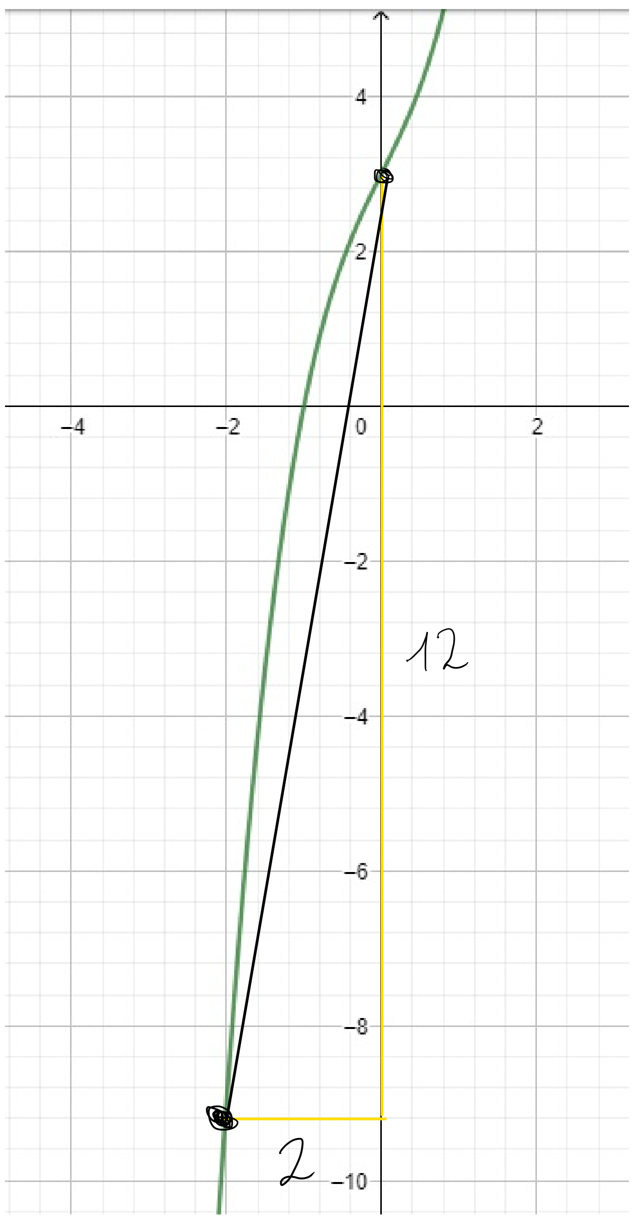
DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

1. Calcula la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 2x + 3$ en los intervalos: $[-2, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ y $[2, 3]$

$$T.V.M_{[-2,0]} = \frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = \frac{3-(-8-4+3)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$



1. Calcula la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 2x + 3$ en los intervalos: $[-2, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ y $[2, 3]$

$$T.V.M_{[0,1]} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{6 - 3}{1} = 3$$

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en el punto que se indica, utilizando la definición de derivada:

a) $f(x) = x+2$ en $x = -1$

Usando la definición

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-1+h+2) - (-1+2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}/h}{\cancel{h}/h} = 1$$

Usando la función derivada

$$f'(x) = (x+2)' = 1 + 0 = 1$$

$$f'(-1) = 1$$

↑

No hay

x que sustituir

c) $f(x) = x^2-2$ en $x=1$

DEF:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} T.V.M_{[1,1+h]} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 2 - (1^2 - 2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = 2$$

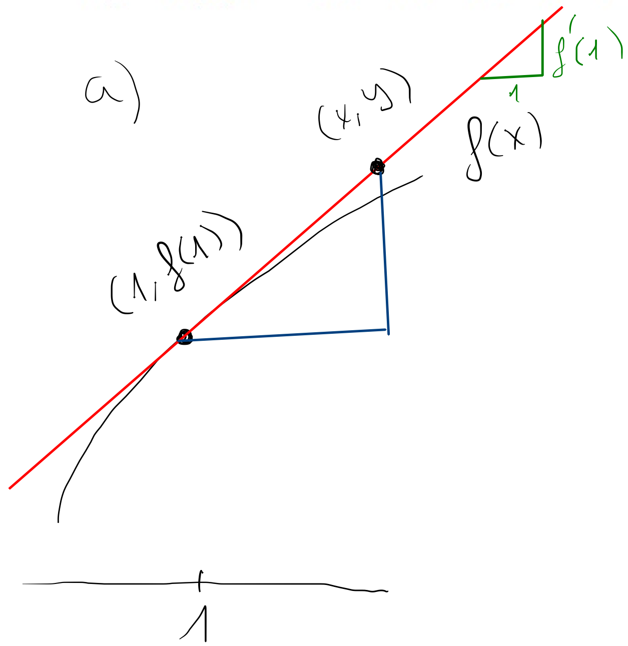
Regla de deriv.

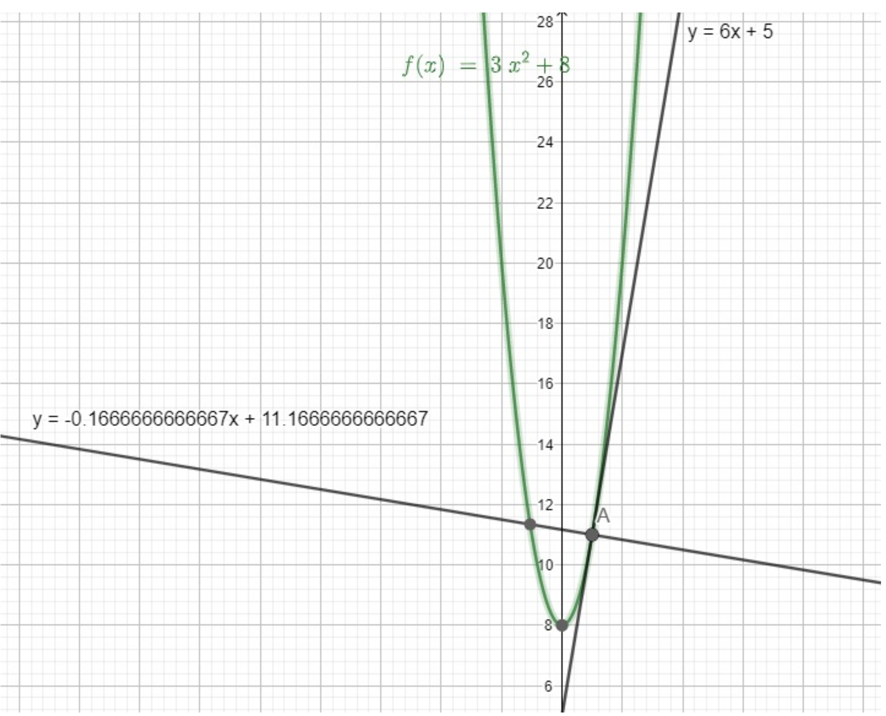
$$f'(x) = 2x - 0 = 2x$$

$$f'(1) = 2$$

5. Halla la ecuación de la recta tangente y normal a las curvas, en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x^2+8$ en $x=1$ b) $f(x) = x^4-1$ en $x=0$ c) $f(x) = x^3+1$ en $x=0$





