Departamento de Matemáticas
2º Bachillerato CCSS
Final 1ªEv.

Nombre: ______________________________ **Fecha:** ____________

Tiempo: 105 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 6 ejercicios. La puntuación máxima es de 16. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	0	3	3	5	2	3	16

1. 2015 http://five-fingers.es/index.php/topmatematicasccnn
$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -\lambda x+3y+z=-7 \\ x+2y+(\lambda+2)z=-5 \end{cases}$$
   (a) Estudiar las soluciones del sistema según los valores del parámetro λ.
   (b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
   (a) Calcule $2C$ y AB (1 *punto*)
   (b) Encontrar, si existe, una matriz X tal que: $AB+2CX=D$ (2 *puntos*)

Solución: $AB=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $2C=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $D-AB=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ y $(2C)^{-1}$: $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjunta} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Por tanto, $X=(2C)^{-1}\cdot(D-AB)=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. En una librería hubo la semana pasada una promoción de tres libros: una novela, un libro de poesía y un cuento. Se vendieron 200 ejemplares de la novela, 100 de poesía y 150 cuentos. La librería ingresó por dicha promoción 8600 euros, que el precio de un ejemplar de novela es el doble que el de un cuento y que el triple de la diferencia entre el precio del ejemplar de poesía y del cuento es igual al precio de una novela.

(a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje el enunciado (2 *puntos*)

(b) Resuelva el problema por cualquiera de los métodos vistos en clase (1 *punto*)

Solución:

$$\begin{cases} 200x + 100y + 150z = 8600 \\ x - 2z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Como $rg(A) = rg(A^*) = 3$ --> S.C. (El sistema tiene solución)

Como además $rg(A) = 3$ coincide con el número de incógnitas --> S.C.D -- > Se puede resolver por Gauss, Matriz inversa o Cra

Resolución por Gauss

$$A^* = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 150 & 8600 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 200 & 100 & 150 & 8600 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{4} & -43 \\ 0 & 0 & \frac{43}{2} & 258 \end{pmatrix} \to x = 24, y = 20, z = 12$$

Método de la matríz inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{1075} & \frac{15}{43} & \frac{4}{43} \\ \frac{1}{430} & -\frac{9}{43} & -\frac{11}{43} \\ \frac{3}{2150} & -\frac{14}{43} & \frac{2}{43} \end{pmatrix} \to X = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{3}{1075} & \frac{15}{43} & \frac{4}{43} \\ \frac{1}{430} & -\frac{9}{43} & -\frac{11}{43} \\ \frac{3}{2150} & -\frac{14}{43} & \frac{2}{43} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8600 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8600 & 100 & 150 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{-2150} = \frac{-51600}{-2150} = 24$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 8600 & 150 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2150} = \frac{-43000}{-2150} = 20$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 100 & 8600 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-2150} = \frac{-25800}{-2150} = 12$$

4. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ az + 2x + y = a \\ ay + x + z = 1 \end{cases}$$

(a) Discutir la solución del mismo según el valor de a (2 *puntos*)

(b) Resolver el sistema según el valor de a (3 *puntos*)

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & a(2-a) \end{pmatrix} \to$

$det(A) = -a^2 + 3a - 2 \to -(a-2)(a-1)$.

Discusión:

Si a $\neq (1,\ 2) \rightarrow det(A) \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A^{*}) = 3 \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow$
Sol: $\begin{pmatrix} a+1 \\ \frac{2-a}{a-1} \\ -\frac{a}{a-1} \end{pmatrix}$
Si a=1:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A^{*}) = 3 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow$ S.I.
Si a=2:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A^{*}) = 2 \wedge ran(A) = 2 \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow$ Sol:$\{x : 1 - z,\ y : 0\}$

5. Dadas las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x \leqslant 8 - y \\ x \leqslant 3 \\ y \leqslant 4 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

(a) Razonar si $z = 5x + 2y$ alcanza un valor máximo y uno mínimo con las restricciones anteriores. En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. (1 *punto*)

Solución:

Vértices:
$A(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$
$B(3,0) \rightarrow f(3,0) = 15$
$C(3,2) \rightarrow f(3,2) = 19$
$D(2,4) \rightarrow f(2,4) = 18$
$E(0,4) \rightarrow f(0,4) = 8$

Mínimo en D y $f(D) = 0$
Máximo en C y $f(C) = 19$

(b) Igual que el apartado anterior pero para $z = 6x + 3y$ (1 *punto*)

Solución:

Vértices:
$A(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$
$B(3,0) \rightarrow f(3,0) = 18$
$C(3,2) \rightarrow f(3,2) = 24$
$D(2,4) \rightarrow f(2,4) = 24$
$E(0,4) \rightarrow f(0,4) = 12$

Mínimo en D y $f(D) = 0$
Máximo en $\overline{CD}$ y $f(C) = 24 \wedge f(D) = 24$

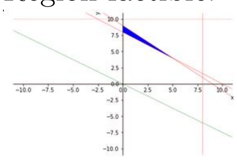
$$\overline{CD} \equiv \begin{cases} x = 3 + (2-3)\lambda \\ y = 2 + (4-2)\lambda \end{cases}, \lambda \in (0, 1)$$

6. Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses de 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 80 €. y el de cada uno de los pequeños 60 €. ¿Cuántos autobuses de cada clase se tiene que alquilar para que el coste del viaje sea mínimo? (3 *puntos*)

Solución: min $z = 6000x + 8000y$
s.a:

$$\begin{cases} x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ x + y \leq 9 \\ 40x + 50y \geq 400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Región factible:



Vértices y valor de la función:

(5, 4)60005+80004=62000
(0, 9)60000+80009=72000
(0, 8)60000+80008=64000

La función se optimiza para x=5, y=4.0 y el valor óptimo es 62000