EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

a.- (*3 puntos*) ¿Es posible calcular $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b.- (*3 puntos*) Encontrar, si existe, una matriz X, que verifique $2X + 3B = 2C$.

c.- (*4 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

2.- (*10 puntos*) Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

3.- (*10 puntos*)

a.- (*3 puntos*) Calcular la derivada de:

$$f(x) = e^{3x^2-5x}$$

b.- (*3 puntos*) Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c.- (*4 puntos*) Calcular:

$$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx$$

4.- (*10 puntos*) El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

donde $x \in [2, 15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros). Calcular:

a.- (*1 punto*) Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?

b.- (*4 puntos*) ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?

c.- (*5 puntos*) ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

5.- (*10 puntos*) En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones: Londres y París. El curso está compuesto por tres clases: A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París; en la clase B, que tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París; en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.

a.- (*2 puntos*) Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?

b.- (*2 puntos*) Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?

c.- (*3 puntos*) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que los dos hayan votado por Londres?

d.- (*3 puntos*) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

CONTINÚA AL DORSO

6.- (*10 puntos*) Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU tiene distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes.

a.- (*5 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b.- (*4 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm:

175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU.

c.- (*1 punto*) Calcular la varianza de la muestra del apartado **b**.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

1.- MATRICES

(a) $$(BA)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \left[\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) $$2X + 3B = 2C$$

$$2X = 2C - 3B$$

$$X = \frac{1}{2}(2C - 3B) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & -6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 7 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7/2 & 4 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

(c) $$D^{-1} = \frac{1}{|D|}(\mathrm{Adj}\,D)^t \quad ; \quad \boxed{|D| =} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0+1+0) - (-3) = \boxed{= 4}$$

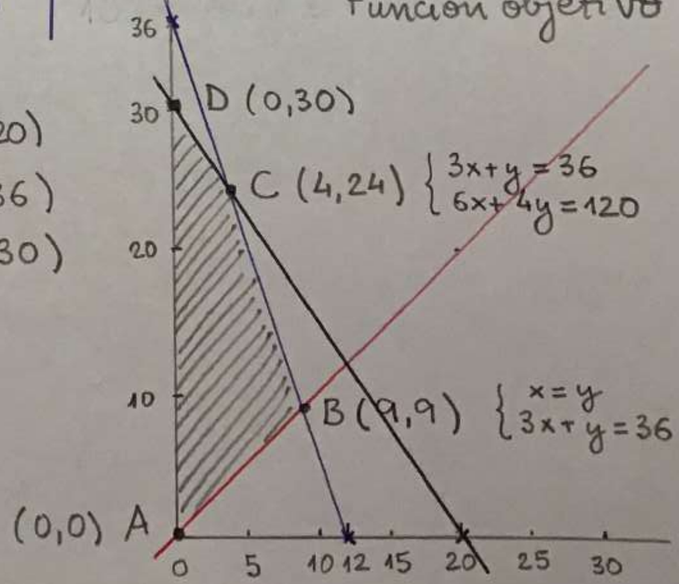
$$\mathrm{Adj}\,D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ +1 & 3 & +2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2.- PROGRAMACIÓN LINEAL

	m TELA	h TRABAJO	Beneficio
$x \equiv$ nº vestidos fiesta	3	6	100
$y \equiv$ nº vestidos calle	1	4	65
	36	120	

$F(x,y) = 100x + 65y$
Función objetivo

$$\begin{cases} x \leq y & (0,0)\ (20,20) \\ 3x + y \leq 36 & (12,0)\ (0,36) \\ 6x + 4y \leq 120 & (20,0)\ (0,30) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$



Beneficio: $F(x,y) = 100x + 65y$

A $(0,0) \Rightarrow F(0,0) = 0$

B $(9,9) \Rightarrow F(9,9) = 900 + 585 = 1485$ €

C $(4,24) \Rightarrow F(4,24) = 400 + 1560 = \boxed{1960 €}$

D $(0,30) \Rightarrow F(0,30) = 0 + 1950 = 1950$ €

SOL: Tiene que hacer 4 vestidos de fiesta y 24 vestidos de calle y el beneficio será 1960 €

$\boxed{3.-}$ DERIVADAS, LÍMITES E INTEGRALES

(a) $f(x) = e^{3x^2-5x}$

$$\boxed{f'(x) = (6x-5)\,e^{3x^2-5x}}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} \left(=\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x}\to 0}{\sqrt{16+\frac{5}{x^2}}\to 0} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

(c) $$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,dx \;\left\|\begin{array}{l} 4x+1 = t \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array}\right\| = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\,2\sqrt{t} = \frac{\sqrt{4x+1}}{2} + K$$

$$= \left[x^3 - \frac{\sqrt{4x+1}}{2}\right]_0^2 = \left(8 - \frac{3}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 8 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{7}$$

4.- FUNCIONES

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100) \qquad x \in [2, 15] \quad (\text{miles})$$

(a) 5000 unidades $\Rightarrow x = 5$

$$C(5) = \frac{1}{10}(25 - 80 + 100) = \boxed{4{,}5 \text{ €/unidad}}$$

(b) $C(x) < 4 \quad ; \quad x \in [2, 15]$

$$\frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100) < 4$$

$$x^2 - 16x + 100 < 40$$

$$x^2 - 16x + 60 < 0 \Rightarrow x^2 - 16x + 60 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} = \begin{cases} 10 \\ 6 \end{cases}$$

	6		10	
+	0	−	0	+

$\Rightarrow x \in (6, 10)$

(c) $C'(x) = \frac{1}{10}(2x - 16) = 0 \Rightarrow x = 8$

$C''(x) = \frac{2}{10} > 0 \Rightarrow$ en $x = 8$ se produce coste mínimo
(8000 unidades)

$C(2) = 7{,}2$ €/unidad

$C(8) = 3{,}6$ €/unidad

$C(15) = 8{,}5$ €/unidad $\Rightarrow$ Máximo

5.- PROBABILIDAD

	LONDRES	PARÍS	T
A	12	16	28
B	10	15	25
C	18	5	23
	40	36	76

(a) $P(L) = \frac{40}{76} \simeq 0{,}5263$

(b) $P(B/L) = \frac{P(B \cap L)}{P(L)} = \frac{10}{40} = 0{,}25$

(c) $P(L_1 \cap L_2) = \frac{40}{76} \cdot \frac{39}{75} = \frac{26}{95} \simeq 0{,}2737$

(d) $P(\text{cada clase}) = 6 \cdot P(A_1 B_2 C_3) = 6 \cdot \frac{28}{76} \cdot \frac{25}{75} \cdot \frac{23}{74} = \frac{161}{703} \simeq 0{,}2290$

$\boxed{6.-}$ DISTRIBUCIÓN NORMAL

$IC\ (\mu - E, \mu + E)$

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(a) $\sigma = 10$ cm

Amplitud ≤ 4 cm $\Rightarrow E \leq 2$ cm

97% $\Rightarrow$ 

98,5% $\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} = 2,17 \cdot \frac{10}{2} = 10,85$$

$$n = 10,85^2 = 117,7225 \Rightarrow \boxed{n \geqslant 118}$$

(b) $n = 9$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{175 + \cdots + 158}{9} = 171,\widehat{2} \text{ cm}$$

$$97\% \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{10}{3} = 7,2\widehat{3} \text{ cm}$$

$$IC\ (171,\widehat{2} - 7,2\widehat{3}\ ;\ 171,\widehat{2} + 7,2\widehat{3})\quad (163,99\ ;\ 178,45)$$