Probabilidad

Dep. de Matemáticas

Experimentos aleatorios

Un experimento es **aleatorio** cuando depende de muchos factores y cualquier pequeña modificación de alguno implica obtener un resultado diferente.

Ejemplos:

- **Aleatorio**: Lanzar un dado y ver el resultado
- **Determinista**: Calcular el tiempo que tarda en caer un objeto al suelo desde una distancia determinada

Espacio muestral y sucesos

- **Espacio muestral**: Conjunto de los posibles resultados del experimento. Se denota: E
- **Sucesos simples o elementales**: Cualquiera de los elementos del espacio muestral
- **Sucesos compuestos**: Sucesos formados por varios simples.
- **Suceso seguro**: Suceso compuesto por los elementos del Espacio muestral. Se cumple siempre
- **Suceso imposible**: Cualquier suceso que no se cumpla nunca. Se denota con el símbolo: $\varnothing$
- **Suceso contrario**: Si A es un suceso, $\overline{A}$ es el suceso contrario. Es aquel que se cumple cuando no se cumple A

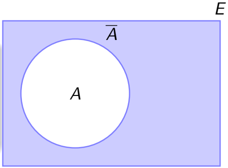
Ejemplo

Lanzamos **un dado** y comprobamos la cara que sale:

- **Espacio muestral**: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Sucesos simples o elementales**: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6
- **Sucesos compuestos**: $A = \{que\ salga\ par\} = \{2, 4, 6\}$
- **Suceso seguro**: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Suceso imposible**: $\varnothing = \{que\ salga\ mayor\ que\ 6\}$
- **Suceso contrario**: Si $A = \{que\ salga\ par\} = \{2, 4, 6\}$, $\overline{A} = \{que\ salga\ impar\} = \{1, 3, 5\}$

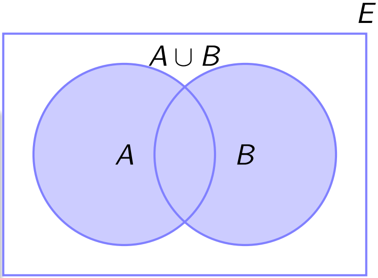
Operaciones con sucesos y relaciones

Suceso **contrario o complementario** de A es otro suceso, $\overline{A}$ que contiene todos los sucesos elementales que no están en A.

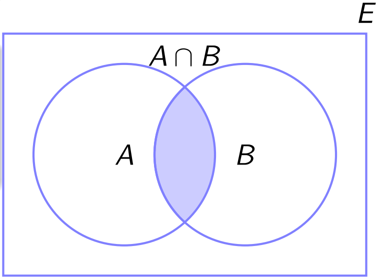


Operaciones con sucesos y relaciones

la **unión** de los sucesos A y B es aquel suceso que contiene a todos los elementos de A y a los de B. Por tanto los sucesos que están en A **o** en B o en los dos a la vez. Se denota: $A \cup B$



la **intersección** de los sucesos A y B es aquel suceso que contiene a todos los elementos que están tanto en A como en B. Están en A **y** en B. Se denota: $A \cap B$



Ejemplo

Tomamos como experimento el resultado de **lanzar un dado**, y los sucesos:

$A = \{que\ salga\ par\} = \{2, 4, 6\}$
$B = \{que\ sea\ mayor\ que\ 3\} = \{4, 5, 6\}$
$C = \{que\ salga\ impar\} = \{1, 3, 5\}$

- $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$
- $A \cap B = \{4, 6\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$
- $A \cap C = \varnothing$

Compatibilidad de sucesos

Se dice que dos sucesos son **incompatibles** cuando su intersección es el conjunto vacío. En caso contrario se dice que son **compatibles**.

Ejemplo: Tomamos como experimento el resultado de **lanzar un dado**, y los sucesos:

$A = \{que\ salga\ par\} = \{2, 4, 6\}$

$B = \{que\ sea\ mayor\ que\ 3\} = \{4, 5, 6\}$

$C = \{que\ salga\ impar\} = \{1, 3, 5\}$

A y B son **compatibles** y A y C **incompatibles**.

Regla de Laplace

La probabilidad de un suceso de un experimento regular viene determinada por la **Regla de Laplace**:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$$

Ejemplo: Al **lanzar un dado**, los casos posibles son 6 ($\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$):

La probabilidad de sacar un 3: $\{3\} \rightarrow \frac{1}{6}$

La probabilidad de sacar par: $\{2, 4, 6\} \rightarrow \frac{3}{6}$

La probabilidad de sacar más de 4: $\{5, 6\} \rightarrow \frac{2}{6}$

Propiedades de la probabilidad

La probabilidad de un experimento regular cumple las siguientes propiedades:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(E) = 1$ y $P(\varnothing) = 0$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si A y B son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidad condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Despejando:

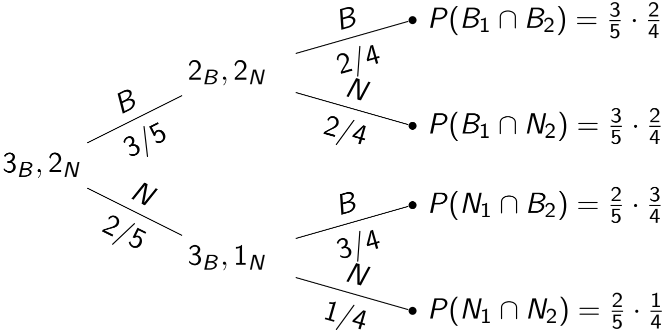
$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Se dice que dos sucesos son **independientes** cuando la probabilidad de cada uno no depende del resultado del otro.

