

Mis apuntes

Compilación de apuntes de matemáticas ¹

CARLOS RODRÍGUEZ JASO²

¹https://github.com/crdguez/mis_mat_notas

²<https://crdguez.github.io/about/>

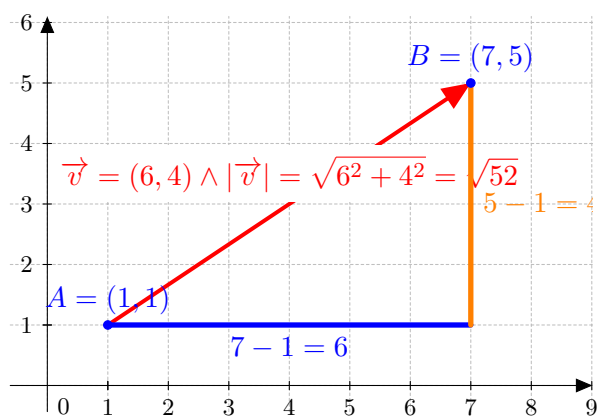
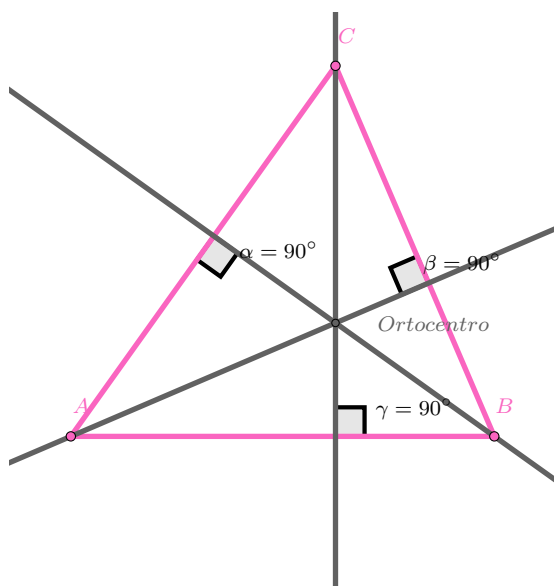
Índice general

Parte I

Matemáticas de 4ºESO

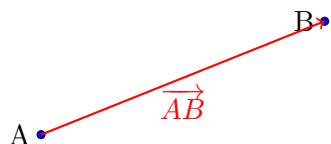
1

Geometría



1.1. Vectores Libres

Dados dos puntos en el plano (A y B), podemos trazar una flecha que vaya del primero al segundo. A esta flecha la llamaremos vector (fijo) y se denota \overrightarrow{AB} .



- **Módulo:** La longitud del vector
- **Dirección:** La recta que contiene al vector y cualquiera de sus paralelas
- **Sentido:** El que va del origen al final o su contrario. Viene representado por punta "la cabeza de la flecha"

Dos vectores (fijos) son **equipolentes** cuando tienen el mismo módulo, misma dirección y mismo sentido. Un vector fijo y todos sus equipolentes forman lo que se denomina un **vector libre**. Se denota \vec{v} o $[\overrightarrow{AB}]$ siendo \overrightarrow{AB} un vector fijo representante de \vec{v} . Un vector libre viene determinado por sus coordenadas:

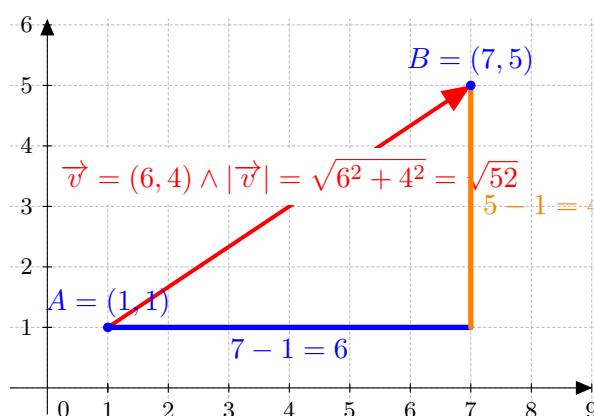
1.2. Coordenadas y módulo de un vector

Un vector se puede ver como el desplazamiento que tenemos que hacer horizontalmente y verticalmente para ir del origen al extremo del mismo. Al desplazamiento horizontal le llamaremos primera coordenada y al vertical, segunda.

