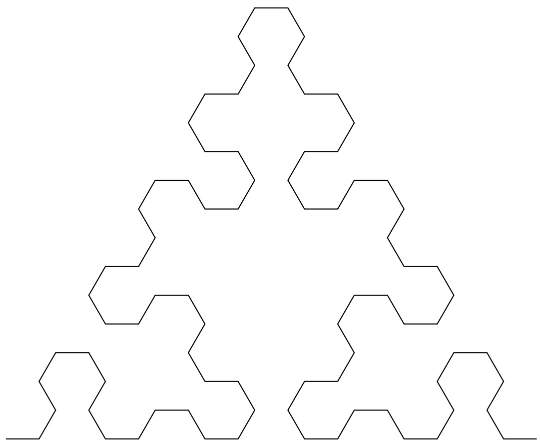
Preparación EVAU

Matemáticas CCSS - 2º Bachillerato



Departamento de Matemáticas[1]

[1] http://www.iespedrocerrada.org/

ATRIBUCIONES: El material que aparece a continuación es autoría de **Julio García Galavis**.
Nuestro más sentido **agradecimiento** a su trabajo y que se encuentra en su página web[a].

[a] `http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm`

1

Álgebra

A continuación aparecen los ejercicios de la EVAU del bloque de álgebra de los últimos seis años con las soluciones. Se recomienda trabajarlos para preparar la EVAU. En caso de necesitar consultar el desarrollo de la solución paso a paso se deberá consultar el documento específico de la prueba y año que aparece en la siguiente web[1]:

[1] `http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm`

Junio 2014.
(3,5 puntos)
a) *(2,5 puntos)* Los tres profesores de matemáticas de un instituto, María, Ana y Carlos, tienen edades cuya suma es 120 años. La suma de las edades de María y Ana es el doble que la edad de Carlos. Además, dentro de 4 años, la suma de las edades que tengan Ana y Carlos será el triple de la edad que tenga María. Plantear y resolver un sistema lineal que permita conocer las edades de los tres profesores.

b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) María: 29 años, Ana: 51 años y Carlos: 40 años. **b)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

Junio 2014.
(3,5 puntos) Un deportista solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 gramos de proteínas y 200 Kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 gramos de hidratos de carbono, 10 gramos de proteínas y 100 Kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 gramos de hidratos de carbono y 90 gramos de proteínas, pero no quiere tomar más de 1000 Kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 euros, mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 euro. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar el deportista para desayunar de forma que cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.

SOLUCIÓN.
Dos barritas de chocolate y tres de cereales.

Septiembre 2014.
(3,5 puntos)

a) *(2,5 puntos)* Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Encontrar, si existe, una matriz X tal que verifique: $AB + 2CX = D$.

b) *(1 punto)* Encontrar el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.
a) $X = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ **b)** 2

Septiembre 2014.
(3,5 puntos) Una empresa tiene dos fábricas A y B en las que produce acero. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica A se producen 5 Tm de acero y 3 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 2 Tm de dióxido de carbono. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica B se producen 6 Tm de acero y 1 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 4 Tm de dióxido de carbono. Por normativa medioambiental, la empresa no puede producir (entre las dos fábricas) más de 48 Tm de desperdicios al día ni puede emitir a la atmósfera (entre las dos fábricas) más de 72 Tm de dióxido de carbono al día. Por otra parte, cada una de las fábricas debe funcionar al menos 6 horas al día, y ninguna de las dos puede funcionar más de 18 horas al día. Plantear y resolver un problema de programación lineal que permita determinar cuántas horas al día debe funcionar cada fábrica para maximizar la cantidad de acero producida por la empresa, teniendo en cuenta las restricciones anteriores.

SOLUCIÓN.
Cada una de las fábricas debe trabajar 12 horas al día.

Junio 2015.
(3,5 puntos) Una empresa agroalimentaria produce dos tipos de bebida: A y B. Cada litro de bebida A lleva 0,2 litros de zumo de naranja y 0,4 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes. Cada litro de bebida B lleva 0,6 litros de zumo de naranja y 0,2 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes. La empresa puede utilizar como máximo 1200 litros de zumo de naranja y 1500 litros de zumo de mandarina. Se quiere que la cantidad producida de tipo A sea mayor o igual que la de tipo B. Sabiendo que el beneficio por litro de bebida de tipo A es de 0,8 euros y por litro de bebida B es de 1 euro, determinar la cantidad de bebida de cada tipo que tiene que producir para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál será el máximo beneficio?

SOLUCIÓN.
3300 litros de bebida A y 900 litros de B. Máximo beneficio: 3540 €.

