

Nombre: _____ **Fecha:** _____

Tiempo: 105 minutos

Tipo: A

Esta prueba tiene 6 ejercicios. La puntuación máxima es de 50. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	6	4	14	5	6	15	50

1. Calcula el siguiente límite:

(6 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2} \right)^{\frac{x^2 - 3x}{x^2 + x - 2}}$$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2} \right)^{\frac{x^2 - 3x}{x^2 + x - 2}} = 1^\infty$. Indeterminación

$$g(x) \cdot [f(x) - 1] = \frac{x(x-3)}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 4)}{3x^2 - 2} = \frac{x(x-3)(x^2 - 2x - 4)}{(x+2)(3x^2 - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)(x^2 - 2x - 4)}{(x+2)(3x^2 - 2)} = \frac{10}{3}. \text{ Por tanto:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2} \right)^{\frac{x^2 - 3x}{x^2 + x - 2}} = e^{\frac{10}{3}}$$

2. Hallar los puntos de la gráfica $y = 2x^3 + 3x^2 - 30x - 6$ en el cual la recta tangente es paralela a la recta $y = 6x - 5$

(4 puntos)

Solución: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 30 \wedge m = 6$. Luego:

$$6x^2 + 6x - 30 = 6 \rightarrow x = [-3, 2]. \text{ Los puntos de la gráfica son:}$$

$$(-3, 57) .$$

$$(2, -38) .$$

3. Halla la derivadas de la siguientes funciones:

(a) $\log \left(\sqrt{\frac{\cos(x)+1}{1-\cos(x)}} \right)$

(7 puntos)

Solución: $f'(x) = \left(-\frac{\log(1-\cos(x))}{2} + \frac{\log(\cos(x)+1)}{2} \right)' = -\frac{\sin(x)}{2(\cos(x)+1)}$

$$\frac{\sin(x)}{2(1-\cos(x))} = \frac{\sin(x)}{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)} = -\frac{1}{\sin(x)}$$

(b) $\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \tan(x + \sqrt{x^2-1})$ (7 puntos)

Solución:

$$f'(x) = \left(\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}\right)' + (-\tan(x + \sqrt{x^2-1}))' = \frac{2x^2-1}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(\sec^2(x+\sqrt{x^2-1}))}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-2(x+\sqrt{x^2-1})\sec^2(x+\sqrt{x^2-1})-1}{2\sqrt{x^2-1}}$$

4. Determina a y b para que sea derivable en \mathbb{R} la función: (5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \log(\sin(x) + e) & \text{si } x < 0 \\ ax + b + x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Continuidad en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \log(\sin(x) + e) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b + x^3) \rightarrow 1 = b$$

Derivabilidad en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)+e}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + 3x^2) \rightarrow e^{-1} = a$$

Por tanto: $\{a : e^{-1}, b : 1\}$

5. Aprovechando como hipotenusa una pared de $10\sqrt{2}$ m. se desea acotar una superficie triangular de área máxima. ¿Qué medidas deberán tener los otros dos lados (catetos)? (6 puntos)

Solución: Función a optimizar: $\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$

$$f'(x) = \frac{100-x^2}{\sqrt{200-x^2}} \wedge f''(x) = \frac{x(x^2-300)}{(200-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Extremos relativos:

$$-10 \wedge f''(-10) = 2$$

$$10 \wedge f''(10) = -2$$

6. Dada la función: $x + e^{-x}$

(a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, así como los extremos relativos (5 puntos)

Solución: $\text{dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 - e^{-x} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 1 - e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0$$

Intervalos de crecimiento: $[(-\infty, 0), \text{False}], [(0, \infty), \text{True}]$

(b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f (5 puntos)

Solución: $f''(x) = e^{-x} \rightarrow f''(x) > 0$
Intervalos de convexidad: $[\mathbb{R}, \text{True}]$

(c) Determina las asíntotas de la gráfica de f

(5 puntos)

Solución: $\text{dom}(f(x)) = \mathbb{R} \rightarrow \nexists A.V.$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty + 0 = \infty \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \rightarrow \nexists A.H.$
Asíntota oblicua:

pendiente: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = 1$

ordenada: $\lim_{x \rightarrow \infty} f - m \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \rightarrow A.O : y = x$