Nombre: ______________________________ **Fecha:** ______________

Tiempo: 105 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 6 ejercicios. La puntuación máxima es de 50. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	6	4	14	5	6	15	50

1. Calcula el siguiente límite: (6 *puntos*)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-2x+2}{3x^2-2}\right)^{\frac{x^2-3x}{x^2+x-2}}$$

Solución: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-2x+2}{3x^2-2}\right)^{\frac{x^2-3x}{x^2+x-2}} = 1^\infty$. Indeterminación
$g(x)\cdot[f(x)-1] = \frac{x(x-3)}{(x-1)(x+2)}\cdot\frac{(x-1)\left(x^2-2x-4\right)}{3x^2-2} = \frac{x(x-3)\left(x^2-2x-4\right)}{(x+2)(3x^2-2)}$.
$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-3)\left(x^2-2x-4\right)}{(x+2)(3x^2-2)} = \frac{10}{3}$. Por tanto:
$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-2x+2}{3x^2-2}\right)^{\frac{x^2-3x}{x^2+x-2}} = e^{\frac{10}{3}}$

2. Hallar los puntos de la gráfica $y = 2x^3+3x^2-30x-6$ en el cual la recta tangente es paralela a la recta $y = 6x-5$ (4 *puntos*)

Solución: $f'(x) = 6x^2+6x-30 \wedge m = 6$. Luego:
$6x^2+6x-30 = 6 \to x = [-3,\ 2]$. Los puntos de la gráfica son:
$(-3, 57)$.
$(2, -38)$.

3. Halla la derivadas de la siguientes funciones:

(a) $\log\left(\sqrt{\frac{\cos(x)+1}{1-\cos(x)}}\right)$ (7 *puntos*)

Solución: $f'(x) = \left(-\frac{\log(1-\cos(x))}{2}+\frac{\log(\cos(x)+1)}{2}\right)' = -\frac{\sin(x)}{2(\cos(x)+1)} - \frac{\sin(x)}{2(1-\cos(x))} = \frac{\sin(x)}{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)} = -\frac{1}{\sin(x)}$

(b) $\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \tan\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ (7 *puntos*)

Solución:
$f'(x) = \left(\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}\right)' + \left(-\tan\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{2x^2-1}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sec^2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)}{\sqrt{x^2-1}} =$
$\frac{2x^2-2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\sec^2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-1}{2\sqrt{x^2-1}}$

4. Determina a y b para que sea derivable en $\mathbb{R}$ la función: (5 *puntos*)

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\sin(x)+e\right) & si \quad x < 0 \\ ax + b + x^3 & si \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Solución: Continuidad en 0:
$\lim_{x\to 0^-} \log\left(\sin(x)+e\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(ax+b+x^3\right) \to 1 = b$
Derivabilidad en 0:
$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)+e}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(a+3x^2\right) \to e^{-1} = a$
Por tanto: $\{a : e^{-1},\ b : 1\}$

5. Aprovechando como hipotenusa una pared de $10\sqrt{2}$ m. se desea acotar una superficie triangular de área máxima.¿Qué medidas deberán tener los otros dos lados (catetos)? (6 *puntos*)

Solución: Función a optimizar: $\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$
$f'(x) = \frac{100-x^2}{\sqrt{200-x^2}} \wedge f''(x) = \frac{x\left(x^2-300\right)}{\left(200-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$
Extremos relativos:
$-10 \wedge f''(-10) = 2$
$10 \wedge f''(10) = -2$

6. Dada la función: $x + e^{-x}$

(a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, así como los extremos relativos (5 *puntos*)

Solución: $dom(f(x)) = \mathbb{R}$
$f'(x) = 1 - e^{-x} \to f'(x) = 0 \to 1 - e^{-x} = 0 \to x = 0$

Intervalos de crecimiento: $[[(-\infty, 0),\ \text{False}],\ [(0,\infty),\ \text{True}]]$

(b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f (5 *puntos*)

Solución: $f''(x) = e^{-x} \rightarrow f''(x) > 0$
Intervalos de convexidad:$[\mathbb{R},\ \text{True}]$

(c) Determina las asíntotas de la gráfica de f (5 *puntos*)

Solución: $dom(f(x)) = \mathbb{R} \rightarrow \nexists A.V.$
$lim_{x\rightarrow+\infty} f(x) = \infty + 0 = \infty \wedge lim_{x\rightarrow-\infty} f(x) = -\infty \rightarrow \nexists A.H.$
Asíntota oblícua:

pendiente: $lim_{x\rightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = lim_{x\rightarrow\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = 1$
ordenada: $lim_{x\rightarrow\infty} f - m \cdot x = lim_{x\rightarrow\infty} e^{-x} = 0 \rightarrow A.O : y = x$