

Nombre: _____ Fecha: _____

Tiempo: 45 minutos

Tipo: A

Esta prueba tiene 3 ejercicios. La puntuación máxima es de 10. La nota final de la prueba será la parte proporcional de la puntuación obtenida sobre la puntuación máxima.

| | | | | |
|------------|---|---|---|-------|
| Ejercicio: | 1 | 2 | 3 | Total |
| Puntos: | 4 | 4 | 2 | 10 |

1. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ (x - a)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que f es continua en su dominio (2 puntos)

$$\begin{aligned} \text{Solución: } f &= \begin{cases} ax^2 - 1 & \text{for } x < 1 \\ (-a + x)^2 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f &= a - 1 \wedge \lim_{x \rightarrow 1^-} f = (1 - a)^2 \rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = 1, a = 2 \end{aligned}$$

- (b) Para $a = \frac{1}{2}$, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica con el eje de las x (2 puntos)

$$\begin{aligned} \text{Solución: } \frac{x^2}{2} - 1 &= 0 \rightarrow x = -\sqrt{2} \\ (x - \frac{1}{2})^2 &\rightarrow x = \frac{1}{2} = 0 \notin x \geq 1 \end{aligned}$$

2. Dada la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$: (1 punto)

- (a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que pase por el punto $(2, 4)$ y tenga un extremo relativo en ese punto. (2 puntos)

$$\begin{aligned} \text{Solución: } \begin{cases} f(2) = 4 \\ f'(2) = 0 \end{cases} &\rightarrow f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \rightarrow \begin{cases} 2a + \frac{b}{2} = 4 \\ a - \frac{b}{4} = 0 \end{cases} \rightarrow \\ a = 1 \wedge b &= 4 \end{aligned}$$

- (b) Justifica qué tipo de extremo relativo es (máximo relativo o mínimo relativo) (1 punto)

Solución: $f''(x) = \frac{2b}{x^3} \rightarrow f''(2) = \frac{b}{4} \rightarrow f''(2) = \frac{4}{4} = 1 > 0 \rightarrow$
MINREL

3. Sea la función $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$:

(a) Determine sus asíntotas

(1 punto)

Solución: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2-x+1}{x-1} \right) = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2-x+1}{x-1} \right) = \infty \rightarrow$
 $x = 1 A.V.$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x-1} \right) = \infty \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x-1} \right) = -\infty \rightarrow \nexists A.H.$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x^2-x+1}{x^2-x} \right) = 1 \rightarrow m = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) =$
 $0 \rightarrow y = x A.O.$

(b) Calcule $f'(2)$

(1 punto)

Solución: $f'(x) = \frac{x(x-2)}{x^2-2x+1} \rightarrow f'(2) = 0$

4. 22.2.2 Se considera la función $f(x) = \frac{10}{x^2+2x-3}$:

(a) Determine el dominio de f y sus asíntotas

(1 punto)

(b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos

(1 punto)