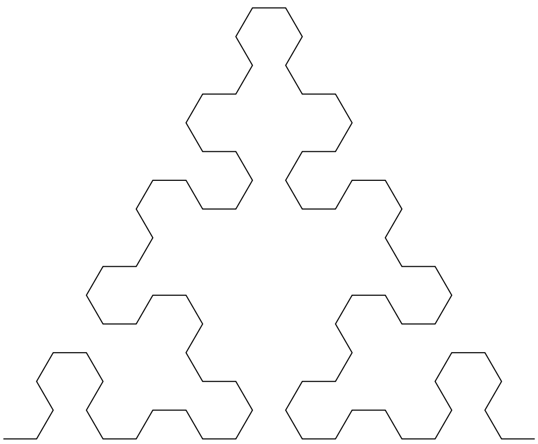
Preparación EVAU

Matemáticas II - 2º Bachillerato



Departamento de Matemáticas[1]

[1] http://www.iespedrocerrada.org/

ATRIBUCIONES: Nuestro más sentido **agradecimiento** a Julio García Galavis, que es el autor de la resolución de los ejercicios[a].

[a] `http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm`

1

Análisis

A continuación aparecen los ejercicios de la EVAU del bloque de análisis de los últimos seis años con las soluciones. Se recomienda trabajarlos para preparar la EVAU. En caso de necesitar consultar el desarrollo de la solución paso a paso se deberá consultar el documento específico de la prueba y año que aparece en la siguiente web[1]:

[1] `http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm`

SOLUCIÓN.

1. a) • $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{3\}$ • $x=3$: asíntota vertical , $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$: asíntota oblicua

b) • Creciente en $(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$. Decreciente en $(0,6)-\{3\}$.

• $x=0$: máximo relativo. $x=6$: mínimo relativo.

2. a) $f(x)=\frac{1}{5}(x-1)^5-\frac{1}{2}(x-1)^4+\frac{17}{10}$ **b)** e^6

Septiembre 14.

1. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Considere la función: $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<2 \\ 2x+a & \text{si } 2\le x\le 4 \\ -x^2+3x+b & \text{si } x>4 \end{cases}$

Determine los valores de a y b para que la función sea continua.

b) *(1,25 puntos)* Supongamos ahora que $a=0$. Usando la definición de derivada, estudie la derivabilidad de $f(x)$ en $x=2$.

2. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Dadas las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=-x^2+2$, determine el área encerrada entre ambas funciones.

b) *(1,25 puntos)* Calcule la integral: $\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-2x+1}dx$.

SOLUCIÓN.

1. a) $a=0$, $b=12$ **b)** No es derivable pues $f'(2^-)=4$, $f'(2^+)=2$

2. a) $A=\frac{8}{3}u^2$ **b)** $5+\ln 8$

Junio 15.

a) *(1,5 puntos)* Considere la función $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$. Determine los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t=\cos x$, calcula $\int \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x}dx$.

c) *(2 puntos)*

1) *(1 punto)* Calcule los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^3+bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,2)$.

2) *(1 punto)* Calcule el área encerrada por la curva $f(x)=2x^3-3x^2$ y la parte positiva del eje OX.

SOLUCIÓN.

a) $(-1,-2e)$: mínimo relativo, $\left(3, \frac{6}{e^3}\right)$: máximo relativo. Puntos de inflexión en $x = 2-\sqrt{5}$ y en $2+\sqrt{5}$.

b) $\cos x + \ln\sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}} + C$ **c)** 1) $a = -4$, $b = \frac{3}{2}$ 2) $A = \frac{27}{32}u^2$

Junio 15.

a) *(2 puntos)* Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule: $\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}}\,dx$

c) *(1,5 puntos)* Calcule: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

SOLUCIÓN.

a) $l_1 = 48$ m., $l_2 = 144$ m., $l_3 = 120$ m. **b)** $2e^x + \sqrt{2}\ln\frac{e^x - \sqrt{2}}{e^x + \sqrt{2}} + C$ **c)** $-\frac{1}{2}$

Septiembre 15.

a) *(2 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule: $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\,dx$

b) *(1,5 puntos)* Determine el límite siguiente: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}$

c) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación de la curva $f(x)$ sabiendo que la recta tangente en $x = 3$ es $y = 9x - 13$ y la derivada segunda verifica que $f''(x) = 4$, para cualquier valor de x.

SOLUCIÓN.

a) $e^x - \ln\left(\frac{(e^x+2)^4}{e^x+1}\right) + C$ **b)** 1 **c)** $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Septiembre 15.

a) *(3 puntos)* Sea $f(x) = x^2\, e^{1/x^2}$

1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de $f(x)$.

