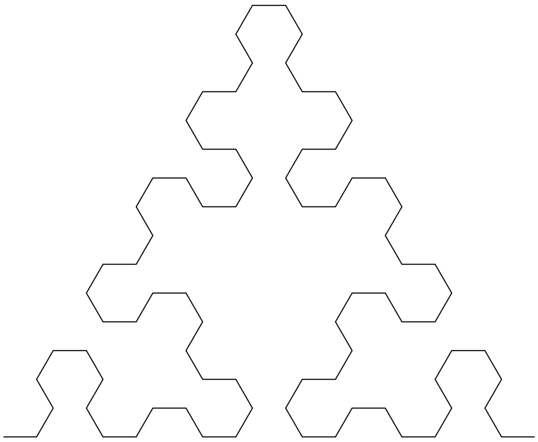
Preparación EVAU

Matemáticas II - 2º Bachillerato



Departamento de Matemáticas[1]

[1] http://www.iespedrocerrada.org/

ATRIBUCIONES: Nuestro más sentido **agradecimiento** a Julio García Galavis, que es el autor de la resolución de los ejercicios[a].

---

[a] `http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm`

1

Análisis

A continuación aparecen los ejercicios de la EVAU del bloque de análisis de los últimos seis años con las soluciones. Se recomienda trabajarlos para preparar la EVAU. En caso de necesitar consultar el desarrollo de la solución paso a paso se deberá consultar el documento específico de la prueba y año que aparece en la siguiente web[1]:

[1] http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm

Septiembre 14.

1. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Considere la función: $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<2 \\ 2x+a & \text{si } 2\le x\le 4 \\ -x^2+3x+b & \text{si } x>4 \end{cases}$

Determine los valores de a y b para que la función sea continua.

b) *(1,25 puntos)* Supongamos ahora que $a=0$. Usando la definición de derivada, estudie la derivabilidad de $f(x)$ en $x=2$.

2. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Dadas las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=-x^2+2$, determine el área encerrada entre ambas funciones.

b) *(1,25 puntos)* Calcule la integral: $\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx$.

SOLUCIÓN.	
1. a) $a=0$, $b=12$	**b)** No es derivable pues $f'(2^-)=4$, $f'(2^+)=2$
2. a) $A=\frac{8}{3}u^2$	**b)** $5+\ln 8$

Junio 15.

a) *(1,5 puntos)* Considere la función $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$. Determine los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t=\cos x$, calcula $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\,dx$.

c) *(2 puntos)*

1) *(1 punto)* Calcule los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^3+bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,2)$.

2) *(1 punto)* Calcule el área encerrada por la curva $f(x)=2x^3-3x^2$ y la parte positiva del eje OX.

SOLUCIÓN.

a) $(-1,-2e)$: mínimo relativo , $\left(3,\frac{6}{e^3}\right)$: máximo relativo. Puntos de inflexión en $x=2-\sqrt{5}$ y en $2+\sqrt{5}$.

b) $\cos x+\ln\sqrt{\frac{\cos x-1}{\cos x+1}}+C$ **c)** 1) $a=-4$, $b=\frac{3}{2}$ 2) $A=\frac{27}{32}u^2$

Junio 15.

a) *(2 puntos)* Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t=e^x$, calcule: $\int\frac{2e^{2x}}{e^x-2e^{-x}}dx$

c) *(1,5 puntos)* Calcule: $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

SOLUCIÓN.

a) $l_1=48$ m., $l_2=144$ m., $l_3=120$ m. **b)** $2e^x+\sqrt{2}\ln\frac{e^x-\sqrt{2}}{e^x+\sqrt{2}}+C$ **c)** $-\frac{1}{2}$

Septiembre 15.

a) *(2 puntos)* Usando el cambio de variable $t=e^x$, calcule: $\int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

b) *(1,5 puntos)* Determine el límite siguiente: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}$

c) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación de la curva $f(x)$ sabiendo que la recta tangente en $x=3$ es $y=9x-13$ y la derivada segunda verifica que $f''(x)=4$, para cualquier valor de x.

SOLUCIÓN.

a) $e^x-\ln\left(\frac{(e^x+2)^4}{e^x+1}\right)+C$ **b)** 1 **c)** $f(x)=2x^2-3x+5$

Septiembre 15.

a) *(3 puntos)* Sea $f(x)=x^2\,e^{1/x^2}$

1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de $f(x)$.