Recta tangente

Ec. pto pendiente

$$\frac{y-f(1)}{x-1} = f'(1) \quad , f'(x)=6x$$

$$\frac{y-11}{x-1} = 6$$

$$y-11 = 6(x-1)$$

$$\boxed{y = 6x+5}$$

Recta Normal

$$\frac{y-11}{x-1} = -\frac{1}{f'(1)}$$

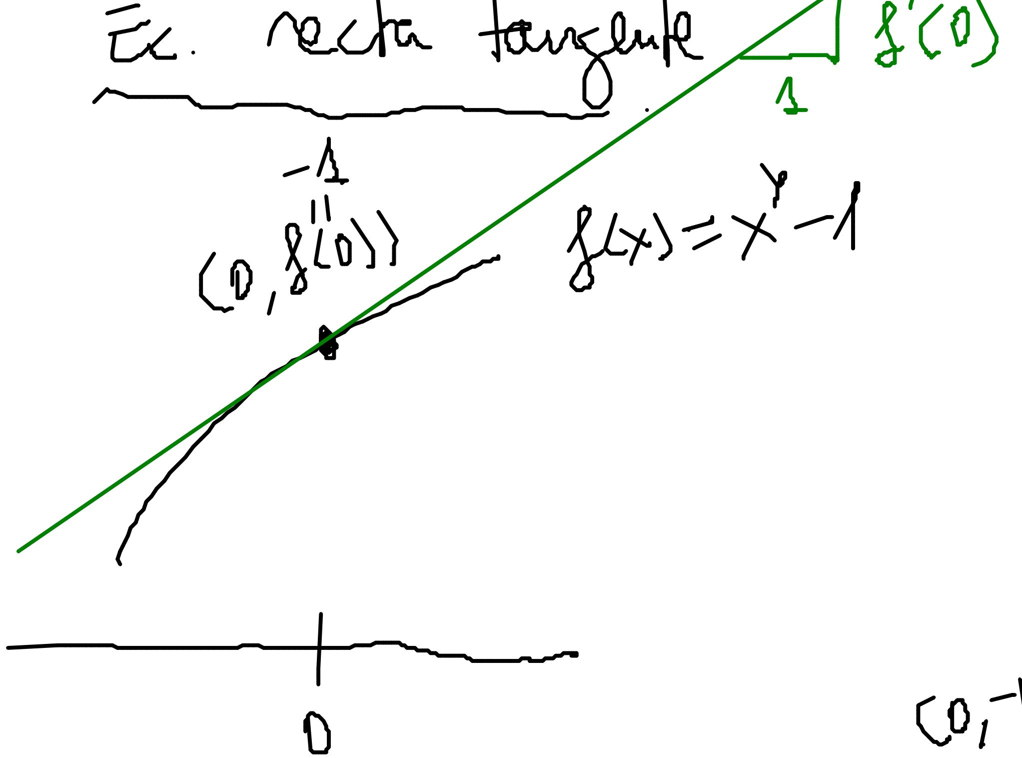
$$\frac{y-11}{x-1} = -\frac{1}{6}$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6} + 11$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{6}x + \frac{67}{6}}$$

b) $f(x) = x^4 - 1$ en $x=0$

Ec. recta tangente



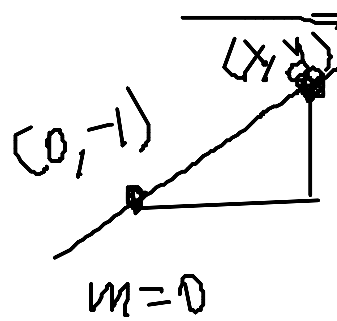
Pto: $f(0) = 0^4 - 1 = -1 \rightarrow (0,-1)$

Pdte: $f'(0)$

$f'(x) = 4x^3 - 0 = 4x^3$

$f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$

recta tg



$$\frac{y-(-1)}{x-0} = 0$$

$$y-(-1) = 0(x-0)$$

$$\boxed{y=-1}$$

recta normal:

pendiente es $-\frac{1}{0} \rightarrow \infty \rightarrow$ Es vertical $\rightarrow \boxed{x=0}$

$$\frac{y+1}{x-0} = -\frac{1}{0} \rightarrow x-0=0$$

c) $f(x) = x^3+1$ en $x=0$

$f(0) = 1 \Rightarrow$ Pasan por $(0,1)$

pendiente de la tg: $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$

pendiente de la normal: $-\frac{1}{f(0)} = -\frac{1}{0} \Rightarrow \infty \Rightarrow$ recta vertical

Recta tg: $\frac{y-1}{x-0} = 0 \Rightarrow \boxed{y=1}$

Recta normal: $\frac{y-1}{x-0} = -\frac{1}{0} \Rightarrow x-0=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

6. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x-2 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x^2-7x+14 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Para que una función sea derivable en un punto tiene que suceder:

- Que la función sea continua.
- Que existan las derivadas laterales y estas sean iguales, es decir, que la función derivada sea una función continua.

a)

- Continuidad de f:
  - f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ por ser polinómicas
  - $\lim_{x \to 0^-} f = -0^2 = -0 = 0$ $\quad f(0)=0$

    $\lim_{x \to 0^+} f = 0^2 = 0$ $\quad =$

    $\Downarrow$

    f cta en $\mathbb{R}$

- Derivabilidad

Derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ por ser continuos sus trozos.

$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$ $\quad$ ¿En $x=0$? $\quad$ $\lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = 0 \Rightarrow$ Derivable en $\mathbb{R}$

$\circledast$

$\exists f'(0) = 0$

$\Downarrow$

$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x<-2 \\ 2 & \text{si } -2\leq x<0 \\ x-2 & \text{si } 0\leq x\leq 4 \\ x^2-7x+14 & \text{si } x>4 \end{cases}$

Continuidad:

f es cta en $\mathbb{R}-\{-2,0,4\}$

por serlo sus partes

En $x=-2$

$\lim_{x\to -2^-} f = 2\cdot(-2)+6=2$

$\lim_{x\to -2^+} f = 2$ y $f(-2)=2$

En $x=0$ $\lim_{x\to 0^-} f = 2$, $\lim_{x\to 0^+} f = -2$

En $x=4$ $\lim_{x\to 4^-} f = 4-2=2$, $\lim_{x\to 4^+} f = 16-28+14=2$ y $f(4)=2$

f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

$f'(x) = \begin{cases} 2, & x<-2 \\ 0, & -2<x<0 \\ 1, & 0<x<4 \\ 2x-7, & x>4 \end{cases}$

$\lim_{x\to -2^-} f' = 2 \neq 0 = \lim_{x\to -2^+} f$

$\lim_{x\to 4^-} f' = 1 = \lim_{x\to 4^+} f'$

No es continua

f no es derivable en $x=0,-2$

$f'(x) = \begin{cases} 2, & x<-2 \\ 0, & -2<x<0 \\ 1, & 0<x<4 \\ 2x-7, & x\geq 4 \end{cases}$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

