

1. - Ejercicios de sistemas con un parámetro:

$$(a) \quad \begin{cases} -3x + 2y + 3z = -2 \\ ky + 2x - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & k & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & k + \frac{4}{3} & -3 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 3 + \frac{5}{k + \frac{4}{3}} & \frac{4}{3} + \frac{80}{9(k + \frac{4}{3})} \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -3 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -3 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = -4 \rightarrow$ S.I.

- si $k \neq [-3] \rightarrow$ S.C.D.

$$\bullet \left(0 \quad 0 \quad 3 + \frac{5}{k + \frac{4}{3}} \quad \frac{4}{3} + \frac{80}{9(k + \frac{4}{3})} \right) \rightarrow z = \frac{4(k+8)}{9(k+3)}$$

$$\bullet \left(0 \quad k + \frac{4}{3} \quad -3 \quad -\frac{16}{3} \right) \rightarrow y = -\frac{4}{k+3}$$

$$\bullet \left(-3 \quad 2 \quad 3 \quad -2 \right) \rightarrow x = \frac{2(5k+13)}{9(k+3)}$$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & k & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9k - 27 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-3]$$

- Si $k = -3 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.
- Si $k \neq [-3] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

$$(b) \quad \begin{cases} kx + y + z = k \\ ky + x + z = k \\ kz + x + y = k \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1 - k^2 & 1 - k & -k^2 + k \\ 0 & 0 & k - \frac{(1-k)^2}{1-k^2} - 1 & -\frac{(1-k)(-k^2+k)}{1-k^2} \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -2 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = -6 \rightarrow$ S.I.

▪ si $k \neq [-2] \rightarrow$ S.C.D.

- $\left(0 \quad 0 \quad k - \frac{(1-k)^2}{1-k^2} - 1 \quad -\frac{(1-k)(-k^2+k)}{1-k^2}\right) \rightarrow z = \frac{k}{k+2}$
- $(0 \quad 1 - k^2 \quad 1 - k \quad -k^2 + k) \rightarrow y = \frac{k}{k+2}$
- $(1 \quad k \quad 1 \quad k) \rightarrow x = \frac{k}{k+2}$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 - 3k + 2 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-2, 1]$$

- Si $k = -2 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.
- Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 1 \wedge rg(A^*) = 1 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [-2, 1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

(c)
$$\begin{cases} x + y + z = k + 2 \\ -ky + x + z = 1 \\ kx + y + z = 4 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 1 & -k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 0 & -k-1 & 0 & -k-1 \\ 0 & 0 & 1-k & -k(k+2) + k+3 \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

▪ Si $k = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 1 \rightarrow$ S.I.

▪ si $k \neq [1] \rightarrow$ S.C.D.

- $(0 \quad 0 \quad 1 - k \quad -k(k+2) + k+3) \rightarrow z = \frac{k^2+k-3}{k-1}$
- $(0 \quad -k-1 \quad 0 \quad -k-1) \rightarrow y = 1$
- $(1 \quad 1 \quad 1 \quad k+2) \rightarrow x = \frac{2-k}{k-1}$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 1 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-1, 1]$$

- Si $k = -1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.
- Si $k \neq [-1, 1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

$$(d) \quad \begin{cases} kx + kz + y(k^2 + 1) = k \\ ky + x + z = 0 \\ k^2z + x + y(k + 1) = 2k - 1 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} k & k^2 + 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & k + 1 & k^2 & 2k - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & k^2 - 1 & k - 1 \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = -2 \rightarrow$ S.I.

- Si $k = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I

- $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \rightarrow z = \lambda$
- $(0 \ 1 \ 0 \ 1) \rightarrow y = 1$
- $(1 \ 1 \ 1 \ 0) \rightarrow x = -\lambda - 1$
- si $k \neq [-1, 1] \rightarrow$ S.C.D.
 - $(0 \ 0 \ k^2 - 1 \ k - 1) \rightarrow z = \frac{1}{k+1}$
 - $(0 \ 1 \ 0 \ k) \rightarrow y = k$
 - $(1 \ k \ 1 \ 0) \rightarrow x = -\frac{k^3 + k^2 + 1}{k+1}$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & k^2 + 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k + 1 & k^2 \end{vmatrix} = k^4 - k^2(k^2 + 1) + 1 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-1, 1]$$

- Si $k = -1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.

- Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [-1, 1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

$$(e) \quad \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ ky + 3x + z = 0 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & k & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{3} - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = 3 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I

- $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \rightarrow z = \lambda$
- $(0 \ \frac{3}{2} \ -\frac{1}{2} \ 0) \rightarrow y = \frac{\lambda}{3}$
- $(2 \ -5 \ 3 \ 0) \rightarrow x = -\frac{2\lambda}{3}$

- si $k \neq [3] \rightarrow$ S.C.D.

- $(0 \ 0 \ \frac{k}{3} - 1 \ 0) \rightarrow z = 0$
- $(0 \ \frac{3}{2} \ -\frac{1}{2} \ 0) \rightarrow y = 0$
- $(2 \ -5 \ 3 \ 0) \rightarrow x = 0$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & k & 1 \end{vmatrix} = k - 3 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [3]$$

- Si $k = 3 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [3] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

$$(f) \quad \begin{cases} ky + x - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 0 \\ 12 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & -12k-3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{10(-k-2)}{-12k-3} & 0 \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I

- $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \rightarrow z = \lambda$
- $(0 \ -15 \ 10 \ 0) \rightarrow y = \frac{2\lambda}{3}$
- $(1 \ 1 \ -1 \ 0) \rightarrow x = \frac{\lambda}{3}$

- si $k \neq [1] \rightarrow$ S.C.D.

- $(0 \ 0 \ 2 - \frac{10(-k-2)}{-12k-3} \ 0) \rightarrow z = 0$
- $(0 \ -12k-3 \ 10 \ 0) \rightarrow y = 0$
- $(1 \ k \ -1 \ 0) \rightarrow x = 0$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14 - 14k \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [1]$$

- Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

$$(g) \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ kx + y - z = k - 2 \\ ky + 3x + z = k - 2 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & -1 & k-2 \\ 3 & k & 1 & k-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-k & -2k-1 & k-2 \\ 0 & 0 & -5 - \frac{(-2k-1)(k-3)}{1-k} & k-2 - \frac{(k-3)(k-2)}{1-k} \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -2 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{3} \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = -32/3 \rightarrow$ S.I.

- Si $k = 2 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I

- $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \rightarrow z = \lambda$
- $(0 \ -1 \ -5 \ 0) \rightarrow y = -5\lambda$
- $(1 \ 1 \ 2 \ 0) \rightarrow x = 3\lambda$

- si $k \neq [-2, 2] \rightarrow$ S.C.D.

- $\left(0 \ 0 \ -5 - \frac{(-2k-1)(k-3)}{1-k} \ k - 2 - \frac{(k-3)(k-2)}{1-k}\right) \rightarrow z = \frac{2-k}{k+2}$
- $(0 \ 1-k \ -2k-1 \ k-2) \rightarrow y = \frac{k-2}{k+2}$
- $(1 \ 1 \ 2 \ 0) \rightarrow x = \frac{k-2}{k+2}$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & 1 & -1 \\ 3 & k & 1 \end{vmatrix} = 2k^2 - 8 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-2, 2]$$

- Si $k = -2 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.
- Si $k = 2 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [-2, 2] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

$$(h) \quad \begin{cases} kx + y = 1 \\ 2x + y(k+1) = 2 \\ ky + x = 1 \end{cases}$$

Sol: Como $rg(A) = 2 < rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.

Ya que escalonando la matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ 2 & k+1 & 0 & 2 \\ 1 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & k+1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{k(k+1)}{2} + 1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(1-k)(\frac{k}{2}-\frac{1}{2})}{-\frac{k(k+1)}{2}+1} \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & k+1 & 0 \\ 0 & -\frac{k(k+1)}{2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \quad y \quad \left| \begin{array}{ccc} k+1 & 0 & 2 \\ -\frac{k(k+1)}{2} + 1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & -\frac{(1-k)(\frac{k}{2}-\frac{1}{2})}{-\frac{k(k+1)}{2}+1} \end{array} \right| = 0$$