Variables aleatorias

Dep. de Matemáticas

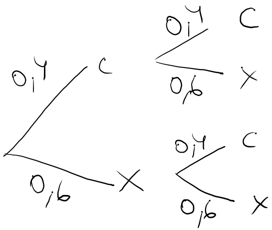
Distribución Binomial

Hablaremos de una **distribución binomial** cuando:

- Se parte de un **experimento compuesto** de varios simples independientes
- Los experimentos simples son **dicotómicos**. Es decir, solo puede haber dos sucesos elementales: uno al que llamaremos acierto y otro al que llamaremos fracaso
- Asociado al experimento compuesto tenemos la variable **número de aciertos** cuando realizamos el experimento simple un número determinado de veces

Ejercicio: Calcula la distribución de probabilidades asociado al siguiente experimento: Contar el número de caras obtenidas al lanzar una moneda defectuosa, sabiendo que la probabilidad de cara es 0.4 y que lanzamos la moneda dos veces.

x_i



$$P(0\,\text{caras}) = P(X \cap X) = P(X) \cdot P(X) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}6 = \boxed{1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6} = 0{,}36$$

$$P(1\,\text{cara}) = P\big((C \cap X) \cup (X \cap C)\big) =$$
$$= P(C \cap X) + P(X \cap C) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = \boxed{2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} =$$
$$= 0{,}48$$

$$P(2\,\text{caras}) = P(C \cap C) = P(C) \cdot P(C) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}4 = \boxed{1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4} = 0{,}16$$

x_i	p_i
0	0,36
1	0,48
2	0,16
	1,00

μ, σ

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	$x_i^2 \cdot p_i$
0	0,36	0	0
1	0,48	0,48	0,48
2	0,16	0,32	0,64
	1,00	0,8	1,12

$\Rightarrow$

$\mu = \sum x_i p_i = 0,8$

$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 p_i - \mu^2} =$

$= \sqrt{1,12 - 0,8^2} = \sqrt{0,48} \simeq 0,69$

Distribución Binomial

En la situación anterior, la distribución binomial vendrá determinada por dos parámetros:

- Parámetro n: Número de veces que se realiza el experimento simple
- Parámetro p: La probabilidad de que ocurra el suceso acierto

A este tipo de variable y su distribución de probabilidades se le llama **binomial** y se denota

$$X \sim \mathcal{B}(n,\, p)$$

.

Ejemplo

Lanzamineto de 5 monedas

El experimento se compone de **5 lanzamientos de moneda**. Si sale cara es acierto y si no fracaso. La variable aleatoria asociada al experimento será el número de caras que salen al lanzar 5 monedas. Esta variable sigue una distribución binomial $X \sim \mathcal{B}(5, 0{,}5)$.

Probabilidad de la binomial

En general tendremos una binomial de tamaño n **y probabilidad** p, cuando el experimento simple se haga n veces y la probabilidad de acierto sea p.

La función de probabilidad en este caso nos queda:

$$P: \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ k \mapsto P(X=k) = \binom{n}{k} (p)^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{array}$$

$\mu = n \cdot p$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Ejercicio: Calcula la distribución de probabilidades asociado al siguiente experimento: Contar el número de caras obtenidas al lanzar una moneda defectuosa, sabiendo que la probabilidad de cara es 0.4 y que lanzamos la moneda dos veces.

X_i

$X_i \rightsquigarrow B(n, p)$ donde $n = 2$, $p = 0{,}4$

sigue

$q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{2}{0} 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^2 = 1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}36$$

$$P(X = 1) = \binom{2}{1} 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^1 = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$$

$$P(X = 2) = \binom{2}{2} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^0 = 1 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}16$$

$$\mu = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{0{,}48} \simeq 0{,}69$$

1 Factorial de un número

1.1 Definición

Dado un número natural n, se llama factorial de n, al producto de los n primeros números naturales. Se representa:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.3.2.1$$

Si n =1 $\Rightarrow$ 1! = 1, si n =0 $\Rightarrow$ 0!=1

1.2 Ejemplos

4! = 4.3.2.1=24 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

2 Números Combinatorios

2.1 Definición

Un número combinatorio es un número que se representa por $\binom{n}{r}$, que se lee n sobre r, y que se define como:

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

=

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Ejemplo:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5}{\cancel{2}} = 15$$

P255 → Libro Sociales

11 En una distribución binomial $B(9; 0,2)$, calcula:

a) $P[x < 3]$ b) $P[x \geq 7]$ c) $P[x = 0]$

d) $P[x \neq 0]$ e) $P[x \leq 9]$ f) $P[x \geq 9]$

Distribución de probabilidad:

$\{0: 0.134217728,\ 1: 0.301989888,\ 2: 0.301989888,\ 3: 0.176160768,\ 4: 0.066060288,\ 5: 0.016515072,\ 6: 0.002752512,\ 7: 0.000294912,\ 8: 1.8432\cdot10^{-5},\ 9: 5.12\cdot10^{-7}\}$

a) $P(x<3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) \simeq 0{,}13421 + 0.301 + 0{,}301$
$= 0.738197504$

b) $P(x \geq 7) = P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) \simeq 0{,}0003$

c) $P(x=0) = \binom{9}{0} 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^9 = 0{,}8^9 = 0.134217728$

d) $P(x \neq 0) = 1 - P(x=0) = 0.865782272$

e) $P(x \leq 9) = \sum_i P(x=i) = 1$

f) $P(x \geq 9) = P(x=9) \simeq 5{,}12 \cdot 10^{-7}$

12 Todos los jugadores de un equipo de fútbol A tienen la misma probabilidad de marcar un penalti, 0,85. Al final del partido, en la tanda de penaltis, cada equipo tira cinco, y sabemos que el equipo contrario B ha marcado tres:

a) ¿Qué probabilidad hay de que haya ganado el equipo A tras estos cinco lanzamientos? ¿Y el B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que queden empatados y tengan que lanzar un sexto penalti?

c) Calcula la probabilidad de que el equipo A falle todos los penaltis. Halla también la de que los meta todos.

A: $X \rightsquigarrow B(5, 0.85)$

B: $Y \rightarrow Y = 3$

a) $P(x \geq 4) = P(X > 3) =$

$= P(x=4) + P(x=5) =$

$= 0{,}391 + 0{,}443 =$ 0.83521

b) $P(x=3) =$ 0.138178125

c) $P(x=0) \simeq 7{,}6 \cdot 10^{-5}$ y $P(x=5) \simeq 0{,}444$

$\{0 : 7.59375000000001 \cdot 10^{-5},\ 1 : 0.0021515625,\ 2 : 0.024384375,\ 3 : 0.138178125,\ 4 : 0.3915046875,\ 5 : 0.4437053125\}$

$\{0: 0.32768,\ 1: 0.4096,\ 2: 0.2048,\ 3: 0.0512,\ 4: 0.0064,\ 5: 0.00032\}$

13 En un almacén hay 5 aparatos de televisión antiguos. Sabemos que la probabilidad de que cualquiera de ellos tenga una deficiencia es 0,2. Calcula estas probabilidades:

a) P[ninguno defectuoso]

b) P[al menos dos defectuosos]

c) P[alguno defectuoso]

$X \sim B(5, 0.2)$

a) $P(X=0) = 0.32768$

b) $P(X \geq 2) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) =$

$= 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - 0.32768 - 0.4096 =$

$= 0.26272$

c) $P(X \geq 1) = P(X > 0) = 0{,}67$

14 En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Halla la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:

a) Ninguno. b) Uno. c) Más de dos.

$X \sim B(50, 0.02)$

a) $P(x=0) = \binom{50}{0} 0{,}02^{0} \cdot 0{,}98^{50} =$ 0.364169680087117

b) $P(X=1) = \binom{50}{1} \cdot 0{,}02^{1} \cdot 0{,}98^{49} =$ 0.371601714374609

c) $P(X>2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - \left(P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)\right) =$

$= 1 - 0{,}3642 - 0{,}37160 -$ 0.185800857187304 $=$

$=$ 0.078427748350969

25 Para controlar la calidad de un producto envasado, se eligen al azar tres envases de una caja con 50 envases. Por término medio, en cada caja hay 5 cuya calidad es deficiente.

a) Halla la probabilidad de que, de los tres, no haya ninguno, uno o dos deficientes. $\rightarrow X$

b) Si el primero resulta deficiente, ¿cuál es la probabilidad de que, de los tres, haya uno o dos deficientes? $\rightarrow Y$

$P(\text{Defectuosos}) \ \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$X \sim B(3, 0.1)$

$Y \sim B(2, 0{,}1)$

a) $P(X=0) = 0.729$

$P(X=1) = 0.243$

$P(X=2) = 0.027$

b) $P(X=1 \mid 1^{\underline{o}} D) = P(Y=0) = \binom{2}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^2 = 0.81$

$P(X=2 \mid 1^{o} D) = P(Y=1) = 0.18$

26 En un bombo de lotería tenemos 10 bolas numeradas del 0 al 9. Cada vez que se extrae una, se devuelve al bombo. Si sacamos 5 bolas, calcula la probabilidad de que:

a) El 0 salga una sola vez.

b) Se hayan obtenido más de dos unos.

c) No se obtengan números mayores que 7.