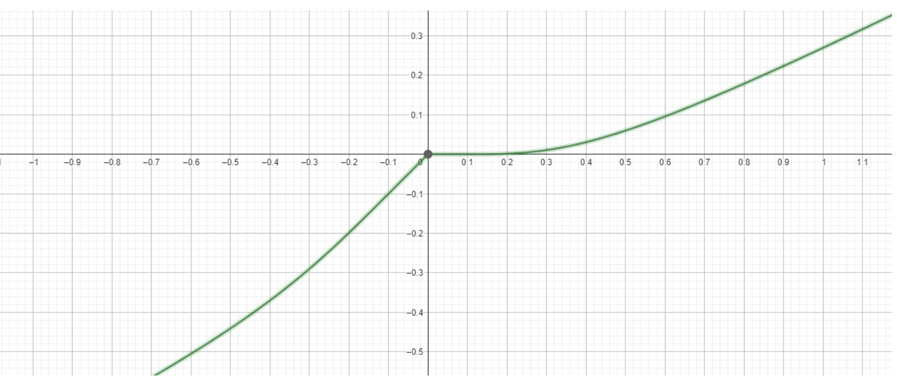
Continuidad en $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f = \frac{0}{1+e^{-\infty}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f = \frac{0}{1+e^{\infty}} = \frac{0}{\infty} = 0\cdot\frac{1}{\infty} = 0\cdot 0 = 0$$

$f(0)=0 \Rightarrow f$ es continua en $x=0$

$$\left(\frac{x}{1+e^{1/x}}\right)' = \frac{1+e^{1/x} - x\cdot e^{1/x}(-1)x^{-2}}{(1+e^{1/x})^2} = \frac{1+e^{1/x}+\frac{e^{1/x}}{x}}{(1+e^{1/x})^2} = \frac{\frac{x+\cancel{x}e^{1/x}+e^{1/x}}{x}}{(1+e^{1/x})^2} = \frac{x\cdot(1+e^{1/x})+e^{1/x}}{x(1+e^{1/x})^2}$$



$$\lim_{x\to 0^-} f' = \lim_{x\to 0^-} \frac{(1+e^{1/x})+\frac{e^{1/x}}{x}}{(1+e^{1/x})^2} = \frac{1+\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{1/x}}{x}}{1^2} \underset{L.H}{=} \frac{1+\lim \frac{e^{1/x}\cdot(\frac{1}{x})}{1}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f' = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+e^{1/x}}+\frac{e^{1/x}}{x(1+e^{1/x})^2}}{1} = \frac{\frac{1}{\infty}+0}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

L.H.

$$x(1+e^{1/x})^2$$

f no es derivable en $x=0$

8. Comprueba que la función f(x) = |x-2| no es derivable en x = 2. Razona tu respuesta.

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x-2>0 \\ -(x-2), & x-2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-2, & x>2 \\ 2-x, & x \le 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f = 0 = \lim_{x \to 2^+} \quad f(2)=0 \Rightarrow f \text{ cta en } \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x>2 \\ -1, & x<2 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 2^-} f' = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 2^+} f'$$

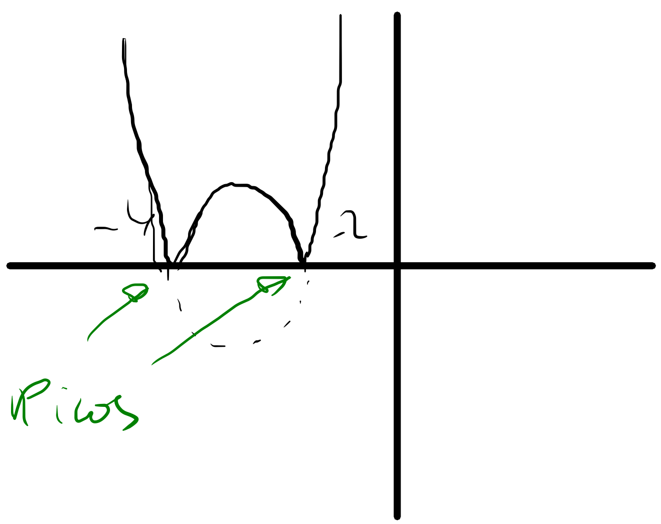
$$\Downarrow$$

f no es derivable en $x=2$

9. ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2+6x+8|$ que no tengan derivada?

$$x^2+6x+8=0 \longrightarrow x = \begin{cases} -4 \\ -2 \end{cases}$$

En $x=-2$ y $x=-4$ $f(x)$ no es derivable.



Analíticamente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+6x+8, & x \in (-\infty,-4) \cup (-2,+\infty) \\ -(x^2+6x+8), & x \in [-2,-4] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+6 & x \notin [-2,-4] \\ -2x-6 & x \in [-2,-4) \end{cases}$$

$x=-2$

$$\lim_{x\to -2^-} f' = 2\cdot(-2)+6 = 2$$
$$\lim_{x\to -2^+} f' = 4-6 = -2$$

$\longrightarrow$ En $x=-2$ No es derivable

$x=-4$

$$\lim_{x\to -4^-} f' = 8-6=2$$
$$\lim_{x\to -4^+} f' = -8+6=2$$

En $x=-4$ $\longrightarrow$ no es derivable

10. Existe algún punto donde la función $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ no sea derivable. Justifica tu respuesta.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & x \geq 0 \rightarrow [0,+\infty) \\[2ex] \dfrac{1}{1-x}, & x < 0 \rightarrow (-\infty,0) \end{cases}$$

$1+x=0$ si $x=-1$ pero $-1 \notin [0,+\infty)$

$1-x=0$ si $x=1$ pero $1 \in (-\infty,0)$

$\Downarrow$

f es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

En $\underline{x=0}$

Continuidad: $\lim\limits_{x\to 0^-} f = \dfrac{1}{1} = 1 = \dfrac{1}{1} = \lim\limits_{x\to 0^+} f \wedge f(0) = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ continua en $x=0$

Derivabilidad

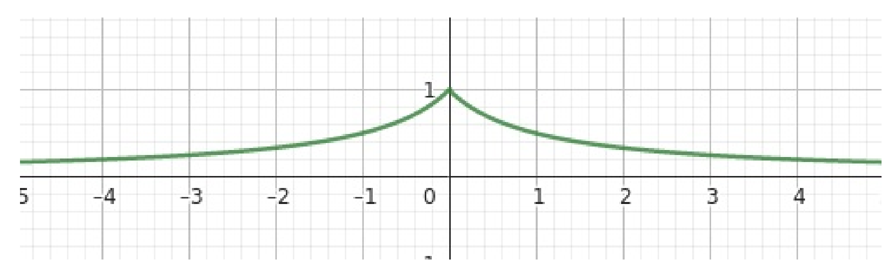
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\[2ex] +\dfrac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f' = \dfrac{1}{1} = 1$

$\neq$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f' = -\dfrac{1}{1} = -1$

$\Rightarrow f$ no es derivable en $x=0$



11. Dada la función f(x) = |x+1| + |x+3| indica en que puntos no es derivable. Razona tu respuesta.

$-1 \qquad -3$

$$f(x)=\begin{cases} -(x+1)-(x+3), & x\leq -3 \\ -(x+1)+(x+3), & -3<x\leq -1 \\ (x+1)+(x+3), & x>-1 \end{cases} \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} -2x-4, & x\leq -3 \\ 2, & -3<x\leq -1 \\ 2x+4, & x>-1 \end{cases}$$

f es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{-3,-1\}$ (Por serlo sus trozos en su dominio)

f es continua en $x=-3$ $\quad (-2\cdot(-3)-4=2)$

f " " " $x=-1$ $\quad (2=2\cdot(-1)+4)$

$$f'(x)=\begin{cases} -2, & x<-3 \\ 2, & -3<x\leq -1 \\ 2, & x>-1 \end{cases}$$

derivable en $x=-1$ $\quad (2=2)$

No derivable en $x=-3$ $\quad (-2\neq 2)$

12. Determina a y b para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

¿La función que resulta es derivable en x=0 y en x= 3?

$$\lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^+} f \Rightarrow 0^2+1 = a\cdot 0 + b$$

$$\lim_{x\to 3^-} f = \lim_{x\to 3^+} f \Rightarrow 3a+b = 3-5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = b \\ 3a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=1} \quad \boxed{a=-1}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , x<0 \\ -1 & , 0<x<3 \\ 1 & , x>3 \end{cases}$$

a

$$\lim_{x\to 0^-} f' = 2\cdot 0 = 0 \neq -1 = \lim_{x\to 0^+} f'$$

No es derivable en x = 0

$$\lim_{x\to 3^-} f' = 1 \neq 1 = \lim_{x\to 3^+} f'$$

No es derivable en x = 3

13. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad x \le 1 \\ ax^2 + b(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ ¿Para qué valores de a y b es continua la función f(x)? ¿Para que valores de a y b es derivable?

