

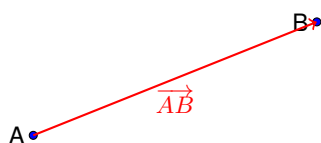
Parte I

Geometría

Geometría Analítica

1 VECTORES LIBRES

Dados dos puntos en el plano (A y B), podemos trazar una flecha que vaya del primero al segundo. A esta flecha la llamaremos vector (fijo) y se denota \overrightarrow{AB} .



- **Módulo:** La longitud del vector
- **Dirección:** La recta que contiene al vector y cualquiera de sus paralelas
- **Sentido:** El que va del origen al final o su contrario. Viene representado por punta "la cabeza de la flecha"

Dos vectores (fijos) son **equipolentes** cuando tienen el mismo módulo, misma dirección y mismo sentido. Un vector fijo y todos sus equipolentes forman lo que se denomina un **vector libre**. Se denota \vec{v} o $[\overrightarrow{AB}]$ siendo \overrightarrow{AB} un vector fijo representante de \vec{v} . Un vector libre viene determinado por sus coordenadas:

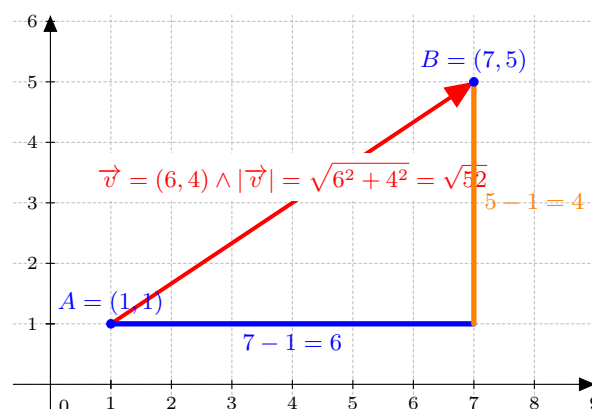
2 COORDENADAS Y MÓDULO DE UN VECTOR

Un vector se puede ver como el desplazamiento que tenemos que hacer horizontalmente y verticalmente para ir del origen al extremo del mismo. Al desplazamiento horizontal le llamaremos primera coordenada y al vertical, segunda.

- Dados $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$
- A partir de las coordenadas del punto podremos calcular su módulo. Dados $\vec{u}(x, y), \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.1. Ejemplo

Determina las coordenadas y el módulo del vector libre cuyo representante es el vector que va de $A(1, 1)$ a $B(7, 5)$



3 OPERACIONES CON VECTORES

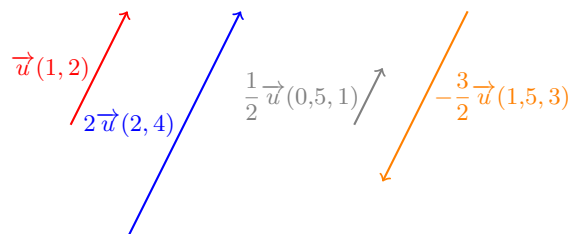
3.1. Producto de un número por un vector

Definición Dado $k \in \mathbb{R}$ y \vec{u} se define $k \cdot \vec{u}$ como un \vec{v} que:

- $|\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{u}|$
- $\vec{v} \parallel \vec{u}$
- Mismo sentido que \vec{u} si $k > 0$ o sentido contrario si $k < 0$

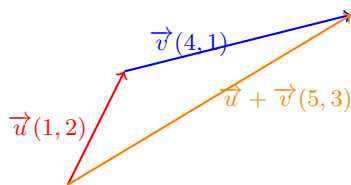
Además se cumple que si $\vec{u}(x_1, y_1) \rightarrow k\vec{u}(k \cdot x_1, k \cdot y_1)$

