Probabilidad

Departamento de Matemáticas
IES Pedro Cerrada

1 Experimento aleatorio

Un **experimento aleatorio** o no determinista es aquél que si se repite varias veces no está garantizado obtener siempre el mismo resultado. Es decir, no se puede determinar cuál va a ser el resultado del experimiento hasta que no se realiza. En caso contrario, decimos que el experimento es **determinista**

Un experimento es aleatorio cuando depende de muchos factores y cualquier pequeña modificación de alguno implica obtener un resultado diferente.

1.1. Ejemplos

- **Aleatorio**: Lanzar un dado y ver el resultado
- **Determinista**: Calcular el tiempo que tarda en caer un objeto al suelo desde una distancia determinada

2 Espacio muestral y sucesos

- **Espacio muestral**: Conjunto de los posibles resultados del experimento. Se denota: E
- **Sucesos simples o elementales**: Cualquiera de los elementos del espacio muestral
- **Sucesos compuestos**: Sucesos formados por varios simples.
- **Suceso seguro**: Suceso compuesto por los elementos del Espacio muestral. Se cumple siempre
- **Suceso imposible**: Cualquier suceso que no se cumpla nunca. Se denota con el símbolo: $\varnothing$
- **Suceso contrario**: Si A es un suceso, $\overline{A}$ es el suceso contrario. Es aquel que se cumple cuando no se cumple A

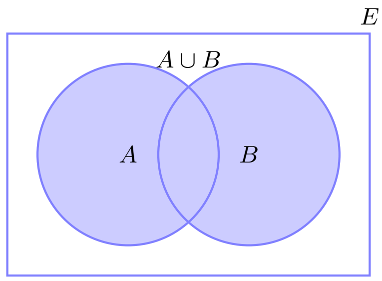
2.1. Ejemplo:

Lanzamos un dado y comprobamos la cara que sale.

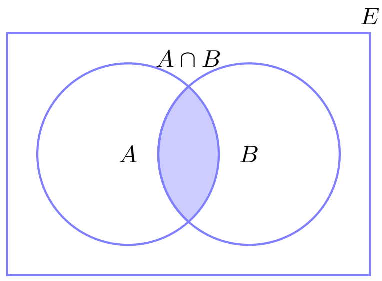
- **Espacio muestral**: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Sucesos simples o elementales**: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6
- **Sucesos compuestos**: $A = \{que\ salga\ par\} = \{2, 4, 6\}$
- **Suceso seguro**: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Suceso imposible**: $\varnothing = \{que\ salga\ mayor\ que\ 6\}$
- **Suceso contrario**: Si $A = \{que\ salga\ par\} = \{2, 4, 6\}$, $\overline{A} = \{que\ salga\ impar\} = \{1, 3, 5\}$

3 Operaciones con sucesos y relaciones

- **Unión**: la unión de los sucesos A y B es aquel suceso que contiene a todos los elementos de A y a los de B. Se denota: $A \cup B$



- **Intersección**: la intersección de los sucesos A y B es aquel suceso que contiene a todos los elementos que están tanto en A como en B. Se denota: $A \cap B$

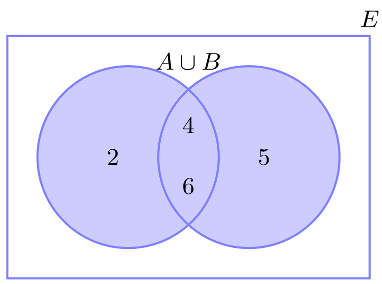


3.1. Ejemplo

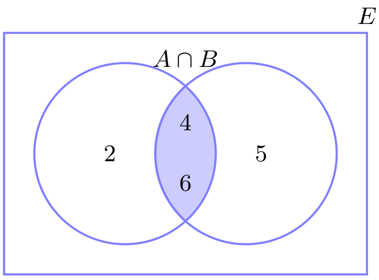
Tomamos como experimento el resultado de lanzar un dado, y los sucesos:

$A = \{que\ salga\ par\} = \{2, 4, 6\}$
$B = \{que\ sea\ mayor\ que\ 3\} = \{4, 5, 6\}$
$C = \{que\ salga\ impar\} = \{1, 3, 5\}$

- $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$



- $A \cap B = \{4, 6\}$



- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$
- $A \cap C = \varnothing$

3.2. Compatibilidad de sucesos

Se dice que dos sucesos son incompatibles cuando su intersección es el conjunto vacío. En caso contrario se dice que son compatibles.

3.2.1. Ejemplo

En el ejemplo anterior, A y B son compatibles y A y C incompatibles.

