Departamento de Matemáticas
2º Bachillerato CCSS
Recuperación 1ªEv.

Nombre: ____________________ **Fecha:** __________

Tiempo: 50 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 6 ejercicios. La puntuación máxima es de 17. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	5	3	3	1	3	2	17

1. Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$, con a un parámetro real:

   (a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema de ecuaciones (2 *puntos*)

   $$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   tiene solo la solución: $x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$

   Solución: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = a^2 - 1 \rightarrow det(A) = (a-1)(a+1)$.

   Discusión:
   Si a $\neq [-1,\ 1] \rightarrow$ S.C.D.
   Si a=-1:
   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 2 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow$ S.C.I.
   Si a=1:
   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 2 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow$ S.C.I.

   (b) Para $a = -1$, determina justificadamente y sin resolverlo cuántas soluciones tiene el sistema (2 *puntos*)

   $$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Para a=1:
$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 2 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow$ S.C.I.

(c) Resuelve justificadamente el sistema del apartado anterior (1 *punto*)

Solución: Para a=1:
$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow \{(1-z,\ z-1,\ z)\}$

2. Resuelve el sistema: $\begin{bmatrix}1&3&-1\\1&2&0\\0&3&-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\3\end{bmatrix}$

(a) Por el método de Gauss (1 *punto*)

(b) Por el método de la matriz inversa (1 *punto*)

(c) Por la regla de Cramer (1 *punto*)

Solución: $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ x+2y=5 \\ 3y-z=3 \end{cases}$

Por Gauss:
$\begin{bmatrix}1&3&-1&4\\1&2&0&5\\0&3&-1&3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&3&-1&4\\0&-1&1&1\\0&0&2&6\end{bmatrix} \rightarrow$ Sol:$\{(1,\ 2,\ 3)\}$

Por Matriz inversa:
$X = A^{-1}{\cdot}b = \begin{bmatrix}1&0&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4\\5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$. Ya que $\begin{bmatrix}1&3&-1\\1&2&0\\0&3&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{bmatrix}1&1&0\\3&2&3\\-1&0&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{adjunta} \begin{bmatrix}-2&0&2\\1&-1&-1\\3&-3&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{inversa} \begin{bmatrix}1&0&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

Por Cramer:
$det(A) = -2\ \ \Delta_0,\ s_0\text{: } [-2,\ 1]\ \ \Delta_1,\ s_1\text{: } [-4,\ 2]\ \ \Delta_2,\ s_2\text{: } [-6,\ 3]$

3. Un padre decide repartir su fortuna de 480 monedas de oro entre sus tres hijas: Ana, Carla y Pilar. La cantidad que recibe Ana es el doble de la suma de las cantidades que reciben Carla y Pilar. Además, la suma de las cantidades que reciben Ana y Pilar es igual al triple de la cantidad que recibe Carla.

(a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje el enunciado (2 *puntos*)

(b) Resuelve el problema (1 *punto*)

Solución: $\begin{cases} x+y+z=480 \\ x=2y+2z \\ x+z=3y \end{cases}$

Por Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 0 & -3 & -3 & -480 \\ 0 & 0 & 4 & 160 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sol:}\{(320,\ 120,\ 40)\}$$

Por Matriz inversa:

$$X = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 480 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 120 \\ 40 \end{bmatrix}. \text{ Ya que } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{adjunta} \begin{bmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{inversa} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Por Cramer:

$det(A) = -12$ Δ_0, s_0: $[-3840,\ 320]$ Δ_1, s_1: $[-1440,\ 120]$ Δ_2, s_2: $[-480,\ 40]$

4. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ az+2x+y=a \\ ay+x+z=1 \end{cases}$$

(a) Discutir la solución del mismo según el valor de a (1 *punto*)

Solución: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & a(2-a) \end{bmatrix} \rightarrow$

$det(A) = -a^2 + 3a - 2 \rightarrow -(a-2)(a-1)$.

Discusión:

Si a $\neq [1,\ 2] \rightarrow det(A) \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow$

Sol: $\begin{bmatrix} a+1 \\ \frac{2-a}{a-1} \\ -\frac{a}{a-1} \end{bmatrix}$

Si a=1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 3 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow \text{S.I.}$$

Si a=2:

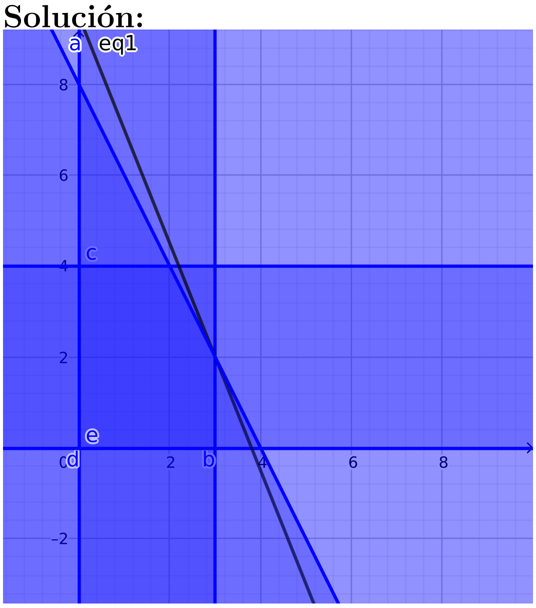
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 2 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow \text{S.C.I.} \rightarrow \text{Sol:}\{x: 1-z,\ y: 0\}$$

