Departamento de Matemáticas
2º Bachillerato CCSS
Recuperación 1ªEv.

Nombre: ______________________________ **Fecha:** ____________

Tiempo: 50 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 4 ejercicios. La puntuación máxima es de 12. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	Total
Puntos:	4	3	3	2	12

1. Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$, con a un parámetro real:

   (a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema de ecuaciones (1 *punto*)

   $$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   tiene solo la solución: $x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$?

   Solución: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = a^2 - 1 \rightarrow det(A) = (a-1)(a+1)$.

   Discusión:
   Si a $\neq [-1,\ 1] \rightarrow$ S.C.D.
   Si a=-1:
   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 2 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow$ S.C.I.
   Si a=1:
   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 2 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow$ S.C.I.

   (b) Para $a = -1$, determina justificadamente y sin resolverlo cuántas soluciones tiene el sistema (2 *puntos*)

   $$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Para a=1:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 2 \wedge ran(A) =$
$2 \rightarrow$ S.C.I.

(c) Resuelve justificadamente el sistema del apartado anterior (1 *punto*)

Solución: Para a=1:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \{(1-z,\ z-1,\ z)\}$

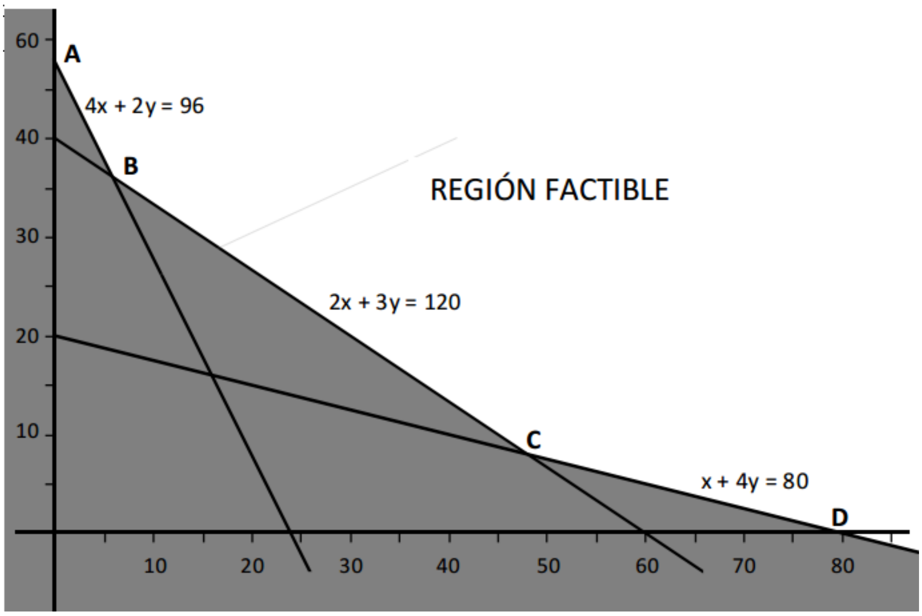
2. Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros.

(a) Plantear un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. (2 *puntos*)

(b) Resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo? (1 *punto*)

Solución:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + 4y \geqslant 80 \\ 2x + 3y \geqslant 120 \\ 4x + 2y \geqslant 96 \end{cases}$$



Vértices:
$A(0,48) \rightarrow f(0,48) = 1500 \cdot 0 + 1000 \cdot 48 = 48000$
$B(6,36) \rightarrow f(6,36) = 1500 \cdot 6 + 1000 \cdot 36 = 45000$
$C(48,8) \rightarrow f(48,8) = 1500 \cdot 48 + 1000 \cdot 8 = 60000$
$D(80,0) \rightarrow f(80,0) = 1500 \cdot 80 + 1000 \cdot 0 = 120000$

Por lo tanto, el coste mínimo, de 45000 euros, se obtiene al trabajar 6 horas la fábrica A y 36 horas la fábrica B.

3. Para la compra de un artículo de precio 21,50 euros se utilizan monedas de 1 euro, de 50 céntimos de euro y de 2 euros. El número total de monedas excede en una unidad al triple de monedas de 1 euro. El 30 % de la suma del número de monedas de 1 euro con el doble del número de monedas de 50 céntimos coincide con el número de monedas de 2 euros.
   (a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje el enunciado (2 *puntos*)
   (b) Resuelve el problema (1 *punto*)

Solución: $\begin{cases} 100x + 50y + 200z = 2150 \\ x + y + z = 3x + 1 \\ 30x + 60y = 100z \end{cases}$

Por Gauss:
$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 200 & 2150 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 30 & 60 & -100 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 50 & 200 & 2150 \\ 0 & 2 & 5 & 44 \\ 0 & 0 & -\frac{545}{2} & -1635 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sol:}\{(6,\ 7,\ 6)\}$$

Por Matriz inversa:
$$X = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{8}{2725} & -\frac{34}{109} & \frac{3}{1090} \\ \frac{17}{5450} & \frac{32}{109} & \frac{1}{109} \\ \frac{3}{1090} & \frac{9}{109} & -\frac{2}{545} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2150 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$ Ya que

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 200 \\ -2 & 1 & 1 \\ 30 & 60 & -100 \end{bmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{bmatrix} 100 & -2 & 30 \\ 50 & 1 & 60 \\ 200 & 1 & -100 \end{bmatrix} \xrightarrow{adjunta} \begin{bmatrix} -160 & 17000 & -150 \\ -170 & -16000 & -500 \\ -150 & -4500 & 200 \end{bmatrix} \xrightarrow{inversa}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{2725} & -\frac{34}{109} & \frac{3}{1090} \\ \frac{17}{5450} & \frac{32}{109} & \frac{1}{109} \\ \frac{3}{1090} & \frac{9}{109} & -\frac{2}{545} \end{bmatrix}.$$

Por Cramer:

$det(A) = -54500$ Δ_0, s_0: $[-327000,\ 6]$ Δ_1, s_1: $[-381500,\ 7]$ Δ_2, s_2: $[-327000,\ 6]$

4. Considerar la ecuación matricial

$$X \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a^2 + a \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

, con a un parámetro real:

(a) ¿Para qué valores del parámetro a existe una única matriz X que verifica la ecuación anterior? (1 *punto*)

Solución: $det(A) = 2a^2 + 2a - 4 = 2(a-1)(a+2) \rightarrow a \neq [-2,\ 1]$

(b) Si es posible, resolver la ecuación matricial para $a = 1$ (1 *punto*)

Solución: Para $a = 1$ la matriz A no tiene inversa, luego no se puede resolver la ecuación