

ANÁLISIS

Junio 94.

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ a + 2x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) [1 punto] Calcular los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea continua en \mathbb{R}
b) [1 punto] ¿Es derivable la función obtenida en $x = 0$? ¿En $x = 1$? Razona la respuesta.

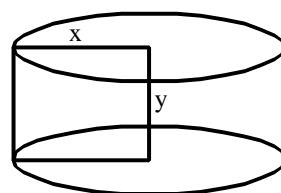
2. Calcular: a) [1,25 puntos] $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^3}$
b) [1,25 puntos] $\int \frac{dx}{x^2-1}$

SOLUCIÓN.

1. a) $a = 1$, $b = 3$. b) Sí, no.
2. a) $-\frac{1}{2(1+\ln x)^2} + C$ b) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

Junio 94.

1. a) [1 punto] Encontrar las asíntotas de la curva $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$
b) [1 punto] ¿Cuántas asíntotas oblicuas y cuántas asíntotas verticales puede tener una función racional cualquiera?. Razónalo.
2. [2,5 puntos] Una cartulina rectangular de perímetro 36 cm y dimensiones x , y gira en torno a un lado fijo de longitud y , generando un cilindro C . ¿Para qué valores de x , y tiene C un volumen máximo?

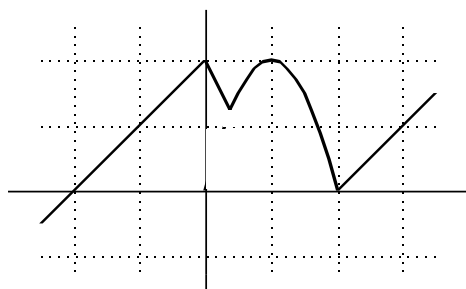


SOLUCIÓN.

1. a) Vertical: $x = 2$; Oblicua: $y = \frac{1}{2}x + 1$ b) Oblicuas: sólo una; verticales: varias.
2. $x = 12$ cm, $y = 6$ cm.

Septiembre 94.

1. Responda **razonadamente** a las siguientes preguntas relativas a la función cuya gráfica se dibuja en la siguiente figura (La región curva es parte de la parábola $-2y^2 + 4y = 0$)



a) [1,5 puntos] Derivabilidad de la función en los puntos $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Calcular la derivada en cada uno de los puntos citados, si existe.

b) [0,5 puntos] Puntos de discontinuidad en el intervalo $[-1, 3]$. Tipo de discontinuidad.

2. [2,5 puntos] Calcular el área de la región del plano limitada por el eje x y la curva $y = 2 \sin x$, entre los valores de x : $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

SOLUCIÓN.

1. a) $f'(-1) = 1$; $f'(1) = 0$; $\nexists f'(2)$ b) Discontinuidad inevitable (salto finito) en $x = \frac{1}{2}$
2. $8u^2$

Septiembre 94.

1. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, cumpliendo que $f(x) > 0$ en todos los puntos x del intervalo $[a, b]$.

a) [1,5 puntos] Prueba que $F(y) = \int_a^y f(x)dx$ es una función creciente definida en el intervalo $[a, b]$

b) [0,5 puntos] Interpreta geoméricamente el resultado.

2. [2,5 puntos] Dado un segmento AC de longitud a , dividirlo en dos partes AB y BC de modo que construyendo un cuadrado Q de base AB y un triángulo equilátero T de lado BC , la suma de las áreas de Q y T sea mínima.

SOLUCIÓN.

1. Teorema fundamental del cálculo.

2. $AB = \frac{4\sqrt{3}-3}{13}a$ $BC = \frac{4(4-\sqrt{3})}{13}a$

Junio 95.

1. [1,5 puntos] Explica razonadamente la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. ¿En qué puntos de la curva $2x^3 + 3x^2 - 2$ la recta tangente es paralela al eje OX ?

2. [2,5 puntos] La suma de todas las aristas (incluidas las de la tapa) de una pirámide recta con base cuadrada es 12. Calcular sus dimensiones para que el área lateral sea máxima.

SOLUCIÓN.

1. En $x = 0$ y en $x = -1$

2. Arista base: $3 - \sqrt{3}$; arista lateral: $\sqrt{3}$

Junio 95.

1. [2 puntos] Hallar dos números naturales que sumen 12 y tal que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo.
2. [2,5 puntos] Hallar el área del triángulo curvilíneo limitado por la curva $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1} + 1$, el eje OY y el eje OX.

SOLUCIÓN.

1. 8 y 4

$$2. \frac{3}{2} \ln \frac{3(\sqrt{13}-3)}{2} + \frac{\sqrt{13}-3}{2} u^2$$

Septiembre 95.

1. [1,5 puntos] La función $f(x) = 2x^3 + px^2 - q$ tiene un valor mínimo relativo 3 para $x = 1$. Calcular las constantes p y q .
2. [2,5 puntos] Hallar el área de la región limitada por la curva $x^3 - 5x^2 + 6x$ y el eje OX.

SOLUCIÓN.

1. $p = -3$, $q = -4$

$$2. \frac{37}{12} u^2$$

Septiembre 95.

1. [2 puntos] Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{x^2}{8-x}$. ¿Cómo se explica que el mínimo sea mayor que el máximo?
2. [2,5 puntos] La suma de todas las aristas (incluidas las de la tapa y la base) de un prisma recto con base un triángulo equilátero es 16. Calcular sus dimensiones para que el área lateral sea máxima.

SOLUCIÓN.

1. Mínimo: (0,0), máximo: (16,-32). Porque en $x = 8$ hay una discontinuidad (as. vert.).

$$2. \frac{4}{3} u$$

Junio 96.

1. [1,5 puntos] Hallar el dominio de definición, máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$. [1,5 puntos] Encontrar las asíntotas y posibles simetrías de la curva que la representa.
2. [2,5 puntos] Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material; pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Hallar las dimensiones de este envase (longitud del lado de la base y altura) para que su precio sea el menor posible.

SOLUCIÓN.

1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; Máximo relativo en $x = 0$; Creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$.
Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$. Asíntota horizontal: $y = 0$. La curva es simétrica respecto al eje OY.
2. Arista de la base: 4 cm; arista lateral: 5 cm.

Junio 96.

1. [1 punto] Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$ hallar el valor de a para que tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando $x = 2$. [1,5 puntos] Encontrar, en este caso, todos los extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de inflexión
2. [2 puntos] Hallar el área comprendida entre las parábolas $y = x^2 - 2x + 3$ e $y = 2x^2 - 4x + 3$

SOLUCIÓN.

1. $a = -3$. $x = 0$ (máximo relativo), $x = 2$ (mínimo relativo), $x = 1$ (punto de inflexión).
Creciente: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, Decreciente: $(0, 2)$
2. $\frac{4}{3} u^2$

Septiembre 96.

1. [1,5 puntos] Hallar el punto P de la curva c de ecuación $y = \frac{1}{4}x^2$ más próximo al punto $Q = (1, 2)$.
[1 punto] ¿Qué ángulo forma la recta PQ con la tangente a c en P ?
2. [2 puntos] Hallar el área de la región del plano limitada por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta $y = 2x + 2$.

SOLUCIÓN.

1. $P(2, 1)$. 90° .
2. $\frac{4}{3} u^2$

Septiembre 96.

1. [0,5 puntos] Hallar a para que la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{a}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua para todo valor de x . [1 punto] Una vez hallado este valor de a , hallar la ecuación de la tangente a la curva que la representa en el punto de abscisa 2. [1 punto] ¿Existe derivada de esta función cuando x vale 1? (razonar la respuesta)
2. [2 puntos] Disponemos de 24 metros de material para hacer una valla con la que queremos delimitar un jardín de forma rectangular y con la mayor superficie posible. En uno de los lados del rectángulo tenemos que poner doble vallado. Encontrar las dimensiones de ese jardín, indicando la del lado doblemente vallado.

SOLUCIÓN.

1. $a = 2$. Ec. tangente: $2x + 9y - 10 = 0$. No.
2. Lado doble: 4 m, el otro lado: 6 m.

Junio 97.

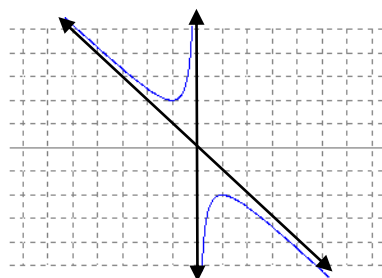
1. Dada la función $f(x) = -x - \frac{1}{x}$ se pide

- [0,5 puntos] Asíntotas y simetrías de la curva $y = f(x)$.
- [1,5 puntos] Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- [0,5 puntos] Dibujar la gráfica.

2. [2 puntos] Hallar el área limitada en el primer cuadrante por las gráficas de las funciones $y = \sin x$, $y = \cos x$ y el eje de ordenadas

SOLUCIÓN.

- Asíntota vertical: $x = 0$, asíntota oblicua: $y = -x$. Simetría respecto al origen de coordenadas.
 - Creciente: $(-1, 1)$, decreciente: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
 -



2. $\sqrt{2} - 1$ u²

Junio 97.

