Nombre: ______________________________ **Fecha:** ____________

Tiempo: 45 minutos Tipo: A

Esta prueba tiene 8 ejercicios. La puntuación máxima es de 32. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos:	10	4	4	2	2	3	3	4	32

1. Calcula los siquientes límites:

(a) (2 *puntos*)

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+x^2-x-1}{2x^3+5x^2+4x+1}\right)$$

Solución: 2

(b) (2 *puntos*)

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-3x}\right)$$

Solución: $\frac{1}{12}$

(c) (2 *puntos*)

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3-3x-2}{2x^3+5x^2+4x+1}\right)$$

Solución: 3

(d) (2 *puntos*)

$$\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x^2-8x}\right)$$

Solución: $\frac{1}{48}$

(e) (1 *punto*)

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x+3}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x-3}}$$

Solución: $\frac{1}{2^{-\infty}} = \infty$

(f) (1 *punto*)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x-3}}$$

Solución: $\frac{1}{2^{\infty}} = 0$

2. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & si \quad x < 1 \\ (x-a)^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que f es continua en su dominio (2 *puntos*)

Solución: $f = \begin{cases} ax^2 - 1 & \text{for } x < 1 \\ (-a+x)^2 & \text{otherwise} \end{cases}$
$\lim_{x\to 1^-} f = a - 1 \wedge \lim_{x\to 1^-} f = (1-a)^2 \to -a^2 + 3a - 2 = 0 \to a = 1, a = 2$

(b) Para $a = \dfrac{1}{2}$, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica con el eje de las x (2 *puntos*)

Solución: $\dfrac{x^2}{2} - 1 = 0 \to x = -\sqrt{2}$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \to x = \frac{1}{2} = 0 \notin x \geq 1$

3. Dada la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$: (1 *punto*)

(a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que pase por el punto $(2, 4)$ y tenga un extremo relativo en ese punto. (2 *puntos*)

Solución: $\begin{cases} f(2) = 4 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \to f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \to \begin{cases} 2a + \frac{b}{2} = 4 \\ a - \frac{b}{4} = 0 \end{cases} \to$
$a = 1 \wedge b = 4$

(b) Justifica qué tipo de extremo relativo es (máximo relativo o mínimo relativo) (1 *punto*)

Solución: $f''(x) = \frac{2b}{x^3} \to f''(2) = \frac{b}{4} \to f''(2) = \frac{4}{4} = 1 > 0 \to$
$MINREL$

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$:

(a) Determine sus asíntotas (1 *punto*)

Solución: $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)=-\infty \wedge \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)=\infty \to$ $x=1A.V.$
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)=\infty \wedge \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)=-\infty \to \nexists A.H.$
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2-x}\right)=1 \to m=1 \wedge \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=$ $0\to y=xA.O.$

(b) Calcule $f'(2)$ (1 *punto*)

Solución: $f'(x)=\frac{x(x-2)}{x^2-2x+1}\to f'(2)=0$

5. Se considera la función $f(x)=\frac{10}{x^2+2x-3}$:
   (a) Determine el dominio de f y sus asíntotas (1 *punto*)

Solución: $f(x)=0\to x=-3, x=1\to \lim_{x\to-3}=\infty \wedge$ $\lim_{x\to-3}=\infty\to x=-3A.V.x=-1A.V.$
$\lim_{x\to\infty}f=\dfrac{10}{\infty}=0\to y=0A.H.$

   (b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos (1 *punto*)

Solución: $f'(x)=\frac{10(-2x-2)}{(x^2+2x-3)^2}$
$f'(x)=0\to x=-1$
$f''(-1)=-\frac{5}{4}\to\left(-1,-\frac{5}{2}\right) MAX\ REL$

6. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$:
   (a) Determine el dominio de f y sus asíntotas (1 *punto*)
   (b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ (1 *punto*)
   (c) Determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos (1 *punto*)

7. Dada la función $f(x)=x+\sqrt{1-x}$:
   (a) Determine el dominio de f (1 *punto*)
   (b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos (2 *puntos*)

8. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x\le 2\\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si \quad x>2\end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad de f (1 *punto*)

(b) Determine la recta tangente a f en el punto donde $x = 3$ (1 *punto*)

(c) Calcule las asíntotas oblicuas (2 *puntos*)