2) *(1,5 puntos)* Determinen, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

b) *(2 puntos)* Calcule: $\int\left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$

SOLUCIÓN.
a) 1) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ 2) Asíntota vertical: $x=0$ 3) $(-1,e)$ y $(1,e)$: mínimos relativos
b) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

Junio 16.

a) *(2,25 puntos)* Considere la función: $f(x)=\dfrac{1}{8x-x^2}$

a.1) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) *(0,75 puntos)* Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,25 puntos)* Determine: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\ln\left(x^2\right)\right)\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)\right)$

c) *(1,5 puntos)* Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$

SOLUCIÓN.
a) **a.1)** Asíntotas verticales: $x=0$ y $x=8$ **a.2)** $(4,1/16)$ mínimo relativo
b) 0 **c)** $1/12\ u^2$

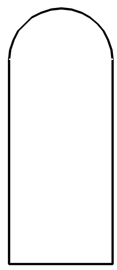
Junio 16.

a) *(1,5 puntos)* Determine el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+1}{2x-1}-\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t=\cos x$, calcule: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{1-\cos x}\,dx$

c) *(2 puntos)* Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece a la derecha, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).

Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.



SOLUCIÓN.
a) $e^{7/2}$ **b)** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}-\ln\left(2-\sqrt{2}\right)$ **c)** $1/12\ u^2$

Septiembre 16.

a) *(1 punto)* Determine, si existen, todos los valores de los parámetros a y b para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} a\,e^x & \text{si } x<0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0\le x<1 \\ b\left(1-e^{x-1}\right) & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Considere ahora que $a=1$. Usando la definición de derivada, estudie si la función es derivable en $x=0$.

c) *(1,5 puntos)* Determine: $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{e^x}}$

d) *(1,5 puntos)* Determine: $\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

SOLUCIÓN.
a) Para $a=1$ y $\forall b$ **b)** No es derivable **c)** **1** **d)** $2\sqrt{x}\left[(\ln x)^2-4\ln x+8\right]+C$

Septiembre 16.

a) *(3 puntos)* Considere la función: $f(x)=x+\frac{4}{x}$

a.1) *(1,5 puntos)* Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los extremos relativos y puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(2 puntos)* Determine el área limitada por la curva $f(x)=-2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ y las rectas $x=0$, $x=\pi$ y el eje de abscisas $y=0$.

SOLUCIÓN.
a) **a.1)** $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$; asíntota vertical: $x=0$, asíntota oblicua: $y=x$ a.2**)** $(-2,-4)$ máximo relativo $(2,4)$ mínimo relativo. No tiene puntos de inflexión. b**)** $4\ u^2$

Junio 17.
(4 puntos)

a) *(3 puntos)* Considere la función de variable real x siguiente: $f(x)=x(\ln x)^2$

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función $f(x)$.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función $f(x)$ en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)=\frac{5}{3}$$

SOLUCIÓN.
a) **a.1)** $D(f)=(0,+\infty)$ **a.2)** Creciente en $(0,e^{-2})\cup(1,+\infty)$; Decreciente en $(e^{-2},1)$

a.3) $(e^{-2},4e^{-2})$ máximo relativo ; $(1,0)$ mínimo relativo. b**)** $k=\frac{4}{3}$

Junio 17.
(4 puntos)
a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) *(2 puntos)* Determine: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{1+\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

SOLUCIÓN.
a) 4 y 6   **b)** $e^0 = 1$

Septiembre 17.
(4 puntos)
Considere la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

(2**c)** *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función f(x) así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.		
a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$	**b)** Asíntotas verticales: $x = -1$ Asíntotas horizontales: no existen Asíntotas oblicuas: $y = x - 1$	**c)** Creciente: $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ Decreciente: $(-2,-1)\cup(-1,0)$ Máximo relativo: $(-2,-4)$ Mínimo relativo: $(0,0)$

Septiembre 17.
(4 puntos)

a) *(1 punto)* Determine los valores de "a" y "b" para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 1/e^x & \text{si } x \le 0 \\ a\cos x + b & \text{si } 0 < x \le \pi \\ \operatorname{sen}x - ax & \text{si } \pi < x \end{cases}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral: $\int x^2 (\ln x)^2\, dx$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1}$

SOLUCIÓN.		
a) $a = \dfrac{1}{2-\pi}$, $b = \dfrac{1-\pi}{2-\pi}$	**b)** $\dfrac{1}{3}x^3\left[(\ln x)^2 - \dfrac{2}{3}\ln x + \dfrac{2}{9}\right] + K$	**c)** 1

Junio 18.
(4 puntos)

a) Considere la función $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

a.1) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3) *(1 punto)* Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=2$.

b) *(1 punto)* Calcule: $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}\,dx$

> **SOLUCIÓN.**
> **a.1)** $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$; Asíntotas horizontales: $y=-1$ (cuando $x\to-\infty$) , $y=1$ (cuando $x\to+\infty$)
> **a.2)** Máximo relativo: $\left(1,\sqrt{2}\right)$, mínimo relativo: no tiene **a.3)** $\sqrt{5}x+25y-17\sqrt{5}=0$
> **b)** $\dfrac{x^2}{2}-2x+\ln|x-1|+C$

Junio 18.
(4 puntos)

a) *(2 puntos)* Determine los valores de los parámetros a, b y c para que la función $f(x)=a(x-1)^2+bx+c$

a.1.) Pase por el punto $(1,1)$
a.2.) En el punto $(1,1)$ su tangente tenga de pendiente 2
a.3.) En el punto $x=2$ tenga un máximo relativo.

