重心坐标与有理表示在初等欧氏几何中的应用

creasson

2020 年 1 月 22 日

前言

经过两千年的探索, 初等几何的绝大多数性质和定理已被发现, 给人以绚烂奇妙之美。这过程中, 人们所采用的方法不尽相同, 有综合法、重心坐标、向量法、直角坐标、复数法、射影法、割补法、反演法、参数法、极坐标等等。每种方法都有其巧妙的应用, 但似乎又都有不足之处:

综合法依赖于巧妙的辅助点/线构造和大量已知的定理结论;

重心坐标的表示虽然优美但形式不够统一, 也不太适合处理角度问题;

向量法直观但应用面窄;

直角坐标依赖于大量繁杂的计算;

复数法处理旋转很方便, 但处理平分角/内心/切线问题感觉困难;

射影法处理相交/相切挺方便, 但又不考量长度/角度;

其余如割补法、反演法、参数法、极坐标等仅有小范围应用。

因其繁复, 精通甚难, 让人有高山仰止之感, 但塔斯基明确地指出：初等几何范围内的命题可以通过机械方法判定, 也就是说, 初等几何的理论范畴已经明确, 也正因为如此, 顶级数学家大都转向了其他领域, 只剩下少数爱好者和有志于初等几何应用的人继续研究。

我国的吴文俊院士于 1977 年成功开创机械证明的先河, 采用解析几何和伪除理论证明了大量非平凡的几何命题，但证明过程尚难适合人类阅读。后来张景中院士、高小山、周咸青等教授将这一思想继续发扬，并应用重心坐标、向量法、复数法、质点法、面积法等，极大地简化了证明过程，部分已可媲美人类的几何证明。

本书主要基于重心坐标和有理参数表示，对初等欧氏几何做一个较系统地介绍和解构，其中平面部分主要利用向量旋转的复数表示进行处理，圆锥曲线部分和二次曲面部分直接应用二阶的有理分式表示。

书中通过大量示例详细说明如何进行一般化的表示和计算，并基本按照命题的文字叙述来施行，因而过程是适合阅读的。底层基于重心坐标, 在平面几何部分将重心坐标转化为向量, 再结合复数表示的旋转缩放变换进行计算和处理, 在圆锥曲线部分和二次曲面部分直接应用二阶的有理分式表示。

写书过程中得到了彭翕成先生的帮助，在此予以感谢！另外本书的题目素材有相当一部分取自于几何吧、纯几何吧、数学研发论坛, 在此一并感谢广大网友！

特别感谢我的爱人为我默默的付出与支持！

谨以本书献给我最敬爱的爷爷！

0.1 简介

本书基于重心坐标和有理参数表示对初等欧氏几何的内容做了一个较全面的解构。下面简要叙述其主要内容:

第一章: 简单介绍了重心坐标及简单应用, 主要包括向量的运算和性质、莱布尼茨距离公式, 后文也是基于此展开讨论。

第二章: 根据平面向量的旋转缩放可用复数简洁表示这一特性，引入了平面向量的共轭乘积运算，而后对平面几何 (不包括圆锥曲线) 的主要研究对象和经典几何结构的表示进行了深入探讨。

基于有理表示和复数运算，我们给予了历史上的著名定理和近现代发现的几何命题的一个全新证明。

这些证明是纯代数的, 基本遵循题目描述机械式地进行。证明过程中不引入题目描述之外的辅助点或线, 也不引用其他的几何结论。

对于绝大多数命题 (包括莱莫恩定理、莫利定理、泰博定理、沢山定理、五圆定理、开世定理等), 其证明步数与综合法基本相当, 相应程序 (本书基于 Mathematica) 的运算在 1 秒以内。

本章也对一些平面几何猜想予以了证明，其中最显著的是四边形的四内心共圆命题:

XXXXXXXXXXXXXX

本章最后对平面几何命题的自动发现进行了简要叙述和总结。

第三章：主要讨论圆锥曲线。给出了圆锥曲线在重心坐标表示下的分类与简化, 以及不同条件描述下圆锥曲线的有理表示和相关命题的证明。

特别地，本章将给出一般圆锥曲线焦点计算的复数方程, 一般双心多边形的闭合条件, 同心椭圆的彭赛列多边形闭合条件等。

第四章：简单介绍了有理三次曲线及更高次有理曲线的表示。

第五章：介绍了重心坐标在四面体中的应用。

第六章：主要讨论二次曲面。给出了二次曲面在重心坐标表示下的分类与简化，以及二次曲面的有理参数表示。

特别地，本章讨论了三角形二次曲面片的有理参数表示和光滑拼接, 这在计算机辅助几何设计上有广泛应用。

另外，本章提出了曲线/曲面表示的有理表示方面的几个猜想 (限于本人水平, 尚不知命题是否已证), 期待专业人士予以解答。

第七章：简单介绍了二次型、高次有理曲面和方程组的参数表示。

通过以上内容, 我们可以看到, 初等欧氏几何的绝大部分内容属于 0 亏格曲线/曲面, 由此可以自然而明确地将初等欧氏几何纳入代数几何 (双有理几何) 的范畴。

本书目录如下：

内容示例如下：

目录

目录

第一章 重心坐标

移出四面体的内容

1.1 重心坐标表示

n 维欧式空间中, 任意一点可表示为 $n+1$ 个非线性相关的点的线性组合, 即:

$$P = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + ... + \lambda_n A_n$$

其中 $\lambda_k (k = 0, 1, ..., n)$ 为实数, 且 $\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$。
$(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ 称为 P 关于 $(A_0, A_1, ..., A_n)$ 的重心坐标, λ_k 称为 P 在 A_k 处的重心坐标分量。

一般我们只是处理低维空间的情形:
1. 如果 P 在过两点 A, B 的直线上, 则 $P = \lambda A + \mu B$, 其中 $\lambda + \mu = 1$, 此时往往也写作 $P = \lambda A + (1 - \lambda) B$
2. 如果 P 在三点 A, B, C 所在的平面上, 则 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$, 其中 $\alpha + \beta + \gamma = 1$
3. 如果 P 在四点 A, B, C, D 所在的空间中, 则 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$, 其中 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$

重心坐标具有良好的几何意义:
1. 直线情形下, $\lambda : \mu = \overline{BP} : \overline{PA}$, 其中 $\overline{PA}, \overline{BP}$ 表示有向线段长。
2. 平面情形下, $\alpha : \beta : \gamma = S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP}$, 其中 $S_{PBC}, S_{APC}, S_{ABP}$ 表示有向面积。
3. 空间情形下, $\alpha : \beta : \gamma : \delta = V_{PBCD} : V_{APCD} : V_{ABPD} : V_{ABCP}$, 其中 $V_{PBCD}, V_{APCD}, V_{ABPD}, V_{ABCP}$ 表示有向体积。
以上可见于 XX 书...

1.2 向量表示

具有方向和长度的量称为向量。
在欧氏几何中, 我们一般将起点 A, 终点 B 之间的有向线段称为向量, 记作 $\overrightarrow{AB}$, 表示 B 点与 A 点的差: $B - A$.
有时, 为了书写的简便, 或在未明确起点和和终点时, 我们也仅用字母带箭头表示向量: $\vec{a}$, 或用加粗的字母表示: $\boldsymbol{a}$。

向量满足加法定律: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
由这个定义, 重心坐标的表示也可以转化为向量的关系表示:
在 $P = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + ... + \lambda_n A_n$ 的两端同时减去点 Q, 利用 $\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$, 即可得到:

$$\overrightarrow{QP} = \lambda_0 \overrightarrow{QA_0} + \lambda_1 \overrightarrow{QA_1} + ... + \lambda_n \overrightarrow{QA_n}$$

当 Q 为 $A_0, A_1, ...A_n$ 中的某个点时, 可减少其中一个参量, 使得表示形式更为简洁。
例如, 对于直线情形: $P = \lambda A + \mu B$, 可写为 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BA}$
对于平面情形: $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$, 可写为 $\overrightarrow{BP} = \alpha \overrightarrow{BA} + \gamma \overrightarrow{BC}$
我们将在本书中大量使用向量作为基本表示进行运算。

1.3　向量的运算

模长 向量 $\vec{AB}$ 的长度称为向量的模长, 记做 $AB = |\vec{AB}|$

内积 向量内积 (点乘 $\cdot$): 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的点乘是一个标量: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$, 其中 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角。

向量内积满足交换律: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

若向量 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 那么由 $|\boldsymbol{c}|^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 可得

$$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{c}|^2 \tag{1.1}$$

外积 向量外积 (叉乘 $\times$): 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的叉乘 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个矢量: 其模长 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, 其中 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角。

几何意义为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 定义的平行四边形面积，其方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的平面垂直, 且遵循右手定则。

向量外积满足反交换律: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

混合积 在三维空间中，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积定义为: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$, 其几何意义为三个向量定义的平行六面体的有向体积。

拉格朗日恒等式:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{1.2}$$

根据这个式子，又可得到:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}) \tag{1.3}$$

以上运算在定义上并不依赖于具体坐标的选取, 关于直角坐标系下的具体计算, 读者可参考 XX 书，这里不列出。

1.4　距离公式

根据向量的内积定义, 可以得到重心坐标距离计算式:

若 $P = \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i A_i$, 其中 $\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i = 1$, Q 是欧氏空间中任意一点, 那么

$$PQ^2 = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i A_i Q^2 - \sum_{0\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j {A_iA_j}^2 \tag{1.4}$$

又若 $Q = \sum\limits_{i=0}^{n}\mu_i A_i$, 其中 $\sum\limits_{i=0}^{n}\mu_i = 1$, 那么

$$PQ^2 = -\sum_{0\le i<j\le n}(\lambda_i-\lambda_j)(\mu_i-\mu_j){A_iA_j}^2 \tag{1.5}$$

证明:

$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= (Q - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i) \cdot (Q - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i) \\
&= (\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_i Q}) \cdot (\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_i Q}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} {\lambda_i}^2 A_i Q^2 + 2 \sum_{0 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j \overrightarrow{A_i Q} \cdot \overrightarrow{A_j Q} \\
&= \sum_{i=0}^{n} {\lambda_i}^2 A_i Q^2 + \sum_{0 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j (A_i Q^2 + A_j Q^2 - A_i {A_j}^2) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i Q^2 (\lambda_i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j + \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_j) - \sum_{0 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j A_i {A_j}^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i Q^2 - \sum_{0 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j A_i {A_j}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i Q^2 - \sum_{0 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j A_i {A_j}^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (\sum_{j=0}^{n} \mu_j A_i {A_j}^2 - \sum_{0 \le j < k \le n} \mu_j \mu_k A_j {A_k}^2) - \sum_{0 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j A_i {A_j}^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j A_i {A_j}^2 - \sum_{0 \le i < j \le n} \mu_i \mu_j A_i {A_j}^2 - \sum_{0 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j A_i {A_j}^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mu_i A_i {A_i}^2 + \sum_{0 \le i < j \le n} (\lambda_i \mu_j + \lambda_j \mu_i - \lambda_i \lambda_j - \mu_i \mu_j) A_i {A_j}^2 \\
&= - \sum_{0 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)(\mu_i - \mu_j) A_i {A_j}^2
\end{aligned}
$$

特别地, 对于平面情形, 给定平面上不共线的三点 A, B, C, 若 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$, 其中 $\alpha + \beta + \gamma = 1$, 则

$$PQ^2 = \alpha AQ^2 + \beta BQ^2 + \gamma CQ^2 - \left(\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2\right) \tag{1.6}$$

又 $Q = \alpha' A + \beta' B + \gamma' C$, 其中 $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$, 则

$$PQ^2 = -\left(\alpha - \alpha'\right)\left(\beta - \beta'\right) AB^2 - \left(\beta - \beta'\right)\left(\gamma - \gamma'\right) BC^2 - \left(\gamma - \gamma'\right)\left(\alpha - \alpha'\right) CA^2 \tag{1.7}$$

对于空间情形, 给定空间中不共面的四点 A, B, C, D, 若 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$, 其中 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$, 则

$$PQ^2 = \alpha AQ^2 + \beta BQ^2 + \gamma CQ^2 + \gamma DQ^2 - \left(\alpha\beta AB^2 + \alpha\gamma AC^2 + \alpha\delta AD^2 + \beta\gamma BC^2 + \beta\delta BD^2 + \gamma\delta CD^2\right) \tag{1.8}$$

又 $Q = \alpha' A + \beta' B + \gamma' C + \delta' D$, 其中 $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 1$, 则

$$
\begin{aligned}
PQ^2 = &-\left(\alpha - \alpha'\right)\left(\beta - \beta'\right) AB^2 - \left(\alpha - \alpha'\right)\left(\gamma - \gamma'\right) AC^2 - \left(\alpha - \alpha'\right)\left(\delta - \delta'\right) AD^2 \\
&- \left(\beta - \beta'\right)\left(\gamma - \gamma'\right) BC^2 - \left(\beta - \beta'\right)\left(\delta - \delta'\right) BD^2 - \left(\gamma - \gamma'\right)\left(\delta - \delta'\right) CD^2
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

特别地, 对于三角形 ABC，取 Q 为三角形的外心 O, P 为三角形外接圆上的一点 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$, 那么根据

$$OP^2 = \alpha OA^2 + \beta OB^2 + \gamma OC^2 - (\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2)$$

以及 $OP = OA = OB = OC = R$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, 立即可得

$$\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2 = 0 \tag{1.10}$$

同理, 对于四面体 $ABCD$，若 P 为其外接球上的一点 $P=\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D$, 则

$$\alpha\beta AB^2+\alpha\gamma AC^2+\alpha\delta AD^2+\beta\gamma BC^2+\beta\delta BD^2+\gamma\delta CD^2=0 \tag{1.11}$$

1.5　应用示例

求异面直线夹角

已知四面体 $ABCD$ 的各棱长, 求异面直线 AB 与 CD 的夹角。
解：根据 $|\vec{AB}\cdot\vec{CD}|=AB\cdot CD\cos\theta$, 我们需要计算向量的内积。
利用 $\vec{CD}=\vec{AD}-\vec{AC}$, 即有

$$\begin{aligned}\vec{AB}\cdot\vec{CD}&=\vec{AB}\cdot\vec{AD}-\vec{AB}\cdot\vec{AC}\\&=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2}-\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}\\&=\frac{AD^2+BC^2-BD^2-AC^2}{2}\end{aligned}$$

因此

$$\cos\theta=\frac{|AD^2+BC^2-BD^2-AC^2|}{2AB\cdot CD}$$

求三角形的外接圆

已知三角形 ABCd 的三边长 $a=BC, b=CA, c=AB$, 求三角形 ABC 外接圆圆心 O 和半径 R 的表示。
解: 令 $O=\alpha A+\beta B+\gamma C, (\alpha+\beta+\gamma=1)$, 则由 (1.6 式) 有

$$\begin{cases}OA^2=R^2=\beta c^2+\gamma b^2-\left(\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2\right)\\OB^2=R^2=\gamma a^2+\alpha c^2-\left(\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2\right)\\OC^2=R^2=\alpha b^2+\beta a^2-\left(\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2\right)\end{cases}$$

以上三式分别乘以 α,β,γ 后相加, 利用 $\alpha+\beta+\gamma=1$ 的条件即有

$$R^2=\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2$$

于是方程组可化为

$$\begin{cases}2R^2=\beta c^2+\gamma b^2\\2R^2=\gamma a^2+\alpha c^2\\2R^2=\alpha b^2+\beta a^2\\\alpha+\beta+\gamma=1\end{cases}$$

这是一个线性方程组, 解之即得

$$O=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)A+b^2(c^2+a^2-b^2)B+c^2(a^2+b^2-c^2)C}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$$

求三角形的内切圆

求特征点之间的距离

已知三角形 ABC 的内心 I 的重心坐标表示为

$$I=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$$

由 (1.6 式) 即知内心 I 与外心 O 的距离平方为

$$OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$$

其中 R 为外接圆半径。

同样地, 对于四面体 $ABCD$, 记 S_1, S_2, S_3, S_4 分别为四个侧面三角形 BCD, CDA, DAB, ABC 的面积, 根据内切球球心的重心坐标

$$I = \frac{S_1A + S_2B + S_3C + S_4D}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}$$

则由 (1.8 式) 知, I 与外接球球心 O 的距离平方为

$$OI^2 = R^2 - \frac{S_1S_2AB^2 + S_1S_3AC^2 + S_1S_4AD^2 + S_2S_3BC^2 + S_2S_4BD^2 + S_3S_4CD^2}{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2}$$

其中 R 为外接球半径。

求三角形顶点的垂线

已知三角形 ABCd 的三边长 $a = BC, b = CA, c = AB$, 求点 A 在 BC 边上的垂足点 D 及 AD。
解: 设 $D = \lambda B + (1-\lambda)C$, 由 (1.6 式) 有

$$AD^2 = \lambda c^2 + (1-\lambda)b^2 - \lambda(1-\lambda)a^2$$

因为 AD 的长度是 A 到 BC 边上点的距离的最小值, 对上式求导得到极值条件

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}$$

于是

$$D = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}B + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2}C$$

$$AD = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2a}$$

已知点到三角形顶点的距离求其重心坐标

三角形 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点 P 到各顶点的距离分别为 $l = PA, m = PB, n = PC$, 记三角形边长为 $a = BC, b = CA, c = AB$, 求 P 关于 $\triangle ABC$ 的重心坐标。
解: 令 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C, (\alpha + \beta + \gamma = 1)$
由距离公式即有

$$\begin{cases} l^2 = PA^2 = \beta c^2 + \gamma b^2 - (\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2) \\ m^2 = PB^2 = \gamma a^2 + \alpha c^2 - (\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2) \\ n^2 = PC^2 = \alpha b^2 + \beta a^2 - (\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2) \end{cases}$$

以上三式分别乘以 α, β, γ 后相加, 利用 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 的条件即有

$$\alpha l^2 + \beta m^2 + \gamma n^2 = \alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2$$

因此我们可重写方程组为

$$\begin{cases} l^2 = -\alpha l^2 + \beta(c^2 - m^2) + \gamma(b^2 - n^2) \\ m^2 = \alpha(c^2 - l^2) - \beta m^2 + \gamma(a^2 - n^2) \\ n^2 = \alpha(b^2 - l^2) + \beta(a^2 - m^2) - \gamma n^2 \\ 1 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

这是一个线性方程组，我们可以选择其中任意三个解出 α, β, γ。

而要保证方程组是自洽的，需使得

$$\begin{vmatrix} -l^2 & c^2-m^2 & b^2-n^2 & l^2 \\ c^2-l^2 & -m^2 & a^2-n^2 & m^2 \\ b^2-l^2 & a^2-m^2 & -n^2 & n^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

事实上，如果我们将 $P-ABC$ 看做一个退化的四面体，则由四面体体积为 0 可得到与此等价的条件式。

1.6　向量的旋转缩放

对于给定两个的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 我们容易想到的是，其中一向量可由另一向量旋转缩放而来：若将向量的尾端移到一起 (根据向量的平移不变性，这总是允许的), 则两向量将位于同一平面，旋转的方向也在这平面之上，旋转的角度为向量间的夹角, 缩放的比例为向量模长之比。这使我们可以确信：这个旋转缩放是唯一的。问题是如何表示它呢？

平面上向量的旋转缩放变换在许多书本上都有介绍：在直角坐标系系, 若向量 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 记 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间的夹角, r 为向量模长之比 $r=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$(下同), 则旋转缩放变换可用一个二维矩阵表示：$T=\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, 写作矩阵乘法即为 $\boldsymbol{b}=T\boldsymbol{a}$。

而如果平面上的向量是用复数表示的: $\boldsymbol{a}=x_1+iy_1, \boldsymbol{b}=x_2+iy_2$, 那么旋转缩放变换也可用一个复数来表示：$z=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\sin\theta$, 写作复数乘法即为 $\boldsymbol{b}=z\boldsymbol{a}$

这两种表示没有本质上的不同：它们各自的旋转缩放变换全体构成一个群, 满足加法/乘法的分配律和交换律, 并且是完全同构的。

在三维空间中，表示就不这么容易了，但我们从平面情形的表示式已可看出，这个变换与向量的内积和外积有极大的关联，注意到拉格朗日的向量积公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

取 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$, 即有 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$, 于是得到

$$\boldsymbol{b}=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

也即是, 若已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ 为垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在平面的单位向量), 以及向量 $\boldsymbol{a}$, 就可以完全确定另一向量：

$$\boldsymbol{b}=r\cos\theta\boldsymbol{a}+r\sin\theta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}$$

这个表达式在形式上与平面情形是极为相近的。

更一般的, 综合向量的内积和外积运算，Clifford 发展了一套完整的几何代数系统, 称为 Clifford 代数, 在诸多方面已有广泛应用。

第二章　初等平面几何

在上一章中, 我们已阐述了平面上的一向量可由另一向量经旋转缩放变换得到, 其被广为接受有矩阵和复数两种表示形式，但在应用上，并不显得特别直观，我们希望结合向量表示的直观性与复数的运算方便性，因此这里对其进行适当的形式改造, 根据向量的矩阵表示与复数表示等价，以及旋转缩放变换的矩阵表示与复数表示完全同构的性质，定义复数作用于向量的运算: $\boldsymbol{b} = z \circ \boldsymbol{a}$。在复平面上, 向量取复数形式时，也就是通常的复数乘法运算。为了表示的简洁, 我们省去中间的运算符 $\circ$, 即 $\boldsymbol{b} = z\boldsymbol{a}$。为避免歧义, 我们总是将复数 z 写在向量的前面, 表示由 z 确定的旋转缩放变换作用于向量。在平面几何的范围内, 除非特别指出，一般我们不规定向量的具体表示形式。

此种表示的好处是：它将旋转缩放变换与向量在表示上分离开来, 使得我们可以更直观地看到点与点之间的联系, 以及向量与向量之间的变换，可以直观地表示向量的链式运算: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, 也可以将向量拆分为点之间的相减形式: $\vec{AB} = B - A$。

2.1　平面向量的运算及性质

2.1.1　运算

加法

加法遵循以下两条规则：

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \tag{2.1}$$

$$z_1\boldsymbol{a} + z_2\boldsymbol{a} = (z_1 + z_2)\boldsymbol{a} \tag{2.2}$$

共轭乘积

综合向量的内积与外积运算, 我们定义向量的共轭乘积为：

$$\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta + i|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta \tag{2.3}$$

其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 逆时针旋转为向量 $\boldsymbol{b}$ 所转过的角度。

共轭乘积的实部 $\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a})$ 即为通常的内积值。

共轭乘积的虚部 $\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a})$ 即为通常的外积值, 也是向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 构成的平行四边形的有向面积。

由此定义，若 $\boldsymbol{b} = z\boldsymbol{a}$, 则有

$$\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} = z|\boldsymbol{a}|^2 \tag{2.4}$$

特别地，$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a}$ 为向量的模长平方。

另外也可得到：若 $\boldsymbol{b} = z_1\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} = z_2\boldsymbol{a}$, 则

$$\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{c} = z_1\,\bar{z_2}\,\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a} \tag{2.5}$$

除法

对于任意非 0 的向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$, 它们之间的旋转缩放变换 z 是唯一的, 因此可以定义非 0 向量的向量除法：

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = z \tag{2.6}$$

根据 (2.4) 式, 向量的除法也可用共轭乘积来定义：

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2} \tag{2.7}$$

一般来讲, 两个向量直接乘积的几何意义是不明确的, 我们不对向量的直接乘积做定义，这也并不影响平面几何的研究。

2.1.2　性质

交换性质

$$\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\right)=\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\right) \tag{2.8}$$

$$\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\right)=-\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\right) \tag{2.9}$$

向量垂直

若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互垂直, 则它们的内积为 0, 也即

$$\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\right)=0 \tag{2.10}$$

如果令 $\boldsymbol{b}=z\boldsymbol{a}$, 则由共轭乘积知: $\mathrm{Re}\left(z\right)=0$, 也即当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互垂直时, 可设 $\boldsymbol{b}=\lambda i\boldsymbol{a}$, ($\lambda$ 为实数)。

向量平行

若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互平行, 则它们的外积为 0, 也即

$$\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\right)=0 \tag{2.11}$$

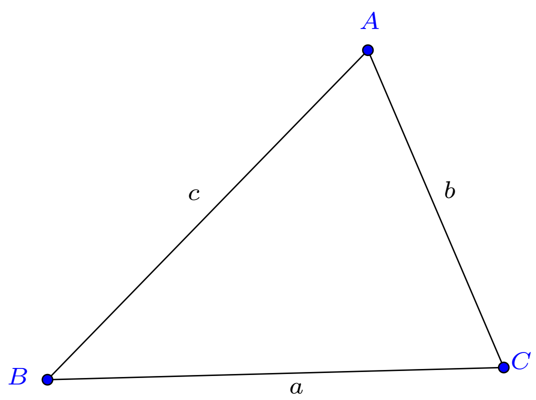
如果令 $\boldsymbol{b}=z\boldsymbol{a}$, 则由共轭乘积知: $\mathrm{Im}\left(z\right)=0$, 也即当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互平行时, 可设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, ($\lambda$ 为实数)。

2.2　三角形

三角形是平面几何中最重要的一类研究对象, 目前公开定义的三角形特征点已有两万多个, 性质丰富。

本节我们将利用三角形特有的性质, 采用适宜的形式表示顶点, 进而讨论在选定的表示下, 如何表示三角形特征点。

按照约定俗成, 一般三角形的顶点按照逆时针标示 $\triangle ABC$, 三角形的边长分别记为: $a=BC,b=CA,c=AB$。



2.2.1　三角形的表示

三角形顶点的表示有多种形式, 被广泛采用的是直接设为直角坐标的形式：$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),C\left(x_3,y_3\right)$, 这个表示可以描述平面上任意一个三角形的顶点。

在复平面上, 则通常用复数 A,B,C 来表示三角形的顶点：$A=x_1+iy_1,B=x_2+iy_2,C=x_3+iy_3$。

对于多数问题, 固定三角形的两个顶点对结论不造成影响, 此时一般设 $B(0,0), C(0,1)$(复平面上则是 $B=0, C=1$), 也有设为其他形式的：例如取 $B(-1,0), C(1,0)$, 或将顶点都设定在单位圆上。

在我们的体系中, 利用向量的旋转缩放, 一般将三角形的一边作为基向量, 另一边视为基向量的旋转缩放：$\vec{BA}=z\vec{BC}$, 这个表示的好处是, 保留了点的表示, 几何意义更直观, 所使用的参数也仅有复数 z 表示的旋转缩放变换。如果是在复平面上, 固定 $B=0, C=1$, 则 $A=z$, 也就是通常的特殊设点形式, 而在必要的时候, 我们可以方便地转化到一般形式, 这只需要利用 $z=\frac{\vec{BA}}{\vec{BC}}=\frac{A-B}{C-B}$ 即可。

2.2.2 三角形的面积

三角形 ABC 的面积为平行四边形面积的一半, 也即

$$S=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{AB}\otimes\vec{AC})=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{BC}\otimes\vec{BA})=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{CA}\otimes\vec{CB}) \tag{2.12}$$

再利用向量加法及交换性质：

$$\begin{aligned}
S&=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{AB}\otimes\vec{AC})=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{AB}\otimes(\vec{BC}-\vec{BA}))=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{AB}\otimes\vec{BC})\\
S&=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{AB}\otimes\vec{AC})=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}((\vec{AC}+\vec{CB})\otimes\vec{AC})=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{CB}\otimes\vec{AC})=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{BC}\otimes\vec{CA})\\
S&=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{AB}\otimes\vec{AC})=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{AB}\otimes\vec{CA})=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{CA}\otimes\vec{AB})
\end{aligned}$$

三式相加即有对称表示形式：

$$S=-\frac{1}{6}\mathrm{Im}(\vec{AB}\otimes\vec{BC}+\vec{BC}\otimes\vec{CA}+\vec{CA}\otimes\vec{AB}) \tag{2.13}$$

如果给定平面上的另一点 O, 利用同样的方法，可以导出：

$$S=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{OA}\otimes\vec{OB}+\vec{OB}\otimes\vec{OC}+\vec{OC}\otimes\vec{OA}) \tag{2.14}$$

如果 $\triangle ABC$ 所在平面另有逆时针三角形 XYZ, 那么利用向量加法：

$$\begin{cases}
\vec{XY}=\vec{BY}-\vec{AX}+\vec{AB}\\
\vec{YZ}=\vec{CZ}-\vec{BY}+\vec{BC}\\
\vec{ZX}=\vec{AX}-\vec{CZ}+\vec{CA}
\end{cases}$$

及 (2.12) 式又可导出：

$$S_{XYZ}=S_{ABC}-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{BC}\otimes\vec{AX}+\vec{CA}\otimes\vec{BY}+\vec{AB}\otimes\vec{CZ})-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\vec{AX}\otimes\vec{BY}+\vec{BY}\otimes\vec{CZ}+\vec{CZ}\otimes\vec{AX}) \tag{2.15}$$

2.2.3 三角形的基本问题

三点共线

若 A,B,C 三点共线, 由向量平行或三点构成的三角形面积为 0, 可得以下两种常用的判别式：

$$\mathrm{Im}(\vec{BA}\otimes\vec{BC})=0 \quad 或 \quad \mathrm{Im}(\frac{A-B}{C-B})=0 \tag{2.16}$$

$$\mathrm{Im}(\vec{OA}\otimes\vec{OB}+\vec{OB}\otimes\vec{OC}+\vec{OC}\otimes\vec{OA})=0 \tag{2.17}$$

Ceva 定理

在三角形 ABC 内任取一点 O, 延长 AO, BO, CO 分别交对边于 D,E,F, 则 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$

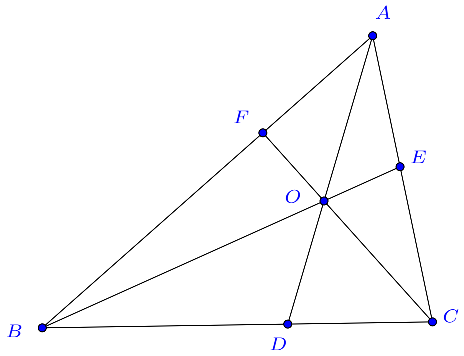


图 2.1: Ceva 定理

证明: 设 $\vec{BA} = z\,\vec{BC}, \quad \vec{BO} = w\,\vec{BC}$。
因 D, E, F 分别在 BC, CA, AB 上, 又可设

$$\vec{BD} = \lambda\,\vec{BC}, \quad \vec{BE} = (1-\mu)\,\vec{BC} + \mu\,\vec{BA}, \quad \vec{BF} = (1-\nu)\,\vec{BA}$$

由 A, O, D 三点共线:

$$\mathrm{Im}(\frac{A-O}{A-D}) = \mathrm{Im}(\frac{\vec{BA}-\vec{BO}}{\vec{BA}-\vec{BD}}) = \mathrm{Im}(\frac{z-w}{z-\lambda}) = 0$$

解出

$$\lambda = \frac{-z\,\bar{w} + w\,\bar{z}}{w - z - \bar{w} + \bar{z}}$$

同理由 B, O, E 三点共线和 C, O, F 三点共线解出:

$$\mu = \frac{w - \bar{w}}{w - \bar{w} + z\,\bar{w} - w\,\bar{z}}, \quad \nu = \frac{z - \bar{z} - w + \bar{w} - z\,\bar{w} + w\,\bar{z}}{z - \bar{z} - z\,\bar{w} + w\,\bar{z}}$$

将以上代入即可知

$$\frac{\vec{BD}}{\vec{DC}}\frac{\vec{CE}}{\vec{EA}}\frac{\vec{AF}}{\vec{FB}} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\nu}{1-\nu} = 1$$

两直线的交点

若直线 AB 与直线 CD 相交于点 E, 可设 $\vec{AE} = \lambda\,\vec{AB}$

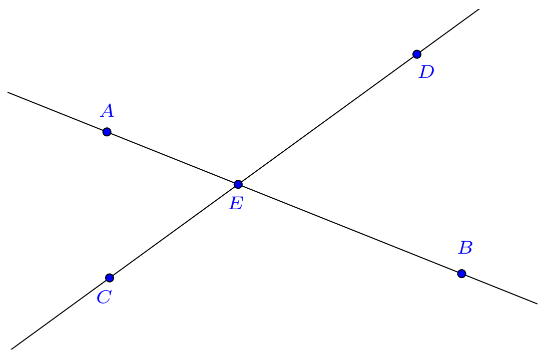


图 2.2: 两直线交点

解: 因为 C, D, E 三点共线, 由 2.21 式，即有：

$$0 = \mathrm{Im}(\vec{CD} \otimes \vec{CE}) = \mathrm{Im}(\vec{CD} \otimes (\vec{AE} - \vec{AC})) = \lambda \mathrm{Im}(\vec{CD} \otimes \vec{AB}) - \mathrm{Im}(\vec{CD} \otimes \vec{AC})$$

由此求出 λ, 也就求出了 E 点[1]:

$$E = A + \frac{\mathrm{Im}(\vec{CD} \otimes \vec{AC})}{\mathrm{Im}(\vec{CD} \otimes \vec{AB})}\,(B - A)$$

例如，复平面上，已知直线 l_1 经过 $A = 1 + i, B = 3 + 4i$ 两点, 直线 l_2 经过 $C = 2i, D = 1 - 2i$ 两点，则由上式可得 l_1 与 l_2 的交点为：

$$E = 1 + i + \frac{\mathrm{Im}((1-4i) \otimes (-1+i))}{\mathrm{Im}((1-4i) \otimes (2+3i))}\,(2 + 3i) = \frac{5}{11} + \frac{2i}{11}$$

Ceva 逆定理

如图2.1, 三角形 ABC, D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 上, 若 $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$, 则 AD, BE, CF 三线共点。

证明：设 $\vec{BA} = z\,\vec{BC}$, 又设

$$\vec{BD} = \lambda\,\vec{BC}, \quad \vec{BE} = (1-\mu)\,\vec{BC} + \mu\,\vec{BA}, \quad \vec{BF} = (1-\nu)\,\vec{BA}$$

已知的条件 $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ 即成为

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\nu}{1-\nu} = 1$$

化为多项式形式则是

$$1 - \lambda - \mu + \lambda\mu - \nu + \lambda\nu + \mu\nu - 2\lambda\mu\nu = 0$$

我们再计算 AD, BE 的交点 O, 先设为

$$\vec{BO} = t\,\vec{BE} = (t - t\mu + t\mu z)\,\vec{BC}$$

由 A, O, D 三点共线:

$$\mathrm{Im}(\frac{A-O}{A-D}) = \mathrm{Im}(\frac{z - t + t\mu - t\mu z}{z - \lambda}) = \frac{(t - \lambda - t\mu + t\lambda\mu)(z - \bar{z})}{(z-\lambda)(\bar{z} - \lambda)} = 0$$

解得 $t = \frac{\lambda}{1-\mu+\lambda\mu}$, 于是

$$\vec{BO} = \frac{\lambda(1 - \mu + z\mu)}{1 - \mu + \lambda\mu}\,\vec{BC}$$

我们只需要再验证 C, O, F 三点共线即可, 代入前面的结果计算：

$$\mathrm{Im}(\frac{C-O}{C-F}) = \mathrm{Im}(\frac{1 - \lambda - \mu + 2\lambda\mu - z\lambda\mu}{(1-\mu+\lambda\mu)(1 - z + z\nu)}) = \frac{(1 - \lambda - \mu + \lambda\mu - \nu + \lambda\nu + \mu\nu - 2\lambda\mu\nu)(z - \bar{z})}{(1-\mu+\lambda\mu)(1-z+z\nu)(1-\bar{z}+\nu\,\bar{z})} = 0$$

于是命题得证。

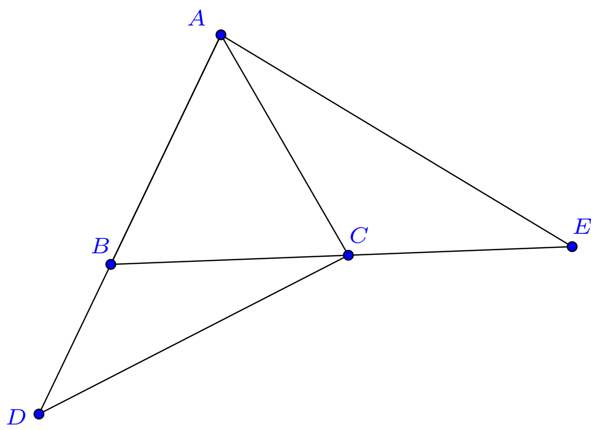
三角形相似与全等

三角形 ABC 与三角形 DEF 相似, 那么只需要分别计算 $z = \frac{\vec{BA}}{\vec{BC}}$ 和 $w = \frac{\vec{ED}}{\vec{EF}}$, 判别这二者是否相等即可。若两个三角形全等，则只需再检查其中一条对应边是否相等。

三角形相似题目,< 待校核 >

例. 等腰三角形 ABC 的两边 $AB = AC, D$ 在 AB 朝 B 方向的延长线上, E 在 BC 朝 C 方向的延长线上, 且 $\frac{DB}{DC} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$, 证明 $\triangle BDC$ 相似于 $\triangle CEA$。

[1]注：这里主要阐述此类问题的一般解决方式, 无须记住具体的计算式。



证明：根据题目的已知条件，利用复向量的旋转意义，可设：

$$\overrightarrow{AC} = z_1\,\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DC} = 2z_2\,\overrightarrow{DB}, \quad \overrightarrow{EA} = 2z_3\,\overrightarrow{EC}$$

其中复数 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 并且 $\mathrm{Im}(z_1) > 0, \quad \mathrm{Im}(z_2) < 0, \quad \mathrm{Im}(z_3) < 0$

由 (1),(2) 式相减, 再利用 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ 消去点 C, 得到：

$$(1 - z_1)\,\overrightarrow{AB} = (2z_2 - 1)\,\overrightarrow{BD}$$

因为 A, B, D 三点共线，所以有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{2z_2 - 1}{1 - z_1}\right) = 0$$

化简为

$$2z_1 - z_2 - z_1 z_2 + 2z_2^2 = 0$$

同样地, 由 (1), (3) 式消去点 A, 得

$$(1 - 2z_3 + 2z_1 z_3)\,\overrightarrow{EC} = z_1\,\overrightarrow{EB}$$

再由 B, C, E 三点共线知

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1 - 2z_3 + 2z_1 z_3}{z_1}\right) = 0$$

化简为

$$2z_1 - z_3 - z_1 z_3 + 2z_3^2 = 0$$

这两式消去 z_1, 得到

$$(z_2 - z_3)(1 - 2z_2 - 2z_3 + z_2 z_3) = 0$$

以下这段错误，需检查！

如果 $1 - 2z_2 - 2z_3 + z_2 z_3 = 0$,

为了利用条件，令

$$z_2 = \frac{1 + iu}{1 - iu}, z_3 = \frac{1 + iv}{1 - iv}$$

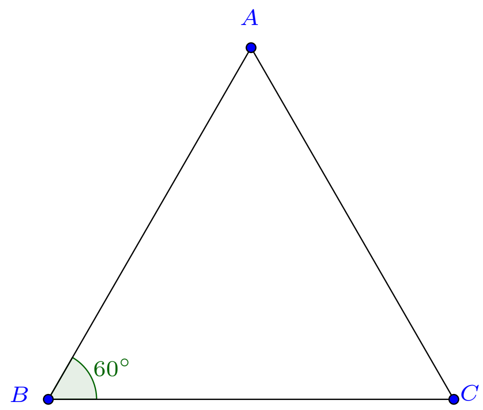
其中 $u > 0, v > 0$。

这里用到了有理表示, 不符合！

代入化简为 $1 + 3uv = 0$, 矛盾!

于是 $\frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{EC}}$ 这也就证明了 $\triangle BDC$ 相似于 $\triangle CEA$。

等边三角形



等边三角形的一个判别式是

$$\frac{A-B}{C-B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

另一个常用判别式为

$$\vec{OA}+\omega\,\vec{OB}+\omega^2\,\vec{OC}=0 \tag{2.18}$$

其中 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, O 为三角形所在平面上的任意一点。

2.2.4 第一类特征量

我们规定: 在三角形 ABC 所在平面上, 若 L 是三角形边长平方及面积 (a^2,b^2,c^2,S) 的有理表示, 则称其为 $\triangle ABC$ 的第一类特征量。

与之等价的表述是: 对三角形 ABC 及特征量 L , 设 $\vec{BA}=(x+yi)\,\vec{BC}$, 若 L 是关于 x,y,BC 的有理表示, 则称其为 $\triangle ABC$ 的第一类特征量。

证明: 事实上, 因为

$$\begin{aligned}&a^2=BC^2,\quad b^2=(x^2-2x+1+y^2)BC^2\\&c^2=(x^2+y^2)BC^2,\quad S=\frac{1}{2}yBC^2\end{aligned}$$

所以前者表述 $\subset$ 后者表述。

另一方面, 根据

$$x^2+y^2=\frac{c^2}{a^2},\quad x^2-2x+1+y^2=\frac{b^2}{a^2}$$

可解出

$$x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a^2},\quad y=\frac{2S}{a^2}$$

因而后者表述 $\subset$ 前者表述。这就说明了两种表述是等价的。

在 $\vec{BA}=z\,\vec{BC}$ 的表示下，不难得到如下三角形第一类特征量的表示:

(1) $b^2=(1-z)(1-\bar{z})a^2$　　(2) $c^2=z\,\bar{z}\,a^2$

(3) $\cos 2A=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{z}(1-z)}{z(1-\bar{z})}+\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1-z)}\right)$　　(4) $\sin 2A=\frac{1}{2i}\left(\frac{\bar{z}(1-z)}{z(1-\bar{z})}-\frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1-z)}\right)$　　(5) $\tan A=\frac{i(z-\bar{z})}{z+\bar{z}-2z\,\bar{z}}$

(6) $\cos 2B=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}\right)$　　(7) $\sin 2B=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right)$　　(8) $\tan B=-\frac{i(z-\bar{z})}{z+\bar{z}}$

(9) $\cos 2C=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\bar{z}}{1-z}+\frac{1-z}{1-\bar{z}}\right)$　　(10) $\sin 2C=\frac{1}{2i}\left(\frac{1-\bar{z}}{1-z}-\frac{1-z}{1-\bar{z}}\right)$　　(11) $\tan C=\frac{i(z-\bar{z})}{z+\bar{z}-2}$

上述式子适合计算机从标准的重心坐标表示导出, 读者不必记忆, 使用时按定义推导即可:

以 $\angle A$ 为例，由 $\vec{BA}=z\,\vec{BC}$ 可得

$$\vec{AC}=\frac{z-1}{z}\,\vec{AB}$$

根据顶点的旋转缩放表示一节 2.13 式, 即知

$$\frac{b}{c}e^{iA}=\frac{z-1}{z}$$

两端取共轭, 又有

$$\frac{b}{c}e^{-iA}=\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}}$$

这两式相除：

$$e^{i2A}=\frac{\bar{z}\left(1-z\right)}{z\left(1-\bar{z}\right)}$$

分别取实部和虚部即知 $\cos 2A$ 和 $\sin 2A$ 的表示, 再由 $\tan A=\frac{1-e^{i2A}}{1+e^{i2A}}i$ 得到 $\tan A$ 的表示。

对于诸如 $\sin A, \cos A, \tan\frac{A}{2}$ 的表示, 直接用 z 表示是不便的, 因为它涉及到根式，我们将在二阶有理代换一节中给出。

2.2.5　第一类特征点

我们规定: 在三角形 ABC 所在平面上, 若点 P 关于 $\triangle ABC$ 的重心坐标可表示为三角形边长平方及面积 (a^2, b^2, c^2, S) 的有理函数, 则称为 $\triangle ABC$ 的第一类特征点。

等价的表述是: 对三角形 ABC 及其所在平面上的一点 P, 设 $\vec{BA}=(x+yi)\,\vec{BC},\quad \vec{BP}=f\,\vec{BC}$, 若 f 为关于 x, y 的有理表示, 则称 P 为 $\triangle ABC$ 的第一类特征点。

通常情况下, 第一类特征量和第一类特征点是容易处理的, 因为不涉及开方运算。

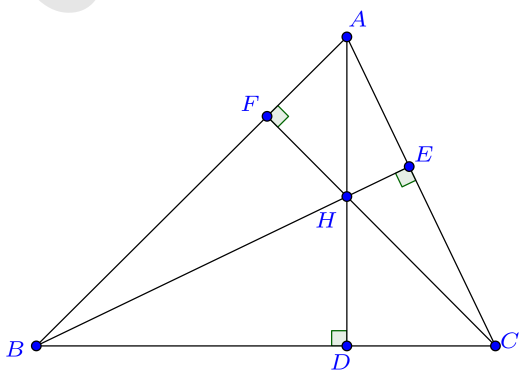
重心

三角形重心是三角形三条中线的交点。它的重心坐标是熟知的：$G=\frac{1}{3}(A+B+C)$, 故

$$\vec{BG}=\frac{1}{3}\left(1+z\right)\vec{BC}$$

垂心

三角形的三条高线的交点称为三角形的垂心。



解: 设垂心 H 为 $\vec{BH}=w\,\vec{BC}$,

A, H 在 BC 边上的投影是相同的, 因此有

$$\mathrm{Re}\left(z\right)=\mathrm{Re}\left(w\right)$$

再改写 $\vec{BC}=\frac{1}{z}\,\vec{BA}$, 于是

$$\vec{BH}=w\,\vec{BC}=\frac{w}{z}\,\vec{BA}$$

C, H 在 BA 边上的投影是相同的, 所以又有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{w}{z}\right)$$

联立解出 w, 即得

$$\vec{BH}=\frac{(z-1)(z+\bar{z})}{z-\bar{z}}\,\vec{BC} \tag{2.19}$$

在复平面上, 上式的一般复数点表示形式为:

$$H=\frac{(B-C)(B+C-A)\,\bar{A}+(C-A)(C+A-B)\,\bar{B}+(A-B)(A+B-C)\,\bar{C}}{(B-C)\,\bar{A}+(C-A)\,\bar{B}+(A-B)\,\bar{C}} \tag{2.20}$$

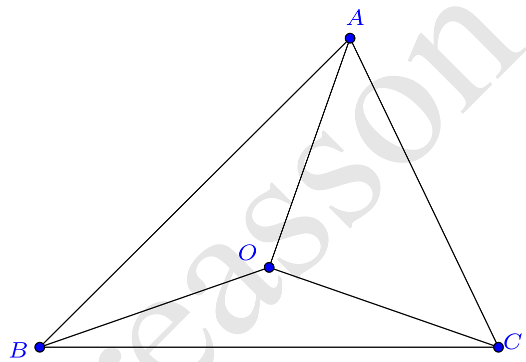
这只需要将 $z=\frac{A-B}{C-B}$ 代入化简即可得到。

相同的方法可求得垂心在三边的垂足点 D,E,F 分别为:

$$\vec{BD}=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right)\vec{BC},\quad \vec{BE}=\frac{z-\bar{z}}{2(1-\bar{z})}\,\vec{BC},\quad \vec{BF}=\frac{z+\bar{z}}{2\,\bar{z}}\,\vec{BC}$$

外心

外心是三角形三条边的垂直平分线的交点, 它到各顶点的距离相等。



解: 设外心 O 为 $\vec{BO}=w\,\vec{BC}$,

因为它在各边的投影点是各边的中点, 所以

$$\mathrm{Re}\,(w)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{Re}\left(\frac{w}{z}\right)=\frac{1}{2}$$

联立即可解出 w, 从而

$$\vec{BO}=\frac{z(1-\bar{z})}{z-\bar{z}}\,\vec{BC} \tag{2.21}$$

由此可得知复平面上过三点的圆的圆心为:

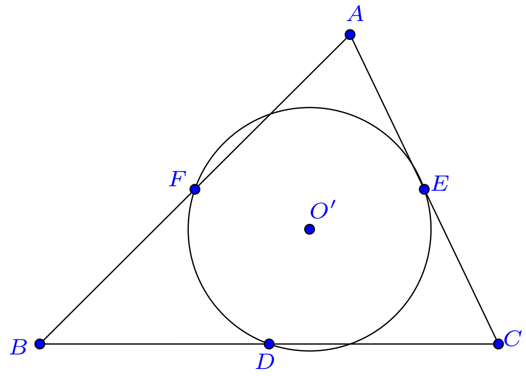
$$O=\frac{A(B-C)\,\bar{A}+B(C-A)\,\bar{B}+C(A-B)\,\bar{C}}{(B-C)\,\bar{A}+(C-A)\,\bar{B}+(A-B)\,\bar{C}} \tag{2.22}$$

圆半径为

$$R^2=\frac{z\,\bar{z}(1-z)(1-\bar{z})}{(z-\bar{z})^2}a^2$$

九点圆圆心

九点圆是经过三角形三边中点的圆, 它也经过三条高的垂足点和三角形顶点与垂心所得线段的中点。



解: 三边中点 D, E, F 的表示为

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\,(1+z)\,\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}z\,\overrightarrow{BC}$$

由此三式，利用向量的加法容易得到:

$$\overrightarrow{DF}=\frac{z-1}{z}\,\overrightarrow{DE}$$

再由前面外心的表示式即得九点圆圆心 O' 的表示:

$$\overrightarrow{DO'}=\frac{z-1}{z-\bar{z}}\,\overrightarrow{DE}$$

转化为基向量 $\overrightarrow{BC}$ 的表示则为:

$$\overrightarrow{BO'}=\frac{z^2-\bar{z}}{2(z-\bar{z})}\,\overrightarrow{BC} \tag{2.23}$$

复平面上的一般形式为:

$$O'=\frac{\left(B^2-C^2\right)\bar{A}+\left(C^2-A^2\right)\bar{B}+\left(A^2-B^2\right)\bar{C}}{2\left((B-C)\,\bar{A}+(C-A)\,\bar{B}+(A-B)\,\bar{C}\right)} \tag{2.24}$$

其半径平方为

$$R'^2=\frac{z\,\bar{z}(1-z)(1-\bar{z})}{4(z-\bar{z})^2}a^2$$

可以看到九点圆半径是外接圆半径的一半 $R'=\frac{R}{2}$。

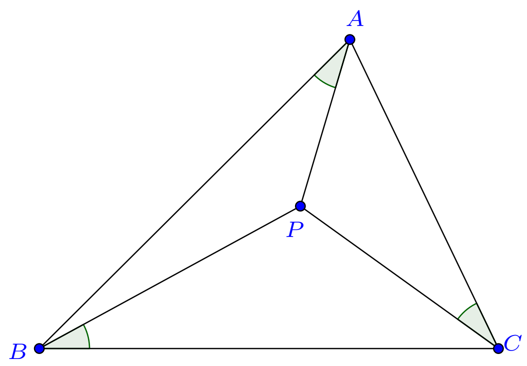
另外, 由重心 G，外接圆圆心 O，九点圆圆心 O' 的表示:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\,(1+z)\,\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BO}=\frac{z(1-\bar{z})}{z-\bar{z}}\,\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BO'}=\frac{z^2-\bar{z}}{2(z-\bar{z})}\,\overrightarrow{BC}$$

计算即知 $\overrightarrow{OG}=2\,\overrightarrow{GO'}$, 这是欧拉的发现, 它们三者的连线称为欧拉线, 该线还经过垂心 H。

布洛卡点

在近代数学中, 布洛卡点是常被提及的, 共有两个: 正布洛卡点和负布洛卡点。正布洛卡点 P 使得 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$, 负布洛卡点 Q 使得 $\angle QBA=\angle QCB=\angle QAC$, 它们均属于第一类特征点。



解：设 $\overrightarrow{BP}=w\,\overrightarrow{BC}$, 则

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}=(w-z)\,\overrightarrow{BC}=\frac{w-z}{0-z}\,\overrightarrow{BA}$$

因为从 $\overrightarrow{BC}$ 旋转至 $\overrightarrow{BP}$ 与从 $\overrightarrow{AB}$ 旋转至 $\overrightarrow{AP}$ 是相同的角度, 所以

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w-z}{(0-z)\,w}\right)=0$$

同样地, 由

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=(w-1)\,\overrightarrow{BC}=\frac{w-1}{z-1}\,\overrightarrow{CA}$$

得到

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w-1}{(z-1)w}\right)=0$$

两式联立解得 $w=\frac{z\,\bar{z}}{1-z+z\,\bar{z}}$，从而

$$\overrightarrow{BP}=\frac{z\,\bar{z}}{1-z+z\,\bar{z}}\,\overrightarrow{BC} \tag{2.25}$$

转化为复平面上的一般点表示形式则为:

$$P=\frac{C(A-B)\,\bar{A}+A(B-C)\,\bar{B}+B(C-A)\,\bar{C}}{(A-B)\,\bar{A}+(B-C)\,\bar{B}+(C-A)\,\bar{C}} \tag{2.26}$$

同理可求出负布洛卡点 Q:

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{z}{1-\bar{z}+z\,\bar{z}}\,\overrightarrow{BC} \tag{2.27}$$

以及复平面上的一般表示形式：

$$Q=\frac{B(C-A)\,\bar{A}+C(A-B)\,\bar{B}+A(B-C)\,\bar{C}}{(C-A)\,\bar{A}+(A-B)\,\bar{B}+(B-C)\,\bar{C}} \tag{2.28}$$

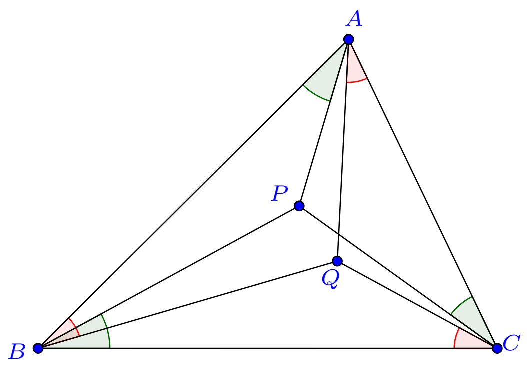
布洛卡点的一个常被提及的性质是 $\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C$, 我们可以使用 2.24 式证明它, 但这样稍嫌繁琐, 我们将在后文中给一个简短些的证明。

等角共轭点

三角形 ABC 所在平面上, 若 P,Q 两点使得 $\angle PAB=\angle QAC,\quad \angle PBC=\angle QBA,\quad \angle PCA=\angle QCB$ [①], 则 P,Q 互为 $\triangle ABC$ 的等角共轭点。

---

①注：关于角度, 传统写法并非严格, 一般总是取大于 0 而小于 π 的那个, 但这样事实上给几何代数化带来了一定的麻烦：例如对于 $\angle ABC$, 究竟是由 $\overrightarrow{BC}$ 逆时针旋转为 $\overrightarrow{BA}$ 所经历的角度, 还是由 $\overrightarrow{BA}$ 逆时针旋转为 $\overrightarrow{BC}$ 所经历的角度？通常需要根据几何图形来加以判别, 否则只能分情况讨论才能得知。



解: 令

$$\vec{BA} = z\,\vec{BC}, \quad \vec{BP} = w\,\vec{BC}, \quad \vec{BQ} = s\,\vec{BC}$$

那么由三个角度关系可知:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{P-A}{B-A}\frac{Q-A}{C-A}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{w-z}{0-z}\frac{s-z}{1-z}\right) = 0\\
\operatorname{Im}\left(\frac{P-B}{A-B}\frac{Q-B}{C-B}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{w-0}{z-0}\frac{s-0}{1-0}\right) = 0\\
\operatorname{Im}\left(\frac{P-C}{A-C}\frac{Q-C}{B-C}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{w-1}{z-1}\frac{s-1}{0-1}\right) = 0
\end{aligned}$$

由此解出 s, 得:

$$\vec{BQ} = \frac{z\,\bar{w}(w-z-\bar{w}+z\,\bar{w}+\bar{z}-w\,\bar{z})}{-z\,\bar{w}+wz\,\bar{w}+w\,\bar{z}-wz\,\bar{z}-w\,\bar{w}\,\bar{z}+z\,\bar{w}\,\bar{z}}\,\vec{BC} \tag{2.29}$$