4 Probabilidad en experimentos regulares y Regla de Laplace

Cuando todos los sucesos elementales de un **espacio muestral finito** están en las mismas condiciones de suceder se dice que son **equiprobables**, y al experimento se le llama **regular**.

4.1. Ejemplos de experimentos regulares

Lanzamiento de dados, monedas, extracción de cartas, ...

4.2. Regla de Laplace

La probabilidad de un suceso de un experimento regular viene determinada por la Regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$$

4.2.1. Ejemplo

Al lanzar un dado, los casos posibles son 6 ($\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$):
La probabilidad de sacar un 3: $\{3\} \to \frac{1}{6}$
La probabilidad de sacar par: $\{2, 4, 6\} \to \frac{3}{6}$
La probabilidad de sacar más de 4: $\{5, 6\} \to \frac{2}{6}$

5 Propiedades de la probabilidad

La probabilidad de un experimento regular cumple las siguientes propiedades:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(E) = 1$ y $P(\varnothing) = 0$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si A y B son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Podemos extender el concepto de probabilidad a cualquier función que cumpla las propiedades anteriores.

6 Probabilidad condicionada

Puesto que la probabilidad está ligada al nivel de confianza sobre los resultados de un experimento, el hecho de que ocurra un suceso, puede cambiar la probabilidad de los demás. A esta nueva probabilidad se le llama **condicionada**

6.1. Ejemplo

Supongamos que tenemos una urna con 8 bolas numeradas pero de colores blancos y negros de la cual se extrae una. Supongamos, también, que las tres primeras son blancas y el resto negras, luego $E = \{B_1, B_2, B_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8\}$.
A priori, la $P(\{Sea\ impar\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ por la regla de Laplace. Tiene la misma probabilidad salir par que impar.

Vamos a suponer ahora que durante la extracción se percibe que la bola es blanca. La situación cambia, porque que sea blanca implica que hay 3 casos posibles y dos de las tres son impares. A esta nueva probabilidad se le llama condicionada y se denota así:

$$P(I|B) = \frac{2}{3}$$

La probabilidad de que sea impar ha aumentado por el hecho de haber añadido la condición (o información) que es blanca.
Esta probabilidad la podemos transformar:

$$P(I|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{P(I \cap B)}{P(B)}$$

6.2. Generalización del fórmula de la probabilidad condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

y despejando:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

7 Experimentos compuestos

Un **experimento aleatorio compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva.

Ejemplo: Lanzar tres monedas, extraer cuatro cartas de una baraja, ...

La probabilidad de un suceso compuesto se podrá calcular a partir de las probabilidades obtenidas de los experimentos simples usando la probabilidad condicional:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

7.1. Independencia y dependencia de sucesos

Se dice que dos sucesos son independientes cuando la probabilidad de cada uno no depende del resultado del otro.

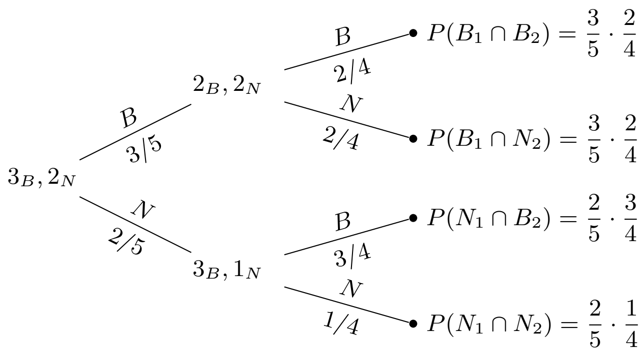
$$A \text{ y } B \text{ son independientes} \iff P(B|A) = P(B)$$

Ejemplos de sucesos independientes: Lanzar varias monedas, extracción de varias cartas con reemplazamiento, sacar bolas de una urna con reemplazamiento, lanzar varios dados, ...

Ejemplos de sucesos dependientes: Extracción de varias cartas sin reemplazamiento, sacar bolas de una urna sin reemplazamiento, ...