- Dados $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$
- A partir de las coordenadas del punto podremos calcular su módulo.
Dados $\vec{u}(x, y), \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

1.2.1. Ejemplo

Determina las coordenadas y el módulo del vector libre cuyo representante es el vector que va de $A(1, 1)$ a $B(7, 5)$



1.3. Operaciones con vectores

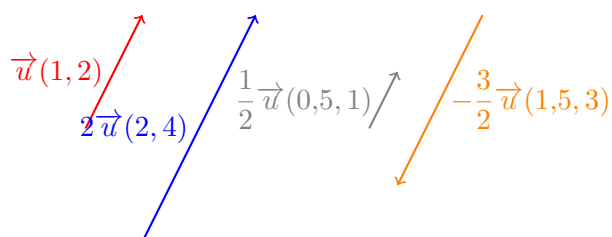
1.3.1. Producto de un número por un vector

Definición Dado $k \in \mathbb{R}$ y \vec{u} se define $k \cdot \vec{u}$ como un \vec{v} que:

- $|\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{u}|$
- $\vec{v} \parallel \vec{u}$
- Mismo sentido que \vec{u} si $k > 0$ o sentido contrario si $k < 0$

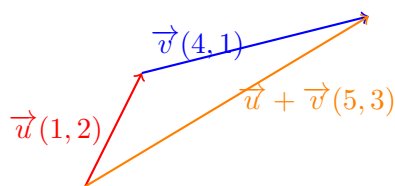
Además se cumple que si $\vec{u}(x_1, y_1) \rightarrow k \cdot \vec{u}(k \cdot x_1, k \cdot y_1)$

Ejemplos



1.3.2. Suma y resta de vectores

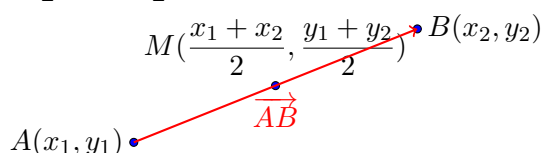
Definición de suma Dados \vec{u} y \vec{v} se define la suma como el vector que si los ponemos seguidos va del origen del primer vector al extremo del segundo vector. Además se cumple que si $\vec{u}(x_1, y_1)$ y $\vec{v}(x_2, y_2) \rightarrow \vec{u} + \vec{v}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$



Definición de resta Dados \vec{u} y \vec{v} se define la resta como la suma del primero con el opuesto del segundo. Además se cumple que si $\vec{u}(x_1, y_1)$ y $\vec{v}(x_2, y_2) \rightarrow \vec{u} - \vec{v}(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

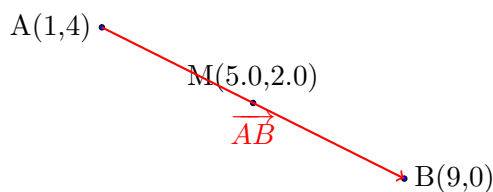
1.4. Punto medio de un segmento

Dados dos puntos del plano, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el punto medio es $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$.



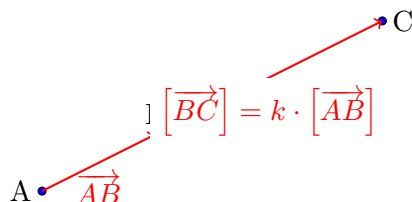
La demostración es sencilla aplicando la propiedad geométrica que cumple el punto medio: $\vec{AM} = \vec{MB}$

1.4.1. Ejemplo



1.5. Puntos alineados

Dados los puntos A , B y C estarán alineados si los vectores \vec{AB} y \vec{BC} son colineales, o tienen la misma dirección, y por tanto: $\exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{BC} = k \cdot \vec{AB}$

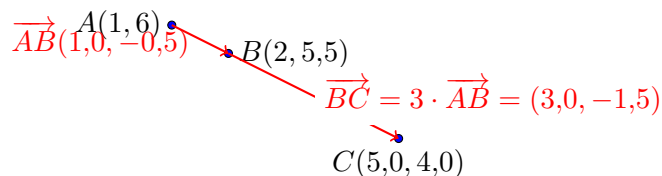


o bien:

Si $[\overrightarrow{AB}] = \vec{u}(u_1, u_2)$ y $[\overrightarrow{BC}] = \vec{v}(v_1, v_2)$, se cumple:

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$$

1.5.1. Ejemplo

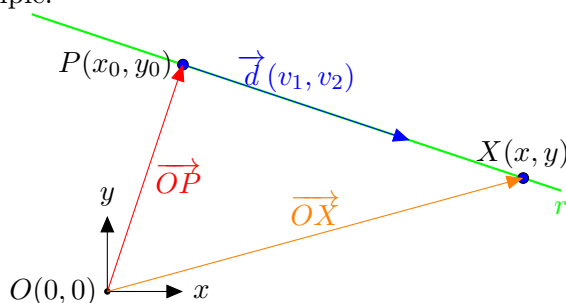


Están alineados porque $[\overrightarrow{BC}] = 3 \cdot [\overrightarrow{AB}]$, o bien porque:

$$\frac{3}{1} = \frac{-1,5}{-0,5}$$

1.6. Ecuaciones de la recta

Podemos definir la recta como el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos del plano que a partir de un punto fijo siguen una misma dirección. Dado un punto $P(x_0, y_0)$ y un vector $\vec{d}(v_1, v_2)$, en la recta r se cumple:



$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$$

Como \overrightarrow{PX} y \vec{d} son colineales:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{d}$$

1.6.1. Ecuación vectorial

Se obtiene a partir de las coordenadas de la expresión anterior :

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \cdot (v_1, v_2)$$

1.6.2. Ecuaciones paramétricas

Se obtienen separando cada coordenada del expresión anterior:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \end{cases}$$

1.6.3. Ecuación continua

Se obtienen de la anterior despejando λ en cada ecuación e igualando la expresiones:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

1.6.4. Ecuación implícita o general

Operando y reduciendo la expresión anterior llegaremos a una de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

1.6.5. Ecuación explícita

Despejando la y en la ecuación anterior obtendremos

$$y = mx + n$$

donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen

Vector director y pendiente de una recta: Dada una recta r de pendiente m entonces el vector $\vec{v}(1, m)$ es un vector director de la recta. Y al revés, si $\vec{d}(v_1, v_2)$ es un vector director de la recta, entonces $m = \frac{v_2}{v_1}$ es la pendiente de la recta

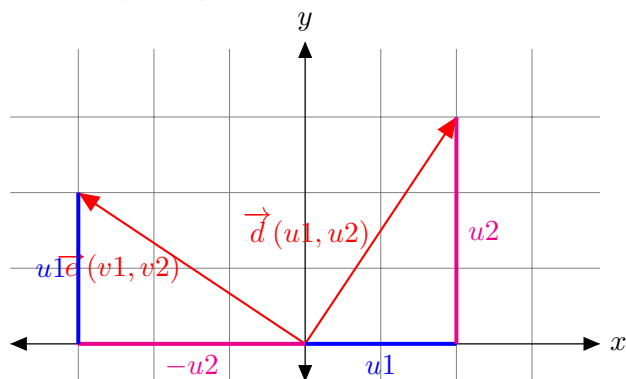
1.6.6. Ejemplo

Dada la recta que pasa por $P(1, 3)$ y de dirección la marcada por el vector $\vec{d}(3, -1)$ determina la ecuación de la misma en sus diferentes variantes:

- Ecuación vectorial: $(x, y) = (1, 3) + \lambda \cdot (3, -1)$
- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$
- Ecuación continua: $\frac{x - 1}{3} = 3 - y$
- Ecuación general: $3y + x - 10 = 0$
- Ecuación explícita: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

1.7. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Dado $\vec{d}(u_1, u_2)$ y un vector perpendicular del mismo módulo $\vec{e}(v_1, v_2)$:

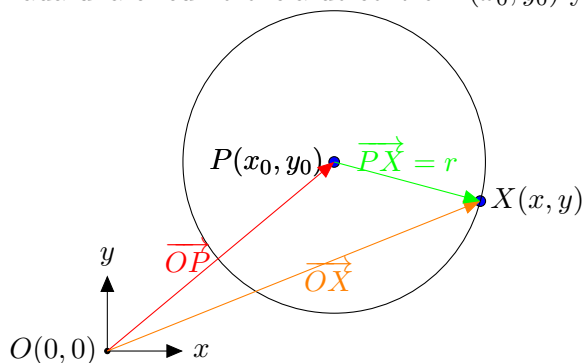


Se cumple que $\vec{e}(v_1, v_2) = (-u_2, u_1)$ y por tanto:

- Para que dos rectas sean paralelas basta con que tengan la misma dirección
- Dada una recta con vector director $\vec{d}(v_1, v_2)$, un vector director de las rectas perpendiculares será $\vec{e}(-v_2, v_1)$. Además si m y m' son las pendientes de las rectas perpendiculares, se cumple: $m \cdot m' = -1$

1.8. Ecuación de la circunferencia

Dada una circunferencia de centro $P(x_0, y_0)$ y de radio r :



Los puntos $X(x, y)$ de la misma cumplen:

$$|\vec{PX}| = r$$

Como $\vec{OP} + \vec{PX} = \vec{OX}$, luego $\vec{PX} = \vec{OX} - \vec{OP}$. Por tanto:

$$|\vec{OX} - \vec{OP}| = r$$

Pasando a coordenadas:

$$|(x - x_0, y - y_0)| = r$$

Y por el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación de la circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

1.8.1. Ejemplo

Determina la ecuación de la circunferencia con centro $P(3, 1)$ y radio 3:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$$

2

Funciones

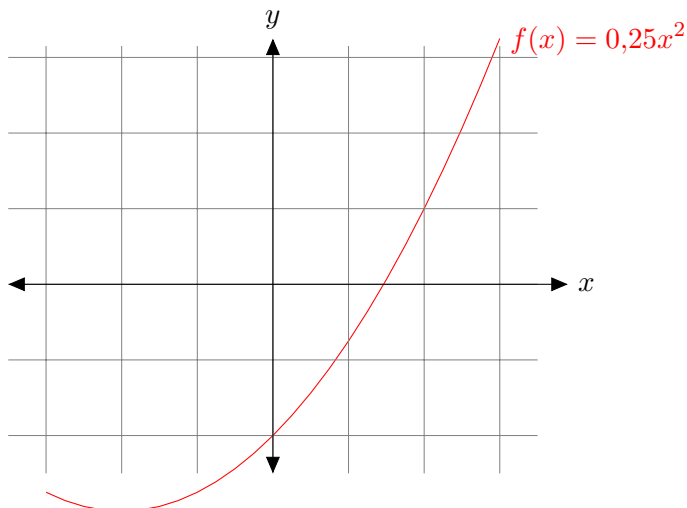
2.1. Función, dominio y recorrido

En el lenguaje matemático se dice que y es **función** de x cuando y depende de x .

El conjunto de los posibles valores de la variable independiente se llama **dominio de la función** ($Dom(f)$); y el conjunto de valores que toma la variable dependiente, **imagen o recorrido de la función** ($Im(f)$).

2.1.1. Ejemplo

$y = x^2$ o $f(x) = x^2$, x es la variable independiente e y es la variable dependiente. El $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} | \exists y = f(x)\}$



3

Probabilidad

3.1. Experimento aleatorio

Un **experimento aleatorio** o no determinista es aquél que si se repite varias veces no está garantizado obtener siempre el mismo resultado. Es decir, no se puede determinar cuál va a ser el resultado del experimento hasta que no se realiza. En caso contrario, decimos que el experimento es **determinista**

Un experimento es aleatorio cuando depende de muchos factores y cualquier pequeña modificación de alguno implica obtener un resultado diferente.