这里所解出的 Q 点, 实际上是原始定义的一个扩展, 满足

$$\angle PAB - \angle QAC \equiv 0 \pmod{180^\circ}, \quad \angle PBC - \angle QBA \equiv 0 \pmod{180^\circ}, \quad \angle PCA - \angle QCB \equiv 0 \pmod{180^\circ}$$

若将 $z = \frac{A-B}{C-B}$, $\quad w = \frac{P-B}{C-B}$ 可得复平面上 Q 关于 A, B, C, P 的一般表示, 因式子较长, 这里不列出。
读者容易根据 (2.18) 和 (2.20) 式验证: 垂心 H 的等角共轭点为外心 O。
关于等角共轭点, 有这样一个关于长度的恒等式:

$$\varepsilon_1\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC} + \varepsilon_2\frac{BP\cdot BQ}{BC\cdot BA} + \varepsilon_3\frac{CP\cdot CQ}{CB\cdot CA} = 1$$

其中 $\varepsilon_k = \pm 1 (k = 1, 2, 3)$, 具体的取值需根据 P, Q 所处的区域范围而定。
事实上, 对于平面上互异的任意五个点 A, B, C, P, Q, 存在恒等式:

$$\frac{(P-A)}{(B-A)}\frac{(Q-A)}{(C-A)} + \frac{(P-B)}{(C-B)}\frac{(Q-B)}{(A-B)} + \frac{(P-C)}{(B-C)}\frac{(Q-C)}{(A-C)} = 1$$

而等角共轭条件使得上面的每一项均是实数，从而可逐项改写为模长的表示。

2.2.6　三角形的边角边表示

对于三角形 ABC，可以用两向量的模长及它们间的夹角来表示出向量的旋转缩放，称为三角形的边角边表示，共有以下几种形式:

逆时针方向向量的旋转缩放表示:

$$\vec{AC} = \frac{b}{c}e^{iA}\,\vec{AB} \tag{2.30}$$
$$\vec{BA} = \frac{c}{a}e^{iB}\,\vec{BC} \tag{2.31}$$
$$\vec{CB} = \frac{a}{b}e^{iC}\,\vec{CA} \tag{2.32}$$

顺时针向量的旋转缩放表示：

$$\vec{AB} = \frac{c}{b}e^{-iA}\,\vec{AC} \tag{2.33}$$

$$\vec{BC} = \frac{a}{c}e^{-iB}\,\vec{BA} \tag{2.34}$$

$$\vec{CA} = \frac{b}{a}e^{-iC}\,\vec{CB} \tag{2.35}$$

这些表示是相互等价的，可根据具体问题选择，其中 $\vec{BA} = \frac{c}{a}e^{iB}\,\vec{BC}$ 是最常用到的。

正弦定理

我们选择 (2.11) 和 (2.12 两式) 予以证明

$$\begin{cases} \vec{AC} = \frac{b}{c}e^{iA}\,\vec{AB} \\ \vec{BA} = \frac{c}{a}e^{iB}\,\vec{BC} \end{cases}$$

将 $\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA}$ 代入第一式，即有

$$\vec{BC} = \left(1 - \frac{b}{c}e^{iA}\right)\vec{BA}$$

结合第二式便得

$$\frac{c}{a}e^{iB}\left(1 - \frac{b}{c}e^{iA}\right) = 1$$

取虚部

$$\frac{c}{a}\sin B - \frac{b}{a}\sin(A+B) = 0$$

于是 $c\sin B = b\sin C$

若改写式子为

$$1 - \frac{b}{c}e^{iA} = \frac{a}{c}e^{-iB}$$

取虚部又可得到 $b\sin A = a\sin B$

合并结果即有正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

余弦定理

若对 $\frac{c}{a}e^{iB}\left(1 - \frac{b}{c}e^{iA}\right) = 1$ 两端取模, 即有

$$\frac{c^2}{a^2}\left(1 - 2\frac{b}{c}\cos A + \frac{b^2}{c^2}\right) = 1$$

于是 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

改写式子为

$$\frac{c}{a}e^{iB} - 1 = \frac{b}{a}e^{i(A+B)}$$

两端取模，又可得到 $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

再改写式子为

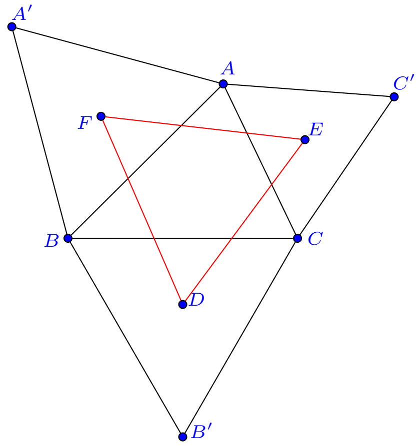
$$\frac{c}{a}e^{iB} = 1 + \frac{b}{a}e^{i(A+B)}$$

两端取模，并利用 $A+B+C=\pi$, 得到 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

这就证明了全部余弦定理。

拿破仑定理

拿破仑定理: 以三角形各边为边, 向外侧做等边三角形, 则它们的中心构成一个等边三角形。



证明: 令 $\vec{BA}=z\,\vec{BC}$。
首先, 对等边三角形 ABC', $\vec{BC'}$ 可视为 $\vec{BA}$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 角度而得:

$$\vec{BC'}=e^{i\frac{\pi}{3}}\,\vec{BA}$$

$\triangle ABC'$ 的中心也是它的重心

$$\vec{BF}=\frac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}\,\vec{BA}=\frac{1}{6}(3+i\sqrt{3})z\,\vec{BC}$$

同理, 对等边三角形 BCA', $\vec{BA'}$ 可视为 $\vec{BC}$ 顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 角度而得, 于是

$$\vec{BD}=\frac{1+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3}\,\vec{BC}=\frac{1}{6}(3-i\sqrt{3})\,\vec{BC}$$

对等边三角形 CAB', $\vec{CB'}$ 可视为 $\vec{CA}$ 顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 角度而得, 于是

$$\vec{CE}=\frac{1+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3}\,\vec{CA}=\frac{1}{6}(3-i\sqrt{3})\,\vec{CA}$$

再由向量加法得到:

$$\vec{BE}=\vec{BC}+\vec{CE}=\vec{BC}+\frac{1}{6}(3-i\sqrt{3})\left(\vec{BA}-\vec{BC}\right)=\left(1+\frac{1}{6}(3-i\sqrt{3})\,(z-1)\right)\vec{BC}$$

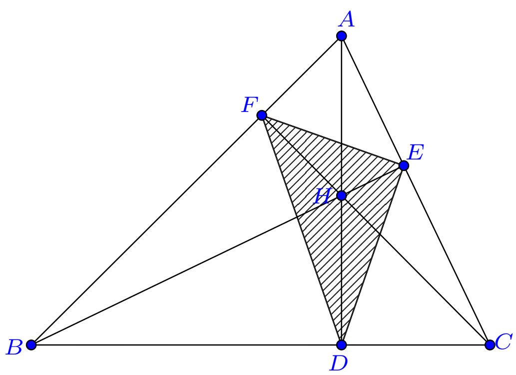
计算即有

$$\vec{BD}+e^{i\frac{2\pi}{3}}\,\vec{BE}+e^{i\frac{4\pi}{3}}\,\vec{BF}=0$$

这就证得了三个三角形的中心构成一个等边三角形。

垂足三角形的面积

例. $\triangle ABC$ 各顶点在对边的投影点分别为 D, E, F, 求 $\triangle DEF$ 的面积。



解：因为 AD 垂直于 BC, $\vec{AD}$ 可视为由 $\vec{BC}$ 缩放 $\frac{AD}{BC}$, 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到, 即

$$\vec{AD}=-\frac{AD}{BC}i\,\vec{BC}$$

而根据三角形的面积计算式：$S=\frac{1}{2}BC\cdot AD$, 所以

$$\vec{AD}=-\frac{2S}{BC^2}i\,\vec{BC}=-\frac{2S}{a^2}i\,\vec{BC}$$

同理可得

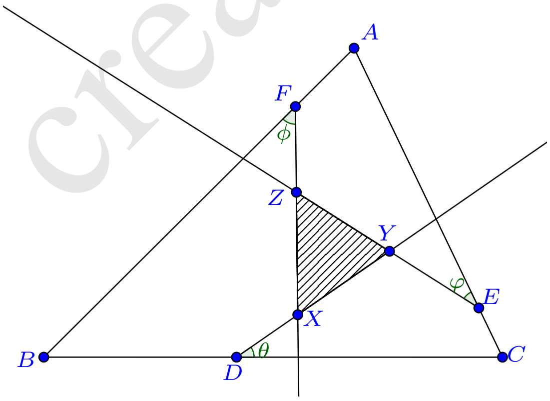
$$\vec{BE}=-\frac{2S}{CA^2}i\,\vec{CA}=-\frac{2S}{b^2}i\,\vec{CA}$$
$$\vec{CF}=-\frac{2S}{AB^2}i\,\vec{AB}=-\frac{2S}{c^2}i\,\vec{AB}$$

将以上三式代入 (2.14) 的面积计算式, 即可求得:

$$\begin{aligned}S_{DEF}&=S-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\vec{BC}\otimes\vec{AD}+\vec{CA}\otimes\vec{BE}+\vec{AB}\otimes\vec{CF}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\vec{AD}\otimes\vec{BE}+\vec{BE}\otimes\vec{CF}+\vec{CF}\otimes\vec{AD}\right)\\&=S-3S-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{4S^2}{a^2b^2}\vec{BC}\otimes\vec{CA}+\frac{4S^2}{b^2c^2}\vec{CA}\otimes\vec{AB}+\frac{4S^2}{c^2a^2}\vec{AB}\otimes\vec{BC}\right)\\&=-2S+\left(\frac{4S^3}{a^2b^2}+\frac{4S^3}{b^2c^2}+\frac{4S^3}{c^2a^2}\right)\\&=S\left(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C-2\right)\end{aligned}$$

射线三角形的面积

例. $\triangle ABC$ 的三边上分别有点 D,E,F, 并且 $\vec{BD}=\lambda\,\vec{BC}$, $\vec{CE}=\mu\,\vec{CA}$, $\vec{AF}=\nu\,\vec{AB}$, 过这三点且与三边的夹角分别为 θ,φ,ϕ 的直线两两相交于 X,Y,Z 三点, 求 $\triangle XYZ$ 的面积。



解：利用向量旋转缩放的几何意义, 可设

$$\begin{cases}\vec{DX}=u_1e^{i\theta}\,\vec{BC}\\\vec{EY}=v_1e^{i\varphi}\,\vec{CA}\\\vec{FZ}=w_1e^{i\phi}\,\vec{AB}\end{cases}\text{及}\begin{cases}\vec{DY}=u_2e^{i\theta}\,\vec{BC}\\\vec{EZ}=v_2e^{i\varphi}\,\vec{CA}\\\vec{FX}=w_2e^{i\phi}\,\vec{AB}\end{cases}$$

其中 u_1,v_1,w_1,u_2,v_2,w_2 为实数。
由 $\vec{BF}+\vec{FX}=\vec{BD}+\vec{DX}$ 结合 $\vec{BD}=\lambda\,\vec{BC}$, $\vec{AF}=\nu\,\vec{AB}$, 即有

$$\left(1-\nu-w_2e^{i\phi}\right)\vec{BA}=\left(\lambda+u_1e^{i\theta}\right)\vec{BC}$$

将 $\vec{BA}=\frac{c}{a}e^{iB}\,\vec{BC}=\frac{\sin C}{\sin A}e^{iB}\,\vec{BC}$ 代入后，分离实虚部可解出

$$u_1=\frac{(1-\nu)\sin C\sin\phi-\lambda\sin A\sin(B+\phi)}{\sin A\sin(B+\phi-\theta)}$$

$$w_2 = \frac{(1-\nu)\sin C \sin(B-\theta) + \lambda \sin A \sin\theta}{\sin C \sin(B+\phi-\theta)}$$

轮换变量 [1] 又可得到其余参数

$$v_1 = \frac{(1-\lambda)\sin A \sin\theta - \mu \sin B \sin(C+\theta)}{\sin B \sin(C+\theta-\varphi)}$$

$$u_2 = \frac{(1-\lambda)\sin A \sin(C-\varphi) + \mu \sin B \sin\varphi}{\sin A \sin(C+\theta-\varphi)}$$

$$w_1 = \frac{(1-\mu)\sin B \sin\varphi - \nu \sin C \sin(A+\varphi)}{\sin C \sin(A+\varphi-\phi)}$$

$$v_2 = \frac{(1-\mu)\sin B \sin(A-\phi) + \nu \sin C \sin\phi}{\sin B \sin(A+\varphi-\phi)}$$

于是我们可以得到：

$$\begin{cases} \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{DY} - \overrightarrow{DX} = (u_2-u_1)\, e^{i\theta}\, \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{EZ} - \overrightarrow{EY} = (v_2-v_1)\, e^{i\varphi}\, \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{FZ} - \overrightarrow{FY} = (w_2-w_1)\, e^{i\phi}\, \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

进而求得 (利用到 2.11, 2.12, 2.13 三式)：

$$\begin{cases} \overrightarrow{XY} \otimes \overrightarrow{YZ} = (u_2-u_1)(v_2-v_1)\, e^{i(\theta-\varphi)}\, \overrightarrow{BC} \otimes \overrightarrow{CA} = -(u_2-u_1)(v_2-v_1)\, e^{i(\theta-\varphi)} abe^{iC} \\ \overrightarrow{YZ} \otimes \overrightarrow{ZX} = (v_2-v_1)(w_2-w_1)\, e^{i(\varphi-\phi)}\, \overrightarrow{CA} \otimes \overrightarrow{AB} = -(v_2-v_1)(w_2-w_1)\, e^{i(\varphi-\phi)} bce^{iA} \\ \overrightarrow{ZX} \otimes \overrightarrow{XY} = (w_2-w_1)(u_2-u_1)\, e^{i(\phi-\theta)}\, \overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{BC} = -(w_2-w_1)(u_2-u_1)\, e^{i(\phi-\theta)} cae^{iB} \end{cases}$$

将其代入三角形面积的计算式 (2.18), 利用正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, 化简计算后最终得到：

$$S_{XYZ} = \frac{R^2 T^2}{2\sin(A+\varphi-\phi)\sin(B+\phi-\theta)\sin(C+\theta-\varphi)}$$

$$\text{其中}T = 2\lambda \sin\theta \sin A \sin(A+\varphi-\phi) + 2\mu \sin\varphi \sin B \sin(B+\phi-\theta) + 2\nu \sin\phi \sin C \sin(C+\theta-\varphi)$$
$$+ \sin A \cos(A+\theta+\varphi-\phi) + \sin B \cos(B+\varphi+\phi-\theta) + \sin C \cos(C+\phi+\theta-\varphi)$$

2.2.7 三角形的角角边表示

上一小节中, 我们用了三个量 (两边长及夹角) 来表示旋转缩放变换，这是存在变量冗余的。事实上，应用正弦定理很容易化简为只用两个角的表示。

对于 $\overrightarrow{BA} = \frac{c}{a} e^{iB}\, \overrightarrow{BC}$, 由

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A} = \frac{e^{i(A+B)} - e^{-i(A+B)}}{e^{iA} - e^{-iA}} = \frac{1 - e^{i(2A+2B)}}{1 - e^{i2A}} e^{-iB}$$

即知

选用角度 A, B 表示时：

$$\overrightarrow{BA} = \frac{1 - e^{i(2A+2B)}}{1 - e^{i2A}}\, \overrightarrow{BC} \tag{2.36}$$

选用角度 A, C 表示则为：

$$\overrightarrow{BA} = \frac{1 - e^{-i2C}}{1 - e^{i2A}}\, \overrightarrow{BC} \tag{2.37}$$

选用角度 B, C 表示则为：

$$\overrightarrow{BA} = \frac{e^{i2B}\left(1 - e^{i2C}\right)}{1 - e^{i(2B+2C)}}\, \overrightarrow{BC} \tag{2.38}$$

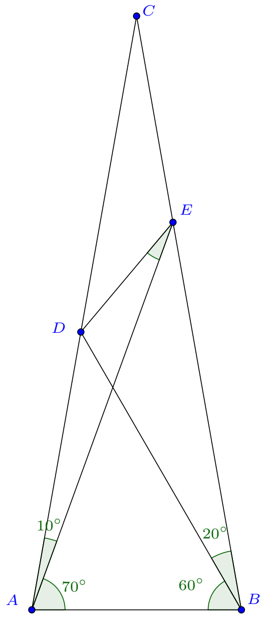
我们称以上为三角形的角角边表示, 旋转缩放变换所隐含的一边，即为基向量 $\overrightarrow{BC}$。

[1]【轮换】在许多问题中, 平面上的点或量具有相同的地位, 这允许我们直接对点或量进行轮换就可得到其表示。

角格点问题

一般角格点问题是已知三角形内某些角度之值, 于是用 2.38 式来处理是非常方便的。

如图, 求角度 $\angle AED$ 的值。



解：已知 $\angle ADB = 40°, \angle DAB = 80°, \angle AEB = 30°, \angle EAB = 70°$

令 $z = e^{i\frac{40\pi}{180}}, w = e^{i\frac{80\pi}{180}}, p = e^{i\frac{30\pi}{180}}, q = e^{i\frac{70\pi}{180}}$, 则：

$$\vec{AD} = \frac{1 - z^2w^2}{1 - z^2}\vec{AB}, \vec{AE} = \frac{1 - p^2q^2}{1 - p^2}\vec{AB}$$

于是

$$re^{ix} = \frac{\vec{EA}}{\vec{ED}} = \frac{(1 - p^2q^2)(1 - z^2)}{p^2 - p^2q^2 - z^2 + p^2q^2z^2 + w^2z^2 - p^2w^2z^2}$$

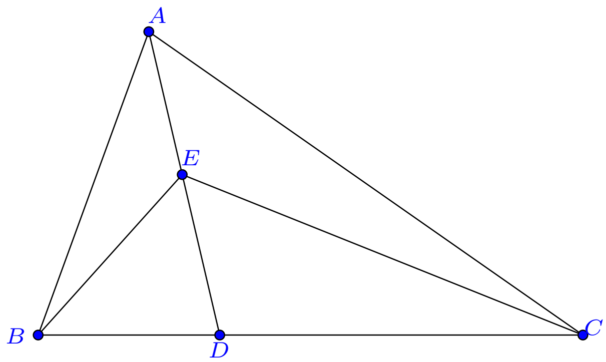
此式与其共轭相除：

$$e^{i2x} = \frac{q^2 - p^2q^2 - w^2 + p^2q^2w^2 + w^2z^2 - q^2w^2z^2}{w^2(-p^2 + p^2q^2 + z^2 - p^2q^2z^2 - w^2z^2 + p^2w^2z^2)}$$

经充分化简即得 $x = \frac{\pi}{9}$。

题目 1

三角形 ABC 中, $\angle ABC = 2\angle ACB$, D 为 BC 上一点，E 为 AD 上一点，使得: $\angle BED = \angle CED = 90° - \angle ACB$. 证明: $CD = 2BD$。



证明：因为题目直接涉及的两个角是 $\angle B$ 和 $\angle C$, 所以我们可以应用 2.37 式：

令 $z=e^{i2B}, w=e^{i2C}$, 则 $z=w^2$,

$$\vec{BA}=\frac{z(1-w)}{1-zw}\vec{BC}=\frac{w^2}{1+w+w^2}\vec{BC}$$

再令 $\vec{BD}=\lambda\vec{BC}$ 及 $\vec{BE}=\mu\vec{BD}+(1-\mu)\vec{BA}$，由 $\angle BED=\angle CED$ 知

$$\mathrm{Im}(\frac{D-E}{B-E}\frac{D-E}{C-E})=0$$

解出

$$\mu=\frac{w(w-2w\lambda-\lambda^2-w\lambda^2-w^2\lambda^2)}{(1-2\lambda)(1-\lambda-w\lambda-w^2\lambda)(w^2-\lambda-w\lambda-w^2\lambda)}$$

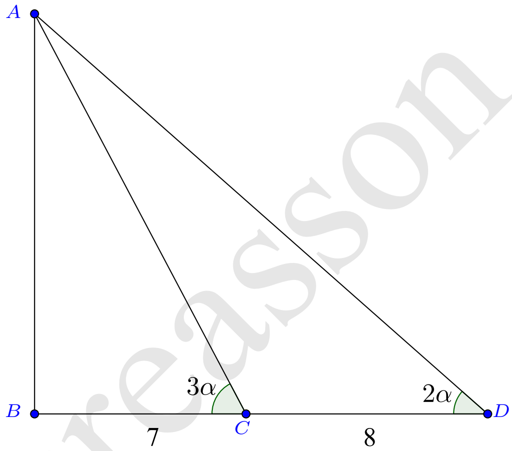
再由 $\angle BED=90^\circ-\angle ACB$ 知

$$\mathrm{Re}(\frac{D-E}{B-E}\frac{B-C}{A-C})=0$$

解出 $\lambda=\frac{1}{3}$, 由此即知 $CD=2BD$。

题目 2

已知三角形 ABC 中, $\angle B=90^\circ, \angle C=3\alpha$, 延长 BC 至 D, 使得 $\angle D=2\alpha$。若已知 $BC=7, CD=8$，求 AD 的长度。



解: 令 $w=e^{i2\alpha}$, 则根据 2.37 式,
对于 $\triangle ABC$，有

$$\vec{BA}=\frac{w^3-1}{1+w^3}\vec{BC}$$

对于 $\triangle ABD$，有

$$\vec{BA}=\frac{1-w^2}{1+w^2}\vec{BD}$$

因为 $BD:BC=(7+8):7$, 所以

$$7\frac{w^3-1}{1+w^3}=15\frac{1-w^2}{1+w^2}$$

化简即为: $2-3w+2w^2=0$, 又可写作 $\frac{w}{1+w^2}=\frac{2}{3}$, 于是

$$AD=|\vec{BA}-\vec{BD}|=|\frac{2}{w^2+1}|BD=30|\frac{w}{1+w^2}|=20$$

一阶有理代换

在 2.35 式中, 若令 $z=e^{i2A}, w=e^{i2B}$, 则其成为:

$$\vec{BA}=\frac{1-zw}{1-z}\vec{BC} \tag{2.39}$$

若令 $s=\tan A, t=\tan B$, 则由

$$e^{i2\theta}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$$

得到

$$\vec{BA}=\frac{i(s+t)}{s(i+t)}\,\vec{BC} \tag{2.40}$$

若令 $s=\cot A, t=\cot C$, 又可得到

$$\vec{BA}=\frac{1+is}{1-it}\,\vec{BC} \tag{2.41}$$

它们是关于单位复数 z, w 或实数 s, t 的一阶有理分式, 故我们称其为一阶有理代换。

这两式可用于第一类特征点的计算, 但因为第一类特征点一般可任意选取表示形式计算求解，所以不是很能体现出好处, 这里用它来证明布洛卡点的一个性质。

布洛卡点的性质

前面曾提到布洛卡点的一个常见性质：$\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C$，现在我们来证明它。

令 $s=\cot A, t=\cot B$, 则由 (2.35) 可得:

$$\vec{BA}=\frac{s+t}{-i+t}\,\vec{BC}$$

根据正布洛卡点的表示，有：

$$\vec{BP}=\frac{(s+t)^2}{1+s^2+st+t^2-is-it}\,\vec{BC}$$

记作 $\vec{BP}=f\,\vec{BC}$, 则布洛卡角的余切值为：

$$\cot\theta=\frac{\mathrm{Re}[f]}{\mathrm{Im}[f]}=\frac{1+s^2+st+t^2}{s+t}=s+t+\frac{1-st}{s+t}$$

右方第三项

$$\frac{1-st}{s+t}=\frac{1-\cot A\cot B}{\cot A+\cot B}=-\cot(A+B)=\cot C$$

这就证明了性质 $\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C$，负布洛卡点的计算也是一样的 (略)。

二阶有理代换

在 2.35 式中, 令 $z=e^{iA}, w=e^{iB}$, 则其成为：

$$\vec{BA}=\frac{1-z^2w^2}{1-z^2}\,\vec{BC} \tag{2.42}$$

如果令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则 $z=\frac{1+is}{1-is}, w=\frac{1+it}{1-it}$, 将其代入上式，又可得到

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC} \tag{2.43}$$

我们将在后文中频繁使用到这两种表示。

2.2.8　第二类特征量

我们规定: 对三角形 ABC 及特征量 L, 若 L 可表示为三角形边长及面积 (a,b,c,S) 的有理函数, 且不是第一类特征量, 则称为第二类特征量。

等价的表述是: 对三角形 ABC 及特征量 L, 若 L 是关于 $(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},BC)$ 的有理表示, 且 L 不是第一类特征量, 则称 L 为第二类特征量。

令 $z=e^{iA}, w=e^{iB}$ 及 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 由 2.26 和 2.27 式不难推导出如下第二类特征量的表示：

(1) $b=\frac{z\left(1-w^2\right)}{w(1-z^2)}a=\frac{t\left(1+s^2\right)}{s(1+t^2)}a$　　(2) $c=\frac{1-w^2z^2}{w(1-z^2)}a=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)}a$

(3) $\cos A=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1-s^2}{1+s^2}$　　(4) $\sin A=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{2s}{1+s^2}$　　(5) $\tan\frac{A}{2}=\frac{1-z}{1+z}i=s$

(6) $\cos B=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$　　(7) $\sin B=\frac{1}{2i}\left(w-\frac{1}{w}\right)=\frac{2t}{1+t^2}$　　(8) $\tan\frac{B}{2}=\frac{1-w}{1+w}i=t$

(9) $\cos C=-\frac{1}{2}\left(wz+\frac{1}{wz}\right)=-\frac{(1+s+t-st)(1-s-t-st)}{(1+s^2)(1+t^2)}$

(10) $\sin C = \frac{1}{2i}\left(wz - \frac{1}{wz}\right) = \frac{2(s+t)(1-st)}{(1+s^2)(1+t^2)}$　(11) $\tan\frac{C}{2} = -\frac{1+wz}{1-wz}i = \frac{1-st}{s+t}$

(12) $S = i\frac{(1-w^2)(1-w^2z^2)}{4w^2(1-z^2)}a^2 = \frac{t(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)^2}a^2$

(13) $l = \frac{s+t}{s(1+t^2)}a$　(14) $R = -i\frac{z}{1-z^2}a = \frac{1+s^2}{4s}a$　(15) $r = i\frac{(1-w)(1+wz)}{2w(1+z)}a = \frac{t-st^2}{1+t^2}a$

其中 S 为三角形 ABC 的面积,l 为半周长 $\frac{1}{2}(a+b+c)$, R 为其外接圆半径,r 为其内切圆半径。

注: s,t 的取值范围是: $s>0, t>0, 1-st>0$, 分别对应于三角形的角度范围限制: $0<A<\pi, 0<B<\pi, 0<A+B<\pi$。

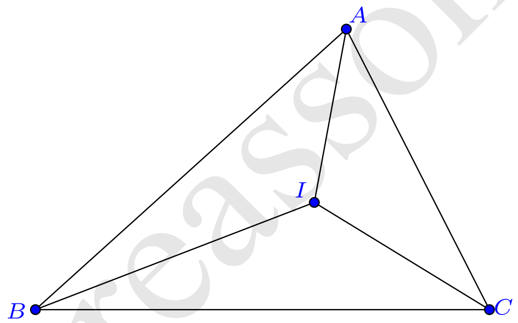
2.2.9 第二类特征点

我们规定: 在三角形 ABC 所在平面上, 若点 P 关于 $\triangle ABC$ 的重心坐标可表示为三角形边长及面积 (a,b,c,S) 的有理函数, 且不是第一类特征点, 则称为第二类特征点。

等价的表述是: 对三角形 ABC 及其所在平面上的一点 P, $\overrightarrow{BP} = f\,\overrightarrow{BC}$, 若 f 是关于 e^{iA}, e^{iB} (或关于 $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}$) 的有理函数, 且 P 不是第一类特征点，则称 P 为 $\triangle ABC$ 的第二类特征点。

内心

内心是三角形三条角平分线的交点。



解：内心 I 在角 B 的平分线上，因此可令 $\overrightarrow{BI} = \lambda e^{i\frac{B}{2}}\,\overrightarrow{BC}$, I 也在角 C 的平分线上, 又可令 $\overrightarrow{CI} = \mu e^{-i\frac{C}{2}}\,\overrightarrow{CB}$。

这两式相减消去 I, 得到 $1 = \lambda e^{i\frac{B}{2}} + \mu e^{-i\frac{C}{2}}$, 取共轭又有 $1 = \lambda e^{-i\frac{B}{2}} + \mu e^{i\frac{C}{2}}$。

联立即可解出

$$\lambda = \frac{1-e^{iC}}{1-e^{iB+iC}}e^{\frac{iB}{2}}$$

从而

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1-e^{iC}}{1-e^{iB+iC}}e^{iB}\,\overrightarrow{BC} = \frac{1+e^{iA+iB}}{1+e^{iA}}\,\overrightarrow{BC}$$

令 $z=e^{iA}, w=e^{iB}, s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则为 ①

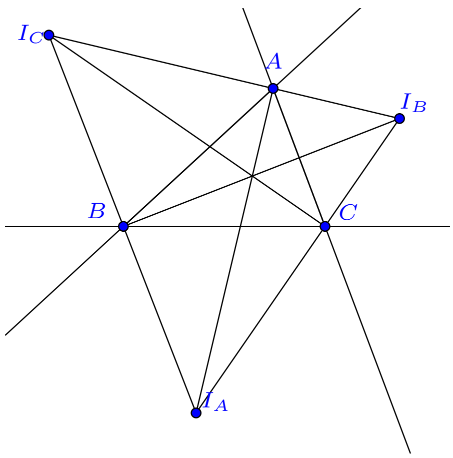
$$\overrightarrow{BI} = \frac{1+zw}{1+z}\,\overrightarrow{BC} = \frac{1-st}{1-it}\,\overrightarrow{BC} \tag{2.44}$$

本式也可以由内心的重心坐标 $I = \frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$, 代入“二阶有理代换”一节中边长的表示式得到。

旁心

旁心是三角形一个内角的平分线和其他两个内角的外角平分线的交点，每个三角形有三个旁心。

①这里我们将角度单位复数和半正切实数两种表示都列出, 便于查阅。
一般来说, 角度单位复数的表示应用于角度直接相关的问题中比较方便, 另外也往往使得结果的表示更简单;
半正切实数的表示应用于计算长度或需要细致讨论取值条件时, 或需要将实部、虚部分开处理 (例如垂直/平行的判断) 的时候更方便。

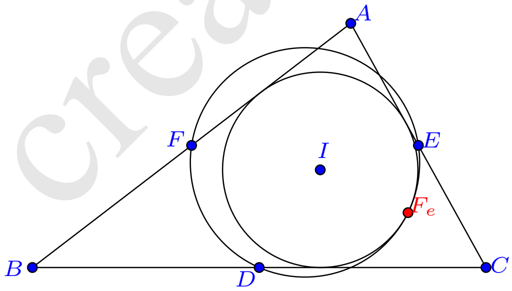


旁心的求法与内心是一样的，其表达式为：

$$\vec{BI_A}=\frac{1-wz}{1+z}\,\vec{BC}=\frac{s+t}{i+t}\,\vec{BC}$$
$$\vec{BI_B}=\frac{1-wz}{1-z}\,\vec{BC}=\frac{i(s+t)}{s(i+t)}\,\vec{BC}$$
$$\vec{BI_C}=\frac{1+wz}{1-z}\,\vec{BC}=\frac{i(1-st)}{s(1-it)}\,\vec{BC}$$

费尔巴哈点

费尔巴哈点是三角形的内切圆与九点圆的唯一交点。



解: 我们先用较笨拙的方式导出费尔巴哈点的表示，在后文三角形与圆一节中再用一个更便捷的方式导出它。

令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC}$$

内切圆的圆心 I 和半径 r 分别是:

$$\vec{BI}=\frac{1-st}{1-it}\,\vec{BC},\quad r=\frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

又由 (2.22 式) 和 (2.23 式), 知九点圆的圆心 O' 和半径 R' 分别是:

$$\vec{BO'}=\frac{2(3s+t-s^2t-3st^2)-i(1+s-t+st)(1-s+t+st)}{8s(1-it)^2}\,\vec{BC}$$

$$R'=\frac{1+s^2}{8s}BC$$

设所求点 F_e 为

$$\vec{BF_e}=(x+yi)\,\vec{BC}$$

则根据 F_e 到 I 的距离为 r, F_e 到 O' 的距离为 R', 可得到唯一的一组解:

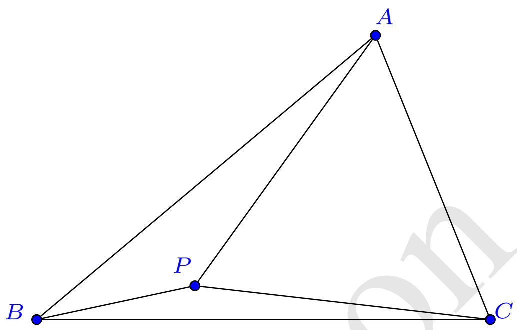
$$
\begin{aligned}
x &= \frac{(1-st)(1+s^2-6st-2t^2+6s^2t^2+4st^3+5t^4-3s^2t^4-6st^5)}{(1+t^2)^2(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)} \\
y &= \frac{2t(1-st)(1-2st-t^2)^2}{(1+t^2)^2(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)}
\end{aligned}
$$

因而费尔巴哈点 F_e 的表示为

$$
\vec{BF_e} = \frac{(1-st)(1-st-2t^2+is-it)}{(1-it)^2(1-3st+is-it)}\vec{BC}
$$

等周点

在 $\triangle ABC$ 所在平面找一点 P, 使得三个三角形 $\triangle PAB$,$\triangle PBC$,$\triangle PCA$ 的周长相等。



解：我们令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}, u=\tan\frac{\angle BPC}{2}, v=\tan\frac{\angle PBC}{2}$, 则

$$
\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}, \quad \vec{BP} = \frac{(u+v)(1-uv)}{u(1-iv)^2}\vec{BC}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
BA &= \frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)}BC, \quad CA = \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)}BC \\
BP &= \frac{(u+v)(1-uv)}{u(1+v^2)}BC, \quad CP = \frac{v(1+u^2)}{u(1+v^2)}BC
\end{aligned}
$$

由 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCA$ 的周长相等有 $BA+BP=CA+CP$, 得到：

$$
\frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)} + \frac{(u+v)(1-uv)}{u(1+v^2)} = \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)} + \frac{v(1+u^2)}{u(1+v^2)}
$$

解出

$$
u = \frac{1-st-stv^2-t^2v^2}{(1+t^2)v}
$$

再由 $\triangle PCA$ 与 $\triangle PBC$ 的周长相等可解出

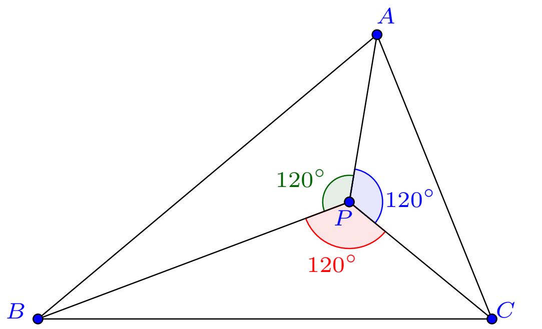
$$
v = \frac{1-s-t+t^2}{t(s+t)}
$$

回代即得到

$$
\vec{BP} = \frac{(1-s-t-it)^2(1-st)}{(1-it)^2(1-2s+s^2-2t+st+t^2)}\vec{BC}
$$

费马点

在 $\triangle ABC$ 所在平面找一点 P, 使得该点到三个顶点的距离之和 $PA+PB+PC$ 为最小。



解: 同上做法类似, 我们令 $\overrightarrow{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\overrightarrow{BC}$, 以及 $\overrightarrow{BP}=\frac{(u+v)(1-uv)}{u(1-iv)^2}\overrightarrow{BC}$。
于是知边长

$$BP=\frac{(u+v)(1-uv)}{u(1+v^2)}BC,\quad CP=\frac{v(1+u^2)}{u(1+v^2)}BC$$

从而可将目标函数简化为仅含单一根式

$$PA+PB+PC=\left(\frac{(u+v)(1-uv)}{u(1+v^2)}+\frac{v(1+u^2)}{u(1+v^2)}+|\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}-\frac{(u+v)(1-uv)}{u(1-iv)^2}|\right)BC$$

进而对函数求导即知, 若 P 点在三角形内部, 则参数 $u=\sqrt{3}, v$ 为以下方程的根

$$\frac{1-v^2}{2v}=-\frac{-2s-t-2\sqrt{3}st+s^2t-2\sqrt{3}t^2+2\sqrt{3}s^2t^2+t^3+2\sqrt{3}st^3-s^2t^3-2st^4}{t(-1+\sqrt{3}s+\sqrt{3}t+st)(\sqrt{3}+s+t-\sqrt{3}st)}$$

$u=\sqrt{3}$ 意味着 $\angle BPC=120°$, 此时极值点

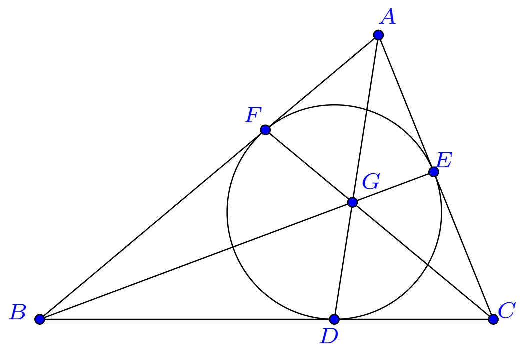
$$\overrightarrow{BP}=\frac{(s+t)(1-st)(3\sqrt{3}+6t-3\sqrt{3}t^2+3i+2i\sqrt{3}t-3it^2)}{3(1-it)^2(\sqrt{3}s+2st-\sqrt{3}st^2+is+2it+2i\sqrt{3}st-2is^2t-ist^2)}\overrightarrow{BC}$$

$$AP+BP+CP=\frac{\sqrt{s^2(\sqrt{3}-t)^2(1+\sqrt{3}t)^2+(s+2t+2\sqrt{3}st-2s^2t-st^2)^2}}{2s(1+t^2)}BC=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}}{\sqrt{2}}$$

否则极值点是三角形的某个顶点。

葛尔刚点

如图, $\triangle ABC$ 的内切圆在各边的切点分别为 D,E,F, 则 AD,BE,CF 三线共点，该公共点称为葛尔刚点。



解: 令 $z=e^{iA}, w=e^{iB}, s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\overrightarrow{BA}=\frac{1-w^2z^2}{1-z^2}\overrightarrow{BC}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\overrightarrow{BC}$$

内切圆圆心为

$$\overrightarrow{BI}=\frac{1+wz}{1+z}\overrightarrow{BC}=\frac{1-st}{1-it}\overrightarrow{BC}$$

内切圆在三边的切点分别为 (内切圆圆心 I 在三边的垂足点):

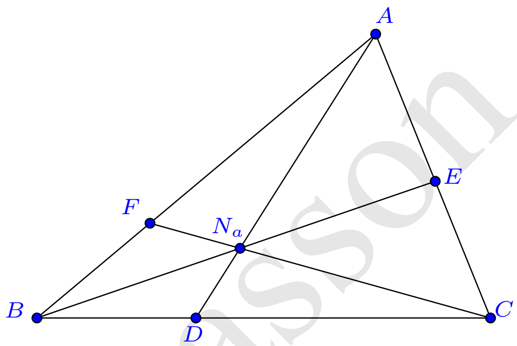
$$\begin{aligned}
\vec{BD} &= \frac{(1+w)(1+wz)}{2w(1+z)}\,\vec{BC} = \frac{1-st}{1+t^2}\,\vec{BC}\\
\vec{BE} &= \frac{(1+wz)(2+z-wz)}{2(1+z)}\,\vec{BC} = \frac{(1-is-2it)(1-st)}{(1-is)(1-it)^2}\,\vec{BC}\\
\vec{BF} &= \frac{(1+w)(1+wz)}{2(1+z)}\,\vec{BC} = \frac{1-st}{(1-it)^2}\,\vec{BC}
\end{aligned}$$

由此易知, AD, BE, CF 三线交于公共点:

$$\vec{BG} = \frac{(1+w)^2 z(1+wz)(-2-z+wz)}{(1+z)(1-w-z-6wz-w^2z-wz^2+w^2z^2)}\,\vec{BC} = \frac{(1+is)(1-is-2it)(1-st)}{(1-it)^2(1+s^2+st+t^2)}\,\vec{BC}$$

奈格尔点

在三角形 ABC 的三边 BC, CA, AB 上，分别取一点 D, E, F, 使得 AD, BE, CF 将 $\triangle ABC$ 的周界分成两条等长的折线，则 AD, BE, CF 三线交于同一点, 该点称为奈格尔点。(D, E, F 也分别是三角形旁切圆在三边的切点。)



解：令 $z = e^{iA}, w = e^{iB}, s = \tan\frac{A}{2}, t = \tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC}$$

边长

$$AB = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)}BC, \quad CA = \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)}BC$$

令

$$\vec{BD} = \lambda\,\vec{BC}, \quad \vec{BE} = \mu\,\vec{BA} + (1-\mu)\,\vec{BC}, \quad \vec{BF} = \nu\,\vec{BA}$$

其中 $0 \le \lambda, \mu, \nu \le 1$。

分别由 $AB + BD = DC + CA, \quad BC + CE = EA + AB, \quad CA + AF = FB + BC$ 即可解出:

$$\begin{aligned}
\vec{BD} &= -\frac{(1-w)(1-wz)}{2w(1+z)}\,\vec{BC} = \frac{t(s+t)}{1+t^2}\,\vec{BC}\\
\vec{BE} &= \frac{(1-wz)(2-z+wz)}{2(1-z)}\,\vec{BC} = \frac{(s+t)(1-is-2st)}{s(1-is)(1-it)^2}\,\vec{BC}\\
\vec{BF} &= \frac{(1-w)(1+wz)}{2(1-z)}\,\vec{BC} = \frac{t(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BA}
\end{aligned}$$

AD 与 BE 的交点 N_a 为

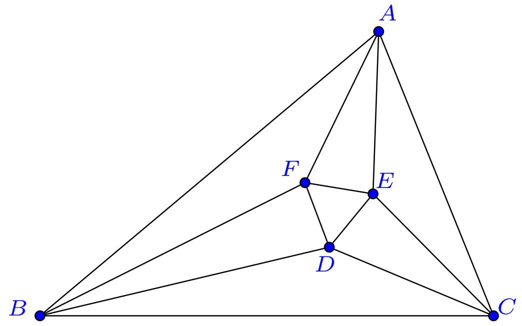
$$\vec{BN_a} = \frac{(1-w)z(2-z+wz)}{(1-z)(1+z)}\,\vec{BC} = \frac{t(1+is)(1-is-2st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC}$$

容易验证它也在 CF 上。

2.2.10　高阶有理表示

莫莱定理

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 设分别接近于三边 BC, CA, AB 的各内角的三等分线相交于 D, E, F, 则 $\triangle DEF$ 是一个等边三角形。



证明: 令 $a=e^{i\frac{2\angle A}{3}}$,　$b=e^{i\frac{2\angle B}{3}}$,　$c=e^{i\frac{2\angle C}{3}}$, (其中 $abc=e^{i\frac{2\pi}{3}}$)

记 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, 则由三角形的角角边表示可得:

$$\begin{aligned}
\vec{BD} &= \frac{b\,(1-c)}{1-bc}\,\vec{BC} \\
\vec{CE} &= \frac{c\,(1-a)}{1-ca}\,\vec{CA} = \frac{bc-\omega}{b-\omega}\,\vec{CA} \\
\vec{AF} &= \frac{a\,(1-b)}{1-ab}\,\vec{AB} = \frac{(1-b)\omega}{b(c-\omega)}
\end{aligned}$$

结合 $\vec{BA}=\frac{b^3\left(1-c^3\right)}{1-b^3c^3}\,\vec{BC}$, 可将 D, E, F 统一为以基向量 $\vec{BC}$ 表示:

$$\begin{aligned}
\vec{BD} &= \frac{b\,(1-c)}{1-bc}\,\vec{BC} \\
\vec{BE} &= \frac{b(1-c)(1+b^3c+b^3c^2-b^2\omega-b^2c\omega-b^2c^2\omega)}{(1-bc)(1+bc+b^2c^2)(b-\omega)}\,\vec{BC} \\
\vec{BF} &= \frac{b^2(1-c)(1+c+c^2)(bc-\omega)}{(1-bc)(1+bc+b^2c^2)(c-\omega)}\,\vec{BC}
\end{aligned}$$

于是 $\vec{BD}+\omega\,\vec{BE}+\omega^2\,\vec{BF}=0$ (利用到性质: $1+\omega+\omega^2=0$)

这就证明了 $\triangle DEF$ 为正三角形。

2.2.11　最短距离问题

平面上给定两个点, 求曲线上的点，使得它到两定点的加权距离之和为最小。

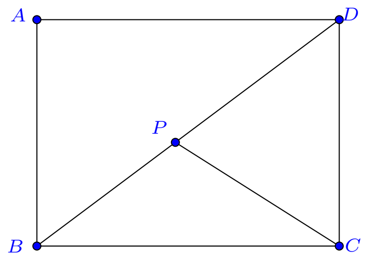
对于这类最短距离问题，采用 2.39 式, 则立即使得距离之和为有理表示了。

函数最值问题

例 1. 求 $f=\sqrt{x^2-3x+8}+3\sqrt{x^2-7x+25}$ 的最小值。

解:

例 2. 长方形 $ABCD$ 的边长 $AB=3, BC=4$, P 为对角线 BD 上的一点, 求 $PC+\frac{3}{5}PB$ 的最小值。



解: 令 $t = \tan \frac{\angle PBC}{2}$, 则

$$\vec{BP} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}$$

由

$$\tan \angle PBC = \frac{3}{4} = \frac{2t}{1-t^2}$$

解出 $t = \frac{1}{3}$, 于是

$$PB = \frac{2(3-s)(1+3s)}{5s}, \quad PC = \frac{6(1+s^2)}{5s}$$

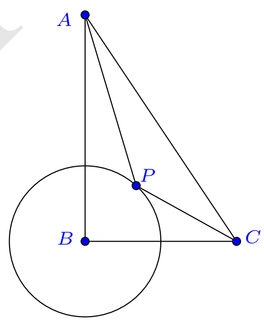
代入即有

$$L = PC + \frac{3}{5}PB = \frac{12(2+s)^2}{25s}$$

其最小值为 $\frac{96}{25}$, 在 $s = 2$ 时取得。

阿氏圆最值问题

在直角三角形 ABC 中, $\angle B = 90°$, $AB = 6, BC = 4$, 以 B 为中心的圆半径为 2, P 是圆上一动点, 连接 AP, CP, 求 $AP + \frac{1}{2}CP$ 的最小值。



解：因为目标函数涉及 $\triangle CAP$ 的两条边，我们只要令

$$\vec{CP} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{CA}$$

则可以将目标函数化为有理表示

$$AP + \frac{1}{2}CP = \sqrt{13}\frac{s+3t+s^2t-st^2}{s(1+t^2)}$$

P 点在圆上的条件成为

$$8s^2 + 18st - 24s^2t - 18s^3t + 13t^2 - 24st^2 - 30s^2t^2 + 24s^3t^2 + 13s^4t^2 - 18st^3 + 24s^2t^3 + 18s^3t^3 + 8s^2t^4 = 0$$

由此可知最小值在

$$s = \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{7}), \quad t = \frac{1}{36}(-37 - 13\sqrt{7} + \sqrt{481} + \sqrt{3367})$$

处取得, 此时 $P=\frac{2}{37}(6+i)(3+2i\sqrt{7})$, 最小值 $\sqrt{37}$。

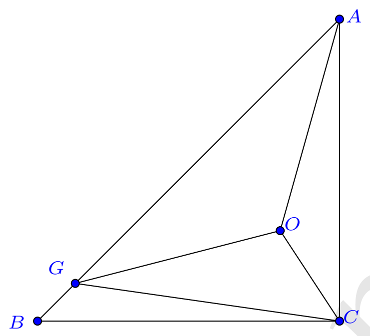
对于一般的在某曲线上寻找点 P, 使其到两定点的加权距离之和为最小，或更一般的极值问题:

$$F(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2})$$

式中 F 为有理函数, 均可以通过上述方法转化为求有理函数的条件极值。

加权费马点

如图, $AC=BC=8$, $AC\perp BC$, 点 G 在线段 AB 上, $AG=7\sqrt{2}$, 在 $\triangle ACG$ 内部有一个动点点 O，求 $\frac{\sqrt{2}}{2}OC+\sqrt{2}OA+\frac{\sqrt{10}}{2}OG$ 的最小值。



解：根据已知可得:

$$\vec{AC}=(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})\vec{AB},\quad \vec{AG}=\frac{7}{8}\vec{AB}$$

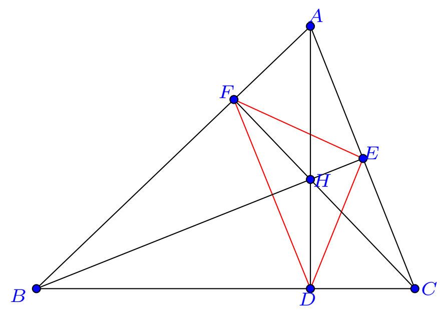
设

$$\vec{AO}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{AG}$$

则可将目标转化为单根式的极值。

Fagnano 定理

给定一个锐角三角形 ABC，在三边 BC,CA,AB 上分别取一点 D,E,F, 则当 $\triangle DEF$ 为垂足三角形时, 其周长为最小。



证明：令

$$s=\tan\frac{B}{2},t=\tan\frac{C}{2},p=\tan\frac{\angle BDF}{2},q=\tan\frac{\angle CDE}{2}$$

$$\vec{BD}=\lambda\vec{BC}$$

根据题设, 各变量应满足以下条件

$$s>0,t>0,1-st>0,p>0,q>0,1-sp>0,1-tq>0$$

$$\frac{p(s+t)(1-st)\lambda}{(p+s)(1-ps)t}<1,\quad \frac{q(s+t)(1-st)(1-\lambda)}{s(q+t)(1-qt)}<1$$

不难得知

$$
\begin{aligned}
\vec{BF} &= \frac{p(1+is)^2\lambda}{(p+s)(1-ps)}\vec{BC} \\
\vec{BE} &= \frac{t+2iqt-q^2t+q\lambda-2iqt\lambda-qt^2\lambda}{(q+t)(1-qt)}\vec{BC}
\end{aligned}
$$

因而 $\triangle DEF$ 的各边长可表示为

$$
\begin{aligned}
FD &= \frac{(1+p^2)s\lambda}{(p+s)(1-ps)}BC \\
DE &= \frac{(1+q^2)t(1-\lambda)}{(q+t)(1-qt)}BC \\
EF &= \frac{\sqrt{Z\cdot\bar{Z}}}{(p+s)(1-ps)(q+t)(1-qt)}BC
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
Z = {}& pt-pq^2t+st-p^2st-q^2st+p^2q^2st-ps^2t+pq^2s^2t+qs\lambda-p^2qs\lambda-pt\lambda+pq^2t\lambda \\
&+ps^2t\lambda-pq^2s^2t\lambda-qst^2\lambda+p^2qst^2\lambda-2ipqt-2iqst+2ip^2qst+2ipqs^2t+2ipqs\lambda \\
&+2ipqt\lambda+2ipst\lambda+2iqst\lambda-2ip^2qst\lambda-2ipq^2st\lambda-2ipqs^2t\lambda-2ipqst^2\lambda
\end{aligned}
$$

注意到 Z 是关于 λ 的一次式，因此只需令

$$
\frac{\bar{Z}}{Z} = \left(\frac{1+i\eta}{1-i\eta}\right)^2
$$

也即

$$
\lambda = \frac{(p+s)(1-ps)t(q-\eta)(1+q\eta)}{T}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
T = {}& pqs+pqt+pst+qst-p^2qst-pq^2st-pqs^2t-pqst^2+qs\eta-p^2qs\eta-pt\eta \\
&+pq^2t\eta+ps^2t\eta-pq^2s^2t\eta-qst^2\eta+p^2qst^2\eta-pqs\eta^2-pqt\eta^2-pst\eta^2-qst\eta^2 \\
&+p^2qst\eta^2+pq^2st\eta^2+pqs^2t\eta^2+pqst^2\eta^2
\end{aligned}
$$

即可将 $\triangle DEF$ 的各边长表示为有理式

$$
\begin{aligned}
FD &= \frac{(1+p^2)st(q-\eta)(1+q\eta)}{T}BC \\
DE &= \frac{(1+q^2)st(p+\eta)(1-p\eta)}{T}BC \\
EF &= -\frac{(p+q)(1-pq)st(1+\eta^2)}{T}BC
\end{aligned}
$$

$\triangle DEF$ 的周长为

$$
L = FD+DE+EF = \frac{2(p+q)st(1-p\eta)(1+q\eta)}{T}BC
$$

这是关于三个独立变量 p,q,η 的有理函数，我们不难求得符合条件的极值

$$
p = \frac{1-st}{s+t}, \quad q = \frac{1-st}{s+t}, \quad \eta = \frac{s-t}{1+st}
$$

$$
L_{min} = \frac{8st}{(1+s^2)(1+t^2)}BC
$$

验证即知此时 $\triangle DEF$ 正是垂足三角形。

2.2.12　一般有理表示

若三角形的内心 I 可表示为：$\vec{BI} = f\,\vec{BC}$, 其中 f 为有理形式，
将其与标准表示 $\vec{BI} = \frac{1+zw}{1+z}\,\vec{BC}$ 比较即有

$$\frac{1+zw}{1+z} = f$$

取共轭又有

$$\frac{1+wz}{w(1+z)} = \bar{f}$$

联立解出

$$z = -\frac{\bar{f}(1-f)}{f(1-\bar{f})},\quad w = \frac{f}{\bar{f}}$$

这就表明了三角形内角的单位复数可表示为有理形式，进而知三角形所有的二阶特征量或点均可有理表示，自然地，其一阶特征量或点也可有理表示。

以 $\vec{BI} = (u+iv)\,\vec{BC}\quad (v>0)$ 为例:
顶点 A, 外心 O, 外接圆半径 R, 旁心 I_A, 费尔巴哈点 F_e 分别表示如下

$$\begin{aligned}
\vec{BA} &= \frac{(u-1)(u+iv)^2}{-u+u^2+v^2}\,\vec{BC}\\
\vec{BO} &= \frac{i(1-u+iv)^2(u+iv)^2}{4v(-u+u^2+v^2)}\,\vec{BC}\\
R &= \frac{(u^2+v^2)(1-2u+u^2+v^2)}{4v(-u+u^2+v^2)}BC\\
\vec{BI_A} &= \frac{i(u-1)(u+iv)}{v}\,\vec{BC}\\
\vec{BF_e} &= \frac{u^2-u^3-2v^2+uv^2+iuv-2iu^2v}{u-u^2-3v^2+iv-2iuv}\,\vec{BC}
\end{aligned}$$

