Nombre: ______________________________ **Fecha:** ______________

Tiempo: 105 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 8 ejercicios. La puntuación máxima es de 20. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos:	1	1	4	4	3	3	2	2	20

1. Dadas las matrices: (1 *punto*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular los valores que puede tomar k para que la matriz AB tenga inversa.

Solución: $AB = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 3k & k & 2k+2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \wedge |AB| = 0 \rightarrow \nexists k$

2. Dadas las matrices: (1 *punto*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular los valores que puede tomar k para que la matriz BA tenga inversa.

Solución: $BA = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix} \wedge |AB| = (k-1)(k+3) \rightarrow \exists\; sik \neq \{1,3\}$

3. Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -kx + 3y + z = -7 \\ x + 2y + z(k+2) = -5 \end{cases}$$

(a) Estudiar las soluciones del sistema según los valores del parámetro k. (2 *puntos*)

Solución: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & 3 & 1 \\ 1 & 2 & k+2 \end{vmatrix} = (k+1)(k+2)$
- Si $k \neq -2, -1 \to |A| \neq 0 \to \exists A^{-1}$
Como $rg(A) = rg(A^*) = 3$ –¿S.C.D – ¿Se puede resolver por Gauss, Matriz inversa o Cramer
- Si $k = -2 \to |A| = 0 \to \nexists A^{-1}$
Como $rg(A) = rg(A^*) = 2 \to$ S.C.I –¿Solo se puede resolver por Gauss
- Si $k = -1 \to |A| = 0 \to \nexists A^{-1}$
Como $rg(A) = 2 \wedge rg(A^*) = 3 \to$ S.I.

(b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado. (2 *puntos*)

Solución: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to x = 1 - 2\lambda, y = \lambda - 3, z = \lambda$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

(a) Hallar el rango de A en función de los valores de k. (2 *puntos*)

Solución: - Si $k \neq -1, 0, 1 \to |A| \neq 0 \to \exists A^{-1} \to rg(A) = 3$ - Si no $rg(A) = 2$

(b) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución de la ecuación $AX = B$ (2 *puntos*)

Solución: - Gauss:
$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -16 \end{pmatrix} \to x = \frac{2}{3}, y = 0, z = \frac{8}{3}$ - Matriz inversa:
$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \to X = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ - Cramer:
$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{24} = \frac{0}{24} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{24} = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

5. Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Sólo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5 €. y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2 €. Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule dicho beneficio. (Justifica todos los pasos realizados) (3 *puntos*)

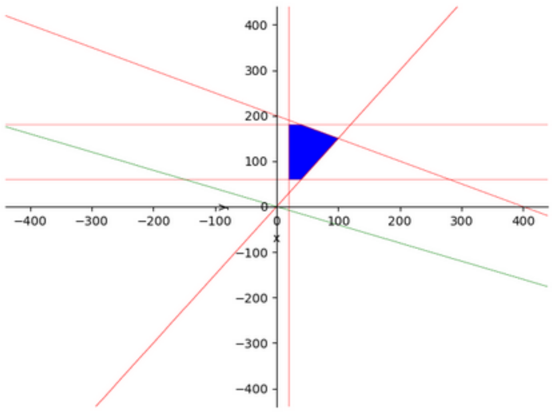
Solución:

max z=2 x + 5 y

s.a:

$$\begin{cases} y \leq 180 \\ 5x + 10y \leq 2000 \\ 2y \geq 3x \\ x \geq 20 \\ y \geq 60 \end{cases}$$

Región factible:



```
Vértices y valor de la función:
```

$(40,\ 180) \rightarrow 2 \cdot 40 + 5 \cdot 180 = 980$

$(20,\ 180) \rightarrow 2 \cdot 20 + 5 \cdot 180 = 940$

$(100,\ 150) \rightarrow 2 \cdot 100 + 5 \cdot 150 = 950$

$(40,\ 60) \rightarrow 2 \cdot 40 + 5 \cdot 60 = 380$

$(20,\ 60) \rightarrow 2 \cdot 20 + 5 \cdot 60 = 340$

```
Solución:
```

```
/tmp/ipykernel_6081/3850251772.py:138: DeprecationWarning:
ciPy 1.11.0. Please use one of the HiGHS solvers (e.g. `me
  sol = optimize.linprog(
```

La función se optimiza para $x = 40.0$, $y = 180.0$ y el valor óptimo es 980.0

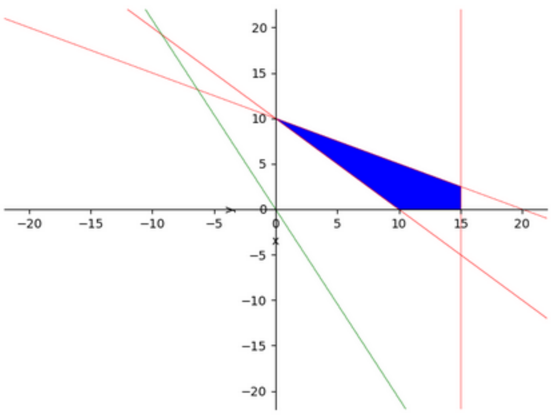
6. Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con los 5 bricks de 1,5 litros de leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas. Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse (Justifica todos los pasos realizados) (3 *puntos*)