Junio 2015.
(3,5 puntos)
a) *(2,25 puntos)* Un padre decidió repartir su fortuna de 360 monedas de oro entre sus tres hijas, Isabel, Catalina y Juana, de forma que se cumplieran las siguientes condiciones. La cantidad que recibiera Isabel debía ser igual al doble de la suma de las cantidades que recibieran Catalina y Juana. Además, la suma de las cantidades que recibieran Isabel y Juana debía ser igual al triple de la cantidad que recibiera Catalina. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar cuántas monedas debía recibir cada hija.

b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.
a) Isabel: 240 monedas. Catalina: 90 monedas. Juana: 30 monedas.
b) $\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$

Septiembre 2015.

(3,5 puntos) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de A.
b) *(1,25 puntos)* Encontrar una matriz X, si existe, tal que $2X + B^2 = 3A$.
c) *(1 punto)* Sea $C = A + B$. Calcular el rango de C.

SOLUCIÓN.
a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ **b)** $X = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\text{rg}\, C = 2$

Septiembre 2015.
(3,5 puntos) Un agricultor tiene 40 hectáreas de terreno en las que puede plantar cebada o maíz (o no plantar nada). Cada hectárea de cebada necesitará 5 hectómetros cúbicos de agua mientras que cada hectárea de maíz necesitará 10 hectómetros cúbicos de agua. El agricultor podrá disponer de hasta 225 hectómetros cúbicos de agua. El beneficio que obtendrá por cada hectárea de cebada es de 100 euros mientras que por cada hectárea de maíz obtendrá un beneficio de 160 euros; además, las hectáreas en las que no plante nada las arrendará y obtendrá un beneficio de 50 euros por hectárea. La normativa no le permite plantar más hectáreas de maíz que de cebada. ¿Cuántas hectáreas de cebada y cuántas de maíz tiene que plantar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo?

SOLUCIÓN.
15 ha de cebada y 15 ha de maíz. El máximo beneficio es de 4400 euros.

Junio 2016.
(3,5 puntos) Una empresa conservera va a preparar lotes de dos tipos, A y B, con sus productos. En cada lote de tipo A pone 10 frascos de pimientos, 2 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. En cada lote de tipo B pone 4 frascos de pimientos, 5 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. Puede utilizar, como máximo, 500 frascos de pimientos, 310 frascos de espárragos y 65 frascos de alcachofas. Sabiendo que por cada lote de tipo A obtiene un beneficio de 10 euros y por cada lote de tipo B obtiene un beneficio de 6 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo tendrá que preparar para que su beneficio sea máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio máximo?

SOLUCIÓN.
40 lotes de tipo A y 25 lotes de tipo B. El máximo beneficio es de 550 euros.

Junio 2016.
(3,5 puntos)

a) *(2 puntos)* Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 9\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

encontrar, si existe, una matriz X tal que: $5X+3C^2=2AB$

SOLUCIÓN.
$X=\begin{pmatrix}-17/5 & 1/5\\ 7/5 & 64/5\end{pmatrix}$

Septiembre 2016.
(3,5 puntos) Un ganadero puede comprar dos tipos de pienso, A y B, para alimentar a sus cerdos. Cada saco de pienso A contiene 4 kilos de cereales y 2 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 4 euros. Cada saco de pienso B contiene 2 kilos de cereales y 3 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 5 euros. Para alimentar a sus cerdos quiere tener, al menos, 160 kilos de cereales y 120 kilos de bellotas. Como tiene que transportar los sacos en su furgoneta, no quiere comprar, entre los dos tipos de pienso, más de 70 sacos. ¿Cuántos sacos de cada tipo de pienso tiene que comprar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN.
30 sacos de tipo A y 20 sacos de tipo B. El coste mínimo es de 220 euros.

Septiembre 2016.
(3,5 puntos)
a) *(2,25 puntos)* Un pintor ha comprado pintura de 3 colores: azul, roja y verde. Cada kilo de pintura azul cuesta 2 euros, cada kilo de pintura roja cuesta 4 euros y cada kilo de pintura verde cuesta 3 euros. En total ha comprado 500 kilos de pintura y se ha gastado 1400 euros. Además, sabemos que la suma de las cantidades de pintura azul y verde es el triple que la cantidad de pintura roja. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar la cantidad de pintura de cada color que ha comprado.

b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de: $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.
a) 225 kilos de pintura azul, 125 kilos de pintura roja y 150 kilos de pintura verde. **b)** $\begin{pmatrix}1/4 & 3/8\\ 1/4 & -1/8\end{pmatrix}$

Junio 2017.
(3,25 puntos) Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B

debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN.
2 furgonetas de tipo A y 8 furgonetas de tipo B. El coste mínimo es de 3680 euros.

Junio 2017.
(3,25 puntos) Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

SOLUCIÓN.
7500 euros en el fondo A, 900 euros en el fondo B y 1600 euros en el fondo C.

Septiembre 2017.
(3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular AB? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
b) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular BA? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de C.
d) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C+4X=3D$

SOLUCIÓN.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 14 \\ 0 & 14 & -7 \end{pmatrix}$ **b)** No **c)** $C^{-1}=\begin{pmatrix} -2/3 & 0 & -1/3 \\ -5/3 & 0 & -1/3 \\ 19/3 & 1 & 5/3 \end{pmatrix}$ **d)** $X=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 3 \\ 1/2 & 3/4 & -1/2 \\ 13/4 & -7/4 & 3/2 \end{pmatrix}$

Septiembre 2017.
(3,25 puntos) Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, “Grupal-A” y “Grupal-B” con las siguientes características:

- Cada entrada de tipo “Grupal-A” permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.
- Cada entrada de tipo “Grupal-B” permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.
- Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo “Grupal-A” y 2 entradas de tipo “Grupal-B”.

La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo “Grupal-A” y “Grupal-B” debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN.
8 entradas del tipo “Grupal-A” y 6 entradas del tipo “Grupal-B”. El coste mínimo es de 2060 euros.

Junio 2018.

(3,25 puntos) Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN.
6 horas la fábrica A y 36 horas la fábrica B. El coste mínimo es de 45000 euros.

Junio 2018.

(3,25 puntos) Discutir, según los valores de a, el sistema: $\begin{matrix} 2x+ay+az=4 \\ -x+ay+z=a \\ x+y+az=3 \end{matrix}$. Resolverlo para $a=-3$.

SOLUCIÓN.
▪ Compatible determinado para $a\neq -1$ y $a\neq 1$. ▪ Incompatible para $a=-1$. ▪ Compatible indeterminado para $a=1$. Para $a=-3$: $x=2$, $y=1/4$, $z=-1/4$

Septiembre 2018.

(3, 25 puntos) Un artesano de vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo q6 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

SOLUCIÓN.
40 cisnes y 60 elefantes. El beneficio máximo es de 880 euros.

Septiembre 2018.

(3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Calcular $(AB)^2$

b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2A+3X=4C$

c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

SOLUCIÓN.

a) $\begin{pmatrix} -41 & -115 \\ 230 & 350 \end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix} 20/3 & 2 & -2 \\ -4/3 & -4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$ **d)** $D^{-1}=\begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Junio 2019.

(3,25 puntos) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

a) *(2 puntos)* ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB=C$?
b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

SOLUCIÓN.
a) $x=-\dfrac{9}{5}$, $y=\dfrac{3}{10}$ b**)** $C^{-1}=\begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}$

Junio 2019.
(3,25 puntos) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál es el valor del beneficio en ese caso?

SOLUCIÓN.
12 sillas y 12 taburetes. El beneficio máximo es de 1440 euros.

Septiembre 2019.
(3,25 puntos) Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

SOLUCIÓN.
8 lotes de tipo A y 4 lotes de tipo B. El coste mínimo es de 104 euros.

Septiembre 2019.
(3,25 puntos) Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

SOLUCIÓN.
16 habitaciones individuales, 108 habitaciones dobles y 20 habitaciones familiares.

2

Análisis

A continuación aparecen los ejercicios de la EVAU del bloque de análisis de los últimos seis años con las soluciones. Se recomienda trabajarlos para preparar la EVAU. En caso de necesitar consultar el desarrollo de la solución paso a paso se deberá consultar el documento específico de la prueba y año que aparece en la siguiente web[1]:

[1] http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm

Septiembre 2014.

a) *(2 puntos)* Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$, encontrar los extremos absolutos de f en el intervalo $x\in[1,5]$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\int_1^4 \left(2-e^{3x}\right)dx$

SOLUCIÓN.
a) Máximo absoluto en $x=5$ y mínimo absoluto en $x=2$. **b)** $6-\dfrac{e^{12}-e^3}{3}$

Septiembre 2014.

a) *(2 puntos)* Dada la función: $f=xy$ definida para $x\in(0,9)$, $y\in(0,3)$, encontrar el punto (x,y) que maximiza f sujeto a la restricción $x+y^2=9$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\int_1^2 \left(7x^2+\dfrac{3}{x}\right)dx$

SOLUCIÓN.
a) $\left(6,\sqrt{3}\right)$ **b)** $\dfrac{49}{3}+3\ln 2$

Junio 2015.

a) *(1,25 puntos)* Dada la función $f(x)=3x^3+2x^2+ax+3$, calcular, si existe, el valor de *a* de forma que tenga un mínimo relativo en $x=2$.

b) *(1 punto)* Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5}$

c) *(1,25 puntos)* Calcular: $\int_1^2 \left(x^2+3x+\dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)dx$

SOLUCIÓN.
a) $a=-44$ **b)** $\dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{35}{6}+6\ln 2$

Junio 2015.

a) *(2,5 puntos)* Dada la función: $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x\in(-\infty,0) \\ \dfrac{x+3}{2x+3} & \text{si } x\in[0,2) \\ \dfrac{2x+1}{x^2+12} & \text{si } x\in[2,+\infty) \end{cases}$

a.1) *(0,75 puntos)* Estudiar la continuidad de f

a.2) *(1,75 puntos)* Calcular el máximo valor que toma f para $x \in [4, 6]$.

b) *(1 punto)* Calcular: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 4x + 1} - 3x \right)$

SOLUCIÓN.

a.1) La función es discontinua (salto finito) en $x = 2$. **a.2)** $f(4) = \frac{9}{28}$

b) $\frac{2}{3}$

Septiembre 2015.

(3,5 puntos) Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{bx+3}{1-x} & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ x+3 & \text{si } x \in (0, 3] \\ \dfrac{ax+3}{x^2+1} & \text{si } x \in (3, +\infty) \end{cases}$

a) *(1 punto)* Calcular a para que la función sea continua en $x = 3$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular b para que la función sea derivable en $x = 0$.

c) *(1 punto)* Calcular: $\int_1^2 \left(\frac{3}{x} + e^{5x} + 8x \right) dx$

SOLUCIÓN.

a) $a = 19$ **b)** $b = -2$ **c)** $3\ln 2 + \frac{e^{10} - e^5}{5} + 12$

Septiembre 2015.

(3,5 puntos) Sea la función: $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4}$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de x es $f(x)$ mayor que 0?

c) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

d) *0,75 puntos)* Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

SOLUCIÓN.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ **b)** $x \in \left(-\frac{5}{2}, -2 \right) \cup (2, +\infty)$

c) Máximo relativo: $\left(-4, -\frac{1}{4} \right)$; mínimo relativo: $(-1, -1)$

d) Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$. Asíntota horizontal: $y = 0$.

Junio 2016.

(3,5 puntos)

a) *(2 puntos)* Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x)=2x^3+3x^2-12x+8$ en el intervalo $x\in[-4\,,2]$

b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+9x}-2x\right)$

SOLUCIÓN. **a)** Mínimo absoluto: $(-4\,,-24)$, máximo absoluto: $(-2\,,28)$ **b)** $\frac{9}{4}$

Junio 2016.

(3,5 puntos) Dada la función f, definida para $x\geq 0$:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } 0\leq x\leq 5 \\ 9-\dfrac{25}{x} & \text{si } 5<x\leq 10 \\ 4\sqrt{x+6}-\dfrac{x}{5} & \text{si } x>10 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de $x>0$ es la función f continua?

b) *(1,75 puntos9* ¿Cuál es el máximo valor que toma $f(x)$ para $x\in[30\,,100]$?

c) *(1 punto)* Calcula: $\int_6^8 f(x)\,dx$

SOLUCIÓN. **a)** $(0\,,+\infty)-\{10\}$ **b)** En $x=94$: $21{,}2$ **c)** $18-25\ln\frac{4}{3}$

Septiembre 2016.

(3,5 puntos) Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2+2}{4x+2}$, calcular:

a) *(0,5 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN. **a)** $D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **b)** $\forall x\in\left(-\frac{1}{2}\,,+\infty\right)$ **c)** **Vertical:** $x=-\frac{1}{2}$ **Oblicua:** $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$ **d)** Máximo relativo: $(-2\,,-1)$, mínimo relativo: $\left(1\,,\frac{1}{2}\right)$

Septiembre 2016.

(3,5 puntos)

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=ax^3+bx$, encontrar a y b de forma que $f(2)=4$ y f tenga un mínimo relativo en $x=1$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\int_1^2 \left(e^{3x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{4x^4} - 9 \right) dx$

SOLUCIÓN.

a) $a = 2\,,\ b = -6$ **b)** $\frac{e^6 - e^3}{3} + 7\ln 2 + \frac{7}{32} - 9$

Junio 2017.

(3,25 puntos)

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tal que f tenga un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = 2$.

b) *(1,25 puntos)* Calcular: $\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$

SOLUCIÓN.

a) $a = 2\,,\ b = 4$ **b)** $\frac{7e^3\left(e^3 - 1\right)}{3} + \frac{46}{9} - 4\sqrt{2} + \ln 2$

Junio 2017.

(3,25 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$, calcular:

a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.
b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?.
c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$ **b)** $\forall x \in (-2\,,2) \cup \left(\frac{5}{2}\,, +\infty \right)$ **c)** Asíntota vertical: $x = \frac{5}{2}$;

asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ **d)** Máximo relativo: $(1\,,1)$; mínimo relativo: $(4\,,4)$

Septiembre 2017.

(3,25 puntos) Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a:

$$V(x) = \frac{21x + 12}{x + 1}$$

a) *(0,75 puntos)* Encontrar, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.

b) *(1 punto)* Calcular: $\lim_{x \to +\infty} V(x)$. ¿Cómo se puede interpretar el resultado?.

c) *(1,5 puntos)* Si definimos el beneficio por ventas como la diferencia entre los ingresos por ventas y el gasto en publicidad (esto es, $B(x) = V(x) - x$), calcular el máximo beneficio que se puede alcanzar cuando $x \in [0\,,5]$.

