Nombre: ______________________________ **Fecha:** ____________

Tiempo: 50 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 5 ejercicios. La puntuación máxima es de 21. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	2	4	3	8	4	21

1. Halla el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8}$ en $x = 2$, $x = -2$, $x = \infty$ y $x = -\infty$ (2 *puntos*)

Solución: $f(x) = \frac{x^2-2x}{2x^2-8} = \frac{x}{2(x+2)}$.

$\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2-2x}{2x^2-8}\right) = \frac{1}{4}$
$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{x^2-2x}{2x^2-8}\right) = \frac{1}{4}$
$\lim_{x\to -2^+} \left(\frac{x^2-2x}{2x^2-8}\right) = -\infty$
$\lim_{x\to -2^-} \left(\frac{x^2-2x}{2x^2-8}\right) = \infty$
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-2x}{2x^2-8}\right) = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-2x}{2x^2-8}\right) = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2-2x}{2x^2-8}\right) = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2-2x}{2x^2-8}\right) = \frac{1}{2}$

2. Calcula las siguientes derivadas

(a) $y = \ln(\frac{x}{3} + 1)$ (1 *punto*)

Solución: $\frac{1}{3\left(\frac{x}{3}+1\right)}$

(b) $y = e^{2x+1}$ (1 *punto*)

Solución: $2e^{2x+1}$

(c) $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$ (2 *puntos*)

Solución: $-\frac{2(1-x)^2}{(x+1)^3}+\frac{2x-2}{(x+1)^2}=\frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$

3. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & si\ x\leq 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & si\ x>1 \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad (1 *punto*)

(b) Estudia la derivabilidad (1 *punto*)

(c) ¿Existe algún punto donde $f'(x)=0$? (1 *punto*)

Solución: Las funciones parciales son continuas y derivables en todo su dominio por ser polinómicas y de proporcionalidad inversa.
$dom(x^2+2x-1)=\mathbb{R}\rightarrow$ continua y derivable en $(-\infty,1]$
$dom(\dfrac{4}{x+1})=\mathbb{R}-\{-1\}\rightarrow$ continua y derivable en $(1,\infty)$
Continuidad en $x=1$:
$\lim_{x\to1^-} f=1^2+2\cdot1-1=2\wedge\lim_{x\to1^+} f=\frac{4}{1+1}=2\rightarrow$ es continua

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & si\ x\leq 1 \\ \dfrac{-4}{(x+1)^2} & si\ x>1 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x=1$:
$\lim_{x\to1^-} f'=2\cdot1+2=3\wedge\lim_{x\to1^+} f'=\frac{-4}{(1+1)^2}=-1\rightarrow$ no es derivable

4. Sea la función

$$\frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

.

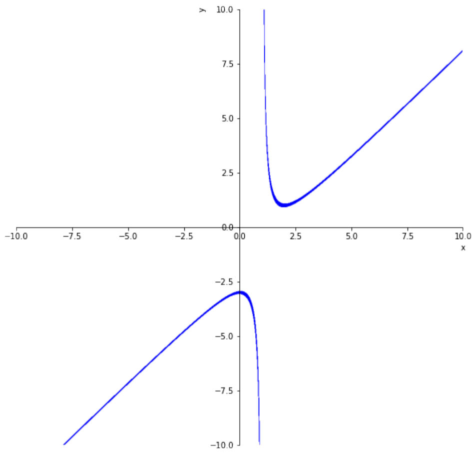
(a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento (2 *puntos*)

(b) Determinar los extremos relativos (1 *punto*)

(c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad (2 *puntos*)

(d) Determinar los puntos de inflexión (1 *punto*)

(e) Determina sus asíntotas (2 *puntos*)



Solución:
$f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-1} = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$.
Dominio de continuidad: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
$f'(x) = \frac{2x-3}{x-1} - \frac{x^2-3x+3}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{x^2-2x+1}$.
$f''(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2(2x-3)}{(x-1)^2} + \frac{2\left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^3} = \frac{2}{x^3-3x^2+3x-1}$.
$f'''(x) = -\frac{6}{(x-1)^2} + \frac{6(2x-3)}{(x-1)^3} - \frac{6\left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^4} = -\frac{6}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$.
Asíntotas:
A.V. $x = 1$
A.O. $y = x - 2$
A.O. $y = x - 2$

Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Decrecimiento: $(0, 1) \cup (1, 2)$
Extremos relativos: $[[0,\ max]\,,\ [2,\ min]]$
Concavidad: $(1, \infty)$
Convexidad: $(-\infty, 1)$
Puntos de inflexión: []

5. Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos materiales distintos de 2 y 3 €$/cm^2$ respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y que la suma de los perímetros de los dos cuadrados sea de un metro? (4 *puntos*)

Solución: $x \to$ lado del cuadrado de 2€$/cm^2$
$y \to$ lado del cuadrado de 3€$/cm^2$
De la condición del perímetro$4x + 4y = 100 \to y = 25 - x$
La función a optimizar es:

$$f(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2$$

Extremos relativos:
$f'(x) = 4x + 6(x - 25) = 10x - 150 \to f'(x) = 0 \iff x = 15$,

como $f''(x) = 10 > 0 \rightarrow f''(15) = 10 > 0$ y por tanto en $x = 15$ hay un mínimo relativo.

Luego son cuadrados de lado 10 y 15 cm