b) *(2 puntos* Determine el valor del límite: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$

> **SOLUCIÓN.**
> **a)** $a=-\dfrac{2}{3}$, $b=2$, $c=-1$ **b)** e^{-3}

Septiembre 18.
(4 puntos)

a) *(2,5 puntos)* Considere la función: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

a.1) *(1 punto)* Determine las asíntotas de la función f(x).
a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los mínimos y máximos relativos de la función f(x).

b) *(1,5 puntos)* Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$

SOLUCIÓN.
a) a.1**) Asíntotas verticales:** $x=1$; asíntotas oblicuas**:** $y=x-2$ a.2) Creciente: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$;
Decreciente: $(0,1)\cup(1,2)$; Máximo relativo: $(0,-3)$; Mínimo relativo: $(2,1)$ **b)** $3\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$

Septiembre 18.
(4 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Calcule el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$

b) *(1,5 puntos)* De entre todos los triángulos rectángulos que tienen un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) *(1 punto)* Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$.

SOLUCIÓN.
a) e^2 **b)** $\text{Catetos: } \sqrt{2}\ \text{cm y } \sqrt{2}\ \text{cm ; Hipotenusa: } 2\ \text{cm}$ **c)** $\frac{32}{3}\ u^2$

Junio 19.
a) *(1,5 puntos)* Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos $(0,0),(a,0),(0,b)$ y (a,b), donde $a>0$ y $b>0$ y además el punto (a,b) está situado en la curva de ecuación $y=\frac{1}{x^2}+9$.
De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) *(1 punto)* Determine: $\int\frac{1}{9-x^2}\,dx$

c) *(1,5 puntos)* Determine el valor de la constante k para que se verifique que: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$

SOLUCIÓN.
a) $a=\frac{1}{3}, b=18$; $S=6\ u^2$ **b)** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$ **c)** $k=-5$

Junio 19.
Considere la función: $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$

a) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) *(1 punto)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) *(1,5 puntos)* Determine la integral $\int_1^3 f(x)\,dx$

SOLUCIÓN.
a) Asíntotas verticales: $x=-1$, asíntotas horizontales: $y=0$, asíntotas oblicuas: no tiene.
b) Creciente: $\forall x\in(-1,3)$, decreciente: $\forall x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ **c)** $\ln2-\frac{1}{2}$

Septiembre 19.

a) *(1 punto)* Determine el límite: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)} - \dfrac{1}{x} \right)$

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante k para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k-x & \text{si } x = 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$.

c) *(2 puntos)* La curva $y = x^2 + 1$ divide al rectángulo limitado por los vértices $A:(0,1), B:(2,1), C:(0,5)$ y $D:(2,5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

SOLUCIÓN. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $k = 5$ **c)** $\frac{16}{3}$ u^2 y $\frac{8}{3}$u^2

Septiembre 19.

a) *(1 punto)* Considere la función: $f(x) = \dfrac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$. Determine el valor de k para que la función f(x) tenga como asíntota oblicua, cuando $x \to +\infty$, la recta $y = 2x - 1$.

b) *(1,5 puntos)* Determine $\int x\left(\ln(x)\right)^2 dx$

c) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

SOLUCIÓN. **a)** $k = -1$ **b)** $\frac{1}{2}x^2\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right] + C$ **c)** Mínimo relativo: $(1,1)$. Punto de inflexión: $\left(2, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$

2

Probabilidad y Estadística

A continuación aparecen los ejercicios de la EVAU del bloque de probabilidad de los últimos años con las soluciones. Se recomienda trabajarlos para preparar la EVAU. En caso de necesitar consultar el desarrollo de la solución paso a paso se deberá consultar el documento específico de la prueba y año que aparece en la siguiente web[1]:

[1] http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm

PROBABILIDAD

Junio 2017.
(1 punto) En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) *(0,5 puntos)* Sea chica y no juegue al ajedrez.
b) *(0,5 puntos)* No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

SOLUCIÓN:	**a)** $\frac{7}{18}$	**b)** $\frac{1}{2}$

Junio 2017.
(1 punto) En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.

a) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?
b) *(0,5 puntos)* Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

SOLUCIÓN:	**a)** $\frac{3}{13}$	**b)** $\frac{1}{6}$

Septiembre 2017.
(1 punto) Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja A contiene 6 bolas blancas y 3 negras; y la caja B contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja A, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja B, también una tras otra, sin reponer ninguna.

¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?

SOLUCIÓN:	$\frac{7}{24}$

Septiembre 2017.
(1 punto) En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) *(0,5 puntos)* Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos)

b) *(0,5 puntos)* Apruebe matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

SOLUCIÓN:	**a)** 0,8	**b)** 0,6

Junio 2018.

(1,5 puntos) Al 80% de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40% les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.

a) *(0,75 puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) *(0,75 puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIÓN:	**a)** 0,9	**b)** 0,0008

Junio 2018.
(1,5 puntos) En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: A, B y C. El 30% de los trabajadores pertenecen a la categoría A; el 25% a la categoría B y el resto a la categoría C.

Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría A un 5% habla inglés; mientras que de la categoría B un 20% habla inglés y de los trabajadores de la categoría C un 60% habla inglés.

a) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?
b) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SÍ habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría C?

SOLUCIÓN:	**a)** 0,335	**b)** 0,806

Septiembre 2018.
(1,5 puntos) Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tienen la misma probabilidad de aparecer).

a) *(0,75 puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número para en todos los lanzamientos.
b) *(0,75 puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIÓN:	**a)** $\frac{1}{1024}$	**b)** $\frac{15}{2^7} \simeq 0,1172$

Septiembre 2018.
(1,5 puntos)

a) *(0,75 puntos)* En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?
b) *(0,75 puntos)* Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos? (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIÓN:	**a)** 0,2	**b)** 0,5583

Junio 2019.
Se dispone de dos cajas, la A contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja B contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) *(0,75 puntos)* Se escoge una bola cualquiera de la caja A y se pasa a la caja B. Posteriormente se saca una bola de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea morada?

b) *(0,75 puntos)* Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la A contiene 3 moradas y 2 rojas y la B contiene 4 moradas y 4 rojas.

Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

SOLUCIÓN:	**a)** 23/45	**b)** 4/9

Junio 2019.

La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0,75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.

A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

SOLUCIÓN: **a)** $\binom{20}{10}\cdot 0,75^{10}\cdot 0,25^{10}\simeq 0,0099$ **b)** $\binom{20}{20}\cdot 0,75^{20}\simeq 0,0032$

c) $\binom{20}{18}\cdot 0,25^{18}\cdot 0,75^{2}+\binom{20}{19}\cdot 0,25^{19}\cdot 0,75+\binom{20}{20}\cdot 0,25^{20}\simeq 0,00000000161$

Septiembre 2019.

Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30% agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40% elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65% eligen hotel.

a) *(0,5 puntos)* Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) *(0,5 puntos)* Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) *(0,5 puntos)* Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

SOLUCIÓN:	**a)** 0,12	**b)** 0,55	**c)** 0,4045

Septiembre 2019.

Un juego de ruleta tiene 25 casilla numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) *(0,75 puntos)* Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) *(0,75 puntos)* Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

SOLUCIÓN: **a)** $\binom{100}{10} \cdot 0,48^{10} \cdot 0,52^{90}$ **b)** 0,7784

3

Álgebra

A continuación aparecen los ejercicios de la EVAU del bloque de álgebra de los últimos años con las soluciones. Se recomienda trabajarlos para preparar la EVAU. En caso de necesitar consultar el desarrollo de la solución paso a paso se deberá consultar el documento específico de la prueba y año que aparece en la siguiente web[1]:

[1] http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm

Junio 14.

(2,5 puntos) Sea m un número real y considere la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) *(1 punto)* Determine todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) *(1 punto)* Determine, si existe, la inversa de A cuando $m = 0$.

c) *(0,5 puntos)* Determine, si existe, la inversa de A^2 cuando $m = 0$.

SOLUCIÓN.

a) Existe inversa $\forall m$. **b)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\left(A^2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 14.

(2,5 puntos) Considere las matrices de orden 2×2 siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \; , \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; , \; D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine dos matrices M y N de orden 2×2 tales que: $\begin{cases} AM + BN = D \\ AM \qquad\; = N \end{cases}$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz G de orden 3×3, cuyas columnas se representan por C_1, C_2, C_3 y cuyo determinante vale 2. Considere ahora la matriz H cuyas columnas son C_3, C_3+C_2, $3C_1$, ¿cuál es el determinante de esta nueva matriz H?

SOLUCIÓN.

a) $M = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/3 \\ -4/9 & -1/3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $|H| = -6$

Septiembre 14.

(2,5 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Sean A y B matrices 2×2. Determine dichas matrices sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones:

$$A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Sean C y D las matrices: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determine el determinante: $\left|5(CD)^{-1}\right|$, donde $(CD)^{-1}$ es la matriz inversa de (CD).

SOLUCIÓN.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\left|5(CD)^{-1}\right| = -\frac{25}{2}$

Septiembre 14.

(2,5 puntos) Determine para qué valores de a el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible

$$\begin{aligned} ax - 3y + 6z &= 3 \\ ax + 3y + az &= 6 \\ -ax - 6y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.
• Si $a \neq -4$ y $a \neq 0$: compatible determinado. • Si $a = -4$: incompatible. • Si $a = 0$: incompatible.

Junio 15.

(3 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) *(2 puntos)* Determine el rango de esa matriz según los valores de λ

b) *(1 punto)* Determine para qué valores de λ existe la inversa de esa matriz y determine la inversa, si existe, para $\lambda = -2$.