因此，对于一个给定的三角形结构，我们仅需着重探讨其内心是否可有理表示。

2.2.13　表示的转化

由重心坐标转化

一般情况下，重心坐标表示能够非常好地体现出对称之美。
对于 $\triangle ABC$ 所在平面上的点 P, 它的重心坐标表示为：$P = \alpha A + \beta B + \gamma C, (\alpha+\beta+\gamma=1)$。
式子可变形为

$$\vec{BP} = \alpha\,\vec{BA} + \gamma\,\vec{BC}$$

将 $\vec{BA} = z\,\vec{BC}$ 及三角形基本量的表示代入，就可得到 $\vec{BP}$ 关于 $\vec{BC}$ 的表示。

例如：对于三角形 ABC 重心 G 的等角共轭点 G'(又称共轭重心),
它的重心坐标[①]为

$$G' = \frac{a^2A + b^2B + c^2C}{a^2+b^2+c^2}$$

代入 $\vec{BA} = z\,\vec{BC}$ 及边长平方的表示

$$b^2 = (1-z)\left(1-\bar{z}\right)a^2, c^2 = z\,\bar{z}\,a^2$$

即得

$$\vec{BG'} = \frac{z\left(1+\bar{z}\right)}{2-z-\bar{z}+2z\,\bar{z}}\,\vec{BC}$$

[①] 绝大多数三角形特征点的重心坐标可在 ETC 网站上查到：https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html, 三线坐标与三角形特征点 (吴悦辰编著) 也附录了数千个特征点的三线坐标。

转化为重心坐标

对于通常的设法 $\overrightarrow{BA}=z\,\overrightarrow{BC}$, 记特征点 P 的表示为 $\overrightarrow{BP}=w\,\overrightarrow{BC}$。
又将 P 关于 $\triangle ABC$ 的重心坐标 $P=\alpha A+\beta B+\gamma C$ 改写为形式 $\overrightarrow{BP}=\alpha\,\overrightarrow{BA}+\gamma\,\overrightarrow{BC}$。
比较即知 $w=\alpha z+\gamma$, 分离虚部和实部后求出 α,γ, 再由 $\beta=1-\alpha-\gamma$ 求出 β。它们分别是

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{w-\bar{w}}{z-\bar{z}}\\ \beta&=\frac{z-\bar{z}-w+\bar{w}-z\,\bar{w}+w\,\bar{z}}{z-\bar{z}}\\ \gamma&=\frac{z\,\bar{w}-w\,\bar{z}}{z-\bar{z}}\end{aligned}\tag{2.45}$$

对于一般情形, 我们可以应用重心坐标的几何意义求出 (其中 O 为三角形 ABC 平面上的任意点):

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}=\frac{\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{OP}\otimes\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\otimes\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\otimes\overrightarrow{OP}\right)}{\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{OA}\otimes\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\otimes\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\otimes\overrightarrow{OA}\right)}\\ \beta&=\frac{S_{APC}}{S_{ABC}}=\frac{\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{OA}\otimes\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}\otimes\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\otimes\overrightarrow{OA}\right)}{\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{OA}\otimes\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\otimes\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\otimes\overrightarrow{OA}\right)}\\ \gamma&=\frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}=\frac{\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{OA}\otimes\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\otimes\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}\otimes\overrightarrow{OA}\right)}{\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{OA}\otimes\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\otimes\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\otimes\overrightarrow{OA}\right)}\end{aligned}\tag{2.46}$$

将其再与边长的表示 (或其他量的表示) 联合消元[①]。下面举例说明。
1. 对于第一类特征点的垂心表示 (2.17) 式, 首先得到

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{(z+\bar{z}-2)(z+\bar{z})}{(z-\bar{z})^2}\\ \beta&=\frac{(2-z-\bar{z})(z+\bar{z}-2zz^*)}{(z-\bar{z})^2}\\ \gamma&=\frac{(z+\bar{z})(z+\bar{z}-2z\,\bar{z})}{(z-\bar{z})^2}\end{aligned}$$

分别与边长的计算式 $c^2=z\,\bar{z},\quad b^2=(z-1)(\bar{z}-1)a^2$ 联合，消元掉 $z,\bar{z}$ 即有

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\\ \gamma&=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\\ \beta&=\frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\end{aligned}$$

从而 H 的重心坐标为:

$$P=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)A+(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)B+(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)C}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

2. 对于内心 I 的表示 (2.40) 式, 得到

$$\alpha=\frac{s(1+t^2)}{2(s+t)},\quad \beta=\frac{(1+s^2)t}{2(s+t)},\quad \gamma=\frac{1}{2}(1-st)$$

[①]【消元】常用的方法是辗转相除消元, Mathematica 的命令为 SubresultantPolynomialRemainders, 另一个命令是 GroebnerBasis, 它适用于较小规模的方程组。

分别与边长的计算式 $c^2 = z\,\bar{z}$,　$b^2 = (z-1)(\bar{z}-1)a^2$ 联合，消元掉参数 s, t 即有

$$\alpha = \frac{a}{a+b+c},\quad \beta = \frac{b}{a+b+c},\quad \gamma = \frac{c}{a+b+c}$$

从而 I 的重心坐标为:

$$I = \frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$$

转化为其他特殊设法的表示

对于某些特殊的设点方式, 我们只需选取任意三个对应点的表示, 就可以确定变量之间的关系, 进而对其余各点进行转化。举例如下:

设法一

在复平面的单位圆上取三个点作为三角形顶点，记为 $A=\alpha, B=\beta, C=\gamma$,
将其代入我们的一般表示: $\vec{BA} = z\,\vec{BC}$, 即知 $z = \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$
从而由 (2.17) 式知垂心

$$H = B + \frac{(z-1)(z+\bar{z})}{(z-\bar{z})}(C-B) = \alpha+\beta+\gamma$$

由 XX 式知布洛卡点

$$P = B + \frac{(z-1)(z+\bar{z})}{(z-\bar{z})}(C-B) = \frac{\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta\gamma-\alpha\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma^2-\alpha\beta\gamma^2+\beta^2\gamma^2}{\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\alpha\gamma^2-3\alpha\beta\gamma}$$

设法二

令 $A=\alpha^2, B=\beta^2, C=\gamma^2$, ($|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$)[①]。
对应于我们的二阶有理表示：$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC}$, 即有

$$\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2-\beta^2}$$

取共轭又有

$$\frac{(s+t)(1-st)}{s(1+it)^2} = \frac{\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2(\gamma^2-\beta^2)}$$

联立之，这共有四组对应，我们取其中一组：

$$s = i\frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma},\quad t = i\frac{\gamma+\alpha}{\gamma-\alpha}$$

从而由 (2.40 式) 知内心

$$I = B + \frac{1-st}{1-it}(C-B) = -\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$$

设法三

以三角形内切圆为单位圆, 并令内切圆的切点 $D=\alpha, E=\beta, F=\gamma$, ($|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$),
不难得知, 三角形的顶点表示为：

$$A = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma},\quad B = \frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha},\quad C = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

对应于我们的二阶有理表示：$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC}$, 即可得到关系：

$$s = -\frac{i(\beta+\gamma)}{\beta-\gamma},\quad t = -\frac{i(\gamma+\alpha)}{\gamma-\alpha}$$

由此我们可得到费尔巴哈点在此种设法下的一个表示:

$$F_e = B + \frac{(1-st)(1-st-2t^2+is-it)}{(1-it)^2(1-3st+is-it)}(C-B) = \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$$

[①]注: 此设法最初由史勇先生发现并应用。

特征量转化为标准形式的表示

特征量转化为边长或角度的正余弦、正余切等的表示与前面是完全相同的。

例如对于外接圆半径 $R = \frac{1+s^2}{4s}a$, 与 (2, 3) 式联立消元 s, t 即得到

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

特别地, 在许多问题中, 几何量关于边长或角度的正余弦、正余切的表示是完全对称的。此时，如果用具有特别意义的三个几何量: 半周长 l, 外接圆半径 R, 内切圆半径 r 来表示, 则结果往往更简洁一些。

例如我们根据 XXX 式和 2.40 式求得 OI 距离平方

$$OI^2 = \frac{(1+s^2)(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)}{16s^2(1+t^2)}a^2$$

与第二类特征量的第 (14), (15) 式联立消元 a, s, t 则得到

$$OI^2 = R(R-2r)$$

这是熟知的欧拉公式。

又如, 对于格尔刚点 Ge, 它是三角形顶点与内切圆在三边切点的连线之交点, 容易求得:

$$\vec{BGe} = \frac{(1+is)(1-is-2it)(1-st)}{(1-it)^2(1+s^2+st+t^2)}\vec{BC}$$

它与内心的距离为

$$IGe^2 = \frac{t^2(1-st)^2(1-s^2+s^4-4st+2s^3t-t^2+3s^2t^2+2st^3+t^4)}{(1+t^2)^2(1+s^2+st+t^2)^2}a^2$$

与第二类特征量的第 (13), (14), (15) 式联立消元 a, s, t 可得

$$IGe^2 = r^2 - \frac{3l^2r^2}{(r+4R)^2}$$

2.3 圆

圆是平面几何中另一类重要的研究对象。本节我们主要讨论圆的表示, 切线及相关问题处理的处理方法。

2.3.1 圆的表示

在直角坐标中，常见的形式为 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 或 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$。

常见的参数形式为: $\left(x_0 + r\frac{1-u^2}{1+u^2}, y_0 + r\frac{2u}{1+u^2}\right)$。

在重心坐标中, 经过平面不共线三点 A, B, C 的圆, 其上的点 P 表示为: $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$, α, β, γ 满足: $\alpha+\beta+\gamma = 1$ 以及 $\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2 = 0$。

在复平面上, 已知圆心和半径的圆方程表示为: $|z-z_0| = r$, 其参数形式: $z = x_0 + y_0 i + r\frac{1+iu}{1-iu}$。

若用向量表示, 对于圆上的点 P, 以及平面上给定的两个点 B, C, $\vec{BP} = z\,\vec{BC}$,

若已知圆的圆心点 Q 为 $\vec{BQ} = z_0\,\vec{BC}$, 半径为 rBC,

则由 $|P-Q| = |\,\vec{BP} - \vec{BQ}\,| = |z-z_0|BC = rBC$ 得到 $|z-z_0| = r$，这与复平面上的方程是一致的，因此我们讨论复平面上圆的表示即可。

下面我们对圆的参数表示做进一步的讨论。

2.3.2　一阶有理代换

注意到已知圆心和半径的圆的参数形式：$z = x_0 + y_0 i + r\frac{1+iu}{1-iu}$, 通分后成为

$$z = \frac{r + x_0 + y_0 i + (y_0 - ix_0 + ir)u}{1 - iu}$$

将其稍作推广, 即取如下形式:

$$z = \frac{a + bi + (c + di)u}{1 - iu}$$

不难得知, 它仍表示一个圆，其对应的直角坐标方程为:

$$\left(x - \frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

取特殊值, 有以下结论：

1. 令 $a = 1, b = s, c = 0, d = 0$, 则 $z = \frac{1+is}{1-iu}$, 这是一个经过 $0, 1$ 点的圆。

   由此, 经过 B, C 两点的圆可表示为:

   $$\vec{BP} = \frac{1+is}{1-iu}\,\vec{BC} \tag{2.47}$$

   若 $\triangle PBC$ 构成逆时针三角形, 参数 s, u 的值分别等于 $\cot P$ 和 $\cot C$, 这与 (2.39) 式是一致的。

2. 令 $a = 1, b = 0, c = s, d = 1$, 则 $z = \frac{1+su}{1-iu}$, 这也是一个经过 $0, 1$ 点的圆。

   相应地, 经过 B, C 两点的圆可表示为:

   $$\vec{BP} = \frac{1+su}{1-iu}\,\vec{BC} \tag{2.48}$$

3. 令 $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$, 则 $z = \frac{1+iu}{1-iu}$, 这是单位圆。

   相应地，已知圆心 O 及圆上的一点 B, 则圆上的点 P 可表示为:

   $$\vec{OP} = \frac{1+iu}{1-iu}\,\vec{OB} \tag{2.49}$$

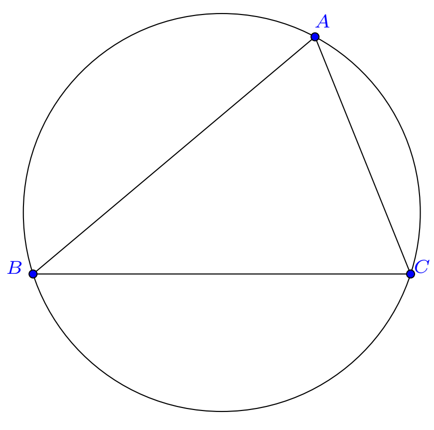
4. 令 $a = r + x_0, b = c = y_0, d = r - x_0$, 则 $z = x_0 + y_0 i + r\frac{1+iu}{1-iu}$, 这是中心在 $x_0 + y_0 i$, 半径为 r 的圆。

   相应地，对于平面上给定的两点 B, C, 如果一圆的圆心 O 为 $\vec{BO} = z_0\,\vec{BC}$, 半径为 rBC, 则圆上的点 P 可表示为:

   $$\vec{BP} = \left(z_0 + r\frac{1+iu}{1-iu}\right)\vec{BC} \tag{2.50}$$

上面列出的这些式子是常用的，我们可由它们推导其它的表示。

例如, 若已知 $\vec{BA} = w\,\vec{BC}$, 求 ABC 的外接圆。



由 (2.44) 式, 将点 A 代入即可解出

$$s = \frac{2w\,\bar{w} - w - \bar{w}}{w - \bar{w}} i$$

因此

$$\vec{BP} = \frac{2w(1-\bar{w})}{(w-\bar{w})(1-iu)}\,\vec{BC} \tag{2.51}$$

进一步地，圆可以表示为关于实数 u 的一般复数线性分式形式:

$$z = \frac{a+bu}{c+du} \tag{2.52}$$

其中 a, b, c, d 均为复数。

对于同一个圆来说, 这种表示不是唯一的, 我们由 (2.44) 及 (2.45) 即可看出。

不同的表示之间有什么关系呢?

设

$$z = \frac{a_1+b_1u}{c_1+d_1u} = \frac{a_2+b_2v}{c_2+d_2v}$$

其中 u, v 为不同实数。

解出 v 为关于 u 的线性分式

$$v = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1) + (b_1c_2 - a_2d_1)u}{(b_2c_1 - a_1d_2) + (b_2d_1 - b_1d_2)u}$$

可写为

$$v = \frac{p_1+q_1u}{p_2+q_2u}$$

该分式为既约分式，也即 p_1, q_1, p_2, q_2 不含公因式。

对此式取共轭又有:

$$v = \frac{\bar{p_1}+\bar{q_1}\,u}{\bar{p_2}+\bar{q_2}\,u}$$

于是

$$\frac{p_1+q_1u}{p_2+q_2u} = \frac{\bar{p_1}+\bar{q_1}\,u}{\bar{p_2}+\bar{q_2}\,u}$$

展开为关于 u 的二次方程。因为 u 可以取任意实数，所以各项系数均为 0，由此得到:

$$p_1\,\bar{q_1} = \bar{p_1}\,q_1, p_1\,\bar{p_2} = \bar{p_1}\,p_2, p_1\,\bar{q_2} = \bar{p_1}\,q_2$$

因为 p_1, q_1, p_2, q_2 不含公因式, 所以必有

$$p_1 = \bar{p_1}, p_2 = \bar{p_2}, q_1 = \bar{q_1}, q_2 = \bar{q_2}$$

也即 p_1, q_1, p_2, q_2 均为实数, 参数 v 是关于 u 的实线性分式。

圆心和半径

我们可以将参数表示转化为直角坐标方程而得到, 但这样有些麻烦。事实上可以利用复数的性质来求: 对于一般的用实参 u 的复线性分式表示的圆:

$$z = \frac{a+bu}{c+du}$$

做代换

$$w = \frac{\overline{c+du}}{c+du} = \frac{\bar{c}+\bar{d}\,u}{c+du}$$

w 即是单位复数 $|w|=1$。然后反解出

$$u=\frac{\bar{c}-cw}{dw-\bar{d}}$$

代入 z 的表示即有:

$$z=\frac{b\,\bar{c}-a\,\bar{d}}{d\,\bar{c}-c\,\bar{d}}-\frac{bc-ad}{d\,\bar{c}-c\,\bar{d}}w$$

移项并取模则为:

$$|z-\frac{b\,\bar{c}-a\,\bar{d}}{d\,\bar{c}-c\,\bar{d}}|=|\frac{bc-ad}{d\,\bar{c}-c\,\bar{d}}|$$

这就同时给出了圆心和半径。

例如，对于 (2.44) 式, 做代换 $w=\frac{1+iu}{1-iu}$, 则 $u=\frac{1-w}{1+w}i$, 于是

$$\vec{BP}=\frac{1+is}{1-iu}\,\vec{BC}=\left(\frac{1+is}{2}+\frac{1+is}{2}w\right)\vec{BC}$$

从而知圆心和半径为

$$\vec{BO}=\frac{1+is}{2}\,\vec{BC},\quad r=\frac{\sqrt{1+s^2}}{2}BC$$

切线

对于直角坐标系下的平面曲线, 若它的参数形式为 $(x(u),y(u))$, 那么切向量为 $(x'(u),y'(u))$,
同样地，对于向量表示的参数曲线: $\vec{BP}=z(u)\,\vec{BC}$, 它的切向量即为:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d}{du}\,\vec{BP}=z'(u)\,\vec{BC} \tag{2.53}$$

如果 $z'(u)$ 在某个参数 $u=u_0$ 处为 0, 即 $z'(u_0)=0$, 那么我们将

$$\boldsymbol{v}=\left(\lim_{u\to u_0}\frac{z'(u)}{(u-u_0)^n}\right)\vec{BC} \tag{2.54}$$

作为它在 u_0 处的切向量, 其中 n 为 $z'(u)$ 在 u_0 处的阶数：$z'(u)\sim(u-u_0)^n$。
此定义使得代数曲线在每一点的切向量均不为 **0** 向量。
一般来说, 参数的选择不同，所得的切向量表示不同，但它们的方向总是相同或相反的。

例如，经过 B,C 两点的圆：$\vec{BP}=\frac{1+is}{1-iu}\,\vec{BC}$,
对于通常的参数 u, 切向量 $\boldsymbol{v}=\frac{d}{du}\,\vec{BP}=\frac{i(1+is)}{(1-iu)^2}\,\vec{BC}$,
而在 B 点处, $u\to\infty$, $z'(u)\sim\frac{1}{u^2}$, 因此切向量为

$$\boldsymbol{v_B}=\left(\lim_{u\to\infty}\frac{i(1+is)}{(1-iu)^2}u^2\right)\vec{BC}=(-i+s)\,\vec{BC}$$

如果我们对参数 u 做一个变换 $u\to\frac{1}{t}$, $\vec{BP}=\frac{(i-s)t}{1+it}\,\vec{BC}$, 切向量 $\boldsymbol{v}=\frac{i-s}{(1+it)^2}\,\vec{BC}$。
在 B 点处, 参数 $t=0$, $\boldsymbol{v_B}=(i-s)\,\vec{BC}$。

对于切线上的点 Q, 利用向量加法，即可表示为：

$$\vec{BQ}=\vec{BP}+\lambda\boldsymbol{v} \tag{2.55}$$

其中 λ 为实数。

四点共圆

A,B,C,D 四点共圆的充要条件是这四点的交比为实数, 即

$$\frac{A-C}{A-B}\frac{D-B}{D-C}\in\mathbb{R} \tag{2.56}$$

或写作

$$\operatorname{Im}\left(\frac{A-C}{A-B}\frac{D-B}{D-C}\right)=0 \tag{2.57}$$

这可由一条弦所对应的圆心角相等或互补得到, 也可以选取圆的参数表示做计算得到。

例如，根据 2.44 式, 经过 BC 两点的圆上的点可表示为 $\vec{BP}=\frac{1+is}{1-iu}\vec{BC}$。
若 A,D 在此圆上, 则 $\vec{BA}=\frac{1+is}{1-iu_1}\vec{BC}$, $\vec{BD}=\frac{1+is}{1-iu_2}\vec{BC}$, 于是

$$\frac{A-C}{A-B}\frac{D-B}{D-C}=\frac{s+u_1}{s+u_2}\in\mathbb{R}$$

另一方面, 若 A 点在经过经过 BC 两点的圆 Γ_1 上, 令 $\vec{BA}=\frac{1+is}{1-iu_1}\vec{BC}$,
其中 $u_1\neq\infty$ 并且 $u_1\neq -s$, 否则 A 与 B 点或 C 点重合。
D 点在经过经过 BC 两点的圆 Γ_2 上, 令 $\vec{BD}=\frac{1+ip}{1-iu_2}\vec{BC}$,
其中 $u_2\neq\infty$ 并且 $u_2\neq -p$, 否则 D 与 B 点或 C 点重合。
计算即有

$$\frac{A-C}{A-B}\frac{D-B}{D-C}=\frac{(s+u_1)(p-i)}{(p+u_2)(s-i)}$$

若右方属于实数, 则只能是 $p=s$, 这就说明了圆 Γ_1 和圆 Γ_2 是相同的。

我们可以根据 (2.53) 式得到经过 A,B,C 三点的圆的另一种表示:
设 P 点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上, 令 $\frac{P-A}{P-C}\frac{B-C}{B-A}=u$, 则

$$P=\frac{A(B-C)+C(A-B)u}{(B-C)+(A-B)u} \tag{2.58}$$

参数取 $u=0,1,\infty$ 时分别为 A,B,C 三点。

2.3.3 圆与直线

圆与直线的交点

半径为 R 的圆，圆心到直线的距离为 d, 讨论直线与圆的交点情况。
设圆心 O, 在直线上的垂足为 A, 则圆可表示为参数形式:

$$\vec{OP}=\frac{R}{d}\frac{1+iu}{1-iu}\vec{OA}$$

若点 P 是圆与直线的交点，则 $AP\perp OA$, 于是

$$\operatorname{Re}\left(\frac{P-A}{O-A}\right)=0$$

由此得到: $(R+d)u^2=R-d$
这有三种情况:

1. $d<R$, 此时直线与圆相交, u 有两个实根 $u=\pm\sqrt{\frac{R-d}{R+d}}$。
   交点 $\vec{OP}=\left(1\pm i\frac{\sqrt{R^2-d^2}}{d}\right)\vec{OA}$, 弦长为 $2\sqrt{R^2-d^2}$
2. $d=R$, 此时直线与圆相切, u 仅有一个根 $u=0$, 交点即为点 A。

3. $d > R$, 此时直线与圆相离, 此时并无一般意义下的交点。

   不过令我们感兴趣的是，如果将两个虚根 $u = \pm i\frac{\sqrt{d-R}}{\sqrt{d+R}}$ 代回计算，

   仍可以得到两个“虚交点”：$\vec{OP_1} = \left(1 + \frac{\sqrt{d^2-R^2}}{d}\right)\vec{OA}$

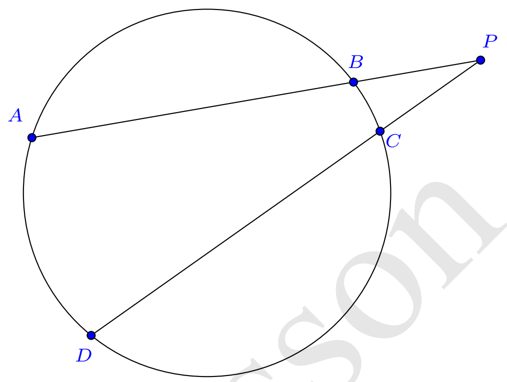
   $\vec{OP_2} = \left(1 - \frac{\sqrt{d^2-R^2}}{d}\right)\vec{OA}$

   它们关于直线 l 对称, 一个在圆外，一个在圆内, 且有距离关系：$OP_1 \cdot OP_2 = R^2$。

   也就是说，它们是圆的一对反演点[①]。

割线定理

对于给定圆及所在平面上的一点 P, 由 P 作两条直线, 直线 l_1 交圆于点 A, B, 直线 l_2 交圆于点 C, D, 那么 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$。



证明: 由经过两点的圆的参数表示，圆上的任意点 Q 可表示为：

$$\vec{AQ} = \frac{1+is}{1-iu}\vec{AB}$$

于是令

$$\vec{AC} = \frac{1+is}{1-ip}\vec{AB}, \quad \vec{AD} = \frac{1+is}{1-iq}\vec{AB}$$

而 P 点在 AB 直线上，故又可令

$$\vec{AP} = \lambda\vec{AB}$$

C, D, P 三点共线，即有 $\mathrm{Im}\left(\frac{C-P}{D-P}\right) = 0$, 解出

$$q = -\frac{1+s^2-\lambda+ps\lambda}{(p+s)\lambda}$$

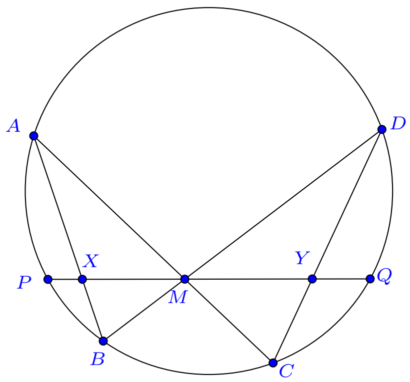
然后计算各线段长度：

$$\begin{aligned}
PA &= |\lambda|AB \\
PB &= |1-\lambda|AB \\
PC &= \sqrt{\frac{1+s^2-2\lambda+2ps\lambda+\lambda^2+p^2\lambda^2}{1+p^2}}AB \\
PD &= \sqrt{\frac{(1+p^2)\lambda^2(1-\lambda)^2}{1+s^2-2\lambda+2ps\lambda+\lambda^2+p^2\lambda^2}}AB
\end{aligned}$$

因而 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

[①]【圆的反演点】对于给定圆, 如果其所在平面上的两点连线经过圆心, 且它们到圆心的距离之积等于半径的平方, 则称这两点互为反演点。

坎迪定理



证明: 因 A, B, C, D, P, Q 六点共圆，故可令

$$\vec{PA} = \frac{1+is}{1-it_1}\vec{PQ},\quad \vec{PB} = \frac{1+is}{1-it_2}\vec{PQ},\quad \vec{PC} = \frac{1+is}{1-it_3}\vec{PQ},\quad \vec{PD} = \frac{1+is}{1-it_4}\vec{PQ}$$

又设 $\vec{PM} = \lambda\vec{PQ}$, 分别由 A, M, C 三点共线和 B, M, D 三点共线，得

$$\lambda = \frac{1+s^2}{1-st_1-st_3-t_1t_3} = \frac{1+s^2}{1-st_2-st_4-t_2t_4}$$

再设 $\vec{PX} = \mu\vec{PQ}, \vec{PY} = \nu\vec{PQ}$, 分别由 A, X, B 三点共线和 B, Y, C 三点共线，又有

$$\mu = \frac{1+s^2}{1-st_1-st_2-t_1t_2}, \nu = \frac{1+s^2}{1-st_3-st_4-t_3t_4}$$

将这几个式子代入即知等式

$$\frac{1}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\nu-\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}$$

是成立的。也即有

$$\frac{1}{MX} - \frac{1}{MY} = \frac{1}{MP} - \frac{1}{MQ}$$

2.3.4　两圆

增加两圆的表示问题:

(1). 有公共弦的两圆表示. —-> 以公共弦为基向量表示

(2). 相切两圆的表示. —-> 以切点及半径为基向量表示

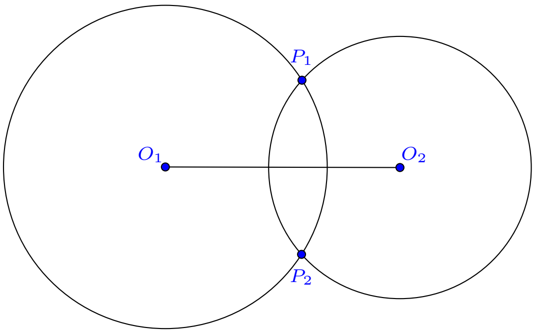
(3). 相离两圆的表示. —-> 以虚交点的弦为基向量表示

(4). 以一条公切线为基向量的表示 (外公切线或内公切线)

(5). 以外位似中心-内位似中心为基向量表示

两圆的交点

半径分别为 R, r 的两圆, 圆心距为 d，讨论两圆的交点情况。



设两圆圆心分别为 O_1, O_2, 则圆 O_1 上的点可表示为:

$$\vec{O_1P} = \frac{R}{d}\frac{1+iu}{1-iu}\vec{O_1O_2}$$

若它是两圆的交点, 则又可表示为圆 O_2 的参数形式:

$$\vec{O_2P} = \frac{r}{d}\frac{1+iv}{1-iv}\vec{O_2O_1}$$

两式相减得到:

$$\vec{O_1O_2} = \frac{R}{d}\frac{1+iu}{1-iu}\vec{O_1O_2} - \frac{r}{d}\frac{1+iv}{1-iv}\vec{O_2O_1}$$

因此

$$1 = \frac{R}{d}\frac{1+iu}{1-iu} + \frac{r}{d}\frac{1+iv}{1-iv}$$

分离实部和虚部后得到方程组:

$$\begin{cases} d - r - R - duv - ruv - Ruv = 0 \\ -du + ru - Ru - dv - rv + Rv = 0 \end{cases}$$

再消去 v 得到关于 u 的二次方程:

$$(d-r-R)(d+r-R) + (d-r+R)(d+r+R)u^2 = 0$$

根据解的情况讨论如下:

1. $r \le R, R-r < d < R+r$, 或者 $R < r, r-R < d < r+R$, 此时两圆相交, u 有两个实根

$$u = \pm\sqrt{\frac{(-d+r+R)(d+r-R)}{(d-r+R)(d+r+R)}}$$

   交点

$$\vec{O_1P} = \frac{d^2 - r^2 + R^2 \pm i\sqrt{(-d+r+R)(d+r-R)(d-r+R)(d+r+R)}}{2d^2}\vec{O_1O_2}$$

   弦长

$$\frac{\sqrt{(-d+r+R)(d+r-R)(d-r+R)(d+r+R)}}{d}$$

2. $d = r+R$(两圆外切), 或者 $r < R, d+r = R$(圆 $O2$ 内切于圆 O_1), 或者 $r > R, d+R = r$(圆 O_1 内切于圆 O_2), u 仅有一个根,

   交点为两圆圆心连线与圆相交的其中一个点。

3. $d+r < R$(圆 O_2 在圆 O_1 内部), 或者 $d+R < r$(圆 O_1 在圆 O_2 内部), 或者 $d > r+R$(两圆外离)

   此时并无一般意义下的交点。

   不过如果将两个虚根

$$u = \pm i\sqrt{\frac{(d-r-R)(d+r-R)}{(d-r+R)(d+r+R)}}$$

代回计算, 仍可以得到两个 “虚交点”:

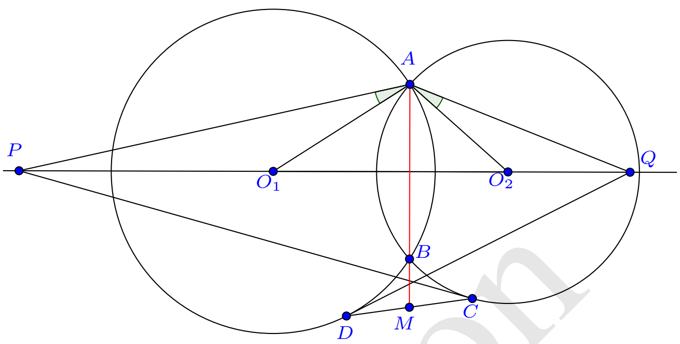
$$\overrightarrow{O_1P_1}=\frac{d^2-r^2+R^2+\sqrt{(d-r-R)(d+r-R)(d-r+R)(d+r+R)}}{2d^2}\overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\overrightarrow{O_1P_2}=\frac{d^2-r^2+R^2+\sqrt{(d-r-R)(d+r-R)(d-r+R)(d+r+R)}}{2d^2}\overrightarrow{O_1O_2}$$

它们在圆心的连线上，并且它们是圆 O_1 的一对反演点 $O_1P_1\cdot O_1P_2=R^2$, 也是圆 O_2 的一对反演点 $O_2P_1\cdot O_2P_2=r^2$。

两圆相交弦问题

设圆 O_1 和圆 O_2 交于点 A,B, P,Q 在线段 O_1O_2 上, 且满足 $\angle O_1AP=\angle O_2AQ$, PC 是圆 O_2 的切线, QD 是圆 O_1 的切线, M 是 CD 的中点。求证: A,M,B 三点共线。



证明: 以两圆的公共弦为基向量, 则圆 O_1 和圆 O_2 上的点可分别设为

$$\overrightarrow{AT_1}=\frac{1+ip}{1-iu}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AT_2}=\frac{1+iq}{1-iv}\overrightarrow{AB}$$

于是两圆的圆心表示为:

$$\overrightarrow{AO_1}=\frac{1}{2}(1+ip)\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO_2}=\frac{1}{2}(1+iq)\overrightarrow{AB}$$

又 P,Q 在线段 O_1O_2 上, 因此设

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AO_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{AO_2},\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{AO_1}+(1-\mu)\overrightarrow{AO_2}$$

由 $\angle O_1AP=\angle O_2AQ$ 知 $\mathrm{Im}\left(\frac{O_1-A}{P-A}\frac{O_2-A}{Q-A}\right)=0$, 展开即是

$$1+q^2-\lambda-q^2\lambda-\mu-q^2\mu-p^2\lambda\mu+q^2\lambda\mu=0$$

令

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1+iq}{1-iv}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}=\frac{1+ip}{1-iu}\overrightarrow{AB}$$

由 PC 是圆 O_2 的切线, QD 是圆 O_1 的切线知有

$$\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{PC}\otimes\frac{d}{dv}\overrightarrow{AC}\right)=0,\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{QD}\otimes\frac{d}{du}\overrightarrow{AD}\right)=0$$

由此解出

$$\lambda=\frac{(1+q^2)(1+v^2)}{(p-q)(q+2v-qv^2)},\mu=\frac{1+2p^2-pq+2pu-2qu+u^2+pqu^2}{(p-q)(p+2u-pu^2)}$$

代入前式即有

$$p+q+u+qu^2+v+u^2v+pv^2+uv^2=0$$

而 M 是 CD 的中点

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\frac{1+ip}{1-iu}+\frac{1+iq}{1-iv})\overrightarrow{AB}$$

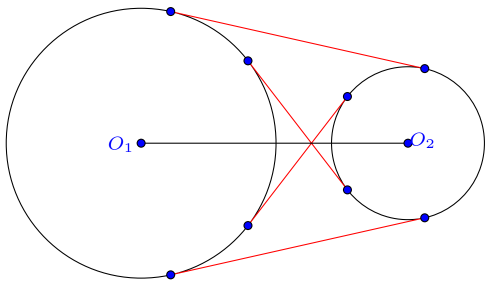
A, M, B 三点共线即是 $\operatorname{Im}\left(\frac{M-A}{B-A}\right)=0$, 展开为

$$p+q+u+qu^2+v+u^2v+pv^2+uv^2=0$$

这正是前面所得到的等式, 命题得证。

两圆公切线

两圆的方程分别是 $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$, $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$, 求内外公切线。



解：本题是以直角坐标方程给出的形式, 我们考虑在复平面上进行求解。
两圆上的点可分别用复数表示：

$$z_1=a_1+b_1i+\frac{r_1(1+iu)}{1-iu}, z_2=a_2+b_2i+\frac{r_2(1+iv)}{1-iv}$$

圆上点的切向量分别为 $\frac{dz_1}{du}$ 和 $\frac{dz_2}{du}$。
对于公切线在两圆的切点而言，这两切向量的方向是一致的, 也即

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dz_1}{du}\otimes\frac{dz_2}{dv}\right)=0$$

展开计算得到

$$(u-v)(uv+1)=0$$

$u=v$ 时对应的是外公切线, $uv+1=0$ 时对应的是内公切线, 这不难由圆上点随参变量的变化情况得知。
另外, 在切点的切向量与两个切点的连线方向也是一致的，因此

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dz_1}{du}\otimes(z_2-z_1)\right)=0$$

对于外公切线:

$$(a_1-a_2-r_1+r_2)u^2-2u(b_1-b_2)+(-a_1+a_2-r_1+r_2)=0$$

对于内公切线:

$$(a_1-a_2-r_1-r_2)u^2-2u(b_1-b_2)+(-a_1+a_2-r_1-r_2)=0$$

对于内外公切的长度, 我们可以仅用两圆的圆心距 d 和半径 r_1, r_2 表示。
为简化计算，我们可以令一个圆的圆心在原点, 另一个圆的圆心在 $(d,0)$ 处, 即 $a_1=0, b_1=0, a_2=d, b_2=0$。
对于外公切线，上面的方程成为：$u^2(-d-r_1+r_2)+(d-r_1+r_2)=0$,
求解得到 $u=\pm\frac{\sqrt{d-r_1+r_2}}{\sqrt{d+r_1-r_2}}$, 对应的两个切点分别为:

$$z_1=\frac{r_1}{d}(r_1-r_2\pm i\sqrt{d-(r_1-r_2)^2})$$

$$z_2=d+\frac{r_2}{d}(r_1-r_2\pm i\sqrt{d-(r_1-r_2)^2})$$

于是外公切线的长度为 $\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$

对于内公切线，上面的方程成为: $u^2(-d-r_1-r_2)+(d-r_1-r_2)=0$
求解得到 $u=\pm\frac{\sqrt{d-r_1-r_2}}{\sqrt{d+r_1+r_2}}$, 对应的两个切点分别为:

$$z_1=\frac{r_1}{d}(r_1+r_2\pm i\sqrt{d-(r_1+r_2)^2})$$

$$z_2=d-\frac{r_2}{d}(r_1+r_2\pm i\sqrt{d-(r_1+r_2)^2})$$

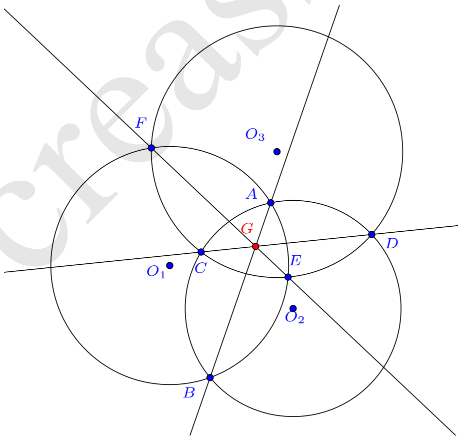
于是内公切线的长度为 $\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$
以上求解公切线的方法，我们将在后文中多次应用。

2.3.5 三圆

增加三圆的表示问题:
(1). 三圆相切，以切点三角形表示
(2). 三圆相交，以交点？/ 公切线？表示
(3). 三圆相离，以虚交点？/ 公切线？表示

蒙日定理

1. 在平面上有任意三个圆，假如这三个圆的圆心不在同一条直线上，那么有三条根轴会相交在一个点上，这个点被称作根心。假如这三个圆的圆心在同一条直线上，那么这三条根轴相互平行。



证明: 如图, 我们选取其中两圆的一条相交弦 $\vec{AB}$ 为基向量, 然后令

$$\vec{AC}=\frac{1+is}{1-iu}\vec{AB}$$

则因 D 也在 $\triangle ABC$ 的外接圆上, 可令

$$\vec{AD}=\frac{1+is}{1-iv}\vec{AB}$$

再令

$$\vec{A\mathrm{E}}=\frac{1+ip}{1-im}\vec{AB}$$

因 F 在 $\triangle ABE$ 的外接圆上, 又可令

$$\vec{AF}=\frac{1+ip}{1-in}\vec{AB}$$

以上各参数，因三圆各不相同且各点不重合而有

$$u\neq v, s\neq p, m\neq n$$

根据 $FCED$ 四点共圆，知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{E-C}{E-D}\frac{F-D}{F-C}\right)=0$$

从而可得关系式：

$$mn+mp+np+p^2-s^2+mns^2+mps^2+nps^2-su-p^2su-sv-p^2sv-uv-p^2uv=0$$

另一方面，容易求得 AB 与 CD 的交点 G:

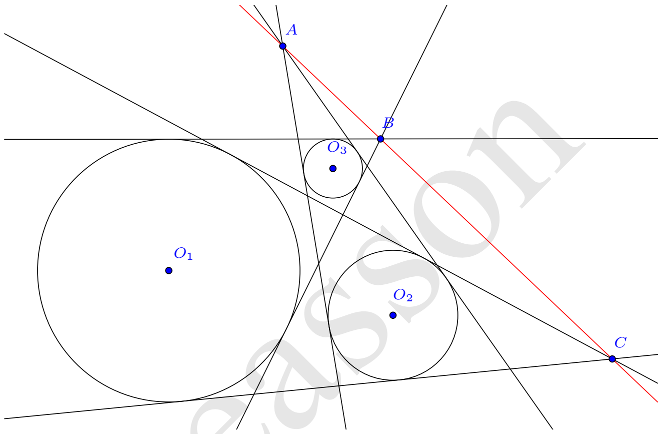
$$\vec{AG}=\frac{1+s^2}{1-su-sv-uv}\vec{AB}$$

在上述关系式下，计算知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{G-E}{G-F}\right)=0$$

即 G 也在直线 EF 上。

2. 任意三个圆，找出两两外公切线的交点，这三个交点共线。



证明：如果有两个圆的半径相同，则它们的公切线是平行的，其交点为无穷远，这不是我们考虑的情形，因而可以假定 $r_1>r_2>r_3$。

容易得知

$$\vec{O_1C}=\frac{r_1}{r_1-r_2}\vec{O_1O_2},\quad \vec{O_1B}=\frac{r_1}{r_1-r_3}\vec{O_1O_3},\quad \vec{O_2A}=\frac{r_2}{r_2-r_3}\vec{O_2O_3}$$

这利用简单的三角形相似或旋转即可得出。

再令

$$\vec{O_1O_3}=z\,\vec{O_1O_2}$$

则以上表示可统一为以 $\vec{O_1O_2}$ 为基向量的表示：

$$\vec{O_1C}=\frac{r_1}{r_1-r_2}\vec{O_1O_2},\quad \vec{O_1B}=\frac{r_1z}{r_1-r_3}\vec{O_1O_2},\quad \vec{O_1A}=\frac{zr_2-r_3}{r_2-r_3}\vec{O_1O_2}$$

从而

$$\frac{A-B}{B-C}=\frac{(r_1-r_2)r_3}{r_1(r_2-r_3)}\in\mathbb{R}$$

即三个交点共线。

2.3.6 二阶有理代换

迄今为止, 我们还没有对圆上两点的距离进行讨论。

前面我们给出了圆的一阶有理表示

$$z=\frac{(a+bi)+(c+di)u}{1-iu}$$

如果用它来计算距离, 则其上两点的距离为

$$|z(u)-z(v)|=\sqrt{(a+d)^2+(b-c)^2}\frac{|u-v|}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}}$$

对于给定的圆来说, $\sqrt{(a+d)^2+(b-c)^2}$ 是一个常量, 因而不是我们所关心的。但 $\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}$ 则意味着许多计算均要涉及根式, 这是非常不便的。

容易发现，如果做代换 $u\to\frac{2p}{1-p^2}, v\to\frac{2q}{1-q^2}$, 那么距离即是关于 p,q 的有理式了：

$$|z(p)-z(q)|=2\sqrt{(a+d)^2+(b-c)^2}\frac{|(p-q)(1+pq)|}{(1+p^2)(1+q^2)}$$

2.3.7　圆的二阶有理表示

如果

$$z=\frac{a_1u^2+b_1u+c_1}{a_2u^2+b_2u+c_2}$$

表示一个圆，则我们称它是圆的一个二阶有理表示。

特别地,

$$z=\frac{(a+bi)(1-u^2)+2(c+di)u}{(1-iu)^2}$$

表示一个中心为 $(\frac{a-d}{2},\frac{b+c}{2})$, 半径 $\frac{\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2}$ 的圆，它可由圆的一阶有理表示

$$z=\frac{(a+bi)+(c+di)u}{1-iu}$$

经代换 $u\to\frac{2u}{1-u^2}$ 得到。

为使得 z 关于 u 是单值的, 我们限定 $u\in(0,+\infty)$。

特别地, 取 $a=1,b=0,c=\frac{1-s^2}{2s},d\to 0$, 得到

$$z=\frac{(s+u)(1-su)}{s(1-iu)^2}$$

这正是我们前面经常使用的三角形表示式，其中各量均具有明确的几何意义。转化为向量形式, 也就是:

经过 B,C 两点的圆, 可以表示为:

$$\vec{BP}=\frac{(s+u)(1-su)}{s(1-iu)^2}\vec{BC} \tag{2.59}$$

其中参数 $s>0$, 参数 u 的取值范围是 $[0,+\infty)$, 我们在后文中将经常用到它。

一般的, 由圆的一阶有理表示 $z=\frac{a+bu}{c+du}$ (其中 a,b,c,d 为复数) 作代换 $u\to\frac{q_1u^2+q_2u+q_3}{p_1u^2+p_2u+p_3}$(其中 p_i,q_i 是实数), 均可得到一个圆的二阶有理表示, 但是否所有圆的二阶有理表示均可由圆的一阶有理表示经上述代换而得, 尚不得而知。

圆内接三角形的内心有理化

在上节的参数表示下, 圆上两点的距离为:

$$|z(u)-z(v)|=\frac{(1+s^2)(1+uv)}{s(1+u^2)(1+v^2)}|u-v|$$

根据内心的重心表示 $I=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$ 立即可知, 任意圆内接三角形的内心可有理表示，进而知圆内接三角形的所有第二类特征点均可有理表示, 这使得利用该表示可以处理相当广泛的平面几何问题。

2.3.8　一般的有理代换

同阶的表示，计算量上也大致相同，因为同阶的表示之间一般存在线性变换关系。

2.3.9　二次根式的有理化

对于一般的二次根式 $\sqrt{(a_1z+b_1)(a_2z+b_2)}$, 其中 a_1,b_1,a_2,b_2,z 为复数。

若令

$$\frac{a_1z+b_1}{a_2z+b_2}=w^2$$

则可将根式转化为有理表示

$$\sqrt{(a_1z+b_1)(a_2z+b_2)}=\pm\frac{w(a_1-a_2w^2)}{a_1b_2-a_2b_1}$$

通过限制 w 的取值范围, 我们选取其中一个分支即可。例如对于 $\sqrt{1+t^2}$, 它可分解为 $\sqrt{(1+it)(1-it)}$

令

$$\frac{1+it}{1-it}=\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^2$$

即

$$t=\frac{2u}{1-u^2}$$

则

$$\sqrt{1+t^2}=\pm\frac{1+u^2}{1-u^2}$$

若规定 $u\in(-1,1)$, 则选取取正号的分支。

由此, 对于一般的二次方程，$az^2+bz+c=0$, 其中 a,b,c,z 为复数。

如果判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 可分解为关于某个参数的一次式之积，那么我们应用如上代换，就能将 z 有理地表示出来。

通常我们选取图形中角度的单位复数作为变量，这可使得表示具有更明确的几何意义，也可使得对于变量取值范围的讨论更简单。

阿氏圆的有理表示

平面上与两定点 A,B 的距离之比为定值的所有点 P 构成一个圆，称为阿氏圆。

解：设 $\vec{AP}=(u+iv)\,\vec{AB}$, 则由 $\frac{AP}{BP}=k$ 可得

$$-k^2+2k^2u+u^2-k^2u^2+v^2-k^2v^2=0$$

左方关于 u 的判别式为

$$\Delta=4(k+v-k^2v)(k-v+k^2v)$$

于是可设 $\frac{k+v-k^2v}{k-v+k^2v}=t^2$, 也即 $v=\frac{k\left(1-t^2\right)}{(k^2-1)(1+t^2)}$, 将其代入前面的式子分解因式有

$$(-k^2-2kt-k^2t^2-u+k^2u-t^2u+k^2t^2u)(-k^2+2kt-k^2t^2-u+k^2u-t^2u+k^2t^2u)=0$$

因为 t 的符号是未确定的, 可正可负，所以我们选取其中一支即可:

$$u=\frac{k(k-2t+kt^2)}{(k^2-1)(1+t^2)}$$

这就得到了 P 的参数表示:

$$\vec{AP}=\frac{k(-1+ik-it+kt)}{(k^2-1)(i+t)}\,\vec{AB}$$

利用前面求圆心和半径的方法，令 $\frac{-i+t}{i+t}=z$, 化简得到:

$$\vec{AP}=\left(\frac{k^2}{k^2-1}-\frac{k}{k^2-1}iz\right)\vec{AB}$$

这表明 P 的轨迹是以 $\frac{k^2}{k^2-1}$ 为圆心, 以 $|\frac{k}{k^2-1}|$ 为半径的圆。

2.3.10　格林面积公式

给定平面上的一条分段光滑的闭曲线 L(曲线上的点表示为 P) 及一定点 A，则曲线所围面积为沿 L 的逆时针积分

$$S=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\oint_L \overrightarrow{AP}\otimes d\,\overrightarrow{AP}$$

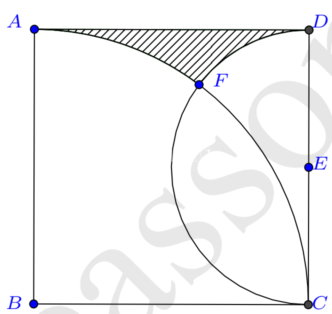
其几何是明确的，为微小三角形的有向面积之和。
例如：对于圆 $\overrightarrow{AP}=\frac{1-iu}{1+iu}\overrightarrow{AB}$，其面积

$$S=-\frac{1}{2}\oint_L \frac{1-iu}{1+iu}\overrightarrow{AB}\otimes\frac{d}{du}\left(\frac{1-iu}{1+iu}\overrightarrow{AB}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}AB^2=\pi AB^2$$

我们可以应用复向量的加减法来求某些难以直接计算的面积

格林公式。求扇形面积。多边形面积：四边形面积 (婆啰嗪面积、俄罗斯杀手问题)，高斯凸五边形面积。阴影部分面积。连续曲线的面积。

求正方形阴影部分面积



解：沿阴影围道逆时针积分

$$S=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\oint_L \overrightarrow{BP}\otimes d\,\overrightarrow{BP}=-\frac{1}{2}\int_{\overline{DA}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BP}\otimes d\,\overrightarrow{BP}\right)-\frac{1}{2}\int_{\overparen{AF}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BP}\otimes d\,\overrightarrow{BP}\right)-\frac{1}{2}\int_{\overparen{FD}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BP}\otimes d\,\overrightarrow{BP}\right)$$

右方第一项 $=S_{\triangle BDA}$, 第二项 $=-S_{\overparen{BFA}}$,
对第三项，利用 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EP}$ 以及 $\overrightarrow{BE}$ 是定值，其微分为 0，可得

$$-\frac{1}{2}\int_{\overparen{FD}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BP}\otimes d\,\overrightarrow{BP}\right)=-\frac{1}{2}\int_{\overparen{FD}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BE}\otimes d\,\overrightarrow{EP}\right)-\frac{1}{2}\int_{\overparen{FD}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{EP}\otimes d\,\overrightarrow{EP}\right)$$

此式右方的前一项为

$$-\frac{1}{2}\int_{\overparen{FD}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BE}\otimes d\,\overrightarrow{EP}\right)=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BE}\otimes\int_{\overparen{FD}}d\,\overrightarrow{EP}\right)=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BE}\otimes\overrightarrow{ED}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BE}\otimes\overrightarrow{EF}\right)=S_{\triangle BED}-S_{\triangle BEF}$$

后一项为 $-S_{\overparen{EDF}}$。
合并以上所有结果即知阴影部分面积

$$S=S_{\triangle BDA}+S_{\triangle BED}-S_{\triangle BEF}-S_{\overparen{BFA}}-S_{\overparen{EDF}}$$

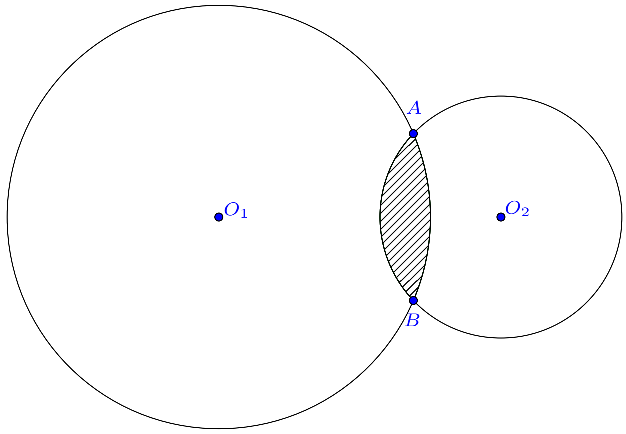
可设 $\overrightarrow{BF}=\frac{1-iu}{1+iu}\overrightarrow{BC}$, 由 EF 的距离为 BC 长度的一半解出 $u=-\frac{1}{2}$，于是 $\overrightarrow{BF}=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\overrightarrow{BC}$
进而知各部分的面积为

$$S_{\overparen{BFA}}=\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4}BC^2, S_{\overparen{EDF}}=\frac{1}{2}\arctan\frac{4}{3}\left(\frac{BC}{2}\right)^2, S_{\triangle BEF}=\frac{1}{4}BC^2, S_{\triangle BED}=\frac{1}{4}BC^2, S_{\triangle BDA}=\frac{1}{2}BC^2$$

于是最终得到

$$S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\arctan\frac{4}{3}\right)BC^2$$

两圆的相交面积



解: 我们沿相交区域的边界逆时针积分:

$$S=-\frac{1}{2}\oint\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AP}\otimes d\,\overrightarrow{AP}\right)=-\frac{1}{2}\int_{\widehat{DEC}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AP}\otimes d\,\overrightarrow{AP}\right)-\frac{1}{2}\int_{\widehat{CFD}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AP}\otimes d\,\overrightarrow{AP}\right)$$

对第二项，利用复向量的加减法，有

$$\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AP}\otimes d\,\overrightarrow{AP}\right)=\operatorname{Im}\left(\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)\otimes d\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)\right)$$

因 $\overrightarrow{AB}$ 是常量，其微分为 0，所以上式

$$=\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AB}\otimes d\,\overrightarrow{BP}\right)+\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BP}\otimes d\,\overrightarrow{BP}\right)$$

于是

$$S=-\frac{1}{2}\int_{\widehat{DEC}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AP}\otimes d\,\overrightarrow{AP}\right)-\frac{1}{2}\int_{\widehat{CFD}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BP}\otimes d\,\overrightarrow{BP}\right)-\frac{1}{2}\int_{\widehat{CFD}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AB}\otimes d\,\overrightarrow{BP}\right)$$

右方第一项为扇形 ADC 的面积 $S_{\widehat{ADC}}$, 第二项为扇形 BCD 的面积 $S_{\widehat{BCD}}$

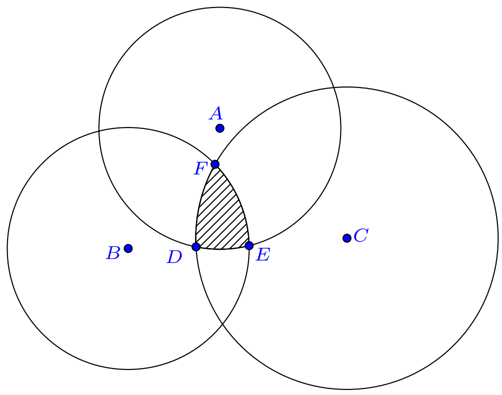
第三项

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int_{\widehat{CFD}}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AB}\otimes d\,\overrightarrow{BP}\right)\\=&-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AB}\otimes\int_{\widehat{CFD}}d\,\overrightarrow{BP}\right)\\=&-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AB}\otimes\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\right)\right)\\=&\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AD}\otimes\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{AB}\otimes\overrightarrow{AC}\right)\\=&-S_{ADB}-S_{ABC}\end{aligned}$$

合并即得两圆相交部分的面积

$$S=S_{\widehat{ADC}}+S_{\widehat{BCD}}-S_{\triangle ADB}-S_{\triangle ABC}$$

三圆的相交面积



解: 沿三段弧线积分：

$$S=-\frac{1}{2}\int_{\widehat{DE}}\operatorname{Im}\left(\vec{AP}\otimes d\,\vec{AP}\right)-\frac{1}{2}\int_{\widehat{EF}}\operatorname{Im}\left(\vec{AP}\otimes d\,\vec{AP}\right)-\frac{1}{2}\int_{\widehat{FD}}\operatorname{Im}\left(\vec{AP}\otimes d\,\vec{AP}\right)$$

