1. - Ejercicios de sistemas con un parámetro:

   (a) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k:

$$\begin{cases} -3x+2y+3z=-2 \\ ky+2x-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & k & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & k+\frac{4}{3} & -3 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & \frac{9(k+3)}{3k+4} & \frac{4(k+8)}{3k+4} \end{pmatrix}.$$

De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k=-3 \to$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -3 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

  La última fila es $0z=-4 \to$ S.I.

- si $k \neq [-3] \to$ S.C.D.
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{9(k+3)}{3k+4} & \frac{4(k+8)}{3k+4} \end{pmatrix} \to z = \frac{4(k+8)}{9(k+3)}$
  - $\begin{pmatrix} 0 & k+\frac{4}{3} & -3 & -\frac{16}{3} \end{pmatrix} \to y = -\frac{4}{k+3}$
  - $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to x = \frac{2(5k+13)}{9(k+3)}$

Por rangos y determinantes:

$|A| = -9k-27 \to |A| = 0 \quad si \quad k=[-3]$

- Si $k=-3 \to rg(A)=2 \wedge rg(A^*)=3 \to$ S.I.
- Si $k \neq [-3] \to rg(A)=3 \wedge rg(A^*)=3 \to$ S.C.D. $\to$ Por Cramer:
  - $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -4 & k & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-9k-27} = \frac{-10k-26}{-9k-27} = \frac{2(5k+13)}{9(k+3)}$
  - $y = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-9k-27} = \frac{36}{-9k-27} = -\frac{4}{k+3}$
  - $z = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & k & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-9k-27} = \frac{-4k-32}{-9k-27} = \frac{4(k+8)}{9(k+3)}$

(b) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k:

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ ky + x + z = k \\ kz + x + y = k \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos
$A^* = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & k\,(1-k) \\ 0 & 0 & \frac{k^2+k-2}{k+1} & \frac{k(k-1)}{k+1} \end{pmatrix}$.
De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -2 \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$
La última fila es $0z = -6 \rightarrow$ S.I.
- Si $k = 1 \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow z = \lambda$
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = \mu$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow x = -\mu - \lambda + 1$
- si $k \neq [-2, 1] \rightarrow$ S.C.D.
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{k^2+k-2}{k+1} & \frac{k(k-1)}{k+1} \end{pmatrix} \rightarrow z = \frac{k}{k+2}$
  - $\begin{pmatrix} 0 & 1-k^2 & 1-k & k\,(1-k) \end{pmatrix} \rightarrow y = \frac{k}{k+2}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{k}{k+2}$

Por rangos y determinantes:
$|A| = k^3 - 3k + 2 \rightarrow |A| = 0 \quad si \quad k = [-2,\ 1]$

- Si $k = -2 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.
- Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 1 \wedge rg(A^*) = 1 \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow$ solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [-2, 1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow$
Por Cramer:

- $x = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k & 1 & k \end{vmatrix}}{k^3-3k+2} = \frac{k\left(k^2-2k+1\right)}{k^3-3k+2} = \frac{k}{k+2}$
- $y = \frac{\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k & k \end{vmatrix}}{k^3-3k+2} = \frac{k\left(k^2-2k+1\right)}{k^3-3k+2} = \frac{k}{k+2}$
- $z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{k^3-3k+2} = \frac{k\left(k^2-2k+1\right)}{k^3-3k+2} = \frac{k}{k+2}$

(c) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k:

$$\begin{cases} x+y+z=k+2 \\ -ky+x+z=1 \\ kx+y+z=4 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 1 & -k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 0 & -k-1 & 0 & -k-1 \\ 0 & 0 & 1-k & -k^2-k+3 \end{pmatrix}$.
De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k=1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  La última fila es $0z=1 \rightarrow$ S.I.

- si $k \neq [1] \rightarrow$ S.C.D.
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-k & -k^2-k+3 \end{pmatrix} \rightarrow z = \frac{k^2+k-3}{k-1}$
  - $\begin{pmatrix} 0 & -k-1 & 0 & -k-1 \end{pmatrix} \rightarrow y = 1$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{2-k}{k-1}$

Por rangos y determinantes:
$|A| = k^2-1 \rightarrow |A| = 0 \quad si \quad k = [-1,\ 1]$

- Si $k=-1 \rightarrow rg(A)=2 \wedge rg(A^*)=2 \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow$ solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k=1 \rightarrow rg(A)=2 \wedge rg(A^*)=3 \rightarrow$ S.I.

- Si $k \neq [-1,1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow$
  Por Cramer:
  - $x = \dfrac{\begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{-k^2+k+2}{k^2-1} = \frac{2-k}{k-1}$
  - $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & k+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 4 & 1 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{k^2-1}{k^2-1} = 1$
  - $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k+2 \\ 1 & -k & 1 \\ k & 1 & 4 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{k^2(k+2)-2k-3}{k^2-1} = \frac{k^2+k-3}{k-1}$

(d) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k:

$$\begin{cases} kx + kz + y\left(k^2+1\right) = k \\ ky + x + z = 0 \\ k^2 z + x + y\,(k+1) = 2k-1 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos $A^* = \begin{pmatrix} k & k^2+1 & k & k \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k^2 & 2k-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{pmatrix}$.
De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  La última fila es $0z = -2 \rightarrow$ S.I.

- Si $k = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow z = \lambda$
  - $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow y = 1$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = -\lambda - 1$

- si $k \neq [-1,1] \rightarrow$ S.C.D.

