Probabilidad

Dep. de Matemáticas



Experimentos aleatorios

Un experimento es **aleatorio** cuando depende de muchos factores y cualquier pequeña modificación de alguno implica obtener un resultado diferente.

Ejemplos:

- Aleatorio: Lanzar un dado y ver el resultado
- **Determinista**: Calcular el tiempo que tarda en caer un objeto al suelo desde una distancia determinada

Espacio muestral y sucesos

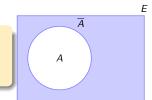
- **Espacio muestral**: Conjunto de los posibles resultados del experimento. Se denota: *E*
- Sucesos simples o elementales: Cualquiera de los elementos del espacio muestral
- Sucesos compuestos: Sucesos formados por varios simples.
- Suceso seguro: Suceso compuesto por los elementos del Espacio muestral. Se cumple siempre
- **Suceso imposible**: Cualquier suceso que no se cumpla nunca. Se denota con el símbolo: ∅
- Suceso contrario: Si A es un suceso, \overline{A} es el suceso contrario. Es aquel que se cumple cuando no se cumple A

Lanzamos **un dado** y comprobamos la cara que sale:

- Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Sucesos simples o elementales: 1, 2, 3, 4, 5 \(\delta \) 6
- Sucesos compuestos: $A = \{que \ salga \ par\} = \{2, 4, 6\}$
- Suceso seguro: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Suceso imposible: $\emptyset = \{ que \ salga \ mayor \ que \ 6 \}$
- Suceso contrario: Si $A = \{que \ salga \ par\} = \{2, 4, 6\}, \overline{A} = \{que \ salga \ impar\} = \{1, 3, 5\}$

Operaciones con sucesos y relaciones

Suceso **contrario o complementario** de A es otro suceso, \overline{A} que contiene todos los sucesos elementales que no están en A.



Se cumplen las siguientes propiedades:

•
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

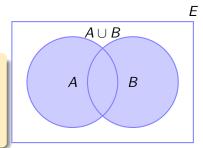
•
$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A}) \cup P(\overline{B})$$

•
$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) \cap P(\overline{B})$$

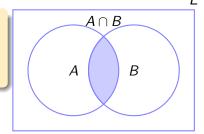
Dep. de Matemáticas Probabilidad 5 / 20

Operaciones con sucesos y relaciones

la **unión** de los sucesos A y B es aquel suceso que contiene a todos los elementos de A y a los de B. Por tanto los sucesos que están en A \mathbf{o} en B o en los dos a la vez. Se denota: $A \cup B$



la **intersección** de los sucesos A y B es aquel suceso que contiene a todos los elementos que están tanto en A como en B. Están en A y en B. Se denota: $A \cap B$



Dep. de Matemáticas Probabilidad 6/20

Ejemplo

Tomamos como experimento el resultado de **lanzar un dado**, y los sucesos:

$$A = \{que \ salga \ par\} = \{2, 4, 6\}$$

 $B = \{que \ sea \ mayor \ que \ 3\} = \{4, 5, 6\}$
 $C = \{que \ salga \ impar\} = \{1, 3, 5\}$

- $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$
- $A \cap B = \{4, 6\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$
- $A \cap C = \emptyset$

Compatibilidad de sucesos

Se dice que dos sucesos son **incompatibles** cuando su intersección es el conjunto vacío. En caso contrario se dice que son **compatibles**.

Ejemplo: Tomamos como experimento el resultado de **lanzar un dado**, y los sucesos:

 $A = \{ \text{que salga par} \} = \{2, 4, 6\}$

 $B = \{ \text{que sea mayor que 3} \} = \{4, 5, 6\}$

 $C = \{que \ salga \ impar\} = \{1, 3, 5\}$

A y B son **compatibles** y A y C **incompatibles**.