1. [2 puntos] Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

razonando las respuestas .

2. [2,5 puntos] Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual y mide 36 cm y la altura correspondiente mide 12 cm. Suponer que un lado del rectángulo está en la base del triángulo.

SOLUCIÓN.

- La función es continua $\forall x$. No es derivable en $x = 1$.
- Base: 18 cm. Altura: 6 cm

Septiembre 97.

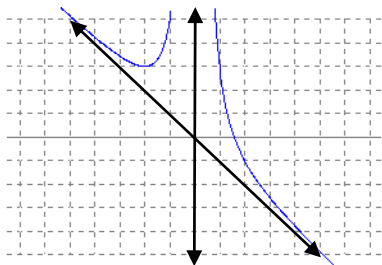
1. Dada la función $f(x) = -x + \frac{4}{x^2}$, se pide:

- [1 punto] Asíntotas de la curva $y = f(x)$.
- [1 punto] Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- [0,5 puntos] Dibujar la gráfica.

2. [2 puntos] La derivada segunda de una función f es $f''(x) = 6(x - 1)$. Hallar la función si su gráfica pasa por el punto $(2, 1)$ y en este punto es tangente a la recta $3x - y - 5 = 0$.

SOLUCIÓN.

1. a) Asíntota vertical: $x = 0$; asíntota oblicua: $y = -x$. b) Mínimo relativo en $x = -2$
c)



2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Septiembre 97.

1. [1,5 puntos] Hallar a y b para que la función f dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua y

derivable para todo x real. [1 punto] Encontrar los puntos en donde la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es paralela al eje OX.

2. [2 puntos] Un cono circular recto tiene una altura de 12 cm y radio de la base de 6 cm. Se inscribe un cono de vértice el centro de la base del cono dado y base paralela a la del cono dado. Hallar las dimensiones (altura y radio de la base) del cono de volumen máximo que puede inscribirse así.

SOLUCIÓN.

1. $a = 4$, $b = -2$. Puntos de tangente horizontal: $x = 0$, $x = 2$
2. Radio base = 4 cm. Altura = 4 cm.

Junio 98.

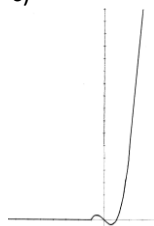
1. Dada la función f definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^3 + bx & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x - 16 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$ se pide:

- a) [0,5 puntos] Hallar a y b para que la función sea continua en todo x real.
b) [1 punto] Analizar su derivabilidad.
c) [1 punto] Representación gráfica.

2. [2,5 puntos] Un campo de atletismo de 400 metros de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.

SOLUCIÓN.

1. a) $a = 1$, $b = -1$. b) No derivable en $x = -1$ c)



2. Largo: 100 m., ancho: $\frac{200}{\pi}$ m.

Junio 98.

- [2,5 puntos] Un jardinero dispone de 120 metros de valla y desea delimitar un terreno rectangular y dividirlo en cinco lotes con vallas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que el área sea la mayor posible?
- [1 puntos] Dibujar el recinto limitado por la curva $y = x e^x$, el eje OX y la recta paralela al eje OY que pasa por el punto donde la curva tiene su mínimo relativo. [1,5 puntos] Hallar el área de dicho recinto.

SOLUCIÓN.

1. Largo: 30 m., ancho: 10 m.

2. $1 - 2/e \approx 0,26 u^2$

Septiembre 98.

- [1 punto] Comprobar que todas las funciones $f(x) = 3x^5 + 10x^3 + ax + b$ tienen un único punto de inflexión. [1,5 puntos] Hallar a y b para que la tangente a la gráfica de dicha función en el punto de inflexión sea la recta $y = x + 2$.
- [2,5 puntos] Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = |x|$ y $f(x) = x^2 - 2$

SOLUCIÓN.

1. La ecuación $f''(x) = 0$ tiene una única solución. $a = 1$, $b = 2$.

2. $\frac{20}{3} u^2$

Septiembre 98.

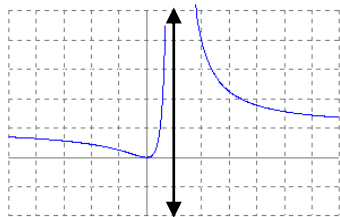
1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ se pide:

- [0,5 puntos] Asíntotas de la curva $y = f(x)$.
- [1,5 puntos] Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- [0,5 puntos] Dibujar la gráfica.

2. [2 puntos] Hallar los puntos de la curva $x^2 - y^2 = 1$ más próximos al punto de coordenadas $(4, 0)$.
[0,5 puntos] ¿Cómo se llama dicha curva?, dibujarla.

SOLUCIÓN.

- Asíntota vertical: $x = 1$, asíntota horizontal: $y = 1$
 - Mínimo: $(0,0)$. Creciente: $(0,1)$, decreciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
 -



2. $(2, -\sqrt{3})$, $(2, \sqrt{3})$. Hipérbola.

Junio 99.

1. Se define la función f del modo siguiente: $f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

[1 punto] Encontrar los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas. [1 punto] Estudiar su derivabilidad y [0,5 puntos] hallar los puntos de su gráfica en los que la tangente es paralela al eje OX. (NOTA: \ln significa logaritmo neperiano).

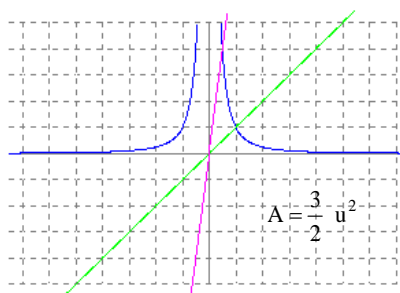
2. [1 punto] Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$ e $y = 8x$.

[1,5 puntos] Hallar el área de este recinto.

SOLUCIÓN.

1. $a = -3$, $b = 0$. Derivable $\forall x$. En $x = \frac{3}{4}$.

2.



Junio 99.

1. De la función $y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$ nos piden:

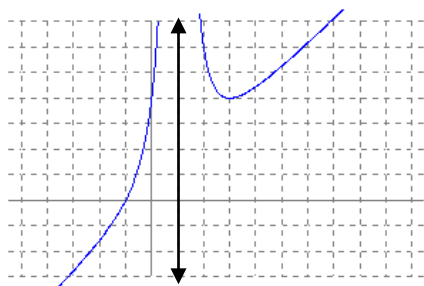
- i) [1 punto] Dominio de definición y asíntotas.
- ii) [1 punto] Máximos y mínimos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- iii) [0,5 puntos] Representación gráfica.

2. [2,5 puntos] El barco A abandona un puerto a las 0 horas y navega directamente hacia el norte a la velocidad constante de 6 nudos. El barco B se encuentra a las 0 horas a 40 millas marinas al este del puerto y navega en dirección a dicho puerto a la velocidad constante de 8 nudos. ¿Cuándo se hallarán estos barcos lo más próximos el uno del otro? (Dar el resultado en horas y minutos).

NOTA: un nudo es una milla marina por hora.

SOLUCIÓN.

- 1. i) Dom. = $\mathbb{R} - \{1\}$. Asíntota vertical: $x = 1$, asíntota oblicua: $y = x$
- ii) Mínimo: $(3, 4)$. Creciente: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, decreciente: $(1, 3)$
- iii)



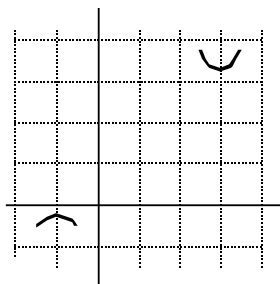
2. A las 3 horas y 12 minutos.

Septiembre 99.

1. Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$, se pide:
- [0,5 puntos] Hallar su dominio de definición.
 - [1,5 puntos] Hallar el punto o puntos en los que la gráfica de la curva $y = f(x)$ tiene tangente horizontal.
 - [0,5 puntos] Dibujar esta curva en un pequeño entorno de cada uno de estos puntos.
2. [2,5 puntos] Hallar el valor de m (que supondremos positivo) para que el área delimitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ valga 36 (unidades de área)

SOLUCIÓN.

1. i) Dominio: $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
 ii) En $x = -1$: $(-1, -0,18)$ (máximo) y en $x = 3$: $(3, 3,35)$ (mínimo)
 iii)



2. $m = 6$

Septiembre 99.

1. Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$, se pide:
- [0,5 puntos] Hallar su dominio de definición.
 - [1 punto] Hallar, si los tiene, sus extremos relativos.
 - [1 punto] Hallar, si las tiene, las asíntotas horizontales de la curva $y = f(x)$.
2. [1,5 puntos] Hallar el punto P de la curva $y = \sqrt{x}$ más próximo al punto $Q = \left(\frac{19}{2}, 0\right)$.
 [1 punto] ¿Qué ángulo forman la recta que une P y Q y la tangente a la curva en el punto P?

SOLUCIÓN.

1. i) Dominio: $\mathbb{R} - (-2, 2)$. ii) No tiene extremos relativos. iii) Asíntota horizontal: $y = -2$ (cuando $x \rightarrow +\infty$)
 2. P (9, 3). 90° .