- $\begin{pmatrix}0 & 0 & k^2-1 & k-1\end{pmatrix} \to z = \frac{1}{k+1}$
- $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & k\end{pmatrix} \to y = k$
- $\begin{pmatrix}1 & k & 1 & 0\end{pmatrix} \to x = -\frac{k^3+k^2+1}{k+1}$

Por rangos y determinantes:
$|A| = k^4 - k^2\left(k^2+1\right) + 1 \to |A| = 0 \quad si \quad k = [-1,\ 1]$

- Si $k = -1 \to rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \to$ S.I.
- Si $k = 1 \to rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \to$ S.C.I. $\to$ solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [-1, 1] \to rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \to$ S.C.D. $\to$
  Por Cramer:
  - $x = \frac{\begin{vmatrix}k & k^2+1 & k \\ 0 & k & 1 \\ 2k-1 & k+1 & k^2\end{vmatrix}}{1-k^2} = \frac{k^4-k^2+k-1}{1-k^2} = -\frac{k^3+k^2+1}{k+1}$
  - $y = \frac{\begin{vmatrix}k & k & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2k-1 & k^2\end{vmatrix}}{1-k^2} = \frac{-k^3+k}{1-k^2} = k$
  - $z = \frac{\begin{vmatrix}k & k^2+1 & k \\ 1 & k & 0 \\ 1 & k+1 & 2k-1\end{vmatrix}}{1-k^2} = \frac{1-k}{1-k^2} = \frac{1}{k+1}$

(e) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ ky + 3x + z = 0 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos
$A^* = \begin{pmatrix}2 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & k & 1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{3}-1 & 0\end{pmatrix}$.
De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = 3 \to$
$$\begin{pmatrix}2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
  La última fila es $0z = 0 \to$ S.C.I

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to z = \lambda$
- $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \to y = \frac{\lambda}{3}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to x = -\frac{2\lambda}{3}$

- si $k \neq [3] \to$ S.C.D.
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{k}{3}-1 & 0 \end{pmatrix} \to z = 0$
  - $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \to y = 0$
  - $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to x = 0$

Por rangos y determinantes:
$|A| = k - 3 \to |A| = 0 \quad si \quad k = [3]$

- Si $k = 3 \to rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \to$ S.C.I. $\to$ solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [3] \to rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \to$ S.C.D. $\to$
  Por Cramer:
  - $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}}{k-3} = \frac{0}{k-3} = 0$
  - $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{k-3} = \frac{0}{k-3} = 0$
  - $z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix}}{k-3} = \frac{0}{k-3} = 0$

(f) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k:

$$\begin{cases} ky + x - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos
$A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 0 \\ 12 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & -12k-3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14(k-1)}{3(4k+1)} & 0 \end{pmatrix}$.
De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I

  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow z = \lambda$
  - $\begin{pmatrix} 0 & -15 & 10 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = \frac{2\lambda}{3}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{\lambda}{3}$

- si $k \neq [1] \rightarrow$ S.C.D.
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{14(k-1)}{3(4k+1)} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow z = 0$
  - $\begin{pmatrix} 0 & -12k-3 & 10 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = 0$
  - $\begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 0$

Por rangos y determinantes:
$|A| = 14 - 14k \rightarrow |A| = 0 \quad si \quad k = [1]$

- Si $k = 1 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow$ solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [1] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow$
  Por Cramer:
  - $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{14-14k} = \frac{0}{14-14k} = 0$
  - $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{14-14k} = \frac{0}{14-14k} = 0$
  - $z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 12 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{14-14k} = \frac{0}{14-14k} = 0$

(g) Discutir y resolver el siguiente sistema con parámetro k:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ kx + y - z = k - 2 \\ ky + 3x + z = k - 2 \end{cases}$$

Sol: Discusión y resolución por Gauss: Escalonando la matriz ampliada tenemos
$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & -1 & k-2 \\ 3 & k & 1 & k-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-k & -2k-1 & k-2 \\ 0 & 0 & \frac{8-2k^2}{k-1} & \frac{2(k-2)^2}{k-1} \end{pmatrix}$.
De los valores de la última fila podemos concluir:

- Si $k = -2 \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{3} \end{pmatrix}$$
La última fila es $0z = -32/3 \rightarrow$ S.I.

- Si $k = 2 \rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
La última fila es $0z = 0 \rightarrow$ S.C.I
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow z = \lambda$
  - $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = -5\lambda$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 3\lambda$

- si $k \neq [-2, 2] \rightarrow$ S.C.D.
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{8-2k^2}{k-1} & \frac{2(k-2)^2}{k-1} \end{pmatrix} \rightarrow z = \frac{2-k}{k+2}$
  - $\begin{pmatrix} 0 & 1-k & -2k-1 & k-2 \end{pmatrix} \rightarrow y = \frac{k-2}{k+2}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{k-2}{k+2}$

Por rangos y determinantes:
$|A| = 2k^2 - 8 \rightarrow |A| = 0 \quad si \quad k = [-2,\ 2]$

- Si $k = -2 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.I.
- Si $k = 2 \rightarrow rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 2 \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow$ solo se puede resolver por Gauss, (ver más arriba)
- Si $k \neq [-2, 2] \rightarrow rg(A) = 3 \wedge rg(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow$
Por Cramer:
  - $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k-2 & 1 & -1 \\ k-2 & k & 1 \end{vmatrix}}{2k^2-8} = \frac{2k^2-8k+8}{2k^2-8} = \frac{k-2}{k+2}$

- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k & k-2 & -1 \\ 3 & k-2 & 1 \end{vmatrix}}{2k^2-8} = \frac{2k^2-8k+8}{2k^2-8} = \frac{k-2}{k+2}$
- $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & k-2 \\ 3 & k & k-2 \end{vmatrix}}{2k^2-8} = \frac{-2k^2+8k-8}{2k^2-8} = \frac{2-k}{k+2}$