Regla de Laplace

La probabilidad de un suceso de un experimento regular viene determinada por la **Regla de Laplace**:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$$

Ejemplo: Al **lanzar un dado**, los casos posibles son 6 $(\{1,2,3,4,5,6\})$:

La probabilidad de sacar un 3: $\{3\} \rightarrow \frac{1}{6}$

La probabilidad de sacar par: $\{2,4,6\} \rightarrow \frac{3}{6}$

La probabilidad de sacar más de 4: $\{5,6\} \rightarrow \frac{2}{6}$

Dep. de Matemáticas Probabilidad 9 / 20

Propiedades de la probabilidad

La probabilidad de un experimento regular cumple las siguientes propiedades:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(E) = 1 \text{ y } P(\emptyset) = 0$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) P(A \cap B)$. Si A y B son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidad condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Despejando:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

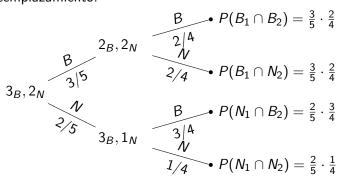
Se dice que dos sucesos son **independientes** cuando la probabilidad de cada uno no depende del resultado del otro.

- A y B son independientes \iff P(A|B) = P(A)
- A y B son independientes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Dep. de Matemáticas Probabilidad 11/20

Ejemplo sin remplazamiento

En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas **sin** reemplazamiento:



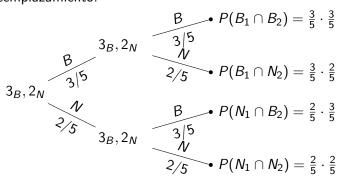
• Probabilidad de que sean del mismo color:

$$P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

Dep. de Matemáticas Probabilidad 12 / 20

Ejemplo con remplazamiento

En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas con reemplazamiento:



Probabilidad de que sean del mismo color:

$$P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$$

Dep. de Matemáticas Probabilidad 13 / 20

Tablas de Contingencia

Si tenemos dos particiones del espacio muestral, generalmente por dos características diferentes de la población, resulta útil el uso de tablas de contingencia para el cálculo de probabilidades.

Ejemplo de tabla de contingencia

En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2500 personas para saber la audiencia de un **debate** y de una **película** que se emitieron en horas distintas: 2100 vieron la película, 1500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas.

Si llamamos D al suceso 'haber visto el debate' y P a 'haber visto la película', podemos organizar la información en una tabla y completarla:

	D	\overline{D}	Total
Р			2100
\overline{P}		350	
Total	1500		2500



	D	\overline{D}	Total
Р	1450	650	2100
P	50	350	400
Total	1500	1000	2500

Ejemplo de tabla de contingencia

Ejemplos de cálculo de probabilidades a través de Laplace y condicionales:

	D	\overline{D}	Total
Р	1450	650	2100
\overline{P}	50	350	400
Total	1500	1000	2500

•
$$P(P \cap D) = \frac{1450}{2500} = \frac{29}{50}$$
, o bien $P(P \cap D) = P(P) \cdot P(D|P) = \frac{2100}{2500} \cdot \frac{1450}{2100} = \frac{29}{50}$

•
$$P(P|D) = \frac{1450}{1500} = \frac{29}{30}$$
, o bien $P(P|D) = \frac{P(P \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1450}{2500}}{\frac{1500}{2500}} = \frac{29}{30}$

•
$$P(D|P) = \frac{1450}{2100} = \frac{29}{42}$$
, o bien $P(D|P) = \frac{P(D\cap P)}{P(P)} \cdot P(D|P) = \frac{\frac{1450}{2500}}{\frac{2100}{2500}} = \frac{29}{42}$

Teorema de la probabilidad total

Si A_1 , A_2 , ..., A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral, entonces la probabilidad de cualquier otro suceso B es:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Dep. de Matemáticas Probabilidad 17 / 20

Ejemplo de probabilidad total

En una urna en la que hay tres bolas blancas y dos negras. Si se extraen dos bolas **sin** reemplazamiento:

$$P(B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

Dep. de Matemáticas Probabilidad 18 / 20

Teorema de Bayes

Si A_1 , A_2 , ..., A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral, y B otro suceso cualquiera:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Dep. de Matemáticas Probabilidad 19/20

Ejemplo de Bayes

En una urna en la que hay tres bolas blancas y dos negras. Si se extraen dos bolas **sin** reemplazamiento:

Dep. de Matemáticas Probabilidad 20 / 20