Análisis

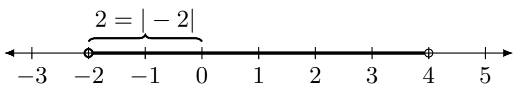
Departamento de Matemáticas
IES Pedro Cerrada

1 Conjuntos de números reales

1.1. Repaso de Intervalos, Entornos y Valor Absoluto

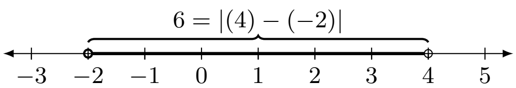
- Se define el **valor absoluto** de un número como la distancia al cero. Se calcula tomando el número con signo positivo.

Ejemplos:



Distancia entre dos números: Entre a y b hay una distancia de $|a-b|$

Ejemplo: Determina la distancia entre los números -2 y 4:



2 Funciones

2.1. Definición

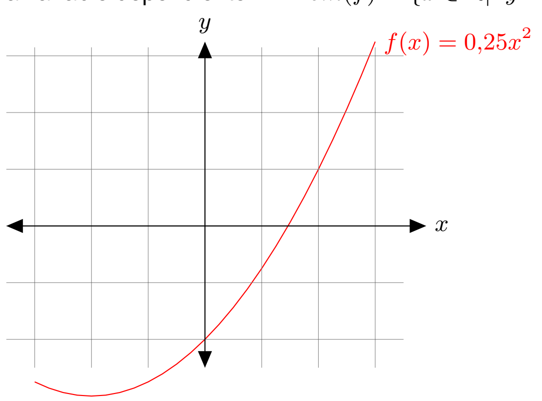
En el lenguaje matemático se dice que y es **función** de x cuando y depende de x.

3 Características de una función

3.1. Dominio y recorrido

El conjunto de los posibles valores de la variable independiente se llama **dominio de la función** $(Dom(f))$; y el conjunto de valores que toma la variable dependiente, **imagen o recorrido de la función** $(Im(f))$.

Ejemplo $y = x^2$ o $f(x) = x^2$, x es la variable independiente e y es la variable dependiente. El $Dom(f) = \{x \in \mathrm{R} | \exists y = f(x)\}$



3.2. Crecimiento y decrecimiento

3.3. Cortes con ejes

3.4. Funciones acotadas

3.5. Funciones periódicas

3.6. Funciones inyectivas y biyectivas

3.7. Continuidad

De manera informal, una función es continua si se puede dibujar con un solo trazo, o lo que es lo mismo, sin levantar "del papel.[el] "bolígrafo". Para dar una definición

4 Continuidad y límites

4.1. Límites en un punto

Dado $x_0 \neq \pm\infty$, decimos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ cuando ocurre que si x toma valores próximos al número x_0 (tanto menores como mayores), los correspondientes valores de $f(x)$ se aproximan al número l

4.2. Límites laterales

4.2.1. Límites por la derecha

Dado $x_0 \neq \pm\infty$, decimos que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ cuando ocurre que si x toma valores próximos al número x_0 pero mayores que él, los correspondientes valores de $f(x)$ se aproximan al número l

4.2.2. Límites por la izquierda

Dado $x_0 \neq \pm\infty$, decimos que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ cuando ocurre que si x toma valores próximos al número x_0 pero menores que él, los correspondientes valores de $f(x)$ se aproximan al número l

Teorema de unicidad del límite: Dado $x_0 \neq \pm\infty$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Por lo tanto si los límites laterales no coinciden, el límite no existe.

Ejemplo: Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

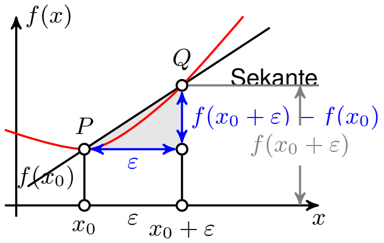
Derivatives and Integrals

Basic Differentiation Rules

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}[\frac{u}{v}] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1} \quad u'$
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$
8. $\frac{d}{dx}[| u |] = \frac{u}{| u |}(u'), \quad u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}[ln \quad u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \quad u'$
11. $\frac{d}{dx}[sin \quad u] = (cos \quad u)u'$
12. $\frac{d}{dx}[cos \quad u] = -(sin \quad u)u'$
13. $\frac{d}{dx}[tan \quad u] = (sec^2 \quad u)u'$
14. $\frac{d}{dx}[cot \quad u] = -(csc^2 \quad u)u'$
15. $\frac{d}{dx}[sec \quad u] = (sec \quad u \quad tan \quad u)u'$
16. $\frac{d}{dx}[csc \quad u] = -(csc \quad u \quad cot \quad u)u'$
17. $\frac{d}{dx}[arcsin \quad u] = \frac{u'}{\sqrt{-1 - u^2}}$
18. $\frac{d}{dx}[arccos \quad u] = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
19. $\frac{d}{dx}[arctan \quad u] = \frac{u'}{1 + u^2}$
20. $\frac{d}{dx}[arccot \quad u] = \frac{-u'}{1 + u^2}$
21. $\frac{d}{dx}[arcsec \quad u] = \frac{u'}{| u | \sqrt{u^2 - 1}}$
22. $\frac{d}{dx}[arcsec \quad u] = \frac{-u'}{| u | \sqrt{u^2 - 1}}$

Basic Integration Formulas

1. $\int k \quad f(u) \quad du = k \int f(u) \quad du$
2. $\int \quad [f(u) \pm g(u)] \quad du = \int f(u) \quad du \pm \int g(u) \quad du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
5. $\int \frac{d}{u} = ln \mid u \mid +C$
6. $\int e^u du = e^u + C$
7. $\int sin \quad u \quad du = -cos u + C$
8. $\int cos \quad u \quad du = sin \quad u + C$
9. $\int tan \quad u \quad du = -ln \mid cos \quad u \mid +C$
10. $\int cot \quad u \quad du = ln \mid sin \quad u \mid +C$
11. $\int sec \quad u \quad du = ln \mid sec \quad u + tan \quad du \mid +C$
12. $\int csc \quad u \quad du = -ln \mid csc \quad u + cot \quad u \mid +C$
13. $\int sec^2 u \quad du = tan \quad u + C$
14. $\int csc^2 \quad u \quad du = -cot \quad u + C$
15. $\int sec \quad u \quad tan \quad u \quad du = sec \quad u + C$
16. $\int csc \quad u \quad cot \quad du = -csc \quad u + C$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctan \frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arcsec \frac{| u |}{a} + C$



Función	Derivada
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x)= \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x)= \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x)= \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Operaciones con derivadas
$y = u + v \to y' = u' + v'$
$y = u - v \to y' = u' - v'$
$y = K \cdot u \to y' = K \cdot u'$
$y = u \cdot v \to y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \dfrac{u}{v} \to y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Regla de la cadena Dada una función compuesta:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ejemplo Dado la función $f(x)$