Variables aleatorias

Dep. de Matemáticas

Finalidad:

Abstraer matemáticamente un tipo de **experimento aleatorio**. Y, con ello, poder estimar de manera teórica lo que sucedería de manera experimental mediante una estadística.

¿Cómo?:

Mediante **variables aleatorias** y **distribuciones de probabilidad** asociadas a esas variables

Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad

Finalidad:

Abstraer matemáticamente un tipo de **experimento aleatorio**. Y, con ello, poder estimar de manera teórica lo que sucedería de manera experimental mediante una estadística.

¿Cómo?:

Mediante **variables aleatorias** y **distribuciones de probabilidad** asociadas a esas variables

Variables aleatorias

Una **variable aleatoria** es una función que a cada suceso elemental de un espacio muestral le asigna un número.
Para hacer referencia a las variables se usan las letras: X, Y, ...

Ejemplo

Sea el **experimento aleatorio "lanzar un dado"** El espacio muestral lo componen las 6 caras del dado

El espacio muestral lo componen las 6 caras del dado.
Podemos asignar la variable X que a cada cara le asocia el número que represente su cara.

Suceso	X	x_i
Cara 1	$\rightarrow$	1
Cara 2	$\rightarrow$	2
Cara 3	$\rightarrow$	3
Cara 4	$\rightarrow$	4
Cara 5	$\rightarrow$	5
Cara 6	$\rightarrow$	6

Ejemplo

Sea el **experimento aleatorio "lanzar un dado"** El espacio muestral lo componen las 6 caras del dado

El espacio muestral lo componen las 6 caras del dado.
Podemos asignar la variable X que a cada cara le asocia el número que represente su cara.

$$
\begin{array}{lcc}
 & X & \\
\text{Suceso} & & x_i \\
\hline
\text{Cara } 1 & \rightarrow & 1 \\
\text{Cara } 2 & \rightarrow & 2 \\
\text{Cara } 3 & \rightarrow & 3 \\
\text{Cara } 4 & \rightarrow & 4 \\
\text{Cara } 5 & \rightarrow & 5 \\
\text{Cara } 6 & \rightarrow & 6
\end{array}
$$

Ejemplo

Sea el **experimento compuesto "lanzar dos monedas"**

Podemos asignar la variable aleatoria:

$$Y = \{\textit{Número de caras}\}$$

$$Y$$

Suceso		y_i
C,C	$\rightarrow$	2
C,X	$\rightarrow$	1
X,C	$\rightarrow$	1
X,X	$\rightarrow$	0

Ejemplo

Sea el **experimento compuesto "lanzar dos monedas"**

Podemos asignar la variable aleatoria:

$$Y = \{\textit{Número de caras}\}$$

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \text{Suceso} & & y_i \\ \hline \text{C,C} & \rightarrow & 2 \\ \text{C,X} & \rightarrow & 1 \\ \text{X,C} & \rightarrow & 1 \\ \text{X,X} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Tipos de variables aleatorias

- Discretas: Toman un **número finito o numerable** de valores.
  Ejemplo: Sea la $X =$ *"El número de caras al lanzar dos dados"*. Los valores posibles son 0, 1 o 2 (que es un conjunto finito de datos, en concreto 3 datos)
- Continuas: Toman valores en un **rango continuo**. **Ejemplo:** $X =$ *"Distancia al centro de la diana medida desde la posición en que cae un dardo lanzado por un tirador experto"* . En este caso la variable puede tomar cualquier valor en el rango entre 0 y el radio de la diana

Tipos de variables aleatorias

- Discretas: Toman un **número finito o numerable** de valores. **Ejemplo:** Sea la $X =$ *"El número de caras al lanzar dos dados"*. Los valores posibles son 0, 1 o 2 (que es un conjunto finito de datos, en concreto 3 datos)
- Continuas: Toman valores en un **rango continuo**. **Ejemplo:** $X =$ *"Distancia al centro de la diana medida desde la posición en que cae un dardo lanzado por un tirador experto"* . En este caso la variable puede tomar cualquier valor en el rango entre 0 y el radio de la diana

Distribuciones de probabilidad

Llamaremos **distribución de probabilidad** a la relación entre los valores de la variable y sus probabilidades.

- Estas relaciones se pueden indicar mediante el uso de funciones
- El tipo de función y su tratamiento es diferente según las variables sean discretas o continuas

Veamos algunas distribuciones ...

Distribuciones de probabilidad

Llamaremos **distribución de probabilidad** a la relación entre los valores de la variable y sus probabilidades.

