INFERENCIA ESTADÍSTICA

P70 E6 $X \sim N(250,2)$, $n=16$, $\mu=250, \sigma=2$

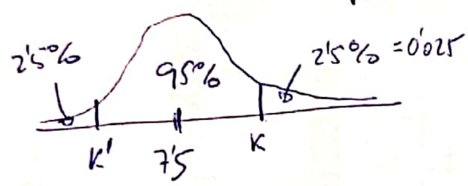
i) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \sim N\left(250, \frac{2}{4}\right) \to N\left(250, \frac{1}{2}\right)$

$P(\bar{X} \geq 251'5) = 0'0013$

ii) Si $\bar{x} = 252$ $\bar{x} \in [251'5, \infty)$ que tiene una probabilidad muy pequeña $(0'0013)$. ⇒ Se debería rechazar

P70.E7 $X \sim N(7'5, 1'2)$ $n=40$

i) $\bar{X} \sim N\left(7'5, \frac{1'2}{\sqrt{40}}\right)$



$P(\bar{X} > k) = 0'025$

$P\left(Z > \frac{k-7'5}{\frac{1'2}{\sqrt{40}}}\right) = 0'025 \to 1-0'025 = 0'975$

$\frac{k-7'5}{\frac{1'2}{\sqrt{40}}} = 1'96 \to k = 7'5 + \overbrace{1'96 \cdot \frac{1'2}{\sqrt{40}}}^{\simeq 0'37}$

$k \simeq 7'5 + 0'37 = 7'87$

$k' \simeq 7'5 - 0'37 = 7'13$

Si $\bar{X} \notin [7'13, 7'87]$ ⇒ Se rechaza

P70.E8 $X \sim N(15,3)$ $n=50$ ~~[illegible]~~ $\bar{x} = 17$

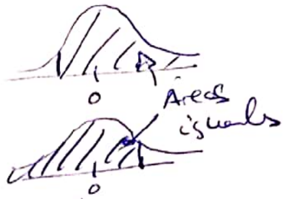
$\bar{X} \to N\left(15, \frac{3}{\sqrt{50}}\right)$

$4'714 > 4'09$

$P(\bar{X} \geq 17) = 1 - P(\bar{X} \leq 17) = 1 - P\left(Z \leq \frac{17-15}{\frac{3}{\sqrt{50}}}\right) \simeq 0$

Se retrasan más de lo debido

P70 E9 $P_r = 0'30 = \frac{30}{100}$ $\quad n = 150$



$\hat{P}_r \sim \left(P_r, \sqrt{\frac{P_r\cdot(1-P_r)}{n}}\right)$ $\quad$ ¿$P(\hat{P}_r \geq 0'25)$?

$$P(\hat{P}_r \geq 0'25) = P\left(Z \geq \frac{0'25-0'3}{\sqrt{\frac{0'3\cdot 0'7}{150}}}\right) \simeq P(Z \geq -1'34) =$$

$$= P(Z \leq 1'34) \simeq 0'9099 \simeq \boxed{0'91} \rightarrow 91\%$$

P70 E10 $P_r = \frac{3}{100} = 0'03$ $\quad n = 400$

$\hat{P}_r \sim N\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Media} \\ \mu_{\hat{P}_r}}}{P_r}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desv. típica} \\ \sigma_{\hat{P}_r}}}{\sqrt{\frac{P_r\cdot(1-P_r)}{n}}}\right) \Rightarrow$ $\mu_{\hat{P}_r} = P_r = 0'03$

$\sigma_{\hat{P}_r} = \sqrt{\frac{P_r\cdot(1-P_r)}{400}} = \frac{\sqrt{0'03\cdot 0'97}}{20} \simeq 0'01$

$\hat{P}_r \sim N(0'03, 0'01)$

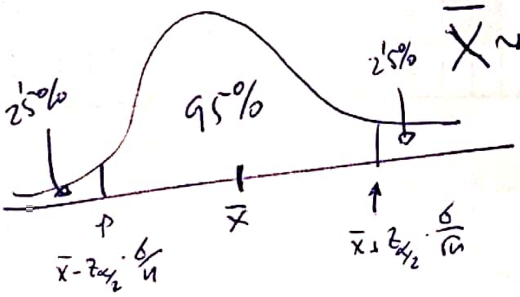
Si tiene 20 páginas con error $\Rightarrow$ La proporción es $\frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 0'05$

$$P(\hat{P}_r \geq 0'05) = P\left(Z \geq \frac{0'05-0'03}{0'01}\right) = \boxed{P(Z \geq 2) \simeq 0'02}$$

P70 E11 $n = 200$ $\quad \bar{X} = 172$ $\quad \sigma = 3'5$. Si nivel de confianza es $95\% \Rightarrow \alpha = 1 - 0'95 = 0'05$

¿Qué estimar μ con un intervalo de confianza? 95%

$\bar{X} \sim N\left(172, \frac{3'5}{\sqrt{200}}\right)$



$\alpha = 0'05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025$

Valor crítico: $z_{\alpha/2}$

$$P(Z \geq z_{\alpha/2}) = 0'025 = P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - 0'025 = 0'975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$$

El intervalo es $\left(172 - 1'96\,\frac{3'5}{\sqrt{200}},\ 172 + 1'96\cdot\frac{3'5}{\sqrt{200}}\right) = \boxed{(171'51, 172'49)}$

Escaneado con CamScanner

P70 E12 $n=1000$ $\hat{p}_r = 0'54$ ¿p_r con intervalo de confianza del 98%?