5. Dada las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x \leqslant 8 - y \\ x \leqslant 3 \\ y \leqslant 4 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

(a) Razonar si $f(x,y) = 5x+2y$ alcanza un valor máximo y uno mínimo con las restricciones anteriores. En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. (2 *puntos*)

Solución:

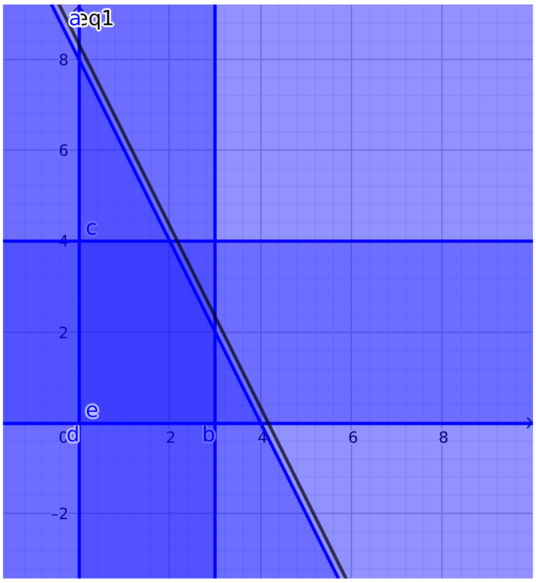


Vértices:
$A(0,0) \to f(0,0) = 0$
$B(3,0) \to f(3,0) = 15$
$C(3,2) \to f(3,2) = 19$
$D(2,4) \to f(2,4) = 18$
$E(0,4) \to f(0,4) = 8$

Mínimo en D y $f(D) = 0$
Máximo en C y $f(C) = 19$

(b) Igual que el apartado anterior pero para $f(x,y) = 6x + 3y$ (1 *punto*)

Solución:



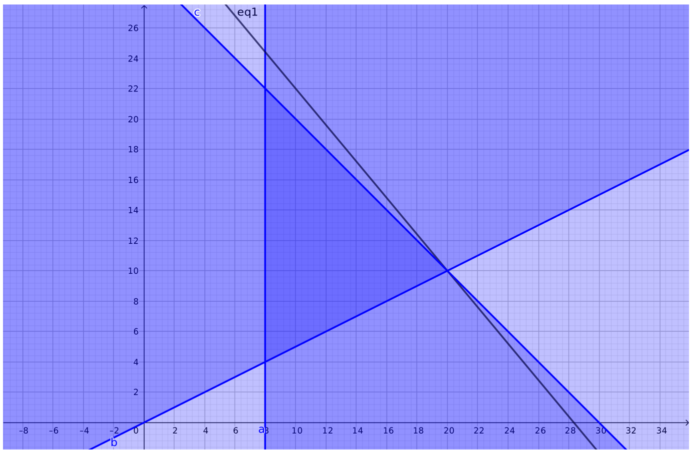
Vértices:
$A(0,0) \to f(0,0) = 0$
$B(3,0) \to f(3,0) = 18$
$C(3,2) \to f(3,2) = 24$
$D(2,4) \to f(2,4) = 24$
$E(0,4) \to f(0,4) = 12$

Mínimo en D y $f(D) = 0$
Máximo en $\overline{CD}$ y $f(C) = 24 \wedge f(D) = 24$

$$\overline{CD} \equiv \begin{cases} x = 3 + (2-3)\lambda \\ y = 2 + (4-2)\lambda \end{cases}, \lambda \in [0,1]$$

6. Un camionero transporta dos tipos de mercancías, X e Y, ganando 60 y 50 euros por tonelada respectivamente. Al menos debe transportar 8 toneladas de X y como mucho el doble de cantidad que de Y. ¿A cuánto asciende su ganancia total máxima si dispone de un camión que puede transportar hasta 30 toneladas? (2 *puntos*)

Solución: Maximizar $f(x,y) = 60x + 50y$ s.a: $\begin{cases} x \geqslant 8 \\ x \leqslant 2y \\ x + y \leqslant 30 \end{cases}$



Vértices:
$A(8,4) \to f(8,4) = 680$
$B(8,22) \to f(8,22) = 1580$
$C(20,10) \to f(20,10) = 1700$

1700 €(debe transportar 20 toneladas de X y 10 toneladas de Y).