Derivabilidad

Junio 98.

2. Dada la función *f* definida por $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ ax^3+bx & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x-16 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$ se pide:

a) Hallar *a* y *b* para que la función sea continua en todo x real [0,5 puntos]
b) Analizar su derivabilidad [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Puesto que en los tres intervalos de definición la función es polinómica, es continua. Los únicos puntos de posible discontinuidad son $x=-1$ y $x=2$.

X Para que la función sea continua en $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \iff \lim_{x\to -1} 0 = \lim_{x\to -1}\left(ax^3+bx\right) \iff 0=-a-b \quad (*)$$

X Para que la función sea continua en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \iff \lim_{x\to 2}\left(ax^3+bx\right) = \lim_{x\to 2}(11x-16) \iff 8a+2b=6 \iff 4a+b=3 \quad (*)$$

De las igualdades (*): $\begin{cases} -a-b=0 \\ 4a+b=3 \end{cases} \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow \boxed{a=1\ ,\ b=-1}$

b) Se tiene: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ x^3-x & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x-16 & \text{si } 2 \le x \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2-1 & \text{si } -1<x<2 \\ 11 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

$f'(x)$ existe para $\forall x \in (-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$. Veamos si la función es derivable en $x=-1$ y $x=2$:

X $x=-1$: $\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=0 \\ f'(-1^+)=2 \end{array}\right| \Rightarrow f'(-1^-) \ne f'(-1^+) \Rightarrow$ la función no es derivable en $x=-1$

X $x=2$: $\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=11 \\ f'(2^+)=11 \end{array}\right| \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow$ la función es derivable en $x=2$

Junio 99.

1. Se define la función *f* del modo siguiente: $f(x)=\begin{cases} \ln x-1 & \text{si } x>1 \\ 2x^2+ax+b & \text{si } x\le 1 \end{cases}$

[1 punto] Encontrar los valores de *a* y *b* para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas. [1 punto] Estudiar su derivabilidad y [0,5 puntos] hallar los puntos de su gráfica en los que la tangente es paralela al eje OX . (NOTA: ln significa logaritmo neperiano).

SOLUCIÓN.

• Si la gráfica pasa por el origen de coordenadas: $f(0)=0 \;\Rightarrow\; b=0$

Para que la función sea continua, debe serlo en x = 1 y para ello debe ser $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^2+ax\right)=\lim_{x\to 1}\left(\ln x-1\right) \;\Rightarrow\; 2+a=-1 \;\Rightarrow\; a=-3$$

• La función derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x>1 \\ 4x-3 & \text{si } x\le 1 \end{cases}$ que existe $\forall x\in(-\infty\,,1)\cup(1\,,+\infty)$. Veamos si $f'\left(1^-\right)=f'\left(1^+\right)$:

$f'\left(1^-\right)=4\cdot 1-3=1 \quad y \quad f'\left(1^+\right)=\dfrac{1}{1}=1 \;\Rightarrow\; f'\left(1^-\right)=f'\left(1^+\right)$ y, por tanto, la función es derivable $\forall x$.

• Si la tangente es paralela a OX, su pendiente es 0 y por tanto $f'(x)=0$. La derivada sólo se anula cuando $4x-3=0$ $\Rightarrow\; x=\dfrac{3}{4}$. El punto de la gráfica en el que la tangente es paralela al eje OX es por tanto $\left(\dfrac{3}{4},-\dfrac{9}{8}\right)$.

Junio 00.

1. Se considera la función: $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x}$

1) [1 punto] Estudiar su continuidad y derivabilidad cuando x = 1.
2) [1 punto] ¿Alcanza para dicho valor de x un máximo o mínimo relativo? Razonar la respuesta.
3) [0,5 puntos] Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, se pregunta si el extremo en cuestión es absoluto.

SOLUCIÓN.

$$|x-1|=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x<1\\ x-1 & \text{si } x\geq 1\end{cases} \qquad \text{y, por tanto:} \qquad f(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{x} & \text{si } x<1\\ 1-\dfrac{1}{x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

1) **Continuidad**:

X $\exists\, f(1)=0$

X $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$: $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=0 \;;\; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0$ $\quad$ luego $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

X $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y, por tanto, la función es continua en x = 1.