- *A y B son independientes* $\Longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$
- *A y B son independientes* $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

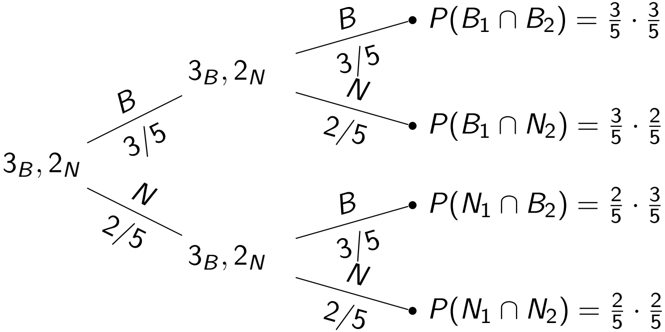
Ejemplo sin remplazamiento

En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas **sin** reemplazamiento:



- Probabilidad de que sean del mismo color:
  $P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$

En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas **con** reemplazamiento:



- Probabilidad de que sean del mismo color: $P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$

Tablas de Contingencia

Si tenemos **dos particiones del espacio muestral**, generalmente por dos características diferentes de la población, resulta útil el uso de **tablas de contingencia** para el cálculo de probabilidades.

Ejemplo de tabla de contingencia

En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2500 personas para saber la audiencia de un **debate** y de una **película** que se emitieron en horas distintas: 2100 vieron la película, 1500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas.

Si llamamos D al suceso 'haber visto el debate' y P a 'haber visto la película', podemos organizar la información en una tabla y completarla:

	D	$\overline{D}$	Total
P			2100
$\overline{P}$		350	
Total	1500		2500

$\rightarrow$

	D	$\overline{D}$	Total
P	1450	650	2100
$\overline{P}$	50	350	400
Total	1500	1000	2500

Ejemplo de tabla de contingencia

Ejemplos de cálculo de probabilidades a través de Laplace y condicionales:

	D	$\overline{D}$	Total
P	1450	650	2100
$\overline{P}$	50	350	400
Total	1500	1000	2500

- $P(P \cap D) = \frac{1450}{2500} = \frac{29}{50}$, o bien $P(P \cap D) = P(P) \cdot P(D|P) = \frac{2100}{2500} \cdot \frac{1450}{2100} = \frac{29}{50}$
- $P(P|D) = \frac{1450}{1500} = \frac{29}{30}$, o bien $$P(P|D) = \frac{P(P \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1450}{2500}}{\frac{1500}{2500}} = \frac{29}{30}$$
- $P(D|P) = \frac{1450}{2100} = \frac{29}{42}$, o bien $$P(D|P) = \frac{P(D \cap P)}{P(P)} \cdot P(D|P) = \frac{\frac{1450}{2500}}{\frac{2100}{2500}} = \frac{29}{42}$$

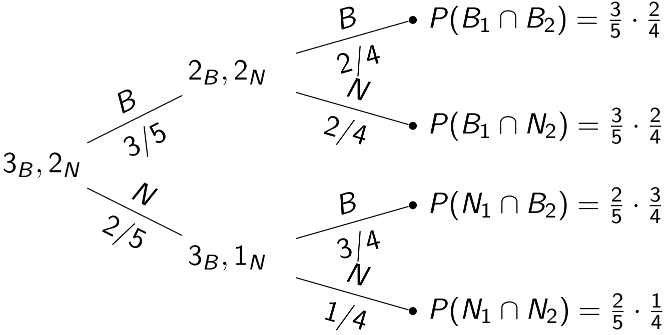
Teorema de la probabilidad total

Si A_1, A_2, ..., A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral, entonces la probabilidad de cualquier otro suceso B es:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Ejemplo de probabilidad total

En una urna en la que hay tres bolas blancas y dos negras. Si se extraen dos bolas **sin** reemplazamiento:



$$P(B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

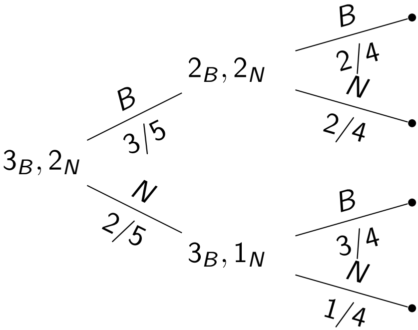
Teorema de Bayes

Si A_1, A_2, ..., A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral, y B otro suceso cualquiera:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Ejemplo de Bayes

En una urna en la que hay tres bolas blancas y dos negras. Si se extraen dos bolas **sin** reemplazamiento:



$P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

$P(B_1 \cap N_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

$P(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

$P(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}$$