3.1.1. Ejemplos

- **Aleatorio:** Lanzar un dado y ver el resultado
- **Determinista:** Calcular el tiempo que tarda en caer un objeto al suelo desde una distancia determinada

3.2. Espacio muestral y sucesos

- **Espacio muestral:** Conjunto de los posibles resultados del experimento. Se denota: E
- **Sucesos simples o elementales:** Cualquiera de los elementos del espacio muestral
- **Sucesos compuestos:** Sucesos formados por varios simples.
- **Suceso seguro:** Suceso compuesto por los elementos del Espacio muestral. Se cumple siempre
- **Suceso imposible:** Cualquier suceso que no se cumpla nunca. Se denota con el símbolo: \emptyset

- **Suceso contrario:** Si A es un suceso, \bar{A} es el suceso contrario. Es aquel que se cumple cuando no se cumple A

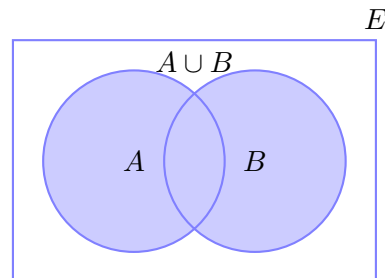
3.2.1. Ejemplo:

Lanzamos un dado y comprobamos la cara que sale.

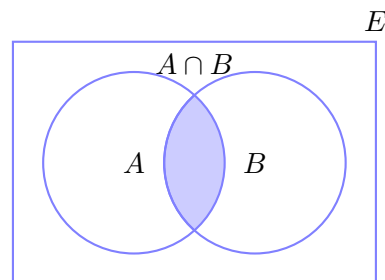
- **Espacio muestral:** $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Sucesos simples o elementales:** 1, 2, 3, 4, 5 ó 6
- **Sucesos compuestos:** $A = \{\text{que salga par}\} = \{2, 4, 6\}$
- **Suceso seguro:** $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Suceso imposible:** $\emptyset = \{\text{que salga mayor que 6}\}$
- **Suceso contrario:** Si $A = \{\text{que salga par}\} = \{2, 4, 6\}$, $\bar{A} = \{\text{que salga impar}\} = \{1, 3, 5\}$

3.3. Operaciones con sucesos y relaciones

- **Unión:** la unión de los sucesos A y B es aquel suceso que contiene a todos los elementos de A y a los de B . Se denota: $A \cup B$



- **Intersección:** la intersección de los sucesos A y B es aquel suceso que contiene a todos los elementos que están tanto en A como en B . Se denota: $A \cap B$



3.3.1. Ejemplo

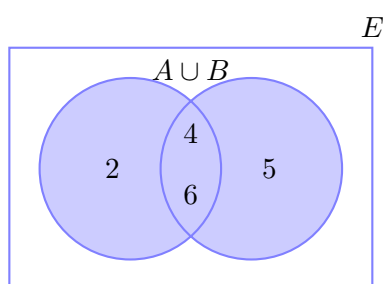
Tomamos como experimento el resultado de lanzar un dado, y los sucesos:

$$A = \{\text{que salga par}\} = \{2, 4, 6\}$$

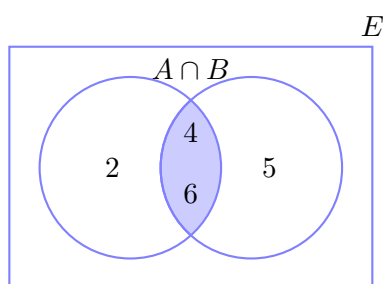
$$B = \{\text{que sea mayor que 3}\} = \{4, 5, 6\}$$

$$C = \{\text{que salga impar}\} = \{1, 3, 5\}$$

- $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$



- $A \cap B = \{4, 6\}$



- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$

- $A \cap C = \emptyset$

3.3.2. Compatibilidad de sucesos

Se dice que dos sucesos son incompatibles cuando su intersección es el conjunto vacío. En caso contrario se dice que son compatibles.

Ejemplo

En el ejemplo anterior, A y B son compatibles y A y C incompatibles.

3.4. Probabilidad en experimentos regulares y Regla de Laplace

Cuando todos los sucesos elementales de un **espacio muestral finito** están en las mismas condiciones de suceder se dice que son **equiprobables**, y al experimento se le llama **regular**.

3.4.1. Ejemplos de experimentos regulares

Lanzamiento de dados, monedas, extracción de cartas, ...