$X \to B\left(5, \frac{1}{10}\right)$

$Y \to B\left(5, \frac{1}{10}\right)$

$Z \to B\left(5, \frac{2}{10}\right)$ 8 9

$Z'\left(5, \frac{8}{10}\right)$

$P(Z' = 5)$

a) $P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^4$ 0.32805

b) $P(Y>2) = P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5) =$ 0.00856

c) $P(Z=0) =$ 0.32768

Distribución de probabilidades en una variable continua

Observa que la probabilidad total tiene que ser 1 y la variable X, al ser continua, puede tomar ∞ valores.

Si queremos repartir la probabilidad entre infinitos valores, **la probabilidad de un valor concreto será 0** ($\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$).

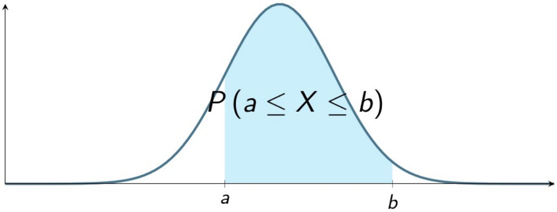
Para calcular las probabilidades no se utilizarán funciones de probabilidad como hemos visto hasta ahora sino **funciones de densidad**:

Función de densidad

En variables continuas solo tiene sentido calcular la probabilidad en intervalos. Se llama **función de densidad** ($f(x)$) a aquella que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

La interpretación gráfica de lo anterior nos dice que la probabilidad de un intervalo corresponde con el área de la función de densidad en ese intervalo.



Distribución Normal

Se trata de una distribución asociada a a un variable continua . Resulta de aproximar una binomial para valores muy grandes de n.

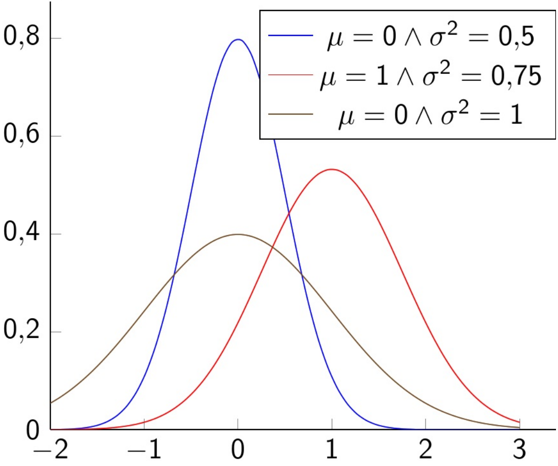
Y se denota: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Tiene dos parámetros:

- μ : Media de la distribución
- σ : Desviación típica

Esta distribución aparece asociada a muchos fenómenos naturales.

Ejemplos de gráficas:



Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

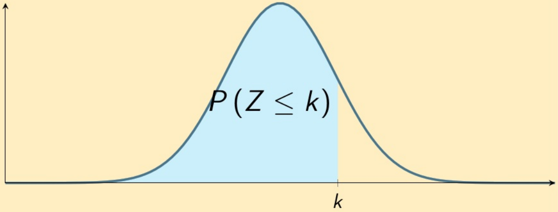
En realidad, para calcular la probabilidad no se hace la integral, sino que **se utiliza una tabla** que ya tiene calculadas probabilidades de la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ...

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Cálculo práctico de la probabilidad de la Normal:

... y que refleja:

$$P(Z \leq k), \quad k \in [0, 4'09]$$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Cálculo en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ o normal estándar

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,5
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,6
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,6
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,6
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,7
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,7
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,7
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,8
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,8
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,8
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,8
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,9

- $P(Z \leq 0) = 0{,}5$. Ya que en este caso $k = 0 = 0{,}00$ la suma del valor de la fila 0 con el valor de la columna 0 me da el valor de k, y la probabilidad asociada es 0,5
- $P(Z \leq 1{,}23) = 0{,}89065$. En este caso la probabilidad asociada a 1.23 se busca en la fila 1.2 y la columna 0.03

Cálculo en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ o normal estándar

Las probabilidades en conjuntos de valores de la distribución que no se puedan obtener directamente de la tabla se transformarán en operaciones con probabilidades que sí estén en la tabla:

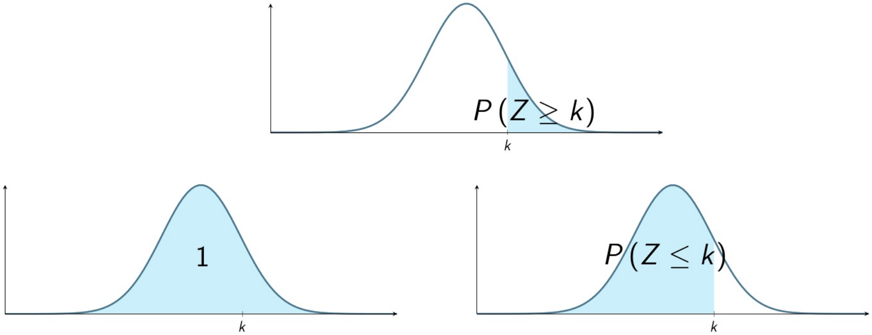
Veamos algunos ejemplos:

Cálculo en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ o normal estándar

Ejemplo

$P(Z \geq 1{,}23) = 1 - P(Z \leq 1{,}23) = 1 - 0{,}89065 = 0{,}10935.$

Basta fijarse en la relación que hay entre las áreas:

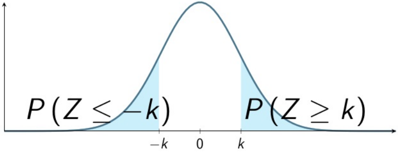


Cálculo en la $Z \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$ o normal estándar

Ejemplo

$P\,(Z \leq -2{,}15) = P\,(Z \geq 2{,}15) = 1 - P\,(Z \leq 2{,}15) = 1 - 0{,}98422 = 0{,}01578.$

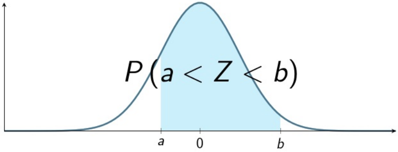
Basta fijarse en la relación que hay entre las áreas:

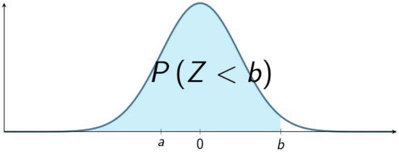


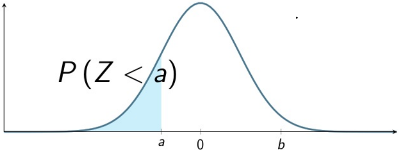
Ejemplo

$P(-1{,}3 < Z < 3{,}1) = P(Z < 3{,}1) - P(Z < -1{,}3) =$
$P(Z < 3{,}1) - [1 - P(Z < 1{,}3)] = 0{,}99903 - 1 + 0{,}9032 = 0{,}90223.$

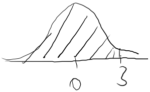
Basta fijarse en la relación que hay entre las áreas:







Dada $Z \sim N(0,1)$ Calcula:



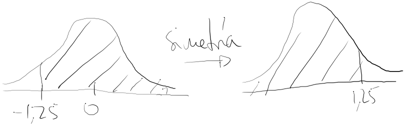
$P(Z<3) =$ 0.99865010196837

$P(Z \leq 3) =$ 0.99865010196837

$\underline{P(Z<-3) = P(Z>3)} = 1 - \underline{P(Z<3)} \approx 1 - 0{,}99865 \approx$ 0.00134989803163009

$\underline{P(Z>1{,}25)} = 1 - \underline{P(Z \leq 1{,}25)} \approx 1 - 0{,}89435 \approx$ 0.105649773666855

$$P(Z \geq -1,25) = P(Z \leq 1,25) \simeq 0.894350226333145$$

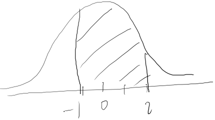


$$P(1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1) \simeq 0,97725 - 0,81594 \simeq 0.135905121983278$$

