

1. - Ejercicios de sistemas con un parámetro:

(a) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k :

$$\begin{cases} -3x + 2y + 3z = -2 \\ ky + 2x - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & k & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & k + \frac{4}{3} & -3 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & \frac{9(k+3)}{3k+4} & \frac{4(k+8)}{3k+4} \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

■ Si $k = -3 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -3 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = -4 \rightarrow$ S.I.

■ si $k \neq [-3] \rightarrow$ S.C.D.

$$\bullet \left(0 \quad 0 \quad \frac{9(k+3)}{3k+4} \quad \frac{4(k+8)}{3k+4} \right) \rightarrow z = \frac{4(k+8)}{9(k+3)}$$

$$\bullet \left(0 \quad k + \frac{4}{3} \quad -3 \quad -\frac{16}{3} \right) \rightarrow y = -\frac{4}{k+3}$$

$$\bullet (-3 \quad 2 \quad 3 \quad -2) \rightarrow x = \frac{2(5k+13)}{9(k+3)}$$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = -9k - 27 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-3]$$

■ Si $k = -3 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.

■ Si $k \neq [-3] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. \rightarrow

Por Cramer:

$$\bullet x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -4 & k & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-9k-27} = \frac{-10k-26}{-9k-27} = \frac{2(5k+13)}{9(k+3)}$$

$$\bullet y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-9k-27} = \frac{36}{-9k-27} = -\frac{4}{k+3}$$

$$\bullet z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & k & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-9k-27} = \frac{-4k-32}{-9k-27} = \frac{4(k+8)}{9(k+3)}$$

- (b) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k :

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ ky + x + z = k \\ kz + x + y = k \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1 - k^2 & 1 - k & k(1 - k) \\ 0 & 0 & \frac{k^2 + k - 2}{k+1} & \frac{k(k-1)}{k+1} \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -2 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = -6 \rightarrow$ S.I.

- Si $k = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I

- $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \rightarrow z = \lambda$
- $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \rightarrow y = y$
- $(1 \ 1 \ 1 \ 1) \rightarrow x = -y - \lambda + 1$

- si $k \neq [-2, 1] \rightarrow$ S.C.D.

- $\left(0 \ 0 \ \frac{k^2 + k - 2}{k+1} \ \frac{k(k-1)}{k+1}\right) \rightarrow z = \frac{k}{k+2}$
- $(0 \ 1 - k^2 \ 1 - k \ k(1 - k)) \rightarrow y = \frac{k}{k+2}$
- $(1 \ k \ 1 \ k) \rightarrow x = \frac{k}{k+2}$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = k^3 - 3k + 2 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-2, 1]$$

- Si $k = -2 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.
- Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 1 \wedge rg(A^*) = 1 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [-2, 1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. \rightarrow Por Cramer:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad x &= \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k & 1 & k \end{vmatrix}}{k^3 - 3k + 2} = \frac{k(k^2 - 2k + 1)}{k^3 - 3k + 2} = \frac{k}{k+2} \\
 \bullet \quad y &= \frac{\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k & k \end{vmatrix}}{k^3 - 3k + 2} = \frac{k(k^2 - 2k + 1)}{k^3 - 3k + 2} = \frac{k}{k+2} \\
 \bullet \quad z &= \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{k^3 - 3k + 2} = \frac{k(k^2 - 2k + 1)}{k^3 - 3k + 2} = \frac{k}{k+2}
 \end{aligned}$$

(c) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k :

$$\begin{cases} x + y + z = k + 2 \\ -ky + x + z = 1 \\ kx + y + z = 4 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 1 & -k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 0 & -k-1 & 0 & -k-1 \\ 0 & 0 & 1-k & -k^2-k+3 \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

■ Si $k = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 1 \rightarrow$ S.I.

■ si $k \neq [1] \rightarrow$ S.C.D.

$$\bullet (0 \quad 0 \quad 1-k \quad -k^2-k+3) \rightarrow z = \frac{k^2+k-3}{k-1}$$

$$\bullet (0 \quad -k-1 \quad 0 \quad -k-1) \rightarrow y = 1$$

$$\bullet (1 \quad 1 \quad 1 \quad k+2) \rightarrow x = \frac{2-k}{k-1}$$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = k^2 - 1 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-1, 1]$$

■ Si $k = -1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)

■ Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.

- Si $k \neq [-1, 1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow \text{S.C.D.} \rightarrow$
Por Cramer:

$$\bullet x = \frac{\begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{-k^2+k+2}{k^2-1} = \frac{2-k}{k-1}$$

$$\bullet y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 4 & 1 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{k^2-1}{k^2-1} = 1$$

$$\bullet z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k+2 \\ 1 & -k & 1 \\ k & 1 & 4 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{k^2(k+2)-2k-3}{k^2-1} = \frac{k^2+k-3}{k-1}$$

- (d) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k :

$$\begin{cases} kx + kz + y(k^2 + 1) = k \\ ky + x + z = 0 \\ k^2z + x + y(k + 1) = 2k - 1 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} k & k^2+1 & k & k \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k^2 & 2k-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = -2 \rightarrow \text{S.I.}$

- Si $k = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow \text{S.C.I.}$

- $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \rightarrow z = \lambda$
- $(0 \ 1 \ 0 \ 1) \rightarrow y = 1$
- $(1 \ 1 \ 1 \ 0) \rightarrow x = -\lambda - 1$

