Nombre: ______________________________ **Fecha:** ____________

Tiempo: 105 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 8 ejercicios. La puntuación máxima es de 24. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos:	4	4	0	3	3	5	2	3	24

1. Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -kx+3y+z=-7 \\ x+2y+z\,(k+2)=-5 \end{cases}$$

(a) Estudiar las soluciones del sistema según los valores del parámetro k. (2 *puntos*)

Solución: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & 3 & 1 \\ 1 & 2 & k+2 \end{vmatrix} = (k+1)(k+2)$
- Si $k \neq -2, -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$
Como $rg(A) = rg(A^{*}) = 3$ –¿S.C.D – ¿Se puede resolver por Gauss, Matriz inversa o Cramer
- Si $k = -2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \nexists A^{-1}$
Como $rg(A) = rg(A^{*}) = 2 \rightarrow$ S.C.I –¿Solo se puede resolver por Gauss
- Si $k = -1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \nexists A^{-1}$
Como $rg(A) = 2 \wedge rg(A^{*}) = 3 \rightarrow$ S.I.

(b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado. (2 *puntos*)

Solución: $A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 1-2\lambda, y = \lambda - 3, z = \lambda$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

(a) Hallar el rango de A en función de los valores de k. (2 *puntos*)

Solución: - Si $k \neq -1, 0, 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1} \rightarrow rg(A) = 3$ - Si no $rg(A) = 2$

(b) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución de la ecuación $AX = B$ (2 *puntos*)

Solución: - Gauss:
$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{2}{3}, y = 0, z = \frac{8}{3}$ - Matriz inversa:
$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ - Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{24} = \frac{0}{24} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{24} = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

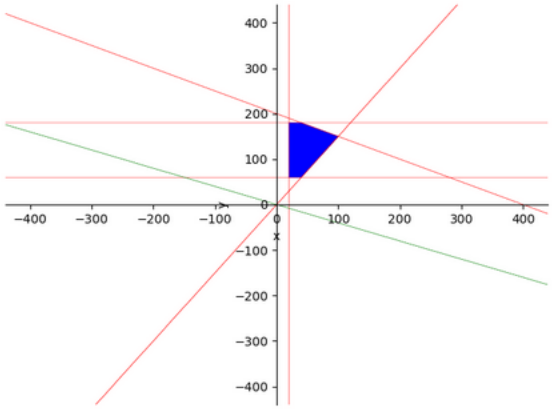
3. Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Sólo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5 y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2 . Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule dicho beneficio. (Justifica todos los pasos realizados)

Solución:

```
--------------------------------------------
max z=2 x + 5 y
s.a:
```

$$\begin{cases} y \leq 180 \\ 5x + 10y \leq 2000 \\ 2y \geq 3x \\ x \geq 20 \\ y \geq 60 \end{cases}$$

```
Región factible:
```



Vértices y valor de la función:

$(40,\ 180) \rightarrow 2 \cdot 40 + 5 \cdot 180 = 980$

$(20,\ 180) \rightarrow 2 \cdot 20 + 5 \cdot 180 = 940$

$(100,\ 150) \rightarrow 2 \cdot 100 + 5 \cdot 150 = 950$

$(40,\ 60) \rightarrow 2 \cdot 40 + 5 \cdot 60 = 380$

$(20,\ 60) \rightarrow 2 \cdot 20 + 5 \cdot 60 = 340$

Solución:

```
/tmp/ipykernel_6081/3850251772.py:138: DeprecationWarning:
ciPy 1.11.0. Please use one of the HiGHS solvers (e.g. `me
  sol = optimize.linprog(
```

La función se optimiza para $x = 40.0$, $y = 180.0$ y el valor óptimo es 980.0

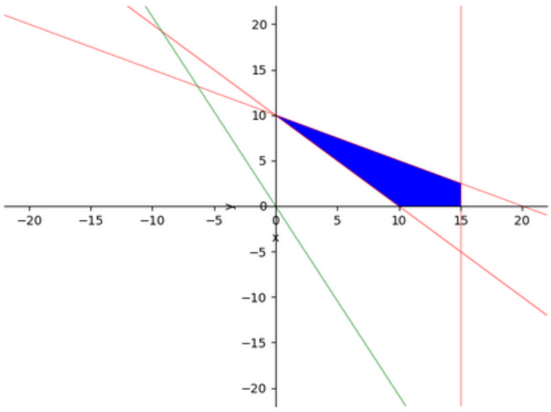
4. Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse (Justifica todos los pasos realizados)

Solución:

```
=============================================
max z=25 x + 12 y
s.a:
```

$$\begin{cases} x+y\geq 10 \\ x+2y\leq 20 \\ x\leq 15 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

```
Región factible:
```




```
Vértices y valor de la función:
```

$(0,\ 10) \to 25\cdot 0 + 12\cdot 10 = 120$

$(10,\ 0) \to 12\cdot 0 + 25\cdot 10 = 250$

$\left(15,\ \frac{5}{2}\right) \to 12\cdot 5\cdot \frac{1}{2} + 25\cdot 15 = 405$

$(15,\ 0) \to 12\cdot 0 + 25\cdot 15 = 375$

```
Solución:
```

```
/tmp/ipykernel_6081/3850251772.py:138: DeprecationWarni
ciPy 1.11.0. Please use one of the HiGHS solvers (e.g.
  sol = optimize.linprog(
```