第一项，利用 $\vec{AP}=\vec{AC}+\vec{CP}$，可得

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_{\widehat{DE}}\operatorname{Im}\left(\vec{AP}\otimes d\,\vec{AP}\right)\\
=&-\frac{1}{2}\int_{\widehat{DE}}\operatorname{Im}\left(\vec{AC}\otimes d\,\vec{CP}\right)-\frac{1}{2}\int_{\widehat{DE}}\operatorname{Im}\left(\vec{CP}\otimes d\,\vec{CP}\right)\\
=&-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\vec{AC}\otimes\vec{CE}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\vec{AC}\otimes\vec{CD}\right)-\frac{1}{2}\int_{\widehat{DE}}\operatorname{Im}\left(\vec{CP}\otimes d\,\vec{CP}\right)
\end{aligned}$$

第三项，利用 $\vec{AP}=\vec{AB}+\vec{BP}$, 可得

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_{\widehat{FD}}\operatorname{Im}\left(\vec{AP}\otimes d\,\vec{AP}\right)\\
=&-\frac{1}{2}\int_{\widehat{FD}}\operatorname{Im}\left(\left(\vec{AB}+\vec{BP}\right)\otimes d\,\vec{BP}\right)\\
=&-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\vec{AB}\otimes\vec{BD}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\vec{AB}\otimes\vec{BF}\right)-\frac{1}{2}\int_{\widehat{FD}}\operatorname{Im}\left(\vec{BP}\otimes d\,\vec{BP}\right)
\end{aligned}$$

合并以上式子，并利用

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\vec{AC}\otimes\vec{CD}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\vec{AB}\otimes\vec{BD}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\vec{BC}\otimes\vec{BD}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\vec{AB}\otimes\vec{AC}\right)$$

最终得到三圆相交部分的面积表示：

$$S=S_{\widehat{AEF}}+S_{\widehat{BFD}}+S_{\widehat{CDE}}+S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABF}-S_{\triangle BCD}-S_{\triangle CAE}$$

相互垂直的弦所划分的对角扇形面积之和相等

以及

相互为 45 度角的四条弦所划分的对角扇形面积之和相等

2.4 三角形相关的圆

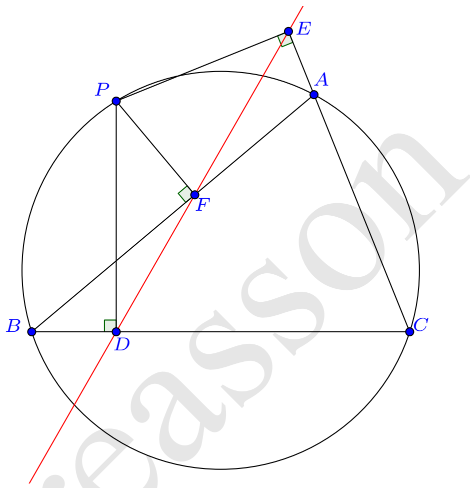
2.4.1 外接圆

外接圆的表示

西姆松定理

西姆松定理: 过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边或其延长线上的垂线，则三垂足共线。

西姆松逆定理: 若三角形外任意一点在该三角形三边所在直线上的射影共线，则该点一定在三角形的外接圆上。



证明：设 $\overrightarrow{BA}=z\,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BP}=w\,\overrightarrow{BC}$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{BD}=\mathrm{Re}\,(w)\,\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{CE}=\mathrm{Re}\left(\frac{w-1}{z-1}\right)\overrightarrow{CA}\\ \overrightarrow{BF}=\mathrm{Re}\left(\frac{w}{z}\right)\overrightarrow{BA}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(w+\bar{w}\right)\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BE}=\frac{z\,\bar{w}+\bar{z}+w\,\bar{z}-w-z-\bar{w}}{2(\bar{z}-1)}\,\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BF}=\frac{z\,\bar{w}+w\,\bar{z}}{2\,\bar{z}}\,\overrightarrow{BC}\end{cases}$$

若 D,E,F 三点共线，则有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{D-F}{D-E}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{\bar{w}(\bar{z}-1)}{\bar{z}(\bar{w}-1)}-\frac{w(z-1)}{z(w-1)}\right)=0$$

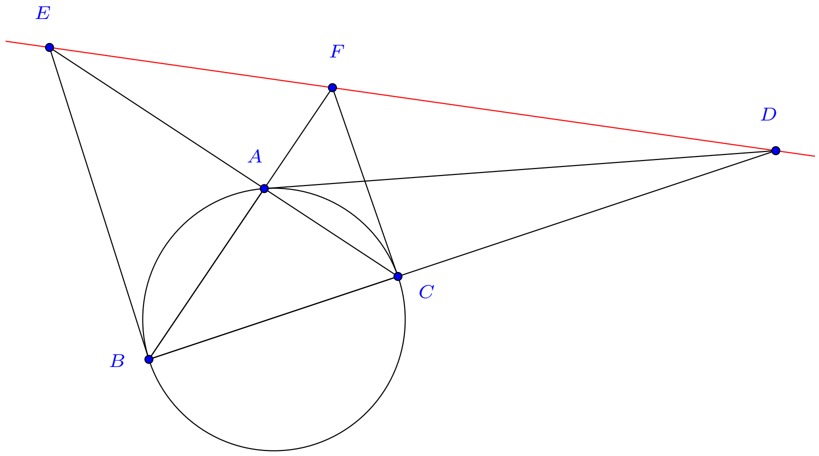
若 P,A,B,C 四点共圆，则有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{P-B}{P-C}\frac{A-C}{A-B}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{w(z-1)}{z(w-1)}-\frac{\bar{w}(\bar{z}-1)}{\bar{z}(\bar{w}-1)}\right)=0$$

容易看到二者等价, 故西姆松定理及其逆定理均成立。

莱莫恩定理

过 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A,B,C 作它的外接圆的切线，分别和 BC,CA,AB 所在直线交于 D,E,F 则 D,E,F 三点共线。



证明: 令 $\overrightarrow{BA}=\frac{1+is}{1-iu}\overrightarrow{BC}$, 那么 A,B,C 的外接圆在 A,B,C 三点的切向量分别为:

$$\boldsymbol{v_A}=\frac{i(1+is)}{(1-iu)^2}\overrightarrow{BC},\quad \boldsymbol{v_B}=(-i+s)\overrightarrow{BC},\quad \boldsymbol{v_C}=\frac{1}{-i+s}\overrightarrow{BC}$$

设

$$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BE}=\mu\overrightarrow{BA}+(1-\mu)\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BF}=(1-\nu)\overrightarrow{BA}$$

则由 $\boldsymbol{v_A},\boldsymbol{v_B},\boldsymbol{v_C}$ 分别平行于 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$ 可求出

$$\lambda=\frac{1+s^2}{1-2su-u^2},\quad \mu=\frac{1+u^2}{u^2-s^2},\quad \nu=\frac{(s+u)^2}{-1+s^2+2su}$$

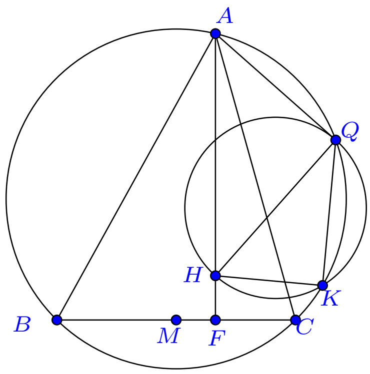
于是

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1+s^2}{1-2su-u^2}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BE}=\frac{s-i}{s-u}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BF}=\frac{(1+is)(1+iu)}{1-s^2-2su}\overrightarrow{BC}$$

计算即知 $\mathrm{Im}\left(\frac{D-E}{F-E}\right)=0$, 因而 D,E,F 三点共线。

2015 IMO 几何题

锐角三角形 ABC 中, $AB>AC$, 设 Γ 是它的外接圆, H 是它的垂心, F 是由顶点 A 处所引高的垂足, M 是边 BC 的中点。Q 是 Γ 上一点, 使得 $HQA=90°$, K 是 Γ 上一点, 使得 $HKQ=90°$。已知 A,B,C,K,Q 互不相同, 且按此顺序排列在 Γ 上。求证: 三角形 KQH 的外接圆与三角形 FKM 的外接圆相切。



证明: 设 $\overrightarrow{BA}=\frac{1+is}{1-it}\overrightarrow{BC}$, 那么容易求得

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BF}=\frac{1-st}{1+t^2}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BH}=\frac{1-st}{1-it}\overrightarrow{BC}$$

又设 $\vec{BQ}=\frac{1+is}{1-iu}\vec{BC}$, 由 $HQA=90°$, 也即 $\mathrm{Re}\left(\frac{H-Q}{A-Q}\right)=0$ 可求出参数 u, 从而知

$$\vec{BQ}=\frac{1-st}{1-it-2st}\vec{BC}$$

同理, 由 $HKQ=90°$ 求出

$$\vec{BK}=\frac{(1+is)(1-st)(1-2st+t^2)}{(1-it)(1-4st+t^2+4s^2t^2+is-2is^2t-ist^2)}\vec{BC}$$

三角形 KQH 外接圆上的点 P 使得四点的交比为实数, 即 $\frac{P-K}{P-H}\frac{Q-H}{Q-K}=u$，由此得到 P 的参数表示

$$\vec{BP}=\frac{(1-st)(1-2st+t^2+is+ist^2+2is^2tu+ist^2u-isu-2is^2t)}{(1-it)(1-4st+t^2+4s^2t^2+is+2is^2tu+ist^2u-isu-ist^2-2is^2t)}\vec{BC}$$

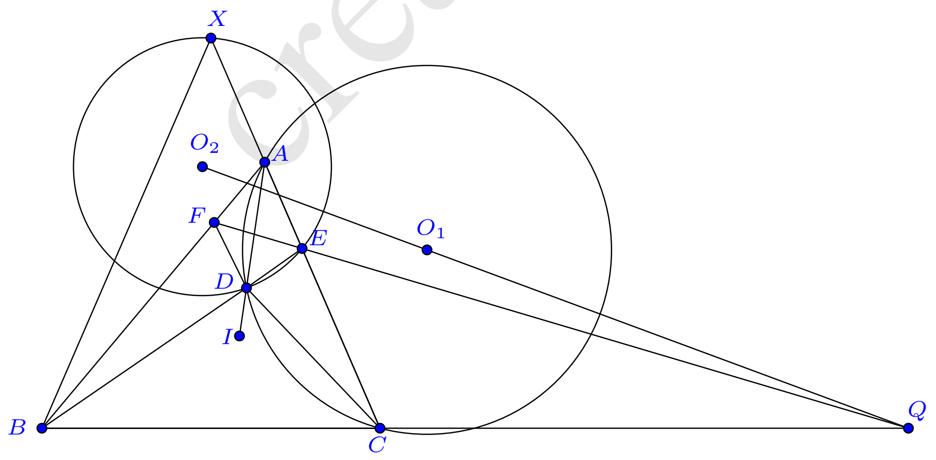
若 P 也在三角形 FKM 的外接圆上, 则交比 $\frac{P-F}{P-M}\frac{K-M}{K-F}$ 实数, 该交比等于

$$\frac{(1+is-2is^2t+t^2-ist^2)(1-is+2is^2t+t^2+ist^2-isu+2is^2tu+ist^2u)}{(1-is+2is^2t+t^2+ist^2)(1+is-2is^2t+t^2-ist^2-isu+2is^2tu+ist^2u)}$$

它的虚部为 0, 由此求得唯一解 $u=0$, 这就说明三角形 KQH 的外接圆与三角形 FKM 的外接圆相切于 K 点。

2021 IMO 几何第 3 题

点 D 是锐角 $\triangle ABC(AB>AC)$ 内部一点，满足 $\angle DAB=\angle CAD$, 点 E 在线段 AC 上满足 $\angle ADE=\angle BCD$, 点 F 在线段 AB 上满足 $\angle FDA=\angle DBC$, 点 X 在直线 AC 上满足 $CX=BX$。记点 O_1 和 O_2 分别是 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EXD$ 的外接圆圆心。证明: BC,EF,O_1O_2 三线共点。



证明：令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 于是

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}, \vec{BI}=\frac{1-st}{1-it}\vec{BC}$$

由 $\angle DAB=\angle CAD$ 知, D 在直线 AI 上, 故可令 $\vec{BD}=\lambda\vec{BA}+(1-\lambda)\vec{BI}$。

点 E 在线段 AC 上, 可设 $\vec{BE}=\mu\vec{BA}+(1-\mu)\vec{BC}$。

$\angle ADE=\angle BCD$ 意味着 $\mathrm{Im}\left(\frac{A-D}{E-D}\frac{D-C}{B-C}\right)=0$, 于是求得:

$$\mu=\frac{(s+2t-st^2)(s^2+s^2t^2+2st\lambda-2s^2t^2\lambda+\lambda^2-2st\lambda^2+s^2t^2\lambda^2)}{(1+s^2)(s+st^2+2t\lambda-2st^2\lambda)}$$

同理, 设 $\vec{BF}=\nu\,\vec{BA}$, 由 $\angle FDA=\angle DBC$ 求出

$$\nu=\frac{(s+2t-st^2)(s^2+s^2t^2+2st\lambda-2s^2t^2\lambda+t^2\lambda^2+s^2t^2\lambda^2)}{(s+t)^2(s+st^2+2t\lambda-2st^2\lambda)}$$

再设 $\vec{BX}=\eta\,\vec{BA}+(1-\eta)\,\vec{BC}$, 由 $CX=BX$, 求出

$$\eta=\frac{s(1+t^2)^2}{2t(1+s+t-st)(1-s-t-st)}$$

计算 $\triangle ADC$ 外接圆圆心 O_1, 为

$$\vec{BO_1}=\frac{2s^2+st-2is^2t-s^3t-ist^2+is^3t^2-it\lambda+2st\lambda+is^2t\lambda+ist^2\lambda-2s^2t^2\lambda-is^3t^2\lambda}{2s^2(1-it)^2}\,\vec{BC}$$

再计算 $\triangle EXD$ 外接圆圆心 O_2, 因为直接用 s,t 的表示式有点长, 所以这里用 $z=\frac{1+is}{1-is}, w=\frac{1+it}{1-it}$ 来表示

$$\vec{BO_2}=\frac{\begin{pmatrix}z(1-w)(1+wz)^2(1+w^2z^2)\lambda^2+w(1-z)^2(1+w+2wz+w^2z^2+w^3z^3)\\+(1-z)(1+wz)(1-w^2+2wz-2w^2z+w^2z^2+2w^3z^3-w^4z^3)\lambda\end{pmatrix}}{(1+w)(-1+z)(1+z)(1+w^2z^2)(-w+wz-\lambda+w\lambda-wz\lambda+w^2z\lambda)}\,\vec{BC}$$

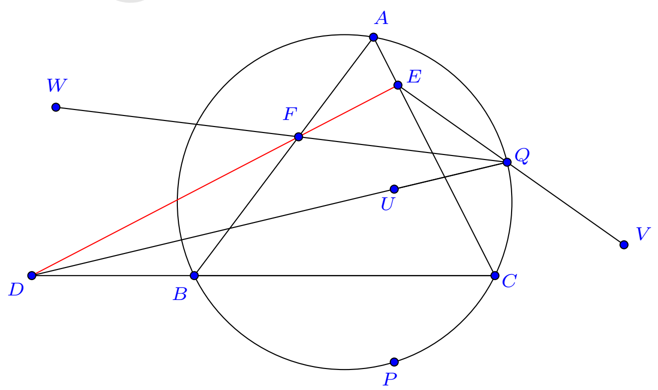
待证结论为三线共线，我们先求其中两条线 BC 与 EF 的交点, 设为 Q, 则

$$\vec{BQ}=\frac{(1-st)^2(s^2+s^2t^2+2st\lambda-2s^2t^2\lambda+t^2\lambda^2+s^2t^2\lambda^2)}{s(1-2st-t^2)(s+st^2+2t\lambda-2st^2\lambda)}\,\vec{BC}$$

由此计算即知 $\operatorname{Im}\left(\frac{Q-O_1}{O_2-O_1}\right)=0$, 这表明 Q 也在 O_1O_2 直线上，因而三线共点。

清宫定理

设 P,Q 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上异于 A,B,C 的两点，P 关于三边 BC,CA,AB 的对称点分别是 U,V,W, 且 QU,QV,QW 分别交三边 BC,CA,AB 或其延长线于 D,E,F, 则 D,E,F 在同一直线上。



证明：令

$$\vec{BA}=\frac{1+is}{1-it}\,\vec{BC},\vec{BP}=\frac{1+is}{1-iu}\,\vec{BC},\vec{BQ}=\frac{1+is}{1-iv}\,\vec{BC}$$

首先可知 P 关于 BC 的对称点 U

$$\vec{BU}=\frac{1-is}{1+iu}\,\vec{BC}$$

为求出 P 关于 CA 的对称点, 我们先将 P 点的表示改写为

$$\vec{CP}=\frac{(i+t)(s+u)}{(s+t)(i+u)}\,\vec{CA}$$

由此知 V 的表示

$$\vec{CV} = \frac{(-i+t)(s+u)}{(s+t)(-i+u)}\,\vec{CA}$$

转化为以 BC 为基底的表示即为

$$\vec{BV} = \frac{1-st+is-it+2iu}{(1-it)(1+iu)}\,\vec{BC}$$

再将 P 点表示改写为

$$\vec{BP} = \frac{1-it}{1-iu}\,\vec{BA}$$

可得到 P 关于 AB 的对称点 W

$$\vec{BW} = \frac{1+it}{1+iu}\,\vec{BA} = \frac{(1+is)(1+it)}{(1-it)(1+iu)}\,\vec{BC}$$

我们设 $\vec{BD} = \lambda\,\vec{BC}$, $\vec{BE} = \mu\,\vec{BA} + (1-\mu)\,\vec{BC}$, $\vec{BF} = (1-\nu)\,\vec{BA}$,

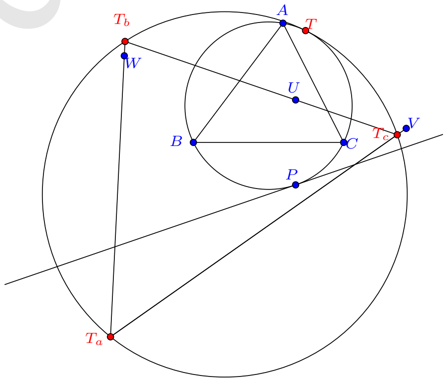
分别由 Q,U,D 三点共线, Q,V,E 三点共线, 和 Q,W,F 三点共线求出：

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2s+u-s^2u+v-s^2v-2suv}{2s+u+su^2+v+u^2v+sv^2+uv^2}\\
\mu &= \frac{(s+u)(s+v)(2t-u+t^2u-v+t^2v-2tuv)}{(s+t)(2st-su+tu-u^2+stu^2-sv+tv-su^2v+tu^2v-v^2+stv^2-suv^2+tuv^2-2u^2v^2)}\\
\nu &= \frac{(t-u)(v-t)(u+v)}{2t-u+tu^2-v-u^2v+tv^2-uv^2}
\end{aligned}$$

将以上代入计算即知 $\mathrm{Im}\left(\frac{D-E}{E-F}\right) = 0$, 因此 D,E,F 三点共线。

三角形外接圆一切线的对称直线问题

锐角三角形 ABC 外接圆 ω, t 是 ω 的一条切线，它关于 BC,CA,AB 的对称直线为 t_a,t_b,t_c，证明: t_a,t_b,t_c 所围成的三角形的外接圆与 ω 相切。



证明: 令 $\vec{BA} = \frac{1+is}{1-it}\,\vec{BC}$, 则三角形 ABC 外接圆上的点 P 可表示为

$$\vec{BP} = \frac{1+is}{1-iu}\,\vec{BC}$$

在 P 点处的切向量

$$\boldsymbol{v} = \frac{d}{du}\,\vec{BP} = \frac{i-s}{(1-iu)^2}\,\vec{BC}$$

直线可由直线上的一点及与沿直线方向的一个向量确定，因此为了求出 P 点切线关于三角形三边的对称直线，我们只需求出点 P 关于三边的对称点, 及 P 点处的切向量关于三边的对称向量即可。

在上题中，我们已求出了 P 关于 BC, CA, AB 的对称点 U, V, W

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BU} &= \frac{1-is}{1+iu}\,\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BV} &= \frac{1-st+is-it+2iu}{(1-it)(1+iu)}\,\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BW} &= \frac{(1+is)(1+it)}{(1-it)(1+iu)}\,\overrightarrow{BC}
\end{aligned}
$$

现在只需再求出切向量关于三边的对称向量即可。

首先,$\boldsymbol{v}$ 关于 BC 的对称向量为:

$$
\boldsymbol{v_a} = \frac{-i-s}{(1+iu)^2}\,\overrightarrow{BC}
$$

然后改写切向量 $\boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{v} = \frac{(1+is)(1-it)}{(s+t)(1-iu)^2}\,\overrightarrow{CA}$, 得到它关于 BC 的对称向量:

$$
\boldsymbol{v_b} = \frac{(1-is)(1+it)}{(s+t)(1+iu)^2}\,\overrightarrow{CA} = \frac{i(1-is)(1+it)}{(1-it)(1+iu)^2}\,\overrightarrow{BC}
$$

再改写切向量为 $\boldsymbol{v} = \frac{-i(1-it)}{(1-iu)^2}\,\overrightarrow{BA}$, 又可得到它关于 AB 的对称向量:

$$
\boldsymbol{v_c} = \frac{-i(1+it)}{(1+iu)^2}\,\overrightarrow{BA} = \frac{-i(1+is)(1+it)}{(1-it)(1+iu)^2}\,\overrightarrow{BC}
$$

于是 P 点切线关于 BC, CA, AB 的对称直线上的点可分别表示为:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BQ_a} &= \overrightarrow{BU} + \lambda\boldsymbol{v_a} = \left(\frac{1-is}{1+iu} + \lambda\frac{-i-s}{(1+iu)^2}\right)\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BQ_b} &= \overrightarrow{BV} + \mu\boldsymbol{v_b} = \left(\frac{1-st+is-it+2iu}{(1-it)(1+iu)} + \mu\frac{i(1-is)(1+it)}{(1-it)(1+iu)^2}\right)\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BQ_c} &= \overrightarrow{BW} + \nu\boldsymbol{v_c} = \left(\frac{(1+is)(1+it)}{(1-it)(1+iu)} + \nu\frac{-i(1+is)(1+it)}{(1-it)(1+iu)^2}\right)\overrightarrow{BC}
\end{aligned}
$$

进而求得三条直线的交点:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BT_a} &= \frac{(1+is)(s+st^2-ist+it^2+2isu-2itu+iu^2+istu^2)}{s(1-it)^2(1+iu)^2}\,\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BT_b} &= \frac{(1+s^2)(1+it)}{(1-st)(1+iu)^2}\,\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BT_c} &= \frac{t+s^2t-is^2+ist-2isu+2itu-iu^2-istu^2}{(1+is)t(1+iu)^2}\,\overrightarrow{BC}
\end{aligned}
$$

这样 $\triangle T_aT_bT_c$ 外接圆上的点可表示为:

$$
\overrightarrow{BT} = \frac{(s-i)(s^2-st+2su-2tu+u^2+stu^2-s^2\omega+t^2\omega+it+is^2t-is\omega-it\omega-is^2t\omega-ist^2\omega)}{(1+iu)^2(t-s^2t-s\omega-t\omega+s^2t\omega+st^2\omega+2ist)}\,\overrightarrow{BC}
$$

若它也在三角形 ABC 的外接圆上, 则交比

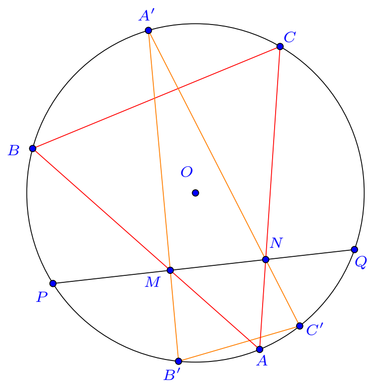
$$
\operatorname{Im}\left(\frac{T-A}{T-C}\frac{B-C}{B-A}\right) = 0
$$

由此求得唯一的解 $\omega = \frac{s+u}{s+t}$, 因此 $\triangle T_aT_bT_c$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切, 该切点为:

$$
\overrightarrow{BT} = \frac{(1+is)(s-t+u+stu)}{(1+iu)(s-t+u-stu-2ist)}\,\overrightarrow{BC}
$$

阿尔哈森弹子问题

在一个已知圆内，作出一个其两腰通过圆内两个已知点的等腰三角形。[1]



解：设已知的两点为 M, N, 我们延长 MN, 使之与圆相交于点 P, Q。

对于给定的点和圆来说，交点 P, Q 是固定的, 我们以 $\vec{PQ}$ 为基向量, 设

$$\vec{PM} = \lambda \vec{PQ}, \quad \vec{PN} = \mu \vec{PQ}$$

又设所求等腰三角形为 $\triangle ABC$, 两腰分别是 AB 和 AC，AB 经过点 M, AC 经过点 N，则根据经过两点的圆的表示，可令

$$\vec{PA} = \frac{1+is}{1-iu}\vec{PQ}, \quad \vec{PB} = \frac{1+is}{1-iv}\vec{PQ}, \quad \vec{PC} = \frac{1+is}{1-iw}\vec{PQ}$$

其中的 s 是已知的, 根据圆的半径表示 $R = \frac{\sqrt{1+s^2}}{2}PQ$ 可解出。

于是可得三个方程：

$$\begin{aligned} A, B, M\text{三点共线} &\implies 1+s^2-\lambda+su\lambda+sv\lambda+uv\lambda = 0 \\ A, C, N\text{三点共线} &\implies 1+s^2-\mu+su\mu+sw\mu+uw\mu = 0 \\ AB = AC &\implies 2u-v+u^2v-w+u^2w-2uvw = 0 \end{aligned}$$

前两个方程可解出 v, w 为 u 的表示:

$$v = -\frac{1+s^2-\lambda+su\lambda}{(s+u)\lambda}, \quad w = -\frac{1+s^2-\mu+su\mu}{(s+u)\mu}$$

代入后一方程得到关于 u 的四次方程:

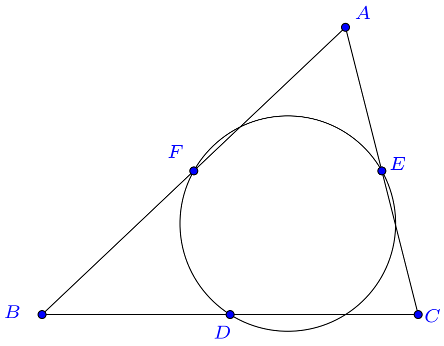
$$\begin{aligned} 2\lambda\mu su^4 + (\lambda+s^2\lambda+\mu+s^2\mu-4\lambda\mu+4s^2\lambda\mu)u^3 + 3s(\lambda+s^2\lambda+\mu+s^2\mu-4\lambda\mu)u^2 \\ +(2+4s^2+2s^4-3\lambda-3s^2\lambda-3\mu-3s^2\mu+4\lambda\mu-4s^2\lambda\mu)u - s(\lambda+s^2\lambda+\mu+s^2\mu-2\lambda\mu) = 0 \end{aligned}$$

一般情况下, 解不是二次根式的, 不可尺规作图。

2.4.2 九点圆

九点圆是经过三角形三边中点的圆。

[1] 100 个著名初等数学问题第 41 题



九点圆的表示

设 $\vec{BA} = z\,\vec{BC}$, 则三边中点的表示为

$$\vec{BD} = \frac{1}{2}\,\vec{BC}, \quad \vec{BE} = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right)\vec{BC}, \quad \vec{BF} = \frac{z}{2}\,\vec{BC}$$

经过这三点的圆上的点 P 即可表示为 ①:

$$\vec{BP} = \frac{1 - uz^2}{2(1 - uz)}\,\vec{BC}$$

作代换

$$\frac{1 - u\,\bar{z}}{1 - uz} = w$$

w 是单位复数, 则 P 可重表示为

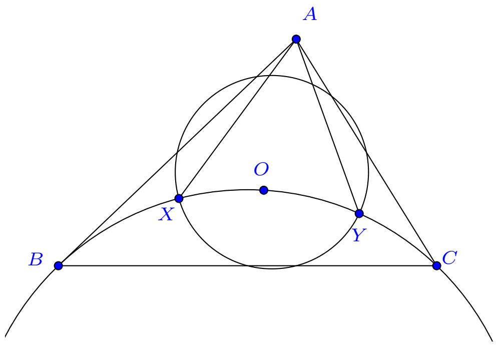
$$\vec{BP} = \left(\frac{z^2 - \bar{z}}{2(z - \bar{z})} + \frac{w(1 - z)z}{2(z - \bar{z})}\right)\vec{BC}$$

由此即知九点圆的圆心 O' 和半径 R' 分别是

$$\vec{BO'} = \frac{z^2 - \bar{z}}{2(z - \bar{z})}\,\vec{BC}, \quad R = \frac{|z(1 - z)|}{4\mathrm{Im}z}BC$$

九点圆题目

三角形 ABC, O 为外心，$\triangle BOC$ 的外接圆交九点圆于 X, Y, 证明：$2AX \cdot AY = AB \cdot AC$。



证明：设

$$\vec{BA} = \frac{1 + is}{1 - it}\,\vec{BC}$$

则

$$\vec{BO} = \frac{1 + is}{2}\,\vec{BC}$$

又设 $\triangle BOC$ 的外接圆上的点 P 的表示为:

$$\vec{BP} = \frac{1 + ip}{1 - iu}\,\vec{BC}$$

① 利用 $\frac{P-D}{P-F}\frac{E-F}{E-D} = u$

由它经过点 O 解出

$$p=\frac{1}{2}(s-\frac{1}{s})$$

若 P 是 $\triangle BOC$ 的外接圆与九点圆上的交点，则 P 与 $\triangle ABC$ 三边的中点共圆，即得方程

$$1-s^2+2st+t^2-s^2t^2+2s^4t^2-3su+s^3u-2s^2tu-2s^4tu-st^2u+3s^3t^2u+2s^2u^2-2s^3tu^2=0$$

方程的两个根 u_1,u_2 对应两个交点 X,Y:

$$\vec{BX}=\frac{1+ip}{1-iu_1}\vec{BC},\vec{BY}=\frac{1+ip}{1-iu_2}\vec{BC}$$

根据韦达定理：

$$\begin{aligned}u_1+u_2&=\frac{3-s^2+2st+2s^3t+t^2-3s^2t^2}{2s(1-st)}\\u_1u_2&=\frac{1-s^2+2st+t^2-s^2t^2+2s^4t^2}{2s^2(1-st)}\end{aligned}$$

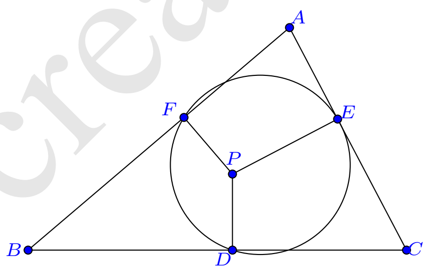
由此求得：

$$2AX\cdot AY=\frac{(s+t)\sqrt{1+s^2}}{(1+t^2)}BC^2$$

这也正是 $AB\cdot AC$ 之值。

2.4.3 垂足圆

$\triangle ABC$ 所在平面上的一点 P, 分别向边 BC,CA,AB 作垂线, 设垂足为 D,E,F, 称 $\triangle DEF$ 的外接圆为点 P 关于 $\triangle ABC$ 的垂足圆。



垂足圆的表示

解：设

$$\vec{BA}=z\,\vec{BC},\quad \vec{BP}=w\,\vec{BC}$$

则 P 在三边的垂足分别为:

$$\begin{aligned}&\vec{BD}=\mathrm{Re}(w)\,\vec{BC}\\&\vec{CE}=\mathrm{Re}(\frac{w-1}{z-1})\,\vec{CA}\implies\vec{BE}=\left(1+(z-1)\mathrm{Re}(\frac{w-1}{z-1})\right)\vec{BC}\\&\vec{BF}=\mathrm{Re}(\frac{w}{z})\,\vec{BA}\implies\vec{BF}=z\mathrm{Re}(\frac{w}{z})\,\vec{BC}\end{aligned}$$

$\triangle DEF$ 的外接圆上的点 P 可表示为:

$$P=\frac{D(E-F)+u(D-E)F}{(E-F)+u(D-E)}$$

展开即是

$$\vec{BP}=\frac{uz\bar{w}^2-uz\,\bar{w}+uw\,\bar{w}\,\bar{z}-uw\,\bar{z}+\bar{w}\,\bar{z}+w\,\bar{z}-\bar{w}^2-w\,\bar{w}}{2(u\,\bar{w}\,\bar{z}-u\,\bar{z}-\bar{w}+\bar{z})}\vec{BC}$$

由此，我们可以利用复数的性质求出圆心和半径

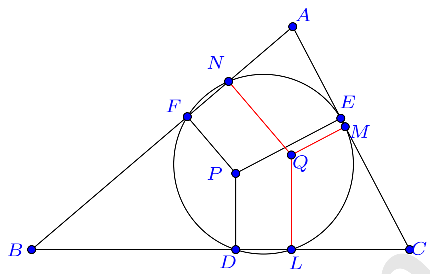
$$\vec{BO}=\frac{z^2\,\overline{w}-z\,\overline{z}\,\overline{w}-zw^2\,\overline{w}+w^2z\,\overline{z}+w^2\,\overline{w}\,\overline{z}-w^2\,\overline{z}-z^2\overline{w}^2+z\overline{w}^2}{2(z\,\overline{w}+w\,\overline{w}\,\overline{z}+wz\,\overline{z}-zw\,\overline{w}-z\,\overline{z}\,\overline{w}-w\,\overline{z})}\,\vec{BC}$$

$$R=\frac{|w||w-1||w-z|(z-\overline{z})}{2\left(z\,\overline{z}\,w-z\,\overline{z}\,\overline{w}-zw\,\overline{w}+w\,\overline{z}\,\overline{w}+z\,\overline{w}-w\,\overline{z}\right)}BC$$

这里只是展示求解的一般方法，一般我们并不直接使用这种复数形式。

等角共轭点的垂足圆

如果 P,Q 是 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点，则它们相同的垂足圆。



证明：令

$$\vec{BA}=\frac{1+is}{1-it}\,\vec{BC},\vec{BP}=\frac{1+ip}{1-iq}\,\vec{BC}$$

P 在 $\triangle ABC$ 三边的垂足点 D,E,F 分别为：

$$\vec{BD}=\frac{1-pq}{1+q^2}\,\vec{BC}$$
$$\vec{BE}=\frac{1+q^2+ip+iq-it+ipqt}{(1+q^2)(1-it)}\,\vec{BC}$$
$$\vec{BF}=\frac{1-pq+ps+qs+pt+qt-st+pqst}{(1+q^2)(1-is)(1-it)}\,\vec{BC}$$

根据等角共轭点的定义

$$\operatorname{Im}\left(\frac{P-A}{B-A}\frac{Q-A}{C-A}\right)=0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{P-B}{A-B}\frac{Q-B}{C-B}\right)=0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{P-C}{A-C}\frac{Q-C}{B-C}\right)=0$$

由此我们求出：

$$\vec{BQ}=-\frac{(1-ip)(1-is)(q-t)}{(1-iq)(1-it)(p-s)}\,\vec{BC}$$

Q 在 $\triangle ABC$ 三边的垂足点 L,M,N 分别为：

$$\vec{BL}=-\frac{(q-t)(1-pq+ps+qs+pt+qt-st+pqst)}{(1+q^2)(p-s)(1+t^2)}\,\vec{BC}$$
$$\vec{BM}=\frac{p+pq^2-s-q^2s+ipq+iq^2-iqs+ipq^2s-ipt-iqt+ist-ipqst}{(1+q^2)(p-s)(1-it)}\,\vec{BC}$$
$$\vec{BN}=-\frac{(1-pq)(1+is)(q-t)}{(1+q^2)(p-s)(1-it)}\,\vec{BC}$$

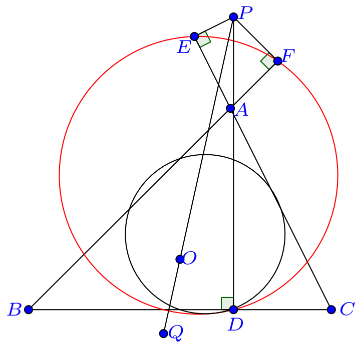
分别计算即知：

$$\operatorname{Im}\left(\frac{F-D}{F-E}\frac{L-E}{L-D}\right)=0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{F-D}{F-E}\frac{M-E}{M-D}\right)=0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{F-D}{F-E}\frac{N-E}{N-D}\right)=0$$

这表明六点共圆，即待证结论成立。

Fontene 定理

封腾定理是垂足圆中一个重要的定理, 费尔巴哈定理可看作它的一个直接推论, 叙述如下:
点 P 的垂足圆和九点圆相切，当且仅当 P 与其等角共轭点 Q 的连线经过外心 O。



证明：沿用上面的表示, 我们容易知道，$\triangle ABC$ 九点圆上的点 Z 有表示:

$$\vec{BZ}=\frac{1-t^2-u+s^2u-2it-2isu}{2(1-it)(1-u-it-isu)}\vec{BC}$$

若 Z 也是 P 关于 $\triangle ABC$ 垂足圆上的点, 则 Z,D,E,F 四点共圆，由此可得到两个解:

$$u=\frac{(1-2pq-q^2)(1+t^2)}{1-2pq-q^2+2ps+2qs-s^2-q^2s^2+2pt+2qt-2st+2pqst}$$

$$u=\frac{p+2q-pq^2-s+2pqs+q^2s-2t+4pqt+2q^2t-2pst-4qst+2pq^2st-pt^2-2qt^2+pq^2t^2+st^2-2pqst^2-q^2st^2}{(1+s^2)(p+2q-pq^2-s-q^2s-2t+2pqt)}$$

根据相切的条件，这两个解应是相同的，即得关系式

$$\begin{aligned}&p^2q^3st^2-p^2q^3s-2p^2q^3t+6p^2q^2st+3p^2q^2t^2-3p^2q^2-3p^2qst^2+3p^2qs+6p^2qt-2p^2st-p^2t^2+p^2-pq^4s^2t\\&-pq^4t-2pq^3s^2+4pq^3st+2pq^3t^2-4pq^3-6pq^2st^2+6pq^2s+12pq^2t-2pqs^2-12pqst-6pqt^2+4pq+ps^2t+2pst^2\\&-2ps-3pt-q^4s^2-q^4+2q^3s^2t-q^3st^2+q^3s+4q^3t-6q^2st-3q^2t^2+3q^2+2qs^2t+3qst^2-3qs-4qt+s^2+2st+t^2=0\end{aligned}$$

简记左方式子为 $f(s,t,p,q)$。
另一方面, $\triangle ABC$ 的外心 O 为

$$\vec{BO}=\frac{1+is}{2}\vec{BC}$$

它与 P,Q 三点共线的条件:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{P-O}{Q-O}\right)=0$$

展开得到

$$(p-s)f(s,t,p,q)=0$$

若 $p=s$, 则 P 点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上, 此时其等角共轭点在无穷远处，这不属于正常考虑的范围 [①]。
因而 P,Q,O 三点共线也同样导致 $f(s,t,p,q)=0$, 这就表明了命题的正确性。

2.4.4　内切圆

==

[①] 此时关系式化为

$$(1+st)q^3+3(s-t)q^2-3q(1+st)-s+t=0$$

意味着在 $\triangle ABC$ 的外接圆上, 至多有三个点的垂足圆与九点圆相切。

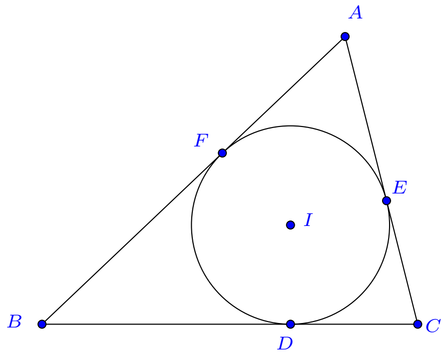
内切圆的一个有理表示

三角形内切圆的一个有理表示:

$$\vec{BP}=\frac{(1-st)(1+it+iu)}{(1+t^2)(1-it+iu)}\vec{BC}$$

这个表示简单，而且 $u=0$ 时为 AB 边上的切点 F, $u\to\infty$ 时为 BC 边上的切点 D。

==



一道构图极为简洁的小题

证明：令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 于是

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}$$

$$\vec{BP}=\frac{1}{2}\vec{BC}$$

Q,R 在 $\angle A$ 的角平分线上, 也即 Q,R 在 A 与内心 I 的连线上，故可令

$$\vec{BR}=\lambda\vec{BI}+(1-\lambda)\vec{BA}$$

$$\vec{BQ}=\mu\vec{BI}+(1-\mu)\vec{BA}$$

根据图形, 显然 $\lambda>0, \mu<0$。因为 A 是 Q,R 的中点, 易得 $\mu=-\lambda$。

又根据 PC 平分 $\angle RPQ$ 知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{R-P}{C-P}\frac{Q-P}{C-P}\right)=0$$

由此得到

$$s+t-t\lambda^2+st^2\lambda^2=0$$

此式若求解 λ，将会出现根式。而注意到它是关于 s 的一次式, 我们解出 s, 就可以避免根式运算。

$$s=\frac{t(\lambda^2-1)}{1+t^2\lambda^2}$$

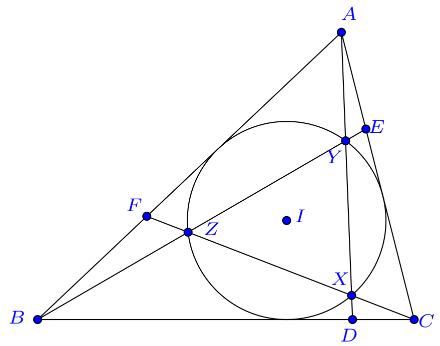
由上式及 $s>0, t>0$ 可知 $\lambda>1$。

我们将 s 代回计算，即得

$$AB+AC=PQ+PR=\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}BC$$

Sejfried 定理

如果 $\triangle ABC$ 的三个顶点与其对边上的点 D,E,F 的连线两两相交的点 X,Y,Z 都在内切圆 I 上，且 X,Y,Z 相异，那么 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\varphi^6$, 其中 φ 是方程 $x^2-\sqrt{5}x+1=0$ 的根。



证明: 令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 于是

$$\overrightarrow{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\overrightarrow{BC}$$

内切圆圆心和半径为

$$\overrightarrow{BI}=\frac{1-st}{1-it}\overrightarrow{BC}, r=\frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

因 X,Y,Z 在内切圆 I 上, 故可令:

$$\overrightarrow{BX}=\left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{t-st^2}{1+t^2}\frac{1+ui}{1-ui}\right)\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BY}=\left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{t-st^2}{1+t^2}\frac{1+vi}{1-vi}\right)\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BZ}=\left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{t-st^2}{1+t^2}\frac{1+wi}{1-wi}\right)\overrightarrow{BC}$$

由 B,Y,Z 三点共线, 得到

$$1+t+tv+tw-vw+tvw=0$$

由 C,X,Z 三点共线, 得到

$$1-s-t-st+u-stu+w-stw+uw+suw+tuw-stuw=0$$

由 A,X,Y 三点共线, 得到

$$1-s-2st-t^2-st^2+su+2tu-st^2u+sv+2tv-st^2v-uv-suv+2stuv+t^2uv-st^2uv=0$$

三式联立可得两组解:

$$v=\frac{1+t^2+u+su+tu+t^2u}{-1+s+t-t^2-u-t^2u}$$
$$w=\frac{-1+s+t+st-u+stu}{1-st+u+su+tu-stu}$$
$$u=\frac{-1+s^2+5st+2t^2-s^2t^2+st^3+t^4\pm\sqrt{5}(s+t)\left(1+t^2\right)}{1+3s+s^2+3t-st-2s^2t-st^2+s^2t^2+t^3-st^3-t^4}$$

这两组解对应的两种情形是对称的, 我们逐一做计算:

先取

$$u=\frac{-1+s^2+5st+2t^2-s^2t^2+st^3+t^4+\sqrt{5}(s+t)\left(1+t^2\right)}{1+3s+s^2+3t-st-2s^2t-st^2+s^2t^2+t^3-st^3-t^4}$$

令 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}=\mu\overrightarrow{BA}+(1-\mu)\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}=(1-\nu)\overrightarrow{BA}$

分别由 X,Y,D 三点共线,Y,Z,E 三点共线, Z,X,F 三点共线即可得到:

$$\lambda=\frac{4(1-st)}{(1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5}+2st+(1+\sqrt{5})t^2)}, \mu=\frac{2s(s+t)}{3+\sqrt{5}+2s^2-(1+\sqrt{5})st}, \nu=\frac{2t}{(3+\sqrt{5})s+2t}$$

于是

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\nu}{1-\nu}=9-4\sqrt{5}$$

再取

$$u=\frac{-1+s^2+5st+2t^2-s^2t^2+st^3+t^4-\sqrt{5}\,(s+t)\left(1+t^2\right)}{1+3s+s^2+3t-st-2s^2t-st^2+s^2t^2+t^3-st^3-t^4}$$

同理求出

$$\lambda=\frac{4(1-st)}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5}-2st-t^2+\sqrt{5}t^2)},\mu=\frac{(1+\sqrt{5})s(s+t)}{-1+\sqrt{5}+s^2+\sqrt{5}s^2+2st},\nu=\frac{2t}{3s-\sqrt{5}s+2t}$$

因而

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\nu}{1-\nu}=9+4\sqrt{5}$$

易知二者均是 $x^2-\sqrt{5}x+1=0$ 的根。

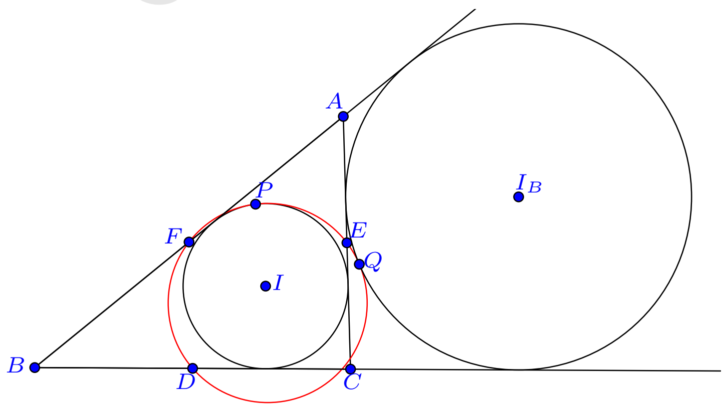
注: 若联合边长的表示消元可得到:

$$\begin{aligned}
\frac{BD}{DC}&=\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\frac{c+a-b}{a+b-c}\\
\frac{CE}{EA}&=\frac{\mu}{1-\mu}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\frac{a+b-c}{b+c-a}\\
\frac{AF}{FB}&=\frac{\nu}{1-\nu}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\frac{b+c-a}{c+a-b}
\end{aligned}$$

这更能清晰地表明结论。

费尔巴哈定理

三角形的九点圆与三角形的内切圆和旁切圆相切。



证明: 我们仅需证明三角形的九点圆与内切圆相切，旁切圆情形的证明是相似的。

令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 于是

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)\,(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC}$$

根据内切圆的圆心和半径表示, 我们知内切圆上的点 P 可表示为

$$\vec{BP}=\left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{t-st^2}{1+t^2}\frac{1+iu}{1-iu}\right)\vec{BC}$$

另一方面, $\triangle ABC$ 的九点圆是经过三边中点的圆, 我们没必要求出九点圆, 只需先求出三个中点的表示

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= \frac{1}{2}\vec{BC}\\ \vec{BE} &= \frac{1}{2}\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{BA} = \left(\frac{1}{2}+\frac{(s+t)(1-st)}{2s(1-it)^2}\right)\vec{BC}\\ \vec{BF} &= \frac{1}{2}\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{2s(1-it)^2}\vec{BC}\end{aligned}$$

再利用 P,D,E,F 四点共圆即可给出参数 u 的方程:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{P-D}{P-F}\frac{E-F}{E-D}\right) = 0 \Rightarrow 1-s+2t-2st-t^2-3st^2-u-su+2tu+2stu+t^2u-3st^2u=0$$

方程仅有一解

$$u = \frac{1-s+2t-2st-t^2-3st^2}{1+s-2t-2st-t^2+3st^2}$$

这就表明内切圆与九点圆相切。

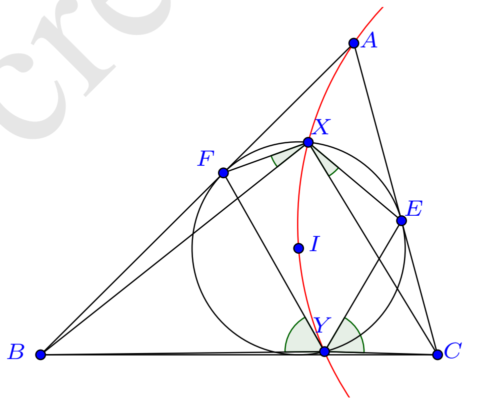
切点 P 为

$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1-st-2t^2+is-it)}{(1-it)^2(1-3st+is-it)}\vec{BC}$$

称为称为 $\triangle ABC$ 的费尔巴哈点。

一个四点共圆问题

$\triangle ABC$ 的内切圆 I 与 AB,AC 分别相切于 F,E 两点, X,Y 在内切圆上, 且满足 $\angle BXF=\angle CXE, \angle BYF=\angle CYE$, 求证: A,X,I,Y 四点共圆。



证明: 令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}$$

$$\vec{BI} = \frac{1-st}{1-it}\vec{BC}, r = \frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

$$\vec{BE} = \frac{1-st}{(1-it)^2}\vec{BC}, \vec{BF} = \frac{(i+s+2t)(1-st)}{(i+s)(1-it)^2}\vec{BC}$$

内切圆上的点可设为

$$\vec{BX} = \left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{t-st^2}{1+t^2}\frac{1+iu}{1-iu}\right)\vec{BC}$$

$$\vec{BY} = \left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{t-st^2}{1+t^2}\frac{1+iv}{1-iv}\right)\vec{BC}$$

根据 $\angle BXF = \angle CXE, \angle BYE = \angle CYE$ 得到

$$(1+s+s^2-st-2s^2t+3s^2t^2+3st^3-2s^2t^3+t^4-st^4)m^2+2t(1-st)(-1+2st+t^2)m$$
$$-1+s-s^2+st-2s^2t-3s^2t^2-3st^3-2s^2t^3-t^4-st^4=0$$

u, v 分别是上述关于 m 的二次方程的两根。根据韦达定理, 有

$$u+v=\frac{2t(1-st)(1-2st-t^2)}{1+s+s^2-st-2s^2t+3s^2t^2+3st^3-2s^2t^3+t^4-st^4}$$
$$uv=\frac{-1+s-s^2+st-2s^2t-3s^2t^2-3st^3-2s^2t^3-t^4-st^4}{1+s+s^2-st-2s^2t+3s^2t^2+3st^3-2s^2t^3+t^4-st^4}$$

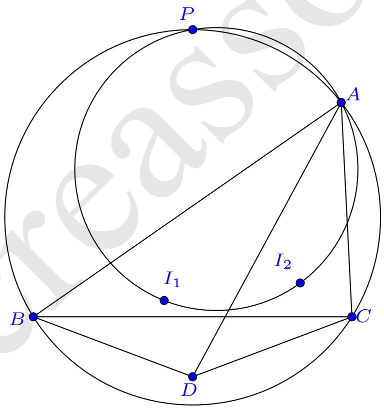
而 A, X, I, Y 四点共圆即是

$$1-s+s^2+2s^2t+t^2+st^2+s^2t^2+(1+s+s^2-2s^2t+t^2-st^2+s^2t^2)uv+(-s^2-2st+s^2t^2)(u+v)=0$$

将 $u+v, uv$ 的表示代入即知此式是成立的, 证毕。

中垂线的一个题目

$\triangle ABC$ 的外接圆为 O，D 是边 BC 的中垂线上的一点，且 A, D 位于 BC 的异侧，I_1, I_2 分别为 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内心，求证：$\triangle AI_1I_2$ 的外接圆恒过一定点。



证明: 因为 A 点在题目中出现的频次最高，所以我们考虑以 AB 为基准向量。

令 $a=e^{iA}, c=e^{iC}, z=e^{i\angle BAD}, w=e^{i\angle ABD}$。

对于 $\triangle ABD$:

$$\vec{AD}=\frac{z^2(1-w^2)}{1-w^2z^2}\vec{AB},\quad \vec{AI_1}=\frac{(1-w)z}{1-wz}\vec{AB}$$

对于 $\triangle ACD$:

$$\angle CAD=\angle A-\angle BAD \implies e^{i\angle CAD}=\frac{a}{z}$$

又 D 点在 BC 的中垂线上, 所以

$$\angle ACD-\angle C=\angle ABD-\angle B \implies e^{i\angle ACD}=-ac^2w$$

于是

$$\vec{AC}=\frac{z^2-a^4c^4w^2}{z^2(1-a^2c^4w^2)}\vec{AD}=\frac{(1-w^2)(z^2-a^4c^4w^2)}{(1-w^2z^2)(1-a^2c^4w^2)}\vec{AB}$$
$$\vec{AI_2}=\frac{z-a^2c^2w}{z-ac^2wz}\vec{AD}=\frac{(1-w^2)z(z-a^2c^2w)}{(1-w^2z^2)(1-ac^2w)}\vec{AB}$$

联合 $\overrightarrow{AC} = \frac{1-c^2a^2}{1-a^2}\overrightarrow{AB}$ 知有关系式:

$$1 - a^2c^2 + a^2c^2w^2 - a^2c^4w^2 - z^2 + c^2z^2 - c^2w^2z^2 + a^2c^4w^2z^2 = 0$$

$\triangle AI_1I_2$ 外接圆上的点 P 设为指数形式: $\overrightarrow{AP} = Rs\overrightarrow{AB}$(其中 $|s| = 1$)
它应满足 P, A, I_1, I_2 四点交比为实数: $\operatorname{Im}\left(\frac{P-I_1}{P-A}\frac{I_2-A}{I_2-I_1}\right) = 0$, 即有:

$$\begin{aligned}
&ac^2(as^2 - az - s^2z + az^2 + Rsz^2 - aRsz^2)w^3+\\
&(-ac^2s^2 + a^2c^2z + ac^2s^2z + z^2 - az^2 - a^2c^2z^2 - Rsz^2 + aRsz^2)w^2+\\
&(-ac^2Rs + a^2c^2Rs + s^2 + ac^2s^2 - a^2c^2s^2 - az - s^2z + az^2)w+\\
&Rs - aRs - s^2 + az + s^2z - z^2 = 0
\end{aligned}$$

与前面的关系式联合消去参数 w, 得到关于 z 的四次方程:

$$\begin{aligned}
&(1 + ac^2 - Rs + c^2Rs)^2z^4+\\
&(1 + a)(1 + ac^2 - Rs + c^2Rs)(1 - ac^2 - Rs + c^2Rs - 2c^2s^2)z^3+\\
&(1 + ac^2)(a + a^2c^2 - 2aRs + 2ac^2Rs + aR^2s^2 - 2ac^2R^2s^2 + ac^4R^2s^2 + 2ac^2Rs^3 - 2ac^4Rs^3 + c^2s^4 + ac^4s^4)z^2+\\
&(1 + a)c^2s(-aR + ac^2R - s - ac^2s)(2a - aRs + ac^2Rs + s^2 - ac^2s^2)z+\\
&ac^2s^2(-aR + ac^2R - s - ac^2s)^2 = 0
\end{aligned}$$