7.2. Cálculo de probabilidad compuesta para sucesos dependientes

Ejemplo: En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas **sin** reemplazamiento. Podemos construir el siguiente árbol con las probabilidades de los diferentes resultados:

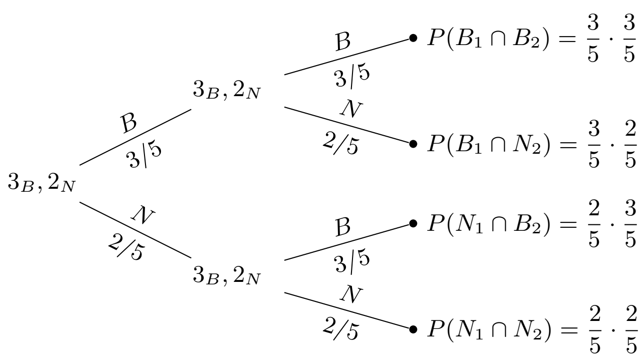


Ejemplos:

- Probabilidad de que las dos sean blancas:
$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$
- Probabilidad de que las dos sean negras:
$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$
- Probabilidad de que sean del mismo color:
$P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$

7.3. Cálculo de probabilidad compuesta para sucesos independientes

Ejemplo: En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas **con** reemplazamiento. Ahora el árbol quedará:



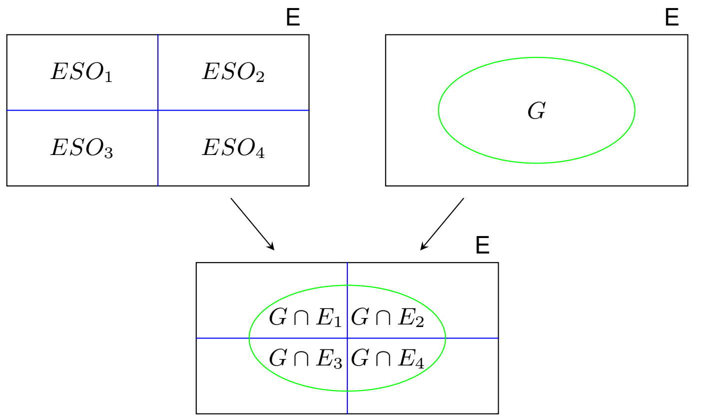
Ejemplos:

- Probabilidad de que las dos sean blancas:
$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

- Probabilidad de que las dos sean negras:
  $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
- Probabilidad de que sean del mismo color:
  $P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$

8 Teorema de la probabilidad total

Ejemplo: En un instituto de ESO hay 4 cursos: 1º, 2º, 3º y 4º. Se quiere estudiar la probabilidad de que un alumno del instituto esté con la gripe (Llamamos G al suceso tener gripe).



Como un alumno pertenece a un solo curso los sucesos ESO_1 , ESO_2, ESO_3, y ESO_4 (abreviados E_1, etc.) son incompatibles. Además:

$$G = (G \cap E_1) \cup (G \cap E_2) \cup (G \cap E_3) \cup (G \cap E_4) = \bigcup_{i=1}^{4} (G \cap E_i)$$

Por tanto,

$$P(G) = P(G \cap E_1) + P(G \cap E_2) + P(G \cap E_3) + P(G \cap E_4) = \sum_{i=1}^{4} P(G \cap E_i)$$

Aplicando la probabilidad condicionada:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(E_1) \cdot P(G|E_1) + P(E_2) \cdot P(G|E_2) + \\ &+ P(E_3) \cdot P(G|E_3) + P(E_1) \cdot P(G|E_4) = \\ &= \sum_{i=1}^{4} P(E_i) \cdot P(G|E_i) \end{aligned}$$

8.1. Probabilidad total

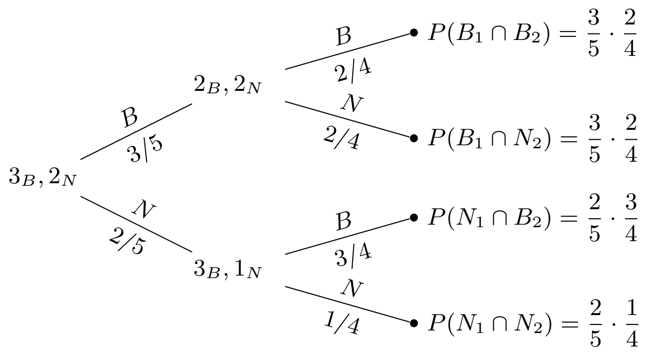
Generalizando el resultado anterior:

Teorema de la probabilidad total: Si A_1, A_2, ..., A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral, entonces la probabilidad de cualquier otro suceso B es:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

8.1.1. Ejemplo:

Tomando de nuevo el ejemplo de la urna en la que hay tres bolas blancas y dos negras. Si se extraen dos bolas, por ejemplo **sin** reemplazamiento, podemos calcular la probabilidad de que la segunda bola haya sido blanca:



$$P(B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

9 Teorema de Bayes

Si A_1, A_2, ..., A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral, y B otro suceso cualquiera:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Demostración: Por la probabilidad condicionada:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Pero por la probabilidad total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Sustituyendo esta en la primera obtenemos el resultado

