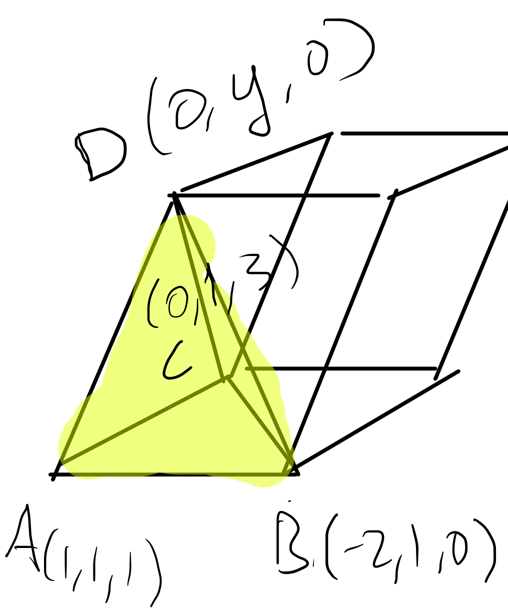
Geometría

Julio 22.

El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

SOLUCIÓN.

$D\left(0,\dfrac{67}{7},0\right)$



$$V_{Prisma} = 6V_{tetraedro} \Rightarrow V_{Prisma} = 60\ ud^3$$

$$60 = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})$$

$$60 = \left\| \begin{matrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & y-1 & -1 \end{matrix} \right\| = |7y-7|$$

$$y - 1 = \frac{60}{7} \qquad \text{ó} \qquad 7 - 7y = 60$$

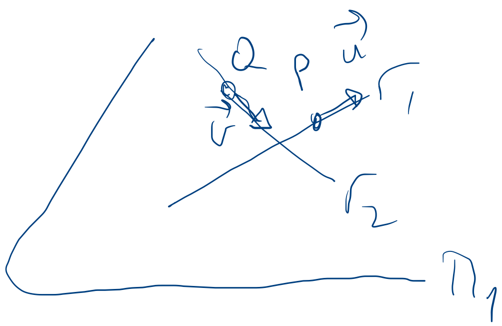
$$y = \frac{67}{7} \qquad\qquad 1 - y = \frac{60}{7} \Rightarrow y = \frac{-53}{7}$$

Junio 22.

1. a) *(1 punto)* Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2 y además pasa por el punto $(-1,2,1)$, siendo $r_1 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1+6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

$\vec{u} = (3,1,1)$ $P(0,-2,0)$ $\vec{v} = (6,-2,1)$ $Q(-1,0,0)$

b) *(1 punto)* Dado el vector $\vec{v} = (2,k,2k)$, calcula el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.



$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 1 - 2 - 6 = 3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

$\Downarrow$

se cruzan

$\nexists$ el plano

a)

¿se cortan o coinciden

$$rg\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{PQ} \end{pmatrix} \leq 2$$

× Si las rectas están en el mismo plano

$\Downarrow$

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ base del plano $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}$ l.d

b) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ 2 & k & 2k \end{vmatrix} = 6 - 21k$$

si $k = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \Rightarrow (2,k,2k), \vec{u}, \vec{v}$ l.d

2. a) *(1 punto)* Dados los siguientes vectores: $\vec{v}_1 = a\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + a\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

b) *(1 punto)* Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ siendo $\vec{v}_1 = (1, 0, -2)$ y $\vec{v}_2 = (3, 1, 0)$.

SOLUCIÓN.

1. a) No existe tal plano. Las rectas se cruzan. **b)** $k = \frac{2}{7}$ **2. a)** $a = 1$ **b)** $V = 0$

a) $\vec{v}_1 = (a, -2, 3)$ $\vec{v}_2 = (-1, a, 1)$

$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow 3 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ es comb. lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$\Downarrow$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ depende de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

Julio 21.