- Estas relaciones se pueden indicar mediante el uso de funciones
- El tipo de función y su tratamiento es diferente según las variables sean discretas o continuas

Veamos algunas distribuciones ...

Distribución uniforme discreta

Ejemplo

Sea la variable $X =$ *"Número obtenido al lanzar una dado"*

A cada valor de la variable podemos asignarle su probabilidad:

$P(X)$

x_i		$P(x_i)$
1	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
2	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
3	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
4	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
5	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
6	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$

Podemos representar la relación anterior mediante una función:

$$P: \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x_i \mapsto P(X = x_i) = \frac{1}{n} \end{array}$$

A este tipo de distribución se le llama **uniforme discreta**.

Distribución uniforme discreta

Ejemplo

Sea la variable $X =$ *"Número obtenido al lanzar una dado"*

A cada valor de la variable podemos asignarle su probabilidad:

$$P(X)$$

x_i		$P(x_i)$
1	$\to$	$\frac{1}{6}$
2	$\to$	$\frac{1}{6}$
3	$\to$	$\frac{1}{6}$
4	$\to$	$\frac{1}{6}$
5	$\to$	$\frac{1}{6}$
6	$\to$	$\frac{1}{6}$

Podemos representar la relación anterior mediante una función:

$$P: \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ x_i \mapsto P(X = x_i) = \frac{1}{n} \end{array}$$

A este tipo de distribución se le llama **uniforme discreta**.

Distribución uniforme discreta

Ejemplo

Sea la variable $X =$ *"Número obtenido al lanzar una dado"*

A cada valor de la variable podemos asignarle su probabilidad:

$P(X)$

x_i		$P(x_i)$
1	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
2	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
3	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
4	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
5	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
6	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$

Podemos representar la relación anterior mediante una función:

$$P: \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x_i \mapsto P(X = x_i) = \frac{1}{n} \end{array}$$

A este tipo de distribución se le llama **uniforme discreta**.

Distribución uniforme discreta

Ejemplo

Sea la variable $X =$ *"Número obtenido al lanzar una dado"*

A cada valor de la variable podemos asignarle su probabilidad:

$$P(X)$$

x_i		$P(x_i)$
1	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
2	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
3	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
4	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
5	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$
6	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$

Podemos representar la relación anterior mediante una función:

$$P: \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x_i \mapsto P(X = x_i) = \frac{1}{n} \end{array}$$

A este tipo de distribución se le llama **uniforme discreta**.

Distribución Binomial. Introducción

Ejemplo

Queremos calcular las probabilidades de que al lanzar 5 monedas, obtengamos tres caras.

Un suceso que cumple el enunciado es:

$$S_1 = \{C, C, C, X, X\}$$

Teniendo en cuenta que lanzar cada moneda son experimentos independientes, la probabilidad de ese suceso será:

$$\begin{aligned} P(S_1) &= P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) \cdot \ldots \cdot P(X_5|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap X_4) = \\ &= P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5) = \\ &= P(C)^3 \cdot P(X)^2 \end{aligned}$$

Como la probabilidad de que una moneda sea cara es $\frac{1}{2}$ y la de que sea cruz también:

$$P\left(S_1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Ahora bien, habrá tantos sucesos que cumplan el enunciado como combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. Por tanto la probabilidad de que salgan 3 caras será:

$$P\left(Salgan\ 3\ caras\right) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

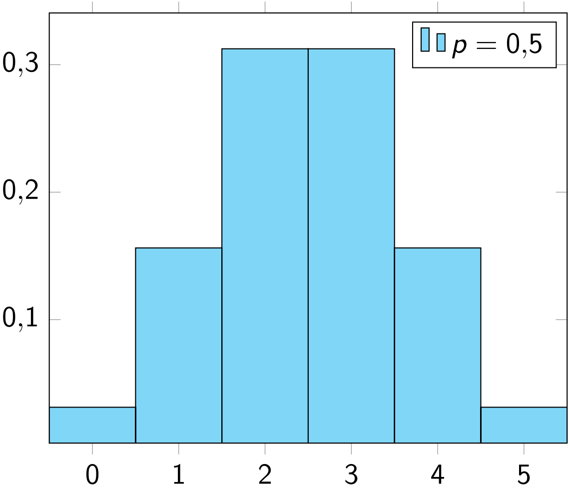
Podemos determinar la probabilidad mediante la siguiente función.

