

Nombre: _____ Fecha: _____

Tiempo: 55 minutos

Tipo: A

Esta prueba tiene 5 ejercicios. La puntuación máxima es de 15. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	3	2	6	2	2	15

1. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1}$ (1 punto)

Solución: 0

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{7x^2 - x + 4}$ (2 puntos)

Solución: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{7x^2 - x + 4} \right) = \frac{1}{7}$

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$ (1 punto)

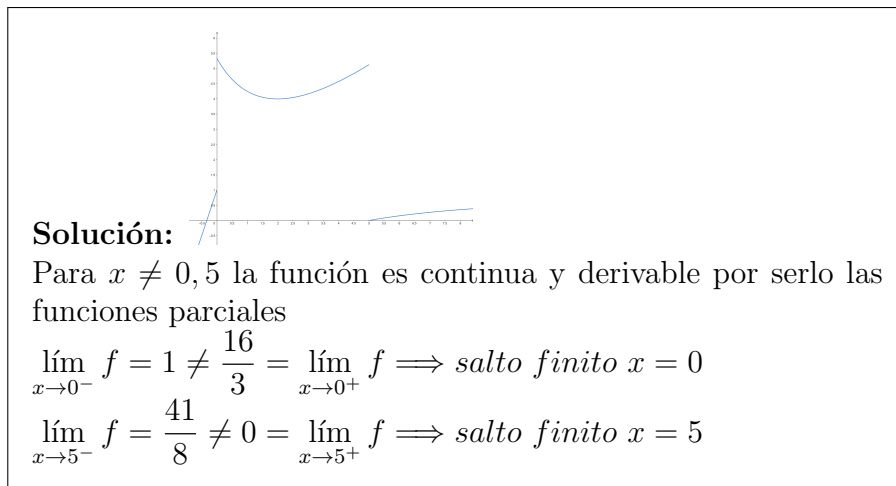
Solución: $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \ln(x) - \frac{1}{x^3}$

(b) $g(x) = \frac{e^{2x}}{(x+1)^2}$ (1 punto)

Solución: $\frac{2e^{2x}}{(x+1)^2} - \frac{2e^{2x}}{(x+1)^3}$ 3. Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x < 0 \\ \frac{x^2 + 16}{x + 3} & 0 \leq x < 5 \\ 1 + 2x - \sqrt{4x^2 + 21} & x \geq 5 \end{cases}$$

(a) ¿Para qué valores de x es la función f continua? (2 puntos)



- (b) Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [1, 4]$ (2 puntos)

Solución: $x \in [1, 4] \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x+3} - \frac{x^2+16}{(x+3)^2} = \frac{(-x^2 + 6x - 16)}{(x+3)^2}$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 6x - 16 = 0 \rightarrow x = -8 \wedge x = 2$$

$$f(1) = \frac{17}{4} \wedge f(2) = 4 \wedge f(4) = \frac{32}{7} \rightarrow \min : (2, 4)$$

- (c) Calcular el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (2 puntos)

Solución: $1 + 2x - \sqrt{4x^2 + 21} = \frac{(1+2x-\sqrt{4x^2+21})(1+2x+\sqrt{4x^2+21})}{1+2x+\sqrt{4x^2+21}} = \frac{4x-20}{1+2x+\sqrt{4x^2+21}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-20}{1+2x+\sqrt{4x^2+21}} = \frac{4}{2+\sqrt{4}} = 1$$

4. Dada la función (2 puntos)

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2}$$

Encontrar a y b de forma que $f(1) = 2$ y f tenga un máximo relativo en $x = 1$

Solución: $f(1) = 2 \iff a + b = 2$

$$f'(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{2}{x^3}(ax+b)$$

Máximo relativo en $x = 1 \iff f'(1) = 0 \iff -a - 2b = 0$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -a - 2b = 0 \end{cases} \rightarrow a = 4 \wedge b = -2$$

5. Calcular (2 puntos)

$$\int_1^2 \left(2xe^{3x^2} + \frac{6}{x+1} \right) dx$$

$$\textbf{Solución: } \int_1^2 \left(2xe^{3x^2} + \frac{6}{x+1} \right) dx = \left[\frac{e^{3x^2}}{3} + 6 \log(x+1) \right]_1^2 = -\frac{e^3}{3} - 6 \log(2) + 6 \log(3) + \frac{e^{12}}{3}$$