

Nombre: _____ **Fecha:** _____

Tiempo: 105 minutos

Tipo: A

Esta prueba tiene 6 ejercicios. La puntuación máxima es de 15. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	3	3	3	1	3	2	15

1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ y

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Encontrar, si existe, una matriz X tal que: $AB + 2CX = D$ (2 puntos)

Solución: $AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $2C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $D - AB = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$
 y $(2C)^{-1} : \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.
 Por tanto, $X = (2C)^{-1} \cdot (D - AB) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(b) Calcule, justificadamente, el rango de la matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ (1 punto)

Solución: $\det(A) = 0 \wedge$ Matriz de adjuntos $\rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$
 Por tanto, $\text{ran}(A) = 2$

2. Resuelve el sistema: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

(a) Por el método de Gauss (1 punto)

(b) Por el método de la matriz inversa (1 punto)

(c) Por la regla de Cramer (1 punto)

Solución:
$$\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ x + 2y = 5 \\ 3y - z = 3 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sol:} \{(1, 2, 3)\}$$

Por Matriz inversa:

$$X = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \text{ Ya que } \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Por Cramer:

$$\det(A) = -2 \quad \Delta_0, s_0: [-2, 1] \quad \Delta_1, s_1: [-4, 2] \quad \Delta_2, s_2: [-6, 3]$$

3. Un padre decide repartir su fortuna de 480 monedas de oro entre sus tres hijas: Ana, Carla y Pilar. La cantidad que recibe Ana es el doble de la suma de las cantidades que reciben Carla y Pilar. Además, la suma de las cantidades que reciben Ana y Pilar es igual al triple de la cantidad que recibe Carla.

(a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje el enunciado

(2 puntos)

(b) Resuelve el problema

(1 punto)

Solución:
$$\begin{cases} x + y + z = 480 \\ x = 2y + 2z \\ x + z = 3y \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 0 & -3 & -3 & -480 \\ 0 & 0 & 4 & 160 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sol:} \{(320, 120, 40)\}$$

Por Matriz inversa:

$$X = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 480 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 120 \\ 40 \end{bmatrix}. \text{ Ya que } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} \begin{bmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Por Cramer:

$$\det(A) = -12 \quad \Delta_0, s_0: [-3840, 320] \quad \Delta_1, s_1: [-1440, 120] \quad \Delta_2, s_2: [-480, 40]$$

4. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ az + 2x + y = a \\ ay + x + z = 1 \end{cases}$$

(a) Discutir la solución del mismo según el valor de a (1 *punto*)

Solución: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & a(2-a) \end{bmatrix} \rightarrow$
 $\det(A) = -a^2 + 3a - 2 \rightarrow -(a-2)(a-1).$

Discusión:

Si $a \neq [1, 2] \rightarrow \det(A) \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A^*) = 3 \rightarrow \text{S.C.D.} \rightarrow$
Sol: $\begin{bmatrix} a+1 \\ \frac{2-a}{a-1} \\ -\frac{a}{a-1} \end{bmatrix}$

Si $a=1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ran}(A^*) = 3 \wedge \text{ran}(A) = 2 \rightarrow \text{S.I.}$$

Si $a=2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ran}(A^*) = 2 \wedge \text{ran}(A) = 2 \rightarrow \text{S.C.I.} \rightarrow \text{Sol: } \{x : 1 - z, y : 0\}$$

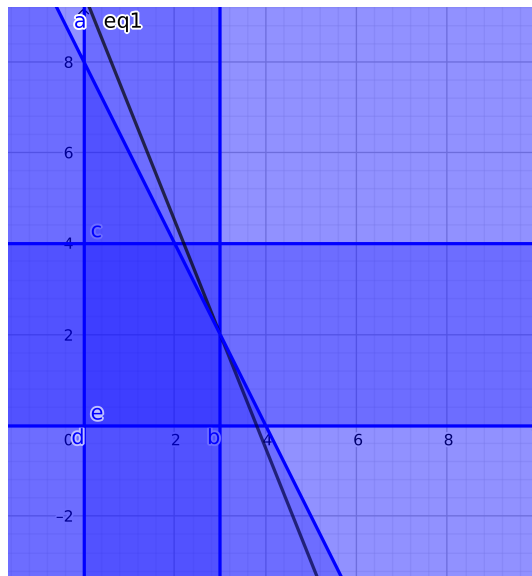
5. Dada las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x \leq 8 - y \\ x \leq 3 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(a) Razonar si $f(x, y) = 5x + 2y$ alcanza un valor máximo y uno mínimo con las restricciones anteriores. En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan.