Junio 00.

1. [2,5 puntos] Hallar los valores de las constantes a, b y c para que las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{y} \quad g(x) = x^3 + c$$

pasen por el punto (1, 2) y en este punto tengan la misma tangente.

2. [2,5 puntos] Un triángulo isósceles tiene 10 cm de base (que es el lado desigual) y 20 cm de altura. Se inscribe en este triángulo un rectángulo uno de cuyos lados se apoya en la base del triángulo. Hallar las dimensiones del rectángulo así construido y que tenga la mayor área posible.

SOLUCIÓN.

1. $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.
2. Base: 2,5 cm. , altura: 10 cm.

Junio 00.

1. Se considera la función: $f(x) = \frac{|x-1|}{x}$

- 1) [1 punto] Estudiar su continuidad y derivabilidad cuando $x = 1$.
- 2) [1 punto] ¿Alcanza para dicho valor de x un máximo o mínimo relativo? Razonar la respuesta.
- 3) [0,5 puntos] Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, se pregunta si el extremo en cuestión es absoluto.

2. [2,5 puntos] Haciendo el cambio de variable $u = e^x$ calcular $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$.

SOLUCIÓN.

1. 1) Es continua y no derivable en $x = 1$
 2) En $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.
 3) No puede ser absoluto pues en $x = 0$ la función tiene una asíntota vertical (la función crece indefinidamente cuando $x \rightarrow 0^+$ y decrece indefinidamente cuando $x \rightarrow 0^-$).

2. $\ln \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$

Septiembre 00.

1. [2,5 puntos] De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, hallar las dimensiones (lado de la base y altura) del que tiene volumen máximo.

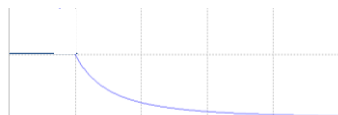
2. Tenemos la función f definida para todo número real no negativo y dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

[0,5 puntos] Se pide su representación gráfica, [1,5 puntos] hallar $\int_0^3 f(x) dx$ e [0,5 puntos] interpretar geoméricamente el resultado.

SOLUCIÓN.

1. Base: 10 cm. , altura: 5 cm.

2.



$\int_0^3 f(x) dx = \frac{5}{3}$ Área del recinto limitado por la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

Septiembre 00.

1. [1,5 puntos] Hallar a , b y c para que la función f definida en todo número real y dada por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 2 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

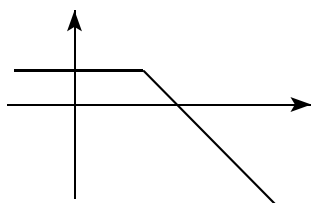
sea continua y derivable en todo x real y además alcance un extremo relativo para $x = 3$.

- [1 punto] Representar gráficamente la función f' , analizando su continuidad y derivabilidad .

2. [2,5 puntos] Calcular $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} dx$

SOLUCIÓN.

1. $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = -3$



Continua $\forall x$. No derivable en $x = 2$

2. $x + \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$

Junio 01.

1. [1,5 puntos] Hallar los valores de los coeficientes b , c y d para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ corte al eje OY en el punto $(0, -1)$, pase por el punto $(2, 3)$ y en este punto tenga tangente paralela al eje OX. [1 punto] Una vez hallados esos valores hallar los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función.

2. [2,5 puntos] Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) y $(0, b)$, de modo que el punto (a, b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación $y = \frac{1}{x^2} + 4$. De todos estos rectángulos hallar razonadamente el de área mínima.

SOLUCIÓN.

1. $b = -5$, $c = 8$, $d = -1$. Máximo relativo: $\left(\frac{4}{3}, \frac{85}{27}\right)$, mínimo relativo: $(2, 3)$.

Creciente: $(-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (2, +\infty)$, decreciente: $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$

2. $a = \frac{1}{2}$, $b = 8$

Junio 01.

1. [2,5 puntos] Hallar el punto de la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ en el que la tangente a la misma tiene pendiente mínima. Escribir la ecuación de dicha tangente.
2. [2,5 puntos] Hallar todas las funciones f cuya derivada es $f'(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$ indicando el dominio de definición de éstas.

SOLUCIÓN.

1. $P(1, 0)$. $y = 3x - 3$

2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + C$ Dominio: $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

Septiembre 01.

1. Sea f la función definida para todo número real x de modo que para los valores de x pertenecientes al intervalo cerrado $[-1, 1]$ se tiene $f(x) = (x+1)(x-1)^2$ y para los valores de x no pertenecientes a dicho intervalo se tiene $f(x) = 0$. Se pide:
 - a) [1,5 puntos] Estudiar su continuidad y derivabilidad.
 - b) [1 punto] Hallar razonadamente su valor máximo, indicando el valor o valores de x en donde se alcanza.
2. [2,5 puntos] Hallar la función f definida en todo número real que verifica las dos condiciones siguientes:
 - a) $f'(x) = x^2 e^x$
 - b) Su gráfica pasa por el punto $(0, 2)$.

SOLUCIÓN.

1. a) $f(x)$ es continua $\forall x$. No es derivable en $x = -1$.

b) El máximo se alcanza en $x = -\frac{1}{3}$

2. $f(x) = e^x (x^2 - 2x + 2)$

Septiembre 01.

1. [2,5 puntos] Un pequeño islote dista 1 km de una costa rectilínea. Queremos instalar en dicho islote una señal luminosa que se ha de alimentar con un tendido eléctrico. La fuente de energía está situada en la costa en un punto distante 1 km del punto de la costa más próximo al islote. El coste del tendido submarino por unidad de longitud es $\frac{5}{3}$ del tendido en tierra. ¿A qué distancia de la fuente de energía debe empezar el tendido submarino para conseguir un coste mínimo?.
2. [2,5 puntos] Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = 2 - x^4$ e $y = x^2$

SOLUCIÓN.

1. 250 m.

2. $\frac{44}{15} u^2$

Junio 02.

1. Se sabe que la función $f(x) = x^3 + ax + b$ corta a su función derivada en $x = 1$ y que, además, en dicho punto f tiene un extremo.

- [1 punto] Determina los valores de a y b .
- [0,5 puntos] Determina la naturaleza del extremo que f tiene en $x = 1$.
- [1 punto] ¿Tiene f algún otro extremo?

2. Sean las funciones $f(x) = \log x - b$, $g(x) = a\sqrt{x} + b$. (Nota: el logaritmo es neperiano)

- [1 punto] Determina a y b para que ambas funciones sean tangentes entre sí al pasar por $x = 1$.
- [1 punto] Determina en qué puntos se anula cada una de estas funciones.
- [0,5 puntos] Determina cuál es el dominio de la función producto $h(x) = f(x)g(x)$.

SOLUCIÓN.

- $a = -3$, $b = 2$
 - Es un mínimo relativo.
 - Tiene un máximo relativo en $x = -1$.
- $a = 2$, $b = -1$
 - $f(x)$ se anula en $x = \frac{1}{e}$. $g(x)$ se anula en $x = \frac{1}{4}$.
 - $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}^+$.

Junio 02.

1. Sea la integral $\int e^{2x} \operatorname{sene}^x dx$

- [1,5 puntos] Intégrala mediante el cambio $t = e^x$.
- [1 punto] Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

2. Sea $f(x) = x|x-1|^2$.

- [2 puntos] Halla los extremos y puntos de inflexión de la función f .
- [0,5 puntos] Calcula el límite de f en $+\infty$ y $-\infty$.

SOLUCIÓN.

- $\operatorname{sen} e^x - e^x \cdot \cos e^x + C$
 - $C = \cos 1 - \operatorname{sen} 1 \approx -0,3$
- $(1, 0) \rightarrow$ mínimo relativo, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right) \rightarrow$ máximo relativo, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right) \rightarrow$ punto de inflexión
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Septiembre 02.

1. Sea la función $f(x) = x \cos x$.

- [1 punto] ¿Tiene límite en $+\infty$? (justifica tu respuesta).
- [1,5 puntos] Calcula la integral de f entre $x = 0$ y el primer cero positivo que tiene la función.
Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula.

2. [2,5 puntos] En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.

SOLUCIÓN.

- No, pues la función $y = \cos x$ oscila entre -1 y 1 .
 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1$
- 25 €

Septiembre 02.

1. Sea la función f definida para todo número real x en la forma $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ \sin \beta x + \cos \beta x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Se pide:

a) [1,3 puntos] Determinar el valor de β para que f sea derivable en $x = 0$.

b) [1,2 puntos] Calcular la integral de f sobre el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

Nota: Se entiende que la función f cuya integral se pide en la parte b) es la determinada previamente en la parte a). No obstante, si alguien no ha sabido calcular el valor de β , debe integrar f dejando β como parámetro.

2. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x-1}$

a) [0,5 puntos] Determinar su dominio, es decir, el conjunto de puntos donde está definida.

b) [2 puntos] Estudiar sus máximos y mínimos (si los tiene) en el intervalo $(-1, 1)$, precisando si son absolutos o relativos respecto al intervalo indicado.

SOLUCIÓN.