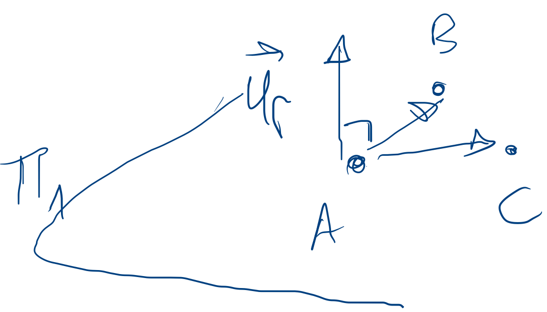
(2 puntos) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,-2,0)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $(1,0,1)$, $(3,1,0)$ y $(2,-1,1)$. Exprésela como intersección de dos planos.

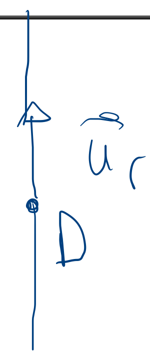
D

A B C

SOLUCIÓN.

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$$





$$r \equiv \begin{cases} D \\ \vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC} \end{cases}$$

$$\vec{AB} = (2,1,-1), \quad \vec{AC} = (1,-1,0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow (-1,-1,-3)$$

$$r \equiv \begin{cases} D(1,-2,0) \\ \vec{u} = (-1,-1,-3) \end{cases}$$

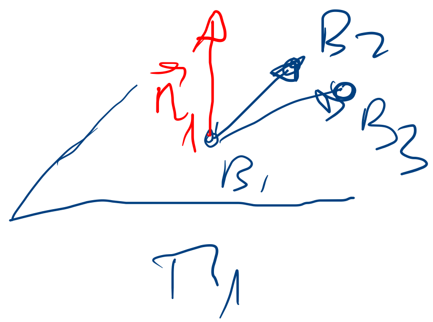
$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-3} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = y+2 \\ 3x-3 = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y = 3 \\ 3x-z = 3 \end{cases}$$

Junio 21.

1. *(2 puntos)* Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A=(0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2 \equiv x+2z=1$, siendo $B_1=(-1,0,2)$, $B_2=(1,31)$, $B_3=(2,-1,0)$.

$\vec{u}_2=(1,0,2)$

$$r \equiv \begin{cases} A \\ \vec{u}_r=\vec{n}_1\times\vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} A(0,1,1) \\ \vec{u}_r=(2,3,-1) \end{cases}$$



$$\vec{n}_1=\vec{B_1B_2}\times\vec{B_1B_3}=$$
$$=(2,3,-1)\times(3,-1,-2)=$$
$$=(-7,1,-11)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -7\vec{i}+\vec{j}-11\vec{k}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}}$$

$$\vec{n}_1\times\vec{u}_2=(2,3,-1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

2. Sean los siguientes vectores: $\vec{u_1}=(-1,1,1)$, $\vec{u_2}=(0,3,1)$, $\vec{u_3}=(1,-2,0)$, $\vec{u_4}=(-2,0,1)$.

a) *(1 punto)* Compruebe si los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo: $\vec{v_1}=2\vec{u_1}-\vec{u_2}$, $\vec{v_2}=\vec{u_1}+\vec{u_3}$, $\vec{v_3}=\vec{u_4}$

b) *(1 punto)* Calcule las siguientes expresiones: $(2\vec{u_1}-\vec{u_2})\cdot(2\vec{u_1}-\vec{u_2})$, $(\vec{u_4}-\vec{u_1})\times(\vec{u_4}-\vec{u_1})$ siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

a)

$$\begin{array}{c} \vec{v_1} \rightarrow \\ \vec{v_2} \rightarrow \\ \vec{v_3} \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow l.i$$

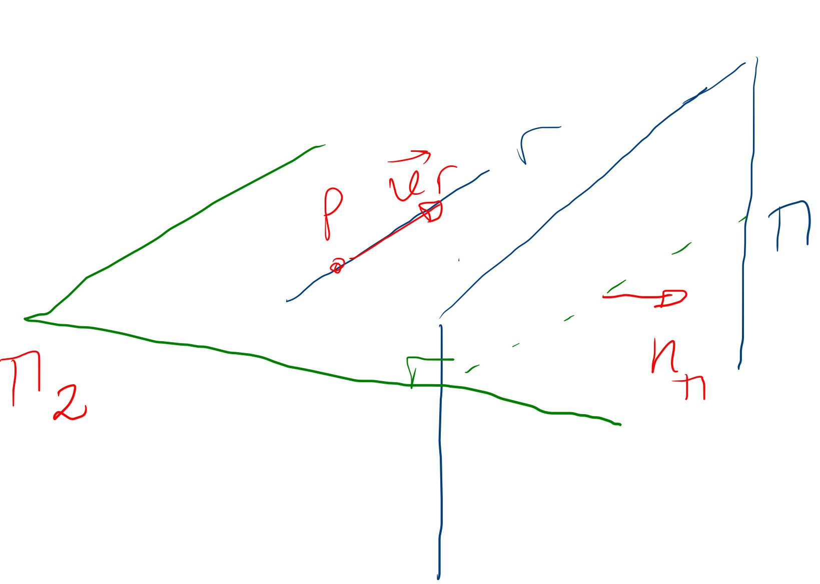
b)