SOLUCIÓN.
a) ▪ Si $\lambda \neq -1, 0, 1$: $\text{rg}A = 3$ ▪ Si $\lambda = -1$: $\text{rg}A = 2$ ▪ Si $\lambda = 0$: $\text{rg}A = 2$ ▪ Si $\lambda = 1$: $\text{rg}A = 2$

b) $\exists A^{-1}\ \forall \lambda \neq -1, 0, 1$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$

Junio 15.

(3 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ donde x, y y z son números reales.

Determine x, y y z para que el vector $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $MA = B$.

b) *(1,5 puntos)* Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a \neq 0$, $a + b = 0$, $c = a$.
Determine si el sistema $NX = B$ es compatible determinado.

SOLUCIÓN.
a) $x = -\frac{2}{9}$, $y = \frac{4}{9}$, $z = \frac{1}{9}$ **b)** Es compatible determinado.

Septiembre 15.

(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Determine para qué valores de λ el sistema de ecuaciones que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} 2\lambda x - 2y - \lambda z = 2 \\ \lambda x - y + z = 5 \\ 3\lambda x + 4y + (\lambda - 1)z = \lambda - 5 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) ▪ Si $\lambda \neq 0$ y -2: compatible determinado. ▪ Si $\lambda = 0$: incompatible. ▪ Si $\lambda = -2$: incompatible.

b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

Septiembre 15.

(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera y considere la matriz y vector siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) *(1 punto)* ¿Para qué valores de λ existe la matriz inversa $(A - 2I)^{-1}$, siendo I la matriz identidad de orden 3?

2) *(1 punto)* Si $\lambda = 0$, encuentre los valores de x, y, y z que satisfacen la ecuación $AX = 2X + b$ donde $b = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

b) *(1 punto)* Sean F_1, F_2 y F_3 la primera, segunda y tercera filas, respectivamente, de una matriz M de orden 3×3 cuyo determinante es -2.

Calcule el determinante de una matriz cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente: $5F_1 - F_3$, $3F_3$ y F_2.

SOLUCIÓN.

a) 1) $\exists (A - 2I)^{-1} \ \forall \lambda \neq -2, -1, 1$ 2) $x = 1$, $y = -\frac{10}{3}$, $z = 1$

b) 30

Junio 16.

(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera, determine para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} -x+\lambda y+\lambda z &= 4 \\ \lambda x+\lambda y+z &= 6 \\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z &= 3+\lambda \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, para $\lambda = 2$.

SOLUCIÓN.
a) ▪ Compatible determinado para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. ▪ Compatible indeterminado para $\lambda = 1$. ▪ Incompatible para $\lambda = 0$.

b) $x = -1$, $y = \frac{13}{2}$, $z = -5$

Junio 16.

(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea "a" un parámetro real cualquiera. Determine el rango de la matriz siguiente según los diferentes valores del parámetro "a".

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1, C_2 y C_3 y cuyo determinante es 2.

Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, $C_3 + C_2$ y $3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

SOLUCIÓN.

a) ▪ Para $a \neq -1$ y $\lambda \neq 1$: $\text{rg}\,A = 3$ ▪ Para cualquier otro valor de a: $\text{rg}\,A = 2$. **b)** $\left|B^{-1}\right| = -\frac{1}{6}$

Septiembre 16.
(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Determine para qué valores de k el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} x+y+kz &= 6 \\ x+ky+z &= 0 \\ kx-y+z &= -6 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, cuando $k = -1$

SOLUCIÓN.
a) ▪ Compatible determinado para $k \neq -1, 0, 1$ ▪ Compatible indeterminado para $k = 0$ y para $k = -1$
▪ Incompatible para $k = 1$ **b)** $x = 3$, $y = 3+\lambda$, $z = \lambda$

Septiembre 16.
(3 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Determine la matriz inversa, si existe, de la matriz siguiente:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Determine la matriz A^2+B^2 siendo A y B las matrices solución del siguiente sistema:

$$2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.
a) $M^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A^2+B^2=\begin{pmatrix} 14/9 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 17.
(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ:

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ \lambda x + z &= 0 \\ x+(1+\lambda)y+\lambda z &= \lambda+1 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Halle la solución, si existe, cuando $\lambda=1$.

SOLUCIÓN.
a) ▪ Compatible determinado para $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq 0$. ▪ Compatible indeterminado para $\lambda=-1$. ▪ Compatible indeterminado para $\lambda=0$. **b)** $x=0$, $y=1$, $z=0$

Junio 17.
(3 puntos)

a) *(2 puntos)* Sea A una matriz de dimensión 3×3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a.1) *(1 punto)* Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si $|B|=1$, calcule el determinante de A, es decir: $|A|$

a.2) *(1 punto)* Si $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$, determine los valores de x para los que se cumple que $|B|=1$, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) *(1 punto)* Determine las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma $M=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$ que verifiquen que $MM'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ donde M' representa la matriz traspuesta de M.

