Nombre: ______________________________ **Fecha:** ____________

Tiempo: 50 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 4 ejercicios. La puntuación máxima es de 13. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	Total
Puntos:	2	5	3	3	13

1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontrar si existe una matriz X tal que $3 \cdot X + 2 \cdot A = B \cdot C$. (1 *punto*)

   Solución: $X = \frac{1}{3} \cdot (B \cdot C - 2 \cdot A) = \frac{1}{3} \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

   (b) Encontrar si existe la matriz inversa de A, por determinantes (1 *punto*)

   Solución: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{adjunta} \begin{bmatrix} -9 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ -7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{inversa} \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$.

2. Dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcula (1 *punto*)

$$A - 2 \cdot I$$

   siendo I la matriz identidad de orden 3.

   Solución: $A - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Determina los valores del parámetro k para que la matriz: (2 *puntos*)

$$A - k \cdot I$$

tenga inversa.

Solución: $A-k\cdot I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - k\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k & 0 & 1 \\ 0 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 2-k \end{bmatrix} \rightarrow$

$\begin{vmatrix} 2-k & 0 & 1 \\ 0 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 2-k \end{vmatrix} = -k\,(k-3)\,(k-1) \rightarrow k \neq [0,\ 1,\ 3].$

(c) Encuentra la matriz X que verifica que: (2 *puntos*)

$$(A - 2\cdot I)\cdot X = 2\cdot I$$

.

Solución:

$(A-2\cdot I)\cdot X = 2\cdot I \rightarrow X = (A-2\cdot I)^{-1}\cdot 2I$

Obtengamos las matrices que necesitamos: $(A-2\cdot I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

y $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2. \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{adjunta}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{inversa} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Por tanto $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Calcula $C = B\cdot A - A^t \cdot B^t$ (1 *punto*)

Solución: $B\cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $A^t\cdot B^t = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.Luego

$C = B\cdot A - A^t\cdot B^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(b) Halle la matriz X siendo $A\cdot B\cdot X = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (2 *puntos*)

Solución: $A \cdot B = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $(A \cdot B)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{X} X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

4. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine el rango de A según los diferentes valores de k (2 *puntos*)

Solución: El único menor es el propio determinante $\rightarrow \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{vmatrix} = k\,(k+1)\,(k+2) \rightarrow k \neq [-2,\ -1,\ 0]$ rango será 3

caso k=-2:
$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow ran(B) = 2.$$
caso k=-1:
$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow ran(B) = 2.$$
caso k=0:
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow ran(B) = 2.$$

(b) Determine la inversa de A para k=1 (1 *punto*)

Solución: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{adjunta} \begin{bmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{inversa} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$