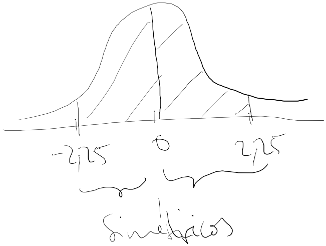
$$P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) =$$

$$= P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] = 0,97725 - 1 + 0,84134 \simeq$$

$$\simeq 0.818594614120364$$



$$P(-2{,}25 < Z \leq 2{,}25) = 2P(0 \leq Z \leq 2{,}25) =$$



$$= 2\left[P(Z \leq 2{,}25) - P(Z \leq 0)\right] \simeq$$

$$\simeq 2\left[0{,}98778 - 0{,}5\right] \simeq \text{0.975551054689911}$$

7 En una distribución $N(0, 1)$, calcula estas probabilidades:

a) $P[z = 1{,}6]$

b) $P[-2{,}71 \leq z \leq -1{,}83]$

c) $P[1{,}5 \leq z \leq 2{,}5]$

d) $P[-1{,}87 \leq z \leq 1{,}25]$

7 a) $P[z = 1{,}6] = 0$

b) $P[-2{,}71 \leq z \leq -1{,}83] = 0{,}0302$

c) $P[1{,}5 \leq z \leq 2{,}5] = 0{,}0606$

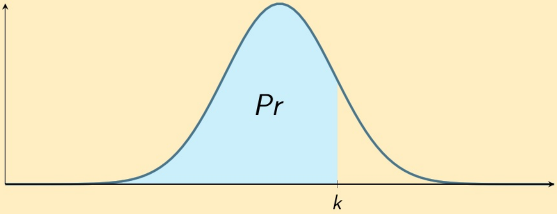
d) $P[-1{,}87 \leq z \leq 1{,}25] = 0{,}8637$

Cálculo en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ o normal estándar

Cálculo del valor de la variable a partir de la probabilidad

El uso de la tabla normal nos permite realizar el proceso inverso. Es decir, fijada una probabilidad Pr, encontrar el valor de la variable k que cumpla:

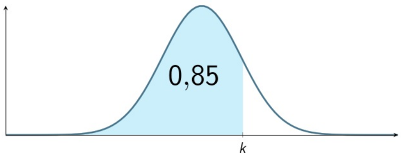
$$P(Z <= k) = Pr$$



Ejemplo

Dada $Z \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$, calcula el valor de la variable sabiendo que la probabilidad de que tome un valor menor que ese es de un 85 %.

$$P(Z <= k) = 0{,}85$$



Vamos a la tabla y buscamos los dos valores seguidos de la tabla entre los que se quede el 0,85 y encontramos:

$$0{,}84849 < 0{,}85 < 0{,}85083$$

Como queda más cerca del 0,85083, me quedo con la celda correspondiente a la fila 1 y columna 0,04 $\Rightarrow k = 1{,}04$.

8 Calcula k en cada uno de los siguientes casos:

a) $P[z < k] = 0{,}8365$ b) $P[z > k] = 0{,}8365$

c) $P[z < k] = 0{,}1894$ d) $P[-k < z < k] = 0{,}95$

50%

Sol.

8 a) $k = 0{,}98$

b) $k = -0{,}98$

c) $k = -0{,}88$

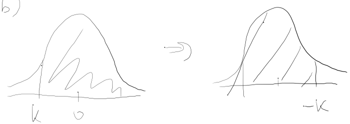
d) $k = 1{,}96$

Más cerca

a) $0{,}83646 < 0{,}8365 < 0{,}83891$

$K = 0{,}98$ $K = 0{,}99$

b)



$P(z > K) = P(z < -K) = 0{,}8365$

$-K = 0{,}98 \Rightarrow K = -0{,}98$

d) $P(-K < z < K) = 2 \cdot [P(z < K) - 0{,}5] \Rightarrow$

$0{,}95 = 2 \cdot [P(z < K) - 0{,}5]$

$0{,}475 + 0{,}5 = P(z < K)$

$0{,}975 = P(z < K)$

$K = 1{,}96$

Cálculo en $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ - Tipificación

Para manejar $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ reduciremos los cálculos a cálculos en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ a partir de la siguiente propiedad:

$$Si\ X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Rightarrow X' = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Al proceso de transformar la variable anterior a una $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ se denomina **tipificarla**.

Ejemplos

- $X \sim \mathcal{N}(1, 2) \rightarrow P(X <= 2{,}32) = P(X' <= \frac{2{,}32-1}{2}) = P(Z <= 0{,}66) = 0{,}74537$
- $X \sim \mathcal{N}(5, 3) \rightarrow P(X <= 3{,}59) = P(X' <= \frac{3{,}59-5}{3}) = P(Z <= -0{,}47) = 1 - P(Z <= 0{,}47) = 1 - 0{,}68082 = 0{,}31918$

19 La talla media de las 200 alumnas de un centro escolar es de 165 cm, y la desviación típica, de 10 cm.

Si las tallas se distribuyen normalmente, calcula la probabilidad de que una alumna elegida al azar mida más de 180 cm.