$$(-2,-1,1)\cdot(-2,-1,1) = 4+1+1 = 6$$

$$\vec{u_4}-\vec{u_1} = (-3,2,1) \Rightarrow (-3,2,1)\times(-3,2,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k} = (0,0,0)$$

Septiembre 20.

(2 puntos) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} 3x+y-4z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$.



$$\Pi_2 \equiv \begin{cases} P \\ \vec{n}_{\pi_2} = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{u_r} \quad \text{ó} \quad \vec{u_r}, \vec{n}_{\pi_1} \end{cases}$$

$$P: \text{ Si } x=0 \quad \begin{cases} y-4z+1=0 \\ y-z+2=0 \end{cases} (-) \qquad 3z+1=0$$

$$z=-1/3, \quad y=-\frac{7}{3}$$

$$P\left(0, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

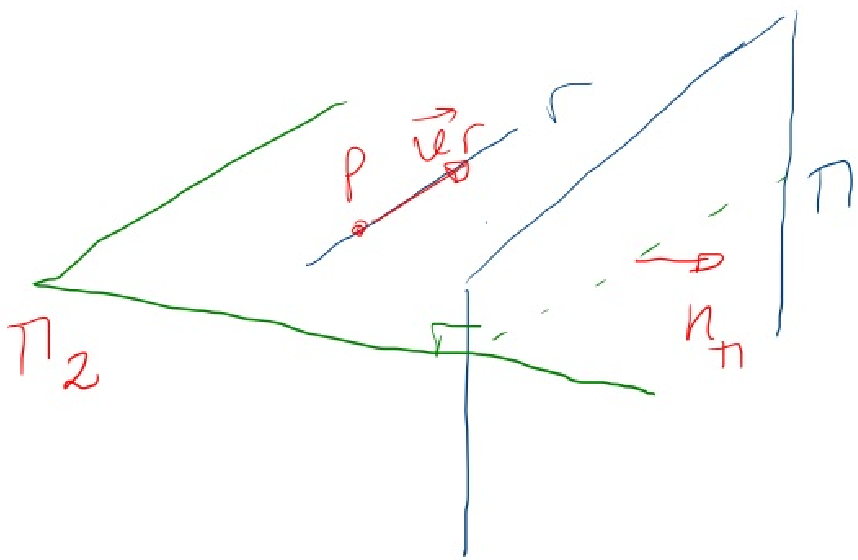
$$\vec{u_r} = (3,1,-4) \times (2,1,-1) = (3,-5,1)$$

$$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y+\frac{7}{3} & z+\frac{1}{3} \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -14x-7y+7z-14=0$$

$$\boxed{2x+y-z+2=0}$$

Septiembre 20.

(2 puntos) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 3x+y-4z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$.



$\Pi_2 \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u}_r, n_\pi \end{cases}$

P y $\vec{u}_r$:

$\begin{cases} 3x+y=4z-1 \\ 2x+y=z-2 \end{cases}$

$x=3z+1$

$y=4z-3x-1$

Si $z=0 \Rightarrow x=1, y=-4$

$P(1,-4,0)$

Si $z=1 \Rightarrow x=4, y=-9$

$Q(4,-9,1)$

$\vec{u}_r=\vec{PQ}=(3,-5,1)$

$$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -14x-7y+7z-14=0$$

$$\boxed{2x+y-z+2=0}$$

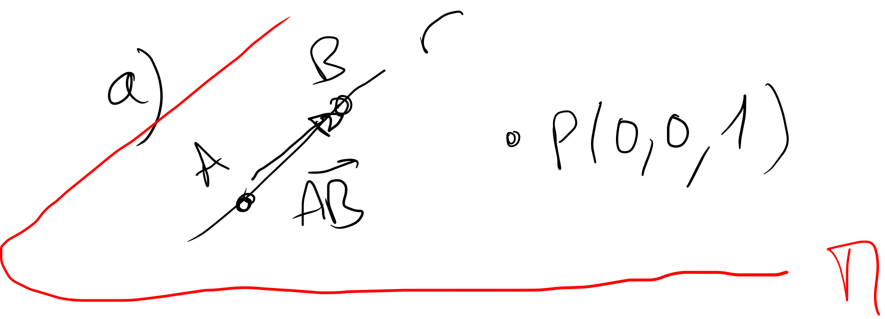
Junio 20.

(2 puntos) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + \quad z = 1 \\ 2x + y \quad = 3 \end{cases}$

a) *(1,25 puntos)* Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto $(0,0,1)$.

b) *(0,75 puntos)* Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$. Sabiendo que $\vec{u}\times\vec{v} = (-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

a)



$$\pi \equiv \begin{cases} P \\ \vec{AB}, \vec{AP} \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

Si $z = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1, z = 0 \Rightarrow A(1,1,0)$

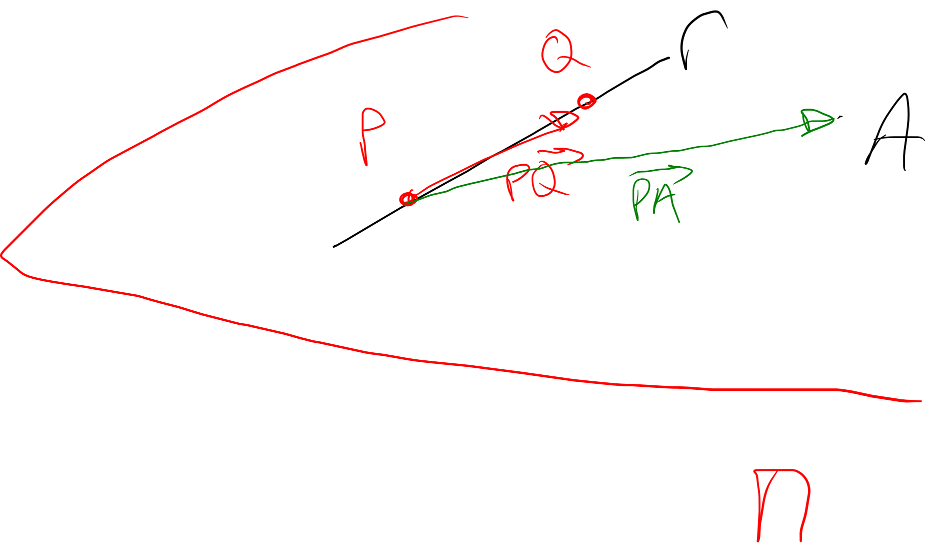
Si $z = 1 \Rightarrow x = 0, y = 3, z = 1 \Rightarrow B(0,3,1)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x + z - 1 = 0}$$

b) $V = [\vec{u}\times\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = |\vec{u}\times\vec{v}|^2 = \left(\sqrt{1^2+1^2+1^2}\right)^2 = 3 \text{ ud}^3$

Septiembre 19.

(1,5 puntos) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta: $r:\begin{cases} 3x+y = -1 \\ 4y+3z=5 \end{cases}$ y pasa por el punto $A:(1,3,-1)$