$$P: \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ k \mapsto P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} \end{array}$$

Realizando los cálculos para $k = 1, ..., 5$, la distribución de probabilidad de X que resulta es:

$P(X)$

x_i		$P(x_i)$
0	$\rightarrow$	0,03125
1	$\rightarrow$	0,15625
2	$\rightarrow$	0,3125
3	$\rightarrow$	0,3125
4	$\rightarrow$	0,15625
5	$\rightarrow$	0,03125

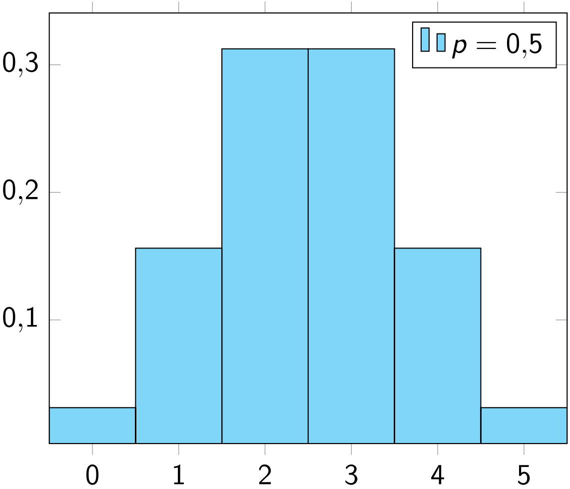


Esto es un ejemplo de **distribución binomial** de tamaño 5 y probabilidad 0,5 .

Realizando los cálculos para $k = 1, ..., 5$, la distribución de probabilidad de X que resulta es:

$P(X)$

x_i		$P(x_i)$
0	$\rightarrow$	0,03125
1	$\rightarrow$	0,15625
2	$\rightarrow$	0,3125
3	$\rightarrow$	0,3125
4	$\rightarrow$	0,15625
5	$\rightarrow$	0,03125



Esto es un ejemplo de **distribución binomial** de tamaño 5 y probabilidad 0,5 .

Distribución Binomial

Hablaremos de una **distribución binomial** cuando:

- Se parte de un **experimento compuesto** de varios simples independientes
- Los experimentos simples son **dicotómicos**. Es decir, solo puede haber dos sucesos elementales: uno al que llamaremos acierto y otro al que llamaremos fracaso
- Asociado al experimento compuesto tenemos la variable **número de aciertos** cuando realizamos el experimento simple un número determinado de veces

Distribución Binomial

Hablaremos de una **distribución binomial** cuando:

- Se parte de un **experimento compuesto** de varios simples independientes
- Los experimentos simples son **dicotómicos**. Es decir, solo puede haber dos sucesos elementales: uno al que llamaremos acierto y otro al que llamaremos fracaso
- Asociado al experimento compuesto tenemos la variable **número de aciertos** cuando realizamos el experimento simple un número determinado de veces

Distribución Binomial

Hablaremos de una **distribución binomial** cuando:

- Se parte de un **experimento compuesto** de varios simples independientes
- Los experimentos simples son **dicotómicos**. Es decir, solo puede haber dos sucesos elementales: uno al que llamaremos acierto y otro al que llamaremos fracaso
- Asociado al experimento compuesto tenemos la variable **número de aciertos** cuando realizamos el experimento simple un número determinado de veces

Distribución Binomial

En la situación anterior, la distribución binomial vendrá determinada por dos parámetros:

- Parámetro n: Número de veces que se realiza el experimento simple
- Parámetro p: La probabilidad de que ocurra el suceso acierto

A este tipo de variable y su distribución de probabilidades se le llama **binomial** y se denota

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

.

Distribución Binomial

En la situación anterior, la distribución binomial vendrá determinada por dos parámetros:

- Parámetro n: Número de veces que se realiza el experimento simple
- Parámetro p: La probabilidad de que ocurra el suceso acierto

A este tipo de variable y su distribución de probabilidades se le llama **binomial** y se denota

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

.

Distribución Binomial

En la situación anterior, la distribución binomial vendrá determinada por dos parámetros:

- Parámetro n: Número de veces que se realiza el experimento simple
- Parámetro p: La probabilidad de que ocurra el suceso acierto

A este tipo de variable y su distribución de probabilidades se le llama **binomial** y se denota

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

.

Distribución Binomial

En la situación anterior, la distribución binomial vendrá determinada por dos parámetros:

- Parámetro n: Número de veces que se realiza el experimento simple
- Parámetro p: La probabilidad de que ocurra el suceso acierto

A este tipo de variable y su distribución de probabilidades se le llama **binomial** y se denota

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

.