¿Cuántas alumnas puede esperarse que midan más de 180 cm?

19 $P[x > 180] = 0,0668$

Se espera que haya 13 alumnas que midan más de 180 cm.

$X \rightsquigarrow N(165, 10)$

$P(X > 180) = P\left(Z > \frac{180-165}{10}\right) = P(Z > 1,5) \simeq$

$= 1 - P(Z \leq 1,5) \simeq 1 - 0,9332 \simeq 0,0668$

19 La talla media de las 200 alumnas de un centro escolar es de 165 cm, y la desviación típica, de 10 cm.

Si las tallas se distribuyen normalmente, a) calcula la probabilidad de que una alumna elegida al azar mida más de 180 cm.

b) ¿Cuántas alumnas puede esperarse que midan más de 180 cm?

$X \rightarrow N(165, 10)$

$P(X > \underline{180}) = P\left(Z > \frac{180-165}{10}\right) = P(Z > 1{,}5) =$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}5) =$

$= 1 - 0{,}93319 = 0{,}0668$

$\Downarrow \times 100$

$6{,}68\%$

$X \xrightarrow{\text{Tipificar}} Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$180 \longrightarrow \frac{180-165}{10}$

b) $6{,}68\%$ de $200 \simeq$

$\simeq$ 13.36 $\rightarrow 13$

20 Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.

a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe?

b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?

20 a) $P[x > 50] = 0{,}6915$

b) Se espera que ingresarán 277 alumnos.

$X \to N(55, 10)$

a) $P(X \geq 50) = P\left(Z \geq \frac{50-55}{10}\right) = P(Z \geq -0{,}5) = P(Z \leq 0{,}5) \simeq 0{,}6915 \to 69{,}15\%$

$X \xrightarrow{\text{Tipificar}} Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$50 \longrightarrow \frac{50-55}{10}$

$-0{,}5 \quad 0 \quad 0{,}5$

b) $69{,}15\%$ de $400 =$ 276.6 $\simeq 277$

24 La duración de cierto tipo de motor es una variable normal con una media de 10 años y desviación típica de 2 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de los motores por un periodo de 13 años. ¿Qué porcentaje de motores se espera que no cumplan la garantía?

24 $P[x \geq 13] = 0{,}3557 \rightarrow$ El 35,6% de los motores no cumplirán la garantía.

$X \rightsquigarrow N(10, 2)$

$$P(X > 13) = P\left(Z > +\frac{3}{2}\right) = P(Z > 1{,}5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}5) =$$

$$= 1 - 0{,}93319$$

$$\parallel$$

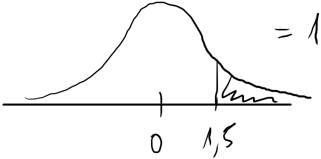
$$0{,}0668$$

$$\downarrow$$

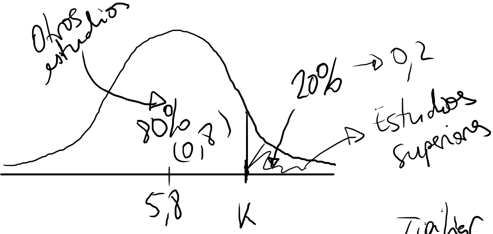
$$6{,}68\%$$

$$X \xrightarrow{\text{Tip}} Z = \frac{X - 10}{2}$$

$$13 \longrightarrow \frac{13 - 10}{2}$$



25 El 20% de los alumnos con mejor nota de una escuela pueden acceder a estudios superiores. Sabemos que las notas medias finales en esa escuela se distribuyen normalmente con media 5,8 y desviación típica 2. ¿Cuál es la nota media mínima que debe obtener un alumno si quiere hacer estudios superiores?



$$P(X < K) = 0{,}8$$

ó

$$P(X \geq K) = 0{,}2$$

Tipificar

$$X \xrightarrow{\text{Tipificar}} Z = \frac{X - 5{,}8}{2}$$

$$K \longrightarrow \frac{K - 5{,}8}{2}$$

$$P\left(Z < \frac{K - 5{,}8}{2}\right) = 0{,}8$$

$$\frac{K - 5{,}8}{2} = 0{,}84$$

$$K = 0{,}84 \cdot 2 + 5{,}8$$

$$= 7{,}48 \simeq 7{,}5$$