Nombre: ______________________________ **Fecha:** ____________

Tiempo: 50 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 11 ejercicios. La puntuación máxima es de 66. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
Puntos:	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	46	66

1. Calcula:

   (a) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (1 *punto*)

   Solución: $= \dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{6\sqrt{6}}{12-2} = \dfrac{6\sqrt{6}}{10}$

   (b) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (1 *punto*)

   Solución: $\frac{10-\sqrt{10}}{18}$

   (c) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (1 *punto*)

   Solución: $\frac{15-\sqrt{15}}{42}$

   (d) Aplica la definición de logaritmo para calcular: $\log_4 \sqrt{0,25}$ (1 *punto*)

   Solución: $\rightarrow 4^x = \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow 4^x = 4^{-1/2} \rightarrow \log_4 \sqrt{0,25} = -\frac{1}{2}$

   (e) Aplica la definición de logaritmo para calcular: $\log_4 \sqrt{0,125}$ (1 *punto*)

   Solución: $-\frac{3}{4}$

   (f) Aplica la definición de logaritmo para calcular: $\log_5 \sqrt[3]{25}$ (1 *punto*)

   Solución: $\rightarrow 5^x = \sqrt[3]{5^2} \rightarrow 5^x = 5^{2/3} \rightarrow \log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$

   (g) Aplica la definición de logaritmo para calcular: $\log_4 \sqrt[3]{16}$ (1 *punto*)

Solución: $\frac{2}{3}$

(h) Sabiendo que $\log x = 1$ y $\log y = -2$, calcula: $\log(\frac{100 \cdot x^2}{\sqrt{x \cdot y}})$ (2 *puntos*)

Solución: $\log(\frac{100 \cdot x^2}{\sqrt{x \cdot y}}) = \frac{3\log(x)}{2} - \frac{\log(y)}{2} + 2 = 2 - \frac{-2}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{9}{2}$

(i) Sabiendo que $\log x = 2$ y $\log y = -1$, calcula: $\log(\frac{\sqrt{x \cdot y}}{100 \cdot x^2})$ (2 *puntos*)

Solución: $\log(\frac{\sqrt{x \cdot y}}{100 \cdot x^2}) = \frac{3\log(x)}{2} - \frac{\log(y)}{2} + 2 = 2 - \frac{-1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{11}{2}$

2. Halla el valor de k para que la división $(5x^3 - 2kx + k) : (x - 2)$ tenga resto 1 (1 *punto*)

Solución: $-3k + 40 = 1 \to k = 13$

3. Halla el valor de k para que la división $(5x^3 - 2kx + k) : (x - 3)$ tenga resto 5 (1 *punto*)

Solución: $-5k + 135 = 5 \to k = 26$

4. Utilizando el teorema del resto para el polinomio $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$, resuelve: (1 *punto*)

   (a) Valor numérico para $x = -1$

   Solución: 0

   (b) ¿Es divisible $P(x)$ por $x + 1$? Justifica tu respuesta

   Solución: Sí. Por el teorema del resto

5. Halla el valor de k para que la siguiente división sea exacta: $(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$ (1 *punto*)

Solución: $\to 10 - 2k = 0 \to k = 5$

6. Halla el valor de k para que $3x^2 + kx - 2$ sea divisible por $x + 2$ (1 *punto*)

Solución: $\rightarrow 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$

7. Simplifica la fracción algebraica: (1 *punto*)

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6}$$

Solución: $= \dfrac{2x\,(x-1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)}{2\,(x+2)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)} = \dfrac{x(x-1)}{x+2}$

8. Simplifica la fracción algebraica: (1 *punto*)

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 4x}{3x^4 + 3x^3 - 6x^2}$$

Solución: $\frac{2x^3+2x^2-4x}{3x^4+3x^3-6x^2} = \frac{2x(x-1)(x+2)}{3x^2(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3x}$

9. Simplifica la fracción algebraica: (1 *punto*)

$$\frac{3x^4 - 3x^3 - 6x^2}{2x^3 - 2x^2 - 4x}$$

Solución: $\frac{3x^4-3x^3-6x^2}{2x^3-2x^2-4x} = \frac{3x^2(x-2)(x+1)}{2x(x-2)(x+1)} = \frac{3x}{2}$

10. Simplifica la fracción algebraica: (1 *punto*)

$$\frac{2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x}{6x^3 - 12x^2 + 6x}$$

Solución: $= \dfrac{2x\,(x-1)^3}{6x\,(x-1)^2} = \dfrac{x-1}{3}$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) (2 *puntos*)

$$\frac{2x}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{5}{6}$$

Solución: $\rightarrow \dfrac{12x^2}{6x\left(x+1\right)}-\dfrac{6\left(x+1\right)}{5x\left(x+1\right)\left(x+1\right)}=\dfrac{5}{6x\left(x+1\right)}\rightarrow$ $12x^2-6x-6=5x^2+5x\rightarrow 7x^2-11x-6=0\rightarrow x=2\ x=-\frac{3}{7}$

(b) (2 *puntos*)

$$\frac{6x+1}{x^2-4}-\frac{x}{x-2}=\frac{x+1}{x+2}$$

Solución: $\rightarrow \dfrac{6x+1}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}-\dfrac{x\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}=\dfrac{\left(x+1\right)\left(x-2\right)}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}\rightarrow$ $6x+1-x^2-2x=x^2-2x+x-2\rightarrow 0=2x^2-5x-3\rightarrow x=$ $\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm 7}{4}=\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=3\end{cases}$