Ejemplo

Lanzamineto de 5 monedas

El experimento se compone de **5 lanzamientos de moneda**. Si sale cara es acierto y si no fracaso. La variable aleatoria asociada al experimento será el número de caras que salen al lanzar 5 monedas. Esta variable sigue una distribución binomial $X \sim \mathcal{B}(5,\ 0{,}5)$.

Probabilidad de la binomial

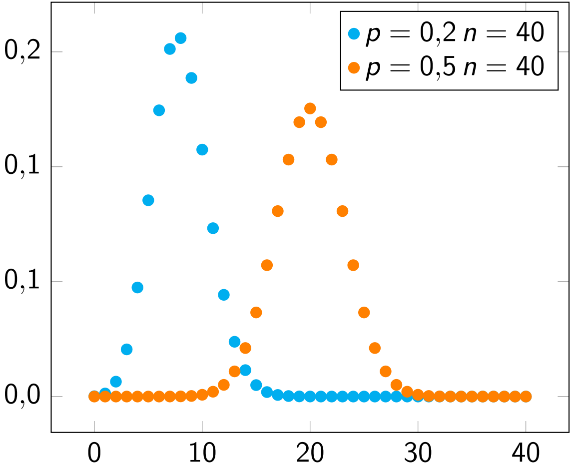
En general tendremos una binomial de tamaño n **y probabilidad** p, cuando el experimento simple se haga n veces y la probabilidad de acierto sea p.

La función de probabilidad en este caso nos queda:

$$P\colon \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ k \mapsto P(X=k) = \binom{n}{k}(p)^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{array}$$

Distribución Binomial

Ejemplos de representación gráfica de la distribución de probabilidad de algunas binomiales:



Distribución de probabilidades en una variable continua

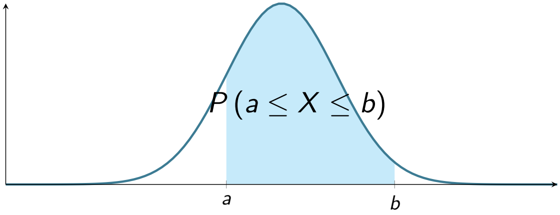
La probabilidad total es 1 y la variable X puede tomar ∞ valores ($x \in (-\infty, +\infty)$). Por tanto, en variables continuas la probabilidad de que tome un valor concreto será 0 ($\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$).
Para calcular las probabilidades no se utilizarán funciones de probabilidad como hemos visto hasta ahora sino **funciones de densidad**:

Función de densidad

En variables continuas solo tiene sentido calcular la probabilidad en intervalos. Se llama **función de densidad** ($f(x)$) a aquella que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

La interpretación gráfica de lo anterior nos dice que la probabilidad de un intervalo corresponde con el área de la función de densidad en ese intervalo.



Distribución Normal

Se trata de una distribución asociada a a un variable continua . Resulta de aproximar una binomial para valores muy grandes de n.

Y se denota: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Tiene dos parámetros:

- μ : Media de la distribución
- σ : Desviación típica

Esta distribución aparece asociada a muchos fenómenos naturales.

Distribución Normal

Se trata de una distribución asociada a a un variable continua . Resulta de aproximar una binomial para valores muy grandes de n.

Y se denota: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Tiene dos parámetros:

- μ : Media de la distribución
- σ : Desviación típica

Esta distribución aparece asociada a muchos fenómenos naturales.

Distribución Normal

Se trata de una distribución asociada a a un variable continua . Resulta de aproximar una binomial para valores muy grandes de n.

Y se denota: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Tiene dos parámetros:

- μ : Media de la distribución
- σ : Desviación típica

Esta distribución aparece asociada a muchos fenómenos naturales.

Distribución Normal

Se trata de una distribución asociada a a un variable continua . Resulta de aproximar una binomial para valores muy grandes de n.

Y se denota: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Tiene dos parámetros:

- μ : Media de la distribución
- σ : Desviación típica

Esta distribución aparece asociada a muchos fenómenos naturales.

Distribución Normal

Se trata de una distribución asociada a a un variable continua . Resulta de aproximar una binomial para valores muy grandes de n.