$3 \cdot 1 = a \cdot 1^2 + b(1-1) \Rightarrow$ Si $\boxed{a=3}$ y b cualquiera $\Rightarrow f$ continua en $\mathbb{R}$

Derivabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \le 1 \\ 3x^2 + b(x-1), & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3, & x < 1 \\ 6x + b, & x > 1 \end{cases}$$

$3 = 6 \cdot 1 + b \Rightarrow \boxed{b = -3}$

Si $a=3$ y $b=-3 \Rightarrow f$ es derivable en $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3, & x \le 1 \\ 6x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

14. Calcula a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable. $\rightarrow$ $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & , x < 0 \\ a & , x > 0 \end{cases}$

Continuidad: $0^3 - 0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$

derivabilidad: $3 \cdot 0^2 - 1 = a \Rightarrow \boxed{a = -1}$

15. Hallar a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si} \quad x < -1 \\ ax + b & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ sea continua. Para los valores obtenidos, estudia la derivabilidad de la función.

$$\begin{cases} (-1)^3 - (-1) = -a + b \\ a \cdot 0 + b = 3 \cdot 0^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -a + b \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array}}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & , x < -1 \\ 2 & , -1 < x < 0 \\ 6x & , x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f' \text{ continua en } \mathbb{R} - \{-1, 0\} \\ \Downarrow \\ f \text{ derivable en al menos } \mathbb{R} - \{-1, 0\} \end{array}$$

En $x = -1$: $\lim_{x \to -1^-} f' = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 2 = \lim_{x \to -1^+} f \Rightarrow$ derivable en $x = -1$

En $x = 0$: $\lim_{x \to 0^-} f' = 2 \neq 0 = 6 \cdot 0 = \lim_{x \to 0^+} f' \Rightarrow$ No es derivable en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & , x \leq -1 \\ 2 & , -1 < x < 0 \\ 6x & , x > 0 \end{cases}$$

16. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = 2x$ → $y' = 2$

2) $y = 3x-5$ → $y' = 3$

3) $y = 2x^2-7x+5$ → $y' = 4x-7$

4) $y = 7x^5-3x^2+x+2345$ → $y' = 35x^4-6x+1$

5) $y = x.(x+2)$

Producto → $y' = (x)'\cdot(x+2) + x(x+2)' = (x+2)+x = 2x+2$

ó

Desarrollando → $y = x^2+2x \rightarrow y' = 2x+2$

6) $y = (x+1).(x-1)$ → $y = x^2-1 \rightarrow y' = 2x$

8) $y = (x+1)^3$ → $y' = 3(x+1)^2 \cdot (x+1)' = 3\cdot(x+1)^2 = 3x^2+6x+3$

9) $y = (x^3+x+1)^4 \rightarrow$

$$y' = 4(x^3+x+1)^3 \cdot (x^3+x+1)' =$$

$$= 4 \cdot (x^3+x+1)^3 \cdot (3x^2+1)$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

10) $y = (3x+1)^2 - (3x-1)^2 \rightarrow$

$$y' = 2(3x+1) \cdot 3 - 2(3x-1) \cdot 3 = 6+6 = 12$$

ó

$$\rightarrow y = 9x^2+6x+1 - 9x^2+6x-1 = 12x \Rightarrow y' = 12$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

11) $y = \dfrac{1}{x^2} \rightarrow$

$$y' = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

ó

$$\rightarrow y = x^{-2} \rightarrow y' = -2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3}$$

$$12)\ \frac{1}{x+1} \Rightarrow y=(x+1)^{-1} \Rightarrow y'=-1\,(x+1)^{-1-1}\cdot(x+1)'=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2x\,(x^3+x)-(x^2-3)\cdot(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}=\dots=\frac{-x^4+10x^2+3}{x^6+2x^4+x^2}$$

$$14)\ y=\frac{x+1}{x} \Rightarrow y'=\frac{x-(x+1)}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$15)\ y=\frac{x.(x^2-1)}{3x^2-3} \Rightarrow y=\frac{x\,\cancel{(x^2-1)}}{3\,\cancel{(x^2-1)}} \Rightarrow y'=\frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{3}\cdot x$$

16) $y = x^{-3}$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{-3}{x^4}$

17) $y = x^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ $y = \sqrt{x}$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

18) $y = x^{\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{2}{3} x^{-1/3}$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

19) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow$ $y' = -\frac{2}{3} x^{-5/3}$ $\Rightarrow$ $y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

20) $y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{5}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{6} \cdot x^{-5/6} + \frac{1}{5} x^{-4/5} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} + \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$$

21) $y = \sqrt{3x}$

u

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

22) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{3x^2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^3}{(\sqrt{x})^2} = 3x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \overset{(\sqrt{x})^4}{x^2} =$$

$$= 3x\sqrt{x} - \frac{1}{2}(\sqrt{x})^3 = \left(3 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^3}$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

$$y = x^{3-1/2} \Rightarrow y = x^{5/2} \Rightarrow y' = \frac{5}{2}x^{3/2} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

23) $y = x^3 . x^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow y = x^{\frac{10}{3}} \Rightarrow y' = \frac{10}{3}x^{7/3} = \frac{10}{3}\sqrt[3]{x^7}$$

$$24)\ y = \frac{\sqrt{x}}{x} \Rightarrow y = x^{-1/2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$25)\ y = (1-x^2)^3 \Rightarrow y' = 3\,(1-x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x \cdot (1-x^2)^2$$

$$26)\ y = \sqrt{2x-4} \Rightarrow y' = \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$$

27) $y = \sqrt{2-x}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}$

28) $y = \sqrt[3]{2x^2}$ $\Rightarrow$ $y = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{2}\, x^{2/3} \Rightarrow y' = \sqrt[3]{2}\ \dfrac{2}{3}\, x^{-1/3} =$

$= \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x}}$

29) $y = \sqrt{3x^2 - 1}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2-1}} = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}$

30) $y = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{2\sqrt{x-1} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{\frac{2(x-1)-x}{\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{x-2}{(x-1)\sqrt{x-1}}$

31) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{2\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \cdot (1+x)^2} = -\frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^2\sqrt{1-x}} =$

$= -\frac{\cancel{1+x}}{(1+x)^{\cancel{2}} \cdot \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

32) $y = e^{2x}$ $\Rightarrow$ $y' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

33) $y = 2^{5x}$ $\Rightarrow$ $y' = 2^{5x} \cdot \ln 2 \cdot 5 = (2^5)^x \cdot 5 \cdot \ln 2 = 32^x \cdot \ln 2^5 =$