1. a) $\beta = 3$ b) $\frac{2}{3}$

2. a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Tiene un mínimo relativo en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{9}{2}\right)$ que es el mínimo absoluto en el intervalo $(-1, 1)$

Junio 03.

1. [1,5 puntos] Determinar un polinomio de tercer grado sabiendo que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(-1,1)$ y que los dos son extremos, y [1 punto] analizar la naturaleza de ambos extremos, es decir si son máximos o mínimos.

2. Sean las parábolas $y = x^2 - 4x + 13$ e $y = 2x^2 - 8x + 16$.

a) [0,5 puntos] Representar sus gráficas.

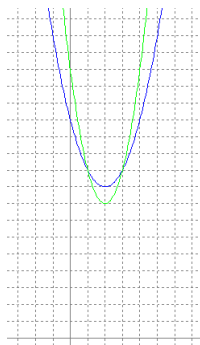
b) [0,5 puntos] Calcular los puntos donde se cortan entre sí ambas parábolas.

c) [1,5 puntos] Hallar la superficie encerrada entre las dos parábolas.

SOLUCIÓN.

1. $y = 2x^3 + 3x^2$

2. a)



b) $(1,10)$ y $(3,10)$

c) $\frac{4}{3}u^2$

Junio 03.

1. Sea la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$. [1,5 puntos] Determinar sus coeficientes sabiendo que
- a) pasa por el origen de coordenadas tangencialmente a la bisectriz del primer cuadrante y
 - b) tiene un extremo en $x = -0,5$
- [1 punto] Determinar la naturaleza del extremo anterior.
2. Sea la función $f(x) = x e^x$
- a) [0,5 puntos] Calcular la ecuación de su tangente en el origen de coordenadas.
 - b) [1 punto] Determinar los extremos de la función f .
 - c) [1 punto] Hallar el área encerrada entre la gráfica de esta curva, el eje de abscisas y la recta $x = 1$

SOLUCIÓN.

1. $f(x) = x^2 + x$. Se trata de un mínimo relativo.
2. a) $y = x$ b) Mínimo relativo en $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ c) $1 u^2$

Septiembre 03.

1. [0,5 puntos] Determinar el dominio, [0,5 puntos] ceros y [1,5 puntos] extremos de la función $f(x) = x \ln x$.
2. Sea la parábola $y = x^2 - 4x + 3$.
- a) [0,5 puntos] Determinar los puntos de corte de la parábola con los dos ejes coordenados.
 - b) [1 punto] Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de abscisas.
 - c) [1 punto] Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de ordenadas.

SOLUCIÓN.

1. Dom.: $(0, \infty)$; Ceros: $x = 1$; mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$
2. a) Con OX: $(1, 0)$, $(3, 0)$. Con OY: $(0, 3)$ b) $\frac{4}{3} u^2$ c) $\frac{4}{3} u^2$

Septiembre 03.

1. Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ y sea T la recta tangente a su gráfica en $x = \pi$. Determinar:
- a) [1,5 puntos] La ecuación de T .
 - b) [1 punto] El área encerrada entre T y los ejes coordenados.
2. Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
- a) [0,5 puntos] Definir su dominio.
 - b) [0,5 puntos] Calcular su límite en el infinito.
 - c) [0,5 puntos] Determinar sus extremos.
 - d) [1 punto] Calcular el área encerrada por la gráfica de f entre las abscisas 0 y 1.

SOLUCIÓN.

1. a) $y = -\pi x + \pi^2$ b) $\frac{\pi^3}{2}$

2. a) $\text{Dom} = \mathbb{R}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ c) Mínimo en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; máximo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ d) $\ln\sqrt{2}$

Junio 04.

1. [2,5 puntos] Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado.

¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro?

2. [2,5 puntos] Calcular el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$

SOLUCIÓN.

1. 15 cm el de 2 € y 10 cm el de 3 €

2. $S = \frac{2}{e} u^2$

Junio 04.

1. Sea la función $f(x) = x \sin x$. Determinar:

a) [1,5 puntos] El área encerrada entre su gráfica y el eje de abscisas entre los valores $x = 0$ y $x = \pi$

b) [1 punto] El área encerrada entre la tangente en $x = \pi$ y los dos ejes coordenados.

2. Sea la función $f(x) = e^x \sin x$. Determinar:

a) [1,5 puntos] El máximo de la función en el intervalo $(0, \pi)$.

b) [1 punto] Ecuación de las tangentes a la gráfica en los extremos del intervalo anterior.

SOLUCIÓN.

1. a) $S = \pi u^2$ b) $\frac{\pi^3}{2} u^2$

2. a) máximo: $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$ b) $y = x$ (en $x = 0$); $y = -e^\pi x + \pi e^\pi$ (en $x = \pi$)

Septiembre 04.

1. [1,5 puntos] Descomponer el número e en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima. [1 punto] Calcular dicha suma.

2. [2,5 puntos] Calcular el área encerrada entre las gráficas de la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$

SOLUCIÓN.

1. $\frac{e}{2}$ y $\frac{e}{2}$. $S = 2 - \ln 4$

2. $\frac{9}{2} u^2$

Septiembre 04.

1. Sea el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$.
 - a) [1,5 puntos] Determinar los coeficientes a , b y c sabiendo que tiene extremos en $x = -1$ y en $x = 1$ y que pasa por el origen de coordenadas.
 - b) [1 punto] Estudiar la naturaleza de ambos extremos.
2. Sea la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$.
 - a) [1 punto] Probar que es tangente a uno de los ejes coordenados, indicando a cual.
 - b) [1,5 puntos] Calcular el área encerrada entre la gráfica de la parábola y los dos ejes coordenados.

SOLUCIÓN.

1. a) $a = 0$, $b = -3$, $c = 0$ b) $x = -1$: máximo relativo, $x = 1$: mínimo relativo
2. a) Es tangente al eje de abscisas en el punto $(3, 0)$ b) $9 u^2$

Junio 05.

1. Sea la función $f(x) = \frac{4x + \sin 2x}{\sin 3x}$. [1 punto] Determinar el dominio de f e [1,5 puntos] indicar si f tiene límite finito en algún punto que no sea del dominio.
2. [2,5 puntos] Calcular los extremos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = e^x \sin x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

1. $D(f) = \mathbb{R} - \frac{k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2, \dots$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$
2. Máximo relativo: $x = \frac{3\pi}{4}$; mínimo relativo: $x = \frac{7\pi}{4}$; Puntos de inflexión: $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$

Junio 05.

1. [2,5 puntos] Queremos construir un marco rectangular que encierre una superficie de un metro cuadrado. Sabemos que el coste de cada centímetro en los lados horizontales es de 2 euros, mientras que en los lados verticales es de 8 euros. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible.
2. [2,5 puntos] Sea la función $f(x) = x \sin 2x$. Calcular la integral de esta función entre $x = 0$ y su primer cero positivo. (Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula).

SOLUCIÓN.

1. 2 metros de ancho y 0,5 metros de alto
2. $\frac{\pi}{4}$

Septiembre 05.

1. Sea la función $f(x) = e^x \sin x$. [1,5 puntos] Determinar sus extremos y [1 punto] sus puntos de inflexión en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

2. Sea Ω la región acotada encerrada entre las parábolas $f(x) = x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - x + 6$.
- a) [1,5 puntos] Hallar la superficie de Ω .
- b) [1 punto] Razonar (*no valen comprobaciones con la calculadora*) cuál de las dos parábolas está en la parte inferior de la región Ω

SOLUCIÓN.

1. Mínimo: $x = -\frac{\pi}{4}$; máximo: $x = \frac{3\pi}{4}$; Puntos de inflexión: $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$
2. a) $\frac{1}{6} u^2$ b) argumentar a partir del signo de la integral definida.

Septiembre 05.

1. [2,5 puntos] Calcular razonadamente el límite de la sucesión $\frac{(n-2)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$
2. [2,5 puntos] Determinar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 \sin x$ y el eje de abscisas entre el origen y el primer punto positivo donde f se anula.

SOLUCIÓN.

1. $\frac{1}{6}$ 2. $(\pi^2 - 4) u^2$

Junio 06.

1. [2,5 puntos] Calcular los valores de a y b para que la función $f(x) = \frac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x=2$ y como asíntota horizontal la recta $y=3$. Razonar si para $a=2$ y $b=3$ la función $f(x)$ tiene algún mínimo relativo.
2. a) [1,5 puntos] Utilizando el cambio de variable $t = e^x$, calcular $\int e^{x+e^x} dx$
- b) [1 punto] Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{7x^2}$

SOLUCIÓN.

1. $a=2$, $b=3$. $f(x)$ no tiene extremos relativos.
2. a) $e^{e^x} + C$ b) ∞

Junio 06.

1. La función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$ es continua en $[0, \infty)$.
- a) [0,75 puntos] Hallar el valor de a que hace que esta afirmación es cierta.
- b) [1,75 puntos] Calcular $\int_0^{10} f(x) dx$

2. [2,5 puntos] Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.

SOLUCIÓN.

1. a) $a=8$ b) $\frac{206}{3} + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$ 2. 2 y 6.

Septiembre 06.

