Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (*10 puntos*) Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

SOLUCIÓN

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Tipo de entrenamiento	Número	Horas	Distancia	Kilocalorías
corto	x	x	15x	1200x
largo	y	3y	30y	2500y

Restricciones: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 24$ $\quad x + 3y \leq 48 \quad 15x + 30y \leq 660 \quad F(x, y) = 1200x + 2500y$

Se trata entonces de maximizar la función objetivo $F(x,y) = 1200x + 2500y$ sometida al conjunto de restricciones: $\{\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x + y \geq 24\,,\ x + 3y \leq 48\,,\ 15x + 30y \leq 660\ \}$.

Construyamos la región factible, conjunto de los puntos del plano que verifican las inecuaciones del conjunto de restricciones:

- La recta de ecuación $x = 0$ es el eje de ordenadas. La inecuación $x \geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha (en blanco).

- La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ tiene como solución el semiplano superior (en blanco).

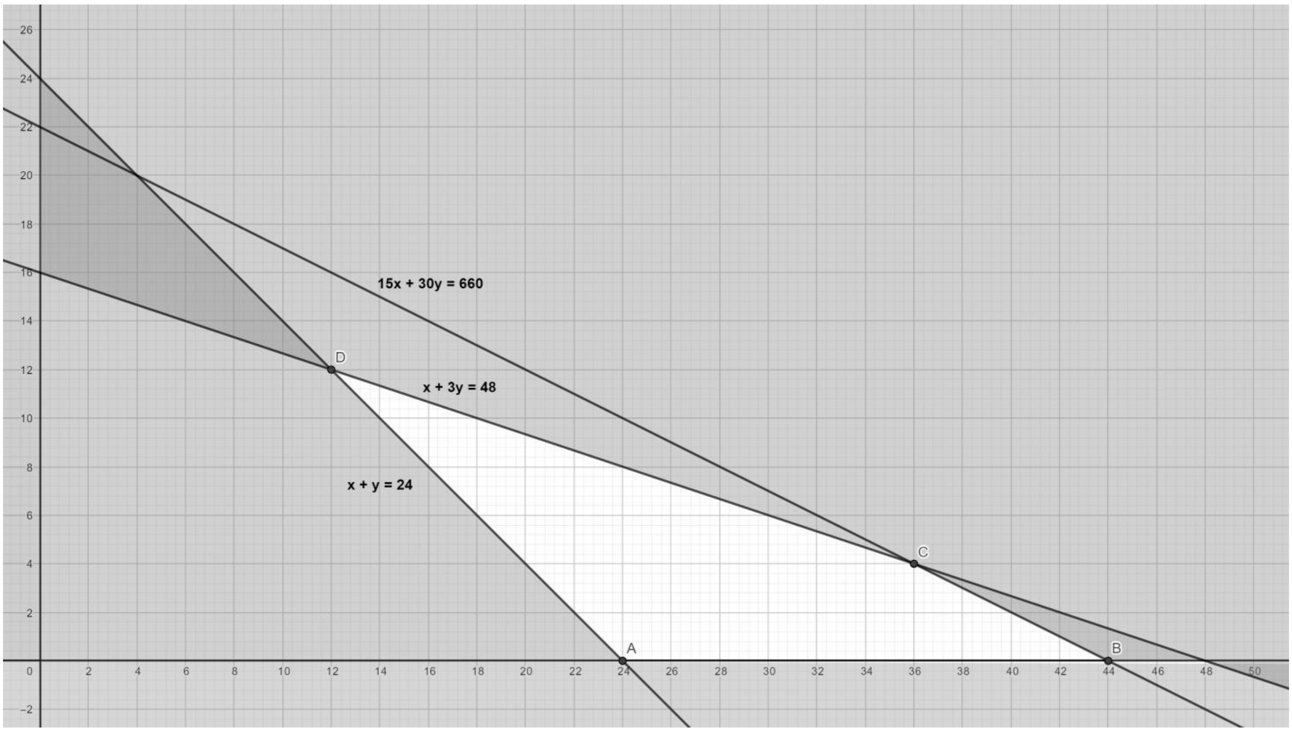
- La recta $x + y = 24$ pasa por los puntos $(0, 24)$ y $(24, 0)$. La inecuación $x + y \geq 24$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

- La recta $x + 3y = 48$ pasa por los puntos $(48, 0)$ y $(0, 16)$. La inecuación $x + 3y \leq 48$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

- La recta $15x + 30y = 660$ pasa por los puntos $(44, 0)$ y $(0, 22)$. La inecuación $15x + 30y \leq 660$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco)

La región factible (en blanco) es el cuadrilátero ABCD (ver figura).