3.4.2. Regla de Laplace

La probabilidad de un suceso de un experimento regular viene determinada por la Regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Ejemplo

Al lanzar un dado, los casos posibles son 6 ($\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$):

La probabilidad de sacar un 3: $\{3\} \rightarrow \frac{1}{6}$

La probabilidad de sacar par: $\{2, 4, 6\} \rightarrow \frac{3}{6}$

La probabilidad de sacar más de 4: $\{5, 6\} \rightarrow \frac{2}{6}$

3.5. Propiedades de la probabilidad

La probabilidad de un experimento regular cumple las siguientes propiedades:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(E) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si A y B son incompatibles:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Podemos extender el concepto de probabilidad a cualquier función que cumpla las propiedades anteriores.

3.6. Probabilidad condicionada

Puesto que la probabilidad está ligada al nivel de confianza sobre los resultados de un experimento, el hecho de que ocurra un suceso, puede cambiar la probabilidad de los demás. A esta nueva probabilidad se le llama **condicionada**

3.6.1. Ejemplo

Supongamos que tenemos una urna con 8 bolas numeradas pero de colores blancos y negros de la cual se extrae una. Supongamos, también, que las tres primeras son blancas y el resto negras, luego $E = \{B_1, B_2, B_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8\}$. A priori, la $P(\{\text{Sea impar}\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ por la regla de Laplace. Tiene la misma probabilidad salir par que impar.

Vamos a suponer ahora que durante la extracción se percibe que la bola es blanca. La situación cambia, porque que sea blanca implica que hay 3 casos posibles y dos de las tres son impares. A esta nueva probabilidad se le llama condicionada y se denota así:

$$P(I|B) = \frac{2}{3}$$

La probabilidad de que sea impar ha aumentado por el hecho de haber añadido la condición (o información) que es blanca.

Esta probabilidad la podemos transformar:

$$P(I|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{8}{8}} = \frac{P(I \cap B)}{P(B)}$$

3.6.2. Generalización del fórmula de la probabilidad condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

y despejando:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

3.7. Experimentos compuestos

Un **experimento aleatorio compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva.

Ejemplo: Lanzar tres monedas, extraer cuatro cartas de una baraja, ...

La probabilidad de un suceso compuesto se podrá calcular a partir de las probabilidades obtenidas de los experimentos simples usando la probabilidad condicional:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

3.7.1. Independencia y dependencia de sucesos

Se dice que dos sucesos son independientes cuando la probabilidad de cada uno no depende del resultado del otro.

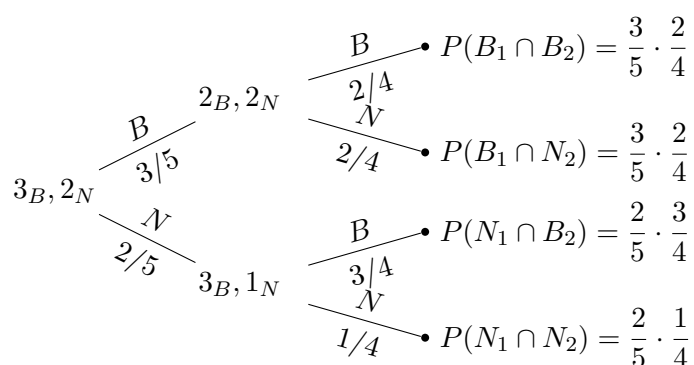
$$A \text{ y } B \text{ son independientes} \iff P(B|A) = P(B)$$

Ejemplos de sucesos independientes: Lanzar varias monedas, extracción de varias cartas con reemplazamiento, sacar bolas de una urna con reemplazamiento, lanzar varios dados, ...

Ejemplos de sucesos dependientes: Extracción de varias cartas sin reemplazamiento, sacar bolas de una urna sin reemplazamiento, ...

