1. p43e03a5 - Utiliza la regla de Barrow para calcular :

(a) $\int_{0}^{3} \left(3x^2 - 6\right)\, dx$

Sol: $9 \;\left(F(x) = x^3 - 6x\right)$

(b) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\, dx$

Sol: $\log(2) \;\left(F(x) = \log(x)\right)$

(c) $\int_{0}^{1} \frac{5}{7x^2+7}\, dx$

Sol: $\frac{5\pi}{28} \;\left(F(x) = \frac{5\,\mathrm{atan}(x)}{7}\right)$

(d) $\int_{2}^{3} \frac{1}{x\log(x)}\, dx$

Sol: $\log\left(\frac{\log(3)}{\log(2)}\right) \;\left(F(x) = \log(\log(x))\right)$

(e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^5(x)\cos(x)\, dx$

Sol: $-\frac{1}{6} \;\left(F(x) = \frac{\sin^6(x)}{6}\right)$

(f) $\int_{2}^{5} e^x x\, dx$

Sol: $-e^2 + 4e^5 \;\left(F(x) = (x-1)\,e^x\right)$

(g) $\int_{0}^{5} \begin{cases} x+1 & \text{for } x < 1 \\ 3-x & \text{for } x \le 3 \\ x-3 & \text{otherwise} \end{cases} dx$

Sol: $\frac{11}{2} \;\left(F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x & \text{for } x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 3x - 1 & \text{for } x \le 3 \\ \frac{x^2}{2} - 3x + 8 & \text{otherwise} \end{cases}\right)$

(h) $\int_{-5}^{5} |x|\, dx$

Sol: $25 \;\left(F(x) = \int |x|\, dx\right)$

(i) $\int_{0}^{\pi} |x-2|\, dx$

Sol: $-2\pi + 4 + \frac{\pi^2}{2} \;\left(F(x) = \int |x-2|\, dx\right)$

2. p43e06a33 - Calcula:

(a) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3$, el eje de abscisas y las rectas x=-1 y x=1

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $[-1, 0) \cup (0, 1] \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left|\int_{-1}^{0} x^3\, dx\right| = \frac{1}{4} \;\left(F(x) = \frac{x^4}{4}\right)$
$\left|\int_{0}^{1} x^3\, dx\right| = \frac{1}{4} \;\left(F(x) = \frac{x^4}{4}\right)$
Área total $= \frac{1}{2}$

(b) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=2

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $[0,2) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left|\int_{0}^{2} \left(4-x^2\right)\, dx\right| = \frac{16}{3}\ (F(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x)$
Área total $= \frac{16}{3}$

(c) El área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x2 + 12x$ y el eje OX

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left|\int_{-\infty}^{-2} \left(x^4-3x^3-4x^2+12x\right)\, dx\right| = \infty\ (F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2)$
$\left|\int_{-2}^{0} \left(x^4-3x^3-4x^2+12x\right)\, dx\right| = \frac{244}{15}\ (F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2)$
$\left|\int_{0}^{2} \left(x^4-3x^3-4x^2+12x\right)\, dx\right| = \frac{116}{15}\ (F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2)$
$\left|\int_{2}^{3} \left(x^4-3x^3-4x^2+12x\right)\, dx\right| = \frac{113}{60}\ (F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2)$
$\left|\int_{3}^{\infty} \left(x^4-3x^3-4x^2+12x\right)\, dx\right| = \infty\ (F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 6x^2)$
Área total $= \frac{1553}{60}$

(d) El área limitada por las gráficas de $f(x) = -x^2 - 4x + 3 \wedge g(x) = x^2 - x - 6$

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $(-\infty,-3) \cup \left(-3,\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2},\infty\right) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left|\int_{-\infty}^{-3} \left((-2)\,x^2-3x+9\right)\, dx\right| = \infty\ (F(x) = -\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x)$
$\left|\int_{-3}^{\frac{3}{2}} \left((-2)\,x^2-3x+9\right)\, dx\right| = \frac{243}{8}\ (F(x) = -\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x)$
$\left|\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \left((-2)\,x^2-3x+9\right)\, dx\right| = \infty\ (F(x) = -\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x)$
Área total $= \frac{243}{8}$