$= 32^x \cdot \ln 32$

34) $y = 8^{3x^2-1}$ $\rightarrow$ $y = (2^3)^{3x^2-1}$ $\Rightarrow$ $y = 2^{9x^2-3}$ $\Rightarrow$ $y' = (9x^2-3)' \cdot 2^{9x^2-3} \cdot \ln 2 = 18x \cdot 2^{9x^2-3} \cdot \ln 2$

35) $y = a^x . x^a$ $\Rightarrow$ $y' = (a^x)' \cdot x^a + a^x \cdot (x^a)' =$

$= a^x \ln a \cdot x^a + a^x \cdot a x^{a-1} = a^x \left(x^a \ln a + a x^{a-1} \right) =$

$= a^x \cdot x^{a-1} (x \ln a + a)$

36) $y = e^{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$ $y' = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

37) $y = \log (2x-1)$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{2x-1} \cdot \dfrac{1}{\ln 10} \cdot (2x-1)' = \dfrac{2}{(2x-1)\ln 10}$

38) $y = \ln (x+3)$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{x+3} \cdot (x+3)' = \dfrac{1}{(x+3)}.$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1) $y = \ln(3x^2-7)$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{3x^2-7} \cdot (3x^2-7)' = \frac{6x}{3x^2-7}$

2) $y = \ln(x-2)^2$ $\Rightarrow$ $y = 2 \cdot \ln(x-2)$ $\Rightarrow$ $y' = 2\,\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-2}$

3) $y = \log(x^2-2x)$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{x^2-2x} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot (x^2-2x)' = \frac{2x-2}{x(x-2)\cdot \ln 10}$

4) $y = \log_2(2x^3+3x^2)$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{2x^3+3x^2}\,\frac{1}{\ln 2} \cdot (2x^3+3x^2)' = \frac{6x^2+6x}{(2x^3+3x^2)\ln 2} = \frac{6x+6}{(2x^2+3x)\ln 2}$

5) $y = \sqrt{\ln x}$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\,(\ln x)' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

17

7) $y = \ln \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$\Rightarrow y = \ln(1-x) - \ln(1+x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} =$

$= \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$

6) $y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow y' = \frac{1/x \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

8) $y = \ln \sqrt[4]{x^3}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \cdot \left(\sqrt[4]{x^3}\right)' = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-1/4} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x^4}} = \frac{3}{4x}$$

9) $y = \log_4 (1+2x)$

$$y' = \frac{1}{1+2x} \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot (1+2x)' = \frac{2}{(1+2x)\ln 4}$$

10) $y = \ln \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ $\Rightarrow$ $y = \ln e^x - \ln(e^x - 1)$

$$y = x - \ln(e^x - 1)$$

$$y' = 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - e^x}{e^x - 1} =$$

$$= -\frac{1}{e^x - 1}$$

11) $y = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{-\frac{1}{x}(1 + \ln x) - (1 - \ln x)\frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2} =$

$$= \frac{\frac{-1 - \cancel{\ln x} - 1 + \cancel{\ln x}}{x}}{(1 + \ln x)^2} = \frac{\frac{-2}{x}}{(1 + \ln x)^2} = \frac{-2}{x(1 + \ln x)^2}$$

12) $y = \dfrac{e^x}{x-1}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \dfrac{e^x((x-1)-1))}{(x-1)^2} = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

13) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\Rightarrow$ $y = \dfrac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}-1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}+1)}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

14) $y = e^{\sqrt{x^2+1}}$ $\Rightarrow$ $y' = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x\, e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

15) $y = \text{sen } 2x$ $\Rightarrow$ $y' = 2\cos 2x$

16) $y = \text{sen } (7x\text{-}3)$ $\Rightarrow$ $y' = 7\cos(7x-3)$

17) $y = \cos 5x$ $\Rightarrow$ $y' = -\text{sen}\,5x \cdot (5x)' = -5 \cdot \text{sen}\,5x$

18) $y = 3.\text{tg}\,2x$ $\Rightarrow$ $y' = 3 \cdot (\text{tg}\,2x)' = 3 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 2x}\,2 = \dfrac{6}{\cos^2 2x}$

$(\text{sen}\,x)'$

19) $y = \text{sen}^2 x$ $\Rightarrow$ $y' = 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x$

20) $y = \text{sen}\,x^2$ $\Rightarrow$ $y' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

21) $y = \cos^2(x^2+1)$ $\Rightarrow$ $y' = 2 \cdot \cos(x^2+1) \cdot (\cos(x^2+1))' =$

$= -2\cos(x^2+1) \cdot \text{sen}(x^2+1) \cdot (x^2+1)' =$

$= -2\cos(x^2+1) \cdot \text{sen}(x^2+1) \cdot 2x =$

$= -4x \cos(x^2+1)\,\text{sen}(x^2+1)$

22) $y = tg^3 5x$ $\Rightarrow$ $y' = 3 \cdot tg^2 5x \cdot (tg\, 5x)' =$

$= 3 \cdot tg^2 5x \cdot \dfrac{5}{\cos^2 5x} = 15 \dfrac{tg^2 5x}{\cos^2 5x}$

23) $y = sen^3 4x$ $\Rightarrow$ $y' = 3\, sen^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4 = 12\, sen^2 4x \cos 4x$

24) $y = \sqrt{sen\, 2x}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{(sen\, 2x)'}{2\sqrt{sen\, 2x}} = \dfrac{\cos 2x \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \sqrt{sen\, 2x}} = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{sen\, 2x}}$

25) $y = \ln(\text{tg}(1-x))$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{\text{tg}(1-x)} \cdot (\text{tg}(1-x))' = \dfrac{1}{\text{tg}(1-x)} \cdot \dfrac{1}{\cos^2(1-x)} \cdot (-1)$

$$= -\frac{1}{\frac{\text{sen}(1-x)}{\cancel{\cos(1-x)}} \cdot \cos^{\cancel{2}}(1-x)} = -\frac{1}{\text{sen}(1-x)\cos(1-x)}$$

26) $y = \sqrt[3]{\text{sen}\,x}$ $\Rightarrow$ $y = (\text{sen}\,x)^{1/3} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{3}(\text{sen}\,x)^{-2/3} \cdot (\text{sen}\,x)' =$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}} \cdot \cos x$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

27) $y = \overbrace{\operatorname{sen}^3 x}^{u} \cdot \overbrace{\cos x}^{v}$

$$y' = \underbrace{3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}_{u'} \cdot \cos x + \operatorname{sen}^3 x \cdot (-\operatorname{sen} x) =$$

$$= 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x$$

28) $y = \sec(5x+2) \Rightarrow y = \Big(\underbrace{\cos(5x+2)}_{u}\Big)^{-1}$

$$y' = -\frac{1}{\cos^2(5x+2)} \cdot \big(-\operatorname{sen}(5x+2) \cdot 5\big) =$$

$$= \frac{5 \cdot \operatorname{sen}(5x+2)}{\cos^2(5x+2)}$$

29) $y = \text{arc sen } 2x$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

30) $y = \text{arc cos } x^2$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

31) $y = \text{arc tg} \dfrac{x-1}{1-x}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{1-x}\right)^2} \cdot \dfrac{1\cdot(1-x) - (x-1)\cdot(-1)}{(1-x)^2} =$

$$= \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{0}{(1-x)^2} = 0$$

32) $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x+1}{x-1}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}}$$