2) *(1,5 puntos)* Determinen, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

b) *(2 puntos)* Calcule: $\int\left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x^2}\right)dx$

SOLUCIÓN.
a) 1) $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ 2) Asíntota vertical: $x=0$ 3) $(-1,e)$ y $(1,e)$: mínimos relativos
b) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

Junio 16.

a) *(2,25 puntos)* Considere la función: $f(x)=\dfrac{1}{8x-x^2}$

a.1) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) *(0,75 puntos)* Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,25 puntos)* Determine: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\ln\left(x^2\right)\right)\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)\right)$

c) *(1,5 puntos)* Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$

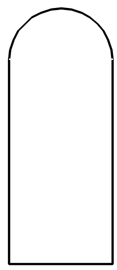
SOLUCIÓN.
a) **a.1)** Asíntotas verticales: $x=0$ y $x=8$ **a.2)** $(4, 1/16)$ mínimo relativo
b) 0 **c)** $1/12\ u^2$

Junio 16.

a) *(1,5 puntos)* Determine el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+1}{2x-1}-\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t=\cos x$, calcule: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{1-\cos x}\,dx$

c) *(2 puntos)* Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece a la derecha, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).



Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.

SOLUCIÓN.
a) $e^{7/2}$ **b)** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}-\ln\left(2-\sqrt{2}\right)$ **c)** $1/12\ u^2$

Septiembre 16.

a) *(1 punto)* Determine, si existen, todos los valores de los parámetros a y b para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} a\,e^x & \text{si } x<0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0\le x<1 \\ b\left(1-e^{x-1}\right) & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Considere ahora que $a=1$. Usando la definición de derivada, estudie si la función es derivable en $x=0$.

c) *(1,5 puntos)* Determine: $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{e^x}}$

d) *(1,5 puntos)* Determine: $\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

SOLUCIÓN.
a) Para $a=1$ y $\forall b$ **b)** No es derivable   **c)** **1**   **d)** $2\sqrt{x}\left[(\ln x)^2-4\ln x+8\right]+C$

Septiembre 16.

a) *(3 puntos)* Considere la función: $f(x)=x+\frac{4}{x}$

a.1) *(1,5 puntos)* Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los extremos relativos y puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(2 puntos)* Determine el área limitada por la curva $f(x)=-2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ y las rectas $x=0$, $x=\pi$ y el eje de abscisas $y=0$.

SOLUCIÓN.
a) a.1) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$; asíntota vertical: $x=0$, asíntota oblicua: $y=x$ a.2**)** $(-2,-4)$ máximo relativo $(2,4)$ mínimo relativo. No tiene puntos de inflexión.   b**)** $4\ u^2$

Junio 17.
(4 puntos)

a) *(3 puntos)* Considere la función de variable real x siguiente: $f(x)=x(\ln x)^2$

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función $f(x)$.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función $f(x)$ en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)=\frac{5}{3}$$

SOLUCIÓN.
a) a.1) $D(f)=(0,+\infty)$ **a.2)** Creciente en $(0,e^{-2})\cup(1,+\infty)$; Decreciente en $(e^{-2},1)$
a.3) $(e^{-2},4e^{-2})$ máximo relativo ; $(1,0)$ mínimo relativo.   b**)** $k=\frac{4}{3}$

Junio 17.
(4 puntos)
a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) *(2 puntos)* Determine: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

SOLUCIÓN.	
a) 4 y 6	**b)** $e^0=1$

Septiembre 17.
(4 puntos)

Considere la función: $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

(2**c)** *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función f(x) así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

b) Asíntotas verticales: $x=-1$
Asíntotas horizontales: no existen
Asíntotas oblicuas: $y=x-1$

c) Creciente: $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$
Decreciente: $(-2,-1)\cup(-1,0)$
Máximo relativo: $(-2,-4)$
Mínimo relativo: $(0,0)$

Septiembre 17.
(4 puntos)

a) *(1 punto)* Determine los valores de "a" y "b" para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 1/e^x & \text{si } x\le 0 \\ a\cos x+b & \text{si } 0<x\le\pi \\ \operatorname{sen}x-ax & \text{si } \pi<x \end{cases}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral: $\int x^2(\ln x)^2\,dx$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1}$

SOLUCIÓN.

a) $a=\frac{1}{2-\pi}$, $b=\frac{1-\pi}{2-\pi}$ **b)** $\frac{1}{3}x^3\left[(\ln x)^2-\frac{2}{3}\ln x+\frac{2}{9}\right]+K$ **c)** 1

Junio 18.
(4 puntos)

a) Considere la función $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

a.1) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3) *(1 punto)* Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=2$.

b) *(1 punto)* Calcule: $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}\,dx$

SOLUCIÓN.

a.1) $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$; Asíntotas horizontales: $y=-1$ (cuando $x\to-\infty$) , $y=1$ (cuando $x\to+\infty$)

a.2) Máximo relativo: $\left(1,\sqrt{2}\right)$, mínimo relativo: no tiene **a.3)** $\sqrt{5}x+25y-17\sqrt{5}=0$

b) $\dfrac{x^2}{2}-2x+\ln|x-1|+C$

Junio 18.
(4 puntos)

a) *(2 puntos)* Determine los valores de los parámetros a, b y c para que la función $f(x)=a\left(x-1\right)^2+bx+c$

a.1.) Pase por el punto $\left(1,1\right)$

a.2.) En el punto $\left(1,1\right)$ su tangente tenga de pendiente 2

a.3.) En el punto $x=2$ tenga un máximo relativo.

b) *(2 puntos* Determine el valor del límite: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$

SOLUCIÓN.

a) $a=-\dfrac{2}{3}$, $b=2$, $c=-1$ **b)** e^{-3}

Septiembre 18.
(4 puntos)

a) *(2,5 puntos)* Considere la función: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

a.1) *(1 punto)* Determine las asíntotas de la función f(x).

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los mínimos y máximos relativos de la función f(x).

b) *(1,5 puntos)* Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$

SOLUCIÓN.
a) a.1**) Asíntotas verticales:** $x=1$; asíntotas oblicuas**:** $y=x-2$ a.2) Creciente: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$;
Decreciente: $(0,1)\cup(1,2)$; Máximo relativo: $(0,-3)$; Mínimo relativo: $(2,1)$ **b)** $3\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C$

Septiembre 18.
(4 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Calcule el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$

b) *(1,5 puntos)* De entre todos los triángulos rectángulos que tienen un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) *(1 punto)* Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$.

SOLUCIÓN.
a) e^2 **b)** Catetos: $\sqrt{2}$ cm y $\sqrt{2}$ cm ; Hipotenusa: 2 cm **c)** $\dfrac{32}{3}$ u^2

Junio 19.
a) *(1,5 puntos)* Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos $(0,0),(a,0),(0,b)$ y (a,b), donde $a>0$ y $b>0$ y además el punto (a,b) está situado en la curva de ecuación $y=\dfrac{1}{x^2}+9$.
De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) *(1 punto)* Determine: $\displaystyle\int\frac{1}{9-x^2}\,dx$

c) *(1,5 puntos)* Determine el valor de la constante k para que se verifique que: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$

SOLUCIÓN.
a) $a=\dfrac{1}{3}, b=18$; $S=6$ u^2 **b)** $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x+3}{x-3}\right|+C$ **c)** $k=-5$

Junio 19.
Considere la función: $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

a) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) *(1 punto)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) *(1,5 puntos)* Determine la integral $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

SOLUCIÓN.
a) Asíntotas verticales: $x=-1$, asíntotas horizontales: $y=0$, asíntotas oblicuas: no tiene.
b) Creciente: $\forall x\in(-1,3)$, decreciente: $\forall x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ **c)** $\ln 2-\dfrac{1}{2}$

Septiembre 19.

a) *(1 punto)* Determine el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}\right)$

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante k para que la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ k-x & \text{si } x=1\end{cases}$ sea continua en $x=1$.

c) *(2 puntos)* La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los vértices $A:(0,1), B:(2,1), C:(0,5)$ y $D:(2,5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

SOLUCIÓN.		
a) $\frac{1}{2}$	**b)** $k=5$	**c)** $\frac{16}{3}\,u^2$ y $\frac{8}{3}u^2$

Septiembre 19.

a) *(1 punto)* Considere la función: $f(x)=\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}$. Determine el valor de k para que la función f(x) tenga como asíntota oblicua, cuando $x\to+\infty$, la recta $y=2x-1$.

b) *(1,5 puntos)* Determine $\int x\left(\ln(x)\right)^2\,dx$

c) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$$

SOLUCIÓN.		
a) $k=-1$	**b)** $\frac{1}{2}x^2\left[(\ln x)^2-\ln x+\frac{1}{2}\right]+C$	**c)** Mínimo relativo: $(1,1)$. Punto de inflexión: $\left(2,\frac{1}{2}+\ln 2\right)$