(e) El área del recinto limitado por la recta $y = 3x + 2$, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 3. Comprueba el resultado por métodos geométricos

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $[1,3] \rightarrow$
Integrales definidas:

$\left|\int_{1}^{3} (3x+2)\ dx\right| = 16\ (F(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x)$
Área total $= 16$

(f) El área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x + 1 \wedge g(x) = x^2 + 1$

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left|\int_{-\infty}^{0} \left(x - \left(x^2+1\right) + 1\right)\ dx\right| = \infty\ (F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})$
$\left|\int_{0}^{1} \left(x - \left(x^2+1\right) + 1\right)\ dx\right| = \frac{1}{6}\ (F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})$
$\left|\int_{1}^{\infty} \left(x - \left(x^2+1\right) + 1\right)\ dx\right| = \infty\ (F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})$
Área total $= \frac{1}{6}$

(g) El área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 5x - 9 \wedge g(x) = 3x^3 - 21x^2 + 47x - 33$

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 4) \cup (4, \infty) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left|\int_{-\infty}^{1} \left(5x - \left(3x^3 - 21x^2 + 47x - 33\right) - 9\right)\ dx\right| = \infty\ (F(x) = -\frac{3x^4}{4} + 7x^3 - 21x^2 + 24x)$
$\left|\int_{1}^{2} \left(5x - \left(3x^3 - 21x^2 + 47x - 33\right) - 9\right)\ dx\right| = \frac{5}{4}\ (F(x) = -\frac{3x^4}{4} + 7x^3 - 21x^2 + 24x)$
$\left|\int_{2}^{4} \left(5x - \left(3x^3 - 21x^2 + 47x - 33\right) - 9\right)\ dx\right| = 8\ (F(x) = -\frac{3x^4}{4} + 7x^3 - 21x^2 + 24x)$
$\left|\int_{4}^{\infty} \left(5x - \left(3x^3 - 21x^2 + 47x - 33\right) - 9\right)\ dx\right| = \infty\ (F(x) = -\frac{3x^4}{4} + 7x^3 - 21x^2 + 24x)$
Área total $= \frac{37}{4}$

(h) El área limitada por $f(x) = x^2 - 2x - 15$, el eje OX y las rectas x = -4 y x = 7.

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $[-4, -3) \cup (-3, 5) \cup (5, 7] \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left|\int_{-4}^{-3} \left(x^2 - 2x - 15\right)\ dx\right| = \frac{13}{3}\ (F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x)$
$\left|\int_{-3}^{5} \left(x^2 - 2x - 15\right)\ dx\right| = \frac{256}{3}\ (F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x)$
$\left|\int_{5}^{7} \left(x^2 - 2x - 15\right)\ dx\right| = \frac{56}{3}\ (F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x)$

Área total $= \frac{325}{3}$

(i) El área limitada por $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ y el eje horizontal entre las abscisas -5 y $\frac{3}{2}$

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $[-5, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 1{,}5] \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left| \int_{-5}^{-3} \left(x^3 + 2x^2 - 5x - 6\right)\, dx \right| = \frac{128}{3}\ (F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x)$
$\left| \int_{-3}^{-1} \left(x^3 + 2x^2 - 5x - 6\right)\, dx \right| = \frac{16}{3}\ (F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x)$
$\left| \int_{-1}^{1{,}5} \left(x^3 + 2x^2 - 5x - 6\right)\, dx \right| = 14{,}1927083333333\ (F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x)$
Área total $= 62{,}1927083333333$

(j) El área limitada por $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ y el eje OX

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $(-\infty, -4) \cup (-4, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left| \int_{-\infty}^{-4} \left(x^3 + x^2 - 10x + 8\right)\, dx \right| = \infty\ (F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 8x)$
$\left| \int_{-4}^{1} \left(x^3 + x^2 - 10x + 8\right)\, dx \right| = \frac{875}{12}\ (F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 8x)$
$\left| \int_{1}^{2} \left(x^3 + x^2 - 10x + 8\right)\, dx \right| = \frac{11}{12}\ (F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 8x)$
$\left| \int_{2}^{\infty} \left(x^3 + x^2 - 10x + 8\right)\, dx \right| = \infty\ (F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 8x)$
Área total $= \frac{443}{6}$

