1. - Ejercicios de sistemas con un parámetro:

(a) $\begin{cases} kz + y = 1 \\ kx - y + z = 1 \\ y - z = -k \end{cases}$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos
$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} k & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 & -k-1 \end{pmatrix}$.
De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -1 \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow z = \lambda$
  - $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow y = \lambda + 1$
  - $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow x = -2$
- si $k \neq [-1] \rightarrow$
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -k-1 & -k-1 \end{pmatrix} \rightarrow z = 1$
  - $\begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \rightarrow y = 1 - k$
  - $\begin{pmatrix} k & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{1-k}{k} \rightarrow \quad k \neq 0 \quad S.C.D \wedge k = 0 \quad S.I.$ (división por 0)

Por rangos y determinantes:
$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & k \\ k & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k^2 + k \rightarrow |A| = 0 \quad si \quad k = [-1,\ 0]$

- Si $k = -1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow$ solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k = 0 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.
- Si $k \neq [-1, 0] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

  Por Cramer:
  - $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -k & 1 & -1 \end{vmatrix}}{k(k+1)} = \frac{1-k^2}{k(k+1)} = \frac{1-k}{k}$

- $y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ 0 & -k & -1 \end{vmatrix}}{k(k+1)} = \frac{-k^3+k}{k(k+1)} = 1 - k$
- $z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -k \end{vmatrix}}{k(k+1)} = \frac{k(k+1)}{k(k+1)} = 1$