SOLUCIÓN.

a) $x = 2$ **b)** 21. Por mucho que aumente el gasto en publicidad, los ingresos por ventas no alcanzarán los 21 millones de euros **c)** 16 millones de euros para un gasto de publicidad de 2 millones de euros.

Septiembre 2017.

(3,25 puntos) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax+2 & \text{si } x < -1 \\ 18-4x+x^2 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ x^3-9x^2+15x+20 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

a) *(0,75 puntos)* Calcular a sabiendo que f es continua en $x=-1$

b) *(1,5 puntos)* Calcular el máximo valor que toma la función f para $x \in [4\,,8]$

c) *(1 punto)* Calcular: $\int_1^2 f(x)\,dx$

> **SOLUCIÓN.**
>
> **a)** $a=-21$ **b)** $f(8)=76$ **c)** $\frac{43}{3}$

Junio 2018.

(3,25 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x+3}$, calcular:

a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

> **SOLUCIÓN.**
>
> **a)** $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ **b)** $\forall x \in \left(-\frac{3}{2}\,,1\right) \cup (1\,,+\infty)$ **c)** Asíntota vertical: $x=-\frac{3}{2}$;
>
> asíntota oblicua: $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$ **d)** Máximo relativo: $(-4\,,-5)$; mínimo relativo: $(1\,,0)$

Junio 2018.

(3,25 puntos) Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo juguete para la campaña de Navidad. Tiene que decidir el precio de venta al público del juguete, que estará entre 1 y 10 euros. Ha realizado un estudio y sabe que el beneficio B que obtendrá en la campaña dependerá del precio de venta que le ponga al juguete. Así, si le pone un precio de venta x (en euros), el beneficio que obtendrá será de $B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$ donde B está expresado en millones de euros.

a) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de $x \in [1\,,10]$ el beneficio es positivo?

b) *(1,5 puntos)* ¿Qué precio de venta $x \in [1\,,10]$ tiene que poner al juguete para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

c) *(1 punto)* Calcular $\int_1^{10} B(x)\,dx$

> **SOLUCIÓN.**
>
> **a)** $\forall x \in (3\,,6)$ **b)** 4 euros, Beneficio máximo: 125000 euros **c)** $9\ln 10 - 25{,}2 = -4{,}48$

Septiembre 2018.

(3,25 puntos) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{x+b}{x^2+1} & \text{si } -2 \le x < 0 \\ x^3 - 9x^2 + 24x + 4 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) *(1 punto)* Calcular a y b sabiendo que f es continua en todos los puntos.

b) *(1,5 puntos)* Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [3, 8]$.

c) *(0,75 puntos)* Calcular $\int_1^2 f(x)\,dx$

SOLUCIÓN.
a) $a = 3/10$, $b = 4$ **b)** $(4, 20)$ **c)** $91/4 = 22{,}75$

Septiembre 2018.

(3,25 puntos) Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función:

$$C(x) = \frac{1}{200}\left(-x^2 + 100x + 7500\right)$$

donde $x \in [0, 120]$ es el tiempo (en minutos) transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla, en porcentaje.

a) *(0,75 puntos)* Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.

b) *(1,5 puntos)* ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y máxima cuotas de pantalla del programa? ¿Cuáles fueron dichas cuotas?

c) *(1 punto)* Calcular $\int_{10}^{20} C(x)\,dx$

SOLUCIÓN.
a) No lo hay **b)** Mínima: en el minuto 120 con un 25,5%, máxima: en el minuto 50 con un 50%
c) $1315/3 = 438{,}3$

Junio 2019.

(3,25 puntos) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

donde $x \in [0, 60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

a) *(0,25 puntos)* El precio de la acción a las nueve y media.

b) *(1 punto)* Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?

c) *(2 puntos)* El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

SOLUCIÓN.
a) 11,95 euros **b) Entre las 9:00 y las 9:04 horas** **c)** Máximo: 14 euros. Mínimo: 11,92 euros.

Junio 2019.

(3, 25 puntos)

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+3x-6$, con $x\in\mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x=-2$ con valor $f(-2)=-6$.

b) *(1,25 puntos)* Calcular: $\int_0^1\left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}}-3xe^{-4x^2}\right)dx$

SOLUCIÓN.

a) $a=3/4$, $b=3$ **b)** $\frac{7}{8}+\frac{3}{8e^4}$

Septiembre 2019.

(3,25 puntos) Dada la función: $f(x)=\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}$

Calcular:

a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x se cumple $f(x)=5$?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN.

a) $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **b)** $x=0$ y $x=\frac{3}{2}$ **c)** A. verticales: $x=-\frac{1}{2}$; A. horizontales: No ; A. oblicuas: $y=2x+1$

d) La función es creciente en $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Septiembre 2019.