$$\pi \equiv \begin{cases} A \\ \vec{PQ}, \vec{PA} \end{cases}$$

$y = -1 - 3x$

$4y = 5 - 3z$

Si $z = -1 \Rightarrow y = 2, x = -1$

$P(-1, 2, -1)$

Si $x = 0 \Rightarrow y = -1, z = 3$

$Q(0, -1, 3)$

$\vec{PQ} = (1, -3, 4), \quad \vec{PA} = (2, 1, 0)$

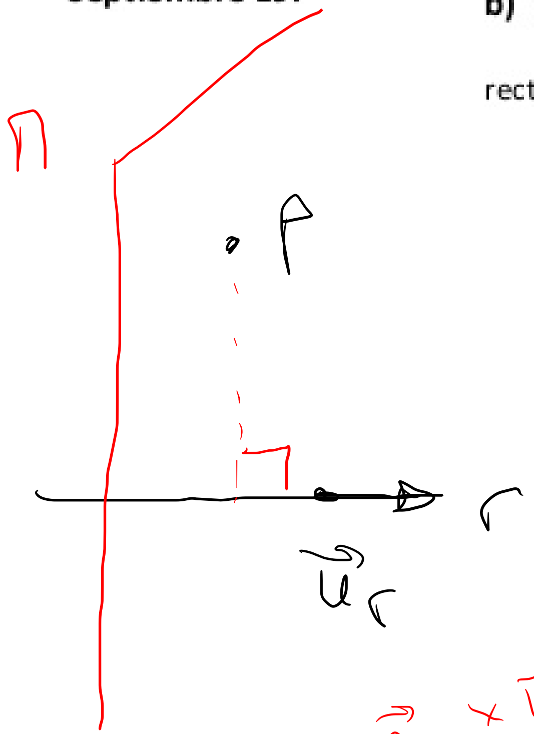
$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow z+1+8y-24+6z+6-4x+4 = 0$$

$-4x + 8y + 7z - 13 = 0$

$$\boxed{4x - 8y - 7z + 13 = 0}$$

Septiembre 19.

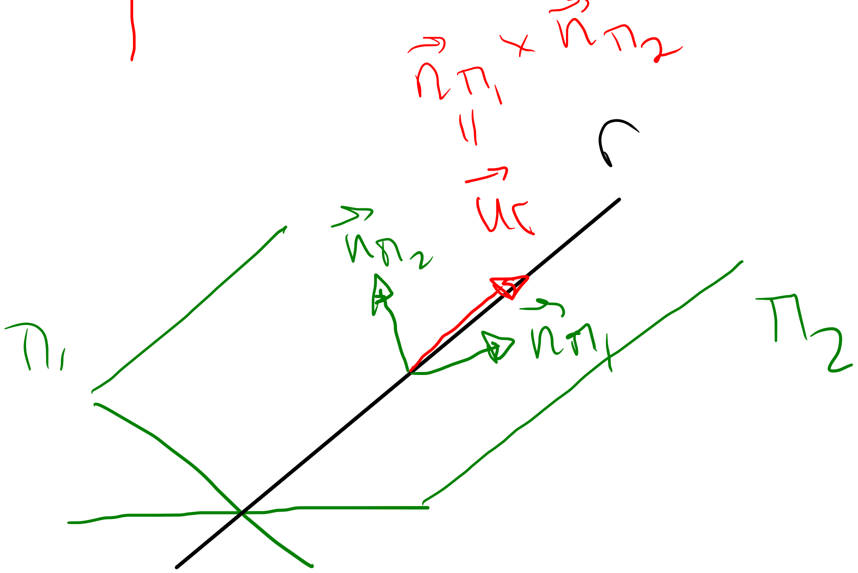
b) *(0,75 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P:(1,3,2)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 2y+3z=3 \end{cases}$



$$\pi \equiv \begin{cases} P \\ \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (3,-2,0)\times(0,2,3) \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6\vec{i}-9\vec{j}+6\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-6,-9,6)$$