La función se optimiza para $x = 15.0$, $y = 2.5$ y el valor óptimo es 405.0

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

   (a) Calcule $2C$ y AB (1 *punto*)

   (b) Encontrar, si existe, una matriz X tal que: $AB + 2CX = D$ (2 *puntos*)

Solución: $AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $2C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $D - AB = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ y $(2C)^{-1}$: $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{traspuesta}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{adjunta}} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{inversa}} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Por tanto, $X = (2C)^{-1}\cdot(D-AB) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6. En una librería hubo la semana pasada una promoción de tres libros: una novela, un libro de poesía y un cuento. Se vendieron 200 ejemplares de la novela, 100 de poesía y 150 cuentos. La librería ingresó por dicha promoción 8600 euros, que el precio de un ejemplar de novela es el doble que el de un cuento y que el triple de la diferencia entre el precio del ejemplar de poesía y del cuento es igual al precio de una novela.

   (a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje el enunciado (2 *puntos*)

   (b) Resuelva el problema por cualquiera de los métodos vistos en clase (1 *punto*)

Solución:

$$\begin{cases} 200x + 100y + 150z = 8600 \\ x - 2z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Como $rg(A) = rg(A^*) = 3$ --> S.C. (El sistema tiene solución)

Como además $rg(A) = 3$ coincide con el número de incógnitas --> S.C.D -- > Se puede resolver por Gauss, Matriz inversa o Cra

Resolución por Gauss

$$A^* = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 150 & 8600 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 200 & 100 & 150 & 8600 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{4} & -43 \\ 0 & 0 & \frac{43}{2} & 258 \end{pmatrix} \rightarrow x = 24, y = 20, z = 12$$

Método de la matríz inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{1075} & \frac{15}{43} & \frac{4}{43} \\ \frac{1}{430} & -\frac{9}{43} & -\frac{11}{43} \\ \frac{3}{2150} & -\frac{14}{43} & \frac{2}{43} \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{3}{1075} & \frac{15}{43} & \frac{4}{43} \\ \frac{1}{430} & -\frac{9}{43} & -\frac{11}{43} \\ \frac{3}{2150} & -\frac{14}{43} & \frac{2}{43} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8600 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8600 & 100 & 150 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{-2150} = \frac{-51600}{-2150} = 24$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 8600 & 150 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2150} = \frac{-43000}{-2150} = 20$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 100 & 8600 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-2150} = \frac{-25800}{-2150} = 12$$

7. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ az + 2x + y = a \\ ay + x + z = 1 \end{cases}$$

(a) Discutir la solución del mismo según el valor de a (2 *puntos*)

(b) Resolver el sistema según el valor de a (3 *puntos*)

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & a(2-a) \end{pmatrix} \rightarrow$

$det(A) = -a^2 + 3a - 2 \rightarrow -(a-2)(a-1)$.

Discusión:

Si a $\neq (1,\ 2) \rightarrow det(A) \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A^*) = 3 \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow$

Sol: $\begin{pmatrix} a+1 \\ \frac{2-a}{a-1} \\ -\frac{a}{a-1} \end{pmatrix}$

Si a=1:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 3 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow$ S.I.

Si a=2:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A^*) = 2 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow$ Sol:$\{x : 1 - z,\ y : 0\}$

8. Dadas las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x \leqslant 8 - y \\ x \leqslant 3 \\ y \leqslant 4 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

(a) Razonar si $z = 5x + 2y$ alcanza un valor máximo y uno mínimo con las restricciones anteriores. En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. (1 *punto*)

Solución:

Vértices:

$A(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$

$B(3,0) \rightarrow f(3,0) = 15$

$C(3,2) \rightarrow f(3,2) = 19$

$D(2,4) \rightarrow f(2,4) = 18$

$E(0,4) \rightarrow f(0,4) = 8$

Mínimo en D y $f(D) = 0$

Máximo en C y $f(C) = 19$

(b) Igual que el apartado anterior pero para $z = 6x + 3y$ (1 *punto*)

Solución:

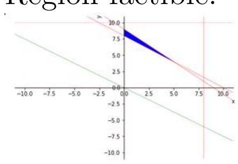
Vértices:
$A(0,0) \to f(0,0) = 0$
$B(3,0) \to f(3,0) = 18$
$C(3,2) \to f(3,2) = 24$
$D(2,4) \to f(2,4) = 24$
$E(0,4) \to f(0,4) = 12$

Mínimo en D y $f(D) = 0$
Máximo en $\overline{CD}$ y $f(C) = 24 \wedge f(D) = 24$

$$\overline{CD} \equiv \begin{cases} x = 3 + (2-3)\lambda \\ y = 2 + (4-2)\lambda \end{cases}, \lambda \in (0,1)$$

9. Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses de 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 80 €. y el de cada uno de los pequeños 60 €. ¿Cuántos autobuses de cada clase se tiene que alquilar para que el coste del viaje sea mínimo? (3 *puntos*)

Solución: min $z = 6000x + 8000y$
s.a:
$$\begin{cases} x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ x + y \leq 9 \\ 40x + 50y \geq 400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
Región factible:



Vértices y valor de la función:

(5, 4)60005+80004=62000
(0, 9)60000+80009=72000
(0, 8)60000+80008=64000

La función se optimiza para x=5, y=4.0 y el valor óptimo es 62000