1. Dadas las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$, determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones entre las rectas:

a) [1,25 puntos] $x=0$ y $x=1$.

b) [1,25 puntos] $x=1$ y $x=2$.

2. a) [1,25 puntos] Comprobar si $f(x)=\frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x}$ tiene un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{4}$

b) [1,25 puntos] Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$

SOLUCIÓN.

1. a) $\frac{1}{12} u^2$ b) $\frac{17}{12} u^2$ 2. Comprobar que $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ y $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$

Septiembre 06.

1. a) [1,25 puntos] La función $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida para $x=0$. Definir $f(0)$ de modo que $f(x)$ sea una función continua en ese punto.

b) [1,25 puntos] Utilizando el cambio de variable $t=\ln x$, calcular $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$

2. [2,5 puntos] Sea $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función polinómica de grado menor o igual a tres que tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(2, 2)$. Calcular la expresión de dicha función.

SOLUCIÓN.

1. a) $f(0)=\frac{1}{2}$ b) $I=\frac{1}{2}\ln^2(\ln x)+C$ 2. $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2$

Junio 07.

1. Calcular: a) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$ b) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x$

2. [2,5 puntos] Sea $F(x)=\int_1^{x^2} \ln t \, dt$, con $x \geq 1$. Calcular $F'(e)$. ¿Es $F''(x)$ una función constante? Justificar la respuesta.

SOLUCIÓN.

1. a) $\frac{3}{2}$ b) 1
2. • $F'(e) = 4e$ • $F''(x)$ no es constante

Junio 07.

1. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$.
a) [0,5 puntos] Calcular su dominio.
b) [1 punto] Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) [1 punto] Analizar sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y determinar las que existan.
2. [2,5 puntos] Calcular $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$.

SOLUCIÓN.

1. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ b) Creciente: $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ Decreciente: $(-2, 0)$
c) • Asíntota vertical: $x = -1$ • Asíntota oblicua: $y = x + 3$
2. $2 - \frac{2}{e} \approx 1,26$

Septiembre 07.

1. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos(x) & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$
a) [1 punto] Estudiar los valores de a y b para los que la función $f(x)$ es continua para todo valor de x .
b) [0,5 puntos] Determinar la derivada de $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.
c) [1 punto] Calcular $\int_0^{2\pi} f(x) dx$
2. [2,5 puntos] Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfice:
i) $p(0) = 1$
ii) Tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un punto de inflexión en $x = 0$
iii) $\int_0^1 p(x) dx = \frac{9}{4}$

SOLUCIÓN.

1. a) $a = 1$, $b = -2$ b) $f'(x) = 2x - 2 \sin(x)$ c) $\frac{8\pi^3}{3} - 2\pi$
2. $p(x) = -x^3 + 3x + 1$

Septiembre 07.

1. [2,5 puntos] Obtener las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que:
i) El perímetro del primero de ellos es el triple del perímetro del tercero.
ii) Se necesitan exactamente 1664 metros de valla para vallar los tres campos.
iii) La suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

2. a) [1,5 puntos] Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$ calcular $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(4 - \ln x)}$

b) [1 punto] Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x) \sin(5x)}{(x - x^2)^2}$

SOLUCIÓN.

1. 192 m, 160 m y 64 m

2. a) $\ln(3/2)$ b) 20

Junio 08.

Opción A.

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

- (a) (0,75 puntos) Calcular el dominio de $f(x)$.
 (b) (0,75 puntos) Estudiar si $f(x)$ es una función par.
 (c) (1 punto) Calcular las asíntotas de $f(x)$.

2. (a) (1,25 puntos) Dada $F(x) = \int_0^x t \sin(t) dt$, estudiar si $x = \pi$ es una raíz de $F'(x)$.

(b) (1,25 puntos) Calcular el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + n - 2} \right)^{\frac{\alpha n^3 + 1}{n^2 - 1}} = 1$

Opción B.

1. Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^3 \quad x \rightarrow |x| \quad x \rightarrow \sin(x)$$

- (a) (0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de inflexión de $f(x)$
 (b) (0,75 puntos) Calcular la derivada de $(f \circ h)(x)$.
 (c) (1 punto) Obtener el área del recinto limitado por f y g entre $x=0$ y $x=1$.

2. (2,5 puntos) Encontrar el valor de k para el cual la función $f(x) = \begin{cases} 6 - \frac{x}{2}, & x < 2 \\ x^2 + kx, & x \geq 2 \end{cases}$ es continua. Estudiar

si su derivada es una función continua.

SOLUCIÓN.

Opción A.

1. (a) $D(f) = (-1, 0) \cup (0, 1)$ (b) Sí, es par. (c) $x = -1$ (por la dcha.) y $x = 1$ (por la izda.)

2. (a) Sí. (b) $\alpha = 0$

Opción B.

1. (a) Creciente $\forall x$. Punto de inflexión: $(0, 0)$ (b) $(f \circ h)'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$ (c) $S = \frac{1}{4} u^2$

2. $k = \frac{1}{2}$. $f'(x)$ es discontinua en $x = 2$.

Septiembre 08.

Opción A.

1. Sea $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

- (a) (1 punto) Calcular el máximo y el mínimo absolutos de $f(x)$.
 (b) (0,5 puntos) Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al eje OY.
 (c) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

2. (a) (1,5 puntos) Razonar si para $F(x) = \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4}$ se satisface que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} F'(x)$

(b) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{4x^2-3x+2} \right)$

Opción B.

1. Sea $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

- (a) (1,75 puntos) Estudiar su dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.
 (b) (0,75 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 f(x+1) - f(x)]$

2. (2,5 puntos) Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, sólo puede optar por alarmas de dos tipos, A ó B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas del tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. Estudiar cuántas alarmas de cada tipo deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad.

SOLUCIÓN.

Opción A.

1. (a) Máximo absoluto: $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ Mínimo absoluto: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

(b) No es simétrica respecto a OY (c) $\ln \frac{e\sqrt{5}}{5}$

2. (a) Sí se verifica. (b) $\frac{3}{4}$

Opción B.

1. (a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ Creciente $\forall x \in D(f)$ $x = -1$ asíntota vertical, $y = 2$ asíntota horizontal

(b) ∞

2. 3 alarmas tipo A y 6 alarmas tipo B.

Junio 09.

Opción A.

1. a) [1,25 puntos] Calcular los siguientes límites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12x^2 \sqrt{x^2 - 7x}}{\sqrt{9x^6 + 5x}} \right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$.

b) [1,25 puntos] Obtener $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x}} x \cos(x^2) dx$

2. Sea $f(x) = 2x + \sin(2x)$

- a) [0,75 puntos] Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.
b) [1,25 puntos] Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de extremos relativos.

c) [0,5 puntos] ¿Son los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{R}$, puntos de inflexión de $f(x)$?

Opción B.

1. Sea $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$

- a) [0,5 puntos] Determinar su dominio.
b) [0,75 puntos] Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al origen de coordenadas.
c) [1,25 puntos] Obtener el área encerrada por $f(x)$ y el eje OX entre $x = \frac{1}{4}$ y $x = \frac{3}{4}$.

2. a) [1,25 puntos] Queremos vallar un campo rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 euros/m y la de los otros tres lados, 0,625 euros/m. Hallar el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 euros.

b) [1,25 puntos] Calcular para qué valores de a y b la función
$$\begin{cases} x+1 & x \leq -1 \\ a+x^2 & -1 < x < 1 \\ (b-x)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$
 es continua.

SOLUCIÓN.

Opción A.

1. a) 4 ; e b) $\cos \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$

2. a) No tiene asíntotas b) Es creciente $\forall x$. No tiene extremos relativos. c) Sí.

Opción B.

1. a) $D = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ b) No lo es. c) $\ln 9 \approx 2,197$ u²

2. a) 14400 m² b) $a = -1$, $b = 1$

Septiembre 09.

Opción A.

1. Sean $f(x) = \cos(3x-1)$ y $h(x) = \sin^2(x)$.

- a) [0,5 puntos] Calcular $g(x) = (h \circ f)(x)$.
b) [0,5 puntos] Comprobar si $g(x)$ es una función par.
c) [1,5 puntos] Obtener $g'(x)$ y estudiar si es cierto que $g'(1/3) = 0$.

2. Sea $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}}$

- a) [0,5 puntos] Calcular su dominio.
b) [0,75 puntos] Encontrar los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX y estudiar si la función es creciente en el intervalo $(0, 1)$.

c) [0,5 puntos] Obtener $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2}$

d) [0,75 puntos] Hallar $\int_{-1}^1 f(x) dx$

Opción B.

1. a) [1,25 puntos] Calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x) dx$

b) [1,25 puntos] Sea $f(x) = e^{ax}$, con $a \in \mathbb{R}$. Calcular $f^{(n)}(x) - a^n f(x)$, siendo $f^{(n)}(x)$ la derivada n-ésima de $f(x)$.

2. a) [1,25 puntos] Sea $f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)^{1/x} & x < 0 \\ \frac{x^4 + 2x + a}{x + 1} & x \geq 0 \end{cases}$. Estudiar para qué valores del parámetro a esta

función es continua en $x = 0$.

b) [1,25 puntos] Entre los números cuya suma es 36, encontrar aquellos números positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

SOLUCIÓN.

