Variables de Probabilidad

Departamento de Matemáticas
IES Pedro Cerrada

1 Distribuciones de probabilidad

Finalidad : Abstraer matemáticamente un tipo de experimento aleatorio. Y, con ello, poder estimar de manera teórica lo que sucedería de manera experimental mediante una estadística

¿Cómo?: Mediante variables aleatorias y distribuciones de probabilidad asociadas a esas variables

1.1. Variables aleatorias

Una variable aleatoria es una función que a cada suceso elemental de un espacio muestral le asigna un número. Para hacer referencia a las variables se usan las letras: X, Y, ...

Ejemplo: Sea el experimento aleatorio "lanzar un dado": El espacio muestral lo componen las 6 caras del dado. Podemos asignar la variable X que a cada cara le asocia el número que represente su cara.

Suceso	X	x_i
Cara 1	$\rightarrow$	1
Cara 2	$\rightarrow$	2
Cara 3	$\rightarrow$	3
Cara 4	$\rightarrow$	4
Cara 5	$\rightarrow$	5
Cara 6	$\rightarrow$	6

Ejemplo: Sea el experimento compuesto lanzar dos monedas. Podemos asignar la variable aleatoria:

$$Y = \{Número\ de\ caras\}$$

Suceso	Y	y_i
C,C	$\rightarrow$	2
C,X	$\rightarrow$	1
X,C	$\rightarrow$	1
X,X	$\rightarrow$	0

1.1.1. Tipos de variables aleatorias

Discretas: Toman un número finito o numerable de valores

Continuas: Toman valores en un rango continuo

Ejemplo de variables discreta: Sea la X =*"El número de caras al lanzar dos dados"*. Los valores posibles son 0, 1 o 2 (que es un conjunto finito de datos, en concreto 3 datos)

Ejemplo de variables continua: X = *"Distancia al centro de la diana medida desde la posición en que cae un dardo lanzado por un tirador experto"* . En este caso la variable puede tomar cualquier valor en el rango entre 0 y el radio de la diana

1.2. Distribuciones de probabilidad

Llamaremos Distribución de probabilidad a la relación entre los valores de la variable y sus probabilidades.

Estas relaciones se pueden indicar mediante funciones. El tratamiento de estas funciones es diferente según las variables sean discretas o continuas.

1.2.1. Distribución uniforme discreta

Ejemplo: Sea la variable X = *"Número obtenido al lanzar una dado"*

A cada valor de la variable podemos asignarle su probabilidad:

x_i	$P(X)$	$P(x_i)$
1	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
2	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
3	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
4	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
5	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
6	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$

Podemos representar la relación anterior mediante una función:

$$P: \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x_i \mapsto P(X = x_i) = \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Todas las caras tienen la misma probabilidad: $\dfrac{1}{n}$, siendo n el número de caras, o tamaño del espacio muestral.

A este tipo de distribución se le llama **uniforme discreta**.

1.2.2. Distribución Binomial

Ejemplo: Queremos calcular las probabilidades de que al lanzar 5 monedas, obtengamos tres caras. Un suceso que cumple el enunciado es:

$$S_1 = \{C, C, C, X, X\}$$

Teniendo en cuenta que lanzar cada moneda son experimentos independientes, la probabilidad de ese suceso será:

$$\begin{aligned} P(S_1) &= P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) \cdot ... \cdot P(X_5|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap X_4) = \\ &= P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5) = \\ &= P(C)^3 \cdot P(X)^2 \end{aligned}$$

Como la probabilidad de que una moneda sea cara es $\dfrac{1}{2}$ y la de que sea cruz también:

$$P(S_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Ahora bien, habrá tantos sucesos que cumplan el enunciado como combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. Por tanto la probabilidad de que salgan 3 caras será:

$$P\,(Salgan\ 3\ caras) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Si asociamos al experimento "lanzar 5 monedas"le asignamos la variable "número de caras obtenidas", podemos determinar la probabilidad mediante la siguiente función.