(3,25 puntos)

a) *(2 puntos)* Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x+y=4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por $B=10(2x+1)^2y$.

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

b) *(1,25 puntos)* Calcular: $\int_0^1\left(\frac{5}{3x+1}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right)dx$

SOLUCIÓN.

a) 2500 euros en M y 1500 euros en N. Beneficio: 540 euros. **b)** $\frac{5}{3}\ln 4-\frac{8}{3}$

3

Probabilidad y Estadística

A continuación aparecen los ejercicios de la EVAU del bloque de probabilidad y estadística de los últimos seis años con las soluciones. Se recomienda trabajarlos para preparar la EVAU. En caso de necesitar consultar el desarrollo de la solución paso a paso se deberá consultar el documento específico de la prueba y año que aparece en la siguiente web[1]:

[1] `http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm`

Junio 2014. *(3 puntos)* Se sabe que el coeficiente intelectual de una población sigue una distribución normal, con desviación típica igual a 20 y queremos construir un intervalo de confianza para su media.

a) *(2 puntos)* ¿Qué tamaño de la muestra debemos elegir para que el intervalo a nivel de confianza del 96% tenga una amplitud no superior a 10?
b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de 200 individuos, les medimos el coeficiente intelectual y calculamos su promedio, que es igual a 90. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del coeficiente intelectual de la población.

SOLUCIÓN:	**a)** 68 habitantes	**b)** $(87,1\,;92,9)$

Septiembre 2014. *(3 puntos)* Juan tiene dos urnas A y B. En la urna A hay 4 bolas blancas y 2 bolas negras y en la urna B hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras. Juan cierra los ojos y mete la mano en la urna A, saca una bola y, sin mirarla, la pasa a la urna B. Así, la urna B queda con 15 bolas: las 14 originales y la que Juan pasó desde la urna A. Después, Juan mete la mano en la urna B, revuelve las bolas, y saca una bola.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea exactamente la misma que la que pasó desde la urna A?
b) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea blanca?
c) *(1 punto)* Si la bola que saca de la urna B es blanca, ¿qué probabilidad hay de que la bola que pasó desde la urna A fuera blanca?

SOLUCIÓN:	**a)** $\frac{1}{15}$	**b)** $\frac{4}{9}$	**c)** $\frac{7}{10}$

Septiembre 2014. *(3 puntos)* Se desea estimar la proporción de individuos con sobrepeso en una población. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple y se va a determinar, de cada individuo, si tiene sobrepeso o no, y a partir de los resultados se construirá un intervalo de confianza para la proporción de individuos con sobrepeso en la población. El intervalo se hará a un nivel de confianza del 96%.

a) *(2 puntos)* Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,1 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?
b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 200 individuos, de los cuales 40 tienen sobrepeso. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la proporción de individuos con sobrepeso en la población.

SOLUCIÓN:	**a)** 421 individuos	**b)** $(0,142\,;0,258)$

Junio 2015. *(3 puntos)* Un 50% de los clientes de un hotel son de España, un 35% son del resto de Europa y un 15% son de fuera de Europa. Se sabe que de los clientes de España, un 20% tiene más de 65 años; de los clientes del resto de Europa, un 40% tiene más de 65 años y de los clientes de fuera de Europa, un 70% tiene más de 65 años.

a) *(1 punto)* Si elegimos un cliente al azar, cuál es la probabilidad de que sea de España y tenga más de 65 años?
b) *(1 punto)* Si elegimos un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?.
c) *(1 punto)* Si elegimos un cliente al azar de entre los que tienen más de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea de fuera de Europa?

SOLUCIÓN:	**a)** 0,1	**b)** 0,345	**c)** 0,3043

Junio 2015. *(3 puntos)*

a) *(1 punto)* Dados dos sucesos A y B tales que $P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}6$ y $P(A\cap B)=0{,}2$, calcular $P(A\cup B)$ y $P(A/B)$.

b) *(2 puntos)* Para estimar la proporción de personas con sobrepeso en una población se ha tomado una muestra aleatoria simple de tamaño 100 personas, de las cuales 21 tienen sobrepeso. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la proporción de personas con sobrepeso en la población.

SOLUCIÓN:	**a)** $0{,}7\ ;\ \frac{1}{3}$	**b)** $(0{,}13\ ,\ 0{,}29)$

Septiembre 2015. *(3 puntos)* Disponemos de los siguientes datos sobre el uso de nuevas tecnologías por parte de los estudiantes de una universidad: un 70% de los estudiantes de esa universidad tiene teléfono inteligente, un 50% de los estudiantes de esa universidad tiene ordenador portátil y un 40% de los estudiantes de esa universidad tiene ambos dispositivos (teléfono inteligente y ordenador portátil).

a) *(1 punto)* Si elegimos al azar un estudiante de esa universidad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga al menos uno de los dos dispositivos?

b) *(1 punto)* Si elegimos al azar un estudiante de entre los que tiene teléfono inteligente, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ordenador portátil?

c) *(1 punto)* Sea A el suceso "el estudiante tiene teléfono inteligente" y B el suceso "el estudiante tiene ordenador portátil", ¿son los sucesos A y B independientes?