Opción A.

1. a) $g(x) = \sin^2[\cos(3x - 1)]$

b) No es par

c) $g'(x) = -6 \cdot \sin[\cos(3x - 1)] \cdot \cos[\cos(3x - 1)] \cdot \sin(3x - 1)$ $g'(1/3) = 0$

2. a) $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

b) Corta en $(0, 0)$. Es creciente.

c) 1

d) 1

Opción B.

1. a) $\frac{2}{3}$ b) 0

2. a) $a = 1$ b) 18 y 18

Junio 10.

1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & -\infty < x \leq 0 \\ \sin(ax) & 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \pi \leq x < +\infty \end{cases}$

a) (1 punto) Calcular los valores de a para los cuales $f(x)$ es una función continua.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para cada uno de esos valores.

c) (0,5 puntos) Obtener $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

2. (2,5 puntos) Encontrar el polinomio de grado dos $p(x) = ax^2 + bx + c$ sabiendo que satisface: en $x = 0$ el polinomio vale 2, su primera derivada vale 4 para $x = 1$ y su segunda derivada vale 2 en $x = 0$. Estudiar si el polinomio obtenido es una función par. ¿Tiene en $x = 0$ un punto de inflexión?

SOLUCIÓN.

1. a) $a = \frac{1}{2} + 2k$ $k = 0, 1, 2, \dots$

b) Es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

c) $-\frac{2}{3}$

2. $a = 1, b = 2, c = 2$. No es par. No.

Junio 10.

1. Sea $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3}$

a) (0,5 puntos) Calcular el dominio de $f(x)$.

b) (1 punto) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (1 punto) Analizar las asíntotas de $f(x)$ y calcular las que existan.

2. a) (1,25 puntos) Hallar el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$.

b) (1,25 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \ln n}{\ln(7n^2)} \right)^{\ln n}$.

SOLUCIÓN.

1. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ b) La función es creciente $\forall x$. c) $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$

2. a) $S = 8 u^2$ b) $e^{-\ln \sqrt{7}}$

Septiembre 10.

1. a) (1 punto) Utilizar el cambio de variable $t^3 = 1 - x$ para calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{x}$

b) (1,5 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$ y obtener $\int_{-1/2}^{1/2} f(x) dx$.

2. Sea la función $f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$ con $x \in (0, 1)$.

a) (1,5 puntos) Calcular sus extremos relativos.

b) (1 punto) Estudiar su crecimiento y decrecimiento y razonar si posee algún punto de inflexión.

SOLUCIÓN.

1. a) $-\frac{1}{3}$ b) Discontinua en $x = 1$ (no evitable). $\frac{13}{12}$

2. a) Mínimo relativo en $x = \frac{1}{2}$ b) Decreciente en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Septiembre 10.

1. El número de socios de una ONG viene dado por la función $n(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$ donde x indica el número de años desde su fundación.

a) (0,5 puntos) Calcular el número de socios iniciales en el momento fundacional y en el quinto año.

b) (1 punto) ¿En qué año ha habido el menor número de socios? ¿Cuántos fueron?.

c) (1 punto) El cuarto año se produjo un cambio en la junta directiva, ¿influyó en el ascenso o descenso del número de socios?.

2. Sea $f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{1+x}}$ una función definida en $[-1, +\infty)$.

a) (1,5 puntos) ¿Cuánto debe valer $f(0)$ para asegurar que $f(x)$ es continua en su dominio? Calcular

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{1 + \sqrt{1+x}} dx.$$

b) (1 punto) Para $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{1 + \sqrt{1+t}} dt$ calcular $G'(x)$.

SOLUCIÓN.

1. a) 26 socios y 21 socios respectivamente.

b) El cuarto año.

c) En el ascenso.

2. a) $f(0) = -2$. -1.

b) $G'(x) = -1$

Junio 11.

1. a) (1,75 puntos) Utilizar el cambio de variable $t^6 = 1+x$ para calcular $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3}-\sqrt{x+1}} dx$
- b) (0,75 puntos) Para $f(x) = e^{-3x}$ calcular sus derivadas sucesivas y concluir cuál de las siguientes opciones es la correcta:
- i) $f^{(n)}(x) = 3^n e^{-3x}$ ii) $f^{(n)}(x) = (-3)^{(n+1)} e^{-3x}$ iii) $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$
2. Sea la función $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$
- a) (0,5 puntos) Calcular su dominio.
- b) (1 punto) Obtener sus asíntotas.
- c) (1 punto) Estudiar sus puntos de corte con los ejes y analizar si es función par.

SOLUCIÓN.

1. a) $\frac{6}{5}(x+1)^{5/6} + \frac{3}{2}(x+1)^{2/3} + 2(x+1)^{1/2} + 9(x+1)^{1/3} + 18(x+1)^{1/6} + 18 \ln \left| (x+1)^{1/6} - 1 \right| + C$
- b) $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$
2. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ b) Asíntota vertical: $x=2$, Asíntota oblicua: $y=x+2$
- c) Con OX: no tiene. Con OY: $(0, -1)$. La función no es par.

Junio 11.

1. a) (1,25 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \ln x & 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x < +\infty \end{cases}$. Si $f(2)=3$, obtener los valores de a y b que hacen que $f(x)$ sea continua.
- b) (1,25 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 - 9)$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} \log(x^2 - 9)$
2. Sea $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.
- a) (0,5 puntos) Determinar su dominio
- b) (1 punto) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento
- c) (1 punto) Analizar sus puntos de inflexión

SOLUCIÓN.

1. a) $a=1$, $b=-1$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 - 9) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \log(x^2 - 9) = -\infty$
2. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ b) Creciente: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, Decreciente: $(1, 3)$
- c) $(0, 0)$ es un punto de inflexión

Septiembre 11.

1. Para la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$
- a) (1 punto) Estudiar su continuidad.
- b) (0,75 puntos) Razonar si $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ es una función derivable.
- c) (0,75 puntos) Calcular $\int_2^3 f(x) dx$

2. (2,5 puntos) En un campo hay plantados 50 manzanos. En este momento cada manzano produce 800 manzanas. Está estudiado que por cada manzano que se añade al campo, los manzanos producen 10 manzanas menos cada uno. Determinar el número de manzanos que se deben añadir para maximizar la producción de manzanas de dicho campo.

SOLUCIÓN.

1. a) Continua excepto en $x=1$ donde tiene una discontinuidad no evitable con asíntota vertical.
b) No es derivable en $x=1$. c) $2 + \ln 8$
2. 15 manzanos

Septiembre 11.

1. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{4-x}$. Determinar:
a) (0,5 puntos) Su dominio de definición.
b) (0,5 puntos) Sus asíntotas.
c) (0,75 puntos) Máximos y mínimos.
d) (0,75 puntos) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
2. a) (1,5 puntos) Calcular: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-4}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$
b) (1 punto) Utilizar el cambio de variable $t^2 = 1+x^2$ para calcular $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

SOLUCIÓN.

1. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$ b) Asíntota vertical: $x=4$, Asíntota oblicua: $y=-x-4$
c) Mínimo: $(0,0)$. Máximo: $(8,-16)$
d) Creciente: $(0,4) \cup (4,8)$ Decreciente: $(-\infty,0) \cup (8,+\infty)$
2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = 1$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-4}\right)^x = e^8$; $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} - \sqrt{1+x^2} + K$

Junio 12.

1. (2,5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12} dx$
2. a) (0,75 puntos) Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.
b) (1 punto) Hallar el valor de k para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - \sin x} = 2$
c) (0,75 puntos) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y derivable en la recta real. Supongamos que $f(0) \neq 0$ y $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo número real x, y . Demostrar que $f(0)=1$; $f(x) \neq 0$; $f(x) > 0$ y $f'(x) = f'(0)f(x)$ para todo número real x .

SOLUCIÓN.

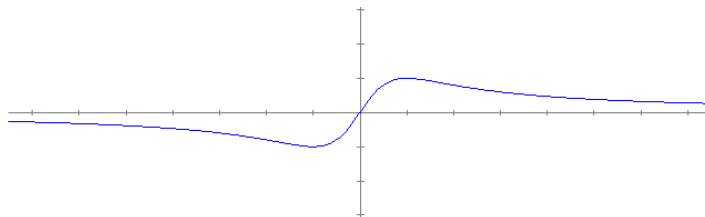
1. $\ln \left| \frac{x^2 - 4x + 6}{x + 2} \right| + \frac{7\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{2}} + C$
2. a) 4 y 8 b) $k = -2$ c) Demostraciones

Junio 12.

1. a) (1,5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\int \cos(\ln x) dx$
(Ayuda: realice un cambio de variable adecuado para esta integral)
- b) (1 punto) Calcule el límite siguiente $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^2}{x+3} \right) \ln \left(\frac{x+5}{x-1} \right) \right]$
2. Sea f la función de variable real definida mediante la expresión $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
- a) (0,5 puntos) Determine el dominio de continuidad, simetrías, corte con los ejes y asíntotas de la función.
- b) (1 punto) Calcule, si existen, los extremos relativos y absolutos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- c) (0,5 puntos) Calcule, si existen, los puntos de inflexión de f .
- d) (0,5 puntos) Dibuje la gráfica de f .