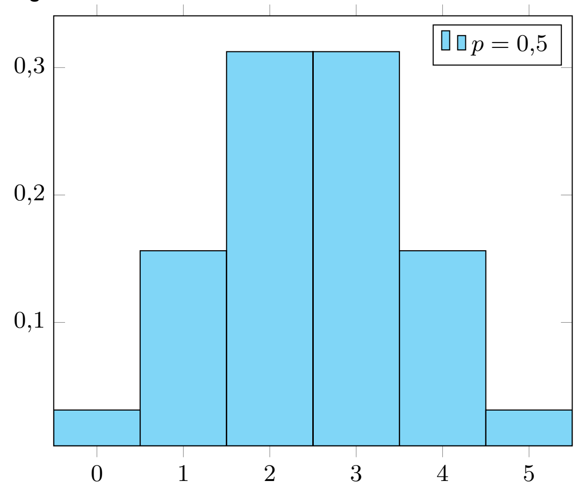
$$P: \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ k \mapsto P(X=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} \end{array}$$

Esto es un ejemplo de distribución binomial de tamaño 5 y probabilidad $0{,}5$.

Realizando los cálculos para $x = 1, ..., 5$, la distribución de probabilidad de X que resulta es:

$\{0 : 0{,}03125,\ 1 : 0{,}15625,\ 2 : 0{,}3125,\ 3 : 0{,}3125,\ 4 : 0{,}15625,\ 5 : 0{,}03125\}$

Y gráficamente:



Generalización de distribución Binomial: Hablaremos de una distribución binomial cuando:

- Se parte de un experimento compuesto de varios simples independientes
- Los experimentos simples son dicotómicos. Es decir, solo puede haber dos sucesos elementales: uno al que llamaremos acierto y otro al que llamaremos fracaso
- Asociado al experimento compuesto tenemos la variable número de aciertos cuando realizamos el experimento simple un número determinado de veces

En la situación anterior, la distribución binomial vendrá determinada por dos parámetros:

- Parámetro n: Número de veces que se realiza el experimento simple
- Parámetro p: La probabilidad de que ocurra el suceso acierto

A este tipo de variable y su distribución de probabilidades se le llama binomial.

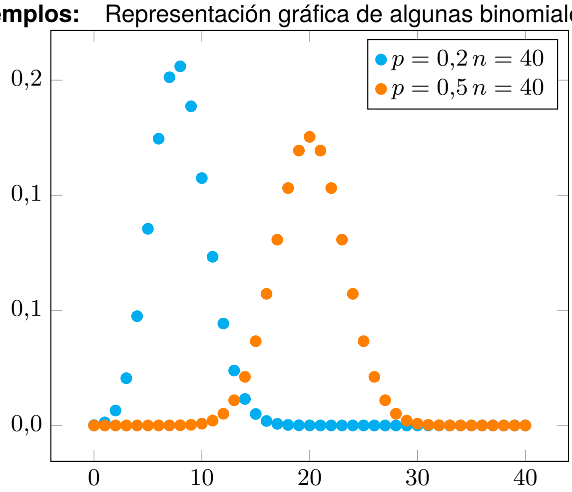
Ejemplo: Así en el ejemplo de las monedas, el experimento se compone de **5 lanzamientos de moneda**. Si sale cara es acierto y si no fracaso. La variable aleatoria asociada al experimento será el número de caras que salen al lanzar 5 monedas. Esta variable sigue una distribución binomial.

En general tendremos una binomial de tamaño n y probabilidad p, cuando el experimento simple se haga n veces y la probabilidad de acierto sea p.

La función de probabilidad en este caso nos queda:

$$P: \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ k \mapsto P(X=k) = \binom{n}{k}(p)^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{array}$$

Ejemplos: Representación gráfica de algunas binomiales:



1.2.3. Distribución Normal