> **SOLUCIÓN.**
>
> a) **a.1)** $|A|=8$ **a.2)** $x=\pm3$ **b)** $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

Septiembre 17.
(3 puntos)

Sea "m" una constante real. Determine para qué valores de "m" el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} 5x+4y+2z&=0\\ 2x+3y+z&=0\\ 4x-y+m^2z&=m-1 \end{aligned}$$

> **SOLUCIÓN.**
> Compatible determinado para $m\neq-1$ y $m\neq1$. Compatible indeterminado para $m=1$. Incompatible para $m=-1$.

Septiembre 17.
(3 puntos)

Sea k una constante real y considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & k & 3k+2\\ 1 & 0 & -k\end{pmatrix}$

a) *(1 punto)* Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.

b) *(1 punto)* Si $k=2$, calcule la inversa de A, si existe.

c) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

> **SOLUCIÓN.**
>
> a) $\exists A^{-1}\ \forall k\neq-4\ ,\ 0$ b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 2/3\\ -2/3 & 1/2 & 2/3\\ 1/6 & 0 & -1/6\end{pmatrix}$ c) $\forall k\neq-4\ ,0:\ rg A=3$
> Para $k=-4$ y para $k=0$: $rg A=2$

Junio 18.

(3 puntos) Considere el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{aligned} x+y+mz&=m\\ mx+(m-1)y+z&=2\\ x+y+z&=1 \end{aligned}$

a) *(1 punto)* Determine los valores del parámetro m para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando $m=1$.

c) *(1 punto)* Considere las matrices:

$C=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Determine el rango de la matriz producto CD.

SOLUCIÓN.
a) Compatible determinado para $m\neq 1$; compatible indeterminado para $m=1$
b) $x=2-\lambda$, $y=-1$, $z=\lambda$ **c)** $\text{rg}\, CD=1$

Junio 18.

(3 puntos) Considere la matriz: $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

a) *(1,5 puntos)* Determine los valores del parámetro k para los que la matriz $A-kI$ tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la matriz X que verifica que $(A-3I)X=2I$ siendo I la matriz identidad de orden 3 y A la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

SOLUCIÓN.

a) $\exists(A-kI)^{-1}\quad \forall k\neq 0\,,2\text{ y }4$ **b)** $X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\0 & -2/3 & 0\\2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Septiembre 18.

(3 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema: $\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\2 & 2 & 2\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

b) *(1,5 puntos)* Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\x & y & z\end{pmatrix}$ es 4, es decir $|A|=4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación: $b=\begin{pmatrix}2 & 3a+k & x+5\\2 & 3b+k & y+5\\2 & 3c+k & z+5\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.
a) $x=-\dfrac{\lambda}{2}$, $y=-\dfrac{\lambda}{2}$, $z=\lambda$ **b)** $|B|=24$

Septiembre 18.

(3 puntos)

a) *(1,5 puntos)* Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

encuentre la matriz X, de dimensión 3×3, que resuelve la ecuación matricial $AX+B=A^2$.

b) *(1,5 puntos)* Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k

$$C=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&k\\k&k&1\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) $X=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&-1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ **b)** $\text{rg}C=3\ \ \forall k\neq 0$ y 6 , $\text{rg}C=2$ para $k=0$ y para $k=6$

Junio 19.

a) *(2 puntos)* Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A=\begin{pmatrix}k&0&k\\0&k+2&0\\1&1&k+2\end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k=1$.

SOLUCIÓN.

a) $\text{rg}A=3\ \ \forall k\neq -2,-1$ y 0 , $\text{rg}A=2$ para $k=-2$, para $k=-1$ y para $k=0$ **b)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&1/6&-1/2\\0&1/3&0\\-1/2&-1/6&1/2\end{pmatrix}$

Junio 19.

a) *(1,5 puntos)* El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) *(1,5 puntos)* Sabiendo que $a=-2$, calcule el valor del siguiente determinante

$$A=\begin{vmatrix}a&a+b&a-c\\2a&3a+2b&4a-2c\\3a&6a+3b&10a-3c\end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) 22 de esquí alpino, 15 de esquí nórdico y 23 de escalada. **b)** -8

Septiembre 19.

a) *(1,5 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\begin{aligned} 2x - y + kz &= 1 \\ -x + y - kz &= 0 \\ 2x - ky + 2kz &= -1 \end{aligned}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema cuando $k = 1$

SOLUCIÓN.
a) Para $k \neq 0$ y $k \neq 2$: compatible determinado ; para $k = 0$: incompatible ; para $k = 2$: incompatible.
b**)** $x = 1$, $y = -1$, $z = -2$

Septiembre 19.

a) *(1,5 puntos)* Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$

SOLUCIÓN.

a) Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$: $\text{rg}A = 3$; para $m = 1$: $\text{rg}A = 2$; para $m = 2$: $\text{rg}A = 2$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

4

Geometría

A continuación aparecen los ejercicios de la EVAU del bloque de geometría de los últimos años con las soluciones. Se recomienda trabajarlos para preparar la EVAU. En caso de necesitar consultar el desarrollo de la solución paso a paso se deberá consultar el documento específico de la prueba y año que aparece en la siguiente web[1]:

[1] http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm

Junio 14. *(2,5 puntos)* Dados el punto $P \equiv (1,-1,0)$ y la recta: $s:\begin{cases} -2x \quad +z-1=0 \\ 3x-y \quad -3=0 \end{cases}$

a) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación general del plano $(Ax+By+Cz+D=0)$ que contiene al punto P y a la recta s.