SOLUCIÓN.

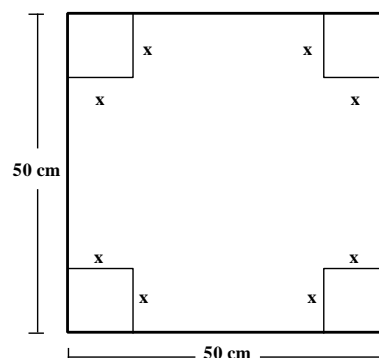
1. a) $\frac{1}{2}x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$ b) e^6
2. a) $D(f) = \mathbb{R}$, impar, $(0,0)$, $y = 0$ asíntota horizontal
- b) Creciente: $(-1,1)$. Decreciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Mínimo relativo: $(-1, -1)$ Máximo relativo: $(1, 1)$
- c) Puntos de inflexión en $(0,0)$, $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- d)



Septiembre 12.

1. Considere las funciones $f(x) = e^{x+1}$ y $g(x) = e^{-x+5}$.
- a) (0,5 puntos) Determine los posibles puntos de corte de esas dos funciones.
- b) (2 puntos) Calcule el área encerrada entre esas dos funciones y las rectas $x=1$ y $x=3$.

2. (2,5 puntos) Se dispone de una cartulina cuadrada como la del dibujo, cuyo lado mide 50 cm. En cada una de las esquinas se corta un cuadrado de lado x con el fin de poder doblar la cartulina y formar una caja, sin tapa. ¿Cuál debe ser el lado x del cuadrado a cortar para que el volumen de la caja sea máximo?



SOLUCIÓN.

1. a) $(2, e^3)$ b) $43,6 \text{ u}^2$ (aprox.) 2. $\frac{25}{3} \text{ cm}$

Septiembre 12.

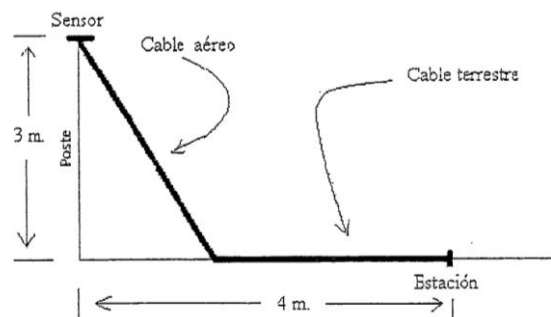
1. a) (1 punto) Calcule el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+6}{x+2} \right)^{3x}$
 b) (1,5 puntos) Calcule la integral $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \sin x \cos x \, dx$ usando el cambio de variable $\sin x = t$
2. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$
 a) (0,5 puntos) Determine el dominio de $f(x)$
 b) (0,5 puntos) Estudie si la función $f(x)$ es continua. Si no lo es, determine los puntos de discontinuidad.
 c) (1,5 puntos) Determine los posibles máximos y mínimos, así como las asíntotas de $f(x)$.

SOLUCIÓN.

1. a) e^{12} b) 1
 2. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$ b) Discontinua en $x = -2$ y en $x = 3$
 c) · Máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$ · Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 3$ Asíntota horizontal: $y = 0$

Junio 13.

1. (2,5 puntos) Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (véase figura). El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3000



euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?

2. a) (1,25 puntos) Determine la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

b) (1,25 puntos) Calcule: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{3-x} \right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

SOLUCIÓN.

1. Cable aéreo: 3,18 m. Cable terrestre: 2,94 m

2. a) $f(x) = \frac{2}{5} e^{3x} \left(x - \frac{1}{5} \right) + \frac{52}{25}$ b) $+\infty$

Junio 13.

1. a) (1,25 puntos) Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Determine el dominio y las asíntotas de $f(x)$, si existen.

b) (1,25 puntos) Determine el área del recinto encerrado por las funciones $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = 1$.

2. a) (1 punto) Determine qué valor debe tomar k para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5} \right) = 1$

b) (1,5 puntos) Calcule: $\int 2x [\ln(x)]^2 dx$

SOLUCIÓN.

1. a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$ Asíntota oblicua: $y = x$

b) $\frac{8\sqrt{2}}{3} u^2$

2. a) $k = -4$ b) $x^2 \left[\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right] + C$

Septiembre 13.

1. Sea la función $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4x + 3}$

a) (0,5 puntos) Determine su dominio de definición.

b) (1 punto) Encuentre las asíntotas que tenga esa función.

c) (1 punto) Considere ahora la función: $g(x) = \frac{(x+2)^2}{x+3}$

Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos, si existen.

2. a) (1,25 puntos) Calcule: $\int_2^3 \frac{1}{2x^2 - 4x + 2} dx$

b) (1,25 puntos) Determine el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\ln(x) + [\ln(x)]^2}{x[1 + \ln(x)]}$

SOLUCIÓN.

1. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, -1\}$ b) asíntotas verticales: $x = -3$; $x = -1$ asíntota horizontal: $y = 1$
 c) Creciente: $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$, Decreciente: $(-4, -3) \cup (-3, -2)$
 Máximo: $x = -4$. Mínimo: $x = -2$
2. a) $\frac{1}{4}$ b) 0

Septiembre 13.

1. a) Considere las funciones: $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3 - x$
 (0,5 puntos) Determine los puntos de corte de esas dos funciones.
 (1 punto) Determine el área encerrada entre esas dos funciones.
- b) (1 punto) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$h(x) = x^6 + 2$$

2. a) (1,25 puntos) Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule: $\int \frac{e^x}{1 - e^{-x}} dx$
- b) (1,25 puntos) Calcule: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\sqrt{x}}$

SOLUCIÓN.

1. a) $\cdot (-2, 5)$ y $(1, 2)$ $\cdot A = \frac{9}{2} u^2$ b) $x = 0$ mínimo relativo. No hay puntos de inflexión.
2. a) $e^x + \ln|e^x - 1| + K$ b) 1

Junio 14.

1. (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}$
- a) (1,5 puntos) Determine las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas, que tenga la función $f(x)$.
- b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. ¿Tiene la función $f(x)$ algún máximo o mínimo relativo?
2. (2,5 puntos)
- a) (1,25 puntos) Usando el cambio de variable $t = \ln(x)$, determine el valor de la integral

$$\int \frac{1 + 3\ln(x) + (\ln(x))^3}{x(1 - (\ln(x))^2)} dx$$

- b) (1,25 puntos) Determine el límite: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^2}$

SOLUCIÓN.

1. a) $y=1$ asíntota horizontal b) Creciente: $(-\infty, 0)$, Decreciente: $(0, +\infty)$, Máximo relativo: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

2. a) $-\frac{1}{2}\ln^2(x) - \frac{3}{2}\ln(1+\ln(x)) + \frac{5}{2}\ln(1-\ln(x)) + K$ b) $e^{\frac{1}{2}}$

Junio 14.

1. (2,5 puntos)

a) (1,5 puntos) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$g(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

b) (1 punto) Determine: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x} \right)$

2. (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Determine la integral $\int x^2 \sin(2x) dx$

b) (1,25 puntos) Determine el área máxima que puede tener un rectángulo cuya diagonal mide 8 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

SOLUCIÓN.

1. a) Mínimo relativo: $(0, 1)$. No tiene puntos de inflexión. b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

2. a) $-\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + K$ b) Cuadrado de lado $4\sqrt{2}$ m.

Septiembre 14.

1. (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{2x-6}$

a) (1,25 puntos) Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de esa función.

b) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de esa función.

2. (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) La derivada de una función $f(x)$ es: $(x-1)^3(x-3)$.

Determine la función $f(x)$ sabiendo que $f(0)=1$.

b) (1,25 puntos) Determine el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 2x + 2}{x^3 + 1} \right)^{3x^2 + x + 1}$

SOLUCIÓN.

1. a) • $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ • $x = 3$: asíntota vertical , $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$: asíntota oblicua
 b) • Creciente en $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Decreciente en $(0, 6) - \{3\}$.
 • $x = 0$: máximo relativo. $x = 6$: mínimo relativo.
 2. a) $f(x) = \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{2}(x-1)^4 + \frac{17}{10}$ b) e^6

Septiembre 14.

1. (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Considere la función:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x + a & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 3x + b & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b para que la función sea continua.

- b) (1,25 puntos) Supongamos ahora que $a=0$. Usando la definición de derivada, estudie la derivabilidad de $f(x)$ en $x=2$.

2. (2,5 puntos)

- a) (1,25 puntos) Dadas las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=-x^2+2$, determine el área encerrada entre ambas funciones.

b) (1,25 puntos) Calcule la integral: $\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-2x+1} dx$.

SOLUCIÓN.

1. a) $a=0$, $b=12$ b) No es derivable pues $f'(2^-)=4$, $f'(2^+)=2$
 2. a) $A=\frac{8}{3}u^2$ b) $5+\ln 8$

Junio 15.