过定点的条件为无论 z 取何值, 此式均成立, 因此令 z 的各项系数为 0, 解得:

$$R = -\frac{(1 + ac^2)s}{a(1 - c^2)}, a + s^2 = 0$$

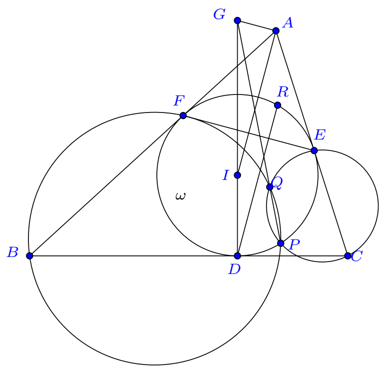
定点

$$\overrightarrow{AP} = Rs\overrightarrow{AB} = \frac{1 + ac^2}{1 - c^2}\overrightarrow{AB}$$

它是 BC 的中垂线与外接圆在 A 侧的交点。

2019 IMO 几何第 6 题

在锐角三角形 ABC 中, I 是内心, $AB \neq AC$。三角形 ABC 的内切圆 ω 与边 BC, CA 和 AB 分布相切于点 D,E 和 F, 过点 D 且垂直于 EF 的直线与 ω 的另一点交点为 R。直线 AR 与 ω 的另一交点为 P。三角形 PCE 和三角形 PBF 的外接圆交于另一点 Q。



求证：直线 DI 和 PQ 的交点在过点 A 且垂直于 AI 的直线上。
证明: 令 $s = \tan\frac{A}{2}, t = \tan\frac{B}{2}$, 如前所述, 内切圆三边的切点分别为:

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1 - st}{1 + t^2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{(i + s + 2t)(-1 + st)}{(i + s)(i + t)^2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1 - st}{(1 - it)^2}\overrightarrow{BC}$$

点 R 在内切圆 ω 上, 故设为

$$\vec{BR}=\left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{t-st^2}{1+t^2}\frac{1+iu}{1-iu}\right)\vec{BC}$$

它与 D 的连线垂直于 EF, 即有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{R-D}{F-E}\right)=0$$

求得

$$\vec{BR}=\frac{(1-st)(1-st-is-3it+2ist^2)}{(1-is)(1-it)^3}\vec{BC}$$

又设

$$\vec{BP}=\left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{t-st^2}{1+t^2}\frac{1+iv}{1-iv}\right)\vec{BC}$$

由 A,R,P 三点共线, 有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{P-A}{R-A}\right)=0$$

求得

$$\vec{BP}=\frac{(1-st)(1-st-is-it+2is^2t+2ist^2)}{(1-is)(1-it)^2(1-2st+it)}\vec{BC}$$

三角形 PBF 外接圆上的点 Q 使得四点的交比为实数, 即 $\frac{Q-B}{Q-F}\frac{P-F}{P-B}=w$, 由此得 Q 的参数表示:

$$\vec{BQ}=\frac{(1-st)(-i-s-t+ist+2s^2t+2st^2)w}{(1-it)^2(2t-2st^2-iw-sw-tw+istw+2s^2tw+2st^2w)}\vec{BC}$$

因 Q 也在三角形 PCE 的外接圆上, 则交比 $\frac{Q-C}{Q-E}\frac{P-E}{P-C}$ 实数, 也即其虚部为 0, 由此解得

$$\vec{BQ}=\frac{1+3s^2+2st-4s^3t+t^2-5s^2t^2-2st^3}{(1-is)(1-it)^2(1+2is+it)}\vec{BC}$$

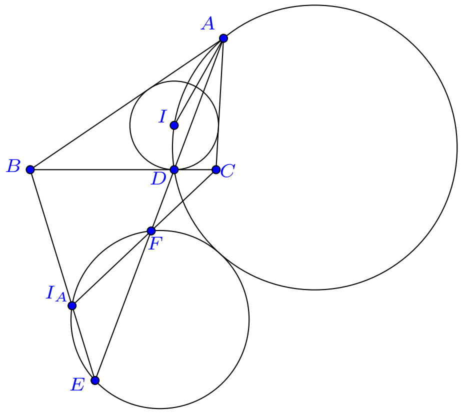
进而求得直线 DI 与 PQ 的交点 M 为:

$$\vec{BM}=\frac{(1-st)(s^2+2st+t^2+it+is^2t)}{s(1-it)(s+2t-st^2)}\vec{BC}$$

计算得到 $\mathrm{Re}\left(\frac{M-A}{I-A}\right)=0$, 也即 MA 垂直于 IA。

2020 IMO 几何第 6 题

在三角形 ABC 中, $AB<AC$, 内心和 $A-$ 旁心分别为 I,I_A, 其内切圆交 BC 于点 D, 直线 AD 分别与 BI_A,CI_A 交于点 E,F。求证: $\triangle AID$ 和 $\triangle I_AEF$ 的外接圆相切。



证明：令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC},\quad \vec{BI}=\frac{1-st}{1-it}\vec{BC},\quad \vec{BI_A}=\frac{s+t}{i+t}\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{1-st}{1+t^2}\vec{BC}$$

AD 与 BI_A 的交点 E 为:

$$\vec{BE}=\frac{2(s+t)(1-st)}{(1+t^2)(i+t)}\vec{BC}$$

AD 与 CI_A 的交点 F 为:

$$\vec{BF}=\frac{i+t-2ist+2s^2t-it^2+2st^2+t^3}{(1+t^2)(i+t)}\vec{BC}$$

三角形 AID 外接圆上的点 P 使得四点的交比为实数, 即 $\frac{P-D}{P-I}\frac{A-I}{A-D}=u$, 由此得 P 的参数表示:

$$\vec{BP}=\frac{(1-st)(i-s-iu+2su+tu)}{(i+t)(1+is+it-st-u-2isu-itu)}\vec{BC}$$

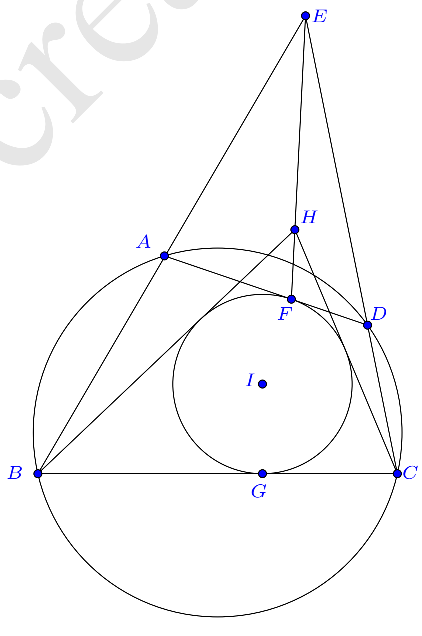
若 P 也在 $\triangle I_AEF$ 的外接圆上, 则由 P,E,F,I_A 四点的交比虚部为 0, 解出 $u=\frac{1}{2}$。

也即 $\triangle AID$ 和 $\triangle I_AEF$ 的外接圆相切于点 Q

$$\vec{BQ}=\frac{1-st}{1+it-2st}\vec{BC}$$

纯几何吧 5457 题

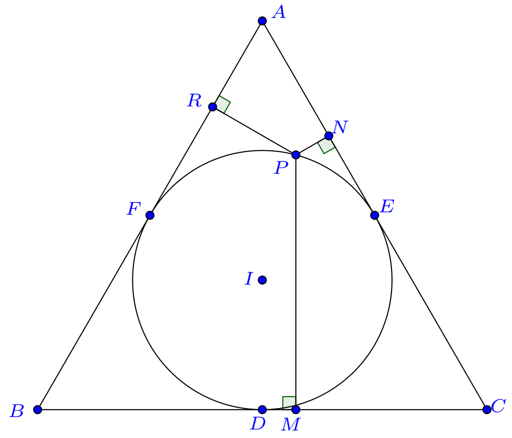
如图, 圆内接四边形 $ABCD$,BA 与 CD 交于点 E, 圆 O 切 AD,BC 于点 F,G, 且使得 $\frac{AF}{FD}=\frac{BG}{GC}$, B,C 与圆 O 的另一条切线相交于点 H, 证明: E,H,F 三点共线。



证明：实际上本题可按照 $\triangle HBC$ 构图, 这就是三角形的内切圆命题。

一个多根式题目

等边三角形的内接圆与三边 BC,CA,AB 分别切于点 D,E,F, 在 $\overset{\frown}{EF}$ 上任取一点 P, $PM\perp BC, PN\perp CA, PR\perp AB$。求证：$\sqrt{PM}=\sqrt{PN}+\sqrt{PR}$



证明：我们容易得知:

$$\vec{BA} = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\,\vec{BC}$$

内切圆圆心 I

$$\vec{BI} = \frac{1}{6}(3 + i\sqrt{3})\,\vec{BC}$$

内切圆半径 $r = \frac{1}{2\sqrt{3}}BC$

内切圆在三边的切点 (各边中点):

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= \frac{1}{2}\,\vec{BC}\\ \vec{BE} &= \frac{1}{4}(3 + i\sqrt{3})\,\vec{BC}\\ \vec{BF} &= \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})\,\vec{BC}\end{aligned}$$

内切圆上的点 P 可表示为：

$$\vec{BP} = \left(\frac{1}{6}(3 + i\sqrt{3}) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1 + iu}{1 - iu}\right)\vec{BC}$$

因为点 P 在 $\overset{\frown}{EF}$ 上, 将端点 E, F 代入即可求出 u 的范围: $u \in \left(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right)$

点 P 在各边的垂足点分别为:

$$\begin{aligned}\vec{BM} &= \frac{3 + \sqrt{3} + 3u^2 - \sqrt{3}u^2}{6(1 + u^2)}\,\vec{BC}\\ \vec{BN} &= \frac{(1 + 6i)(-3i + \sqrt{3}) + 6i(i + \sqrt{3})u + (6 + i)(3 + i\sqrt{3})u^2}{24(1 + u^2)}\,\vec{BC}\\ \vec{BR} &= \frac{(1 + i\sqrt{3})(6 + \sqrt{3} + 6u + (6 - \sqrt{3})u^2)}{24(1 + u^2)}\,\vec{BC}\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}PM &= \frac{(1 + u)^2}{12(1 + u^2)}BC\\ PN &= \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3} - u)^2}{12(1 + u^2)}BC\\ PR &= \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} - u)^2}{12(1 + u^2)}BC\end{aligned}$$

进而

$$\sqrt{PM} = \frac{1+u}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}\sqrt{1+u^2}}\sqrt{BC}$$
$$\sqrt{PN} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}\frac{(-2+\sqrt{3}+u)}{\sqrt{1+u^2}}\sqrt{BC}$$
$$\sqrt{PR} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}\frac{(2+\sqrt{3}-u)}{\sqrt{1+u^2}}\sqrt{BC}$$

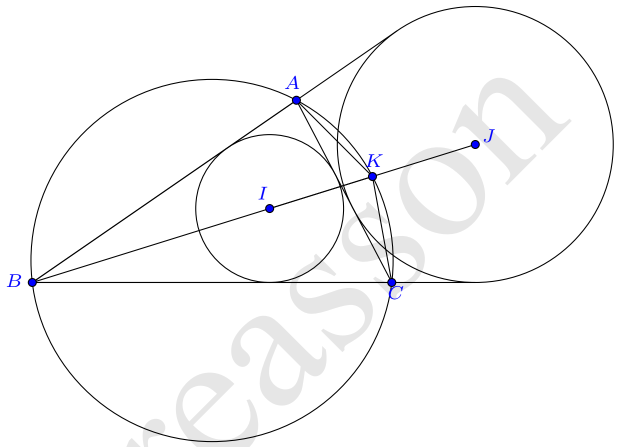
于是 $\sqrt{PM} = \sqrt{PN} + \sqrt{PR}$

2.4.5 旁切圆

旁切圆的表示

鸡爪定理

三角形一内角的平分线与其外接圆的交点到其它两顶点的距离及其内心与旁心的距离相等。



证明: 令 $s = \tan\frac{A}{2}, t = \tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}, \vec{BI} = \frac{1-st}{1-it}\vec{BC}$$

又 K, J 与 B, I 共线，因此可令

$$\vec{BK} = \lambda\frac{1-st}{1-it}\vec{BC}, \vec{BJ} = \mu\frac{1-st}{1-it}\vec{BC}$$

K, A, B, C 四点共圆知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{K-A}{K-B}\frac{C-B}{C-A}\right) = 0$$

求出

$$\lambda = \frac{2s+t-s^2t}{2s(1-st)}, \vec{BK} = \frac{2s+t-s^2t}{2s(1-it)}\vec{BC}$$

CJ 平分角 C 的补角, 所以

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\vec{CJ}}{\vec{BC}}\frac{\vec{CJ}}{\vec{CA}}\right) = 0$$

求出

$$\mu = \frac{s+t}{s(1-st)}, \vec{BJ} = \frac{s+t}{s(1-it)}\vec{BC}$$

于是计算知

$$KA = KC = KI = KJ = \frac{t(1+s^2)}{2s\sqrt{1+t^2}}BC$$

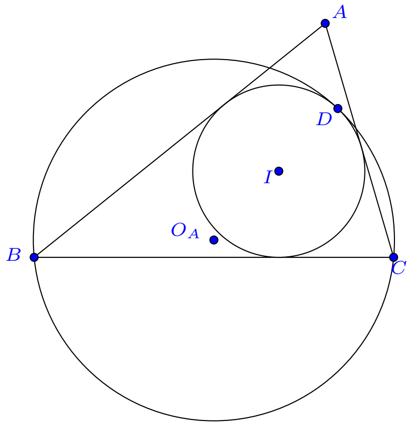
2.4.6 伪外接圆

过三角形的两个顶点，且与三角形的内切圆相切的圆称为三角形的伪外接圆。

百度下载：< 三角形伪外接圆-雨中卢圣 >, < 雨中神伪外接圆 > 作为参考，前一篇文章清晰一些。

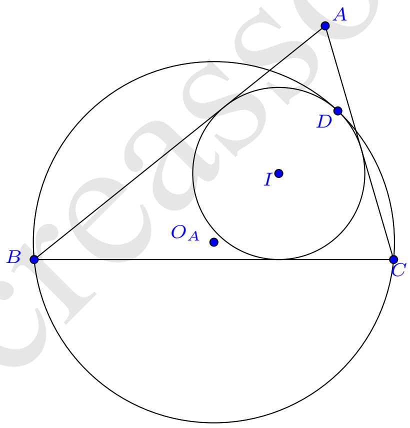
==

过 BC 的圆 O_A 与三角形 $\triangle ABC$ 的内切圆 I 外切于点 D, 求 O_A, D 的表示。



伪外接圆的表示

如图, 过 BC 的圆 O_A 与三角形 $\triangle ABC$ 的内切圆 I 外切于点 D, 求 O_A, D 的表示。



解：令 $s = \tan\frac{A}{2}, t = \tan\frac{B}{2}$, 我们知道 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心 I 和半径 r

$$\vec{BI} = \frac{1-st}{1-it}\vec{BC}, r = \frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

根据圆的第一类有理表示，可设经过 B, C 两点的圆为

$$\vec{BD} = \frac{1+ip}{1-iu}\vec{BC}$$

它的圆心和半径分别是

$$\vec{BO_A} = \frac{1+ip}{2}\vec{BC}, r_A = \frac{\sqrt{1+p^2}}{2}BC$$

两圆相切知 $|O_A - I| = r_A - r$, 由此求得

$$p = \frac{(1-s-t+t^2)(1+s+t+t^2)}{2(s+t)(1+t^2)}$$

由此知圆 O_A 的圆心和半径为

$$\vec{BO_A} = \frac{i(1+t^2-is-it)^2}{4(s+t)(1+t^2)}\vec{BC}$$

$$r_A = \frac{1+s^2+2st+3t^2+t^4}{4(s+t)(1+t^2)}BC$$

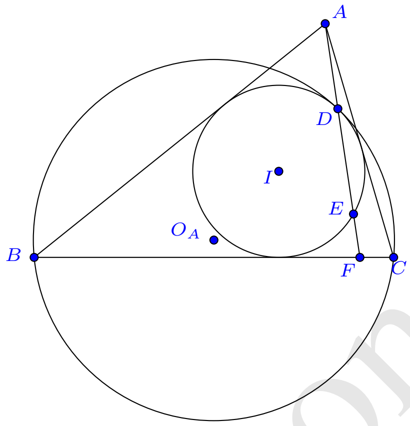
对于切点 D, 我们只需由 $r = AD$ 计算即可，结果为

$$\vec{BD} = \frac{(1-st)(1+t^2-is-it)}{(1+t^2)(1-2st-t^2-is-it)}\vec{BC}$$

我们也可以由两圆在点 D 处的切向量方向一致推导，不过稍微麻烦些。

题目

圆 u 过 B, C 且切三角形 ABC 的内切圆 I 于 D, 延长 AD 交 BC, 圆 u 于 E, F. 求证: $(\frac{BE}{CE})^2 = (\frac{BF}{CF})^3$



证明：令 $s = \tan\frac{A}{2}, t = \tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}$$

$$\vec{BD} = \frac{(1-st)(1+t^2-is-it)}{(1+t^2)(1-2st-t^2-is-it)}\vec{BC}$$

进而可求得直线 AD 与边 BC 的交点

$$\vec{BE} = \frac{1-3st+3s^2t^2-s^3t^3}{(1+t^2)(1-3st-t^2+3s^2t^2+3st^3+t^4)}\vec{BC}$$

设

$$\vec{BF} = \lambda\vec{BA} + (1-\lambda)\vec{BD}$$

根据 F, A, B, C 四点共圆即可求出

$$\vec{BF} = \frac{(1-st)^2(1+t^2-is-it)}{(1+t^2)(1-it)(1-st-is+2is^2t+2ist^2+it^3)}\vec{BC}$$

于是计算知

$$\frac{BE}{CE} = \frac{(1-st)^3}{t^3(s+t)^3}, \quad \frac{BF}{CF} = \frac{(1-st)^2}{t^2(s+t)^2}$$

即有

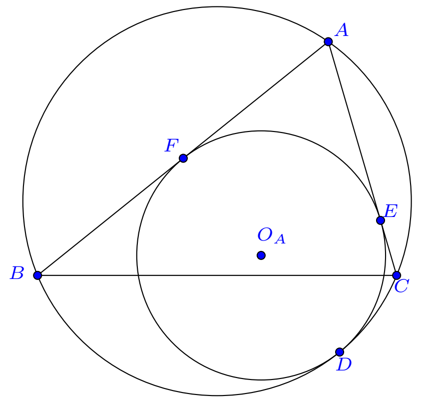
$$(\frac{BE}{CE})^2 = (\frac{BF}{CF})^3$$

2.4.7 伪内切圆

与三角形的两条边相切，且与三角形的外接圆内切的圆称为三角形的伪内切圆。

伪内切圆的表示

如图, 圆 O_A 与三角形 ABC 的两边 AB, AC 相切, 且与外接圆 O 内切的圆，求圆心 O_A 及三个切点 D, E, F 的表示。



解：令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$，则

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}$$

内切圆圆心及半径分别为

$$\vec{BI}=\frac{1-st}{1-it}\vec{BC}, r=\frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

与 AB, AC 同时相切的圆，其圆心 O_A 在 AI 直线上，因此设

$$\vec{BO}_A=\lambda\vec{BI}+(1-\lambda)\vec{BA}, r_A=\lambda\frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

该圆上的点可表示为：

$$\vec{BP}=\left(\lambda\frac{1-st}{1-it}+(1-\lambda)\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}+\lambda\frac{t-st^2}{1+t^2}\frac{1+iu}{1-iu}\right)\vec{BC}$$

若该点在外接圆上，即 P, A, B, C 四点共圆，于是可得到关于 u 的二次方程 (比较长，略)。
两圆相切的条件是方程仅有一个根，即关于 u 的判别式为 0，于是得到关于 λ 的二次方程：

$$(1+s^2-\lambda)(s+s^3+t+s^2t-t\lambda+st^2\lambda)=0$$

比较一下两个根的大小

$$1+s^2<\frac{(1+s^2)(s+t)}{t(1-st)}$$

即可得知所求的圆应取 $\lambda=1+s^2$
于是

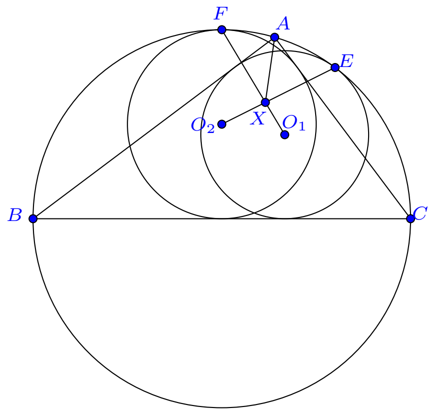
$$\vec{BO}_A=\frac{(1-st)(1-st-it-is^2t)}{(1-it)^2}\vec{BC}, r_A=\frac{t(1+s^2)(1-st)}{1+t^2}BC$$

三个切点分别为

$$\vec{BD}=\frac{(1-st)^2}{(1-it)(1+it-2st)}\vec{BC}$$
$$\vec{BE}=\frac{(1-st)(1-2it+st)}{(1-it)^2}\vec{BC}$$
$$\vec{BF}=\frac{(1-st)^2}{(1-it)^2}\vec{BC}$$

题目

已知 $\odot O_1$ 与 $\triangle ABC$ 的 AB, BC 边相切且与 $\triangle ABC$ 的外接圆内切于点 E，$\odot O_2$ 与 $\triangle ABC$ 的 AC, BC 边相切且与 $\triangle ABC$ 的外接圆内切于点 F，连接 EO_2, FO_1 交于 X，证明：AX 平分 $\angle BAC$。



证明: 令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}$$

同前面的求法类似地，我们可以计算出

$$\begin{aligned}
\vec{BO_1}&=(1+it)(1-st)\vec{BC}\\
\vec{BE}&=\frac{(1-is)(1-st)}{1-is-2st}\vec{BC}\\
\vec{BO_2}&=\frac{(1-st)(s^2+it+st+is^2t)}{(s+t)^2}\vec{BC}\\
\vec{BF}&=\frac{s(1-st)}{s-t-2ist}\vec{BC}
\end{aligned}$$

进而求出 EO_2 与 FO_1 的交点 X

$$\vec{BX}=\frac{(1-st)(1+2s^2-st+it+3is^2t)}{1+2s^2-2st+t^2+4s^2t^2}\vec{BC}$$

从而计算知

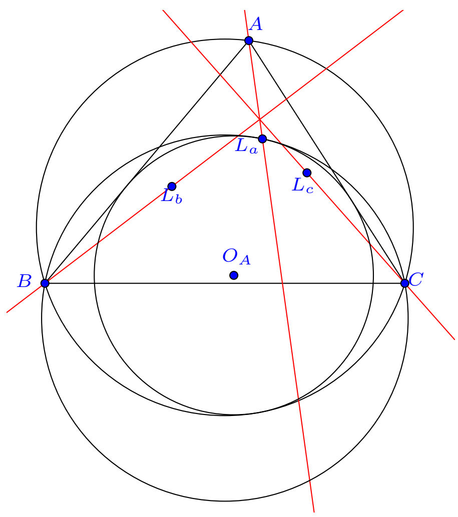
$$\mathrm{Im}\left(\frac{B-A}{X-A}\frac{C-A}{X-A}\right)=0$$

这就说明了 AX 平分 $\angle BAC$。结论也等价于 A, X 与 $\triangle ABC$ 的内心 I 三点共线。

2.4.8 伪内切-外接圆

伪内切-外接圆的表示

设 $\triangle ABC, L_a$ 为 $A-$ 伪内切圆上的点, 满足 L_aBC 与伪内切圆内切, 同理定义 L_b, L_c。证明: AL_a, BL_b, CL_c 交于一点。



证明: 伪内切圆的参数表示为

$$\vec{BP} = \left(\frac{(1-st)(1-st-it-is^2t)}{(1-it)^2} + \frac{t(1+s^2)(1-st)(1+iu)}{(1+t^2)(1-iu)}\right)\vec{BC}$$

而经过 BC 两点的圆可设为

$$\vec{BQ} = \frac{1+iq}{1-iv}\vec{BC}$$

此圆与伪内切圆的交点满足方程

$$\frac{(1-st)(1-st-it-is^2t)}{(1-it)^2} + \frac{t(1+s^2)(1-st)(1+iu)}{(1+t^2)(1-iu)} = \frac{1+iq}{1-iv}$$

此方程分离实部和虚部后为两方程, 联立可以消去变量 u, 得到关于 v 的二次方程:

$$\begin{aligned}&(1-st)^4v^2 + 2(1-st)(q-t-qst+s^2t+qt^2+2st^2+2qs^2t^2-t^3+qst^3-s^2t^3)v\\ &+q^2-2qt+2qs^2t+2q^2t^2+6qst^2-2qs^3t^2-2qt^3-6qs^2t^3+t^4+q^2t^4+2qst^4+2s^2t^4+2qs^3t^4+s^4t^4=0\end{aligned}$$

因两圆相切, 此二次方程仅有一个重根, 所以判别式为 0, 解出

$$q = \frac{(1-s-t-st+t^2+s^2t^2)(1+s+t-st+t^2+s^2t^2)}{2(s+t)(1-st+t^2+s^2t^2)}$$

(注: 另一解 $q=\frac{1-s^2}{2s}$ 对应于三角形 ABC 的外接圆)

$$v = \frac{-1+s^2+6st-2s^3t-10s^2t^2+2s^4t^2+4st^3+12s^3t^3+2t^4-s^2t^4-5s^4t^4+2s^3t^5+2s^5t^5+t^6+2s^2t^6+s^4t^6}{2(s+t)(1-st)^2(1-st+t^2+s^2t^2)}$$

于是切点 L_a 为:

$$\vec{BL_a} = \frac{(1-st)^2(1+t^2-it+ist^2)}{(1-it)(1-2st+2s^2t^2+st^3-ist^2-it^3)}\vec{BC}$$

做变量轮换即可得到 L_b, L_c 为:

$$\begin{aligned}\vec{CL_b} &= \left(\frac{(1-st)^2(1+t^2-it+ist^2)}{(1-it)(1-2st+2s^2t^2+st^3-ist^2-it^3)}/.\{s\to t, t\to \frac{1-st}{s+t}\}\right)\vec{CA}\\ \vec{AL_c} &= \left(\frac{(1-st)^2(1+t^2-it+ist^2)}{(1-it)(1-2st+2s^2t^2+st^3-ist^2-it^3)}/.\{s\to \frac{1-st}{s+t}, t\to s\}\right)\vec{AB}\end{aligned}$$

也就得到:

$$\begin{aligned}\vec{BL_b} &= \frac{(1-st)(1-is)(1-s^2-2st+is-is^2t)}{1-2st+s^3t+2s^2t^2+is^3+is^2t}\vec{BC}\\ \vec{BL_c} &= \frac{s(1-st)(s+t+ist)}{s^2+t^2-is^2t+ist^2}\vec{BC}\end{aligned}$$

于是求得直线 AL_a 与直线 BL_b 的交点 X 为:

$$\vec{BX} = \frac{(1-st)(1-is)(1-s^2-2st+is-is^2t)(1-2st+s^3t+2s^2t^2-is^3-is^2t)}{1+s^6-5st+s^5t+10s^2t^2+2s^6t^2-10s^3t^3+2s^5t^3+5s^4t^4+s^6t^4+st^5+2s^3t^5+s^5t^5+t^6+2s^2t^6+s^4t^6}\vec{BC}$$

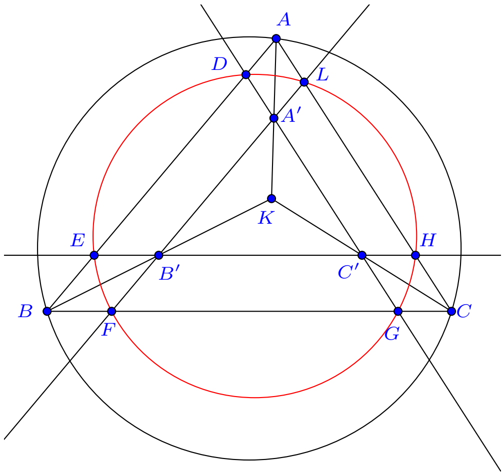
验证即知 X 也在直线 CL_c 上, 从而证明了 AL_a, BL_b, CL_c 三线共点。

可无限重复这一过程, 伪内切圆 —> 伪外接圆 —> 伪内切圆 —> 伪外接圆, 各圆均可有理表示。

2.4.9 塔克圆

设 K 是 $\triangle ABC$ 的共轭重心, A' 是 AK 上的点。(1) 若过 A' 作 AB 的平行线交 KB 于 B', 过 A' 作 AC 的平行线交 KC 于 C'，则 $B'C'//BC$。(2) $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的非对应边 (所在直线) 的六个交点 D,E,F,G,H,L 共圆，该圆称为 $\triangle ABC$

的塔克圆。



证明: 令

$$\vec{BA}=\frac{1+is}{1-it}\vec{BC}$$

则 $\triangle ABC$ 的共轭重心为

$$\vec{BK}=\frac{(1+is)(2-is+it)}{2(1+s^2+st+t^2)}\vec{BC}$$

设

$$\vec{BA'}=\lambda\vec{BK}+(1-\lambda)\vec{BA}$$

$$\vec{BB'}=\mu\vec{BK}+(1-\mu)\vec{BB}$$

$$\vec{BC'}=\nu\vec{BK}+(1-\nu)\vec{BC}$$

则根据 $A'B'//AB, C'A'//CA$ 知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{A'-B'}{A-B}\right)=0, \operatorname{Im}\left(\frac{A'-C'}{A-C}\right)=0$$

解出

$$\lambda=\mu=\nu$$

由此即知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{B'-C'}{B-C}\right)=0$$

因而 $B'C'//BC$。

同理, 可求出 D,E,F,G,H,L

$$\vec{BD}=\frac{(1+is)(2+2s^2+2st+2t^2-s^2\lambda-2st\lambda-t^2\lambda)}{2(1-it)(1+s^2+st+t^2)}\vec{BC}$$

$$\vec{BE}=\frac{(1+is)(1+it)\lambda}{2(1+s^2+st+t^2)}\vec{BC}$$

$$\vec{BF}=\frac{(1+s^2)\lambda}{2(1+s^2+st+t^2)}\vec{BC}$$

$$\vec{BG}=\frac{2+2s^2+2st+2t^2-s^2\lambda-2st\lambda-t^2\lambda}{2(1+s^2+st+t^2)}\vec{BC}$$

$$\vec{BH}=\frac{2+2s^2+2st+2t^2+is\lambda+it\lambda-st\lambda-t^2\lambda}{2(1+s^2+st+t^2)}\vec{BC}$$

$$\vec{BL}=\frac{(1+is)(2+2s^2+2st+2t^2-is\lambda-s^2\lambda-it\lambda-st\lambda)}{2(1-it)(1+s^2+st+t^2)}\vec{BC}$$

计算即知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{F-D}{F-E}\frac{G-E}{G-D}\right)=0, \operatorname{Im}\left(\frac{F-D}{F-E}\frac{H-E}{H-D}\right)=0, \operatorname{Im}\left(\frac{F-D}{F-E}\frac{L-E}{L-D}\right)=0$$

因而六点共圆。

任选其中三点计算，可知此圆圆心和半径分别为

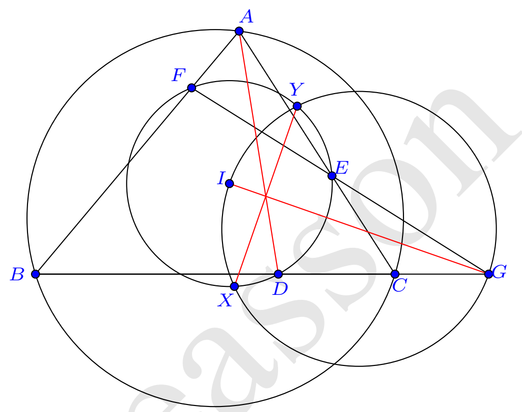
$$\vec{BO'} = \frac{(1+is)(2+2s^2+2st+2t^2+\lambda-is\lambda-s^2\lambda+it\lambda-st\lambda-t^2\lambda)}{4(1+s^2+st+t^2)}\vec{BC}$$

$$R' = \frac{\sqrt{1+s^2}\sqrt{4(1+s^2+st+t^2)^2(1-\lambda)+(1+3s^2+s^4+4st+2s^3t+3t^2+3s^2t^2+2st^3+t^4)\lambda^2}}{4(1+s^2+st+t^2)}BC$$

2.4.10 其他典型的圆

与三角形的各边有两交点的圆

如图，在 $\triangle ABC$ 中，内心为 I, 以 I 为圆心的圆 Ω 使得其与线段 BC, CA, AB 均有 2 个交点。其中，BC 上离 C 近的交点记作 D, CA 上离 C 近的交点记作 E, AB 上离 A 近的交点记作 F。延长 EF 交 BC 于点 G, 以 IG 为直径的圆交 Ω 于 X, Y 两点。求证: AD, IG, XY 三线共点。



证明: 令 $s = \tan\frac{A}{2}, t = \tan\frac{B}{2}$, 于是

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}, \vec{BI} = \frac{(1-st)}{(1-it)}\vec{BC}$$

又设圆 Ω 与 BC 的交点 D 为:

$$\vec{BD} = \lambda\vec{BC}$$

显然 D 点应位于内心 I 在 BC 边上的垂足点之右, 因此 $\lambda > \frac{1-st}{1+t^2}$, 这样圆 Ω 的半径平方为

$$R^2 = \frac{1-2st+s^2t^2-2\lambda+2st\lambda+\lambda^2+t^2\lambda^2}{1+t^2}BC^2$$

设 E 点为

$$\vec{BE} = \mu\vec{BC} + (1-\mu)\vec{BA}$$

根据 $IE^2 = R^2$ 可求出两个解

$$\mu_1 = \frac{s+t-s^2t-st^2-s\lambda-st^2\lambda}{(1+s^2)t}$$

$$\mu_2 = \frac{-s+t+s^2t-st^2+s\lambda+st^2\lambda}{(1+s^2)t}$$

根据 $\lambda > \frac{1-st}{1+t^2}$ 以及 $s > 0, t > 0, 1-st > 0$ 的条件，我们不难判断出 $\mu_1 < \mu_2$，因而离 C 近的交点 E 应为

$$\vec{BE} = \frac{2-2st-\lambda-is\lambda-it\lambda+st\lambda}{(1-is)(1-it)}\vec{BC}$$

同理，求出

$$\overrightarrow{BF}=\lambda\frac{1+it}{1-it}\overrightarrow{BC}$$

EF 与 BC 的交点 G 为

$$\overrightarrow{BG}=\frac{\lambda(s-t-s^2t+st^2-s\lambda-st^2\lambda)}{s+t-s^2t-st^2-s\lambda-2t\lambda+st^2\lambda}\overrightarrow{BC}$$

以 IG 为直径的圆，其上的点 P 可设为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{BG})+\frac{1}{2}\frac{1-iu}{1+iu}(\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BG})\\&=\left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{u(-1+st+\lambda+it\lambda)(s+t-s^2t-st^2-s\lambda+2ist\lambda+st^2\lambda)}{(1-it)(i+u)(s+t-s^2t-st^2-s\lambda-2t\lambda+st^2\lambda)}\right)\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

由此得到点 X,Y 对应的参数 u_1,u_2 所满足的方程

$$4t(s+t)(1-st)\lambda(1-\lambda)u^2=(s+t-s^2t-st^2-s\lambda-2t\lambda+st^2\lambda)^2$$

易知，若作代换

$$\frac{(1-\lambda)(1-st)}{\lambda t(s+t)}=p^2$$

也即

$$\lambda=\frac{1-st}{1-st+p^2st+p^2t^2}$$

则可以解出两根

$$u=\pm\frac{-1-s^2+p^2s^2+2p^2st+p^2t^2}{2p(s+t)}$$

由此, 我们可得 X,Y 的表示:

$$\overrightarrow{BX}=\frac{(1-st)(1-is+ips-it+ipt-st-pst+2p^2st-pt^2+2p^2t^2)}{(1-it)(1-is+ips+ipt)(1-st+p^2st+p^2t^2)}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BY}=\frac{(1-st)(1-is-ips-it-ipt-st+pst+2p^2st+pt^2+2p^2t^2)}{(1-it)(1-is-ips-ipt)(1-st+p^2st+p^2t^2)}\overrightarrow{BC}$$

AD 与 AG 的交点 T 为

$$\overrightarrow{BT}=\frac{(1-st)(1-2is-s^2+p^2s^2-it-2st+4p^2st+is^2t-ip^2s^2t+3p^2t^2+ip^2t^3)}{(1-it)(1-is+ips+ipt)(1-is-ips-ipt)(1-st+p^2st+p^2t^2)}\overrightarrow{BC}$$

由此可知

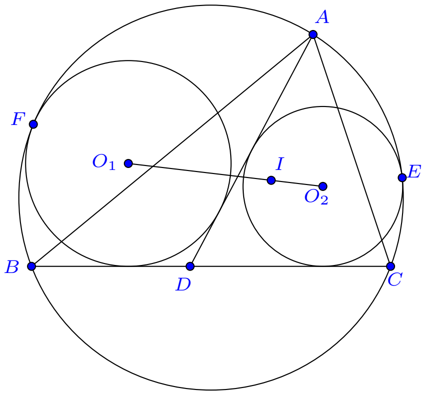
$$\frac{T-X}{Y-X}=\frac{1}{2}$$

也即 T 是 X,Y 的中点，因而 AD,IG,XY 三线共点。

三角形的某边上任取一点的切圆问题

泰博定理

D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的一点, 若圆 O_1、O_2 分别与 AD,BC 和 $\triangle ABC$ 的外接圆都相切，则 O_1,O_2 和 I 三点共线。



证明：设 $z=e^{i\angle A}, w=e^{i\angle B}, \alpha=e^{i\angle BAD}$, 则

$$\vec{BA}=\frac{1-z^2w^2}{1-z^2}\vec{BC}=\frac{1-\alpha^2w^2}{1-\alpha^2}\vec{BD}$$

$$\vec{BI}=\frac{1+zw}{1+z}\vec{BC}$$

由此又可得

$$\vec{BD}=\frac{(1-w^2z^2)(1-\alpha^2)}{(1-w^2\alpha^2)(1-z^2)}\vec{BC}$$

由圆 O_1, O_2 分别与 AD, BC 相切, 及图所示位置知，圆心 O_1 应在 $\triangle ABD$ 的内切圆圆心与点 D 的连线上, 圆心 O_2 在 $\triangle ADC$ 的内切圆圆心与点 D 的连线上。因此我们先来求 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的内切圆, 记其圆心和半径分别为 J, K, r_J, r_K。

对于 $\triangle ABD$, 不难得知

$$\begin{aligned}
\vec{BA}&=\frac{1-\alpha^2w^2}{1-\alpha^2}\vec{BD}\\
\vec{BJ}&=\frac{1+\alpha w}{1+\alpha}\vec{BD}=\frac{(1-w^2z^2)(1-\alpha)}{(1-z^2)(1-w\alpha)}\vec{BC}\\
r_J&=\frac{i(1-w)(1+w\alpha)}{2w(1+\alpha)}BD=\frac{i(1-w)(1-w^2z^2)(1-\alpha)}{2w(1-z^2)(1-w\alpha)}BC
\end{aligned}$$

对于 $\triangle ADC$, 先将其表示为

$$\vec{DA}=\frac{(1-w^2z^2)\alpha^2}{\alpha^2-z^2}\vec{DC}$$

与标准形式对比

$$\vec{DA}=\frac{1-p^2q^2}{1-p^2}\vec{DC}$$

即知 $p=\frac{z}{\alpha}, q=w\alpha$, 这也容易由角度关系得到。从而知 $\triangle ADC$ 的内心和半径为:

$$\begin{aligned}
\vec{DK}&=\frac{1+pq}{1+p}\vec{DC}=\frac{(1+wz)\alpha}{z+\alpha}\vec{DC}\\
r_K&=\frac{i(1-q)(1+pq)}{2(1+p)q}DC=\frac{i(1+wz)(1-w\alpha)}{2w(z+\alpha)}DC
\end{aligned}$$

转化为 BC 为基底的表示则为

$$\begin{aligned}
\vec{BK}&=\frac{(1+wz)(1-wz+w\alpha-z\alpha)}{(1-z^2)(1+w\alpha)}\vec{BC}\\
r_K&=\frac{i(1-w^2)(1+wz)(z-\alpha)}{2w(-1+z^2)(1+w\alpha)}BC
\end{aligned}$$

现在我们设 $O_1=\lambda J+(1-\lambda)D, O_2=\mu K+(1-\mu)D$, (显然 $\lambda>1, \mu>1$)

则圆 O_1 上和圆 O_2 的半径分别为 $r_1=\lambda r_J, r_2=\mu r_k$。

因为圆 O_1, O_2 均与 $\triangle ABC$ 的外接圆内切，所以

$$|O_1 - O| = R - r_1, |O_2 - O| = R - r_2$$

其中外接圆圆心和半径分别为

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{1-z^2}\overrightarrow{BC}, R = -\frac{iz}{1-z^2}BC$$

求解得到

$$\lambda = -\frac{2w(z+\alpha)}{(1-wz)(1-w\alpha)}, \mu = \frac{2w(1+\alpha)}{(1+w)(1+w\alpha)}$$

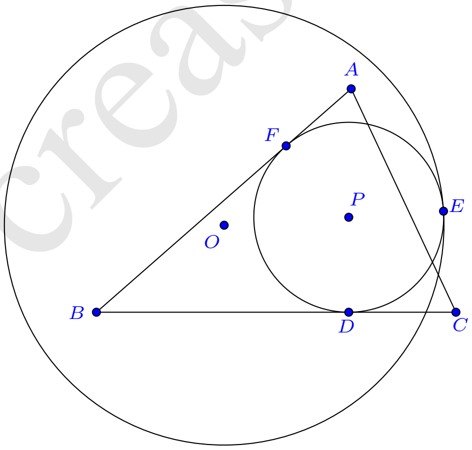
于是

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BO_1} &= \frac{(1+wz)(1-\alpha)(1-wz+\alpha-2w\alpha+wz\alpha)}{(1-z^2)(1-w\alpha)^2}\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{BO_2} &= \frac{(1+wz)(1+\alpha)(1-wz-\alpha+2w\alpha-wz\alpha)}{(1-z^2)(1+w\alpha)^2}\overrightarrow{BC} \\
r_1 &= -\frac{i(1-w)(1+wz)(1-\alpha)(z+\alpha)}{(1-z^2)(1-w\alpha)^2}BC \\
r_2 &= -\frac{i(1-w)(1+wz)(z-\alpha)(1+\alpha)}{(1-z^2)(1+w\alpha)^2}BC
\end{aligned}$$

计算即知 $\operatorname{Im}\left(\frac{O_1-I}{O_2-I}\right) = 0$，即 O_1、O_2 和 I 三点共线。

三角形与一位置不太固定的圆

给定三角形 ABC 及圆 O，圆 P 与 AB, BC 及圆 O 分别切于 D, F, E，求圆 P 的圆心及半径，及各切点 D, E, F。



解：令 $s = \tan\frac{A}{2}, t = \tan\frac{B}{2}$，则

$$\overrightarrow{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\overrightarrow{BC}$$

因为 P 点在 $\angle B$ 的角平分线上，所以圆 O 的圆心和半径可表示为

$$\overrightarrow{BP} = \frac{\lambda}{1-it}\overrightarrow{BC}, r_P = \frac{\lambda t}{1+t^2}BC$$

又设圆 O 的圆心和半径为

$$\overrightarrow{BO} = (u+iv)\overrightarrow{BC}, r_O = R \cdot BC$$

1. 若圆 P 内切于圆 O，则

$$|r_O - r_P| = |\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BP}|$$

展开为

$$\lambda^2 - 2(1+t^2)(u+vt-Rt)\lambda + (u^2+v^2-R^2)(1+t^2)^2 = 0$$

此方程的判别式为

$$\Delta = 4(1+t^2)^2(R-v)(R+Rt^2-2tu+v-t^2v)$$

两个因式均是关于 R 的一次式, 因此只需令

$$\frac{R+Rt^2-2tu+v-t^2v}{R-v} = p^2$$

即

$$R = \frac{2tu-v-p^2v+t^2v}{1-p^2+t^2}$$

p 的取值范围待定, 因此选取 λ 的其中一个解即可

$$\lambda = \frac{(1+t^2)(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{1-p^2+t^2}$$

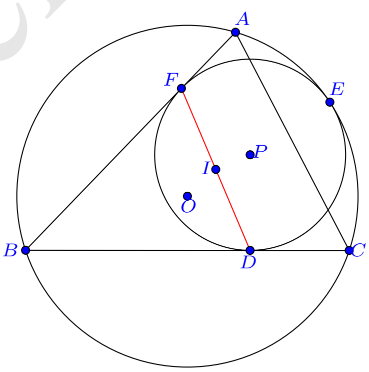
由此可将圆 P 的圆心和半径有理地表示出来

$$\begin{aligned}\vec{BP} &= \frac{(1+it)(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{1-p^2+t^2}\vec{BC}\\ r_p &= \frac{t(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{1-p^2+t^2}BC\end{aligned}$$

三个切点 D, E, F 也可以有理表示

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= \frac{u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv}{1-p^2+t^2}\vec{BC}\\ \vec{BE} &= \frac{(1-ip+it)(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{(1-ip-it)(1-p^2+t^2)}\vec{BC}\\ \vec{BF} &= \frac{(1+it)(1-st)(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{(1-it)(1-p^2+t^2)}\vec{BC}\end{aligned}$$

曼海姆定理 I



特别地，如果圆 O 为三角形 ABC 的外接圆，则

$$u = \frac{1}{2}, v = \frac{1-s^2}{4s}, R = \frac{1+s^2}{4s}$$

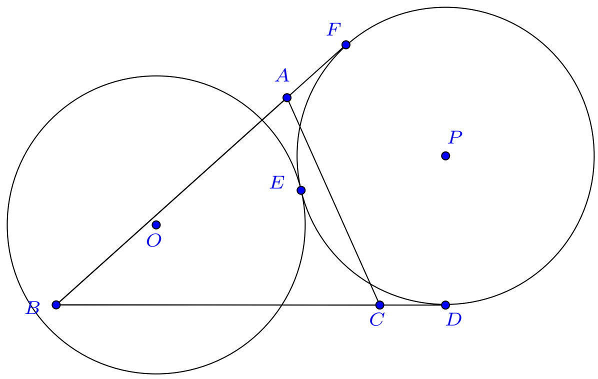
代入求得

$$\vec{BP} = (1-st)(1+it)\vec{BC}, \quad r_p = t(1-st)BC$$

$$\vec{BD} = (1-st)\vec{BC}, \quad \vec{BE} = \frac{(1-is)(1-st)}{1-2st-is}\vec{BC}, \quad \vec{BF} = \frac{(1-st)(1+it)}{1-it}\vec{BC}$$

D, F 的中点恰为 $\triangle ABC$ 的内心 I, 此即曼海姆定理 I。

2.



若圆 P 外切于圆 O，则

$$|r_o+r_p| = |\vec{BO}-\vec{BP}|$$

展开为：

$$\lambda^2-2(1+t^2)(u+vt+Rt)\lambda+(u^2+v^2-R^2)(1+t^2)^2=0$$

同 1 的做法, 令

$$R=\frac{-2tu+v+p^2v-t^2v}{1-p^2+t^2}$$

则

$$\lambda=\frac{(1+t^2)(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{1-p^2+t^2}$$

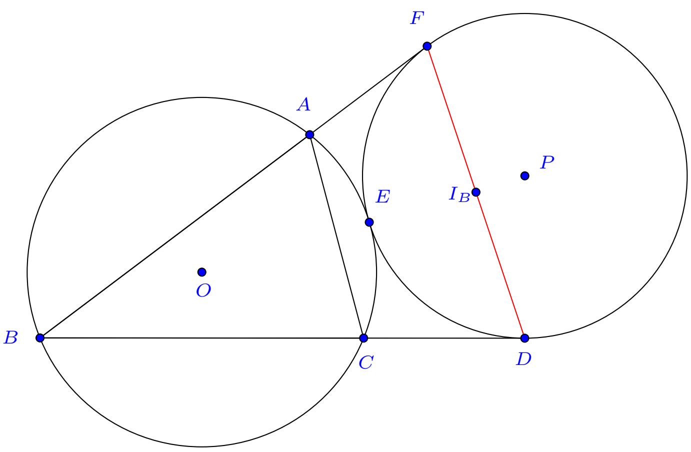
由此得圆 P 的圆心和半径的有理表示

$$\vec{BP}=\frac{(1+it)(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{1-p^2+t^2}\vec{BC}$$
$$r_p=\frac{t(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{1-p^2+t^2}BC$$

以及三个切点 D,E,F 的有理表示

$$\vec{BD}=\frac{u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv}{1-p^2+t^2}\vec{BC}$$
$$\vec{BE}=\frac{(1-ip+it)(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{(1-ip-it)(1-p^2+t^2)}\vec{BC}$$
$$\vec{BF}=\frac{(1+it)(1-st)(u-p^2u-2ptu-t^2u+2pv+2tv)}{(1-it)(1-p^2+t^2)}\vec{BC}$$

曼海姆定理 II



特别地，如果圆 O 为三角形 ABC 的外接圆，则

$$\vec{BP}=\frac{(s+t)(1+it)}{s}\vec{BC},\quad r_p=\frac{t(s+t)}{s}BC$$

$$\vec{BD}=\frac{s+t}{s}\vec{BC},\quad \vec{BE}=\frac{(s+t)(1-is)}{s(1-is-2it)}\vec{BC},\quad \vec{BF}=\frac{(s+t)(1+it)}{s(1-it)}\vec{BC}$$

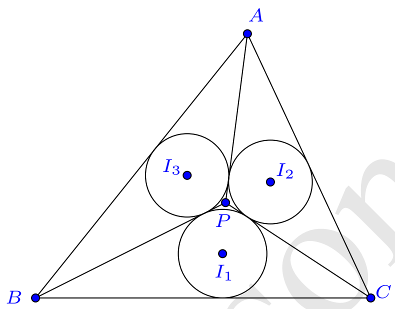
D,F 的中点恰为 $\triangle ABC$ 的旁心

$$\vec{BI_B}=\frac{s+t}{s(1-it)}\vec{BC}$$

此即曼海姆定理 II。

三角形内点所划分三角形的内切圆

对于给定的三角形 ABC 及其内的任意一点 P, 求三个小三角形 $\triangle PBC,\triangle PCA,\triangle PAB$ 内切圆的一个有理表示。



解：令

$$a=e^{iA},b=e^{iB},p=e^{i\angle BPC},q=e^{i\angle PBC}$$

则点的表示为

$$\vec{BA}=\frac{1-a^2b^2}{1-a^2}\vec{BC},\vec{BP}=\frac{1-p^2q^2}{1-p^2}\vec{BC}$$

边长

$$AB=\frac{1-a^2b^2}{(1-a^2)b}BC,\quad CA=\frac{a(1-b^2)}{(1-a^2)b}BC$$
$$BP=\frac{(1-p^2q^2)}{(1-p^2)q}BC,\quad CP=\frac{p(1-q^2)}{(1-p^2)q}BC$$

而边长 AP 尚不能有理表示:

$$AP^2=-\frac{(a^2-a^2b^2-p^2+a^2b^2p^2+p^2q^2-a^2p^2q^2)(b^2-a^2b^2-q^2+a^2b^2q^2+p^2q^2-b^2p^2q^2)}{(1-a)^2(1+a)^2b^2(1-p)^2(1+p)^2q^2}BC^2$$

我们可令

$$\frac{a^2-a^2b^2-p^2+a^2b^2p^2+p^2q^2-a^2p^2q^2}{b^2-a^2b^2-q^2+a^2b^2q^2+p^2q^2-b^2p^2q^2}=z^2$$

若如此，参数 z 虽然满足 $|z|=1$, 但它是一个几何意义不太明显的量。

为使得所引入的新参量有明确意义, 我们可以选取三角形内不能用 a,b,p,q 有理表示的一个角，简单地，取 $z=e^{i\angle BAP}$, 则由

$$\arg z=\arg\left(\frac{P-A}{B-A}\right)\Rightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\frac{P-A}{B-A}\right)=0$$

得关系式

$$a^2q^2-a^2b^2q^2-p^2q^2+a^2b^2p^2q^2+p^2q^4-a^2p^2q^4+b^2z^2-a^2b^2z^2-q^2z^2+a^2b^2q^2z^2+p^2q^2z^2-b^2p^2q^2z^2=0$$

利用这个关系，即可得到 AP 的一个有理表示

$$AP=\frac{z(1-a^2b^2)(b^2-q^2)}{b(1-a^2)(b^2z^2-q^2)}BC$$

记 $\triangle PBC,\triangle PCA,\triangle PAB$ 的内切圆圆心为 I_1,I_2,I_3, 半径 r_1,r_2,r_3
根据内心的重心坐标式, 并利用 z,a,b,p,q 的关系式，化简得到 [①]

$$\begin{aligned}
\vec{BI_1}&=\frac{1+pq}{1+p}\vec{BC}\\
\vec{BI_2}&=\frac{(1-p^2q^2)(abq+pq^2+ab^2pz-apq^2z-b^2pz^2-abqz^2)}{(1-p^2)q(ab+pq)(1-z^2)}\vec{BC}\\
\vec{BI_3}&=\frac{(1-p^2q^2)(q+bz)}{(1-p^2)q(1+z)}\vec{BC}
\end{aligned}$$

进而计算得到半径

$$\begin{aligned}
r_1&=i\frac{(1-q)(1+pq)}{2(1+p)q}BC\\
r_2&=i\frac{(ab-pq)(1-q^2)(pq+bz)}{2b(1-p^2)q^2(a+z)}BC\\
r_3&=i\frac{(1-a^2b^2)(b-q)(1-z)}{2(1-a^2)b(bz-q)}BC
\end{aligned}$$

$\frac{(1-a^2b^2)(1-q^2)(abq+pq^2+ab^2pz-apq^2z-b^2pz^2-abqz^2)}{(1-p^2)q(ab+pq)(1-a^2b^2-q^2+a^2q^2-z^2+b^2z^2)}$

内心小三角形有理化之三

纯几何吧题目 255:
$\triangle ABC,I$ 为内心, 圆 O_1,O_2,O_3 分别为 $\triangle BIC,\triangle CIA,\triangle AIB$ 的内切圆。
求证: 圆 O_2O_3 的异于 AI 的另一条内公切线过 O_1 与 BC 的切点。
证明：若 P 为内心, 则以上表示中, $z=-p^2,w=q^2,s=-ip$。

$$\begin{aligned}
\vec{BI_A}&=\frac{1+pq}{1+p}\vec{BC}\\
\vec{BI_B}&=\frac{(1+pq)(1-ip-p^2-pq+ip^2q+p^2q^2)}{(1-ip)(1-p)(1+p)}\vec{BC}\\
\vec{BI_C}&=\frac{(1-ipq)(1-pq)(1+pq)}{(1-ip)(1-p)(1+p)}\vec{BC}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_A&=\frac{i(1-q)(1+pq)}{2(1+p)q}BC\\
r_B&=\frac{p(1-q)(1-iq)(1+q)(1+pq)}{2(1-p)(1-ip)(1+p)q^2}BC\\
r_C&=\frac{(1-q)(1-pq)(i+pq)(1+pq)}{2(1-ip)(1-p)(1+p)q^2}BC
\end{aligned}$$

