

Nombre: _____ Fecha: _____

Tiempo: 50 minutos

Tipo: A

Esta prueba tiene 11 ejercicios. La puntuación máxima es de 66. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
Puntos:	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	46	66

1. Calcula:

- (a) Racionaliza y simplifica: $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (1 punto)

$$\text{Solución: } = \frac{\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{6}}{12 - 2} = \frac{6\sqrt{6}}{10}$$

- (b) Racionaliza y simplifica: $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (1 punto)

$$\text{Solución: } \frac{10-\sqrt{10}}{18}$$

- (c) Racionaliza y simplifica: $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (1 punto)

$$\text{Solución: } \frac{15-\sqrt{15}}{42}$$

- (d) Aplica la definición de logaritmo para calcular: $\log_4 \sqrt{0,25}$ (1 punto)

$$\text{Solución: } \rightarrow 4^x = \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow 4^x = 4^{-1/2} \rightarrow \log_4 \sqrt{0,25} = -\frac{1}{2}$$

- (e) Aplica la definición de logaritmo para calcular: $\log_4 \sqrt{0,125}$ (1 punto)

$$\text{Solución: } -\frac{3}{4}$$

- (f) Aplica la definición de logaritmo para calcular: $\log_5 \sqrt[3]{25}$ (1 punto)

$$\text{Solución: } \rightarrow 5^x = \sqrt[3]{5^2} \rightarrow 5^x = 5^{2/3} \rightarrow \log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$$

- (g) Aplica la definición de logaritmo para calcular: $\log_4 \sqrt[3]{16}$ (1 punto)

Solución: $\frac{2}{3}$

- (h) Sabiendo que $\log x = 1$ y $\log y = -2$, calcula: $\log\left(\frac{100 \cdot x^2}{\sqrt{x \cdot y}}\right)$ (2 puntos)

Solución: $\log\left(\frac{100 \cdot x^2}{\sqrt{x \cdot y}}\right) = \frac{3 \log(x)}{2} - \frac{\log(y)}{2} + 2 = 2 - \frac{-2}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{9}{2}$

- (i) Sabiendo que $\log x = 2$ y $\log y = -1$, calcula: $\log\left(\frac{\sqrt{x \cdot y}}{100 \cdot x^2}\right)$ (2 puntos)

Solución: $\log\left(\frac{\sqrt{x \cdot y}}{100 \cdot x^2}\right) = \frac{3 \log(x)}{2} - \frac{\log(y)}{2} + 2 = 2 - \frac{-1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{11}{2}$

2. Halla el valor de k para que la división $(5x^3 - 2kx + k) : (x - 2)$ tenga resto 1 (1 punto)

Solución: $-3k + 40 = 1 \rightarrow k = 13$

3. Halla el valor de k para que la división $(5x^3 - 2kx + k) : (x - 3)$ tenga resto 5 (1 punto)

Solución: $-5k + 135 = 5 \rightarrow k = 26$

4. Utilizando el teorema del resto para el polinomio $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$, resuelve: (1 punto)

- (a) Valor numérico para $x = -1$

Solución: 0

- (b) ¿Es divisible $P(x)$ por $x + 1$? Justifica tu respuesta

Solución: Sí. Por el teorema del resto

5. Halla el valor de k para que la siguiente división sea exacta: $(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$ (1 punto)

Solución: $\rightarrow 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$

6. Halla el valor de k para que $3x^2 + kx - 2$ sea divisible por $x + 2$ (1 punto)

$$\text{Solución: } \rightarrow 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$$

7. Simplifica la fracción algebraica:

(1 *punto*)

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6}$$

$$\text{Solución: } = \frac{2x(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{2(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{x(x-1)}{x+2}$$

8. Simplifica la fracción algebraica:

(1 *punto*)

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 4x}{3x^4 + 3x^3 - 6x^2}$$

$$\text{Solución: } \frac{2x^3+2x^2-4x}{3x^4+3x^3-6x^2} = \frac{2x(x-1)(x+2)}{3x^2(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3x}$$

9. Simplifica la fracción algebraica:

(1 *punto*)

$$\frac{3x^4 - 3x^3 - 6x^2}{2x^3 - 2x^2 - 4x}$$

$$\text{Solución: } \frac{3x^4-3x^3-6x^2}{2x^3-2x^2-4x} = \frac{3x^2(x-2)(x+1)}{2x(x-2)(x+1)} = \frac{3x}{2}$$

10. Simplifica la fracción algebraica:

(1 *punto*)

$$\frac{2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x}{6x^3 - 12x^2 + 6x}$$

$$\text{Solución: } = \frac{2x(x-1)^3}{6x(x-1)^2} = \frac{x-1}{3}$$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a)

(2 puntos)

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$$

Solución: $\rightarrow \frac{12x^2}{6x(x+1)} - \frac{6(x+1)}{5x(x+1)(x+1)} = \frac{5}{6x(x+1)} \rightarrow$
 $12x^2 - 6x - 6 = 5x^2 + 5x \rightarrow 7x^2 - 11x - 6 = 0 \rightarrow x = 2 \quad x = -\frac{3}{7}$

(b)

(2 puntos)

$$\frac{6x+1}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} = \frac{x+1}{x+2}$$

Solución: $\rightarrow \frac{6x+1}{(x+2)(x-2)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \rightarrow$
 $6x+1-x^2-2x = x^2-2x+x-2 \rightarrow 0 = 2x^2-5x-3 \rightarrow x =$
 $\frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$