(c) (2 *puntos*)

$$\frac{6x+1}{x^2-4}+\frac{x}{2-x}=\frac{x+1}{x+2}$$

Solución: $\frac{6x+1}{x^2-4}+\frac{x}{2-x}=\frac{x+1}{x+2}\rightarrow x=-\frac{1}{2},x=3$

(d) (2 *puntos*)

$$\frac{x+1}{3x-6}-\frac{x+1}{2x+4}=\frac{10-x^2}{6x^2-24}$$

Solución: $\frac{x+1}{3x-6}-\frac{x+1}{2x+4}=\frac{10-x^2}{6x^2-24}\rightarrow x=0$

(e) (2 *puntos*)

$$2x^4-6x^3+6x^2-2x=0$$

Solución: $P(x)2x^4-6x^3+6x^2-2x=2x\left(x-1\right)^3$. Soluciones: $x=0$ y $x=1$ triple

(f) (2 *puntos*)

$$6x^3-12x^2+6x=0$$

Solución: $P(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x = 6x\left(x-1\right)^2$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 1$ doble

(g) (2 *puntos*)

$$x^5 - 10x^4 + 31x^3 - 30x^2$$

Solución: $x^5 - 10x^4 + 31x^3 - 30x^2 \rightarrow x = 0, x = 2, x = 3, x = 5$

(h) (2 *puntos*)

$$-2x^5 + 10x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 16x = 0$$

Solución:

$$-2x^5 + 10x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 16x = 0 \rightarrow x = -1, x = 0, x = 2$$

(i) (2 *puntos*)

$$\sqrt{x+1} + 5 = x$$

Solución: $\rightarrow x + 1 = \left(x-5\right)^2 \rightarrow x + 1 = x^2 + 25 - 10x \rightarrow 0 = x^2 - 11x + 24$ Soluciones: $x = 8$ válida y $x = 3$ no válida

(j) (2 *puntos*)

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$$

Solución: $\rightarrow \sqrt{3x-2} = 3 - \sqrt{x-1} \rightarrow 3x - 2 = 9 + x - 1 - 6\sqrt{x-1} \rightarrow 6\sqrt{x-1} = 9 + x - 1 - 3x + 32 \rightarrow 6\sqrt{x-1} = 10 - 2x \rightarrow 3\sqrt{x-1} = 5 - x \rightarrow x - 1 = 25 + x^2 - 10x \rightarrow x^2 - 19x + 34 = 0$. Soluciones: $x = 2$ (Sí) y $x = 17$ No

(k) (2 *puntos*)

$$2x + 1 = 2\sqrt{1+x} + x$$

Solución: $2x + 1 = 2\sqrt{1+x} + x \rightarrow x = -1, x = 3$

(l) (2 *puntos*)

$$2x - 3 = \sqrt{3x-3} - 2 + x$$

Solución: $2x-3=\sqrt{3x-3}-2+x \to x=1, x=4$

(m) (2 *puntos*)

$$2+\sqrt{2x+3}=2x-1$$

Solución: $2+\sqrt{2x+3}=2x-1 \to x=3$

(n) (2 *puntos*)

$$2+\sqrt{2x+3}=2x-1$$

Solución: $2+\sqrt{2x+3}=2x-1 \to x=3$

(ñ) (2 *puntos*)

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$$

Solución: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3 \to x=2$

(o) (2 *puntos*)

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$$

Solución: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5 \to x=6$

(p) (2 *puntos*)

$$5^{3x-3}=5^4$$

Solución: $5^{3x-3}=5^4 \to x=\frac{7}{3}$

(q) (2 *puntos*)

$$2^{x^2-4x+1}=\frac{1}{4}$$

Solución: $2^{x^2-4x+1}=\frac{1}{4} \to x=1, x=3$

(r) (2 *puntos*)

$$3^{x-1}+3^x+3^{x+1}=117$$

Solución: $3^{x-1}+3^{x}+3^{x+1}=117 \rightarrow x=3$

(s) (2 *puntos*)

$$\log(x-1)+\log 2=\log\left(x^2+3\right)-\log x$$

Solución: $\rightarrow 2(x-1)=\frac{x^2+3}{x} \rightarrow 2x^2-2x=x^2+3 \rightarrow x^2-2x-3=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\begin{cases} x=3 \rightarrow \text{es solución} \\ x=-1 \rightarrow \text{no es solución, no existen los logaritmos de nega} \end{cases}$

(t) (2 *puntos*)

$$\left(x^2-5x+5\right)\log 5+\log 20=\log 4$$

Solución: $\rightarrow 5^{\left(x^2-5x+5\right)}\cdot 20=4 \rightarrow 5^{\left(x^2-5x+5\right)}=\frac{1}{5} \rightarrow 5^{\left(x^2-5x+5\right)}=5^{-1} \rightarrow x^2-5x+5=-1 \rightarrow x^2-5x+6=0 \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases} x=3 \rightarrow \text{es solución} \\ x=2 \rightarrow \text{es solución} \end{cases}$

(u) (2 *puntos*)

$$2\log x-\log(3x-5)=\log(5x)-1$$

Solución: $2\log x-\log(3x-5)=\log(5x)-1 \rightarrow x=5$

(v) (2 *puntos*)

$$\log(x-1)+\log 2=\log(x^2+3)-\log x$$

Solución: $\log(x-1)+\log 2=\log(x^2+3)-\log x \rightarrow x=3$