33) $y = tg^2(\operatorname{sen} x)$ $\Rightarrow y' = 2\,tg(\operatorname{sen} x)\cdot\left(tg(\operatorname{sen} x)\right)' =$

$$= 2\,tg(\operatorname{sen} x)\cdot\frac{1}{\cos^2(\operatorname{sen} x)}\cdot\cos x$$

34) $y = \sqrt[x]{\operatorname{sen} x}$

$y = (\operatorname{sen} x)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \ln (\operatorname{sen} x)^{1/x}$

$\ln y = \frac{1}{x} \ln (\operatorname{sen} x)$

$\downarrow$ Derivando

$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow y'$

No entran en la EVAU

$\frac{1}{y} \cdot y' = -\frac{1}{x^2} \ln(\operatorname{sen} x) + \frac{1}{x \cdot \operatorname{sen} x} \cdot \cos x$

$y' = y \cdot \left(\frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} - \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x^2} \right)$

$y' = \sqrt[x]{\operatorname{sen} x} \left(\frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} - \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x^2} \right)$

35) $y = x^{\operatorname{tg} x}$ $\Rightarrow$ $\ln y = \operatorname{tg} x \ln x$

$y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y'$

No entran en la EVAU

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$y' = x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$$

36) $y = 2^{\ln \cos x}$ $\Rightarrow$ $y' = 2^{\ln \cos x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) =$

$$= -2^{\ln \cos x} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \ln 2$$

37) $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arc\,tg} x}$ $\Rightarrow$ $\ln y = \operatorname{arctg} x \ln(\operatorname{sen} x)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2}\ln(\operatorname{sen} x) + \frac{\operatorname{arctg} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$y' = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \operatorname{cotg} x\right)$$

$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow y'$

No entran en la EVAU

38) $y = (\text{arc tg } x)^x$

$$\ln y = x \ln(\text{arctg } x)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln(\text{arctg } x) + \frac{x \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\text{arctg } x}$$

$$y' = (\text{arctg } x)^x \left(\ln(\text{arctg } x) + \frac{x}{(1+x^2) \cdot \text{arctg} x} \right)$$

$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow y'$

No entran en la EVAU

39) $y = x^{\sec x}$

$$\ln y = \sec x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \text{tg} x \cdot \sec x \ln x + \frac{\sec x}{x}$$

$$y' = x^{\sec x} \cdot \left(\text{tg} x \cdot \sec x \cdot \ln x + \frac{\sec x}{x} \right)$$

$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow y'$

No entran en la EVAU

18. Calcular las siguientes derivadas:

1) $y = (x^2-3)^4$ $\Rightarrow y' = 4(x^2-3)^3 \cdot 2x$

2) $y = (1-5x)^6$ $\Rightarrow y' = 6(1-5x)^5 \cdot (-5)$

3) $y = \sqrt[3]{3x^2}$ $\Rightarrow y = \sqrt[3]{3}\, x^{2/3} \Rightarrow y' = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{x}}$

4) $y = (x^2+4).(3x^3+1)$ $\Rightarrow y' = 2x(3x^3+1) + (x^2+4) \cdot 9x^2$

5) $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$ $\Rightarrow y' = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} + \dfrac{2 \cdot 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

6) $y = \ln \frac{x^4}{(3x+4)^3}$ $\Rightarrow$ $y = \ln x^4 - 3\ln(3x+4) = 4\ln x - 3\ln(3x+4)$

$$y' = \frac{4}{x} - 3\cdot\frac{3}{3x+4} = \frac{4}{x} - \frac{9}{3x+4}$$

7) $y = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1)\right)$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1-(x-1)}{x^2-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$$

8) $y = \ln(x+3)^2$ $\Rightarrow$ $y = 2\ln(x+3)$ $\qquad y' = \frac{2}{x+3}$

9) $x^2.\ln x - x \Rightarrow y' = \left(2x \ln x + \frac{x^2}{x}\right) - 1 = 2x \ln x + x - 1$

10) $y = \ln\,[(x^2+1).(2x^2+3x+1)] \Rightarrow y = \ln(x^2+1) + \ln(2x^2+3x+1)$

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4x+3}{2x^2+3x+1} = \ldots = \frac{8x^3+9x^2+6x+3}{2x^4+3x^3+3x^2+3x+1}$$

11) $y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\sqrt{1+x^2}\,\cancel{(x+\sqrt{1+x^2})}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

12) $y = x^2 .\ \text{sen}\ x \Rightarrow y' = 2x \cdot \text{sen}\,x + x^2 \cos x$

13) $y = \text{arc sen}\,(x^2+x)$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{2x+1}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}$

14) $y = x^2 \, . \, \text{arc cos}\,\dfrac{2}{x}$ $\Rightarrow$ $y' = 2x \arccos\dfrac{2}{x} + \cancel{x^2} \cdot \dfrac{(-1)}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \cdot \dfrac{(-2)}{\cancel{x^2}} =$

$$= 2x \arccos\frac{2}{x} + \frac{2}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

15) $y = \ln\dfrac{e^x - 1}{2e^x}$ $\Rightarrow$ $y = \ln(e^x-1) - \ln 2e^x \Rightarrow y' = \dfrac{e^x}{e^x-1} - \dfrac{2e^x}{2e^x} =$

$$= \frac{e^x}{e^x-1} - 1 = \frac{e^x - (e^x-1)}{e^x-1} = \frac{1}{e^x-1}$$

19. Calcula las derivadas n-esimas de las siguientes funciones:

1) $y = \dfrac{1}{x+1}$

$$y = (x+1)^{-1} \Rightarrow y' = -(x+1)^{-2} \Rightarrow y'' = \frac{\overset{2!}{\overset{\shortparallel}{2}}}{(x+1)^3} \Rightarrow y''' = \frac{-\overset{3!}{\overset{\shortparallel}{6}}}{(x+1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{4)} = \frac{\overset{4!}{\overset{\shortparallel}{24}}}{(x+1)^5} \Rightarrow y^{n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

2) $y = x^2 + 2x - 1$

$$y' = 2x+2 \qquad y'' = 2 \qquad y''' = 0 \qquad y^{4)} = 0 \Rightarrow y^{n)} = 0$$

6) $y = \dfrac{3}{2x-1}$

$$\Rightarrow y' = -\overset{3\cdot 2^1\cdot 1!}{\overset{\shortparallel}{6}}\cdot(2x-1)^{-2} \qquad y'' = \overset{3\cdot 2^2\cdot 2!}{\overset{\shortparallel}{24}}(2x-1)^{-3} \qquad y''' = -\overset{3\cdot 2^3\cdot 3!}{\overset{\shortparallel}{144}}(2x-1)^{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{n)} = \frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 2^n}{(2x-1)^{n+1}}$$

7) $y = e^{2x-1}$

$y' = 2e^{2x-1}$ $y'' = 2^2 e^{2x-1}$ $y''' = 2^3 \cdot e^{2x-1} \Rightarrow y^{n)} = 2^n e^{2x-1}$

11) $y = x.e^x$

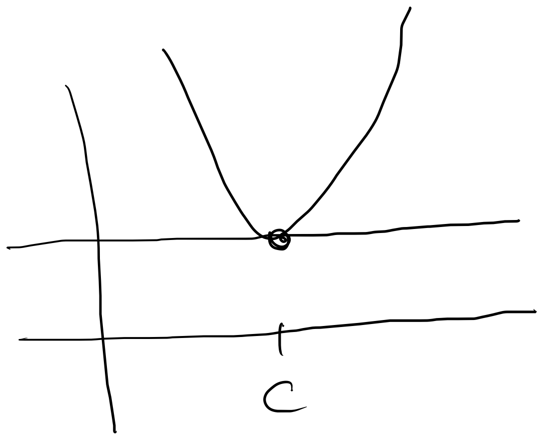
$y' = \underbrace{e^x + xe^x}_{e^x(x+1)}$ $y'' = e^x + (e^x + xe^x) = \underbrace{2e^x + xe^x}_{e^x(x+2)} \Rightarrow y^{n)} = e^x(x+n)$

15) $y = \ln(1-3x)$

$y' = \frac{1}{1-3x}(-3)$ $y'' = -(-3)^2 \cdot 1 \cdot (1-3x)^{-2}$ $y''' = -(-3)^3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1-3x)^{-3}$

$$y^{n)} = \frac{-(-3)^n \cdot (n-1)!}{(1-3x)^n}$$

20. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto de la parábola?