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano $\pi: 2x+y-z+1=0$ y la recta s.

SOLUCIÓN.
a) $7x-3y+z-10=0$ **b)** 19^{o} 6' 24''

Junio 14. *(2,5 puntos)* Considere las rectas $r:\begin{cases} 2x-4z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ $\quad s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{a} = \dfrac{z-(1/2)}{1}$

a) *(2 puntos)* Determine la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de a.

b) *(0,5 puntos)* Si $a=2$, determine el ángulo que forman las rectas r y s.

SOLUCIÓN.
a) Si $a=-3$: paralelas ; si $a \neq -3$: se cruzan. **b)** 84^{o} 53' 20''

Septiembre 14. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el valor a valores de m, si existen, para que la recta $r:\begin{cases} mx+y=2 \\ x+mz=3 \end{cases}$ sea paralela al plano $\pi: 2x-y-z+6=0$.

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P=(2,1,1)$ a la recta r cuando $m=2$.

SOLUCIÓN.
a) $m=-1$ **b)** $d=\sqrt{\dfrac{38}{21}}$

Septiembre 14. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos $\pi: x-y-z=0$ y $\pi':\begin{cases} x=3+2\lambda-\mu \\ y=1+\lambda+\mu \\ z=\mu \end{cases}$

b) *(1 punto)* Determine la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $P=(1,0,1)$. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

SOLUCIÓN.

a) Se cortan. **b)** $\begin{cases} x+y-1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

Junio 15. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} -x-2y+12=0 \\ 3y-z-15=0 \end{cases} \qquad s:\ \frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{3}$$

b) *(1 punto)* Calcule la distancia entre esas rectas.

SOLUCIÓN.

a) Las rectas se cruzan. **b)** $d(r,s)=\frac{56}{\sqrt{59}}$

Junio 15. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta paralela a la recta:

$$r:\begin{cases} 5x-3y+2z=1 \\ x+3y-2z=-4 \end{cases}$$

que pasa por el punto $(0,2,-4)$.

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P=(1,1,0)$ a la recta r anterior.

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} x=0 \\ 3y-2z=14 \end{cases}$ **b)** $d(P,r)=\frac{\sqrt{22}}{2}\ u$

Septiembre 15. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que satisfacen que $|\vec{u}|=5$, $|\vec{v}|=2$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$. Determine $\vec{u}\times\vec{v}$.

b) *(1 punto)* Considere las rectas siguientes: $r:\begin{cases} 2x-y=0 \\ ax-z=0 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x+by=3 \\ y+z=3 \end{cases}$

1) *(0,5 puntos)* Determine los valores de $a\neq 0$ y $b\neq 0$ para que las rectas sean paralelas.
2) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de $a\neq 0$ y $b\neq 0$ para que las rectas sean coincidentes?

SOLUCIÓN.

a) $\vec{u} \times v = \vec{0}$ **b)** 1) $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$ 2) No.

Septiembre 15. *(2 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* Sea a un parámetro real cualquiera. Dados los planos:

$$\pi : 3x + ay + 2z - 10 = 0 \quad y \quad \pi' : x - y + az - 5 = 0$$

¿Existen valores de a para los que los planos sean paralelos?

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la ecuación de la recta paralela a la recta intersección de los planos:

$$\pi : 3x + 2y + z = 10 \quad y \quad \pi' : 4x - 2y - 8z = 10$$

que pasa por el punto $(1,1,0)$.

SOLUCIÓN.

a) No. **b)** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$

Junio 16. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)*

a.1) *(0,5 puntos)* Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}| = |\vec{s}| = 2$ y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine $\vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s})$.

a.2) *(0,5 puntos)* Si el producto escalar del vector $\vec{u} + \vec{v}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u} - \vec{v}$ por sí mismo es 9 ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$?

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas siguientes:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2} \qquad s : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.

a) **a.1)** **2** **a.2)** 4 **b)** $30^o\ 57'\ 49{,}52''$

Junio 16. *(2 puntos)* Considere el plano π y la recta r que aparecen a continuación:

$$\pi : mx - 3y + 2z = 1 \qquad r : \begin{cases} 3x + y \qquad = 1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Determine para qué valores del parámetro “m” la recta r y el plano π son secantes, es decir, se cortan.