Solución:

```
============================================
max z=25 x + 12 y
s.a:
```

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

```
Región factible:
```



Vértices y valor de la función:

$(0,\ 10) \to 25 \cdot 0 + 12 \cdot 10 = 120$

$(10,\ 0) \to 12 \cdot 0 + 25 \cdot 10 = 250$

$\left(15,\ \frac{5}{2}\right) \to 12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot 15 = 405$

$(15,\ 0) \to 12 \cdot 0 + 25 \cdot 15 = 375$

Solución:

```
/tmp/ipykernel_6081/3850251772.py:138: DeprecationWarni
ciPy 1.11.0. Please use one of the HiGHS solvers (e.g.
  sol = optimize.linprog(
```

La función se optimiza para $x = 15.0$, $y = 2.5$ y el valor óptimo es 405.0

7. Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del dinero en euros. Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros. Si se quiere determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

   (a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje el enunciado (2 *puntos*)

Solución:

$$\begin{cases} 10x + 11y + 15z = 2640000 \\ 10x - 22y = 0 \\ -x + 15z = 0 \end{cases}$$

Como $rg(A) = rg(A^*) = 3$ --> S.C. (El sistema tiene solución)

Como además $rg(A) = 3$ coincide con el número de incógnitas --> S.C.D -- > Se puede resolver por Gauss, Matriz inversa o Cramer

Resolución por Gauss

- - - - - - - - - - - -

$$A^* = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 15 & 2640000 \\ 10 & -22 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 11 & 15 & 2640000 \\ 0 & -33 & -15 & -2640000 \\ 0 & 0 & 16 & 176000 \end{pmatrix} \rightarrow x = 165000, y = 75000, z = 11000$$

Método de la matríz inversa

- - - - - - - - - - - - - - -

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & -\frac{1}{16} \\ \frac{5}{176} & -\frac{1}{32} & -\frac{5}{176} \\ \frac{1}{240} & \frac{1}{480} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & -\frac{1}{16} \\ \frac{5}{176} & -\frac{1}{32} & -\frac{5}{176} \\ \frac{1}{240} & \frac{1}{480} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2640000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165000 \\ 75000 \\ 11000 \end{pmatrix}$$

Por Cramer

- - - - - - - -

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2640000 & 11 & 15 \\ 0 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}}{-5280} = \frac{-871200000}{-5280} = 165000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2640000 & 15 \\ 10 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 15 \end{vmatrix}}{-5280} = \frac{-396000000}{-5280} = 75000$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 11 & 2640000 \\ 10 & -22 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-5280} = \frac{-58080000}{-5280} = 11000$$

8. Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4 % en un cierto producto A, un 6 % en el producto B y un 5 % en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8 % sobre el precio inicial de A, un 10 % sobre el precio inicial de B y un 6 % sobre el precio inicial de C. Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.

   Si se quiere calcular el precio de cada producto antes de las ofertas

   (a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje el enunciado (2 *puntos*)

Solución:

$$\begin{cases} x+y+z=135 \\ 4x+12y+15z=1600 \\ 24x+10y+30z=2900 \end{cases}$$

Como $rg(A) = rg(A^*) = 3$ --> S.C. (El sistema tiene solución)

Como además $rg(A) = 3$ coincide con el número de incógnitas --> S.C.D -- > Se puede resolver por Gauss, Matriz inversa o Cramer

Resolución por Gauss

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 4 & 12 & 15 & 1600 \\ 24 & 10 & 30 & 2900 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & 8 & 11 & 1060 \\ 0 & 0 & \frac{101}{4} & 1515 \end{pmatrix} \to x = 25, y = 50, z = 60$$

Método de la matríz inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{105}{101} & -\frac{10}{101} & \frac{3}{202} \\ \frac{120}{101} & \frac{3}{101} & -\frac{11}{202} \\ -\frac{124}{101} & \frac{7}{101} & \frac{4}{101} \end{pmatrix} \to X = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{105}{101} & -\frac{10}{101} & \frac{3}{202} \\ \frac{120}{101} & \frac{3}{101} & -\frac{11}{202} \\ -\frac{124}{101} & \frac{7}{101} & \frac{4}{101} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 135 \\ 1600 \\ 2900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 135 & 1 & 1 \\ 1600 & 12 & 15 \\ 2900 & 10 & 30 \end{vmatrix}}{202} = \frac{5050}{202} = 25$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 135 & 1 \\ 4 & 1600 & 15 \\ 24 & 2900 & 30 \end{vmatrix}}{202} = \frac{10100}{202} = 50$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 135 \\ 4 & 12 & 1600 \\ 24 & 10 & 2900 \end{vmatrix}}{202} = \frac{12120}{202} = 60$$