(2 *puntos*)

Solución:



Vértices:

$$A(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$$

$$B(3,0) \rightarrow f(3,0) = 15$$

$$C(3,2) \rightarrow f(3,2) = 19$$

$$D(2,4) \rightarrow f(2,4) = 18$$

$$E(0,4) \rightarrow f(0,4) = 8$$

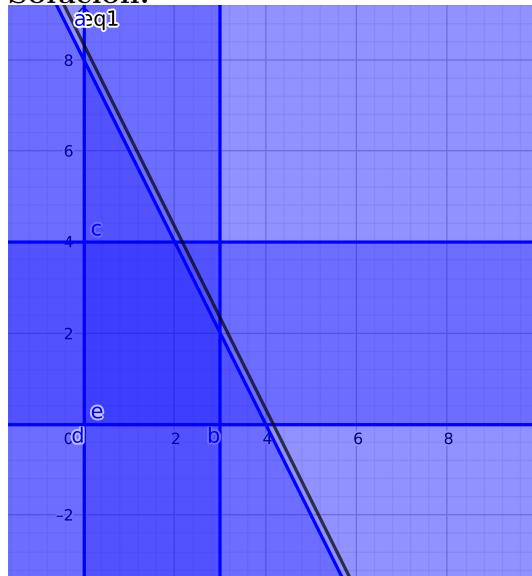
Mínimo en D y $f(D) = 0$

Máximo en C y $f(C) = 19$

(b) Igual que el apartado anterior pero para $f(x,y) = 6x + 3y$

(1 punto)

Solución:



Vértices:

$$A(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$$

$$B(3,0) \rightarrow f(3,0) = 18$$

$$C(3, 2) \rightarrow f(3, 2) = 24$$

$$D(2, 4) \rightarrow f(2, 4) = 24$$

$$E(0, 4) \rightarrow f(0, 4) = 12$$

Mínimo en D y $f(D) = 0$

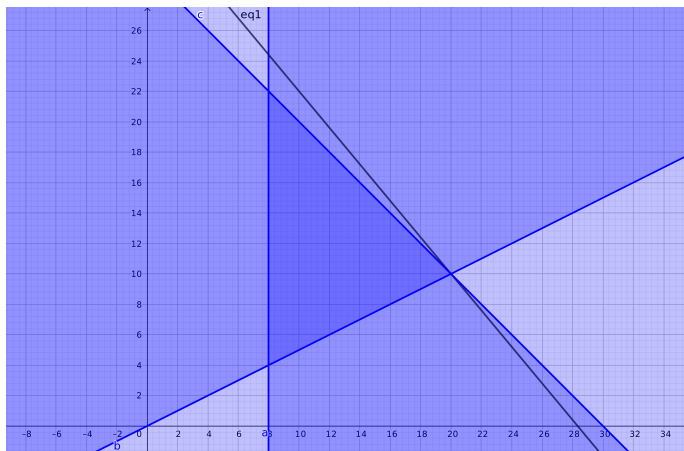
Máximo en \overline{CD} y $f(C) = 24 \wedge f(D) = 24$

$$\overline{CD} \equiv \begin{cases} x = 3 + (2 - 3)\lambda \\ y = 2 + (4 - 2)\lambda \end{cases}, \lambda \in [0, 1]$$

6. Un camionero transporta dos tipos de mercancías, X e Y, ganando 60 y 50 euros por tonelada respectivamente. Al menos debe transportar 8 toneladas de X y como mucho el doble de cantidad que de Y. ¿A cuánto asciende su ganancia total máxima si dispone de un camión que puede transportar hasta 30 toneladas?

(2 puntos)

Solución: Maximizar $f(x, y) = 60x + 50y$ s.a: $\begin{cases} x \geq 8 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{cases}$



Vértices:

$$A(8, 4) \rightarrow f(8, 4) = 680$$

$$B(8, 22) \rightarrow f(8, 22) = 1580$$

$$C(20, 10) \rightarrow f(20, 10) = 1700$$

1700 €(debe transportar 20 toneladas de X y 10 toneladas de Y).