3.1.1. Ejemplos



3.2. Suma y resta de vectores

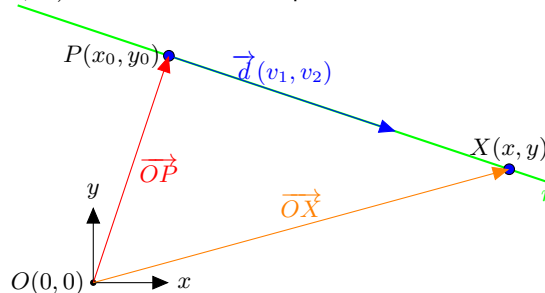
Definición de suma Dados \vec{u} y \vec{v} se define la suma como el vector que si los ponemos seguidos va del origen del primer vector al extremo del segundo vector. Además se cumple que si $\vec{u}(x_1, y_1)$ y $\vec{v}(x_2, y_2) \rightarrow \vec{u} + \vec{v}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$



Definición de resta Dados \vec{u} y \vec{v} se define la resta como la suma del primero con el opuesto del segundo. Además se cumple que si $\vec{u}(x_1, y_1)$ y $\vec{v}(x_2, y_2) \rightarrow \vec{u} - \vec{v}(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

6 ECUACIONES DE LA RECTA

Podemos definir la recta como el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos del plano que a partir de un punto fijo siguen una misma dirección. Dado un punto $P(x_0, y_0)$ y un vector $\vec{d}(v_1, v_2)$, en la recta r se cumple:



$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$$

Como \vec{PX} y \vec{d} son colineales:

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda \cdot \vec{d}$$

6.1. Ecuación vectorial

Se obtiene a partir de las coordenadas de la expresión anterior:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \cdot (v_1, v_2)$$

6.2. Ecuaciones paramétricas

Se obtienen separando cada coordenada de la expresión anterior:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \end{cases}$$

6.3. Ecuación continua

Se obtienen de la anterior despejando λ en cada ecuación e igualando las expresiones:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

6.4. Ecuación implícita o general

Operando y reduciendo la expresión anterior llegaremos a una de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

6.5. Ecuación explícita

Despejando la y en la ecuación anterior obtendremos

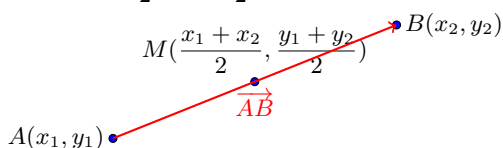
$$y = mx + n$$

donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen

Vector director y pendiente de una recta: Dada una recta r de pendiente m entonces el vector $\vec{v}(1, m)$ es un vector director de la recta. Y al revés, si $\vec{d}(v_1, v_2)$ es un vector director de la recta, entonces $m = \frac{v_2}{v_1}$ es la pendiente de la recta

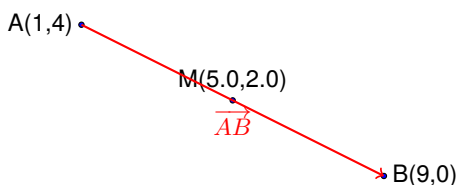
4 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dados dos puntos del plano, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el punto medio es $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$.



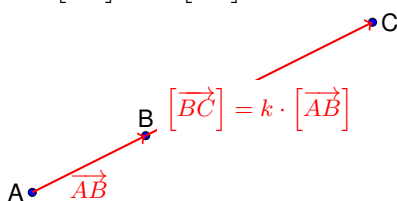
La demostración es sencilla aplicando la propiedad geométrica que cumple el punto medio: $\vec{AM} = \vec{MB}$

4.1. Ejemplo



5 PUNTOS ALINEADOS

Dados los puntos A , B y C estarán alineados si los vectores \vec{AB} y \vec{BC} son colineales, o tienen la misma dirección, y por tanto: $\exists k \in \mathbb{R} \mid [\vec{BC}] = k \cdot [\vec{AB}]$

