Nombre: ____________________ **Fecha:** __________

Tiempo: 55 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 5 ejercicios. La puntuación máxima es de 15. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	3	2	6	2	2	15

1. Calcula los siguientes límites:
   (a) $\lim_{x \to -\infty} e^{x+1}$ (1 *punto*)

   Solución: 0

   (b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + \sqrt{x+1}}{7x^2 - x + 4}$ (2 *puntos*)

   Solución: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+\sqrt{x+1}}{7x^2-x+4} \right) = \frac{1}{7}$

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \ln x - \dfrac{\ln x}{x^2}$ (1 *punto*)

   Solución: $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \ln(x) - \frac{1}{x^3}$

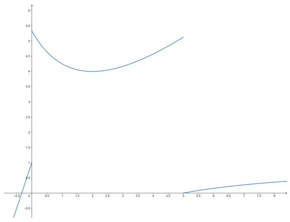
   (b) $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{(x+1)^2}$ (1 *punto*)

   Solución: $\frac{2e^{2x}}{(x+1)^2} - \frac{2e^{2x}}{(x+1)^3}$

3. Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x < 0 \\ \dfrac{x^2+16}{x+3} & 0 \leq x < 5 \\ 1 + 2x - \sqrt{4x^2+21} & x \geq 5 \end{cases}$$

   (a) ¿Para qué valores de x es la función f continua? (2 *puntos*)



Solución:
Para $x \neq 0, 5$ la función es continua y derivable por serlo las funciones parciales
$\lim\limits_{x \to 0^-} f = 1 \neq \dfrac{16}{3} = \lim\limits_{x \to 0^+} f \Longrightarrow salto\ finito\ x = 0$
$\lim\limits_{x \to 5^-} f = \dfrac{41}{8} \neq 0 = \lim\limits_{x \to 5^+} f \Longrightarrow salto\ finito\ x = 5$ 1

(b) Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [1, 4]$ (2 *puntos*)

Solución: $x \in [1, 4] \to f'(x) = \frac{2x}{x+3} - \frac{x^2+16}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2}\left(-x^2 + 2x\,(x+3) - 16\right)$
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \to \cancel{x = -8} \wedge x = 2$
$f(1) = \frac{17}{4} \wedge f(2) = 4 \wedge f(4) = \frac{32}{7} \to min : (2, 4)$

(c) Calcular el $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ (2 *puntos*)

Solución: 1

4. Dada la función (2 *puntos*)

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2}$$

Encontrar a y b de forma que $f(1) = 2$ y f tenga un máximo relativo en $x = 1$

Solución: $f(1) = 2 \Longleftrightarrow a + b = 2$
$f'(x) = \dfrac{a}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\,(ax + b)$
Máximo relativo en $x = 1 \Longleftrightarrow f'(1) = 0 \Longleftrightarrow -a - 2b = 0$
$\begin{cases} a + b = 2 \\ -a - 2b = 0 \end{cases} \to a = 4 \wedge b = -2$

5. Calcular (2 *puntos*)

$$\int_1^2 \left(2xe^{3x^2} + \frac{6}{x+1}\right) dx$$

Solución: $\int_0^1 \left(2xe^{3x^2} + \frac{6}{x+1}\right) dx = -\frac{1}{3} + 6\log(2) + \frac{e^3}{3}$