3.7.2. Cálculo de probabilidad compuesta para sucesos dependientes

Ejemplo: En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas **sin** reemplazamiento. Podemos construir el siguiente árbol con las probabilidades de los diferentes resultados:



Ejemplos:

- Probabilidad de que las dos sean blancas:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

- Probabilidad de que las dos sean negras:

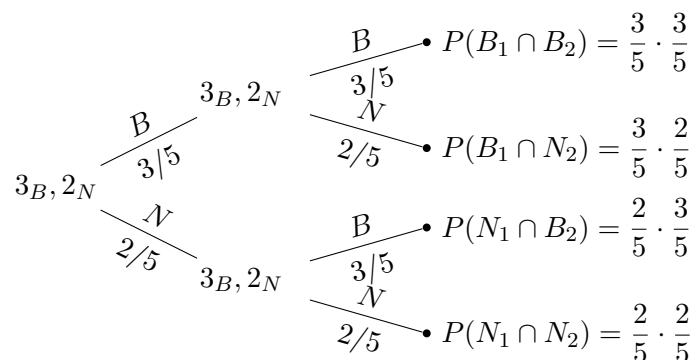
$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

- Probabilidad de que sean del mismo color:

$$P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

3.7.3. Cálculo de probabilidad compuesta para sucesos independientes

Ejemplo: En una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas **con** reemplazamiento. Ahora el árbol quedará:



Ejemplos:

- Probabilidad de que las dos sean blancas:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

- Probabilidad de que las dos sean negras:

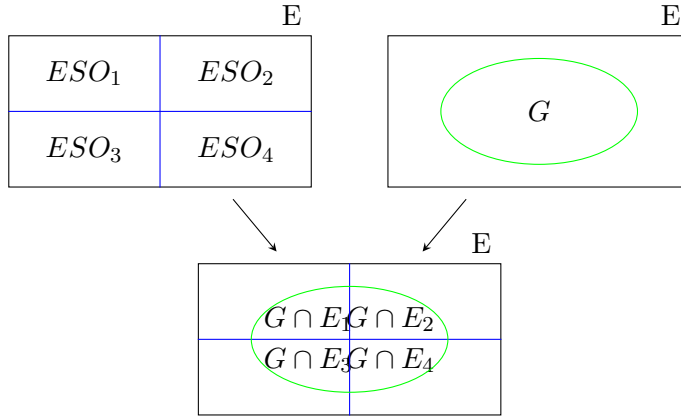
$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

- Probabilidad de que sean del mismo color:

$$P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$$

3.8. Teorema de la probabilidad total

Ejemplo: En un instituto de ESO hay 4 cursos: 1º, 2º, 3º y 4º. Se quiere estudiar la probabilidad de que un alumno del instituto esté con la gripe (Llamamos G al suceso tener gripe).



Como un alumno pertenece a un solo curso los sucesos ESO_1 , ESO_2 , ESO_3 , y ESO_4 (abreviados E_1 , etc.) son incompatibles. Además:

$$G = (G \cap E_1) \cup (G \cap E_2) \cup (G \cap E_3) \cup (G \cap E_4) = \bigcup_{i=1}^4 (G \cap E_i)$$

Por tanto,

$$P(G) = P(G \cap E_1) + P(G \cap E_2) + P(G \cap E_3) + P(G \cap E_4) = \sum_{i=1}^4 P(G \cap E_i)$$

Aplicando la probabilidad condicionada:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(E_1) \cdot P(G|E_1) + P(E_2) \cdot P(G|E_2) + \\ &\quad + P(E_3) \cdot P(G|E_3) + P(E_4) \cdot P(G|E_4) = \\ &= \sum_{i=1}^4 P(E_i) \cdot P(G|E_i) \end{aligned}$$

3.8.1. Probabilidad total

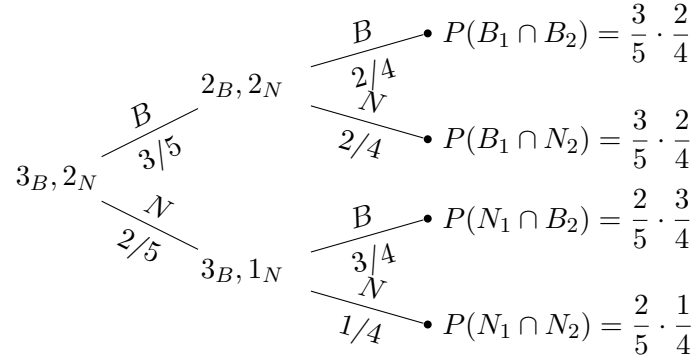
Generalizando el resultado anterior:

Teorema de la probabilidad total: Si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral, entonces la probabilidad de cualquier otro suceso B es:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Ejemplo:

Tomando de nuevo el ejemplo de la urna en la que hay tres bolas blancas y dos negras. Si se extraen dos bolas, por ejemplo **sin** reemplazamiento, podemos calcular la probabilidad de que la segunda bola haya sido blanca:



$$P(B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

3.9. Teorema de Bayes

Si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral, y B otro suceso cualquiera:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Demostración: Por la probabilidad condicionada:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Pero por la probabilidad total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Sustituyendo esta en la primera obtenemos el resultado

3.9.1. Ejemplo:

En el ejemplo del apartado anterior calcular la probabilidad de que la primera bola haya sido blanca si se sabe que la segunda ha sido blanca:

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}$$

4

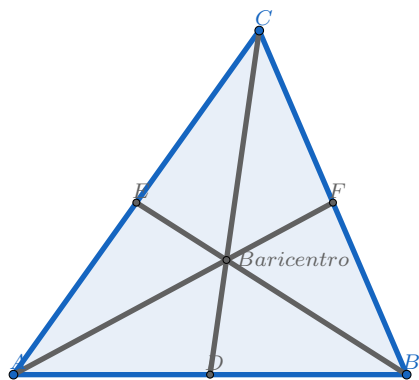
Miscelánea

4.1. Rectas y puntos notables de un triángulo

4.1.1. Mediana

La **mediana** es el segmento que va del punto medio de un lado al vértice opuesto.

Al punto dónde se cortan las medianas de un triángulo se le llama **baricentro** y constituye el centro de gravedad del polígono.

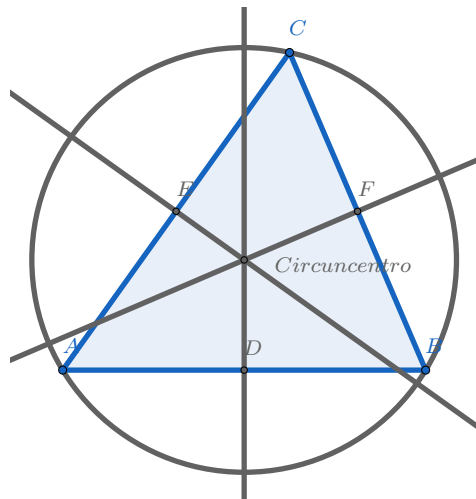


4.1.2. Mediatriz

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al punto medio. Geométricamente son los puntos del plano que equidistan a ambos extremos del segmento.

En un triángulo llamaremos mediatriz a la mediatriz de cada uno de los lados.

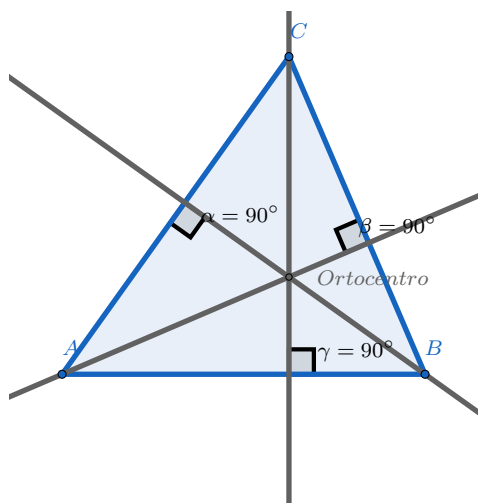
El punto de corte de las tres mediatrices equidista a los tres vértices del triángulo. Ha dicho punto se le llama **circuncentro** porque permite circunscribir el triángulo en una circunferencia de centro dicho punto.



4.1.3. Altura

Llamaremos **altura** de un triángulo al segmento perpendicular a un lado y pasa por el vértice opuesto.

Al punto de corte de las alturas se le llama **ortocentro**.



4.1.4. Bisectriz

Llamamos **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos iguales. En un triángulo tendremos las tres bisectrices correspondientes a cada uno de los tres ángulos.

Llamaremos **incentro** al punto de corte de las bisectrices de un triángulo.