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano π y la recta r cuando $m = 1$.

SOLUCIÓN.

a) $\forall m \neq -4$ **b)** $19^o\ 21'\ 34{,}74''$

Septiembre 16. *(2 puntos)* Determine la ecuación de la recta, **expresada como intersección de dos planos**, que pasa por el punto $(1,-1,2)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $A=(1,0,1)$, $B=(3,2,1)$, $C=(2,-1,0)$.

SOLUCIÓN.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

Septiembre 16. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el valor del parámetro "a" para que el plano $\pi:\ x-3y+az=-6$ sea paralelo a la recta $r:\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+3z=-7 \end{cases}$

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo entre esa recta r y el plano $\pi:\ 2x-3y-z+6=0$.

SOLUCIÓN.

a) $a=-3$ **b)** $4^{\circ}\ 5'\ 45{,}76''$

Junio 17. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P(0,0,0)$ a cada una de las dos rectas anteriores.

SOLUCIÓN.

a) Se cruzan **b)** $d(P,r)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $d(P,s)=0$

Junio 17. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sea "m" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "m":

$$\pi: mx-6y+2z=2 \qquad \pi':\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=1-\lambda \\ z=2-2\lambda+\mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas: $r:\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} 2x-4y-2z=0 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}$

SOLUCIÓN.

a) Para $m=-2$: paralelos ; para $m\neq-2$: secantes **b)** $\alpha=\arccos\dfrac{4}{5}\simeq 36^{\circ}\ 52'\ 12''$

Septiembre 17. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi: x-2y+z=1 \qquad \pi': \begin{cases} x = \quad 2\lambda+\mu \\ y = \quad \lambda+k\mu \\ z = 1 \quad -\mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real k.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando $k=3$.

SOLUCIÓN.

a) Para $k=0$: coincidentes. Para $k\neq 0$: secantes **b)** 90^{o}

Septiembre 17. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r: \begin{cases} 2x-3y+z=4 \\ y+z=0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P(2,1,-1)$.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi: 2x-3y+z=4 \qquad y \qquad \pi': y+z=0$$

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} x-2y \quad =0 \\ y+z=0 \end{cases}$ **b)** 112^{o} 12' 27,56''

Junio 18. *(1,5 puntos)*

Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $(0,0,0)$ y contiene a la recta $r: \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ 3y-2z+4=0 \end{cases}$

SOLUCIÓN.

$4x+y-2z=0$

Junio 18. *(1,5 puntos)*

Considere el plano $\pi: 2ax+y+az=4$ y la recta $r: \begin{cases} 2x+y+z=2 \\ -x+y+2z=3 \end{cases}$

a) *(0,75 puntos)* Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de a.

b) *(0,75 puntos)* Para $a=2$, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

SOLUCIÓN.

a) Para $a\neq 1$: secantes , para $a=1$: paralelos **b)** $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$

Septiembre 18. *(1,5 puntos)*

a) *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(2,1,1)$ y $\vec{w}=(0,2,1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen estos tres vectores.

b) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas r y s siguientes:

$$r:\ \frac{x+1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z+2}{1} \qquad s:\ \begin{cases} -x+y+2z-4=0 \\ x+2y+z-5=0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.
a) $1\ u^3$ **b)** **Se cruzan**

Septiembre 18. *(1,5 puntos)*

Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta $r:\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$ esté contenida en el plano $\pi:\ mx+y+nz=4$.

SOLUCIÓN.
$m=\frac{5}{3}$, $n=\frac{7}{3}$

Junio 19.

a) *(1 punto)* Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados $A:(1,1,2)$, $B:(2,2,2)$ y $C:(-1,a,b)$ y determine la recta que los contiene.

b) *(0,5 puntos)* Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector: $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$ donde el símbolo "$\times$" representa el producto vectorial.

SOLUCIÓN.
a) $a=-1$, $b=2$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0}$ **b)** $\vec{0}$

Junio 19.

a) *(1 punto)* Determine la ecuación del plano determinado por el punto $P:(2,1,2)$ y la recta $r:(1,0,0)+t(-1,1,1)$.

b) *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos vectores.

SOLUCIÓN.
a) $x+3y-2z-1=0$ **b)** $\frac{3\sqrt{6}}{2}\ u^2$

Septiembre 19.

a) *(0,75 puntos)* Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y donde el símbolo $\times$ representa el producto vectorial.

b) *(0,75 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P:(1,3,2)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} 3x-2y = -1 \\ 2y+3z=3 \end{cases}$

SOLUCIÓN.
a) $V=6\,u^3$ **b)** $2x+3y-2z-7=0$

Septiembre 19.

(1,5 puntos) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta: $r: \begin{cases} 3x+y = -1 \\ 4y+3z=5 \end{cases}$ y pasa por el punto $A:(1,3,-1)$

SOLUCIÓN.
$4x-8y-7z+13=0$