内切圆 O_2 上的点 Y 可表示为:

$$\vec{BY}=\left(\frac{(1+pq)(1-ip-p^2-pq+ip^2q+p^2q^2)}{(1-ip)(1-p)(1+p)}+\frac{p(1-q)(1-iq)(1+q)(1+pq)}{2(1-p)(1-ip)(1+p)q^2}\frac{1+iu}{1-iu}\right)\vec{BC}$$

内切圆 O_3 上的点 Z 可表示为:

$$\vec{BZ}=\left(\frac{(1-ipq)(1-pq)(1+pq)}{(1-ip)(1-p)(1+p)}+\frac{(1-q)(1-pq)(i+pq)(1+pq)}{2(1-ip)(1-p)(1+p)q^2}\frac{1+iv}{1-iv}\right)\vec{BC}$$

[①] 表示不唯一, 这里选取了简短一些的表示

若 Y,Z 是另一条内公切线上的切点, 则 $uv=-1$,

$$u=\frac{i+(1+i)q+(1-i)pq-ipq^2}{1+pq^2}$$

切点的表示有点长:

$$\vec{BY}=\frac{(1+pq)(ip+p^2+(2-2i)q-(1+2i)pq-p^2q-2iq^2-(6-i)pq^2+5ip^2q^2+2p^3q^2-(1-2i)pq^3+5p^2q^3-2ip^3q^3+(1-i)}{2(1-ip)(1-p)(1+p)q((1-i)-iq-pq)}$$

$$\vec{BZ}=\frac{(1+q)(1-pq)(1-ipq)(1+pq)(1-ip-2iq-(1-i)pq)}{2(1-ip)(1-p)(1+p)q((1-i)-iq-pq)}\vec{BC}$$

圆 O_1 在 BC 上的切点为:

$$\vec{BD}=\mathrm{Re}\left(\frac{1+pq}{1+p}\right)\vec{BC}=\frac{(1+q)(1+pq)}{2(1+p)q}\vec{BC}$$

由此可知 Y,Z,D 三点共线，于是结论成立。

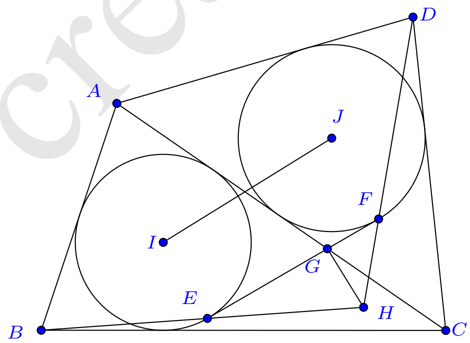
内心小三角形有理化之四

纯几何吧题目 5351:
如图,P 为三角形 ABC 内一点，记 $\triangle APB,\triangle APC$ 内切圆另一条内公切线为 l_a, 类似定义 l_b,l_c。
证明: l_a,l_b,l_c 共点 Q。

2.4.11　两圆

两个三角形内切圆的公切线问题

$\triangle ABC$ 的内切圆为 $\odot I$, $\triangle ACD$ 的内切圆为 $\odot J$。EF 是这两个圆的一条外公切线, E,F 分别是 $\odot I,\odot J$ 上的切点。AC 与 EF 相交于点 G, BE 与 DF 相交于点 H, 那么 $GH\perp IJ$。



证明: 以 AC 为基向量, 我们可令 $z=e^{i\angle ABC},w=e^{i\angle CAB},p=e^{i\angle ADC},q=e^{i\angle DAC}$, 则

$$\vec{AB}=\frac{(1-w^2z^2)}{w^2(1-z^2)}\vec{AC},\vec{AD}=\frac{1-p^2q^2}{1-p^2}\vec{AC}$$

$\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 的圆心和半径分别为:

$$\vec{AI}=\frac{1+wz}{w(1+z)}\vec{AC},r_I=\frac{i(1-w)(1+wz)}{2w(1+z)}AC$$

因此 $\odot I$ 上的点 E 可表示为

$$\vec{AE}=\left(\frac{1+wz}{w(1+z)}+\frac{(1-w)(1+wz)}{2w(1+z)}\frac{1+iu}{1-iu}\right)\vec{AC}$$

$\triangle ACD$ 的内切圆 $\odot J$ 的圆心和半径分别为:

$$\vec{AJ}=\frac{1+pq}{1+p}\vec{AC},r_J=\frac{i(1-q)(1+pq)}{2(1+p)q}AC$$

因此 $\odot J$ 上的点 F 可表示为

$$\vec{AF}=\left(\frac{1+pq}{1+p}+\frac{(1-q)(1+pq)}{2(1+p)q}\frac{1+iv}{1-iv}\right)\vec{AC}$$

外公切线 EF 满足切点处的切向量方向一致：

$$\operatorname{Im}\left(\frac{d}{du}\vec{AE}\otimes\frac{d}{dv}\vec{AF}\right)=0$$

由此有 $(u-v)(uv+1)=0$, 其中 $u=v$ 对应的是外公切线。
另外切向量与两个切点的连线方向一致:

$$\operatorname{Im}\left(\vec{EF}\otimes\frac{d}{du}\vec{AE}\right)=0$$

又可得到：

$$(1-q)(1+pq)w(1+z)u^2+i(q+pq-w-pq^2w-wz-pq^2wz+qw^2z+pqw^2z)u+(1+p)q(1-w)(1+wz)=0$$

这是关于 u 的二次方程, 两个解分别对应两条外公切线。
为使后文的表示更简单些, 我们做代换 $u\to\frac{1-s}{1+s}i$, 这样所有参数均为单位复数: $|z|=|w|=|p|=|q|=|s|=1$。
注意到方程关于 z 是一次的, 可将 z 解出：

$$z=\frac{q+pq+qs+pqs-qw-pq^2w-sw-2pqsw+pq^2sw+s^2w-qs^2w}{w(-pq+pq^2+s-2qs-pq^2s-s^2-pqs^2+qsw+pqsw+qs^2w+pqs^2w)}$$

将其代入 $\vec{AI}$ 的表示化简得:

$$\vec{AI}=\frac{(1+pq)(1-s)(q+s)}{(1+p)q(1+s)(1-sw)}\vec{AC}$$

然后求出 AC 与 EF 的交点 G:

$$\vec{AG}=\frac{(1+pq)(q+s)}{(1+p)q(1+s)}\vec{AC}$$

以及 BE 与 DF 的交点 H:

$$\vec{AH}=\frac{(1+pq)(q+s)f_1}{(1+p)q(1+s)f_2}\vec{AC}$$

其中：

$$\begin{aligned}f_1&=q-2q^2-3pq^2+2pq^3+s-qs-2pqs-2q^2s+2pq^2s-2pq^3s-3qs^2+2q^2s^2-pq^2s^2-s^3+qs^3\\&\quad+q^2w+pq^3w+qsw+q^2sw+4pq^2sw-2pq^3sw+2pqs^2w+q^2s^2w-2pq^2s^2w+pq^3s^2w+qs^3w-q^2s^3w\\f_2&=q-pq-2q^2+2s-4qs-2pq^2s-2s^2+qs^2-pqs^2+q^2w-pq^2w+2pq^3w+2qsw+4pq^2sw-2pq^3sw\\&\quad+2pqs^2w+q^2s^2w-pq^2s^2w\end{aligned}$$

计算即知: $\operatorname{Re}\left(\frac{H-G}{I-J}\right)=0$, 于是 $GH\perp IJ$。

三线共点问题

两圆 ω_1 和 ω_2 外切于点 P, 设点 A 在圆 ω_2 上且不在连心线上, AB, AC 是圆 ω_1 的切线, 其中 B, C 是切点。直线 BP, CP 第二次与圆 ω_2 交于点 E, F。求证：直线 EF, 过 A 关于圆 ω_2 的切线, 以及过 P 的公切线三线共点。

证明：设

$$\vec{PO_2}=-\lambda\vec{PO_1}$$

则 ω_1 上的点 X 可表示为：

$$\vec{O_1X}=\vec{O_1P}\frac{1+iu}{1-iu}\implies\vec{PX}=\frac{2u}{i+u}\vec{PO_1}$$

ω_2 上的点 Y 可表示为：

$$\vec{O_2Y}=\vec{O_2P}\frac{1+iv}{1-iv}\implies\vec{PY}=-\frac{2v\lambda}{i+v}\vec{PO_1}$$

设点 A 为

$$\vec{PA}=-\frac{2a\lambda}{i+a}\vec{PO_1}$$

若 X 是点 A 向圆 ω_1 所引切线的切点, 则根据

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dX}{du}\otimes(X-A)\right)=0$$

可得到方程

$$u^2+a^2u^2-a^2\lambda+2au\lambda+a^2u^2\lambda=0$$

关于 u 的判别式为

$$\Delta=4a^2(1+a^2)\lambda(1+\lambda)$$

因此作代换:

$$\frac{\lambda(1+a^2)}{(1+\lambda)}=p^2\Rightarrow\lambda=\frac{p^2}{1+a^2-p^2}$$

即可求出:

$$u=\pm\frac{ap}{1+a^2-p}$$

因而

$$\vec{PB}=\frac{2iap}{1+a^2-p+iap}\vec{PO_1},\quad \vec{PC}=\frac{-2iap}{1+a^2+p-iap}\vec{PO_1}$$

进而求出 E,F

$$\vec{PE}=\frac{2ap^3}{(i+a)(1+ia-p)(1+a^2-p^2)}\vec{PO_1}$$

$$\vec{PF}=\frac{2ap^3}{(i+a)(-1-ia-p)(1+a^2-p^2)}\vec{PO_1}$$

过 A 关于圆 ω_2 的切向量为:

$$\lim_{v\to a}\frac{d}{dv}\vec{PY}=\frac{2ip^2}{(1-ia)^2(1+a^2-p^2)}\vec{PO_1}$$

由此求得直线 EF 与圆 ω_2 在 A 点处的切线的交点 M

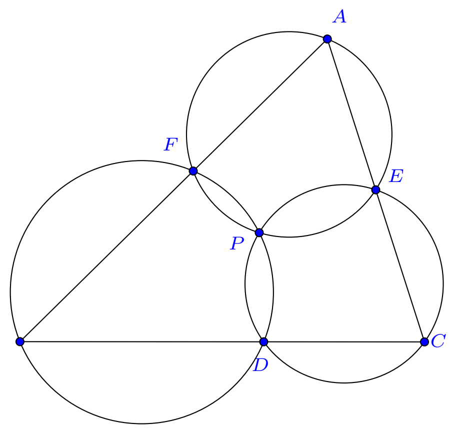
$$\vec{PM}=\frac{iap^2}{1+a^2-p^2}\vec{PO_1}$$

显然 $\vec{PM}$ 是垂直于 $\vec{PO_1}$ 的, 因而 M 点也在过 P 的公切线上。

2.4.12　三圆

密克定理

$\triangle ABC$ 中, D,E,F 分别为边 BC,CA,AB 上的点，证明: $\triangle BFD,\triangle CDE,\triangle AEF$ 的外接圆三圆共点。



证明: 设 $\vec{BA}=z\,\vec{BC}$, $\vec{BD}=\lambda\,\vec{BC}$, $\vec{BE}=\mu\,\vec{BA}+(1-\mu)\,\vec{BC}$, $\vec{BF}=(1-\nu)\,\vec{BA}$。

$\triangle BDF$ 外接圆上的点 P 满足:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{P-B}{P-D}\frac{F-D}{F-B}\right)=0$$

令 $\vec{BP}=w\,\vec{BC}$, 则可化为

$$(z-\bar{z})w\,\bar{w}+(\lambda-z+\nu z)\,\bar{z}\,w-(\lambda-\bar{z}+\nu\,\bar{z})z\,\bar{w}=0$$

若 P 也在 $\triangle CDE$ 的外接圆上, 则应满足:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{P-C}{P-D}\frac{E-D}{E-C}\right)=0$$

即有

$$\begin{aligned}&(z-\bar{z})w\,\bar{w}+(1-\lambda-\mu-z+\mu z+\lambda\,\bar{z}+\mu\,\bar{z}-\mu z\,\bar{z})w\\ -&(1-\lambda-\mu-\bar{z}+\lambda z+\mu z+\mu\,\bar{z}-\mu z\,\bar{z})\,\bar{w}+\lambda(z-\bar{z})=0\end{aligned}$$

以上两式联立可解出

$$\begin{aligned}w&=\frac{z(\lambda-\bar{z}+\nu\,\bar{z})}{-1+\lambda+\mu+z-\mu z-\mu\,\bar{z}-z\,\bar{z}+\mu z\,\bar{z}+\nu z\,\bar{z}}\\ \vec{BP}&=\frac{z(\lambda-\bar{z}+\nu\,\bar{z})}{-1+\lambda+\mu+z-\mu z-\mu\,\bar{z}-z\,\bar{z}+\mu z\,\bar{z}+\nu z\,\bar{z}}\,\vec{BC}\end{aligned}$$

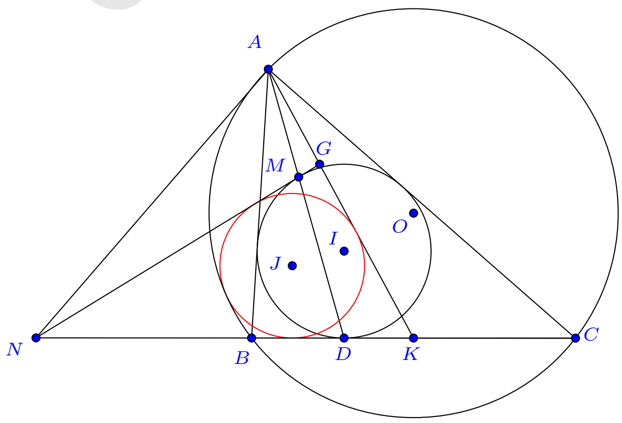
代入计算知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{P-A}{P-F}\frac{E-F}{E-A}\right)=0$$

也即 P,A,E,F 四点共圆, 这就证明了三圆共点。

沙雷金 2021 题目

非等腰三角形 $\triangle ABC$ 内切圆为 I, BC 边的中点为 K, 在 BC 边上的切点为 D, AD 交 I 于另一点 M, 过 M 作圆 I 的切线, 它与直线 BC 交于点 N, 与 AK 交于点 G. 三角形 $\triangle NGK$ 的内切圆为 J, 求证: J 与三角形 ABC 的外接圆 O 相切。



证明: 令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则知

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC},\quad \vec{BI}=\frac{1-st}{1-it}\,\vec{BC}$$

$$\vec{BK}=\frac{1}{2}\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{1-st}{1+t^2}\,\vec{BC}$$

AD 交 $\odot I$ 的交点 M 为

$$\vec{BM}=\frac{(i+2s+3t)(1-st)}{(i+2s+t)(1-it)^2}\,\vec{BC}$$

它的切向量

$$\boldsymbol{v} = \frac{t(1-st)(1+2s+2t-2st-t^2)^2}{(1+t^2)(1-it)^2(1-2is-it)^2}\,\vec{BC}$$

设 $\vec{BN} = \lambda\,\vec{BC}$, 由 $\vec{MN}//\boldsymbol{v}$ 解出

$$\vec{BN} = \frac{1-st}{1-2st-t^2}\,\vec{BC}$$

同理, 求出

$$\vec{BG} = \frac{(1-st)(2s+3t+2ist+it^2)}{2(1-it)(s+t)}\,\vec{BC}$$

为求出 $\triangle NGK$ 的内切圆 J, 我们令 $p = \tan\frac{\angle NGK}{2}, q = \tan\frac{\angle GNK}{2}$, 即有

$$\vec{NG} = \frac{(p+q)(1-pq)}{p(1-iq)^2}\,\vec{NK}$$

而根据前面的表示计算

$$\vec{NG} = -\frac{t(1+2is+it)^2(1+st)}{(1-it)^2(s+t)}\,\vec{NK}$$

二者对比, 知

$$q = \frac{-1+2st+t^2}{2(s+t)}$$

并且

$$2(s+t)^2(1-p^2)+(1-2st-t^2)(s-4s^3+2t-4s^2t-st^2)=0$$

于是我们可得

$$\vec{BJ} = \frac{2i-p+2s-ipt}{2(i+2s+t)}\,\vec{BC}, \quad r_J = \frac{p+2s+2t-2pst-pt^2}{2(1+4s^2+4st+t^2)}BC$$

$\triangle ABC$ 的外接圆圆心和半径分别为

$$\vec{BO} = \frac{i(1-is)}{4s}\,\vec{BC}, \quad R = \frac{1+s^2}{4s}BC$$

计算即有

$$(R-r_J)^2 - |\,\vec{BO}-\vec{BJ}\,|^2 = \frac{2(s+t)^2(1-p^2)+p(1-2st-t^2)(s-4s^3+2t-4s^2t-st^2)}{2(1+4s^2+4st+t^2)^2}BC = 0$$

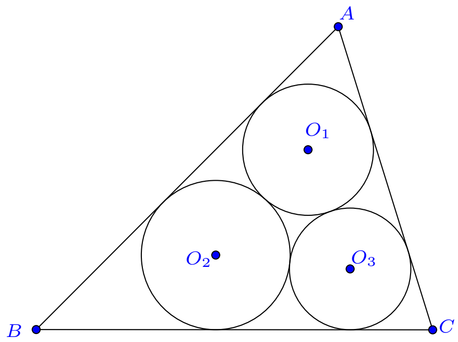
这就证明了 $\odot J$ 与三角形 ABC 的外接圆 O 相切。

题目

设圆 ω_1 与圆 ω_2 交于点 A, B, 圆 ω_3 与圆 ω_1, ω_2 都外切，直线 AB 交圆 ω_3 于点 C, D 。求证: 过 C, D 作圆 ω_3 的切线与圆 ω_1, ω_2 的公切线平行。

Mulfatti 三角形内三圆两两相切问题

给定三角形 ABC, 求三个圆，使每个圆与三角形的两条边相切，且三个圆两两相切。



解：令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}, \vec{BI}=\frac{1-st}{1-it}\vec{BC}, r_I=\frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

于是可令

$$\vec{BO_1}=(1-\lambda)\vec{BA}+\lambda\vec{BI}, \vec{BO_2}=(1-\mu)\vec{BB}+\mu\vec{BI}, \vec{BO_3}=(1-\nu)\vec{BC}+\nu\vec{BI}$$

其中 $0<\lambda,\mu,\nu<1$。

三圆半径分别为

$$r_{O_1}=\lambda r_I, r_{O_2}=\mu r_I, r_{O_3}=\nu r_I$$

由三圆两两相切，即

$$r_{O_1}+r_{O_2}=|\vec{BO_1}-\vec{BO_2}|, r_{O_2}+r_{O_3}=|\vec{BO_2}-\vec{BO_3}|, r_{O_3}+r_{O_1}=|\vec{BO_3}-\vec{BO_1}|$$

得到三个等式

$$\begin{cases} t^2\lambda^2-2t\lambda(s+t-s\mu+2s^2t\mu)+(s+t-s\mu)^2=0 \\ (1-st)^2\mu^2-2(1-st)(1+t^2-st\nu+t^2\nu-2st^3\nu)\mu+(1+t^2-st\nu-t^2\nu)^2=0 \\ s^2(s+t)^2\nu^2-2s(s+s^3+t+s^2t+s\lambda-t\lambda-3s^2t\lambda+st^2\lambda+2s^3t^2\lambda)\nu+(1+s^2-\lambda+st\lambda)^2=0 \end{cases}$$

可以消元求解，但这样得到的表达式含有根号 $\sqrt{1+s^2}$ 和 $\sqrt{1+t^2}$, 这提示我们应该做正切的半角代换。

令

$$s=\frac{2p}{1-p^2}, t=\frac{2q}{1-q^2}, (p=\tan\frac{A}{4}, q=\tan\frac{B}{4})$$

其取值范围是 $0<p<1, 0<q<\frac{1-p}{1+p}$。

在以上限定条件下, 有唯一的解：

$$\lambda=\frac{(1+q)(1-pq)}{(1+p)(1+p+q-pq)}$$
$$\mu=\frac{(1+p)(1-pq)}{(1+q)(1+p+q-pq)}$$
$$\nu=\frac{(1+p)(1+q)(1+p+q-pq)}{4(1-pq)}$$

因而三圆的圆心和半径分别为

$$\vec{BO_1}=\frac{(1-pq)(1-p-q-pq)(1+2p+p^2+3q+2pq-p^2q-2iq-2iq^2)}{(1-p)(1+p)^2(1-iq)^4}\vec{BC}$$
$$\vec{BO_2}=\frac{(1-pq)(1-p-q-pq)}{(1-p)(1-iq)^2(1+q)}\vec{BC}$$
$$\vec{BO_3}=\frac{(1-p-q-pq)(2+2q-3iq+2ipq+ip^2q-iq^2+2ipq^2-ip^2q^2)}{2(1-p)(1-iq)^2(1-pq)}\vec{BC}$$

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{2q(1+q)(1-pq)(1-p-q-pq)}{(1-p)(1+p)^2(1+q^2)^2}BC \\
r_2 &= \frac{2q(1-pq)(1-p-q-pq)}{(1-p)(1+q)(1+q^2)^2}BC \\
r_3 &= \frac{q(1+q)(1+p+q-pq)^2(1-p-q-pq)}{2(1-p)(1-pq)(1+q^2)^2}BC
\end{aligned}
$$

三角形内密堆积的等半径三圆

三角形 ABC 内紧密堆积这三个半径相同的圆, 求各圆圆心和半径。

解：三圆之中, 必有两个圆, 同时与两边相切，而另一个圆, 与这两圆相切, 同时与一边相切。

令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC}, \vec{BI}=\frac{1-st}{1-it}\,\vec{BC}, r_I=\frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

圆 O_1 与 AB, CA 相切, O_1 在 AI 线段上, 因此设

$$\vec{BO_1}=\lambda\,\vec{BI}+(1-\lambda)\,\vec{BA}$$

圆 O_2 与 BC, CA 相切, 并根据圆 O_2 与圆 O_1 半径相同, 知

$$\vec{BO_2}=\lambda\,\vec{BI}+(1-\lambda)\,\vec{BC}$$

圆 O_3 与 BC 相切, 且与圆 O_1, O_2 相切, 可令

$$\vec{BO_3}=(\mu+\lambda ri)\,\vec{BC}$$

由三圆相切，有

$$2\lambda r=|\,\vec{BO_1}-\vec{BO_3}\,|=|\,\vec{BO_2}-\vec{BO_3}\,|$$

代入前面的式子求解即得

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(1+s^2)^2(1+t^2)}{1-4s+2s^2+4s^3+s^4+20s^2t-4s^4t+t^2+4st^2+2s^2t^2-20s^3t^2+s^4t^2-4s^2t^3+4s^4t^3} \\
\mu &= \frac{(-1+st)(-1+2s+s^2+2t+2st)(1-2s-s^2-2st+2s^2t)}{1-4s+2s^2+4s^3+s^4+20s^2t-4s^4t+t^2+4st^2+2s^2t^2-20s^3t^2+s^4t^2-4s^2t^3+4s^4t^3}
\end{aligned}
$$

半径

$$r=\frac{(1+s^2)^2t(1-st)}{1-4s+2s^2+4s^3+s^4+20s^2t-4s^4t+t^2+4st^2+2s^2t^2-20s^3t^2+s^4t^2-4s^2t^3+4s^4t^3}BC$$

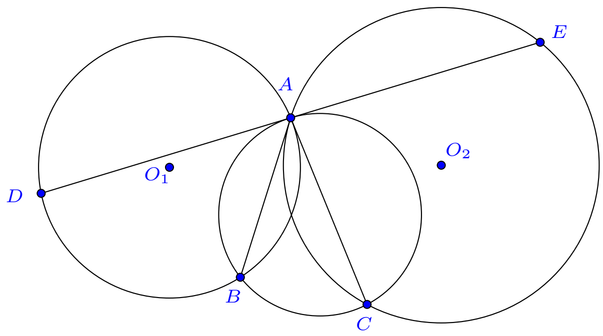
转化一下即表示为

$$r=\frac{2ab^2S}{ab^2(a+b+c)+4(a^2+b^2-c^2)S}$$

其中 S 为 $\triangle ABC$ 的面积。

两圆切线问题 2

两圆 O_1, O_2 的一个交点为 A，过 A 点分别作圆 O_1, O_2 的切线分别交两圆于 B, C，过 A 点再作三角形 ABC 的外接圆的切线，分别交两圆于 D, E，证明:$AD=AE$



证明: 我们选取两个圆的公共弦为基向量, 设

$$\vec{AC} = (x + yi)\,\vec{AB}$$

经过 A, B 两点的圆 O_1，其上的点 D 可设为

$$\vec{AD} = \frac{1 + pu}{1 - ui}\,\vec{AB}$$

经过 A, C 两点的圆 O_2，其上的点 E 可设为

$$\vec{AE} = \frac{1 + qv}{1 - vi}\,\vec{AC}$$

圆 O_1 在 A 处的切向量为

$$\vec{v_1} = \frac{d\,\vec{AP}}{du}|_{u \to -\frac{1}{p}} = \frac{p^2}{i + p}\,\vec{AB}$$

这个切向量与 $\vec{AC}$ 是平行的，由此可解出

$$p = -\frac{x}{y}$$

同理，求得

$$q = \frac{x}{y}$$

三角形 ABC 的外接圆，其上的点 T 可设为

$$\vec{AT} = \frac{1 + sw}{1 - wi}\,\vec{AB}$$

代入 C 点即知

$$s = \frac{-x + x^2 + y^2}{y}$$

进而可知三角形 ABC 的外接圆在点 A 处的切向量为

$$\frac{(x^2 + y^2 - x)^2}{y(i - ix + y)(ix + y)}\,\vec{AB}$$

这个切向量与 $\vec{AD}$ 是平行的，因此

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1 + pu}{1 - ui} \otimes \frac{(x^2 + y^2 - x)^2}{y(i - ix + y)(ix + y)}\right) = 0$$

于是求得

$$\vec{AD} = \frac{x + iy}{-1 + x + iy}\,\vec{AB}$$

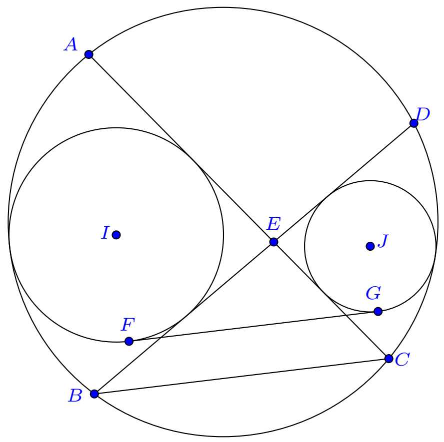
同理，知

$$\vec{AE} = -\frac{x + iy}{-1 + x + iy}\,\vec{AB}$$

即有 $AD = AE$

两圆切线问题 3

两不相交的圆 I,J 内切于圆 O, 圆 I,J 的内公切线交于点 E，并与圆 O 分别交于 A,B,C,D 四点。证明：圆 I,J 的一条外公切线 $FG//BC$.



证明：因为 A,B,C,D 四点均在外圆 O 上，所以考虑以 BC 为基底。

令

$$\vec{BA}=\frac{(s+u)(1-su)}{s(1-iu)^2}\vec{BC},\vec{BD}=\frac{(s+v)(1-sv)}{s(1-iv)^2}\vec{BC}$$

其中 $s>0,u>v$。

AC 与 BD 的交点 E 为

$$\vec{BE}=\frac{(s+u)(1-su)(1+iv)^2}{(1-su+sv+uv)(s+u-v+suv)}\vec{BC}$$

因为圆 I 与 $\triangle EAB$ 的两边 EA 和 EB 相切, 所以圆心 I 在 $\triangle EAB$ 的内心与顶点 E 的连线上。

为此, 我们先求出 $\triangle EAB$ 的内心。

$$\vec{EA}=\frac{(1+is)^2(u-v)(1+uv)}{s(i+u)^2(1+iv)^2}\vec{EB}$$

将其与标准形式

$$\vec{EA}=\frac{(p+q)(1-pq)}{p(1+iq)^2}\vec{EB}$$

对比即知

$$p=s,q=\frac{1-su+sv+uv}{s+u-v+suv}$$

于是圆 I 的圆心和半径可设为

$$\vec{EI}=\lambda\frac{1-pq}{1+iq}\vec{EB},r_I=\lambda\frac{q-pq^2}{1+q^2}EB$$

根据 I 内切于圆 O

$$r_O-r_I=|\vec{OI}|=|\vec{BE}+\vec{EI}-\vec{BO}|$$

代入前面所得各式可解出

$$\lambda=\frac{(1+s^2)(1+u^2)}{(s+u)(s+u-v+suv)}$$

从而

$$\vec{BI}=\frac{(1-su)(1+iv)(s^2+su+iu+is^2u-iv+isuv)}{(s+u-v+suv)^2}\vec{BC}$$

$$r_I=\frac{(1+s^2)(1-su)(u-v)}{(s+u-v+suv)^2}BC$$

同理，可求得圆 J 及其半径

$$\vec{BJ}=\frac{(s+u)(1+iv)(s+u-v-s^2v+isv-is^2uv)}{(s+u-v+suv)^2}\vec{BC}$$

$$r_J = \frac{v(1+s^2)(s+u)(u-v)}{(s+u-v+suv)^2}BC$$

点 J,G 分别在圆 I 和圆 J 上，因而可设为

$$\overrightarrow{BF} = \left(\frac{(1-su)(1+iv)(s^2+su+iu+is^2u-iv+isuv)}{(s+u-v+suv)^2} + \frac{(1+s^2)(1-su)(u-v)}{(s+u-v+suv)^2}\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right)\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BG} = \left(\frac{(s+u)(1+iv)(s+u-v-s^2v+isv-is^2uv)}{(s+u-v+suv)^2} + \frac{v(1+s^2)(s+u)(u-v)}{(s+u-v+suv)^2}\frac{1+i\eta}{1-i\eta}\right)\overrightarrow{BC}$$

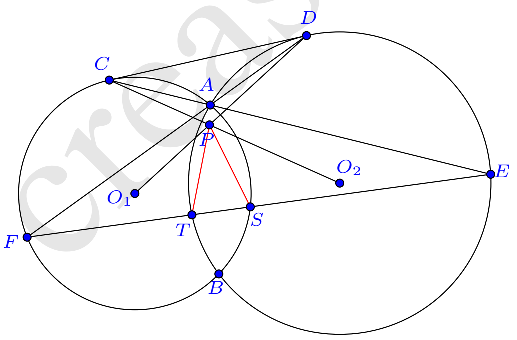
根据公切线性质，$\frac{d}{d\zeta}\overrightarrow{BF}, \frac{d}{d\eta}\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{FG}$ 三向量平行，求得 $\zeta=\eta=-1$, 于是

$$\overrightarrow{BF} = \frac{(1-su)(s^2+su-uv-s^2uv+v^2-suv^2+2is^2v+2isuv)}{(s+u-v+suv)^2}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BG} = \frac{(s+u)(s+u-v-s^2v-sv^2+s^2uv^2+2isv-2is^2uv)}{(s+u-v+suv)^2}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{FG} = \frac{(1+s^2)(u-v)(s+u+v-suv)}{(s+u-v+suv)^2}\overrightarrow{BC}$$

由此即知 $FG//BC$。

两圆切线问题 4

圆 O_1 与圆 O_2 交于 A,B,CD 为公切线，直线 CA 与圆 O_2 交于点 E, 直线 DA 与圆 O_1 交于点 F, 直线 EF 与圆 O_1,O_2 分别交于点 T,S,P 为 O_1D 与 O_2C 的交点, 求证 $PT=PS$。



证明：本题中虽然给出了 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的两个交点 A,B, 但实际上当两圆仅有一个交点，即相切时，结论依然成立。为不失一般性，考虑以公切线 $\overrightarrow{DC}$ 为基向量, 然后令

$$\overrightarrow{DA} = (s+it)\,\overrightarrow{DC}$$

DC 为 $\odot O_1$ 的切线, 因而 CO_1 垂直于 DC 于 C, 所以又可设

$$\overrightarrow{CO_1} = \lambda i\,\overrightarrow{DC}$$

这样圆 O_1 上的点 A 应可表示为

$$\overrightarrow{O_1A} = \frac{1+iu}{1-iu}\overrightarrow{O_1C}$$

利用向量加法即有

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO_1}+\overrightarrow{O_1A} = \frac{1-iu+2\lambda u}{1-iu}\overrightarrow{DC}$$

由此即求出

$$\lambda = \frac{1-2s+s^2+t^2}{2t}$$

从而知 $\odot O_1$ 的圆心和半径分别为

$$\overrightarrow{DO_1}=\frac{2t+i(1-2s+s^2+t^2)}{2t}\overrightarrow{DC},\ \ R_{O_1}=\frac{1-2s+s^2+t^2}{2t}DC$$

同理, 求出 $\odot O_2$ 的圆心和半径为

$$\overrightarrow{DO_2}=i\frac{s^2+t^2}{2t}\overrightarrow{DC},\ \ R_{O_2}=\frac{s^2+t^2}{2t}DC$$

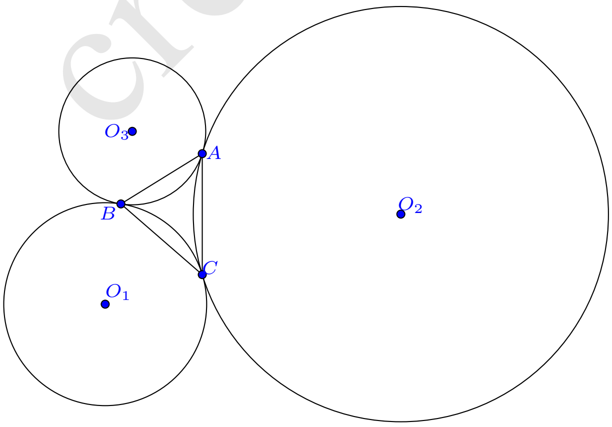
由此不难求出其余各点，它们是

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DF}&=\frac{s+it}{s^2+t^2}\overrightarrow{DC}\\
\overrightarrow{DE}&=\frac{s-it}{-1+s-it}\overrightarrow{DC}\\
\overrightarrow{DP}&=\frac{(s^2+t^2)(2t+i-2is+is^2+it^2)}{2t(1-2s+2s^2+2t^2)}\overrightarrow{DC}\\
\overrightarrow{DT}&=\frac{(s+it)(2s-s^2-t^2)}{(s-it)(1-s+s^2-t^2-it+2ist)}\overrightarrow{DC}\\
\overrightarrow{DS}&=\frac{t+2st-2s^2t-2t^3+is-3is^2+2is^3-it^2+2ist^2}{(t-i+is)(1-s+s^2-t^2-it+2ist)}\overrightarrow{DC}
\end{aligned}$$

计算即知 $PT=PS$

已知三圆两两相切的点, 求这三圆

已知三个圆 O_1,O_2,O_3 两两相切, O_1,O_2 相切于 C, O_2,O_3 相切于 A, O_3,O_1 相切于 B, 求三个圆的圆心及半径。



解: 圆 O_1 经过点 B,C, 因此其上的点可设为: $\overrightarrow{BU}=\frac{(a+i)u}{a+iu}\overrightarrow{BC}$, 其在点 B 的切向量为 $\frac{i+a}{a}\overrightarrow{BC}$, 在点 C 的切向量为 $\frac{a}{i+a}\overrightarrow{BC}$

圆 O_2 经过点 C,A, 因此其上的点可设为: $\overrightarrow{CV}=\frac{(b+i)v}{b+iv}\overrightarrow{CA}$, 其在点 C 的切向量为 $\frac{i+b}{b}\overrightarrow{CA}$, 在点 A 的切向量为 $\frac{b}{i+b}\overrightarrow{CA}$

圆 O_3 经过点 A,B, 因此其上的点可设为: $\overrightarrow{AW}=\frac{(c+i)w}{c+iw}\overrightarrow{AB}$, 其在点 A 的切向量为 $\frac{i+c}{c}\overrightarrow{AB}$, 在点 B 的切向量为 $\frac{c}{i+c}\overrightarrow{AB}$

在 A 点处，两圆的切向量平行: $\mathrm{Im}\left(\frac{i+c}{c}\overrightarrow{AB}\otimes\frac{b}{i+b}\overrightarrow{CA}\right)=0$

在 B 点处，两圆的切向量平行: $\mathrm{Im}\left(\frac{i+a}{a}\overrightarrow{BC}\otimes\frac{c}{i+c}\overrightarrow{AB}\right)=0$

在 C 点处，两圆的切向量平行: $\mathrm{Im}\left(\frac{i+b}{b}\overrightarrow{CA}\otimes\frac{a}{i+a}\overrightarrow{BC}\right)=0$

于是求出

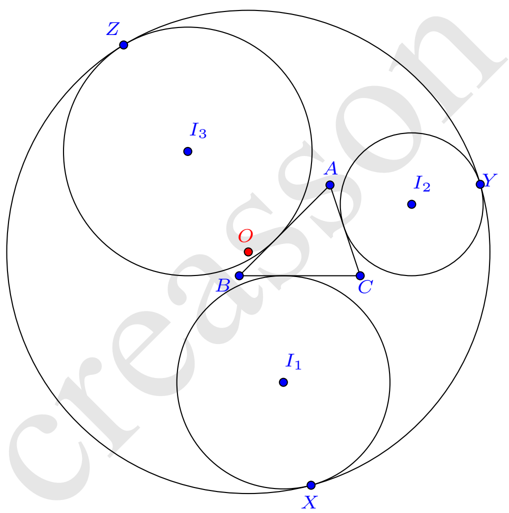
$$
\begin{aligned}
a &= \frac{i\left((B-C)\,\overline{A}+(C-A)\,\overline{B}+(A-B)\,\overline{C}\right)}{(B+C-2A)\,\overline{A}-(C-A)\,\overline{B}+(A-B)\,\overline{C}}\\
b &= \frac{i\left((B-C)\,\overline{A}+(C-A)\,\overline{B}+(A-B)\,\overline{C}\right)}{(B-C)\,\overline{A}+(C+A-2B)\,\overline{B}-(A-B)\,\overline{C}}\\
c &= \frac{i\left((B-C)\,\overline{A}+(C-A)\,\overline{B}+(A-B)\,\overline{C}\right)}{-(B-C)\,\overline{A}+(C-A)\,\overline{B}+(A+B-2C)\,\overline{C}}
\end{aligned}
$$

若令 $\overrightarrow{BA}=(x+yi)\,\overrightarrow{BC}$, 表达式可以简化些。

2.4.13 四圆

阿波罗尼点问题

给定三角形 ABC, 求作一个圆，使得它与三个旁切圆内切并且包围它们。



解: 令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\overrightarrow{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\,\overrightarrow{BC}$$

三个旁切圆的圆心及半径分别为:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BI_1} &= \frac{s+t}{i+t}\,\overrightarrow{BC}, r_1=\frac{s+t}{1+t^2}BC\\
\overrightarrow{BI_2} &= \frac{(s+t)}{s(1-it)}\,\overrightarrow{BC}, r_2=\frac{t(s+t)}{s(1+t^2)}BC\\
\overrightarrow{BI_3} &= \frac{i(1-st)}{s(1-it)}\,\overrightarrow{BC}, r_3=\frac{1-st}{s(1+t^2)}BC
\end{aligned}
$$

若 X, Y, Z 是所求圆与这三个旁切圆的切点，则可表示为

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BX} &= \left(\frac{s+t}{i+t}+\frac{s+t}{1+t^2}\frac{1+iu}{1-iu}\right)\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BY} &= \left(\frac{(s+t)}{s(1-it)}+\frac{t(s+t)}{s(1+t^2)}\frac{1+iv}{1-iv}\right)\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BZ} &= \left(\frac{i(1-st)}{s(1-it)}+\frac{1-st}{s(1+t^2)}\frac{1+iw}{1-iw}\right)\overrightarrow{BC}
\end{aligned}
$$

由此求出它们在各自所在旁切圆的切向量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{2i(s+t)}{(1+t^2)(1-iu)^2}\,\vec{BC}\\
\boldsymbol{b} &= \frac{2it(s+t)}{s(1+t^2)(1-iv)^2}\,\vec{BC}\\
\boldsymbol{c} &= \frac{2i(1-st)}{s(1+t^2)(1-iw)^2}\,\vec{BC}
\end{aligned}
$$

另一方面, 经过 X, Y, Z 的外接圆 Γ 上的点 T 可表示为

$$
T = \frac{X(Y-Z)+\eta(X-Y)Z}{Y-Z+\eta(X-Y)}
$$

其中 η 取 $0, 1, \infty$ 时分别对应 X, Y, Z 三点。

因此, Γ 上 X, Y, Z 三点的切向量是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a'} &= \frac{(X-Y)(Z-X)}{Y-Z}\\
\boldsymbol{b'} &= \frac{(X-Y)(Y-Z)}{Z-X}\\
\boldsymbol{c'} &= \frac{(Z-X)(Y-Z)}{X-Y}
\end{aligned}
$$

Γ 与三个旁切圆在 X, Y, Z 处相切，这意味着 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 分别与 $\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b'}, \boldsymbol{c'}$ 平行。由此即可求出

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{s-s^2+t-s^2t+2s^3t+s^2t^2+s^3t^2}{s+s^2+t-s^2t-2s^3t-s^2t^2+s^3t^2}\\
v &= -\frac{-s+s^2-t+2st+s^2t+2st^2-s^2t^2+s^3t^2}{-s-s^2-t-2st+s^2t+2st^2+s^2t^2+s^3t^2}\\
w &= -\frac{s-s^2-t-2st-3s^2t+s^2t^2+s^3t^2}{s+s^2-t+2st-3s^2t-s^2t^2+s^3t^2}
\end{aligned}
$$

三个切点 X, Y, Z 为

$$
\begin{aligned}
\vec{BX} &= \frac{(s+t)(st+t^2-s^2t^2+s^3t^3-2is-2it+is^2t+is^2t^3)}{(1-is)(1+t^2)(s+t-2s^2t+ist+is^2t^2)}\,\vec{BC}\\
\vec{BY} &= \frac{(s+t)(s+t+s^2t+2st^2-s^3t^2-2s^2t^3-is^2-2ist+is^2t^2)}{s(1-is)(1+t^2)(s+t-2st^2-ist-is^2t^2)}\,\vec{BC}\\
\vec{BZ} &= \frac{(1-st)(2s^2+3st+t^2+s^2t^2-s^3t^3+is^2t+2ist^2-is^2t^3)}{s(1-is)(1+t^2)(s-t-3ist+is^2t^2)}\,\vec{BC}
\end{aligned}
$$

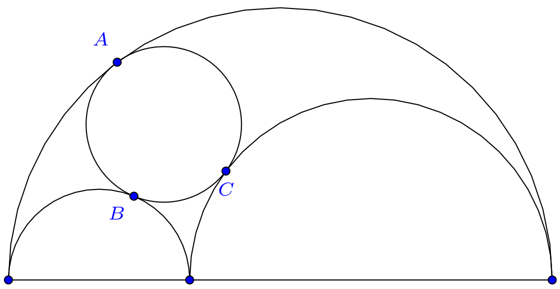
进而知所求圆 Γ 的圆心 O 和半径 R

$$
\vec{BO} = \frac{s(-s^2+t^2+3s^2t^2+6st^3-2s^3t^3-4s^2t^4+s^4t^4)+i(s^2+2st-6s^3t+t^2-7s^2t^2+2s^4t^2+3s^4t^4)}{4s^2t(1-is)(1+t^2)(1-st)}\,\vec{BC}
$$

$$
R = \frac{s^2+2st+t^2+s^2t^2-2s^3t^3+s^4t^4}{4s^2t(1+t^2)(1-st)}BC
$$

叶中豪的发现

如图所示的三个半圆 O_1, O_2, O_3 两两相切, 另一圆 O_4 分别与圆 O_1, O_2, O_3 相切于 A, B, C 三点。证明: $AB^2+BC^2+CA^2 = 8S_{\triangle ABC}$



证明: 设圆 O_2,O_3 半径分别为 a,b, 则圆 O_1 的半径为 $a+b$, 因而三圆上的点 A,B,C 可表示为

$$\begin{aligned}
A &= a+b+(a+b)\frac{1+iu}{1-iu}\\
B &= a+a\frac{1+iv}{1-iv}\\
C &= 2a+b+b\frac{1+iw}{1-iw}
\end{aligned}$$

由 XX 节 XX 式知，经过 A,B,C 的圆 O_4 上的点 P 可表示为

$$P=\frac{A(B-C)+(A-B)Ct}{B-C+(A-B)t}$$

其中 t 取 $0,1,\infty$ 时分别对应 A,B,C 三点。
由此, $\odot O_4$ 上 A,B,C 三点的切向量分别是

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{dP}{dt} &= \frac{(A-B)(C-A)}{B-C} = \frac{2(-au+av+bv+ib)(au+bu-bw-iauw)}{(1-iu)^2(b-iav-ibv-avw)}\\
\lim_{t\to 1}\frac{dP}{dt} &= \frac{(A-B)(B-C)}{C-A} = \frac{2(au-av-bv-ib)(b-iav-ibv-avw)}{(1-iv)^2(au+bu-bw-iauw)}\\
\lim_{t\to \infty}t^2\frac{dP}{dt} &= \frac{(C-A)(B-C)}{A-B} = \frac{2(au+bu-bw-iauw)(av+bv+ib-iavw)}{(1-iw)^2(b+iau-iav-ibv)}
\end{aligned}$$

它们应分别与圆 O_1,O_2,O_3 在 A,B,C 三点处的切向量平行

$$\frac{dA}{du}=\frac{2(a+b)i}{(1-iu)^2},\quad \frac{dB}{dv}=\frac{2ai}{(1-iv)^2},\quad \frac{dC}{dw}=\frac{2bi}{(1-iw)^2}$$

于是有方程组:

$$\begin{cases}
au^2+bu^2-2buw+2auvw^2-av^2w^2-bv^2w^2=0\\
au^2-2auv-2buv+2bvw-av^2w^2=0\\
bu^2-2au^2vw+2auv^2w+2buv^2w-bv^2w^2=0
\end{cases}$$

符合要求的解是

$$u=\frac{b}{a},\quad v=\frac{b}{a+b},\quad w=\frac{a+b}{a}$$

从而知三个切点

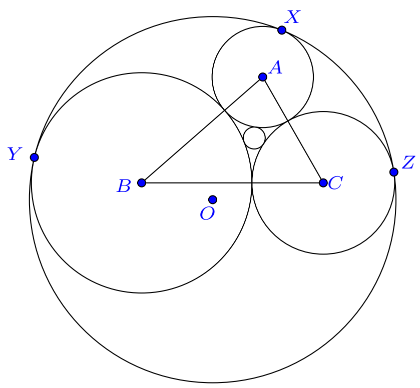
$$A=\frac{2a(a+b)}{a-ib},\quad B=\frac{2a(a+b)}{a+b-ib},\quad C=\frac{2(1+i)a(a+b)}{a+b+ia}$$

计算即得到

$$AB^2+BC^2+CA^2=8S_{\triangle ABC}=\frac{16a^2b^2(a+b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a^2+b^2)(2a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+2b^2)}$$

索迪圆

以三角形 ABC 顶点为圆心作三个圆 O_1,O_2,O_3, 使得三个圆两两外切。



解: 令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC},\quad BA=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)}BC,\quad CA=\frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)}BC$$

设三圆半径分别为 r_1, r_2, r_3, 则由三圆相切知

$$r_1+r_2=AB,\quad r_2+r_3=BC,\quad r_3+r_1=CA$$

解出

$$r_1=\frac{t(1-st)}{s(1+t^2)}BC,\quad r_2=\frac{1-st}{1+t^2}BC,\quad r_3=\frac{t(s+t)}{1+t^2}BC$$

若圆 Γ 与三圆 O_1, O_2, O_3 相切, 设切点分别为 X, Y, Z, 则它们可表示为

$$\begin{aligned}
\vec{BX}&=\left(\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}+\frac{t(1-st)}{s(1+t^2)}\frac{1+iu}{1-iu}\right)\vec{BC}\\
\vec{BY}&=\frac{1-st}{1+t^2}\frac{1+iv}{1-iv}\vec{BC}\\
\vec{BZ}&=\left(1+\frac{t(s+t)}{1+t^2}\frac{1+iw}{1-iw}\right)\vec{BC}
\end{aligned}$$

X, Y, Z 在 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 上的切向量分别为

$$\frac{2it(1-st)}{s(1+t^2)(1-iu)^2}\vec{BC},\quad \frac{2i(1-st)}{(1+t^2)(1-iv)^2}\vec{BC},\quad \frac{2it(s+t)}{(1+t^2)(1-iw)^2}\vec{BC}$$

而在圆 Γ 上, X, Y, Z 三点的切向量为

$$\frac{(X-Y)(Z-X)}{Y-Z},\quad \frac{(X-Y)(Y-Z)}{Z-X},\quad \frac{(Z-X)(Y-Z)}{X-Y}$$

根据切向量两两平行的条件即可求出符合要求的两组解

$$u=\frac{-1+s+t+st}{(1-t)(s+t)},\quad v=-\frac{t(s+t)}{1-s-t+t^2},\quad w=\frac{-1+s+t-t^2}{1-st}$$

$$u=\frac{-1-s-t+st}{(1+t)(s+t)},\quad v=\frac{t(s+t)}{1+s+t+t^2},\quad w=\frac{1+s+t+t^2}{1-st}$$

这两组解分别对应内索迪圆和外索迪圆。
对于内索迪圆, 其圆心和半径分别为

$$\vec{BO}=\frac{(1-st)(1+s+t-it)^2}{(1-it)^2(1+2s+s^2+2t+st+t^2)}\vec{BC}$$

$$r=\frac{t(s+t)(1-st)}{(1+t^2)(1+2s+s^2+2t+st+t^2)}BC$$

三个切点

$$
\begin{aligned}
\vec{BX} &= \frac{(1-st)(1+s+t-is-2it)}{(1-it)^2(1+s+t-is)}\vec{BC} \\
\vec{BY} &= \frac{(1-st)(1+s+t-it)}{(1-it)^2(1+s+t+it)}\vec{BC} \\
\vec{BZ} &= \frac{(1-st)(1-t-i-is-2it)}{(1-it)^2(1+t-i-is)}\vec{BC}
\end{aligned}
$$

对于外索迪圆, 其圆心和半径分别为

$$
\vec{BO} = \frac{(1-st)(1-s-t-it)^2}{(1-it)^2(1-2s+s^2-2t+st+t^2)}\vec{BC}
$$

$$
r = \frac{t(s+t)(1-st)}{(1+t^2)|1-2s+s^2-2t+st+t^2|}BC
$$

三个切点

$$
\begin{aligned}
\vec{BX} &= \frac{(1-st)(1-s-t-is-2it)}{(1-it)^2(1-s-t-is)}\vec{BC} \\
\vec{BY} &= \frac{(1-st)(1-s-t-it)}{(1-it)^2(1-s-t+it)}\vec{BC} \\
\vec{BZ} &= \frac{(1-st)(1+t+i-is-2it)}{(1-it)^2(1-t+i-is)}\vec{BC}
\end{aligned}
$$

若要使得外索迪圆包含圆 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 在其内部，则须使得

$$
r - r_1 = |O-A|, \quad r - r_2 = |O-B|, \quad r - r_3 = |O-C|
$$

该条件即要求 $1-2s+s^2-2t+st+t^2<0$, 此时

$$
r = -\frac{t(s+t)(1-st)}{(1+t^2)(1-2s+s^2-2t+st+t^2)}BC
$$

另一种做法是以圆 O_1, O_2, O_3 的三个切点为基本三角形, 利用上节 (已知三圆两两相切的点, 求这三圆) 的结论求解，这里不赘。

我们可以由上导出一些有趣的结论:

如果三圆 O_1, O_2, O_3 相互外切于 A, B, C, 外圆 O 包含这三圆且与它们相切, 内圆 I 与它们相切。

记 r_1, r_2, r_3, R, r 分别为圆 O_1, O_2, O_3, O, I 的半径, 则

$$
\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}\right)
$$

$$
\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{R}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{R^2}\right)
$$

$$
OI^2 = R^2 + r^2 - 14Rr
$$

$$
\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{8S_{ABC}} = \frac{R-r}{R+r}
$$

其中 (1),(2) 并称为笛卡尔定理, (3),(4) 由叶中豪发现。

以上式子只需要将各量表示出来, 然后消元即可得到。事实上, 任意选择四个量, 均可得到一组关系, 因为各量的表示最多只含有三个参数。

三圆交于一点

给定三角形 ABC 及内部一点 P, $\triangle BCP, \triangle CAP, \triangle ABP$ 的外接圆分别为 O_1, O_2, O_3

求圆 O, 使得它与圆 O_1, O_2, O_3 均相切。

见数学中国论坛老封几何第二页。

解:

以三个切点 X, Y, Z 为基准，这也可以很好地应用圆的参数表示。

$$
\begin{aligned}
X &= 0\\
Y &= 1\\
Z &= \tfrac{1+is}{1-it}\\
P &= \tfrac{1+ia}{1-ib}\\
B &= \tfrac{(i+a)(-i+s)}{1+ib+is+2as+bs}\\
C &= \tfrac{(-i+s)(2ia+2ib-is+as+2bs-it-at)}{2a+2b-s-ibs-is^2+bs^2-t-ibt-ist-2ast-bst}\\
A &= -\tfrac{(i+a)(-i+s)}{-1-ib+is-bs+2it+2at}
\end{aligned}
$$

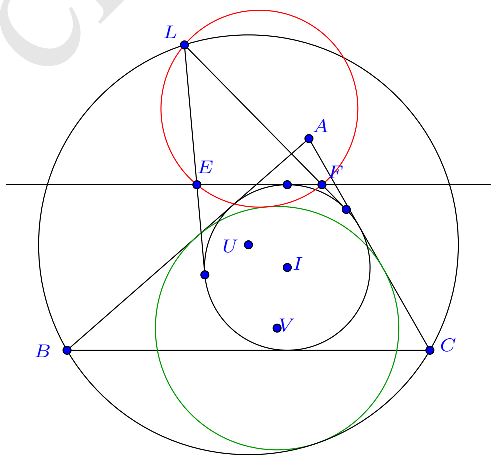
$$
\begin{aligned}
O_1 &= \tfrac{(1+ia)(i+a)(-i+s)}{2(1-ab+as+bs)}, R_1 = \tfrac{(1+a^2)\sqrt{1+s^2}}{2\sqrt{(-1+ab-as-bs)^2}}\\
O_2 &= \tfrac{-a+b+2s+ias+ibs}{2(b+s)}, R_2 = \tfrac{\sqrt{(a+b)^2}\sqrt{1+s^2}}{2\sqrt{(b+s)^2}}\\
O_3 &= \tfrac{(1+is)(-a^2+b^2+s^2+b^2s^2-2at-2ia^2t-2bt-2iabt+2st+2iast+2ibst-2abst+t^2+a^2t^2)}{2(ab+b^2-as-bs+s^2+b^2s^2-2at-2bt+2st-2abst+t^2-abt^2+ast^2+bst^2)}\\
R_3 &= \tfrac{\sqrt{1+s^2}(a^2+2ab+b^2-2as-2bs+s^2+b^2s^2-2at-2bt+2st-2abst+t^2+a^2t^2)}{2\sqrt{(-ab-b^2+as+bs-s^2-b^2s^2+2at+2bt-2st+2abst-t^2+abt^2-ast^2-bst^2)^2}}
\end{aligned}
$$

$$
R = \frac{\sqrt{1+s^2}}{2}
$$

计算好像没问题。

古城题目 1

已知 $\triangle ABC$, 圆 U 经过 B, C, 圆 I 为其内切圆, 圆 V 与 AB, AC 相切且内切于圆 U, l 为平行于 BC 且与圆 I 相切的直线, L 为圆 U 上任一点, 过 L 作圆 I 的切线交 l 于 E, F, 求证: $\triangle LEF$ 的外接圆恒与圆 V 相切。