- si $k \neq [-1, 1] \rightarrow \text{S.C.D.}$

- $(0 \ 0 \ k^2 - 1 \ k - 1) \rightarrow z = \frac{1}{k+1}$
- $(0 \ 1 \ 0 \ k) \rightarrow y = k$
- $(1 \ k \ 1 \ 0) \rightarrow x = -\frac{k^3+k^2+1}{k+1}$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = k^4 - k^2(k^2 + 1) + 1 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-1, 1]$$

- Si $k = -1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow \text{S.I.}$
- Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow \text{S.C.I.} \rightarrow \text{solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)}$
- Si $k \neq [-1, 1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow \text{S.C.D.} \rightarrow$
Por Cramer:

$$\bullet \ x = \frac{\begin{vmatrix} k & k^2 + 1 & k \\ 0 & k & 1 \\ 2k - 1 & k + 1 & k^2 \end{vmatrix}}{1 - k^2} = \frac{k^4 - k^2 + k - 1}{1 - k^2} = -\frac{k^3 + k^2 + 1}{k + 1}$$

$$\bullet \ y = \frac{\begin{vmatrix} k & k & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2k - 1 & k^2 \end{vmatrix}}{1 - k^2} = \frac{-k^3 + k}{1 - k^2} = k$$

$$\bullet \ z = \frac{\begin{vmatrix} k & k^2 + 1 & k \\ 1 & k & 0 \\ 1 & k + 1 & 2k - 1 \end{vmatrix}}{1 - k^2} = \frac{1 - k}{1 - k^2} = \frac{1}{k + 1}$$

(e) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ ky + 3x + z = 0 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & k & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{3} - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = 3 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow \text{S.C.I.}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow z = \lambda$
- $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = \frac{\lambda}{3}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = -\frac{2\lambda}{3}$
- si $k \neq [3] \rightarrow$ S.C.D.
 - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{k}{3} - 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow z = 0$
 - $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = 0$
 - $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 0$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = k - 3 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [3]$$

- Si $k = 3 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [3] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. \rightarrow
Por Cramer:

$$\bullet \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}}{k-3} = \frac{0}{k-3} = 0$$

$$\bullet \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{k-3} = \frac{0}{k-3} = 0$$

$$\bullet \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix}}{k-3} = \frac{0}{k-3} = 0$$

(f) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k :

$$\begin{cases} ky + x - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 0 \\ 12 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & -12k - 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14(k-1)}{3(4k+1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I

- $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \rightarrow z = \lambda$
- $(0 \ -15 \ 10 \ 0) \rightarrow y = \frac{2\lambda}{3}$
- $(1 \ 1 \ -1 \ 0) \rightarrow x = \frac{\lambda}{3}$

- si $k \neq [1] \rightarrow$ S.C.D.

- $(0 \ 0 \ \frac{14(k-1)}{3(4k+1)} \ 0) \rightarrow z = 0$
- $(0 \ -12k - 3 \ 10 \ 0) \rightarrow y = 0$
- $(1 \ k \ -1 \ 0) \rightarrow x = 0$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = 14 - 14k \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [1]$$

- Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. \rightarrow Por Cramer:

$$\bullet \ x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{14-14k} = \frac{0}{14-14k} = 0$$

$$\bullet \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{14-14k} = \frac{0}{14-14k} = 0$$

$$\bullet \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 12 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{14-14k} = \frac{0}{14-14k} = 0$$

- (g) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ kx + y - z = k - 2 \\ ky + 3x + z = k - 2 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & -1 & k-2 \\ 3 & k & 1 & k-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-k & -2k-1 & k-2 \\ 0 & 0 & \frac{8-2k^2}{k-1} & \frac{2(k-2)^2}{k-1} \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -2 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{3} \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = -32/3 \rightarrow$ S.I.

- Si $k = 2 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I

- $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \rightarrow z = \lambda$
- $(0 \ -1 \ -5 \ 0) \rightarrow y = -5\lambda$
- $(1 \ 1 \ 2 \ 0) \rightarrow x = 3\lambda$

- si $k \neq [-2, 2] \rightarrow$ S.C.D.

- $(0 \ 0 \ \frac{8-2k^2}{k-1} \ \frac{2(k-2)^2}{k-1}) \rightarrow z = \frac{2-k}{k+2}$
- $(0 \ 1-k \ -2k-1 \ k-2) \rightarrow y = \frac{k-2}{k+2}$
- $(1 \ 1 \ 2 \ 0) \rightarrow x = \frac{k-2}{k+2}$

Por rangos y determinantes:

$$|A| = 2k^2 - 8 \rightarrow |A| = 0 \quad \text{si} \quad k = [-2, 2]$$

- Si $k = -2 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.
- Si $k = 2 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. \rightarrow solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [-2, 2] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. \rightarrow
Por Cramer:

$$\bullet \ x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k-2 & 1 & -1 \\ k-2 & k & 1 \end{vmatrix}}{2k^2-8} = \frac{2k^2-8k+8}{2k^2-8} = \frac{k-2}{k+2}$$

$$\bullet y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k & k-2 & -1 \\ 3 & k-2 & 1 \end{vmatrix}}{2k^2-8} = \frac{2k^2-8k+8}{2k^2-8} = \frac{k-2}{k+2}$$

$$\bullet z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & k-2 \\ 3 & k & k-2 \end{vmatrix}}{2k^2-8} = \frac{-2k^2+8k-8}{2k^2-8} = \frac{2-k}{k+2}$$