Y se denota: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Tiene dos parámetros:

- μ : Media de la distribución
- σ : Desviación típica

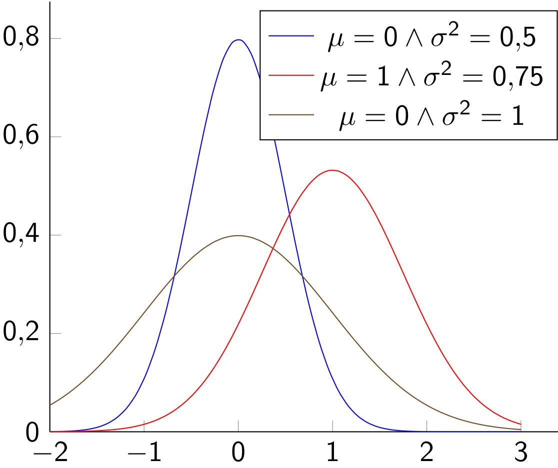
Esta distribución aparece asociada a muchos fenómenos naturales.

Función de densidad de una distribución normal

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$

Ejemplos de gráficas:



Cálculo práctico de la probabilidad de la Normal:

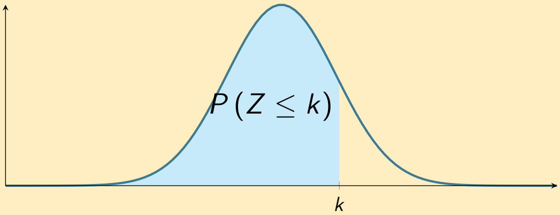
En realidad, para calcular la probabilidad no se hace la integral, sino que **se utiliza una tabla** que ya tiene calculadas probabilidades de la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ...

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Cálculo práctico de la probabilidad de la Normal:

... y que refleja:

$$P\left(Z \leq k\right), \quad k \in \left[0, 4'09\right]$$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Cálculo en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ o normal estándar

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,5
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,6
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,6
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,6
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,7
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,7
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,7
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,8
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,8
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,8
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,8
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,9
1,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

- $P(Z \leq 0) = 0{,}5$. Ya que en este caso $k = 0 = 0{,}00$ la suma del valor de la fila 0 con el valor de la columna 0 me da el valor de k, y la probabilidad asociada es 0,5
- $P(Z \leq 1{,}23) = 0{,}89065$. En este caso la probabilidad asociada a 1.23 se busca en la fila 1.2 y la columna 0.03

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,5
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,6
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,6
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,6
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,7
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,7
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,7
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,8
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,8
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,8
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,8
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,9
1,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

- $P(Z \leq 0) = 0{,}5$. Ya que en este caso $k = 0 = 0{,}00$ la suma del valor de la fila 0 con el valor de la columna 0 me da el valor de k, y la probabilidad asociada es 0,5
- $P(Z \leq 1{,}23) = 0{,}89065$. En este caso la probabilidad asociada a 1.23 se busca en la fila 1.2 y la columna 0.03

Cálculo en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ o normal estándar

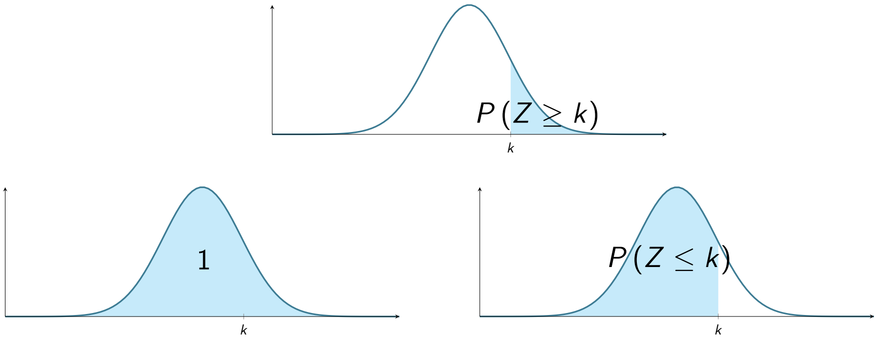
Las probabilidades en conjuntos de valores de la distribución que no se puedan obtener directamente de la tabla se transformarán en operaciones con probabilidades que sí estén en la tabla:

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo

$P\,(Z \geq 1{,}23) = 1 - P\,(Z \leq 1{,}23) = 1 - 0{,}89065 = 0{,}10935.$

Basta fijarse en la relación que hay entre las áreas:

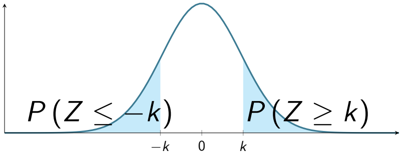


Cálculo en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ o normal estándar