Derivabilidad: la función derivada de f(x) es $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ y como $f'(1^-)=-1$ y $f'(1^+)=1$

$\Rightarrow$ la función no es derivable en x = 1 pues sus derivadas laterales son distintas

2) Puesto que $f'(1^-)<0$, la función es decreciente a la izquierda de 1. Como $f'(1^+)>0$, la función es creciente a la derecha de 1. Por tanto, en x = 1 la función alcanza el menor valor de entre los puntos próximos $\Rightarrow$ es un mínimo.

3) No es un mínimo absoluto puesto que la recta x = 0 es una asíntota vertical de la función y a la izquierda de 0 la función decrece indefinidamente.

Junio 10.

1. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & -\infty < x \le 0 \\ \text{sen}(ax) & 0<x<\pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi \le x < +\infty \end{cases}$

a) *(1 punto)* Calcular los valores de *a* para los cuales $f(x)$ es una función continua.

b) *(1 punto)* Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para cada uno de esos valores.

SOLUCIÓN.

a) Para que $f(x)$ sea continua $\forall x$ debe serlo en $x=0$ y en $x=\pi$.

Para que lo sea en $x=0$ debe ser: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[sen(ax)\right] \iff 0=0 \Rightarrow$ la función es continua en $x=0 \quad \forall a$ porque además $f(0)=0$.

Para que lo sea en $x=\pi$ debe ser: $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to \pi}\left[sen(ax)\right]=\lim\limits_{x\to \pi}\left[(x-\pi)^2+1\right] \iff$

$$\iff sen(\pi a)=1 \Rightarrow \pi a=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow a=\frac{1}{2}+2k \quad k=0,1,2,...$$

b) Para los valores de *a* encontrados, la función es $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & -\infty<x\le 0 \\ sen\left(\dfrac{x}{2}+2kx\right) & 0<x<\pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi\le x<+\infty \end{cases}$ y la función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & si\ -\infty<x\le 0 \\ \cos\left(\dfrac{x}{2}+2kx\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}+2k\right) & si\ 0<x<\pi \\ 2(x-\pi) & si\ \pi\le x<+\infty \end{cases}.$$

Derivabilidad en $x=0$: $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=2 \\ f'(0^+)=\dfrac{1}{2}+2k \end{array}\right| \Rightarrow 2\ne \dfrac{1}{2}+2k$ para $k\in \mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x=0$.

Derivabilidad en $x=\pi$: $\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-)=0 \\ f'(\pi^+)=0 \end{array}\right| \Rightarrow f(x)$ es derivable en $x=\pi$

Septiembre 00.

1. [1,5 puntos] Hallar *a*, *b* y *c* para que la función *f* definida en todo número real y dada por

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<2 \\ ax^2+bx+c & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

sea continua y derivable en todo x real y además alcance un extremo relativo para x = 3.

SOLUCIÓN.

Puesto que las funciones definidas a la izquierda y a la derecha de x = 2 son continuas, basta exigir que lo sea en x = 2 y para ello debe ser $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to 2}(x-1)=\lim\limits_{x\to 2}\left(ax^2+bx+c\right) \iff 1=4a+2b+c \quad (*)$

$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<2 \\ 2ax+b & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$. Para que la función sea derivable en x = 2 debe ser: $f'(2^-)=f'(2^+) \iff 1=4a+b \quad (*)$

Para que la función tenga un extremo relativo en x = 3 debe ser $f'(3)=0 \Rightarrow 6a+b=0 \quad (*)$

De las tres condiciones (*) se sigue: $\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ 4a+b=1 \\ 6a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a-b=-1 \\ 6a+b=0 \end{cases} \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}\ ,\ b=3\ ,\ c=-3$

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<2 \\ -x+3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}.$$

La función es continua y derivable $\forall x\neq 2$ por tratarse de funciones polinómicas. Veamos lo que ocurre en x = 2:

Continuidad: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1=f(2) \Rightarrow$ la función es continua.

Derivabilidad: $f''(2^-)=0\ ,\ f''(2^+)=-1 \Rightarrow$ la función no es derivable en x = 2