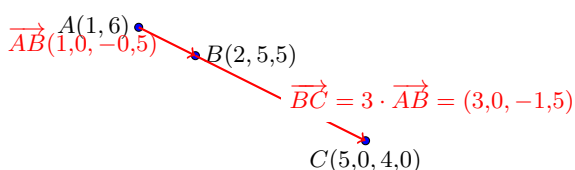


o bien:

Si $[\vec{AB}] = \vec{u}(u_1, u_2)$ y $[\vec{BC}] = \vec{v}(v_1, v_2)$, se cumple:

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$$

5.1. Ejemplo



Están alineados porque $[\vec{BC}] = 3 \cdot [\vec{AB}]$, o bien porque:

$$\frac{3}{1} = \frac{-1,5}{-0,5}$$

6.6. Ejemplo

Dada la recta que pasa por $P(1, 3)$ y de dirección la marcada por el vector $\vec{d}(3, -1)$ determina la ecuación de la misma en sus diferentes variantes:

■ Ecuación vectorial: $(x, y) = (1, 3) + \lambda \cdot (3, -1)$

■ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$

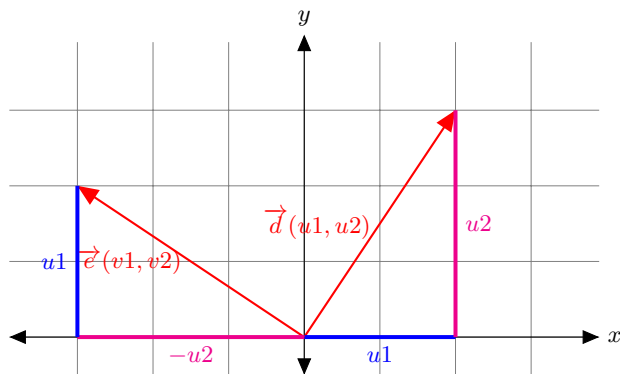
■ Ecuación continua: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-1}$

■ Ecuación general: $3y + x - 10 = 0$

■ Ecuación explícita: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

7 CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Dado $\vec{d}(u_1, u_2)$ y un vector perpendicular del mismo módulo $\vec{e}(v_1, v_2)$:

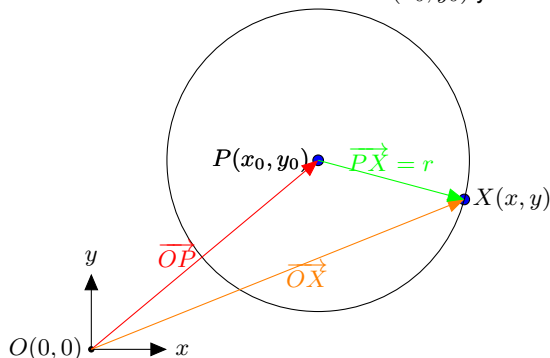


Se cumple que $\vec{e}(v_1, v_2) = (-u_2, u_1)$ y por tanto:

- Para que dos rectas sean paralelas basta con que tengan la misma dirección
- Dada una recta con vector director $\vec{d}(v_1, v_2)$, un vector director de las rectas perpendiculares será $\vec{e}(-v_2, v_1)$. Además si m y m' son las pendientes de las rectas perpendiculares, se cumple: $m \cdot m' = -1$

8 ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Dada una circunferencia de centro $P(x_0, y_0)$ y de radio r :



Los puntos $X(x, y)$ de la misma cumplen:

$$|\vec{PX}| = r$$

Como $\vec{OP} + \vec{PX} = \vec{OX}$, luego $\vec{PX} = \vec{OX} - \vec{OP}$. Por tanto:

$$|\vec{OX} - \vec{OP}| = r$$

Pasando a coordenadas:

$$|(x - x_0, y - y_0)| = r$$

Y por el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación de la circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

8.1. Ejemplo

Determina la ecuación de la circunferencia con centro $P(3, 1)$ y radio 3:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$$