

Nombre: _____ Fecha: _____

Tiempo: 105 minutos

Tipo: A

Esta prueba tiene 8 ejercicios. La puntuación máxima es de 22. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos:	4	2	4	2	3	3	3	1	22

1. Calcula los siguientes límites:

(4 puntos)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1}$

Solución: -1

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$

Solución: -1

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x}$

Solución: \nexists

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$

Solución: $-\infty$ 2. **Sept. 12** Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

(1 punto)

Solución: $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(x) - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2} (2x + \ln(x) - 2)$

(b) $g(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$

(1 punto)

Solución: $\frac{(-2x+2)e^x}{(x-1)^4} + \frac{e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x}{(x-1)^4} (-2x + (x-1)^2 + 2)$

3. Calcula las siguientes integrales:

(4 puntos)

(a) $\int (x^2 + 5x + \frac{1}{x}) dx$

Solución: $\int (x^2 + 5x + \frac{1}{x}) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + \ln(x) + C$

(b) $\int \frac{1}{(x+2)^3} dx$

Solución: $\int \frac{1}{(x+2)^3} dx = -\frac{1}{2x^2+8x+8} + C$

(c) $\int \frac{x+7}{x^2} dx$

Solución: $\int \frac{1}{x^2} (x+7) dx = \ln(x) - \frac{7}{x} + C$

(d) $\int \frac{7x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Solución: $\int \frac{7x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 7\sqrt{x^2+1} + C$

4. **Sept. 12** Calcular

(2 puntos)

$$\int_0^2 (4x^3 + e^{3x}) dx$$

Solución: $\int_0^2 (4x^3 + e^{3x}) dx = \left[x^4 + \frac{e^{3x}}{3} \right]_0^2 = \frac{47}{3} + \frac{e^6}{3}$

5. **Sept. 12** Se ha realizado una encuesta a una determinada población con el fin de determinar el número de personas que utilizarían el sistema de autobuses si la tarifa admitiera distintos importes. Basándose en los resultados de las encuestas, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada que expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa. La función demanda viene dada por $D(x) = \sqrt{10 + 3x - \frac{5}{4}x^2}$, donde x representa la tarifa en euros.

(a) ¿Qué tarifa habrá que aplicar para obtener el mayor número de pasajeros?

(2 puntos)

Solución: $f'(x) = \frac{-\frac{5x}{4} + \frac{3}{2}}{\sqrt{-\frac{5x^2}{4} + 3x + 10}} = \frac{-5x+6}{2\sqrt{-5x^2+12x+40}}$

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{5x}{4} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{5x}{4} - \frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{5x^2}{4} + 3x + 10\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{5}{4\sqrt{-\frac{5x^2}{4} + 3x + 10}} = -\frac{118}{(-5x^2+12x+40)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{6}{5}$$

$$f''\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{5\sqrt{295}}{236} < 0 \rightarrow \max$$

La tarifa debe ser de 1,20€ para obtener el mayor número de pasajeros.

(b) Si la tarifa aplicada está entre 1 y 2 euros, ¿cómo es la variación en la afluencia de pasajeros? ¿Creciente, decreciente?

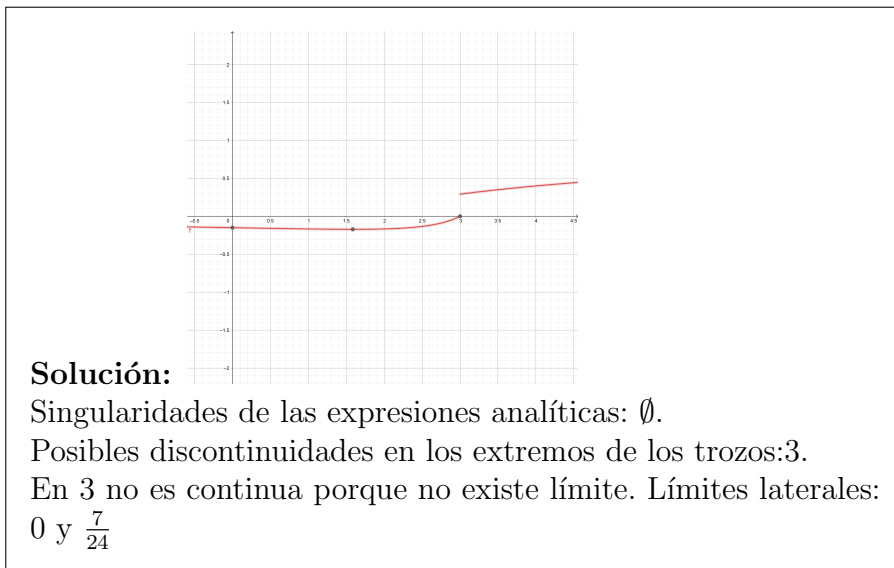
(1 punto)

Solución: Entre 1 y 1,20 euros, la afluencia de pasajeros será creciente. Entre 1,20 y 2 euros, la afluencia será decreciente.

6. **Jun. 12** Considerar la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{(x-4)(x-5)} & x \leq 3 \\ \frac{x^2-2}{(x+1)(x+3)} & x > 3 \end{cases}$

(a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 3$

(1 punto)



(b) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ así como los máximos y mínimos si $x \leq 3$

(2 puntos)

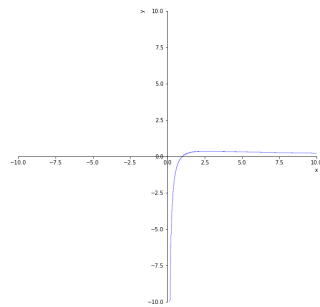
Solución: $f(x) = \frac{x-3}{(x-5)(x-4)}$
 $f'(x) = \frac{1}{(x-5)(x-4)} - \frac{x-3}{(x-5)(x-4)^2} = -\frac{x^2-6x+7}{(x-5)^2(x-4)^2} \rightarrow$
 $f'(x) = 0 \iff x \in [-\sqrt{2}+3, \sqrt{2}+3]$
 Crecimiento: $(-\sqrt{2}+3, 3]$
 Decrecimiento: $(-\infty, -\sqrt{2}+3)$
 Extremos absolutos en $(-\infty, 3]$:
 $f(-\infty) = 0$
 $f(3 - \sqrt{2}) = -0,17$
 $f(3) = 0$
 Por tanto: $[-\sqrt{2}+3, \min \text{ rel y abs}]$, $[3, \max \text{ abs}]$

7. **Sept. 11** Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$:

(a) Determine el dominio de definición

(1 punto)

Solución: $Dom(f) = (0, \infty)$



- (b) Halle sus intervalos de concavidad y convexidad así como sus puntos de inflexión. (2 puntos)

Solución: $f'(x) = \frac{1}{x^2} (-\ln(x) + 1)$
 $f''(x) = \frac{1}{x^3} (2\ln(x) - 3)$
 $f''(x) = 0 \iff x = e^{\frac{3}{2}} \approx 4,48168907033806$
 $x \in (0, e^{\frac{3}{2}}) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow \text{CONCAVA}$
 $x \in (e^{\frac{3}{2}}, \infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow \text{CONVEXA}$
 En $x = e^{\frac{3}{2}}$ hay un punto de inflexión

8. **Sept. 01** Dada la función

(1 punto)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

Probar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva $y = f(x)$ en algún punto

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8 \wedge y = -x \rightarrow m = -1$
 $3x^2 - 12x + 8 = -1 \rightarrow x = 1, x = 3 \rightarrow (1, 3) \wedge (3, 3)$