$\hat{p}_r \sim N\left(p_r, \sqrt{\frac{p_r \cdot (1-p_r)}{n}}\right)$ $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_r (1-\hat{p}_r)}{n}}$

$\left(\hat{p}_r - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_r \cdot (1-\hat{p}_r)}{n}}, \hat{p}_r + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_r \cdot (1-\hat{p}_r)}{n}}\right)$

Valor crítico

$1-\alpha = 0'98 \rightarrow \alpha = 0'02 \rightarrow \alpha/2 = 0'01$

$P(Z \geq z_{\alpha/2}) = 0'01 \rightarrow P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - 0'01 = 0'99$

$z_{\alpha/2} \simeq 2'33$

El intervalo de confianza es:

$$\left(0'54 - 2'33 \cdot \sqrt{\frac{0'54 \cdot 0'46}{1000}}, 0'54 + 2'33 \cdot \sqrt{\frac{0'54 \cdot 0'46}{1000}}\right) = \boxed{(0'50, 0'58)}$$

P70.E13 $X \sim N(\mu, 1'5)$ ¿n? $E = 0'1$ confianza 95%

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$

Si confianza es 95% $\rightarrow \alpha = 1 - 0'95 = 0'05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025$

$z_{\alpha/2}$: $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - 0'025 = 0'975 \rightarrow$

$\rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

$$n = \left(\frac{1'96 \cdot 1'5}{0'1}\right)^2 = 864'35 \rightarrow \boxed{865}$$

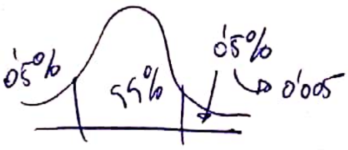
Hay que redondear por arriba para asegurar que no se llega al error

P70 E14 ¿μ? ¿$\bar{x}$?

i) ¿n? si $E = 0'5$ y confianza 99%? $\sigma = 1'9$

$\cancel{E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_r \cdot (1-p_r)}{n}}}$ $E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\Rightarrow$ $0'5 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1'9}{\sqrt{n}}$ $n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'58 \cdot 1'9}{0'5}\right)^2 \Rightarrow$

ii) $\sigma = 1'9$



$z_{\alpha/2}$: $P(Z < z_{\alpha/2}) = 0'995$

$\Downarrow$

$z_{\alpha/2} = 2'58$

$n \simeq 96'12$

$\Downarrow$

$\boxed{97}$

P71.E15 ¿P? $E=0'03$ y confianza $=0'95$

El intervalo de confianza es $(\hat{P}_r - E, \hat{P}_r + E)$

con $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{P}_r\cdot(1-\hat{P}_r)}{n}}$

si confianza es $95\% \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 0'05 \Rightarrow \alpha/2 = 0'025$

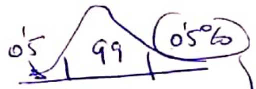
$P(Z < z_{\alpha/2}) = 0'975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

Luego $0'03 = 1'96\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{P}_r\cdot(1-\hat{P}_r)}{n}} \Rightarrow n = \dfrac{(1'96)^2\cdot\sqrt{0'5\cdot 0'5}}{0'03^2} = 2134'2 \to \boxed{2135}$

Ver teoría pág. 69.
El valor máximo de $\hat{P}_r\cdot(1-\hat{P}_r)$ se da si $P_r = 0'5 \Rightarrow$ Sustituimos $\hat{P}_r\cdot(1-\hat{P}_r)$ por $0'5\cdot 0'5 = 0'25 \Rightarrow$ Así garantizamos un tamaño de n mínimo.

PROBLEMAS PÁGINA 71

P71.E1 $n=36$ $\bar{x}=12$ con $s=4$



a) $\mu \simeq 12$

b) $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \to$ Confianza $= 99\%$

Como no conocemos σ hay que estimarlo.

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{n}{n-1}\cdot s^2 = \dfrac{36}{35}\cdot 16$ $\quad \sigma \simeq \hat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{36\cdot 16}{35}} = \dfrac{24}{\sqrt{35}}$

Valor crítico $z_{\alpha/2}$:

$99\% \to 1-\alpha = 0'99 \to \alpha = 0'01$ $\quad \alpha/2 = 0'005$ $\quad 1-0'005$

~~$P(Z \leq 0'005) \dots$~~

$P(Z \geq z_{\alpha/2}) = 0'005 \Leftrightarrow P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0'995$

Mirando en la tabla normal $z_{\alpha/2} = 2'58$

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 2'58\cdot\dfrac{24/\sqrt{35}}{6} \simeq 1'74$

~~$(10'26, 1$~~ $(12-1'74, 12+1'74) = \boxed{(10'26, 13'74)}$

c) Si confianza $95\% \to \alpha/2 = 0'025 \to P(Z < z_{\alpha/2}) = 0'975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 1'96\cdot\dfrac{24/\sqrt{35}}{6} \simeq 1'33$

$(12-1'33, 12+1'33) = \boxed{(10'67, 13'33)}$