SOLUCIÓN:	**a)** 0,8	**b)** 0,57	**c)** no son independientes.

Septiembre 2015. *(3 puntos)* La producción en kilos de los naranjos de una variedad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 5 kilos.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media de la producción de los naranjos de esta variedad de forma que su amplitud no sea mayor que 3 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 naranjos de esta variedad y medimos su producción en kilos, con los siguientes resultados:

$$82\ ,\ 90\ ,\ 87\ ,\ 75\ ,\ 78\ ,\ 83\ ,\ 92\ ,\ 77\ ,\ 85\ ,\ 86$$

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media de la producción de los naranjos de esta variedad.

SOLUCIÓN:	**a)** 46 naranjos	**b)** $(80{,}26\ ,\ 86{,}74)$

Junio 2016.
(3 puntos) Un grupo de turistas está formado por 12 alemanes, 8 franceses y 6 italianos. Se escogen al azar dos turistas del grupo. Calcular:

a) *(1 punto)* La probabilidad de que los dos sean alemanes.
b) *(1 punto)* La probabilidad de que ninguno sea alemán.
c) *(1 punto)* La probabilidad de que sean de distinta nacionalidad.

SOLUCIÓN:	**a)** 0,2031	**b)** 0,28	**c)** 0,6646

Junio 2016.
(3 puntos) El c onsumo mensual de electricidad (en kWh) de los hogares de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 25 kWh.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media del consumo de electricidad de los hogares de esta ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 12 kWh. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?
b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 hogares y miramos su consumo mensual en electricidad, con los siguientes resultados:

$$100\ ,\ 125\ ,\ 78\ ,\ 80\ ,\ 88\ ,\ 89\ ,\ 124\ ,142\ ,\ 98\ ,\ 125$$

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del consumo mensual de electricidad en los hogares de esta ciudad.

SOLUCIÓN:	**a)** 73 hogares	**b)** $(86{,}7\ ,\ 121{,}1)$

Septiembre 2016.
(3 puntos) Un estudiante se va a examinar de Física y de Historia. La probabilidad de que apruebe el examen de Física es 0,8, la de que apruebe el examen de Historia es 0,7 y la de que apruebe los dos exámenes es 0,6.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?
b) *(1 punto)* Si aprueba el examen de Física, ¿cuál es la probabilidad de que también apruebe el de Historia?
c) *(1 punto)* Sea A el suceso "el estudiante aprueba el examen de Física" y B el suceso "el estudiante aprueba el examen de Historia". ¿Son independientes los sucesos A y B?

SOLUCIÓN:	**a)** 0,9	**b)** 0,75	**c)** No son independientes.

Septiembre 2016.
(3 puntos) El peso (en kilos) de los habitantes de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 kilos.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media del peso de los habitantes de la ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 10 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?
b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 8. Elegimos 8 habitantes y los pesamos con los siguientes resultados: 60 , 75 , 105 , 98 , 66 , 60 , 87 , 73.
Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del peso de los habitantes de esta ciudad.

SOLUCIÓN:	**a)** 38 habitantes	**b)** $(67\ ,\ 80{,}745)$

Junio 2017.
(3,5 puntos) En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

a) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que las dos sean rojas.
b) *(1 punto)* La probabilidad de que sean de distinto color.
c) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.
d) *(1 punto)* Sea A el suceso "la primera bola extraída es roja" y B el suceso "las dos bolas son del mismo color", ¿son los dos sucesos A y B independientes?

SOLUCIÓN: **a)** $\frac{2}{11}$ **b)** $\frac{38}{55}$ **c)** $\frac{5}{11}$ **d)** No son independientes

Junio 2017.
(3,5 puntos)
a) *(2 puntos)* Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.
b) *(1,5 puntos)* Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

SOLUCIÓN: **a)** $(23.4\,,24.2)$ **b)** 0,4846 ; 0,9154

Septiembre 2017.
(3,5 puntos) En la facultad de Economía de una universidad se pueden estudiar tres grados: Grado en Contabilidad, Grado en Economía y Grado en Empresariales. En todos los grados hay un grupo de mañana y un grupo de tarde. La distribución de los estudiantes en cada uno de los grados, según grupo de mañana y de tarde es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales
Mañana	395	278	538
Tarde	240	306	486

a) *(0,5 puntos)* Se elige al azar un estudiantes de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado en Contabilidad?
b) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del Grado en Contabilidad?
c) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante de la Facultad. Sea A el suceso "Es del Grado en Contabilidad" y B el suceso "Es del grupo de tarde", ¿son independientes los sucesos A y B?
d) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean del grupo de tarde?
e) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo Grado?