9.1. Ejemplo:

En el ejemplo del apartado anterior calcular la probabilidad de que la primera bola haya sido blanca si se sabe que la segunda ha sido blanca:

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}$$

10 Distribuciones de probabilidad

Finalidad : Abstraer matemáticamente un tipo de experimento aleatorio. Y, con ello, poder estimar de manera teórica lo que sucedería de manera experimental mediante una estadística

¿Cómo?: Mediante variables aleatorias y distribuciones de probabilidad asociadas a esas variables

10.1. Variables aleatorias

Una variable aleatoria es una función que a cada suceso elemental de un espacio muestral le asigna un número. Para hacer referencia a las variables se usan las letras: X, Y, ...

Ejemplo: Sea el experimento aleatorio "lanzar un dado": El espacio muestral lo componen las 6 caras del dado. Podemos asignar la variable X que a cada cara le asocia el número que represente su cara.

X

Suceso		x_i
Cara 1	$\rightarrow$	1
Cara 2	$\rightarrow$	2
Cara 3	$\rightarrow$	3
Cara 4	$\rightarrow$	4
Cara 5	$\rightarrow$	5
Cara 6	$\rightarrow$	6

Ejemplo: Sea el experimento compuesto lanzar dos monedas. Podemos asignar la variable aleatoria:

$$Y = \{Número\ de\ caras\}$$

Y

Suceso		y_i
C,C	$\rightarrow$	2
C,X	$\rightarrow$	1
X,C	$\rightarrow$	1
X,X	$\rightarrow$	0

10.1.1. Tipos de variables aleatorias

Discretas: Toman un número finito o numerable de valores

Continuas: Toman valores en un rango continuo

Ejemplo de variables discreta: Sea la *X* =*"El número de caras al lanzar dos dados"*. Los valores posibles son 0, 1 o 2 (que es un conjunto finito de datos, en concreto 3 datos)

Ejemplo de variables continua: *X* = *"Distancia al centro de la diana medida desde la posición en que cae un dardo lanzado por un tirador experto"* . En este caso la variable puede tomar cualquier valor en el rango entre 0 y el radio de la diana

10.2. Distribuciones de probabilidad

Llamaremos Distribución de probabilidad a la relación entre los valores de la variable y sus probabilidades.

Estas relaciones se pueden indicar mediante funciones. El tratamiento de estas funciones es diferente según las variables sean discretas o continuas.

10.2.1. Distribución uniforme discreta

Ejemplo: Sea la variable *X* = *"Número obtenido al lanzar una dado"*
A cada valor de la variable podemos asignarle su probabilidad:

$P(X)$

x_i		$P(x_i)$
1	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
2	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
3	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
4	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
5	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
6	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$

Podemos representar la relación anterior mediante una función:

$$P: \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x_i \rightarrow P(X = x_i) = \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Todas las caras tienen la misma probabilidad: $\dfrac{1}{n}$, siendo n el número de caras, o tamaño del espacio muestral.

A este tipo de distribución se le llama **uniforme discreta**.

10.2.2. Distribución Binomial

Ejemplo: Queremos calcular las probabilidades de que al lanzar 5 monedas, obtengamos tres caras. Un suceso que cumple el enunciado es:

$$S_1 = \{C, C, C, X, X\}$$

Teniendo en cuenta que lanzar cada moneda son experimentos independientes, la probabilidad de ese suceso será:

$$P(S_1) = P(C_1) \cdot$$

Ahora bien, habrá tantos sucesos que cumplan el enunciado como combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. Por tanto la probabilidad de que salgan 3 caras será

Podemos determinar la probabilidad mediante la siguiente función.

Esto es un ejemplo de distribución binomial.

En una distribución binomial se parte de un experimento compuesto de varios simples independientes. Además los experimentos simples tienen que ser dicotomicos. Es decir solo puede haber dos sucesos elementales: uno al que llamaremos acierto y otro al que llamaremos fracaso. Asociado al experimento compuesto tenemos la variable número de aciertos cuando realizamos el experimento simple un número determinado de veces.

Así en el ejemplo de las monedas, el experimento se compone de 5 lanzamientos de moneda. Si sale cara es acierto y si no fracaso. La variable aleatoria asociada al experimento será el número de caras que salen al lanzar 5 monedas.

En general tendremos una binomial de tamaño n y probabilidad p, cuando el experimento simple se haga n veces y la probabilidad de acierto se p.

La función de probabilidad en este caso nos queda: