EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El estudiante debe indicar claramente, cuáles han sido las preguntas elegidas.

Preguntas elegidas (indique un máximo de 5, antes de entregar el examen):

....

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) (*1 punto*) Calcule, si es posible, $\left(A \cdot B^t\right)^{-1}$.

b) (*1 punto*) Compruebe que, $C^3 = I$, donde I es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

3) Resuelva el sistema matricial

$$\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4) Se considera la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

a) (*1,25 puntos*) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto (0,0,1).

b) (*0,75 puntos*) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ Sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 1, 1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

CONTINÚA AL DORSO

5) Calcule el siguiente límite:.

$$\lim_{x \to 0^+} \left((1 + x - senx)^{1/x^3} \right)$$

6) Se considera la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

7) Se considera la siguiente función $f(x) = \ln(2x+1)$

- **a)** *(1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento
- **b)** *(0,75 puntos)* Halle la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa x= $\dfrac{1}{2}$

8) Calcule la siguiente integral: $\int \left(\sqrt{x} \cdot \ln^2 x \right) dx$.

9) Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.

- **a)** (*0,75 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?
- **b)** (*0,75 puntos*) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?
- **c)** (*0,5 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.

10) De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

- **a)** (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).
- **b)** (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

$\boxed{1.-}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = m-1+m^2+m+4-(2m^2-2+2m+1) =$$

$$= 2m+3+m^2-2m^2-2m+1 =$$

$$= 4-m^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \pm 2}$$

* Si $m \neq \pm 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

* Si $m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \text{S. Compatible Indeterminado}$$

* Si $m = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \text{S. Incompatible}$$

$\boxed{2.-}$ (a) $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B^t)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$

(b) $C^3 = I$ ✓

$$C^{16} = C^3 \cdot C^3 \cdot C^3 \cdot C^3 \cdot C^3 \cdot C = I \cdot C = C$$

$\boxed{3.-}$

$$\begin{cases} -2X + 4Y = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$7Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2Y + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4.-}$ $r \equiv \begin{cases} x + \quad z = 1 & \Rightarrow z = 1 - x \\ 2x + y \quad = 3 & \Rightarrow y = 3 - 2x \end{cases}$ $\quad r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

$P_r = (0,3,1)$
$\vec{u}_r = (1,-2,-1)$
$P = (0,0,1) \rightarrow \vec{PP_r}\,(0,3,0)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$3x + 3(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv x + z - 1 = 0}$$

(b) $V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = (-1,1,1) \cdot (-1,1,1) = 3\, u^3$

$\boxed{5.-}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left((1 + x - \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x^3}} \right) \left(= 1^\infty \right)$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}} \; \frac{0}{0} (L'H) = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{3x^2}} \; \frac{0}{0} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{6x}} \stackrel{L,H}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{6}} = e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e} \simeq 1,1814$$

$\boxed{6.-}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - e^{-x}}$

* AV $\quad 1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow 1 = e^{-x} \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} \left(= \frac{0}{0} \right) \stackrel{L,H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ AV}$$

* AH $\quad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{1 - e^{-x}} = \infty \Rightarrow \nexists$ en $+\infty$ $\quad (e^{-x} \to 0)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1 - e^{x}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{-e^x} = \nexists \text{AO}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{-e^x} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \text{ AH}$$

$\boxed{7.-}$ $f(x) = \ln(2x+1)$

$2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Dom} f(x) = \left(-\frac{1}{2}, \infty \right)$

$f'(x) = \dfrac{2}{2x+1} \neq 0 \Rightarrow$

	$-1/2$	
f'		$+$
f		$\nearrow$

crece en todo el dominio

(b) $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - \ln 2 = 1 \cdot (x - \frac{1}{2}) \Rightarrow \boxed{y = x - \frac{1}{2} + \ln 2}$

$\boxed{8.-}$ $\int (\sqrt{x} \cdot \ln^2 x)\, dx = \left\| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & v = \frac{2x^{3/2}}{3} \\ du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx & dv = \sqrt{x}\, dx \end{array} \right\|$

$= \frac{2x^{3/2}}{3} \ln^2 x - \int \frac{4}{3} x^{1/2} \ln x\, dx \left\| \begin{array}{ll} u = \ln x & v = \frac{8}{9} x^{3/2} \\ du = \frac{1}{x}\, dx & dv = \frac{4}{3} x^{1/2}\, dx \end{array} \right\|$

$= \frac{2x^{3/2}}{3} \ln^2 x - \frac{8x^{3/2}}{9} \ln x + \int \frac{8}{9} x^{1/2}\, dx =$

$= \frac{16}{27} x^{3/2}$

$$\boxed{= \frac{2x^{3/2}}{27} \left(9\ln^2 x - 12 \ln x + 8 \right) + K}$$

$\boxed{9.-}$ $P(♀ \cap P) = 0{,}16 \cdot 0{,}36 = \frac{36}{625} = 0{,}0576 \Rightarrow 5{,}76\,\%$

$P(\text{paro}) = P(♀ \cap P) + P(♂ \cap P) =$

$= 0{,}0576 + 0{,}12 \cdot 0{,}64 = 0{,}1344 \Rightarrow 13{,}44\%$

$P(♀ / P) = \frac{P(♀ \cap P)}{P(P)} = \frac{5{,}76}{13{,}44} = \frac{3}{7} \simeq 42{,}86\%$

$\boxed{10.-}$ $P(\text{abandono}) = \frac{1}{5} = 0{,}2 \quad (20\%)$

(a) $P(\text{uno o ninguno ab.}) = P(\text{uno A}) + P(\text{ninguno A}) =$

$= 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^5 =$

$= \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{2304}{3125} = 0{,}73728$

$73{,}728\%$

(b) $P(\text{ninguno abandone}) > P(\text{todos abandonen})$

$\left(\frac{4}{5}\right)^5 > \left(\frac{1}{5}\right)^5$ ✓