(k) El área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 4x$ y el eje OX

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left| \int_{-\infty}^{0} \left(x^2 - 4x\right)\, dx \right| = \infty\ (F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2)$
$\left| \int_{0}^{4} \left(x^2 - 4x\right)\, dx \right| = \frac{32}{3}\ (F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2)$
$\left| \int_{4}^{\infty} \left(x^2 - 4x\right)\, dx \right| = \infty\ (F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2)$
Área total $= \frac{32}{3}$

(l) El área del recinto limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje OX

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $(-\infty, 0) \cup (0,4) \cup (4,\infty) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left| \int\limits_{-\infty}^{0} \left(-x^2+4x\right)\,dx \right| = \infty \; (F(x) = -\frac{x^3}{3}+2x^2)$
$\left| \int\limits_{0}^{4} \left(-x^2+4x\right)\,dx \right| = \frac{32}{3} \; (F(x) = -\frac{x^3}{3}+2x^2)$
$\left| \int\limits_{4}^{\infty} \left(-x^2+4x\right)\,dx \right| = \infty \; (F(x) = -\frac{x^3}{3}+2x^2)$
Área total $= \frac{32}{3}$

(m) El área del recinto limitado por la recta $y=-2x$ y la parábola $y=-\frac{1}{2}x^2$

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $(-\infty, 0) \cup (0,4) \cup (4,\infty) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left| \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{2}+(-2)\,x\right)\,dx \right| = \infty \; (F(x) = \frac{x^3}{6}-x^2)$
$\left| \int\limits_{0}^{4} \left(\frac{x^2}{2}+(-2)\,x\right)\,dx \right| = \frac{16}{3} \; (F(x) = \frac{x^3}{6}-x^2)$
$\left| \int\limits_{4}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}+(-2)\,x\right)\,dx \right| = \infty \; (F(x) = \frac{x^3}{6}-x^2)$
Área total $= \frac{16}{3}$

(n) El área de la región limitada por la curva $y=x^3-8x^2+7x$, el eje OX y las rectas x = 2 y x = 7

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $[2,7) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left| \int\limits_{2}^{7} \left(x^3-8x^2+7x\right)\,dx \right| = \frac{1675}{12} \; (F(x) = \frac{x^4}{4}-\frac{8x^3}{3}+\frac{7x^2}{2})$
Área total $= \frac{1675}{12}$

(ñ) El área de la región limitada por $f(x)=-e^x$ el eje de abscisas y las rectas x = -1 y x = 2

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $[-1,2] \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left| \int\limits_{-1}^{2} \left(-e^x\right)\,dx \right| = -\frac{1}{e}+e^2 \; (F(x) = -e^x)$
Área total $= -\frac{1}{e}+e^2$

(o) El área del recintor limitado por $f(x) = -ln\ x$ el eje de abscisas y las rectas $x=e$ y $x=e^2$

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $\left[e, e^2\right] \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left|\int_{e}^{e^2} (-\log(x))\ dx\right| = e^2\ (F(x) = -x\log(x) + x)$
Área total $= e^2$

(p) El área de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y^2 = x$

Sol: Intervalos donde calcular la integral definida: $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow$
Integrales definidas:
$\left|\int_{-\infty}^{0} \left(-\sqrt{x} + x^2\right)\ dx\right| = \infty\ (F(x) = -\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^3}{3})$
$\left|\int_{0}^{1} \left(-\sqrt{x} + x^2\right)\ dx\right| = \frac{1}{3}\ (F(x) = -\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^3}{3})$
$\left|\int_{1}^{\infty} \left(-\sqrt{x} + x^2\right)\ dx\right| = \infty\ (F(x) = -\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^3}{3})$
Área total $= \frac{1}{3}$