证明: 令 $s = \tan\frac{A}{2}, t = \tan\frac{B}{2}$, 则

$$
\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\,\vec{BC}
$$

圆 U 经过 B, C 两点, 其圆心在 BC 中垂线上, 因而圆心和半径可表示为

$$
\vec{BU} = \frac{1}{2}(1+ip)\,\vec{BC}, \quad R_U = \frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}BC
$$

$\triangle ABC$ 的内切圆圆心和半径为

$$
\vec{BI} = \frac{1-st}{1-it}\,\vec{BC}, \quad r = \frac{t-st^2}{1+t^2}BC
$$

圆 V 与 AB, AC 相切, 因此圆 V 的圆心和半径可分别设为

$$\vec{BV}=\left((1-\lambda)\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}+\lambda\frac{1-st}{1-it}\right)\vec{BC}$$

$$R_V=\lambda\frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

圆 V 内切于圆 U, 表明 $R_U-R_V=|U-V|$, 由此知

$$1-2ps-s^2-2\lambda+2ps\lambda+\lambda^2=0$$

这个方程关于 λ 的判别式为 $4(1+p^2)s^2$, 为使表示有理化, 我们作代换

$$p=\frac{2q}{1-q^2},\quad (q\in(-1,1))$$

从而解出

$$\lambda=\frac{1+q+s-qs}{1+q}$$

并得到圆 V 的圆心和半径的表示

$$\vec{BV}=\frac{(1-st)(1+q-t+qt-it-iqt-ist+iqst)}{(1+q)(1-it)^2}\vec{BC}$$

$$R_V=\frac{t(1-st)(1+q+s-qs)}{(1+t^2)(1+q)}BC$$

点 L 为圆 U 上任意一点, 设为

$$\vec{BL}=\frac{1+ip}{1-iu}\vec{BC}$$

直线 l 平行于 BC 且与圆 I 相切, 不难得知它经过内切圆上的点 K:

$$\vec{BK}=\left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{t-st^2}{1+t^2}i\right)\vec{BC}$$

由此, 可设 l 上的两点 E, F 分别为

$$\vec{BE}=\vec{BK}+\mu_1\vec{BC},\quad \vec{BF}=\vec{BK}+\mu_2\vec{BC}$$

根据 LE, LF 与圆 I 相切知 μ_1, μ_2 是如下关于 μ 的二次方程的两根:

$$\begin{aligned}&(1+t^2)^3(p+u)\mu^2-2t(1-st)(1+t^2)(st+t^2-pu-pt^2u-u^2+stu^2)\mu\\&-t^2(1-st)^2(p-2t+pt^2+2st^2+u+t^2u-2tu^2+2st^2u^2)=0\end{aligned}$$

由韦达定理知

$$\begin{aligned}\mu_1+\mu_2&=\frac{2t(1-st)(st+t^2-pu-pt^2u-u^2+stu^2)}{(1+t^2)^2(p+u)}\\\mu_1\mu_2&=-\frac{t^2(1-st)^2(p-2t+pt^2+2st^2+u+t^2u-2tu^2+2st^2u^2)}{(1+t^2)^3(p+u)}\end{aligned}$$

待证的结论：$\triangle LEF$ 的外接圆恒与圆 V 相切, 等价于在圆 V 上有且仅有一点与 L, E, F 四点共圆。

根据前面求出的圆 V 的表示，设该点为 T

$$\vec{BT}=\left(\frac{(1-st)(1+q-t+qt-it-iqt-ist+iqst)}{(1+q)(1-it)^2}+\frac{t(1-st)(1+q+s-qs)}{(1+t^2)(1+q)}\frac{1+iw}{1-iw}\right)\vec{BC}$$

将以上的表示代入四点共圆的方程

$$\operatorname{Im}\left(\frac{L-E}{L-F}\frac{T-E}{T-F}\right)=0$$

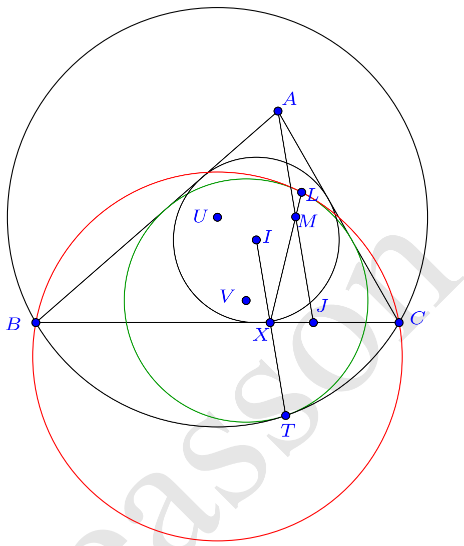
可以得知关于 w 的二次方程有唯一的重根

$$w=\frac{2q-t+2qt-q^2t+st-2qst+q^2st+t^2+q^2t^2+st^2-2qst^2+q^2st^2+u-q^2u+tu-q^2tu-stu+q^2stu-st^2u+q^2st^2u}{2q+t-2qt+q^2t+st-2qst+q^2st+t^2+q^2t^2-st^2+2qst^2-q^2st^2+u-q^2u-tu+q^2tu-stu+q^2stu+st^2u-q^2st^2u}$$

因而结论成立。

古城题目 2

$\triangle ABC$, 圆 U 经过 B,C , 圆 V 与 AB,AC 相切且内切于圆 U, 切点为 T,I 为内心, IT 交 BC 于 X, 过 A 作平行于 IT 的直线交 BC 于 J,M 为 AJ 中点，直线 XM 交圆 V 于 L。求证: $\triangle BLC$ 的外接圆与圆 V 相切。



证明: 令 $s=\tan\frac{A}{2},t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}$$

圆 U 经过 B,C 两点, 其圆心在 BC 中垂线上, 因而圆心和半径可表示为

$$\vec{BU}=\frac{1}{2}(1+ip)\,\vec{BC},\quad R_U=\frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}BC$$

$\triangle ABC$ 的内切圆圆心和半径为

$$\vec{BI}=\frac{1-st}{1-it}\vec{BC},\quad r=\frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

圆 V 与 AB,AC 相切, 因此圆 V 的圆心和半径可分别设为

$$\vec{BV}=\left((1-\lambda)\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}+\lambda\frac{1-st}{1-it}\right)\vec{BC}$$

$$R_V=\lambda\frac{t-st^2}{1+t^2}BC$$

圆 V 内切于圆 U, 表明 $R_U-R_V=|U-V|$, 由此知

$$1-2ps-s^2-2\lambda+2ps\lambda+\lambda^2=0$$

这个方程关于 λ 的判别式为 $4(1+p^2)s^2$, 为使表示有理化, 我们作代换

$$p=\frac{2q}{1-q^2},\quad (q\in(-1,1))$$

从而解出

$$\lambda = \frac{1+q+s-qs}{1+q}$$

并得到圆 V 的圆心和半径的表示

$$\vec{BV} = \frac{(1-st)(1+q-t+qt-it-iqt-ist+iqst)}{(1+q)(1-it)^2}\vec{BC}$$

$$R_V = \frac{t(1-st)(1+q+s-qs)}{(1+t^2)(1+q)}BC$$

由此易知切点 T 为

$$\vec{BT} = \frac{(1+iq)(1+q-t+qt)(1-st)}{(1+q)(1-it)(1-t-st+qst+iq+iqt+ist-iqst)}\vec{BC}$$

IT 与 BC 的交点为

$$\vec{BX} = \frac{(1+q-t+qt)(1-st)}{1+q-2t+2qt+t^2+qt^2+2st^2-2qst^2}\vec{BC}$$

又由 $AJ//IT$ 知点 J

$$\vec{BJ} = \frac{(s+t)(1-st)(1+q-t^2-qt^2-2st^2+2qst^2)}{s(1+t^2)(1+q-2t+2qt+t^2+qt^2+2st^2-2qst^2)}\vec{BC}$$

AJ 的中点 M 为

$$\vec{BM} = \frac{(s+t)(1-st)(1+q-t+qt-it^2+iqt^2+it^3+iqt^3+2ist^3-2iqst^3)}{s(1+t^2)(1-it)(1+q-2t+2qt+t^2+qt^2+2st^2-2qst^2)}\vec{BC}$$

直线 XM 与圆 V 的交点 L 为

$$\vec{BL} = \frac{(1+q-t+qt)(1-st)(1+q-t+qt+t^2+qt^2+st^2-qst^2-i(1+q)(s+t))}{(1+q)(1-it)((1+q-t+qt)(1-st)-i(s+qs-2st+2qst-t^2+qt^2+2st^2+2qst^2+2s^2t^2-2qs^2t^2+t^3+qt^3+st^3-q}$$

待证的结论：$\triangle BLC$ 的外接圆与圆 V 相切, 等价于在圆 V 上有且仅有一点与 B,L,C 四点共圆。

根据前面求出的圆 V 的表示，设该点为 T

$$\vec{BT} = \left(\frac{(1-st)(1+q-t+qt-it-iqt-ist+iqst)}{(1+q)(1-it)^2} + \frac{t(1-st)(1+q+s-qs)}{(1+t^2)(1+q)}\frac{1+iw}{1-iw}\right)\vec{BC}$$

将以上的表示代入四点共圆的方程

$$\mathrm{Im}\left(\frac{L-B}{L-C}\frac{T-C}{T-B}\right) = 0$$

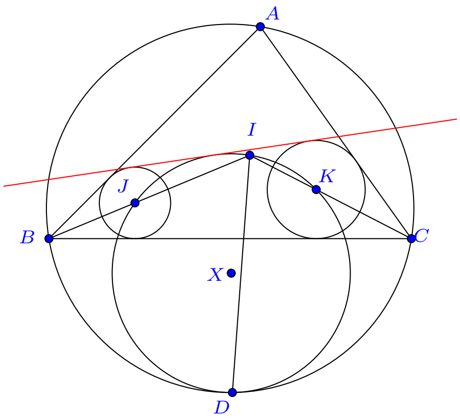
可以得知关于 w 的二次方程有唯一的重根

$$w = -\frac{1+q-s-qs-2t-4qst+2t^2-2qt^2+2st^2-4qst^2-2s^2t^2+2qs^2t^2-2qt^3-4st^3-2s^2t^3+2qs^2t^3-t^4-qt^4-st^4+qst^4}{1+q+s+qs+2qt-4st-2t^2+2qt^2+4st^2-2qst^2+2s^2t^2-2qs^2t^2+2t^3-4qst^3-2s^2t^3+2qs^2t^3-t^4-qt^4-st^4+qst^4}$$

因而结论成立。

三圆公切线问题

三角形 ABC 的内心为 I, 过 I 点作一圆 X 与其外接圆相切与 D, 与 BI 相交于 J，与 CI 相交于 K，再以 J 为圆心作圆，使与 BA,BC 相切，以 K 为圆心作圆，使其与 AC,BC 相切，证明：三圆 X,J,K 有一条公切线。



证明：令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$，则

$$\vec{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC},\quad \vec{BI}=\frac{1-st}{1-it}\vec{BC}$$

D 点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，它可表示为

$$\vec{BD}=\frac{(s+u)(1-su)}{s(1-iu)^2}\vec{BC}$$

根据圆的第一参数形式表示，经过 I,D 两点的圆 X 上的点 Q 可设为

$$\vec{IQ}=\frac{1+iq}{1-iv}\vec{ID}$$

它在 D 点 $(v=-q)$ 的切向量是

$$\frac{d\,\vec{IQ}}{dv}|_{v=-q}=\frac{i}{1+iq}\vec{ID}$$

该切向量应与 $\triangle ABC$ 外接圆在 D 点的切向量

$$\frac{d\,\vec{BD}}{du}=\frac{(1+is)^2(1+iu)}{s(1-iu)^3}\vec{BC}$$

是平行的，由此解得

$$q=\frac{st^2-s^2t+u+s^2u-4stu+t^2u-3s^2t^2u+6s^2tu^2-6st^2u^2-u^3-s^2u^3+4stu^3-t^2u^3+3s^2t^2u^3-s^2tu^4+st^2u^4}{st+s^2t^2-4s^2tu+4st^2u+2u^2+2s^2u^2-6stu^2+2t^2u^2-4s^2t^2u^2+4s^2tu^3-4st^2u^3+stu^4+s^2t^2u^4}$$

这样我们就得知了圆 X 上点的表示

$$\vec{BQ}=\vec{BI}+\vec{IQ}=\left(\frac{1-st}{1-it}+\frac{1+iq}{1-iu}\Big(\frac{(s+t)(1-su}{s(1-iu)^2}-\frac{1-st}{1-it}\Big)\right)\vec{BC}$$

进而我们就可以求得圆 X 与 BI,CI 的交点

$$\vec{BJ}=\frac{(1+it)t(s+u)^2(1-su)^2}{s(st+s^2t^2-4s^2tu+4st^2u+2u^2+2s^2u^2-6stu^2+2t^2u^2-4s^2t^2u^2+4s^2tu^3-4st^2u^3+stu^4+s^2t^2u^4)}\vec{BC}$$

$$\vec{BK}=\left(1+\frac{(i-s)(1+it)(1+s^2)(1-st)u^2}{s(st+s^2t^2-4s^2tu+4st^2u+2u^2+2s^2u^2-6stu^2+2t^2u^2-4s^2t^2u^2+4s^2tu^3-4st^2u^3+stu^4+s^2t^2u^4)}\right)\vec{BC}$$

根据之前的两圆公切线求法，不难求出圆 J,K 的异于 BC 的外公切线 (表达式较长, 故略)。

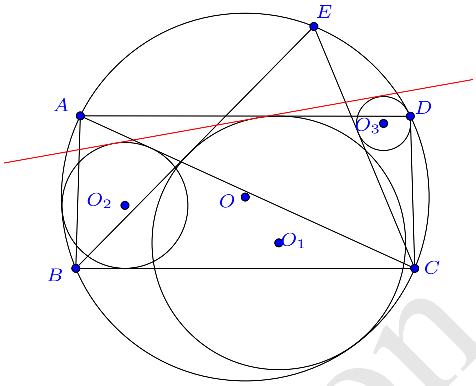
进而可知该外公切线与圆 X 的交点是唯一的，即证。

注: 设该外公切线在圆 J, X, K 三个圆上的切点分别为 U, V, W, 有

$$\frac{UV}{VW}=\frac{t(s+u)(1-su)(s^2t-u-s^2u+2stu-s^2tu^2)}{u(1+s^2)(1-st)(su-st-tu+stu^2)}$$

三圆公切线

圆 O 上顺次排列着 A, B, C, D, E 五点，圆 O_1 为与 AD, BE 相切且与圆 O 内切于弧 BCD 上一点的圆，圆 O_2 为与 AC, BC 相切且与圆 O 内切的圆, 圆 O_3 为与 CD, CE 相切且与圆 O 内切的圆。证明：圆 O_1, O_2, O_3 有一条公切线。



证明: 设 $z=e^{i\angle BAC}, \alpha=e^{i\angle ABC}, \beta=e^{i\angle EBC}, \gamma=e^{i\angle DBC}$, 于是

$$\vec{BA}=\frac{1-z^2\alpha^2}{1-z^2}\vec{BC}, \vec{BE}=\frac{1-z^2\beta^2}{1-z^2}\vec{BC}, \vec{BD}=\frac{1-z^2\gamma^2}{1-z^2}\vec{BC}$$

圆 O_1 为与 AD, BE 相切且与圆 O 内切于弧 BCD 上一点的圆, 设 AD, BE 的交点为 F, 易得

$$\vec{BF}=\frac{\beta^2(1-z^2\alpha^2)(1-z^2\gamma^2)}{(1-z^2)(\beta^2-z^2\alpha^2\gamma^2)}\vec{BC}$$

显然 O_1 位于 F 与 $\triangle BDF$ 内心的连线上, 因此我们再来求 $\triangle BDF$ 的内心, 记为 I_1, 半径记为 r_1。利用前面的方法可求得

$$\vec{BI_1}=\frac{\beta(1+z\alpha)}{\beta+z\alpha\gamma}\vec{BD}=\frac{\beta(1+z\alpha)(1-z^2\gamma^2)}{(1-z^2)(\beta+z\alpha\gamma)}\vec{BC}$$
$$r_1=-\frac{i(1+z\alpha)(\beta-\gamma)(1-z^2\gamma^2)}{2\gamma(1-z^2)(\beta+z\alpha\gamma)}BC$$

令

$$\vec{BO_1}=(1-\lambda)\vec{BF}+\lambda\vec{BI_1}$$

则圆 O_1 的半径 $R_1=\lambda r_1$, 由圆 O_1 于圆 O 内切知 $|O-O_1|=R-R_1$, 求出

$$\lambda=\frac{2z(\alpha+\beta)\gamma}{(1+z\gamma)(\beta+z\alpha\gamma)}$$

于是

$$\vec{BO_1}=\frac{\beta(1+z\alpha)(1-z\gamma)(\beta-z\alpha\beta+2z\alpha\gamma+z\beta\gamma+z^2\alpha\beta\gamma)}{(1-z^2)(\beta+z\alpha\gamma)^2}\vec{BC}$$
$$R_1=-\frac{iz(1+z\alpha)(\alpha+\beta)(\beta-\gamma)(1-z\gamma)}{(1-z^2)(\beta+z\alpha\gamma)^2}BC$$

同理，求出

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BO_2} &= \frac{(1+z\alpha)(1+z-3z\alpha+z^2\alpha)}{(1+z)(1-z\alpha)^2}\overrightarrow{BC} \\
R_2 &= -\frac{2iz(1-\alpha)(1+z\alpha)}{(1+z)(1-z\alpha)^2}BC \\
\overrightarrow{BO_3} &= \frac{(\beta+z\beta+\gamma-z\gamma-2z\beta\gamma)(\beta-z\beta+\gamma+z\gamma+2z\beta\gamma)}{(1-z^2)(\beta+\gamma)^2}\overrightarrow{BC} \\
R_3 &= -\frac{2iz(1+\beta)(\beta-\gamma)(1-\gamma)}{(1-z^2)(\beta+\gamma)^2}BC
\end{aligned}
$$

由图容易得知，若三圆存在公切线，则该公切线为三圆的外公切线。根据 XXX 节公切线的求解, 我们直接设三圆的切点分别为:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BT_1} =& \Big(\frac{\beta(1+z\alpha)(1-z\gamma)(\beta-z\alpha\beta+2z\alpha\gamma+z\beta\gamma+z^2\alpha\beta\gamma)}{(1-z^2)(\beta+z\alpha\gamma)^2} \\
&-\frac{iz(1+z\alpha)(\alpha+\beta)(\beta-\gamma)(1-z\gamma)}{(1-z^2)(\beta+z\alpha\gamma)^2}\frac{1+iu}{1-iu}\Big)\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{BT_2} =& \Big(\frac{(1+z\alpha)(1+z-3z\alpha+z^2\alpha)}{(1+z)(1-z\alpha)^2}-\frac{2iz(1-\alpha)(1+z\alpha)}{(1+z)(1-z\alpha)^2}\frac{1+iu}{1-iu}\Big)\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{BT_3} =& \Big(\frac{(\beta+z\beta+\gamma-z\gamma-2z\beta\gamma)(\beta-z\beta+\gamma+z\gamma+2z\beta\gamma)}{(1-z^2)(\beta+\gamma)^2} \\
&-\frac{2iz(1+\beta)(\beta-\gamma)(1-\gamma)}{(1-z^2)(\beta+\gamma)^2}\frac{1+iu}{1-iu}\Big)\overrightarrow{BC}
\end{aligned}
$$

于是存在公切线的条件即为

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{d}{du}\overrightarrow{BT_1}\otimes\left(\overrightarrow{BT_1}-\overrightarrow{BT_2}\right)\right) &= 0 \\
\operatorname{Im}\left(\frac{d}{du}\overrightarrow{BT_1}\otimes\left(\overrightarrow{BT_2}-\overrightarrow{BT_3}\right)\right) &= 0
\end{aligned}
$$

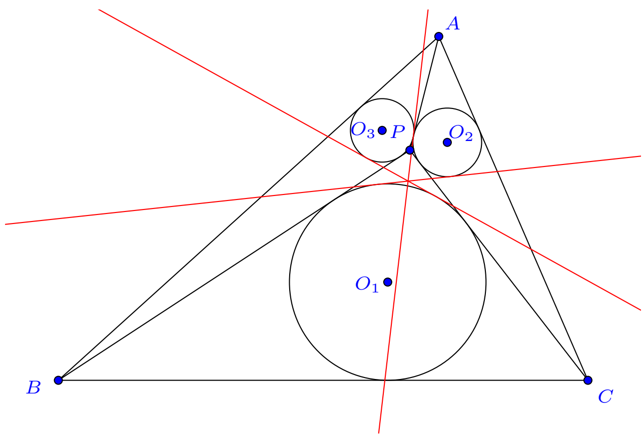
此方程组有且仅有唯一的解

$$
u=\frac{z(\beta-\alpha\beta-\alpha\gamma+z\alpha\gamma-\beta\gamma+z\alpha\beta\gamma)+i(1-z\alpha+\beta-z\beta-z\gamma+z\alpha\gamma)}{1-z\alpha+\beta-z\beta-z\gamma+z\alpha\gamma+iz(\beta-\alpha\beta-\alpha\gamma+z\alpha\gamma-\beta\gamma+z\alpha\beta\gamma)}
$$

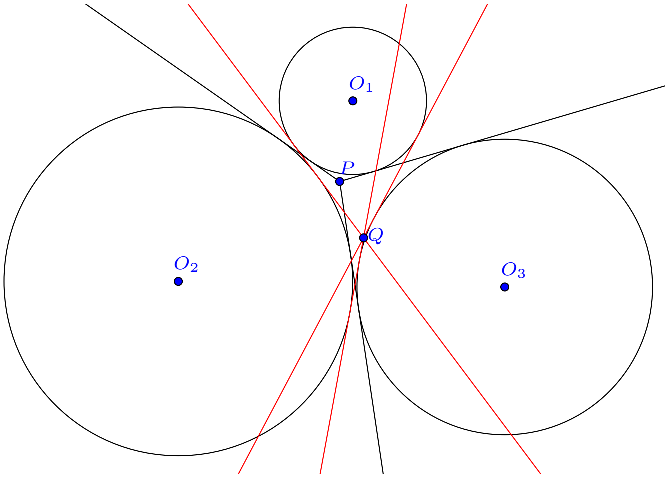
这就证明了三圆有一条公切线。

三角形内任意点 P 的内切圆性质

给定三角形 ABC 及其内一点 P，则 $\triangle APB, \triangle BPC, \triangle CPA$ 的内切圆的另外三条不同于 AP, BP, CP 内公切线相交于公共点 Q。



证明：实际上本题结论与三角形 ABC 并无关联。



设 $\triangle APB$ 的内切圆在 PA 上的切点为 D, 在 PB 上的切点为 E,
设 $\triangle BPC$ 的内切圆在 PB 上的切点为 F, 在 PC 上的切点为 G,
设 $\triangle CPA$ 的内切圆在 PC 上的切点为 H, 在 PA 上的切点为 J,
那么可令：

$$\vec{PE} = a\,\vec{PD}, \quad \vec{PF} = \lambda a\,\vec{PD}, \quad \vec{PG} = \lambda ab\,\vec{PD}, \quad \vec{PH} = \mu ab\,\vec{PD}, \quad \vec{PJ} = \mu\,\vec{PD}$$

其中 $(a = e^{i\angle APB}, b = e^{i\angle BPC})$
进而求得三个内切圆的圆心及半径

$$\begin{aligned} \vec{PO_1} &= \frac{2a}{1+a}\vec{PD}, \quad r_1 = \frac{i\,(1-a)}{1+a}PD \\ \vec{PO_2} &= \frac{2\lambda ab}{1+b}\vec{PD}, \quad r_2 = \lambda\frac{i\,(1-b)}{1+b}PD \\ \vec{PO_3} &= \frac{2\mu ab}{1+ab}\vec{PD}, \quad r_3 = \mu i\frac{(-1+ab)}{(1+ab)}PD \end{aligned}$$

$O1$ 与 $O2$ 的不同于 PB 的内公切线的两个切点分别为

$$\begin{aligned} \vec{PT_1} &= \frac{a\,(1+b-2\lambda-\lambda b+ab\lambda)}{a+ab-\lambda-\lambda a}\vec{PD} \\ \vec{PT_2} &= -\frac{\lambda a\,(1-b-2ab+\lambda b+ab\lambda)}{a+ab-\lambda-\lambda a}\vec{PD} \end{aligned}$$

$O2$ 与 $O3$ 的不同于 PC 的内公切线的两个切点分别为：

$$\begin{aligned} \vec{PT_3} &= \frac{\lambda a\,(\lambda+\lambda ab-\mu+\mu b-2\mu ab)}{\lambda+\lambda ab-\mu a-\mu ab}\vec{PD} \\ \vec{PT_4} &= \frac{\mu a\,(\lambda+2\lambda b-\lambda ab-\mu-\mu b)}{\lambda+\lambda ab-\mu a-\mu ab}\vec{PD} \end{aligned}$$

$O3$ 与 $O1$ 的不同于 PA 的内公切线的两个切点分别为：

$$\begin{aligned} \vec{PT_5} &= \frac{a\,(1+ab-2\mu+\mu b-\mu ab)}{1+ab-\mu-\mu a}\vec{PD} \\ \vec{PT_6} &= -\frac{\mu a\,(1-2b-ab+\mu b+\mu ab)}{1+ab-\mu-\mu a}\vec{PD} \end{aligned}$$

三线的交于公共点：

$$\vec{PM} = \frac{2a\left(\lambda-\lambda a^2b^2-\mu+\mu b^2-\lambda\mu b^2+\lambda\mu a^2b^2\right)}{1-a+b-a^2b+ab^2-a^2b^2+\lambda+\lambda a-\lambda b+\lambda a^2b-\lambda ab^2-\lambda a^2b^2-\mu-\mu a-\mu b+\mu a^2b+\mu ab^2+\mu a^2b^2}\vec{PD}$$

与三个相离的圆相切的圆

与此有关的是一个费尔巴哈类型定理：

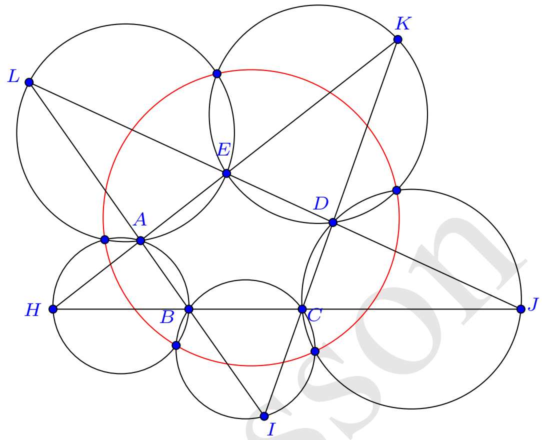
三角形 ABC 各边取点 D,E,F, 作圆 O_1 与 BC 相切于 D 点且内切于三角形的外接圆 O, 同理作圆 O_2,O_3, 若 AD,BE,CF 三线共点，则存在一个圆与 O_1,O_2,O_3 及三角形 ABC 的内切圆均相切。

2001 年的一篇文章应用 casey 定理证明了此结论。

2.4.14　五圆

五圆定理

已知五边形 A,B,C,D,E, 直线 EA 与 BC 交于点 H, 直线 AB 与 CD 交于点 I, 直线 BC 与 DE 交于点 J, 直线 CD 与 AE 交于点 K, 直线 DE 与 AB 交于点 L。记 $\triangle ABH$ 的外接圆，$\triangle BCI$ 的外接圆, $\triangle CDJ$ 的外接圆, $\triangle DEK$ 的外接圆, $\triangle EAL$ 的外接圆分别为 $\odot O_1,\odot O_2,\odot O_3,\odot O_4,\odot O_5$, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 另相交于点 Q_1, $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 另相交于点 Q_2, $\odot O_3$ 与 $\odot O_4$ 另相交于点 Q_3, $\odot O_4$ 与 $\odot O_5$ 另相交于点 Q_4, $\odot O_5$ 与 $\odot O_1$ 另相交于点 Q_5。则 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5 五点共圆。



证明: 令

$$\vec{BA}=z\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=w\,\vec{BC},\quad \vec{BE}=\chi\,\vec{BC}$$

不难求出交点 H,I,J,K,L 分别为

$$\begin{aligned}
\vec{BH}&=\frac{z\,\bar{\chi}-\chi\,\bar{z}}{z-\chi-\bar{z}+\bar{\chi}}\,\vec{BC}\\
\vec{BI}&=\frac{z(w-\bar{w})}{z-z\,\bar{w}-\bar{z}+w\,\bar{z}}\,\vec{BC}\\
\vec{BJ}&=\frac{w\,\bar{\chi}-\chi\,\bar{w}}{w-\chi-\bar{w}+\bar{\chi}}\,\vec{BC}\\
\vec{BK}&=\frac{wz-w\chi-z\,\bar{w}+\chi\,\bar{w}-\chi\,\bar{z}+w\chi\,\bar{z}+z\,\bar{\chi}-wz\,\bar{\chi}}{z-\chi-z\,\bar{w}+\chi\,\bar{w}-\bar{z}+w\,\bar{z}+\bar{\chi}-w\,\bar{\chi}}\,\vec{BC}\\
\vec{BL}&=\frac{z(\chi\,\bar{w}-w\,\bar{\chi})}{z\,\bar{w}-w\,\bar{z}+\chi\,\bar{z}-z\,\bar{\chi}}\,\vec{BC}
\end{aligned}$$

根据 XX 式, $\triangle ABH$ 外接圆上的点 $Q1$ 可设为

$$Q_1=\frac{A(B-H)-B(A-H)u}{B-H-(A-H)u}$$

它也在 $\triangle BCI$ 的外接圆上，因此又有

$$\operatorname{Im}\left(\frac{Q_1-B}{Q_1-C}\frac{I-C}{I-B}\right)=0$$

由此求得

$$\vec{BQ_1}=\frac{z(z-\chi-z\,\bar{w}+\chi\,\bar{w}-\bar{z}+w\,\bar{z}+\bar{\chi}-w\,\bar{\chi})}{z-wz+z^2-\chi+w\chi-z\chi-z^2\,\bar{w}+z\chi\,\bar{w}-\bar{z}+w\,\bar{z}-z\,\bar{z}+wz\,\bar{z}+\chi\,\bar{z}-w\chi\,\bar{z}+\bar{\chi}-w\,\bar{\chi}}\,\vec{BC}$$

同理，求出

$$
\begin{aligned}
\vec{BQ_2} &= \frac{z(\chi\,\bar w - w\,\bar\chi)}{z\,\bar w - wz\,\bar w + z\chi\,\bar w - w\,\bar z + w^2\,\bar z + \chi\,\bar z - w\chi\,\bar z - z\,\bar\chi}\,\vec{BC}\\
\vec{BQ_3} &= \frac{z\chi - \chi^2 - \chi\,\bar z + w\chi\,\bar z - wz\,\bar\chi + \chi\,\bar\chi}{z - wz - \chi + w\chi + z\chi - \chi^2 - \bar z + w\,\bar z + \bar\chi - w\,\bar\chi - z\,\bar\chi + \chi\,\bar\chi}\,\vec{BC}\\
\vec{BQ_4} &= \frac{z(wz - w\chi - wz\,\bar w + \chi\,\bar w - w\,\bar z + w^2\,\bar z)}{z^2 - z\chi + z\,\bar w - wz\,\bar w - z^2\,\bar w + z\chi\,\bar w - w\,\bar z + w^2\,\bar z - z\,\bar z + wz\,\bar z + \chi\,\bar z - w\chi\,\bar z}\,\vec{BC}\\
\vec{BQ_5} &= \frac{z(w\,\bar\chi - \chi\,\bar w)}{wz - w\chi - z\chi + \chi^2 - z\,\bar w + w\,\bar\chi + z\,\bar\chi - \chi\,\bar\chi}\,\vec{BC}
\end{aligned}
$$

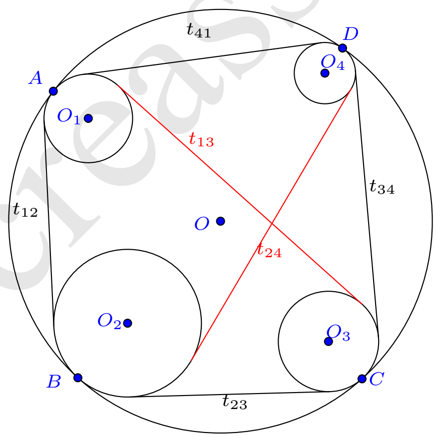
计算即知

$$
\operatorname{Im}\left(\frac{Q_3-Q_1}{Q_3-Q_2}\frac{Q_4-Q_2}{Q_4-Q_1}\right)=0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{Q_3-Q_1}{Q_3-Q_2}\frac{Q_5-Q_2}{Q_5-Q_1}\right)=0
$$

因而 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 五点共圆。

开世定理

设有半径为 R 的一个圆，圆内又有四个圆 O_1, O_2, O_3, O_4 内切于圆 (如图 1 所示)。如果将圆 O_i, O_j 的外公切线的长度设为 t_{ij}，那么开世定理声称，有下列等式成立：$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} = t_{13}t_{24}$。



证明:

设四个小圆与圆 O 的切点分别为 A, B, C, D, 由圆的参数表示, 可令:

$$
\vec{BA} = \frac{1+is}{1-iu}\,\vec{BC},\quad \vec{BD} = \frac{1+is}{1-iv}\,\vec{BC}
$$

于是圆 O 的圆心和半径为

$$
\vec{BO} = \frac{1+is}{2}\,\vec{BC},\quad R = \frac{\sqrt{1+s^2}}{2}BC
$$

为了使得 A, B, C, D 四点是逆时针的, 这就要求:

$$
\operatorname{Im}\frac{A-B}{C-B}>0,\quad \operatorname{Im}\frac{B-C}{D-C}>0,\quad \operatorname{Im}\frac{C-D}{A-D}>0,\quad \operatorname{Im}\frac{D-A}{B-A}>0
$$

约化后成为 $s+v>0, u-v>0$

现在, 四个圆的圆心分别在 OA, OB, OC, OD 的连线上, 因此可设:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BO_1} &= \lambda_1 \overrightarrow{BO} + (1-\lambda_1)\overrightarrow{BA} = \left(\lambda_1 \frac{1}{2}(1+is) + (1-\lambda_1)\frac{1+is}{1-iu}\right)\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{BO_2} &= \lambda_2 \overrightarrow{BO} = \lambda_2 \frac{1}{2}(1+is)\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{BO_3} &= \lambda_3 \overrightarrow{BO} + (1-\lambda_3)\overrightarrow{BC} = \left(\lambda_3 \frac{1}{2}(1+is) + (1-\lambda_3)\right)\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{BO_4} &= \lambda_4 \overrightarrow{BO} + (1-\lambda_4)\overrightarrow{BD} = \left(\lambda_4 \frac{1}{2}(1+is) + (1-\lambda_4)\frac{1+is}{1-iv}\right)\overrightarrow{BC}
\end{aligned}
$$

其中 $0 < \lambda_k < 1, (k = 1, 2, 3, 4)$, 各圆的半径

$$
R_k = \lambda_k R = \frac{\lambda_k}{2}\sqrt{1+s^2}BC, \quad (k = 1, 2, 3, 4)
$$

由两圆外公切线的计算式: $t_{kj} = \sqrt{{O_kO_j}^2 - (R_k - R_j)^2}$, 计算得到:

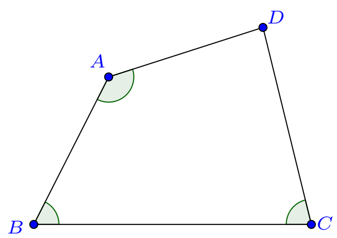
$$
\begin{aligned}
t_{12} &= \sqrt{\frac{(1+s^2)(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{1+u^2}}BC \\
t_{23} &= \sqrt{(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}BC \\
t_{34} &= (s+v)\sqrt{\frac{(1-\lambda_3)(1-\lambda_4)}{1+v^2}}BC \\
t_{41} &= (u-v)\sqrt{\frac{(1+s^2)(1-\lambda_4)(1-\lambda_1)}{(1+u^2)(1+v^2)}}BC \\
t_{13} &= (s+u)\sqrt{\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_3)}{1+u^2}}BC \\
t_{24} &= \sqrt{\frac{(1+s^2)(1-\lambda_2)(1-\lambda_4)}{1+v^2}}BC
\end{aligned}
$$

由此即知: $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} = t_{13}t_{24}$。

2.5　四边形

四边形可以看成是由两个三角形复合而成, 但这样并没有充分地利用到四边形所特有的性质, 本节我们将对此做进一步的讨论。

2.5.1　四边形的表示



对四边形 $ABCD$, 令

$$
a = e^{iA}, \quad b = e^{iB}, \quad c = e^{iC}
$$
$$
\lambda = \frac{AB}{BC}, \quad \mu = \frac{CD}{BC}, \quad \nu = \frac{DA}{AB}
$$

利用向量的旋转缩放性质, 知

$$
\overrightarrow{BA} = \lambda b\,\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CD} = \frac{\mu}{c}\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{AD} = \nu a\,\overrightarrow{AB}
$$

对前两式, 利用向量加法, 得到

$$\vec{AD} = \frac{-c+\lambda bc+\mu}{\lambda bc}\,\vec{AB}$$

联合第三式即可求出

$$\nu = \frac{-c+\lambda bc+\mu}{\lambda abc}$$

两端取虚部又可解得

$$\mu = \frac{c(1-a^2b^2-b\lambda+a^2b\lambda)}{(1-a^2b^2c^2)}$$

至此, 我们就得到了四边形 $ABCD$ 的一个有理表示:

$$\vec{BA} = \lambda b\,\vec{BC},\quad \vec{BD} = \frac{b(a^2b-a^2bc^2+\lambda-a^2\lambda)}{1-a^2b^2c^2}\,\vec{BC} \tag{2.60}$$

这个表示以四边形内角及相邻的两边为参量, 它的一个好处是使得各边长均能有理化:

$$AB = \lambda BC,\quad CD = \frac{c(1-a^2b^2-b\lambda+a^2b\lambda)}{(1-a^2b^2c^2)}BC,\quad DA = \frac{a(-b+bc^2+\lambda-b^2c^2\lambda)}{(1-a^2b^2c^2)}BC \tag{2.61}$$

2.5.2　一般四边形的题目

四点共线问题

设四边形 $ABCD$ 是凸四边形且 $AC = BD = AD$, AB, CD 的中点分别为 E, F, 对角线 AC 与 BD 交于点 O 。求证: $\triangle AOD$ 的内切圆与 OA, OD 的切点在直线 EF 上。

证明:

根据凸四边形 $ABCD$ 的表示:

$$\vec{BA} = \lambda\,\vec{BC},\quad \vec{BD} = \frac{b(-a^2b+a^2bc^2-\lambda+a^2\lambda)}{(-1+abc)(1+abc)}\,\vec{BC}$$

其中

$$a = e^{iA}, b = e^{iB}, c = e^{iC}$$

计算知

$$AC^2 = \frac{(b-\lambda)(1-b\lambda)}{b}BC^2$$

$$BD^2 = \frac{b(a^2b-a^2bc^2+\lambda-a^2\lambda)(1-c^2+bc^2\lambda-a^2bc^2\lambda)}{(1-abc)^2(1+abc)^2}BC^2$$

$$AD^2 = \frac{a^2(b-bc^2-\lambda+b^2c^2\lambda)^2}{(1-abc)^2(1+abc)^2}BC^2$$

根据 $AC = AD$, 我们可解出

$$\lambda = \frac{b(1-abc^2)(1+abc^2)}{(1-ab^2c^2)(1+ab^2c^2)}$$

再根据 $AC = BD$, 得到

$$1-c^2-a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2c^2-a^2b^2c^4 = 0$$

由此, 我们消去顶点表示中的参数 λ 和 a, 成为

$$\vec{BA} = \frac{b^2(1+b^2c^4)}{(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)}\,\vec{BC}$$

$$\vec{BD} = \frac{b^2c^2(1-b^2+b^2c^2)}{(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)}\,\vec{BC}$$

于是得到 AB, CD 的中点 E, F, 以及对角线交点 O 的表示:

$$\begin{aligned}
\vec{BE} &= \frac{b^2(1+b^2c^4)}{2(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)}\,\vec{BC}\\
\vec{BF} &= \frac{1+2b^2c^2-b^4c^2+2b^4c^4}{2(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)}\,\vec{BC}\\
\vec{BO} &= \frac{b^2(1-b^2)c^2(1+b^2c^4)}{(1-b^2c^2)(1+b^2c^2)(1-c^2+b^2c^2)}\,\vec{BC}
\end{aligned}$$

为求出 $\triangle AOD$ 的内心，我们令

$$\vec{DO} = \frac{1-p^2q^2}{1-p^2}\,\vec{DA}$$

而由前面的表示计算，有

$$\vec{DO} = \frac{c^4(1+b^4c^2)(1-2b^2+2b^2c^2-b^4c^2)}{(1-b^2c^2)(1+b^2c^2)(1-c^2+b^2c^2)^2}\,\vec{DA}$$

两式比较即得

$$p = -\frac{1}{b^2c^2}, \quad q = -\frac{c^2(1-b^2+b^2c^2)}{1-c^2+b^2c^2}$$

$\triangle AOD$ 的内切圆圆心 J 即为:

$$\vec{BJ} = \vec{BD} + \frac{1+pq}{1+p}\,\vec{DA} = \frac{b^4c^2+b^6c^6}{-1+b^6c^6}\,\vec{BC}$$

它在 OA, OD 上的切点 (记为 M, N) 分别为:

$$\begin{aligned}
\vec{BM} &= \frac{(1+b^2c^4)(1-b^4c^2+2b^4c^4-2b^6c^4)}{2(1-b^2c^2)(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)(1-c^2+b^2c^2)}\,\vec{BC}\\
\vec{BN} &= \frac{b^2c^2(1-2b^2+2b^2c^2-b^4c^2)(1+b^2c^4)}{2(1-b^2c^2)(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)(1-c^2+b^2c^2)}\,\vec{BC}
\end{aligned}$$

计算即知

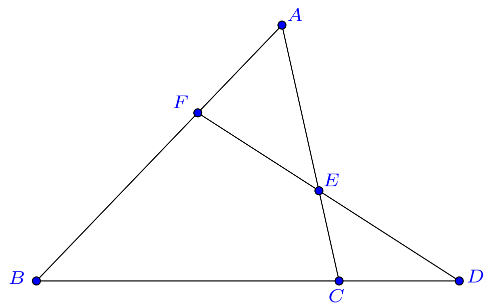
$$\mathrm{Im}\left(\frac{M-E}{F-E}\right) = 0, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{N-E}{F-E}\right) = 0$$

因而 M, N, E, F 四点共线。

Urquhart 定理

如图, 点 E, F 在三角形 ABC 的两条边 CA, AB 上, 它们的连线交 BC 的延长线于点 D, 如果 $BF+FE=BC+CE$, 那么 $BA+AE=BD+DE$。

这个命题也被 Urquhart 认为是欧式几何中“最初等的定理”。在圆锥曲线一章中我们将介绍它的一个推广。



我们可以用四边形的表示来证明它。

证明：将 A, D 看成是凸四边形 $FBCE$ 边的延长线的交点，令

$$b = e^{i\angle B}, \quad c = e^{i\angle BCA}, \quad a = e^{i\angle BFE}, \quad \lambda = \frac{BF}{BC}$$

则

$$\vec{BF} = \lambda b\,\vec{BC}, \quad \vec{BE} = \frac{b(a^2b-a^2bc^2+\lambda-a^2\lambda)}{1-a^2b^2c^2}\,\vec{BC}$$

四边形 $FBCE$ 的边长的表示为

$$BF=\lambda BC,\quad FE=-\frac{a(b-bc^2-\lambda+b^2c^2\lambda)}{(1-abc)(1+abc)}BC,\quad CE=\frac{c(1-a^2b^2-b\lambda+a^2b\lambda)}{(1-abc)(1+abc)}BC$$

容易求出交点 A,D 的表示:

$$\vec{BA}=\frac{b^2(1-c)(1+c)}{(1-bc)(1+bc)}\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{(1-a)(1+a)b\lambda}{(1-ab)(1+ab)}\vec{BC}$$

于是又求得边长:

$$\begin{aligned}BA&=\frac{b(1-c^2)}{1-b^2c^2}BC,\quad AE=\frac{(1-a^2)bc(b-bc^2-\lambda+b^2c^2\lambda)}{(1-b^2c^2)(1-a^2b^2c^2)}BC\\BD&=\frac{(1-a^2)b\lambda}{1-a^2b^2}BC,\quad DE=\frac{ab(1-c^2)(1-a^2b^2-b\lambda+a^2b\lambda)}{(1-a^2b^2)(1-a^2b^2c^2)}BC\end{aligned}$$

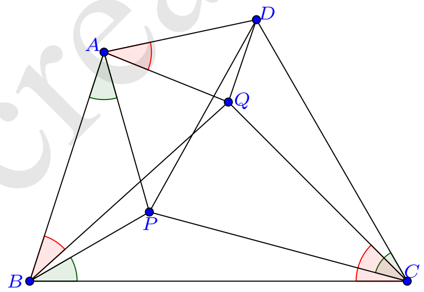
由以上各边长的表示计算, 得到

$$\begin{aligned}BF+FE-BC-CE&=-\frac{1+ab+c+abc-\lambda-a\lambda-bc\lambda-abc\lambda}{1+abc}BC\\BA+AE-BD-DE&=\frac{(1-a)b(1-c)(1+ab+c+abc-\lambda-a\lambda-bc\lambda-abc\lambda)}{(1+ab)(1+bc)(1+abc)}BC\end{aligned}$$

即知命题成立。

萧振纲的四边形题目

如图，设 P,Q 是凸四边形 $ABCD$ 内两点，且 $\angle BAP=\angle QAD,\angle CBP=\angle QBA,\angle DCP=\angle QCB$。求证：$\sqrt{PA\cdot PC\cdot QA\cdot QC}+\sqrt{PB\cdot PD\cdot QB\cdot QD}=\sqrt{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}$。[1]



证明:

我们令 $a=e^{i\angle A},b=e^{i\angle B},c=e^{i\angle C},\lambda=\frac{AB}{BC}$, 则四边形 $ABCD$ 的表示为:

$$\vec{BA}=\lambda b\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{b(a^2b-a^2bc^2+\lambda-a^2\lambda)}{1-a^2b^2c^2}\vec{BC}$$

再令 $p=e^{i\angle PBC},q=e^{i\angle PCB}$, 则

$$\vec{BP}=\frac{p^2(1-q^2)}{1-p^2q^2}\vec{BC}$$

根据 $\angle CBP=\angle QBA,\quad \angle DCP=\angle QCB$ 又知

$$e^{i\angle QBC}=e^{i(\angle B-\angle PBC)}=\frac{b}{p},\quad e^{i\angle QCB}=e^{i(\angle C-\angle PCB)}=\frac{c}{q}$$

因而点 Q 有表示:

$$\vec{BQ}=\frac{b^2(c^2-q^2)}{b^2c^2-p^2q^2}\vec{BC}$$

[1] 萧振纲教授: 著有《几何变换与几何证题》一书。

再根据 $\angle BAP=\angle QAD$ 可得各变量之间唯一关系式。

利用这一关系式, 我们即可对各部分的长度乘积通过多项式求余进行化简计算，程序如下：

Clear[“Global`*”];

points $=\left\{A\to b\lambda, B\to 0, C\to 1, D\to \frac{b\left(-a^2b+a^2bc^2-\lambda+a^2\lambda\right)}{(-1+abc)(1+abc)}, P\to\frac{p^2(-1+q)(1+q)}{(-1+pq)(1+pq)}, Q\to\frac{b^2(c-q)(c+q)}{(bc-pq)(bc+pq)}\right\}$;

specs $=\left\{a\to e^{\frac{2i\pi}{3}}, b\to e^{\frac{2i\pi}{5}}, c\to e^{\frac{i\pi}{3}}, p\to e^{\frac{i\pi}{6}}, q\to e^{\frac{i\pi}{12}}\right\}$;

conjs $=\left\{a\to\frac{1}{a}, b\to\frac{1}{b}, c\to\frac{1}{c}, p\to\frac{1}{p}, q\to\frac{1}{q}\right\}$;

angleEQ = FactorList $\left[\text{Factor}\left[\text{Factor}[\# - (\#/.\text{conjs})]\&/@\left(\left\{\left(\frac{D-A}{Q-A}*\frac{B-A}{P-A}\right)/.\text{points}\right\}\right)\right][[1]]//\text{Numerator}\right][[-1]][[1]]$;

squareLens[X_, Y_]:=(Factor[# * (#/.conjs)]&/@({$X-Y$}/.points))[[1]];

(* simplify expression by using angleEQ *)

simplifyFunc[expr_]:=Factor[PolynomialRemainder[expr, angleEQ, λ]];

(*simplify$X$ = PA · PC · QA · QC *)

squareX = squareLens[P, A] * squareLens[P, C] * squareLens[Q, A] * squareLens[Q, C];

factors = FactorList[squareX];

groups1 = Select[factors, Exponent[#[[1]], λ] == 0&];

groups2 = Select[factors, Exponent[#[[1]], λ] > 0&];

squareX = Times@@Power@@@Union[groups1,

{{simplifyFunc[groups2[[1]][[1]] * groups2[[3]][[1]]], 1},

{simplifyFunc[groups2[[2]][[1]] * groups2[[4]][[1]]], 1}}];

(* now X can be gotten since squareX is a square form *)

X = Times@@Power@@@({#[[1]], #[[2]]/2}&/@FactorList[squareX]);

(*Y = PB · PD · QB · QD*)

squareY = squareLens[P, B] * squareLens[P, D] * squareLens[Q, B] * squareLens[Q, D];

factors = FactorList[squareY];

groups1 = Select[factors, Exponent[#[[1]], λ] == 0&];

groups2 = Select[factors, Exponent[#[[1]], λ] > 0&];

squareY = Times@@Power@@@Union[groups1,

{{simplifyFunc[groups2[[1]][[1]] * groups2[[3]][[1]]], 1},

{simplifyFunc[groups2[[2]][[1]] * groups2[[4]][[1]]], 1}}];

Y = Times@@Power@@@({#[[1]], #[[2]]/2}&/@FactorList[squareY]);

(*Z = AB · BC · CD · DA*)

squareZ = squareLens[A, B] * squareLens[B, C] * squareLens[C, D] * squareLens[D, A];

Z = Times@@Power@@@({#[[1]], #[[2]]/2}&/@FactorList[squareZ]);

(*thetargetis$\sqrt{X}+\sqrt{Y}=\sqrt{Z}$, whichisequivalentto2$\sqrt{XZ}=X+Z-Y$.*)

XZ = $X*Z$;

factors = FactorList[XZ];

groups1 = Select[factors, Exponent[#[[1]], λ] == 0&];

groups2 = Select[factors, Exponent[#[[1]], λ] > 0&];

XZ = Times@@Power@@@Union[groups1,

```
{{simplifyFunc[groups2[[1]][[1]] * groups2[[3]][[1]]], 1},
{simplifyFunc[groups2[[2]][[1]] * groups2[[4]][[1]]], 1}}];
sqrtXZ = Times@@Power@@@({#[[1]], #[[2]]/2}&/@FactorList[XZ]);
R = simplifyFunc[X + Z − Y];
Print["X + Z − Y − 2√XZ = ", Factor[R − 2sqrtXZ]];
```

彭翕成的四边形题目

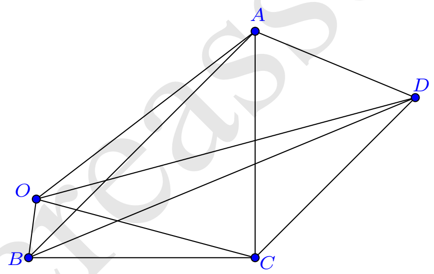
四边形 ABCD 平面存在点 O, 满足 $\angle OAB+\angle OAC+\angle OAD=180^\circ$, $\angle OBA+\angle OBC+\angle OBD=180^\circ$, $\angle OCA-\angle OCB+\angle OCD=180^\circ$。

求证: (1). $\angle ODA+\angle ODB+\angle ODC=0$

(2). $\frac{OA^3}{AB\cdot AC\cdot AD}+\frac{OB^3}{BC\cdot BD\cdot BA}+\frac{OC^3}{CD\cdot CA\cdot CB}+\frac{OD^3}{DA\cdot DB\cdot DC}=1$。[①]

一个非常好的特例:

$$\begin{aligned}&c=e^{\frac{i\pi}{4}}, d=i, a=e^{i\frac{11\pi}{24}}, b=-e^{i\frac{\pi}{12}}\\&\vec{BA}=(1+i)\,\vec{BC}\\&\vec{BD}=(1+e^{\frac{i\pi}{4}})\,\vec{BC}\\&\vec{BO}=(1+e^{i\frac{11\pi}{12}})\,\vec{BC}\end{aligned}$$



证明: 令

$$a=e^{i\angle OBC}, b=e^{i\angle OCB}, c=e^{i\angle ABC}, d=e^{i\angle ACB}, p=e^{i\angle DBC}, q=e^{i\angle DCB}$$

根据 $\angle OBA=\angle OBC-\angle ABC$, $\angle OBD=\angle OBC-\angle DBC$, 以及 $\angle OBA+\angle OBC+\angle OBD=180^\circ$

即有 $3\angle OBC-\angle ABC-\angle DBC=180^\circ$, 因而 $a^3=-ce$。

同理, 根据 $\angle OCA=\angle ACB-\angle OCB$, $\angle OCD=\angle DCB-\angle OCB$, 以及 $\angle OCA-\angle OCB+\angle OCD=180^\circ$

有 $\angle ACB+\angle DCB-3\angle OCB=180^\circ$, 于是 $b^3=-df$。

由此我们可得各点的表示:

$$\begin{aligned}\vec{BO}&=\frac{a^2(1-b^2)}{1-a^2b^2}\,\vec{BC}\\\vec{BA}&=\frac{c^2(1-d^2)}{1-c^2d^2}\,\vec{BC}\\\vec{BD}&=\frac{p^2(1-q^2)}{1-p^2q^2}\,\vec{BC}=\frac{a^6(b^6-d^2)}{a^6b^6-c^2d^2}\,\vec{BC}\end{aligned}$$

由剩余的角度关系式 $\angle OAB+\angle OAC+\angle OAD=180^\circ$ 知

$$\mathrm{Im}\left(\frac{B-A}{O-A}\frac{C-A}{O-A}\frac{D-A}{O-A}\right)=0$$

[①] 彭翕成博士：编写几何命题自动发现软件《几何神算》, 本题由软件探索得到。

展开为关于 a, b, c, d 的多项式方程:

$$
\begin{aligned}
&b^6c^2d^6a^{12}-3b^8c^2d^4a^{12}-b^{12}c^2a^{12}+b^{12}d^2a^{12}-3b^{10}d^2a^{12}+3b^8d^2a^{12}-b^6d^2a^{12}+3b^{10}c^2d^2a^{12}-3b^4c^2d^6a^{10}\\
&+6b^8c^2d^4a^{10}+3b^4c^2d^4a^{10}+3b^{12}c^2a^{10}-3b^{12}c^2d^2a^{10}-6b^8c^2d^2a^{10}-3b^6c^4d^6a^8+6b^4c^4d^6a^8-3b^2c^4d^6a^8\\
&+3b^2c^2d^6a^8-3b^8c^2d^4a^8-6b^4c^2d^4a^8-3b^{12}c^2a^8+3b^{12}c^4d^2a^8-6b^{10}c^4d^2a^8+3b^8c^4d^2a^8+6b^{10}c^2d^2a^8+3b^6c^2d^2a^8\\
&+c^6d^8a^6-3b^4c^6d^6a^6-c^2d^6a^6+3b^8c^6d^4a^6+3b^4c^2d^4a^6+b^{12}c^2a^6-b^{12}c^6d^2a^6-3b^8c^2d^2a^6-3c^6d^8a^4+3b^6c^6d^6a^4\\
&+6b^2c^6d^6a^4+3b^4c^4d^6a^4-6b^2c^4d^6a^4+3c^4d^6a^4-6b^8c^6d^4a^4-3b^4c^6d^4a^4+3b^{10}c^6d^2a^4-3b^{10}c^4d^2a^4\\
&+6b^8c^4d^2a^4-3b^6c^4d^2a^4+3c^6d^8a^2-6b^4c^6d^6a^2-3c^6d^6a^2+3b^8c^6d^4a^2+6b^4c^6d^4a^2-3b^8c^6d^2a^2-c^6d^8-b^6c^8d^6\\
&+3b^4c^8d^6-3b^2c^8d^6+c^8d^6+3b^2c^6d^6-3b^4c^6d^4+b^6c^6d^2=0
\end{aligned}
$$