Como la función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible, obtengamos las coordenadas de los vértices y calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para ver en cuál de ellos es máxima:



- Vértice A: $A(24,0) \Rightarrow F(24,0) = 1200 \cdot 24 = 28800$

- Vértice B: $B(44,0) \Rightarrow F(44,0) = 1200 \cdot 44 = 52800$

- Vértice C: es la intersección de las rectas $x+3y=48$ y $15x+30y=660$:

$$\begin{cases} x+3y=48 \\ 15x+30y=660 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x-30y=-480 \\ 15x+30y=660 \end{cases} \Rightarrow 5x=180 \Rightarrow x=36 \Rightarrow y=4 \Rightarrow C(36,4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(36,4) = 1200 \cdot 36 + 2500 \cdot 4 = 53200$$

- Vértice D: es la intersección de las rectas $x+y=24$ y $x+3y=48$:

$$\begin{cases} x+y=24 \\ x+3y=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y=-24 \\ x+3y=48 \end{cases} \Rightarrow 2y=24 \Rightarrow y=12 \Rightarrow x=12 \Rightarrow D(12,12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(12,12) = 1200 \cdot 12 + 2500 \cdot 12 = 44400$$

Se tiene entonces que la función objetivo es máxima en el vértice C y, por tanto, debe realizar 36 entrenamientos cortos y 4 largos para que el consumo total de kilocalorías sea máximo. El consumo será de 53200 kilocalorías.

2.- (*10 puntos*) En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

SOLUCIÓN

Sean: "x" el número de niños, "y" el número de jóvenes y "z" el número de adultos que visitan el museo. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ z=2(x+y) \\ y+100=x+z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ 2x+2y-z=0 \\ x-y+z=100 \end{array}\right\} \underset{E3-E1}{\overset{E2-2\cdot E1}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ -2y-11z=-1200 \\ -3y-4z=-500 \end{array}\right\} \underset{E3\cdot 2}{\overset{E2\cdot(-3)}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ 6y+33z=3600 \\ -6y-8z=-1000 \end{array}\right\} \overset{E3+E2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ 6y+33z=3600 \\ 25z=2600 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{2600}{25}=104 \ , \ y=\frac{3600-33\cdot 104}{6}=\frac{168}{6}=28 \ , \ x=600-2\cdot 28-5\cdot 104=24$$

Es decir, asisten al museo 24 niños, 28 jóvenes y 104 adultos.

3.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+12}{x-1}$$

Calcular:

a.- (*1 punto*) Dominio de f.

b.- (*3 puntos*) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x)<0$?

c.- (*2 puntos*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d.- (*4 puntos*) Máximos y mínimos relativos de f.

SOLUCIÓN

a) Es una función racional. Su dominio son todos los números reales excepto los que anulen al denominador. Por tanto: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

b) Se comprueba que $x^2-4x+12>0 \ \forall x$ (al resolver la ecuación $x^2-4x+12=0$ comprobamos que no tiene soluciones lo que significa que la parábola es toda positiva o toda negativa. Basta con sustituir x por 0, por ejemplo, para saber que es positiva).
Entonces, el signo de f(x) depende del signo del denominador:

$$f(x)<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)$$

c) ▪ Asíntotas verticales: $x=1$ pues $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+12}{x-1}=\infty$

▪ Asíntotas horizontales: no tiene pues $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+12}{x-1}=\infty$