Parábola orientada hacia arriba.

horizontal

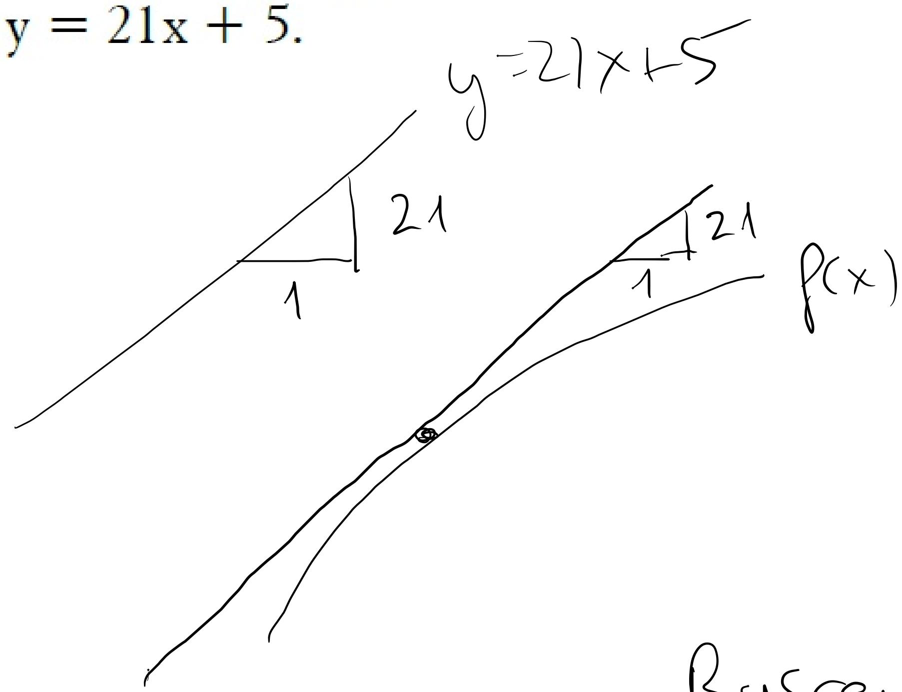
$f'(c) = 0 \Rightarrow$ la pendiente de la tangente vale 0

$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

$f'(3) = 0$

Para $x = 3$, f tiene un mínimo

21. Determina los puntos de la curva $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y = 21x + 5$.



$\Rightarrow y' = (21x+5)' = 21$

$\Downarrow$

La pendiente de $y = 21x+5$ es 21 (obvio $m = 21$)

Buscamos $x = c$ t.q. $f'(c) = 21$

$f'(x) = 3x^2 + 18x \Rightarrow 3x^2 + 18x = 21$

$3x^2 + 18x - 21 = 0$

$x = -7$

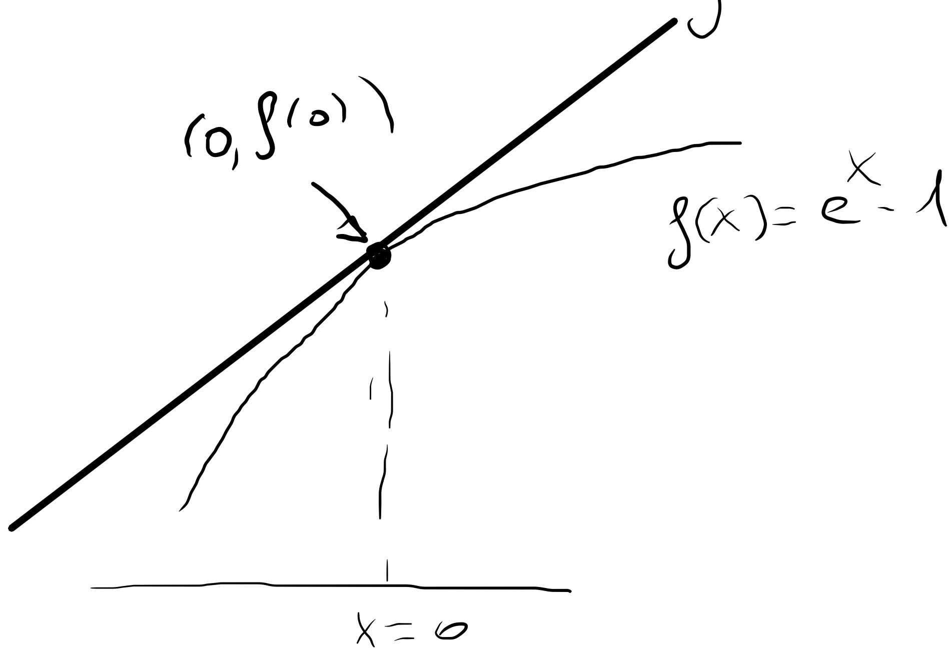
$x = 1$

$\Downarrow$

En $x = -7$ y en $x = 1 \Rightarrow f'(x) = 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es paralela a $y = 21x+5$

22. Dada la función y = ax+b, hallar a y b para que sea tangente en x = 0 a la función $f(x) = e^x-1$



$y = ax+b \longrightarrow y' = a$

$f'(x) = e^x$

$\Downarrow$ las pendientes tienen que coincidir en $x=0$

$f'(0) = y'$

$e^0 = a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y = x+b$

Además $(0, f(0)) \in y = ax+b \quad (y = 1 \cdot x + b)$

$\Downarrow$

$f(0) = 1 \cdot 0 + b \Rightarrow b = f(0) \Rightarrow b = e^0 - 1 = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{y = x}$

