Junio 14.

(2,5 puntos) Sea m un número real y considere la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) *(1 punto)* Determine todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) *(1 punto)* Determine, si existe, la inversa de A cuando $m = 0$.

c) *(0,5 puntos)* Determine, si existe, la inversa de A^2 cuando $m = 0$.

SOLUCIÓN.

a) Existe inversa $\forall m$. **b)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ **c)** $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$

Junio 14.

(2,5 puntos) Considere las matrices de orden 2×2 siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}1&-4\\-2&-1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix}4&2\\-2&-3\end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine dos matrices M y N de orden 2×2 tales que: $\begin{cases}AM+BN=D\\AM\qquad\;\;=N\end{cases}$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz G de orden 3×3, cuyas columnas se representan por C_1, C_2, C_3 y cuyo determinante vale 2. Considere ahora la matriz H cuyas columnas son C_3, C_3+C_2, $3C_1$, ¿cuál es el determinante de esta nueva matriz H?

SOLUCIÓN.

a) $M=\begin{pmatrix}2/9&2/3\\-4/9&-1/3\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}2&2\\0&-1\end{pmatrix}$ **b)** $|H|=-6$

Septiembre 14.

(2,5 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Sean A y B matrices 2×2. Determine dichas matrices sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones:

$$A+3B=\begin{pmatrix}-4&-2\\3&-4\end{pmatrix}$$

$$2A-B=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Sean C y D las matrices: $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}$

Determine el determinante: $\left|5(CD)^{-1}\right|$, donde $(CD)^{-1}$ es la matriz inversa de (CD).

SOLUCIÓN.

a) $A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ **b)** $\left|5(CD)^{-1}\right|=-\frac{25}{2}$

Septiembre 14.

(2,5 puntos) Determine para qué valores de a el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible

$$ax-3y+6z=3$$
$$ax+3y+az=6$$
$$-ax-6y+9z=0$$

SOLUCIÓN.
• Si $a \neq -4$ y $a \neq 0$: compatible determinado. • Si $a = -4$: incompatible. • Si $a = 0$: incompatible.

Junio 15.

(3 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) *(2 puntos)* Determine el rango de esa matriz según los valores de λ

b) *(1 punto)* Determine para qué valores de λ existe la inversa de esa matriz y determine la inversa, si existe, para $\lambda = -2$.

SOLUCIÓN.
a) ▪ Si $\lambda \neq -1, 0, 1$: $rg A = 3$ ▪ Si $\lambda = -1$: $rg A = 2$ ▪ Si $\lambda = 0$: $rg A = 2$ ▪ Si $\lambda = 1$: $rg A = 2$

b) $\exists A^{-1}\ \forall \lambda \neq -1, 0, 1$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$

Junio 15.

(3 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ donde x, y y z son números reales.

Determine x, y y z para que el vector $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $MA = B$.

b) *(1,5 puntos)* Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a \neq 0$, $a + b = 0$, $c = a$.
Determine si el sistema $NX = B$ es compatible determinado.

SOLUCIÓN.
a) $x = -\frac{2}{9}$, $y = \frac{4}{9}$, $z = \frac{1}{9}$ **b)** Es compatible determinado.

Septiembre 15.

(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Determine para qué valores de λ el sistema de ecuaciones que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} 2\lambda x - 2y - \lambda z = 2 \\ \lambda x - y + z = 5 \\ 3\lambda x + 4y + (\lambda - 1)z = \lambda - 5 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) ▪ Si $\lambda \neq 0$ y -2: compatible determinado. ▪ Si $\lambda = 0$: incompatible. ▪ Si $\lambda = -2$: incompatible.

b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

Septiembre 15.

(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera y considere la matriz y vector siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) *(1 punto)* ¿Para qué valores de λ existe la matriz inversa $(A - 2I)^{-1}$, siendo I la matriz identidad de orden 3?

2) *(1 punto)* Si $\lambda = 0$, encuentre los valores de x, y, y z que satisfacen la ecuación $AX = 2X + b$ donde $b = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

b) *(1 punto)* Sean F_1, F_2 y F_3 la primera, segunda y tercera filas, respectivamente, de una matriz M de orden 3×3 cuyo determinante es -2.

Calcule el determinante de una matriz cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente: $5F_1 - F_3$, $3F_3$ y F_2.

SOLUCIÓN.

a) 1) $\exists (A - 2I)^{-1} \ \forall \lambda \neq -2, -1, 1$ 2) $x = 1$, $y = -\frac{10}{3}$, $z = 1$

b) 30

Junio 16.

(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera, determine para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} -x+\lambda y+\lambda z&=4 \\ \lambda x+\lambda y+z&=6 \\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z&=3+\lambda \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, para $\lambda=2$.

SOLUCIÓN.
a) ▪ Compatible determinado para $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$. ▪ Compatible indeterminado para $\lambda=1$. ▪ Incompatible para $\lambda=0$.

b) $x=-1$, $y=\dfrac{13}{2}$, $z=-5$

Junio 16.

(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea “a” un parámetro real cualquiera. Determine el rango de la matriz siguiente según los diferentes valores del parámetro “a”.

$$A=\begin{pmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1, C_2 y C_3 y cuyo determinante es 2.

Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, C_3+C_2 y $3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

SOLUCIÓN.
a) ▪ Para $a\neq -1$ y $\lambda\neq 1$: $\operatorname{rg}A=3$ ▪ Para cualquier otro valor de a: $\operatorname{rg}A=2$. **b)** $\left|B^{-1}\right|=-\dfrac{1}{6}$

Septiembre 16.
(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Determine para qué valores de k el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} x+y+kz&=6 \\ x+ky+z&=0 \\ kx-y+z&=-6 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, cuando $k=-1$

SOLUCIÓN.
a) ▪ Compatible determinado para $k\neq -1, 0, 1$ ▪ Compatible indeterminado para $k=0$ y para $k=-1$
▪ Incompatible para $k=1$ **b)** $x=3$, $y=3+\lambda$, $z=\lambda$

Septiembre 16.
(3 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Determine la matriz inversa, si existe, de la matriz siguiente:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Determine la matriz A^2+B^2 siendo A y B las matrices solución del siguiente sistema:

$$2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) $M^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A^2+B^2=\begin{pmatrix} 14/9 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 17.
(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ:

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ \lambda x + z &= 0 \\ x+(1+\lambda)y + \lambda z &= \lambda+1 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Halle la solución, si existe, cuando $\lambda=1$.

SOLUCIÓN.
a) ▪ Compatible determinado para $\lambda\neq -1$ y $\lambda\neq 0$. ▪ Compatible indeterminado para $\lambda=-1$. ▪ Compatible indeterminado para $\lambda=0$. **b)** $x=0$, $y=1$, $z=0$

Junio 17.
(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea A una matriz de dimensión 3×3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a.1) *(1 punto)* Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si $|B|=1$, calcule el determinante de A, es decir: $|A|$

a.2) *(1 punto)* Si $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$, determine los valores de x para los que se cumple que $|B|=1$, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) *(1 punto)* Determine las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma $M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que verifiquen que $MM'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ donde M' representa la matriz traspuesta de M.

SOLUCIÓN.

a) **a.1)** $|A|=8$ **a.2)** $x=\pm 3$ **b)** $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Septiembre 17.
(3 puntos)

Sea "m" una constante real. Determine para qué valores de "m" el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} 5x+4y+2z&=0 \\ 2x+3y+z&=0 \\ 4x-y+m^2z&=m-1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.
Compatible determinado para $m\neq -1$ y $m\neq 1$. Compatible indeterminado para $m=1$. Incompatible para $m=-1$.

Septiembre 17.
(3 puntos)

Sea k una constante real y considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 3k+2 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$

a) *(1 punto)* Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.

b) *(1 punto)* Si $k=2$, calcule la inversa de A, si existe.

c) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

SOLUCIÓN.

a) $\exists A^{-1}\ \forall k\neq -4, 0$ b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$ c) $\forall k\neq -4, 0:\ \text{rg}A=3$
Para $k=-4$ y para $k=0$: $\text{rg}A=2$

Junio 18.

(3 puntos) Considere el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{aligned} x+y+mz&=m \\ mx+(m-1)y+z&=2 \\ x+y+z&=1 \end{aligned}$

a) *(1 punto)* Determine los valores del parámetro m para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando $m=1$.

c) *(1 punto)* Considere las matrices:

$C=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Determine el rango de la matriz producto CD.

SOLUCIÓN.
a) Compatible determinado para $m\neq 1$; compatible indeterminado para $m=1$
b) $x=2-\lambda$, $y=-1$, $z=\lambda$ **c)** $\text{rg}\, CD=1$

Junio 18.

(3 puntos) Considere la matriz: $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

a) *(1,5 puntos)* Determine los valores del parámetro k para los que la matriz $A-kI$ tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la matriz X que verifica que $(A-3I)X=2I$ siendo I la matriz identidad de orden 3 y A la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

SOLUCIÓN.

a) $\exists (A-kI)^{-1} \quad \forall k\neq 0,2\text{ y }4$ **b)** $X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\0 & -2/3 & 0\\2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Septiembre 18.

(3 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema: $\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\2 & 2 & 2\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

b) *(1,5 puntos)* Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\x & y & z\end{pmatrix}$ es 4, es decir $|A|=4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación: $b=\begin{pmatrix}2 & 3a+k & x+5\\2 & 3b+k & y+5\\2 & 3c+k & z+5\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.
a) $x=-\dfrac{\lambda}{2}$, $y=-\dfrac{\lambda}{2}$, $z=\lambda$ **b)** $|B|=24$

Septiembre 18.

(3 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

encuentre la matriz X, de dimensión 3×3, que resuelve la ecuación matricial $AX+B=A^2$.

b) *(1,5 puntos)* Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) $X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\text{rg}\,C=3\ \ \forall k\neq 0 \text{ y } 6$, $\text{rg}\,C=2$ para $k=0$ y para $k=6$

Junio 19.

a) *(2 puntos)* Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k=1$.

SOLUCIÓN.

a) $\text{rg}\,A=3\ \ \forall k\neq -2, -1 \text{ y } 0$, $\text{rg}\,A=2$ para $k=-2$, para $k=-1$ y para $k=0$ **b)** $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3/2 & 1/6 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$

Junio 19.

a) *(1,5 puntos)* El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) *(1,5 puntos)* Sabiendo que $a=-2$, calcule el valor del siguiente determinante

$$A=\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) 22 de esquí alpino, 15 de esquí nórdico y 23 de escalada. **b)** -8

Septiembre 19.

a) *(1,5 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\begin{aligned} 2x - y + kz &= 1 \\ -x + y - kz &= 0 \\ 2x - ky + 2kz &= -1 \end{aligned}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema cuando $k = 1$

SOLUCIÓN.
a) Para $k \neq 0$ y $k \neq 2$: compatible determinado ; para $k = 0$: incompatible ; para $k = 2$: incompatible.
b) $x = 1$, $y = -1$, $z = -2$

Septiembre 19.

a) *(1,5 puntos)* Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$

SOLUCIÓN.

a) Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$: $\text{rg}A = 3$; para $m = 1$: $\text{rg}A = 2$; para $m = 2$: $\text{rg}A = 2$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$