Demuestra que si f es una función continua definida en [0,1] y tal que f(x) también pertenece al intervalo [0,1], entonces f(x) = x para algún x. (El punto x se denomina punto fijo)