

**Nombre:** \_\_\_\_\_ **Fecha:** \_\_\_\_\_

**Tiempo: 50 minutos**

**Tipo: A**

Esta prueba tiene 4 ejercicios. La puntuación máxima es de 13. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	Total
Puntos:	2	5	3	3	13

1. Dadas las matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  y  $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(a) Encontrar si existe una matriz  $X$  tal que  $3 \cdot X + 2 \cdot A = B \cdot C$ . (1 punto)

**Solución:**  $X = \frac{1}{3} \cdot (B \cdot C - 2 \cdot A) = \frac{1}{3} \left( \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right) =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(b) Encontrar si existe la matriz inversa de  $A$ , por determinantes (1 punto)

**Solución:**  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} \begin{bmatrix} -9 & -3 & -7 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}}$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcula (1 punto)

$$A - 2 \cdot I$$

siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.

**Solución:**  $A - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

- (b) Determina los valores del parámetro
- $k$
- para que la matriz: (2 puntos)

$$A - k \cdot I$$

tenga inversa.

$$\text{Solución: } A - k \cdot I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k & 0 & 1 \\ 0 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 2-k \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 2-k & 0 & 1 \\ 0 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 2-k \end{vmatrix} = -k(k-3)(k-1) \rightarrow k \neq [0, 1, 3].$$

- (c) Encuentra la matriz
- $X$
- que verifica que: (2 puntos)

$$(A - 2 \cdot I) \cdot X = 2 \cdot I$$

**Solución:**

$$(A - 2 \cdot I) \cdot X = 2 \cdot I \rightarrow X = (A - 2 \cdot I)^{-1} \cdot 2I$$

Obtengamos las matrices que necesitamos:  $(A - 2 \cdot I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

y  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Por tanto  $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Dadas las matrices  $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

- (a) Calcula
- $C = B \cdot A - A^t \cdot B^t$
- (1 punto)

**Solución:**  $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$  y  $A^t \cdot B^t = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ . Luego

$$C = B \cdot A - A^t \cdot B^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Halle la matriz
- $X$
- siendo
- $A \cdot B \cdot X = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
- (2 puntos)

**Solución:**  $A \cdot B = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$  y  $(A \cdot B)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{X} X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

4. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine el rango de A según los diferentes valores de k (2 puntos)

**Solución:** El único menor es el propio determinante  $\rightarrow \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{vmatrix} = k(k+1)(k+2) \rightarrow k \neq [-2, -1, 0]$  rango será 3

caso k=-2:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2.$$

caso k=-1:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2.$$

caso k=0:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2.$$

(b) Determine la inversa de A para k=1 (1 punto)

**Solución:**  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$