

Nombre: _____ Fecha: _____

Tiempo: 50 minutos

Tipo: A

Esta prueba tiene 5 ejercicios. La puntuación máxima es de 21. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	2	4	3	8	4	21

1. Halla el límite de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8}$ en $x = 2$, $x = -2$, $x = \infty$ y $x = -\infty$ (2 puntos)

Solución: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} = \frac{x}{2(x+2)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} \right) = \frac{1}{2}$$

2. Calcula las siguientes derivadas

(a) $y = \ln\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ (1 punto)

Solución: $\frac{1}{3\left(\frac{x}{3} + 1\right)}$

(b) $y = e^{2x+1}$ (1 punto)

Solución: $2e^{2x+1}$

(c) $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$ (2 puntos)

Solución: $-\frac{2(1-x)^2}{(x+1)^3} + \frac{2x-2}{(x+1)^2} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$

3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- (a) Estudia la continuidad (1 *punto*)
 (b) Estudia la derivabilidad (1 *punto*)
 (c) ¿Existe algún punto donde $f'(x) = 0$? (1 *punto*)

Solución: Las funciones parciales son continuas y derivables en todo su dominio por ser polinómicas y de proporcionalidad inversa.

$\text{dom}(x^2 + 2x - 1) = \mathbb{R} \rightarrow$ continua y derivable en $(-\infty, 1]$

$\text{dom}(\frac{4}{x+1}) = \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow$ continua y derivable en $(1, \infty)$

Continuidad en $x = 1$:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 \wedge \lim_{x \rightarrow 1^+} f = \frac{4}{1+1} = 2 \rightarrow$ es continua

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{-4}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

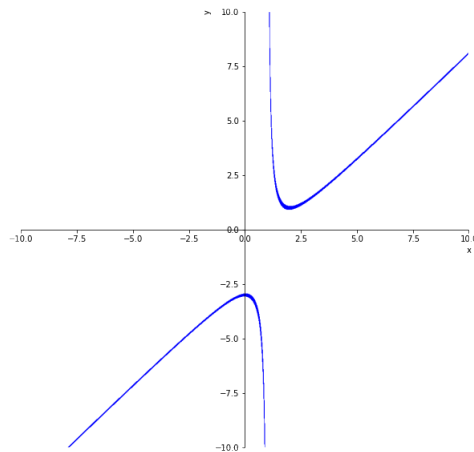
Derivabilidad en $x = 1$:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f' = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \wedge \lim_{x \rightarrow 1^+} f' = \frac{-4}{(1+1)^2} = -1 \rightarrow$ no es derivable

4. Sea la función

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

- (a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento (2 *puntos*)
 (b) Determinar los extremos relativos (1 *punto*)
 (c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad (2 *puntos*)
 (d) Determinar los puntos de inflexión (1 *punto*)
 (e) Determina sus asíntotas (2 *puntos*)



Solución:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}.$$

Dominio de continuidad: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{x - 1} - \frac{x^2 - 3x + 3}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$f''(x) = \frac{2}{x - 1} - \frac{2(2x - 3)}{(x - 1)^2} + \frac{2(x^2 - 3x + 3)}{(x - 1)^3} = \frac{2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(x - 1)^2} + \frac{6(2x - 3)}{(x - 1)^3} - \frac{6(x^2 - 3x + 3)}{(x - 1)^4} = -\frac{6}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}.$$

Asíntotas:

A.V. $x = 1$

A.O. $y = x - 2$

A.O. $y = x - 2$

Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Decrecimiento: $(0, 1) \cup (1, 2)$

Extremos relativos: $[[0, \max], [2, \min]]$

Concavidad: $(1, \infty)$

Convexidad: $(-\infty, 1)$

Puntos de inflexión: \emptyset

5. Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos materiales distintos de 2 y 3 €/cm² respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y que la suma de los perímetros de los dos cuadrados sea de un metro?

(4 puntos)

Solución: $x \rightarrow$ lado del cuadrado de 2€/cm²

$y \rightarrow$ lado del cuadrado de 3€/cm²

De la condición del perímetro $4x + 4y = 100 \rightarrow y = 25 - x$

La función a optimizar es:

$$f(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2$$

Extremos relativos:

$$f'(x) = 4x + 6(x - 25) = 10x - 150 \rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 15,$$

como $f''(x) = 10 > 0 \rightarrow f''(15) = 10 > 0$ y por tanto en $x = 15$ hay un mínimo relativo.

Luego son cuadrados de lado 10 y 15 cm