(c)

(2 puntos)

$$\frac{6x+1}{x^2-4} + \frac{x}{2-x} = \frac{x+1}{x+2}$$

Solución: $\frac{6x+1}{x^2-4} + \frac{x}{2-x} = \frac{x+1}{x+2} \rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 3$

(d)

(2 puntos)

$$\frac{x+1}{3x-6} - \frac{x+1}{2x+4} = \frac{10-x^2}{6x^2-24}$$

Solución: $\frac{x+1}{3x-6} - \frac{x+1}{2x+4} = \frac{10-x^2}{6x^2-24} \rightarrow x = 0$

(e)

(2 puntos)

$$2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x = 0$$

Solución: $P(x)2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x = 2x(x-1)^3$. Soluciones:
 $x = 0$ y $x = 1$ triple

(f)

(2 puntos)

$$6x^3 - 12x^2 + 6x = 0$$

Solución: $P(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x = 6x(x-1)^2$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 1$ doble

(g)

$$x^5 - 10x^4 + 31x^3 - 30x^2$$

(2 puntos)

Solución: $x^5 - 10x^4 + 31x^3 - 30x^2 \rightarrow x = 0, x = 2, x = 3, x = 5$

(h)

$$-2x^5 + 10x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 16x = 0$$

(2 puntos)

Solución:

$$-2x^5 + 10x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 16x = 0 \rightarrow x = -1, x = 0, x = 2$$

(i)

$$\sqrt{x+1} + 5 = x$$

(2 puntos)

Solución: $\rightarrow x+1 = (x-5)^2 \rightarrow x+1 = x^2 + 25 - 10x \rightarrow 0 = x^2 - 11x + 24$ Soluciones: $x = 8$ válida y $x = 3$ no válida

(j)

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$$

(2 puntos)

Solución: $\rightarrow \sqrt{3x-2} = 3 - \sqrt{x-1} \rightarrow 3x-2 = 9 + x - 1 - 6\sqrt{x-1} \rightarrow 6\sqrt{x-1} = 9 + x - 1 - 3x + 32 \rightarrow 6\sqrt{x-1} = 10 - 2x \rightarrow 3\sqrt{x-1} = 5 - x \rightarrow x-1 = 25 + x^2 - 10x \rightarrow x^2 - 19x + 34 = 0$. Soluciones: $x = 2$ (Sí) y $x = 17$ No

(k)

$$2x+1 = 2\sqrt{1+x} + x$$

(2 puntos)

Solución: $2x+1 = 2\sqrt{1+x} + x \rightarrow x = -1, x = 3$

(l)

$$2x-3 = \sqrt{3x-3} - 2 + x$$

(2 puntos)

Solución: $2x - 3 = \sqrt{3x - 3} - 2 + x \rightarrow x = 1, x = 4$

(m)

$$2 + \sqrt{2x + 3} = 2x - 1$$

(2 puntos)

Solución: $2 + \sqrt{2x + 3} = 2x - 1 \rightarrow x = 3$

(n)

$$2 + \sqrt{2x + 3} = 2x - 1$$

(2 puntos)

Solución: $2 + \sqrt{2x + 3} = 2x - 1 \rightarrow x = 3$

(ñ)

$$\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 3$$

(2 puntos)

Solución: $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 3 \rightarrow x = 2$

(o)

$$\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 2} = 5$$

(2 puntos)

Solución: $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 2} = 5 \rightarrow x = 6$

(p)

$$5^{3x-3} = 5^4$$

(2 puntos)

Solución: $5^{3x-3} = 5^4 \rightarrow x = \frac{7}{3}$

(q)

$$2^{x^2-4x+1} = \frac{1}{4}$$

(2 puntos)

Solución: $2^{x^2-4x+1} = \frac{1}{4} \rightarrow x = 1, x = 3$

(r)

$$3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$$

(2 puntos)

$$\textbf{Solución: } 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117 \rightarrow x = 3$$

(s)

$$\log(x-1) + \log 2 = \log(x^2+3) - \log x$$

(2 puntos)

$$\textbf{Solución: } \rightarrow 2(x-1) = \frac{x^2+3}{x} \rightarrow 2x^2-2x = x^2+3 \rightarrow x^2-2x-3=0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} x=3 \rightarrow \text{es solución} \\ x=-1 \rightarrow \text{no es solución, no existen los logaritmos de nega} \end{cases}$$

(t)

$$(x^2-5x+5) \log 5 + \log 20 = \log 4$$

(2 puntos)

$$\textbf{Solución: } \rightarrow 5^{(x^2-5x+5)} \cdot 20 = 4 \rightarrow 5^{(x^2-5x+5)} = \frac{1}{5} \rightarrow 5^{(x^2-5x+5)} = 5^{-1} \rightarrow x^2-5x+5 = -1 \rightarrow x^2-5x+6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} x=3 \rightarrow \text{es solución} \\ x=2 \rightarrow \text{es solución} \end{cases}$$

(u)

$$2 \log x - \log(3x-5) = \log(5x) - 1$$

(2 puntos)

$$\textbf{Solución: } 2 \log x - \log(3x-5) = \log(5x) - 1 \rightarrow x = 5$$

(v)

$$\log(x-1) + \log 2 = \log(x^2+3) - \log x$$

(2 puntos)

$$\textbf{Solución: } \log(x-1) + \log 2 = \log(x^2+3) - \log x \rightarrow x = 3$$