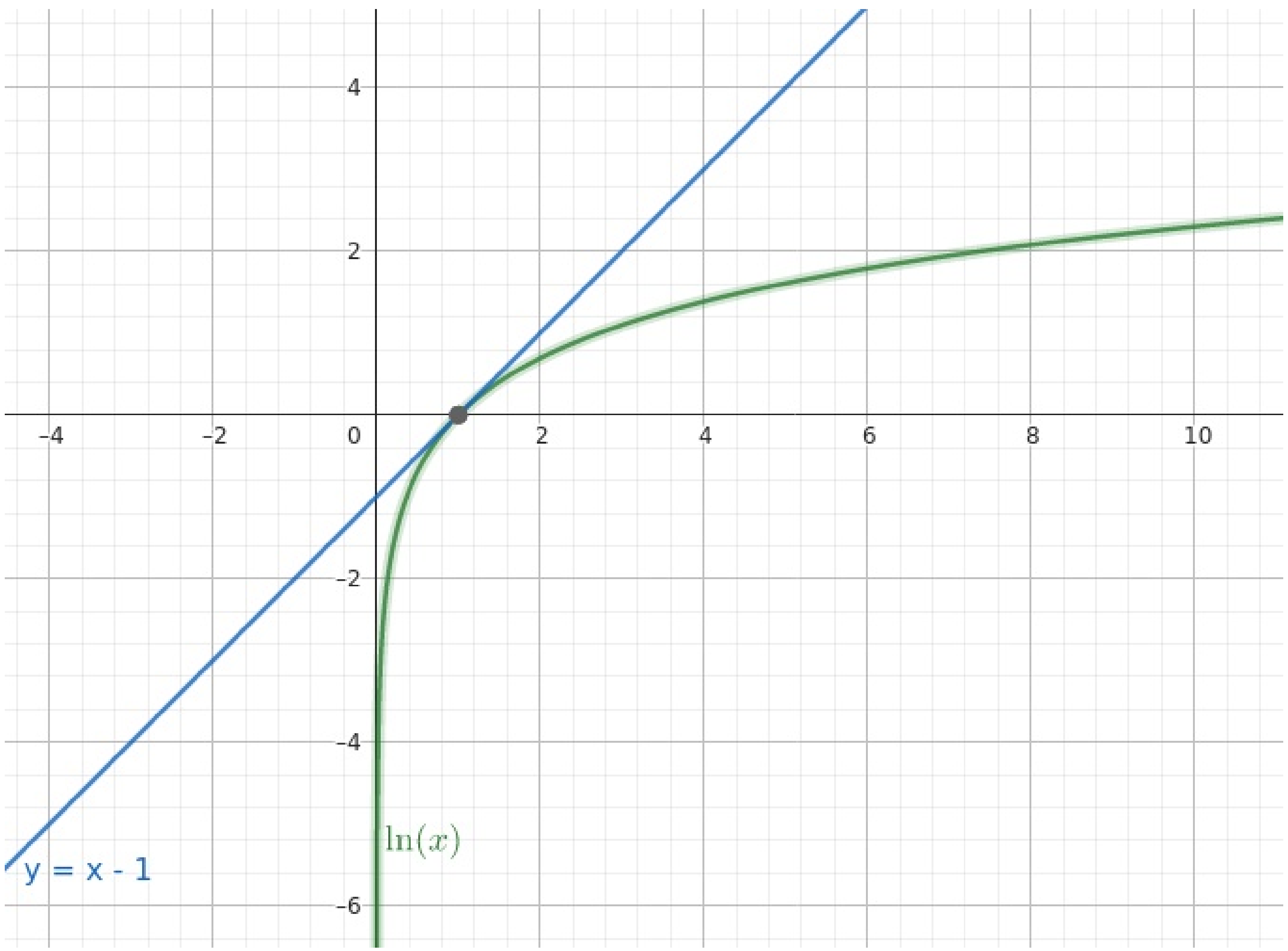
23. Dada la función y = ax+b, hallar a y b para que sea tangente en x = 1 a la función f(x) = ln x

$x = 1 \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0 \Rightarrow (1, f(1)) = (1, 0)$

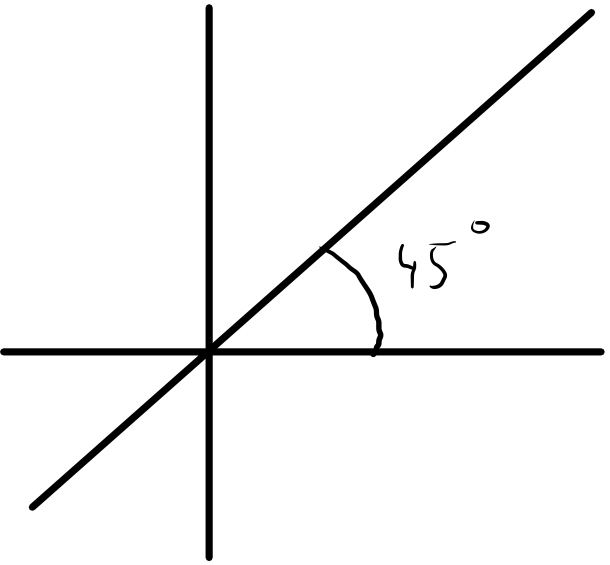
$\begin{cases} (1,0) \in y = ax+b \\ y' = f'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a+b \\ a = \frac{1}{1} \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -1$

$\Downarrow$

$y = x - 1$



24. Dada la curva de ecuación $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$, halla las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje OX un ángulo de 45º.



$y = x \Rightarrow \boxed{y' = 1}$ ó la pendiente coincide con la $tg\,45° = 1$

Buscamos los puntos de la gráfica donde la pendiente de la tangente sea 1

$f'(x) = 4x - 3 \Rightarrow$ ¿x t.q. $f'(x) = 1$

$4x - 3 = 1$

$x = \frac{4}{4}$

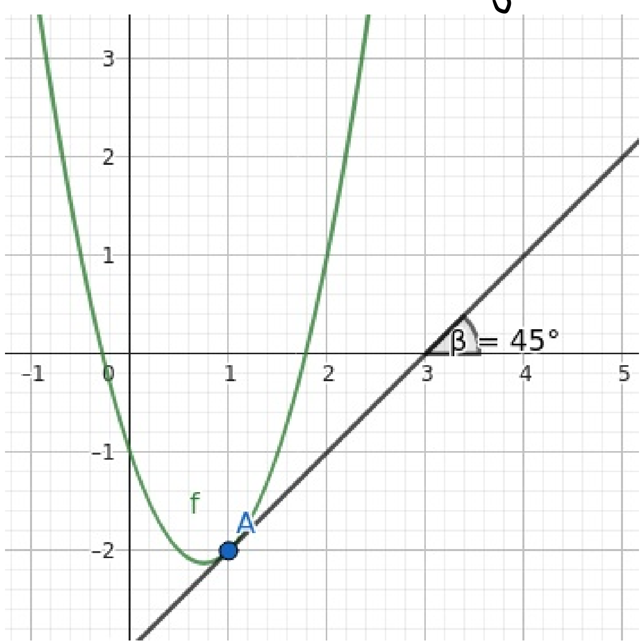
$x = 1$

$f(1) = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 1 =$

$= -2$

$\Downarrow$

SOLUCIÓN: En $(1,-2)$ la tg forma 45° con OX



25. Calcula en qué punto de la curva $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x}$, la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$

$\hookrightarrow 2y = 3x + 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow$ La pendiente es $\frac{3}{2}$

¿ x t.q. $f'(x) = \frac{3}{2}$?

$$f'(x) = \frac{(2x)^2 - (x^2-4)2}{(2x)^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 + 8}{(2x)^2} = \frac{2x^2+8}{4x^2}$$

$$\frac{2x^2+8}{4x^2} = \frac{3}{2}$$

$$2(2x^2+8) = 3 \cdot 4x^2$$

$$4x^2 + 16 = 12x^2$$

$$16 = 8x^2$$

$$2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

26. Dada la función $f(x) = mx^3 + 2x^2 + 3x - 1$, ¿cuál debe ser el valor de m para que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ sea 11

$f'(-1) = 11$

$f'(x) = 3mx^2 + 4x + 3$

$f'(-1) = 3m - 4 + 3 = 3m - 1$

$3m - 1 = 11 \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow m = 4$