$$\pi \equiv -6x-9y+6z+D=0$$

$$P\in\pi \Rightarrow -6\cdot 1-9\cdot 3+6\cdot 2+D=0 \Rightarrow D=21$$

$$\boxed{-6x-9y+6z+21=0}$$

$$\boxed{2x+3y-2z-7=0}$$

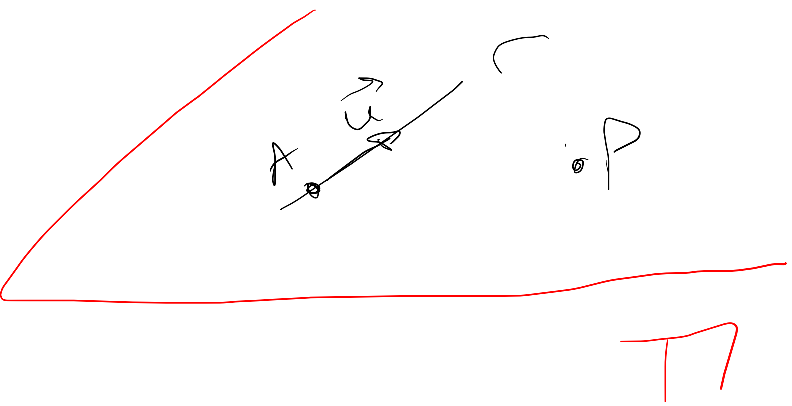
a) *(0,75 puntos)* Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y donde el símbolo $\times$ representa el producto vectorial.

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = (-1,2,-1)$$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6\ ud^3$$

Junio 19.

a) *(1 punto)* Determine la ecuación del plano determinado por el punto $P:(2,1,2)$ y la recta $r:(1,0,0)+t(-1,1,1)$.



$$\pi \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u}, \overrightarrow{AP} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-4-z+2+y-1-z+2-x+2+$$
$$+2y-2=0 \Rightarrow x+3y-2z-1=0$$

b) *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos vectores.

$$A=\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2}=\frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}\right|}{2}=\frac{|(-6,3,-3)|}{2}=\frac{\sqrt{36+9+9}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\, ud^2$$

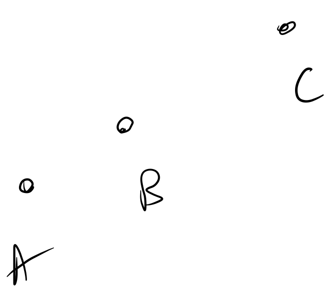
Junio 19.

a) *(1 punto)* Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados $A:(1,1,2)$, $B:(2,2,2)$ y $C:(-1,a,b)$ y determine la recta que los contiene.

b) *(0,5 puntos)* Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector: $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$ donde el símbolo "$\times$" representa el producto vectorial.

b) $(0,0,0)$ porque el ángulo que forman es 0 y $\operatorname{sen} 0 = 0$

a)



$$\vec{AC} = \lambda \vec{AB} \Rightarrow \frac{-1-1}{2-1} = \frac{a-1}{2-1} = \frac{b-2}{2-2} \Rightarrow \frac{a-1}{2-1} = -2 \qquad \frac{b-2}{0} = -2 \Rightarrow$$

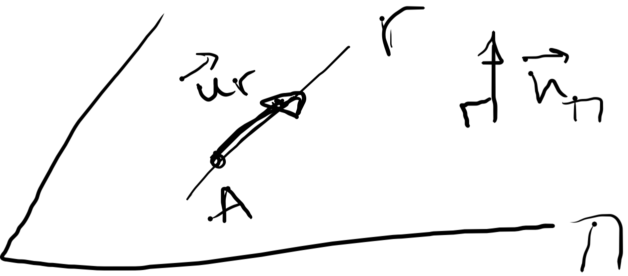
$$\Rightarrow \boxed{a=-1} \quad \boxed{b=2}$$

$$r \equiv \begin{cases} A \\ \vec{AB} \end{cases}$$

$$(x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(1,1,0)$$ Ec. vectorial de r

Septiembre 18. *(1,5 puntos)*

Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta $r: \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$ esté contenida en el plano $\pi: mx+y+nz=4$.



$$\text{Si } r \in \pi \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \\ A \in \pi \end{cases}$$

A y $\vec{u}_r$: $\begin{cases} x+y=2-z \\ 2x+3y=3-z \end{cases}$

Si $z=0 \Rightarrow x=3,\ y=-1$

$A(3,-1,0)$

Si $z=1 \Rightarrow x=1,\ y=0$

$B(1,0,1)$

$$\vec{u}_r = \vec{AB} = (-2,1,1)$$

$$\vec{n}_\pi = (m,1,n)$$

$$\begin{cases} -2m+1+n=0 \\ 3m-1=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{m=\frac{5}{3}}$$

$$\boxed{n = 2\cdot\frac{5}{3} - 1 = \frac{7}{3}}$$