▪ Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4x+12}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+12}{x^2-x}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+12}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+12-x^2+x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3x+12}{x-1}\right)=-3 \end{array}\right| \Rightarrow y=x-3$$

d) $f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+12)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-12}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} x=-2 \\ x=4 \end{cases} \text{ (puntos críticos)}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-8)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} f''(-2)<0 \;\Rightarrow\; x=-2 \text{ máximo relativo: } (-2,-8) \\ f''(4)>0 \;\Rightarrow\; x=4 \text{ mínimo relativo: } (4,4) \end{array}$$

4.- (*10 puntos*) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & si\ x<-1 \\ x^3-4x^2+2x-10 & si -1\le x\le 4 \\ \sqrt{4x^2-7x}-2x & si\ x>4 \end{cases}$$

a.- (*3 puntos*) Estudiar la continuidad de f.

b.- (*4,5 puntos*) Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

c.- (*2,5 puntos*) Calcular:

$$\int_1^2 f(x)dx$$

SOLUCIÓN

a) Se trata de una función definida a trozos. Estudiemos su continuidad en cada uno de los intervalos de definición:

▪ En el intervalo $(-\infty,-1)$: $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ es discontinua en $x=-1$ que no pertenece al intervalo en que está definida.

▪ En el intervalo $[-1,4]$: $f(x)=x^3-4x^2+2x-10$ es continua por ser una función polinómica.

▪ En el intervalo $(4,+\infty)$: $f(x)=\sqrt{4x^2-7x}-2x$ es continua por ser diferencia de dos funciones continuas. (Debe tenerse en cuenta que $\forall x>4:\ 4x^2-7x>0$)

Estudiemos ahora la continuidad en los puntos en los que cambia la definición de la función:

▪ En $x=-1$:

$$f(-1)=(-1)^3-4(-1)^2+2(-1)-10=-1-4-2-10=-17$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3}{x+1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x^3-4x^2+2x-10\right)=-17 \end{array}\right| \Rightarrow\ \nexists \lim_{x\to-1} f(x) \Rightarrow \text{ la función es discontinua en } x=-1$$

▪ En $x=4$:

$$f(4)=4^3-4\cdot4^2+2\cdot4-10=-2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4}\left(x^3-4x^2+2x-10\right)=-2 \\ \lim\limits_{x\to4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)=\sqrt{64-28}-8=6-8=-2 \end{array}\right| \Rightarrow\ \exists \lim_{x\to4} f(x)=-2$$

$$\lim_{x\to4} f(x)=f(4) \Rightarrow \text{ la función es continua en } x=4$$

b) Cuando $x \to +\infty$ la función que tenemos definida es $f(x)=\sqrt{4x^2-7x}-2x$. Se tiene entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-7x}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-7x}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-7x-4x^2}{\sqrt{4x^2-7x}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x}{\sqrt{4x^2-7x}+2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-7x}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}}+\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{\sqrt{4-\frac{7}{x}}+2}=\frac{-7}{4}$$

c) Entre $x=1$ y $x=2$ la función definida es $f(x)=x^3-4x^2+2x-10$.

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\left(x^3-4x^2+2x-10\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}-10x\right]_1^2=\left(4-\frac{32}{3}+4-20\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+1-10\right)=$$

$$=-12-\frac{32}{3}+9-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}=-3-\frac{28}{3}-\frac{1}{4}=\frac{-36-112-3}{12}=-\frac{151}{12}$$

5.- En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcular:

a.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean blancas.

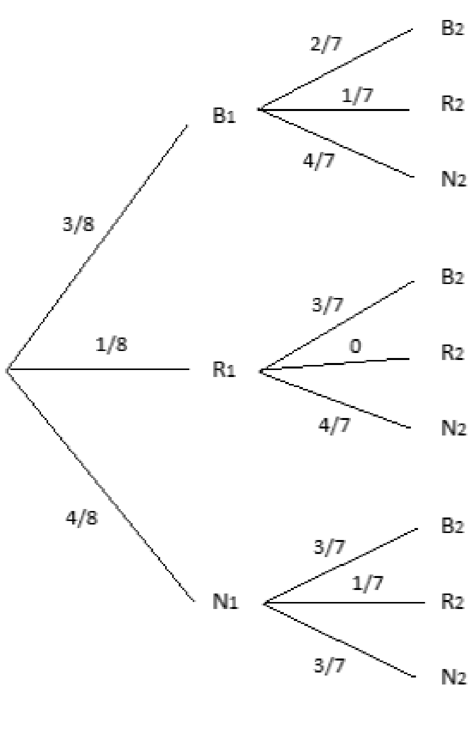
b.- (*3 puntos*) La probabilidad de que al menos una sea blanca.