Ejemplo

$P(Z \leq -2{,}15) = P(Z \geq 2{,}15) = 1 - P(Z \leq 2{,}15) = 1 - 0{,}98422 = 0{,}01578.$

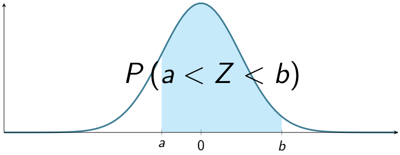
Basta fijarse en la relación que hay entre las áreas:

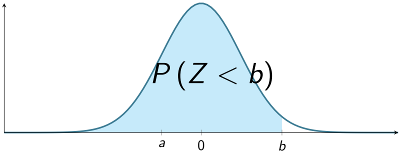


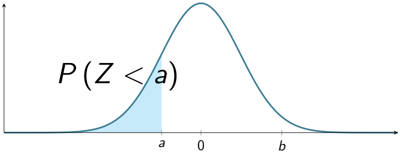
Ejemplo

$P(-1{,}3 < Z < 3{,}1) = P(Z < 3{,}1) - P(Z < -1{,}3) =$
$P(Z < 3{,}1) - [1 - P(Z < 1{,}3)] = 0{,}99903 - 1 + 0{,}9032 = 0{,}90223.$

Basta fijarse en la relación que hay entre las áreas:





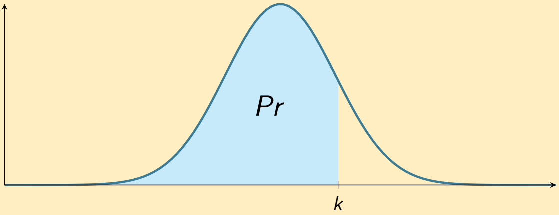


Cálculo en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ o normal estándar

Cálculo del valor de la variable a partir de la probabilidad

El uso de la tabla normal nos permite realizar el proceso inverso. Es decir, fijada una probabilidad Pr, encontrar el valor de la variable k que cumpla:

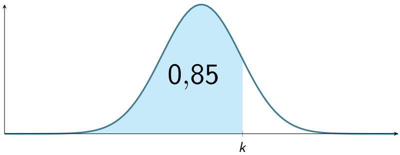
$$P(Z <= k) = Pr$$



Ejemplo

Dada $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, calcula el valor de la variable sabiendo que la probabilidad de que tome un valor menor que ese es de un 85 %.

$$P(Z <= k) = 0{,}85$$



Vamos a la tabla y buscamos los dos valores seguidos de la tabla entre los que se quede el 0,85 y encontramos:

$$0{,}84849 < 0{,}85 < 0{,}85083$$

Como queda más cerca del 0,85083, me quedo con la celda correspondiente a la fila 1 y columna 0,04 $\Rightarrow k = 1{,}04$.

Cálculo en $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ - Tipifiación

Para manejar $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ reduciremos los cálculos a cálculos en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ a partir de la siguiente propiedad:

$$Si\ X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Rightarrow X' = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Al proceso de transformar la variable anterior a una $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ se denomina **tipificarla**.

Cálculo en $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ - Tipifiación

Para manejar $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ reduciremos los cálculos a cálculos en la $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ a partir de la siguiente propiedad:

$$Si\ X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Rightarrow X' = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Al proceso de transformar la variable anterior a una $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ se denomina **tipificarla**.

Ejemplos

- $X \sim \mathcal{N}(1, 2) \rightarrow P(X <= 2{,}32) = P(X' <= \frac{2{,}32-1}{2}) = P(Z <= 0{,}66) = 0{,}74537$
- $X \sim \mathcal{N}(5, 3) \rightarrow P(X <= 3{,}59) = P(X' <= \frac{3{,}59-5}{3}) = P(Z <= -0{,}47) = 1 - P(Z <= 0{,}47) = 1 - 0{,}68082 = 0{,}31918$

Ejemplos

- $X \sim \mathcal{N}(1, 2) \rightarrow P(X <= 2{,}32) = P(X' <= \frac{2{,}32-1}{2}) = P(Z <= 0{,}66) = 0{,}74537$
- $X \sim \mathcal{N}(5, 3) \rightarrow P(X <= 3{,}59) = P(X' <= \frac{3{,}59-5}{3}) = P(Z <= -0{,}47) = 1 - P(Z <= 0{,}47) = 1 - 0{,}68082 = 0{,}31918$