SOLUCIÓN: **a)** 0,107 **b)** 0,2326 **c)** No **d)** 0,2116 **e)** 0,3561

Septiembre 2017.
(3,5 puntos)
a) *(2,75 puntos)* La duración de las bombillas de un fabricante es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 75 horas.

a1) *(1,75 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante, de forma que el error no sea mayor de 15 horas. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

a2) *(1 punto)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 150, comprobamos la duración de cada bombilla y calculamos su promedio, que resulta ser 1053 horas. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante.

b) *(0,75 puntos)* Sean A y B sucesos tales que $P(A)=0,6$, $P(B/A)=0,9$ y $P(B)=0,8$. Calcular $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ y $P(A/B)$.

SOLUCIÓN:	**a1)** 136 bombillas	a2**)** $(1038,73\ ,\ 1067,27)$	**b)** 0,54 ; 0,86 ; 0,675

Junio 2018.
(3,5 puntos) Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: A, B y C. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55% de las ventas y Pedro el 45% restante. Además, de las ventas de María, un 60% fueron del modelo A, un 30% del modelo B y un 10% del modelo C. De las ventas de Pedro, un 50% fueron del modelo A, un 20% del modelo B y un 30% del modelo C.

a) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo B vendido por María?

b) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

c) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas de modelo B del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?

d) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?

SOLUCIÓN:	**a)** 0,165	**b)** 0,255	**c)** 0,6471	**d)** 0,7975

Junio 2018.
(3,5 puntos)
a) *(1,5 puntos)* Dados dos sucesos A y B tales que $P(A)=0,6$, $P(B)=0,8$ y $P(A/B)=0,7$, calcular $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

b) *(2 puntos)* Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jóvenes y se les pregunta el gasto en ocio de la última semana con los siguientes resultados (expresados en euros):

24,5	11	16,5	18,5	21,5	25	6,5	12	10,5	9,5

Construya un intervalo de confianza de nivel 94% para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.

SOLUCIÓN:	**a)** $P(A\cap B)=0,56$, $P(A\cup B)=0,84$. No son independientes	**b)** $(11,98\,;19,12)$

Septiembre 2018.
(3,5 puntos) En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luis va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.
a) *(0,75 puntos)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de encestar los dos lanzamientos?
b) *(1 punto)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de ganar el premio?
c) *(1 punto)* Si Luis ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?
d) *(0,75 puntos)* Sea A el suceso "Luis falla el primer lanzamiento" y B el suceso "Luis gana el premio" ¿Son los sucesos A y B independientes?

SOLUCIÓN:	**a)** 0,09	**b)** 0,51	**c)** 0,41	**d)** No son independientes

Septiembre 2018.
(3,5 puntos)
a) *(1 punto)* En un instituto hay 335 estudiantes de Bachillerato, 195 de los cuales están en primer curso y 140 están en segundo curso. Se eligen al azar dos estudiantes distintos de entre estos 335. ¿Cuál es la probabilidad de que estén en el mismo curso?
b) *(2,5 puntos)* En una encuesta sobre hábitos alimentarios en una ciudad se ha tomado una muestra de 300 individuos y se les ha preguntado si son vegetarianos. De los 300 individuos 72 son vegetarianos y los 228 restantes no lo son. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de personas de la ciudad que son vegetarianas.

SOLUCIÓN:	**a)** 0,51	**b)** $(0{,}194\ ;\ 0{,}286)$

Junio 2019.
(3,5 puntos) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91%.
a) *(2 puntos)* Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?
b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

SOLUCIÓN:	**a) 452 consumidores**	**b)** $(0{,}6623\ ;\ 0{,}7777)$

Junio 2019.
(3,5 puntos) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3% de la población aragonesa son hombres y el 50,7% son mujeres. Del total de hombres, un 80,9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9% tienen menos de 65 años.
a) *(0,75 puntos)* Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?
b) *(1 punto)* Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

c) *(1 punto)* Elegimos una persona de Aragón de entres las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
d) *(0,75 puntos)* Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

SOLUCIÓN: **a)** 0,3848 **b)** 0,78365 **c)** 0,49 **d)** 0,88

Septiembre 2019.
(3,5 puntos) Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.
a) *(2 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93% tenga una amplitud menor o igual que 8 g.
b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93% para la media del peso de las manzanas del agricultor.

SOLUCIÓN: **a)** 82 manzanas **b)** $(194{,}3\,;215{,}2)$

Septiembre 2019.
(3,5 puntos) Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

a) *(1 punto)* Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?
b) *(1 punto)* Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?
c) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso “el trabajador es del departamento de Administración” y B el suceso “el trabajador sabe inglés”. ¿Son los sucesos A y B independientes?
d) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

SOLUCIÓN: **a)** 0,75 **b)** 0,125 **c)** Son independientes **d)** 0,27