c.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean del mismo color.

d.- (*3 puntos*) Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

SOLUCIÓN

Se trata de una prueba compuesta. Sea B el suceso "las dos bolas son blancas": $B=B_1\cap B_2$. Sea R el suceso "las dos bolas son rojas": $R=R_1\cap R_2$. Sea N el suceso "las dos bolas son negras": $N=N_1\cap N_2$.



A la izquierda está el diagrama en árbol de todas las situaciones posibles.

a) $p(B)=p(B_1\cap B_2)=p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$

b) El suceso A "al menos una es blanca" es el suceso contrario al suceso "ninguna es blanca".

$$p(\bar{A})=p(R_1\cap R_2)+p(R_1\cap N_2)+p(N_1\cap R_2)+p(N_1\cap N_2)=$$

$$=0+\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}\quad\Rightarrow\quad p(A)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$$

c) Sea C el suceso "las dos bolas son del mismo color":

$$C=B\cup R\cup N\quad\Rightarrow\quad p(C)=p(B\cup R\cup N)=p(B)+p(R)+p(N)=$$

$$=\frac{3}{28}+0+\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{28}$$

d) La probabilidad de C es $\frac{9}{28}$ lo que significa que de cada 28 casos en 9 es C. La probabilidad de B es $\frac{3}{28}$ lo que significa que de cada 28 casos en 3 es B. Si sabemos que ocurre C, estamos entre los 9 casos en que ocurre C, luego la probabilidad de que, en este caso, ocurra B será: $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

También: $p(B/C)=\frac{p(B\cap C)}{p(C)}=\frac{p(B)\cdot p(C/B)}{p(C)}=\frac{3/28\cdot 1}{9/28}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$p(C/B)=1$ porque que las dos bolas sean del mismo color si sabemos que son blancas es el suceso seguro.

6.- El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94%.

a.- (*6 puntos*) Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

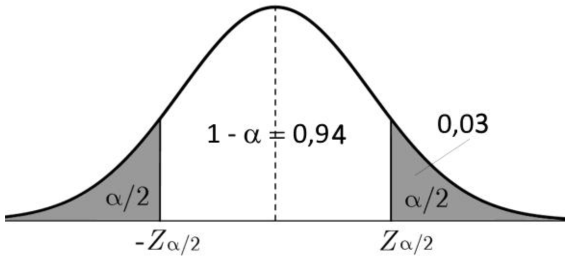
b.- (*4 puntos*) Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) Si la amplitud del intervalo de confianza ha de ser menor o igual a 0,1, el radio del intervalo o error máximo admisible, E, es de 0,05.



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 94% :

$1-\sigma=0,94 \Rightarrow \sigma=0,06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0,03 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=1-0,03=0,97$ y mirando en la tabla, encontramos que el valor crítico correspondiente es 1,88.

Puesto que no disponemos de ninguna proporción previa, suponemos que $pr=1-pr=50\%=0,5$

Se tiene:

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr\cdot(1-pr)}{n}} \Rightarrow n=\left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot pr\cdot(1-pr)=\frac{1,88^2\cdot 0,5\cdot 0,5}{0,05^2}=353,44 \Rightarrow$$

La muestra debe ser de 354 hogares.

b) Ahora $n=200$ y $pr=\frac{112}{200}=0,56 \Rightarrow E=1,88\cdot\sqrt{\frac{0,56\cdot 0,44}{200}}=0,066$

Luego el intervalo de confianza para la proporción de hogares con Internet de alta velocidad es:

$$(0,56-0,066\ ,\ 0,56+0,066)=(0,494\ ,\ 0,626)$$