- a) (1,5 puntos) Considere la función $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$. Determine los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) (1,5 puntos) Usando el cambio de variable $t=\cos x$, calcula $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$.

c) (2 puntos)

- 1) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^3+bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,2)$.
 2) (1 punto) Calcule el área encerrada por la curva $f(x)=2x^3-3x^2$ y la parte positiva del eje OX.

SOLUCIÓN.

- a) $(-1, -2e)$: mínimo relativo, $\left(3, \frac{6}{e^3}\right)$: máximo relativo. Puntos de inflexión en $x = 2 - \sqrt{5}$ y en $2 + \sqrt{5}$.
- b) $\cos x + \ln \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}} + C$ c) 1) $a = -4$, $b = \frac{3}{2}$ 2) $A = \frac{27}{32} u^2$

Junio 15.

- a) (2 puntos) Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.
- b) (1,5 puntos) Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule: $\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}} dx$
- c) (1,5 puntos) Calcule: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

SOLUCIÓN.

- a) $l_1 = 48$ m., $l_2 = 144$ m., $l_3 = 120$ m. b) $2e^x + \sqrt{2} \ln \frac{e^x - \sqrt{2}}{e^x + \sqrt{2}} + C$ c) $-\frac{1}{2}$

Septiembre 15.

- a) (2 puntos) Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule: $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$
- b) (1,5 puntos) Determine el límite siguiente: $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1}{1 - \sin x} \right)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$
- c) (1,5 puntos) Determine la ecuación de la curva $f(x)$ sabiendo que la recta tangente en $x=3$ es $y = 9x - 13$ y la derivada segunda verifica que $f''(x) = 4$, para cualquier valor de x .

SOLUCIÓN.

- a) $e^x - \ln \left(\frac{(e^x + 2)^4}{e^x + 1} \right) + C$ b) 1 c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Septiembre 15.

- a) (3 puntos) Sea $f(x) = x^2 e^{1/x^2}$
- 1) (0,5 puntos) Determine el dominio de $f(x)$.
 - 2) (1,5 puntos) Determinen, si existen, las asíntotas de $f(x)$.
 - 3) (1 punto) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

- b) (2 puntos) Calcule: $\int \left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dx$

SOLUCIÓN.

- a) 1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ 2) Asíntota vertical: $x = 0$ 3) $(-1, e)$ y $(1, e)$: mínimos relativos
b) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

Junio 16.

- a) (2,25 puntos) Considere la función: $f(x) = \frac{1}{8x - x^2}$

a.1) (1,5 puntos) Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) (0,75 puntos) Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$.

- b) (1,25 puntos) Determine: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x^2) \right) \left(\frac{x+1}{x^2+3} \right)$

- c) (1,5 puntos) Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$

SOLUCIÓN.

- a) a.1) Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 8$ a.2) $(4, 1/16)$ mínimo relativo
b) 0 c) $1/12 u^2$

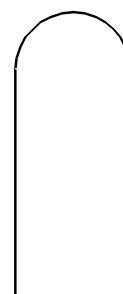
Junio 16.

- a) (1,5 puntos) Determine el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{3}{2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$

- b) (1,5 puntos) Usando el cambio de variable $t = \cos x$, calcule: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} dx$

- c) (2 puntos) Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece a la derecha, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).

Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.



SOLUCIÓN.

- a) $e^{7/2}$ b) $\frac{1-\sqrt{2}}{2} - \ln(2-\sqrt{2})$ c) $1/12 u^2$

Septiembre 16.

- a) (1 punto) Determine, si existen, todos los valores de los parámetros a y b para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ b(1 - e^{x-1}) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Considere ahora que $a=1$. Usando la definición de derivada, estudie si la función es derivable en $x=0$.

c) (1,5 puntos) Determine: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{e^x}}$

d) (1,5 puntos) Determine: $\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} dx$

SOLUCIÓN.

a) Para $a=1$ y $\forall b$ **b)** No es derivable **c)** 1 **d)** $2\sqrt{x} \left[(\ln x)^2 - 4 \ln x + 8 \right] + C$

Septiembre 16.

a) (3 puntos) Considere la función: $f(x) = x + \frac{4}{x}$

a.1) (1,5 puntos) Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) (1,5 puntos) Determine los extremos relativos y puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) (2 puntos) Determine el área limitada por la curva $f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ y las rectas $x=0$, $x=\pi$ y el eje de abscisas $y=0$.

SOLUCIÓN.

a) a.1) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; asíntota vertical: $x=0$, asíntota oblicua: $y=x$ **a.2)** $(-2, -4)$ máximo relativo
 $(2, 4)$ mínimo relativo. No tiene puntos de inflexión. **b)** $4 u^2$

Junio 17.

(4 puntos)

a) (3 puntos) Considere la función de variable real x siguiente: $f(x) = x(\ln x)^2$

a.1) (0,5 puntos) Determine el dominio de la función $f(x)$.

a.2) (1,5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) (1 punto) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función $f(x)$ en cada uno de ellos.

b) (1 punto) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + kx - 7} - \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right) = \frac{5}{3}$$

SOLUCIÓN.

a) a.1) $D(f) = (0, +\infty)$ **a.2)** Creciente en $(0, e^{-2}) \cup (1, +\infty)$; Decreciente en $(e^{-2}, 1)$
a.3) $(e^{-2}, 4e^{-2})$ máximo relativo; $(1, 0)$ mínimo relativo. **b)** $k = \frac{4}{3}$

Junio 17.

(4 puntos)

a) (2 puntos) Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) (2 puntos) Determine: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

SOLUCIÓN.

a) 4 y 6

b) $e^0 = 1$

Septiembre 17.

(4 puntos)

Considere la función: $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

a) (0,5 puntos) Determine el dominio de la función.

b) (1,5 puntos) Determine, si existen, sus asíntotas.

(2c) (2 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Asíntotas verticales: $x = -1$
Asíntotas horizontales: no existen
Asíntotas oblicuas: $y = x - 1$

c) Creciente: $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
Decreciente: $(-2, -1) \cup (-1, 0)$
Máximo relativo: $(-2, -4)$
Mínimo relativo: $(0, 0)$

Septiembre 17.

(4 puntos)

a) (1 punto) Determine los valores de "a" y "b" para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 1/e^x & \text{si } x \leq 0 \\ a \cos x + b & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \sin x - ax & \text{si } \pi < x \end{cases}$$

b) (1,5 puntos) Calcule la integral: $\int x^2 (\ln x)^2 dx$

c) (1,5 puntos) Determine el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} - 1)^{x-1}$

SOLUCIÓN.

a) $a = \frac{1}{2-\pi}$, $b = \frac{1-\pi}{2-\pi}$

b) $\frac{1}{3}x^3 \left[(\ln x)^2 - \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{9} \right] + K$

c) 1

Junio 18.

(4 puntos)

a) Considere la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

a.1) (1 punto) Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2) (1 punto) Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3) (1 punto) Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=2$.

b) (1 punto) Calcule: $\int \frac{x^2-3x+3}{x-1} dx$

SOLUCIÓN.

a.1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$; Asíntotas horizontales: $y=-1$ (cuando $x \rightarrow -\infty$) , $y=1$ (cuando $x \rightarrow +\infty$)

a.2) Máximo relativo: $(1, \sqrt{2})$, mínimo relativo: no tiene

a.3) $\sqrt{5}x + 25y - 17\sqrt{5} = 0$

b) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x-1| + C$

Junio 18.

(4 puntos)

a) (2 puntos) Determine los valores de los parámetros a , b y c para que la función $f(x) = a(x-1)^2 + bx + c$

a.1.) Pase por el punto $(1, 1)$

a.2.) En el punto $(1, 1)$ su tangente tenga de pendiente 2

a.3.) En el punto $x=2$ tenga un máximo relativo.

b) (2 puntos) Determine el valor del límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} \right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$

SOLUCIÓN.

a) $a = -\frac{2}{3}$, $b=2$, $c=-1$

b) e^{-3}

Septiembre 18.

(4 puntos)

a) (2,5 puntos) Considere la función: $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$

a.1) (1 punto) Determine las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2) (1,5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los mínimos y máximos relativos de la función $f(x)$.

b) (1,5 puntos) Calcule la siguiente integral: $\int \frac{9}{x^2+x-2} dx$

SOLUCIÓN.

a) a.1) Asíntotas verticales: $x=1$; asíntotas oblicuas: $y=x-2$ **a.2) Creciente:** $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$;

Decreciente: $(0, 1) \cup (1, 2)$; Máximo relativo: $(0, -3)$; Mínimo relativo: $(2, 1)$ **b)** $3 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$

Septiembre 18.

(4 puntos)

a) (1,5 puntos) Calcule el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^3-x^2-x+2}{x^2} \right)^{\frac{3+x^2}{x}}$

b) (1,5 puntos) De entre todos los triángulos rectángulos que tienen un área de 1 cm^2 , determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) (1 punto) Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$.

SOLUCIÓN.

a) e^2 **b)** Catetos: $\sqrt{2} \text{ cm}$ y $\sqrt{2} \text{ cm}$; Hipotenusa: 2 cm **c)** $\frac{32}{3} u^2$