它可导出以下两个简化形式的式子:

$$
\begin{aligned}
&d^2(a^2-a^2b^2-c^2+a^2b^2c^2+c^2d^2-a^2c^2d^2)^3(a^6b^6-b^6c^2-a^6b^6d^2+b^6c^4d^2+c^2d^4-c^4d^4)\\
=&c^2(b^2-a^2b^2-d^2+a^2b^2d^2+c^2d^2-b^2c^2d^2)^3(a^6b^6-a^6b^6c^2-a^6d^2+c^4d^2+a^6c^2d^4-c^4d^4)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&c^2(a^4b^6-a^6b^6-a^4d^2+a^6b^2d^2+c^2d^2-b^2c^2d^2)^3(a^6b^6-b^6c^2-a^6b^6d^2+b^6c^4d^2+c^2d^4-c^4d^4)\\
=&d^2(a^6b^4-a^6b^6-b^4c^2+a^2b^6c^2+c^2d^2-a^2c^2d^2)^3(a^6b^6-a^6b^6c^2-a^6d^2+c^4d^2+a^6c^2d^4-c^4d^4)
\end{aligned}
$$

这个等式也使得

$$
\operatorname{Im}\left(\frac{A-D}{O-D}\frac{B-D}{O-D}\frac{C-D}{O-D}\right)=0
$$

根据角度的关系, 我们即知: $\angle ODA+\angle ODB+\angle ODC=0$。

另外，计算知

$$
\begin{aligned}
\frac{(O-A)^3}{(A-B)(A-C)(A-D)}&=\frac{(a^6b^6-c^2d^2)(a^2-a^2b^2-c^2+a^2b^2c^2+c^2d^2-a^2c^2d^2)^3}{(1-a^2b^2)^3c^2(1-c^2)(1-d^2)(a^6b^6-a^6b^6c^2-a^6d^2+c^4d^2+a^6c^2d^4-c^4d^4)}\\
\frac{(O-B)^3}{(B-C)(B-D)(B-A)}&=-\frac{(1-b^2)^3(a^6b^6-c^2d^2)(1-c^2d^2)}{(1-a^2b^2)^3c^2(b^6-d^2)(1-d^2)}\\
\frac{(O-C)^3}{(C-D)(C-A)(C-B)}&=-\frac{(1-a^2)^3(a^6b^6-c^2d^2)(1-c^2d^2)}{(1-a^2b^2)^3(a^6-c^2)(1-c^2)d^2}\\
\frac{(O-D)^3}{(D-A)(D-B)(D-C)}&=\frac{(1-c^2d^2)(a^4b^6-a^6b^6-a^4d^2+a^6b^2d^2+c^2d^2-b^2c^2d^2)^3}{(1-a^2b^2)^3(a^6-c^2)(b^6-d^2)d^2(a^6b^6-a^6b^6c^2-a^6d^2+c^4d^2+a^6c^2d^4-c^4d^4)}
\end{aligned}
$$

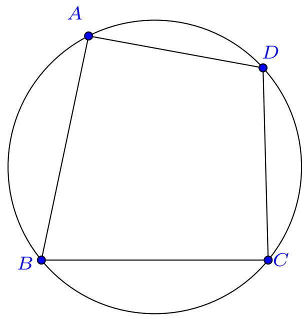
由此可得等式

$$
\frac{(O-A)^3}{(A-B)(A-C)(A-D)}+\frac{(O-B)^3}{(B-C)(B-D)(B-A)}+\frac{(O-C)^3}{(C-D)(C-A)(C-B)}+\frac{(O-D)^3}{(D-A)(D-B)(D-C)}=-1
$$

式中的每一项均取实数, 这由角度等式即可看出 (或者利用前面的多项式方程直接计算, 即知各项的虚部是等于 0)。

根据证明过程，我们可以将结论拓广为:

2.5.3 圆内接四边形



圆内接四边形的对角之和为 180°, 因而 $ac = -1$。由此, 我们得到了圆内接四边形 $ABCD$ 的一个表示:

$$\vec{BA} = \lambda b\,\vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{(1-a^2)b(\lambda-b)}{1-b^2}\,\vec{BC}$$

边长

$$AB = \lambda BC, \quad CD = \frac{-1+a^2b^2+b\lambda-a^2b\lambda}{a(1-b^2)}BC, \quad DA = \frac{b-a^2b+a^2\lambda-b^2\lambda}{a(1-b^2)}BC$$

对角线长

$$AC = \sqrt{\frac{(b-\lambda)(1-b\lambda)}{b}}BC, \quad BD = \frac{b(1-a^2)}{a(1-b^2)}\sqrt{\frac{(b-\lambda)(1-b\lambda)}{b}}BC$$

容易看到, 若要使得对角线长有理表示, 只需令

$$\frac{(1-b\lambda)}{b(b-\lambda)} = z^2$$

并根据 $|b| = 1$ 知 z 也是单位复数 $|z| = 1$。

由此即得

$$\vec{BA} = \frac{1-z^2b^2}{1-z^2}\,\vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{1-a^2}{1-z^2}\,\vec{BC}$$

$\vec{BA}$ 的表示正是前面我们经常使用的形式, $\vec{BD}$ 的表示也是如此, 这只需令 $a = zq$ 即可看出。

因此, 我们仍使用三角形的二阶有理表示来表示圆内接四边形。

有理表示

对于圆的内接四边形 A, B, C, D, 若令 $z = e^{i\angle BAC} = e^{i\angle BDC}, \alpha = e^{i\angle ABC}, \beta = e^{i\angle DBC}$ 则

$$\vec{BA} = \frac{1-z^2\alpha^2}{1-z^2}\,\vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{1-z^2\beta^2}{1-z^2}\,\vec{BC} \tag{2.62}$$

也可以令 $s = \tan\frac{\angle BAC}{2}, u = \tan\frac{\angle ABC}{2}, v = \tan\frac{\angle DBC}{2}$, 将其表示为实参形式

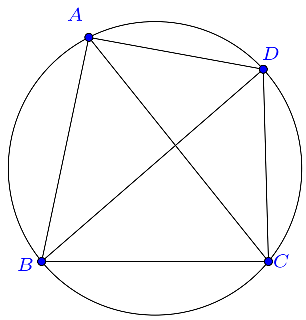
$$\vec{BA} = \frac{(s+u)(1-su)}{s(1-iu)^2}\,\vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{(s+v)(1-sv)}{s(1-iv)^2}\,\vec{BC} \tag{2.63}$$

参数的取值范围: $s > 0, u > v > 0$ 且 $1-su > 0, 1-sv$。

它们与 z, α, β 的关系是

$$z = \frac{1+is}{1-is}, \quad \alpha = \frac{1+iu}{1-iu}, \quad \beta = \frac{1+iv}{1-iv}$$

托勒密定理



应用圆内接四边形的表示 (8), 我们容易计算出圆内接四边形的边长

$$AB=\frac{(s+u)(1-su)}{s(1+u^2)}BC,\quad CD=\frac{v(1+s^2)}{s(1+v^2)}BC,\quad DA=\frac{(1+s^2)(u-v)(1+uv)}{s(1+u^2)(1+v^2)}BC$$

以及对角线长

$$AC=\frac{(1+s^2)u}{s(1+u^2)}BC,\quad BD=\frac{(s+v)(1-sv)}{s(1+v^2)}BC$$

由此而有

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

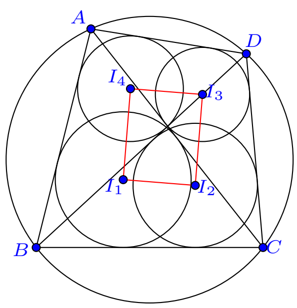
这就是托勒密定理所述内容: 圆内接凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积。

事实上，对于平面上的任意相异四点 $ABCD$, 恒有等式:

$$\frac{(A-D)(B-C)}{(A-C)(B-D)}+\frac{(A-B)(C-D)}{(A-C)(B-D)}=1$$

而凸四边形 $ABCD$ 内接于圆的条件使得上式左方的每一项均取非负实数, 因而可逐项取模成为长度的恒等式, 这与前面提到的关于等角共轭点的一个恒等式是类似的。

顶点三角形的内切圆



根据弦所对同一方向的圆周角相等这一良好性质, 我们可以得知圆内接四边形中每个三角形的内角,

因而也就能有理地表示出它们的内切圆, 旁切圆, 费尔巴哈圆, 伪外接圆, 伪内切圆等等 (另外也可由边长、角度等的有理表示, 利用重心坐标给出)。

对于四个顶点三角形 $\triangle ABC,\triangle BCD,\triangle CDA,\triangle DAB$, 设它们的内切圆圆心依次为 I_1,I_2,I_3,I_4, 半径 r_1,r_2,r_3,r_4, 则

$$\begin{aligned}
\vec{BI_1}&=\frac{1+z\alpha}{1+z}\vec{BC},\quad r_1=\frac{i(1-\alpha)(1+z\alpha)}{2(1+z)\alpha}BC\\
\vec{BI_2}&=\frac{1+z\beta}{1+z}\vec{BC},\quad r_2=\frac{i(1-\beta)(1+z\beta)}{2(1+z)\beta}BC\\
\vec{BI_3}&=\frac{1+z^2(\alpha-\beta-\alpha\beta)}{1-z^2}\vec{BC},\quad r_3=-\frac{iz(1+\alpha)(\alpha-\beta)(1-\beta)}{2(1-z^2)\alpha\beta}BC\\
\vec{BI_4}&=\frac{(1+z\alpha)(1-z\beta)}{1-z^2}\vec{BC},\quad r_4=-\frac{i(1+z\alpha)(\alpha-\beta)(1-z\beta)}{2(1-z^2)\alpha\beta}BC
\end{aligned}\tag{2.64}$$

以 $\triangle DAB$ 为例：

我们令 $p = e^{i\angle ADB}, q = e^{i\angle BAD}$, 则由角度的关系 [1]

$$p = e^{i\angle ACB} = -\frac{1}{z\alpha}, \quad q = e^{i(\angle BAC + \angle CAD)} = e^{i(\angle BAC + \angle CBD)} = z\beta$$

因而

$$\vec{AI_4} = \frac{1+pq}{1+p}\,\vec{AB} = \frac{z(\beta-\alpha)}{1-z\alpha}\,\vec{AB}$$

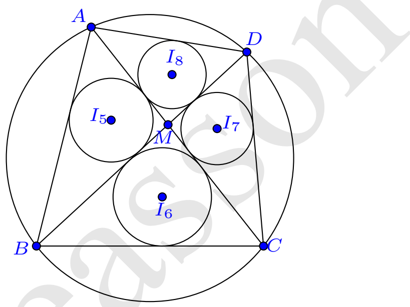
再利用向量加法即得

$$\vec{BI_4} = \frac{(1+z\alpha)(1-z\beta)}{1-z^2}\,\vec{BC}$$

由表示 (9), 立即可得如下结论[2]:

1. $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$, 即四内心构成一个矩形。
2. $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = 0$ 。

对角线交点三角形的内切圆



圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线交点

$$\vec{BM} = \frac{(1-z^2\alpha^2)\beta^2}{\beta^2 - z^2\alpha^2}\,\vec{BC}$$

四个对角线交点三角形 $\triangle ABM, \triangle BCM, \triangle CDM, \triangle DAM$ 的内切圆圆心依次记为 I_5, I_6, I_7, I_8, 半径为 r_5, r_6, r_7, r_8, 则

$$\begin{aligned}
\vec{BI_5} &= \frac{(1-z\alpha)(1+z\alpha)\beta}{(1+z)(\beta-z\alpha)}\,\vec{BC}, \quad r_5 = \frac{i(1-z^2\alpha^2)(\alpha-\beta)}{2(1+z)\alpha(z\alpha-\beta)}BC \\
\vec{BI_6} &= \frac{(1+z\alpha)\beta}{z\alpha+\beta}\,\vec{BC}, \quad r_6 = \frac{i(1+z\alpha)(1-\beta)}{2(z\alpha+\beta)}BC \\
\vec{BI_7} &= \frac{z\alpha-\beta-z\beta+z^2\alpha\beta^2}{(1+z)(z\alpha-\beta)}\,\vec{BC}, \quad r_7 = -\frac{iz(\alpha-\beta)(1-\beta^2)}{2(1+z)(\beta-z\alpha)\beta}BC \\
\vec{BI_8} &= \frac{(1+z\alpha)(z\alpha+\beta-z\alpha\beta-z^2\beta^2)}{(1-z^2)(z\alpha+\beta)}\,\vec{BC}, \quad r_8 = -\frac{iz(1+z\alpha)(\alpha^2-\beta^2)(1-\beta)}{2(1-z^2)\alpha\beta(z\alpha+\beta)}BC
\end{aligned} \tag{2.65}$$

---

[1] p, q 的表示也可以直接由代数计算得到：

因为

$$\vec{AD} = \frac{z^2(\beta^2-\alpha^2)}{1-z^2\alpha^2}\,\vec{AB}$$

所以

$$\frac{1-p^2q^2}{1-p^2} = \frac{z^2(\beta^2-\alpha^2)}{1-z^2\alpha^2}$$

取共轭又有

$$\frac{1-p^2q^2}{(1-p^2)q^2} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(1-z^2\alpha^2)\beta^2}$$

联立这两个方程, 可得到 p, q 的若干解组, 再取一组特殊值即可选择出符合条件的解。

[2] 它们也被称为日本定理

题目 1

在凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=\angle CDA=\frac{\pi}{2}$, H 是 A 在 BD 上的投影, 边 AB 上的 S 和边 AD 上的 T 使 H 在 $\triangle SCT$ 内部, $\angle CHS-\angle CSB=\frac{\pi}{2}$, $\angle THC-\angle DTC=\frac{\pi}{2}$, 证明：直线 BD 和 $\triangle TSH$ 的外接圆相切.

证明：容易得知凸四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，我们令

$$\vec{BA}=\frac{1+is}{1-iu}\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{1+is}{1-iv}\vec{BC}$$

根据 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ 可解出 $u=\frac{1}{s}$, 因而 $\vec{BA}=is\vec{BC}$

不难求出

$$\vec{BD}=\frac{1+is}{1-iv}\vec{BC}$$

令

$$\vec{BS}=\lambda\vec{BA}$$

$$\vec{BT}=\mu\vec{BA}+(1-\mu)\vec{BD}$$

根据 $\angle CHS-\angle CSB=\frac{\pi}{2}$, $\angle THC-\angle DTC=\frac{\pi}{2}$, 则有

$$\operatorname{Im}\left(\frac{C-H}{S-H}\frac{B-S}{C-S}\frac{1}{i}\right)=0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{T-H}{C-H}\frac{C-T}{D-T}\frac{1}{i}\right)=0$$

化简得到：

$$s^2+2sv+v^2-\lambda-s^2\lambda+s^4\lambda+2s^3v\lambda-v^2\lambda-s^4\lambda^2-2s^3v\lambda^2-s^2v^2\lambda^2=0$$
$$s^2+2sv+v^2+\mu-s^2\mu-s^4\mu-4sv\mu-2s^3v\mu-v^2\mu-\mu^2+2sv\mu^2-s^2v^2\mu^2=0$$

若直线 BD 和 $\triangle TSH$ 的外接圆相切, 设切点 P 为 $\vec{BP}=\eta\vec{BD}$, 根据 P,T,S,H 四点共圆可解出 η:

$$\eta_1=\frac{s(s+v)}{1+s^2}$$
$$\eta_2=\frac{\lambda(1-sv-2\mu+s^2\mu+3sv\mu-s^2\lambda\mu-s^2v^2\lambda\mu+\mu^2-2sv\mu^2+s^2v^2\mu^2)}{\lambda-sv\lambda+s^2\mu+sv\mu-\lambda\mu-s^2\lambda\mu}$$

相切意味着这两根相等，即有方程：

$$\lambda(1-\mu)^2-2sv\lambda(1-\mu)^2+s^2(\lambda-\mu)(v^2-\lambda\mu-v^2\lambda\mu)-2s^3v\mu(1-2\lambda+\lambda\mu)-s^4\mu(1-2\lambda+\lambda^2+v^2\lambda^2-v^2\lambda\mu)=0$$

我们即是要证明在等式 (1),(2) 的条件下,(3) 式也成立。

先由 (1),(2) 式对 v 求余，得到

$$(1-s^2-2sv)(\lambda+\mu-\lambda\mu)(1-\mu-s^2\lambda\mu)=0$$

逐一讨论即知，除 $\lambda+\mu-\lambda\mu=0$ 的情形外，其余解均使得结论成立。

我们需要利用限制条件来讨论它：

根据 $ABCD$ 为凸四边形的条件：

$$\operatorname{Im}\left(\frac{D-A}{B-A}\right)>0,\operatorname{Im}\left(\frac{A-B}{C-B}\right)>0,\operatorname{Im}\left(\frac{B-C}{D-C}\right)>0,\operatorname{Im}\left(\frac{C-D}{A-D}\right)>0$$

知 $s>0,-s<v<\frac{1}{s}$

根据 H 在 $\triangle SCT$ 内部：

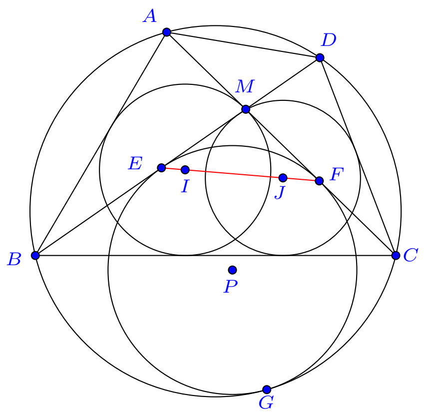
此时

$$s^2+2sv+v^2-\lambda-s^2\lambda+s^4\lambda+2s^3v\lambda-v^2\lambda-s^4\lambda^2-2s^3v\lambda^2-s^2v^2\lambda^2=0$$

我们需要再判断此时的 H 是否在 $\triangle SCT$ 内部。

沢山定理

四边形 $ABCD$ 内接于圆 O, I, J 为 $\triangle ABC, \triangle DBC$ 内心, 圆 P 分别与 BD, AC 相切于点 E, F, 与圆 O 内切于点 G。求证: E, F, I, J 四点共线。



证明：我们令 $z = e^{i\angle BAC} = e^{i\angle BDC}, \alpha = e^{i\angle ABC}, \beta = e^{i\angle DBC}$, 则有

$$\vec{BA} = \frac{1 - z^2\alpha^2}{1 - z^2}\vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{1 - z^2\beta^2}{1 - z^2}\vec{BC}$$
$$\vec{BI} = \frac{1 + z\alpha}{1 + z}\vec{BC}, \quad \vec{BJ} = \frac{1 + z\beta}{1 + z}\vec{BC}$$

对角线交点 M 为:

$$\vec{BM} = \frac{(1 - z^2\alpha^2)\beta^2}{\beta^2 - z^2\alpha^2}\vec{BC}$$

因为圆 P 分别与 BD, AC 相切相切，所以 P 点应在 $\triangle BMC$ 的内心与顶点 M 的连线上。

首先我们计算知

$$\vec{MC} = \frac{z^2\alpha^2(1 - \beta^2)}{(1 - z^2\alpha^2)\beta^2}\vec{MB}$$

令它成为标准形式

$$\vec{MC} = \frac{1 - p^2q^2}{1 - p^2}\vec{MB}$$

则可求出

$$p = -\frac{1}{z\alpha}, q = \frac{z\alpha}{\beta}$$

从而知 $\triangle BMC$ 的内心 K 和半径 r 为

$$\vec{MK} = \frac{1 + pq}{1 + p}\vec{MB} = \frac{z\alpha(1 - \beta)}{(1 - z\alpha)\beta}\vec{MB}$$

$$r = \frac{i(1 - q)(1 + pq)}{2(1 + p)q}MB = \frac{i(\beta - z\alpha)(1 - \beta)}{2(1 - z\alpha)\beta}MB$$

转化为基底 BC 的表示是

$$\vec{BK} = \frac{(1 + z\alpha)\beta}{z\alpha + \beta}\vec{BC}$$

$$r = \frac{i(1 + z\alpha)(1 - \beta)}{2(z\alpha + \beta)}BC$$

设圆 P 的圆心 $\vec{BP} = (1 - \lambda)\vec{BM} + \lambda\vec{BK}$, 及半径 $r_P = \lambda r$。

与圆 O 内切的条件意味着 $|O - P| = R - r$, 而我们知道

$$\vec{BO} = \frac{1}{1 - z^2}\vec{BC}, R = -\frac{iz}{1 - z^2}BC$$

代入即可解得

$$\lambda=\frac{2z(\alpha+\beta)}{(1+z)(z\alpha+\beta)}$$

从而得知圆 P 的圆心和半径

$$\vec{BP}=\frac{(1+z\alpha)\beta(2z\alpha+\beta+z\beta-z\alpha\beta+z^2\alpha\beta)}{(1+z)(z\alpha+\beta)^2}\vec{BC}$$

$$r_P=\frac{iz(1+z\alpha)(1-\beta)(\alpha+\beta)}{(1+z)(z\alpha+\beta)^2}BC$$

进而求出圆 P 与 BD,AC 的切点 E,F 为

$$\vec{BE}=\frac{(1+z\alpha)\beta(1+z\beta)}{(1+z)(z\alpha+\beta)}\vec{BC}$$

$$\vec{BF}=\frac{(1+z\alpha)(z\alpha+\beta+z\beta-z\alpha\beta)}{(1+z)(z\alpha+\beta)}\vec{BC}$$

至此结论所涉及的四点 E,F,I,J 均已求出，验证即知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{E-I}{J-I}\right)=0,\operatorname{Im}\left(\frac{F-I}{J-I}\right)=0$$

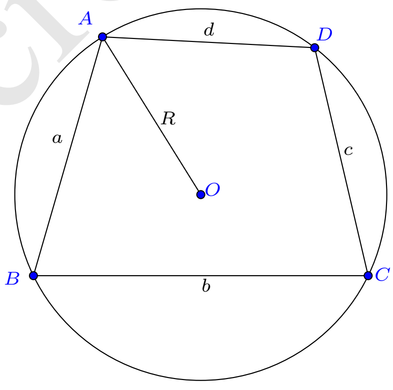
即证得四点共线。

注：切点 G 的表示为

$$\vec{BG}=\frac{(1+z\alpha)(1+z\beta)}{(1+z)(1-z+z\alpha+z\beta)}\vec{BC}$$

圆的半径问题

已知圆内四边形 $ABCD$ 的边长依次为 $a=AB,b=BC,c=CD,d=DA$，求圆的半径 R。



解：令

$$\vec{AC}=\frac{1+is}{1-iu}\vec{AB},\quad \vec{AD}=\frac{1+is}{1-iv}\vec{AB}$$

计算可得

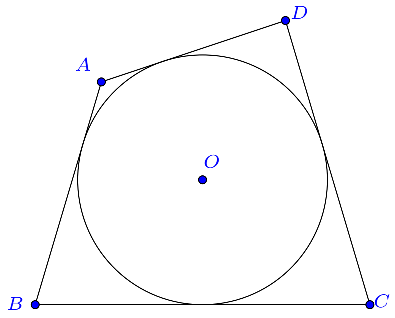
$$b^2=\frac{(s+u)^2}{1+u^2}a^2$$
$$c^2=\frac{(1+s^2)(u-v)^2}{(1+u^2)(1+v^2)}a^2$$
$$d^2=\frac{1+s^2}{1+v^2}a^2$$
$$R=\frac{\sqrt{1+s^2}}{2}a$$

由以上四式消去参数 s, u, v, 即可解出

$$R = \frac{\sqrt{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}}{\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}}$$

2.5.4 圆外切四边形

有理表示



圆外切四边形的对边之和相等：$AB + CD = BC + AD$。根据 (2) 式即可求得

$$\lambda = \frac{(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)}$$

由此, 圆外切四边形可完全地用三个内角的单位复数及一边来有理表示：

$$\vec{BA} = \frac{b(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)}\vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(1-c)(1+a-ab-abc)}{(1-bc)(1-abc)}\vec{BC} \tag{2.66}$$

边长

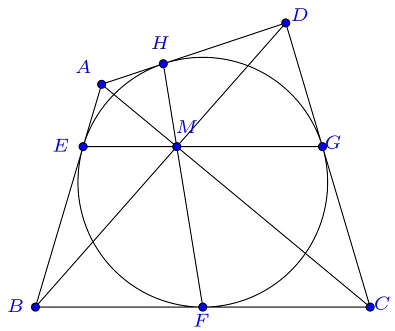
$$AB = \frac{(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)}BC, \quad CD = \frac{(1-b)(1-ab)c}{(1-bc)(1-abc)}BC, \quad DA = \frac{a(1-b)(1-c)}{(1-a)(1-abc)}BC \tag{2.67}$$

四边形的内切圆, 可看成是 BA 与 CD 延长线的交点与 B, C 构成的三角形的内切圆，由此知其圆心和半径为

$$\vec{BO} = \frac{b(1-c)}{1-bc}\vec{BC}, \quad r = \frac{(1-b)(1-c)}{2(1-bc)}iBC \tag{2.68}$$

牛顿定理

牛顿定理: 圆外切四边形对角线与切点四边形对角线共交点。



证明: 由前面圆外切四边形的有理表示，我们不难计算出

对角线 AC, BD 的交点为

$$\vec{BM} = \frac{(1+b)(1-c)(1+a-ab-abc)}{2(1-ac)(1-bc)}\vec{BC}$$

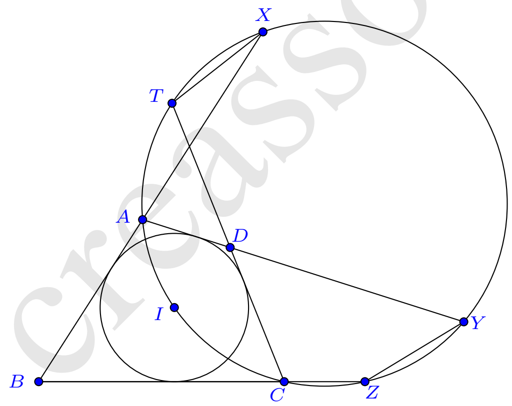
而圆在四边 AB, BC, CD, DA 的切点 (圆心在各边的垂足点) 分别为

$$\begin{aligned}
\vec{BE} &= \frac{b(1+b)(1-c)}{2(1-bc)}\,\vec{BC}\\
\vec{BF} &= \frac{(1+b)(1-c)}{2(1-bc)}\,\vec{BC}\\
\vec{BG} &= \frac{(1-c)(-1+b+2bc)}{2c(1-bc)}\,\vec{BC}\\
\vec{BH} &= \frac{b(2+a-ab)(1-c)}{2(1-bc)}\,\vec{BC}
\end{aligned}$$

验算即知 M 同时在线段 EG 和 FH 上。

2021 IMO 几何第 4 题

设圆 Γ 的圆心为 I, 凸四边形 $ABCD$ 满足：线段 AB, BC, CD, DA 均与 Γ 相切。设 Ω 是三角形 AIC 的外接圆, BA 往 A 方向的延长线交 Ω 于点 X, BC 往 C 方向的延长线交 Ω 于点 Z。AD 往 D 方向的延长线交 Ω 于点 Y, CD 往 D 方向的延长线交 Ω 于点 T。则 $AD+DT+TX+XA = CD+DY+YZ+ZC$



证明: 令 $a=e^{iA}, b=e^{iB}, c=e^{iC}$, 则

$$\vec{BA} = \frac{b(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)}\,\vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(1-c)(1+a-ab-abc)}{(1-bc)(1-abc)}\,\vec{BC}, \quad \vec{BI} = \frac{b(1-c)}{1-bc}\,\vec{BC}$$

X 在直线 BA 上, 设为 $\vec{BX} = \lambda\vec{BA}$, 则由 X, A, I, C 四点共圆可解出

$$\vec{BX} = \frac{b^2(1-ac)}{1-ab^2c}\,\vec{BC}$$

同理，求出

$$\begin{aligned}
\vec{BY} &= \frac{b(1+a-ab-c-ac+a^2bc-a^2b^2c+ab^2c^2)}{(1-bc)(1-ab^2c)}\,\vec{BC}\\
\vec{BZ} &= \frac{b(1-ab)(1-c)(1-ac)}{(1-a)(1-bc)(1-ab^2c)}\,\vec{BC}\\
\vec{BT} &= \frac{b(1-c)(-a+ab+c-a^2bc-ab^2c+a^2b^2c-ab^2c^2+a^2b^2c^2)}{(1-a)c(1-bc)(1-ab^2c)}\,\vec{BC}
\end{aligned}$$

在限定 X,Y,Z,T 所处位置的条件下, 各边边长的表示为

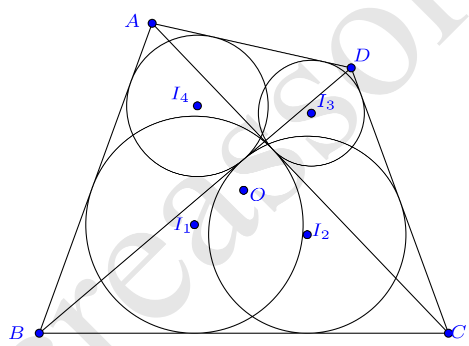
$$
\begin{aligned}
AD &= \frac{(1-b)(1-ab)c}{(1-bc)(1-abc)}BC \\
DT &= \frac{bc(1-b)(1-ab)(1-ac)}{(1-bc)(1-abc)(1-ab^2c)}BC \\
XA &= \frac{(-1+b)(1-a-ab+2abc-abc^2-ab^2c^2+a^2b^2c^2)}{(1-a)(1-bc)(1-ab^2c)}BC \\
CD &= \frac{a(1-b)(1-c)}{(1-a)(1-abc)}BC \\
DY &= \frac{a(1-b)b(1-c)(1-ac)}{(1-a)(1-abc)(1-ab^2c)}BC \\
ZC &= \frac{(-1+b)(1-c-bc+2abc-a^2bc-a^2b^2c+a^2b^2c^2)}{(1-a)(1-bc)(1-ab^2c)}BC
\end{aligned}
$$

并且

$$
TX^2 = YZ^2 = -\frac{b(1-b)^2(a-c)^2(1-a-ab+abc)(1-c-bc+abc)}{(1-a)^2(1-bc)^2(1-ab^2c)^2}BC^2
$$

计算知 $AD+DT+XA=CD+DY+ZC$, 联合上式即知命题成立。

顶点三角形的内切圆



前面我们给出了圆外切四边形的边长表示 (), 对于 $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$, 要得到它们内切圆的有理表示，根据内心的重心坐标表示，我们只需再有理化对角线之长 AC, BD 即可。

计算知

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= -\frac{(1-b)^2(1-a-ab+abc)(1-c-bc+abc)}{b(1-a)^2(1-bc)^2}BC^2 \\
BD^2 &= \frac{b(1-c)^2(1+a-ab-abc)(1+c-bc-abc)}{(1-bc)^2(1-abc)^2}BC^2
\end{aligned}
$$

为使 AC, BD 有理化, 可以令

$$
\frac{b(1-a-ab+abc)}{1-c-bc+abc} = p^2, \quad \frac{b(1+a-ab-abc)}{1+c-bc-abc} = q^2
$$

即

$$
a = \frac{-bp^2-b^2p^2-bq^2+b^2q^2+2p^2q^2}{b(2b^2+p^2-bp^2-q^2-bq^2)}, \quad c = \frac{-2b+p^2-bp^2+q^2+bq^2}{p^2+bp^2-q^2+bq^2-2p^2q^2}
$$

不难得知 p,q 也是单位复数 $|p|=|q|=1$。我们规定 p,q 的取值, 使得

$$
\begin{aligned}
AC &= i\frac{p(1-b^2)}{b^2+p^2}BC \\
BD &= -\frac{4(b-p^2)(1+p^2)q(b-q^2)}{(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)(p^2+bp^2-2bq+2p^2q-q^2-bq^2)}BC
\end{aligned}
$$

这样即有顶点表示:

$$\vec{BA} = \frac{b^2(1+p^2)}{b^2+p^2}\vec{BC}$$
$$\vec{BD} = -\frac{4(b-p^2)(1+p^2)q^2(b-q^2)}{(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)(p^2+bp^2-2bq+2p^2q-q^2-bq^2)}\vec{BC}$$

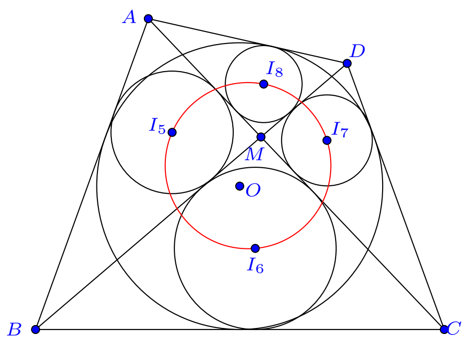
边长

$$AB = \frac{b(1+p^2)}{b^2+p^2}BC$$
$$CD = -\frac{(2b-p^2+bp^2-q^2-bq^2)(p^2+bp^2-q^2+bq^2-2p^2q^2)}{(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)(p^2+bp^2-2bq+2p^2q-q^2-bq^2)}BC$$
$$DA = -\frac{(1+p^2)(2b^2+p^2-bp^2-q^2-bq^2)(bp^2+b^2p^2+bq^2-b^2q^2-2p^2q^2)}{(b^2+p^2)(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)(p^2+bp^2-2bq+2p^2q-q^2-bq^2)}BC$$

记顶点三角形 $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ 的内切圆圆心为 I_1, I_2, I_3, I_4，半径 r_1, r_2, r_3, r_4, 则

$$\vec{BI_1} = \frac{b(1+ip)}{b+ip}\vec{BC}$$
$$r_1 = \frac{i(1-b)(1+ip)}{2(b+ip)}BC$$
$$\vec{BI_2} = \frac{2(1+p^2)q(b-q^2)}{(1+q)(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)}\vec{BC}$$
$$r_2 = \frac{i(1+p^2)(1-q)(b-q^2)}{(1+q)(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)}BC$$
$$\vec{BI_3} = \frac{(1+ip)(2b^2p-2bpq^2+ibp^2-ib^2p^2+ibq^2-ib^2q^2-2ip^2q^2+2ibp^2q^2)}{(b+ip)(2bp-2pq^2-ip^2+ibp^2+iq^2-ibq^2)}\vec{BC}$$
$$r_3 = i\frac{(1-b)(1+ip)(2bp-2pq^2+ip^2-ibp^2-iq^2+ibq^2)}{2(b+ip)(2bp-2pq^2-ip^2+ibp^2+iq^2-ibq^2)}BC$$
$$\vec{BI_4} = \frac{2b(1+p^2)q(b-q^2)}{(b+q)(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)}\vec{BC}$$
$$r_4 = -i\frac{(1+p^2)(b-q)(b-q^2)}{(b+q)(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)}BC$$

对角线交点三角形的内切圆



我们先计算出对角线 AC 与 BD 的交点 M [①]

$$\vec{BM} = \frac{(1+p^2)q^2}{p^2+q^2}\vec{BC}$$

[①] 由此式可以明确 p, q 的几何意义：
令 $z = e^{i\angle BMC}, w = e^{i\angle MBC}$, 即有

$$\vec{BM} = \frac{1-z^2w^2}{1-z^2}\vec{BC}$$

比较即知: $p = -izw, \quad q = w$。
我们可以改写各式为有明确几何意义的 b, z, w 的表示。

对角线交点 M 与各顶点的距离为

$$
\begin{aligned}
AM &= -i\frac{p(1+p^2)(b^2-q^2)}{(b^2+p^2)(p^2+q^2)}BC\\
BM &= \frac{(1+p^2)q}{p^2+q^2}BC\\
CM &= i\frac{p(1-q^2)}{p^2+q^2}BC\\
DM &= \frac{(1+p^2)q(2bp-2pq^2+ip^2-ibp^2-iq^2+ibq^2)(2bp-2pq^2-ip^2+ibp^2+iq^2-ibq^2)}{(p^2+q^2)(p^2+bp^2-2bq+2p^2q-q^2-bq^2)(-p^2-bp^2-2bq+2p^2q+q^2+bq^2)}BC
\end{aligned}
$$

记三角形 $\triangle ABM, \triangle BCM, \triangle CDM, \triangle DAM$ 的内切圆圆心为 I_5, I_6, I_7, I_8，半径 r_5, r_6, r_7, r_8, 则

$$
\begin{aligned}
\vec{BI_5} &= \frac{ib(1+p^2)q}{(b+ip)(p+iq)}\vec{BC}\\
r_5 &= \frac{(1+p^2)(b-q)}{2(b+ip)(p+iq)}BC\\
\vec{BI_6} &= \frac{(p-i)q}{p-iq}\vec{BC}\\
r_6 &= \frac{(1+ip)(1-q)}{2(p-iq)}BC\\
\vec{BI_7} &= \frac{(1+ip)q(2bp-2pq^2+ip^2-ibp^2+2ibq-2ip^2q-iq^2-ibq^2+2ip^2q^2)}{(p+iq)(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)}\vec{BC}\\
r_7 &= i\frac{(1+ip)(1-q)(2bp-2pq^2+ip^2-ibp^2-iq^2+ibq^2)}{2(p+iq)(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)}BC\\
\vec{BI_8} &= \frac{(1+p^2)q(2b^2p-2bpq^2+ibp^2-ib^2p^2-2ib^2q+2ibp^2q+ibq^2+ib^2q^2-2ip^2q^2)}{(b+ip)(p-iq)(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)}\vec{BC}\\
r_8 &= \frac{(1+p^2)(b-q)(2bp-2pq^2+ip^2-ibp^2-iq^2+ibq^2)}{2(b+ip)(p-iq)(p^2+bp^2+2bq-2p^2q-q^2-bq^2)}BC
\end{aligned}
$$

一个有趣的结论是 I_5, I_6, I_7, I_8 四点共圆, 这由上面的表示计算即知。

四内心共圆的另一证明法

我们可直接以 P 及某一顶点如 A 的向量为基向量,

圆外切四边形 $ABCD$, 其对角线的交点设为 M, 则四个小三角形 $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMD, \triangle DMA$ 的内心共圆。

证明: 令

$$z = e^{i\angle AMB}, \alpha = e^{i\angle MBA}, \beta = e^{i\angle MBC}, \gamma = e^{i\angle MDC}, \delta = e^{i\angle MDA}$$

则 $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMD, \triangle DMA$ 可表示为

$$\vec{MB} = \frac{1-z^2\alpha^2}{1-\alpha^2}\vec{MA}, \quad \vec{MB} = \frac{z^2-\beta^2}{1-\beta^2}\vec{MC}$$

$$\vec{MD} = \frac{1-z^2\gamma^2}{1-\gamma^2}\vec{MC}, \quad \vec{MD} = \frac{z^2-\delta^2}{1-\delta^2}\vec{MA}$$

由前两式，有

$$\vec{MC} = \frac{(1-z^2\alpha^2)(1-\beta^2)}{(1-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}\vec{MA}$$

而由后两式

$$\vec{MC} = \frac{(1-\gamma^2)(z^2-\delta^2)}{(1-z^2\gamma^2)(1-\delta^2)}\vec{MA}$$

从而得到条件式

$$1+z^2-z^2\alpha^2-\beta^2-z^2\gamma^2+z^2\alpha^2\beta^2\gamma^2-\delta^2+\alpha^2\beta^2\delta^2+z^2\alpha^2\gamma^2\delta^2+\beta^2\gamma^2\delta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2-z^2\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2=0$$

由 MC 的表示, 我们知线段 MC 与线段 MA 的长度关系

$$MC = -\frac{(1-z^2\alpha^2)(1-\beta^2)}{(1-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}MA$$

于是四边形 $ABCD$ 的各边长可表示为

$$\begin{aligned}
AB &= \frac{(1-z^2)\alpha}{z(1-\alpha^2)}MA \\
BC &= \frac{(1-z^2)\beta}{z(1-\beta^2)}MC = \frac{(1-z^2)(1-z^2\alpha^2)\beta}{z(1-\alpha^2)(\beta^2-z^2)}MA \\
CD &= \frac{(1-z^2)\gamma}{z(1-\gamma^2)}MC = \frac{(1-z^2)(1-z^2\alpha^2)(1-\beta^2)\gamma}{z(1-\gamma^2)(1-\alpha^2)(\beta^2-z^2)}MA \\
DA &= \frac{(1-z^2)\delta}{z(1-\delta^2)}MA
\end{aligned}$$

根据对边之和相等 $AB+CD=BC+DA$ 又有条件式

$$\frac{(1-z^2)\alpha}{z(1-\alpha^2)} + \frac{(1-z^2)(1-z^2\alpha^2)(1-\beta^2)\gamma}{z(1-\gamma^2)(1-\alpha^2)(\beta^2-z^2)} = \frac{(1-z^2)(1-z^2\alpha^2)\beta}{z(1-\alpha^2)(\beta^2-z^2)} + \frac{(1-z^2)\delta}{z(1-\delta^2)}$$

由这两个条件式，我们可以解出

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1+z^2+\alpha\beta-z^2\alpha\beta-2\beta^2}{-2z^2\alpha-\beta+z^2\beta+\alpha\beta^2+z^2\alpha\beta^2} \\
\delta &= \frac{1+z^2-2z^2\alpha^2-\alpha\beta+z^2\alpha\beta}{\alpha-z^2\alpha-2\beta+\alpha^2\beta+z^2\alpha^2\beta}
\end{aligned}$$

这样四个内心可表示为

$$\begin{aligned}
\vec{MI_1} &= \frac{1+z\alpha}{1+\alpha}\,\vec{MA} \\
\vec{MI_2} &= \frac{\beta-z}{\beta+1}\,\vec{MC} = \frac{(\beta-z)(1-z^2\alpha^2)(1-\beta^2)}{(\beta+1)(1-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}\,\vec{MA} \\
\vec{MI_3} &= \frac{1+z\gamma}{1+\gamma}\,\vec{MC} = \frac{(1-z^2\alpha^2)(1-\beta)(1+z^2-2z\alpha+2z\beta-\alpha\beta-z^2\alpha\beta)}{(1-\alpha^2)(z+\beta)(1+z^2-2z^2\alpha-2\beta+\alpha\beta+z^2\alpha\beta)}\,\vec{MA} \\
\vec{MI_4} &= \frac{\delta-z}{\delta+1}\,\vec{MA} = \frac{(1+z\alpha)(1+z^2-2z\alpha+2z\beta-\alpha\beta-z^2\alpha\beta)}{(1+\alpha)(1+z^2-2z^2\alpha-2\beta+\alpha\beta+z^2\alpha\beta)}\,\vec{MA}
\end{aligned}$$

计算即知

$$\mathrm{Im}\left(\frac{I_1-I_3}{I_1-I_4}\frac{I_2-I_4}{I_2-I_3}\right) = 0$$

因此四内心共圆。

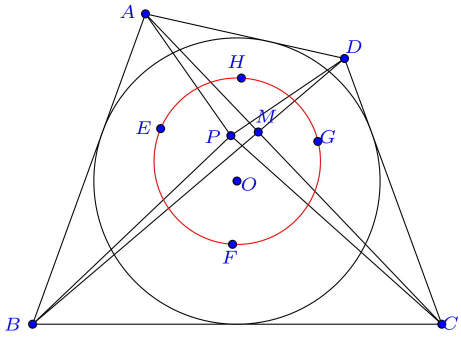
四内心共圆问题的推广一

前面我们提到, 圆外切四边形 $ABCD$ 的对角线交点 M 所划分的四个小三角形 $\triangle ABM, \triangle BCM, \triangle CDM, \triangle DAM$ 的内心共圆。

它的更一般的表述是:

圆外切四边形 $ABCD$, P 是四边形内的一点, 记四边形对角线的交点为 M, 若 $\angle APB + \angle CPD = 2\angle AMB$, 则四个小三角形 $\triangle APB, \triangle BPC, \triangle CPD, \triangle DPA$ 的内心共圆[1]。

[1] 与此等价的另一个表述是: 圆外切四边形 $ABCD$, P 是四边形内的一点, X 是 $\angle APC$ 的角平分线与线段 AC 的交点，Y 是 $\angle BPD$ 的角平分线与线段 BD 的交点。若 X, Y 与四边形 $ABCD$ 的内切圆圆心 O 共线, 则四个小三角形 $\triangle APB, \triangle BPC, \triangle CPD, \triangle DPA$ 的内心共圆。



这个命题是非常优美的, 有理化边长 + 代数化简技巧。

其证明是极为艰难的, 或可称为古典平面几何的巅峰。

可求得圆 O 的圆心和半径表示

$$\vec{MO}=\frac{(1-z^2\alpha^2)(1+z^2-2\alpha^2+2\alpha\beta-2z^2\alpha\beta-2\beta^2+\alpha^2\beta^2+z^2\alpha^2\beta^2)}{(1-\alpha^2)(1+z^2-2z^2\alpha^2-2\beta^2+\alpha^2\beta^2+z^2\alpha^2\beta^2)}\vec{MA}$$

$$R=i\frac{(1-z^2)(1-z^2\alpha^2)(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{z(1-\alpha^2)(1+z^2-2z^2\alpha^2-2\beta^2+\alpha^2\beta^2+z^2\alpha^2\beta^2)}MA$$

一般的情形，平面内点 P 处于什么位置时，四内心共圆？

我们只需考虑使得 AP,BP,CP,DP 的长度有理表示即可。

令 $\vec{BP}=Rz\,\vec{BC}$, 其中 $R>0$, z 为单位圆复数, 则可得

$$AE^2=-\frac{(1+a)^2(1-b)^2(1-c)^2(1-a-ab+abc)(1-c-bc+abc)}{4b(1-a)^2(1-ac)^2(1-bc)^2}BC^2$$

$$BE^2=\frac{(1+b)^2(1-c)^2(1+a-ab-abc)(1+c-bc-abc)}{4b(1-ac)^2(1-bc)^2}BC^2$$

$$CE^2=\frac{(R-z)(-1+Rz)}{z}BC^2$$

$$DE^2=\frac{(R-bcR-abcR+ab^2c^2R-z+bcz+abcz+c^2z-bc^2z-abc^2z)(-b-ab+ab^2+bc+abc-ab^2c^2+Rz-bcRz-abcRz}{(-1+bc)^2(-1+abc)^2z}$$

令

$$\frac{(R-z)}{z(-1+Rz)}=p^2$$

即

$$R=\frac{(1-p)(1+p)z}{(1-pz)(1+pz)}$$

易知 p 是单位复数。

同理，再令

$$\frac{b-ab^2-bc+ab^2c-z^2+az^2+bcz^2-abcz^2+p^2z^2-ap^2z^2-bp^2z^2+ab^2p^2z^2+abcp^2z^2-ab^2cp^2z^2}{b(1-b-c+abc+b^2c-ab^2c+bp^2-abp^2-b^2cp^2+ab^2cp^2-p^2z^2+abp^2z^2+cp^2z^2-abcp^2z^2)}=q^2$$

$$\frac{b+ab-ab^2-bc-abc+ab^2c^2-z^2+bcz^2+abcz^2-ab^2c^2z^2+p^2z^2-bp^2z^2-abp^2z^2+ab^2p^2z^2}{-c^2+bc^2+abc^2-ab^2c^2+p^2-bcp^2-abcp^2+ab^2c^2p^2-p^2z^2+bcp^2z^2+abcp^2z^2+c^2p^2z^2-bc^2p^2z^2-abc^2p^2z^2}=s^2$$

解得:

$$c=\frac{b-ab^2-bq^2+b^2q^2-b^2p^2q^2+ab^2p^2q^2-z^2+az^2+p^2z^2-ap^2z^2-bp^2z^2+ab^2p^2z^2+bp^2q^2z^2-ab^2p^2q^2z^2}{b(1-ab-q^2+abq^2+b^2q^2-ab^2q^2-b^2p^2q^2+ab^2p^2q^2-z^2+az^2-ap^2z^2+abp^2z^2+p^2q^2z^2-abp^2q^2z^2)}$$

这样，所有边均有理化表示了。

回代可以得到：

$$
\begin{aligned}
p^2 &= \frac{z-R}{z(1-Rz)} \\
q^2 &= -\frac{z(b-ab^2-bc+ab^2c-Rz+aRz+bcRz-abcRz)}{b(bR-abR-b^2cR+ab^2cR-z+abz+cz-abcz)} \\
s^2 &= \frac{b^2(R-bcR-abcR+ab^2c^2R-z+bcz+abcz+c^2z-bc^2z-abc^2z)}{z(-b-ab+ab^2+bc+abc-ab^2c^2+Rz-bcRz-abcRz+ab^2c^2Rz)}
\end{aligned}
$$

四内心共圆的条件为。。。

$F(a,b,c,p,q,s,z,R)=0$,

消元 p,q,s，即可得到关于 a,b,c,R,z 的最终方程。

附 Mathematica 证明程序。

==

证明: 令

$$
\begin{aligned}
&p=e^{i\angle APB}, b=e^{i\angle ABP}, \\
&q=e^{i\angle BPC}.c=e^{i\angle PCB} \\
&a=e^{i\angle PAD}, d=e^{i\angle PDA}
\end{aligned}
$$

顶点

$$\vec{PB}=\frac{1-b^2p^2}{1-b^2}\vec{PA}, \vec{PC}=\frac{(1-b^2p^2)(1-c^2q^2)}{(1-b^2)(1-c^2)}\vec{PA}, \vec{PD}=-\frac{(1-a^2)d^2}{(1-d^2)}\vec{PA}$$

边长

$$AB=\frac{b(1-p^2)}{(1-b^2)p}PA, BC=\frac{c(1-b^2p^2)(1-q^2)}{(1-b^2)(1-c^2)pq}PA, DA=\frac{1-a^2d^2}{a(1-d^2)}PA$$

$$PB=\frac{1-b^2p^2}{p(1-b^2)}PA, PC=\frac{(1-b^2p^2)(1-c^2q^2)}{(1-b^2)(1-c^2)pq}PA, PD=\frac{(1-a^2)d}{a(1-d^2)}PA$$

另外，根据 $AB+CD=BC+DA$ 可得到 CD 的表示。

至此，各边长已有理表示出，可得到各三角形的内心表示：

记 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ 的内心分别为 I_1, I_2, I_3, I_4，则

$$
\begin{aligned}
&\vec{PI_1}=\tfrac{1+bp}{1+b}\vec{PA} \\
&\vec{PI_2}=\tfrac{(1-b^2p^2)(1+cq)}{(1-b^2)(1+c)}\vec{PA} \\
&\vec{PI_3}=\tfrac{(1-a^2)d(1-b^2p^2)(1-c^2q^2)(pq-ad)}{(1+c)(1+d)T}\vec{PA} \\
&T=a-ad-ab^2p^2+ab^2dp^2-abq+abcq+abdq-abcdq+pq-b^2pq-cpq+b^2cpq-a^2dpq+a^2b^2dpq \\
&+a^2cdpq-a^2b^2cdpq+abp^2q-abcp^2q-abdp^2q+abcdp^2q-acq^2+acdq^2+ab^2cp^2q^2-ab^2cdp^2q^2 \\
&\vec{PI_4}=\tfrac{(1-a)d}{1+d}\vec{PA}
\end{aligned}
$$

另一方面 CD 的表示表示较长，记为 $f(a,b,c,d,p,q)=0$

$$CD^2=(\vec{PC}-\vec{PD})\otimes(\vec{PC}-\vec{PD})$$

将前面的表示代入得约束条件

另一方面，由 $\angle APB+\angle CPD=2\angle AMB$ 可得条件：

$$\frac{ad(b^2+c^2-b^2c^2-b^2p^2-c^2q^2+b^2c^2p^2q^2)(a-bp-ab^2p^2+b^3p^3-2cpq+2b^2cp^3q-ac^2q^2+2bpq^2-bc^2pq^2-ap^2q^2+ab^2p}{(1-b^2p^2-c^2q^2-p^2q^2+b^2p^2q^2+c^2p^2q^2)(2abc-2ab^3cp^2-ab^2q+ac^2q+ab^2c^2q-b^3pq-bc^2pq+b^3c^2pq+ab^2p^2q-2ab^2c^2p^2q+}$$

联立，可解出 d, 并得一等式

最后证明四内心共圆的式子含有该因式即可。

==

证明: 令

$$a=e^{iA},b=e^{iB},c=e^{iC},p=e^{i\angle BPC},q=e^{i\angle PBC}$$

我们可知各点的表示 (其中 M 为对角线交点):

$$\begin{aligned}
\vec{BA}&=\frac{b(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)}\vec{BC}\\
\vec{BD}&=\frac{b(1-c)(1+a-ab-abc)}{(1-bc)(1-abc)}\vec{BC}\\
\vec{BP}&=\frac{1-p^2q^2}{1-p^2}\vec{BC}\\
\vec{BM}&=\frac{(1+b)(1-c)(1+a-ab-abc)}{2(1-ac)(1-bc)}\vec{BC}
\end{aligned}$$

又令

$$z=e^{i\angle DPA},s=e^{i\angle BMC}$$

不难求出:

$$s^2=-\frac{(1-a-ab+abc)(1+c-bc-abc)}{(1+a-ab-abc)(1-c-bc+abc)}$$

而根据 $\angle BPC+\angle DPA=2\angle BMC$ 有 $pz=s^2$, 即得

$$pz=-\frac{(1-a-ab+abc)(1+c-bc-abc)}{(1+a-ab-abc)(1-c-bc+abc)}$$

我们只需要再设定一个角，即可根据角度关系，用 a,b,c,p,q,z,w 表示出其余的所有角:

不妨令 $w=e^{i\angle BAP}$, 则

$$\begin{aligned}
&\angle APB=\pi-\angle BAP-\angle ABP=\pi-\angle BAP-\angle B+\angle CBP \implies e^{i\angle APB}=-\frac{q}{bw}\\
&\angle PDA=\pi-\angle APD-\angle PAD=\pi-\angle APD-\angle A+\angle BAP \implies e^{i\angle PDA}=-\frac{w}{za}\\
&\angle PCD=\angle C-\angle PCB=\angle C-\pi+\angle BPC+\angle PBC \implies e^{i\angle PCD}=-cpq\\
&\angle CPD=2\pi-\angle BPC-\angle APB-\angle DPA \implies e^{i\angle CPD}=-\frac{bw}{pqz}
\end{aligned}$$

从而知各三角形的内心表示:

$$\begin{aligned}
\vec{AI_1}&=\frac{(b-q)w}{bw-q}\vec{AB}\\
\vec{BI_2}&=\frac{1+pq}{1+p}\vec{BC}\\
\vec{CI_3}&=\frac{pq(bcw+z)}{pqz-bw}\vec{CD}\\
\vec{DI_4}&=\frac{a-w}{a(1+z)}\vec{DA}
\end{aligned}$$

统一为以基向量 $\vec{BC}$ 表示, 则为

$$\begin{aligned}
\vec{BI_1}&=\frac{b(1-ab)(1-c)q(1-w)}{(1-a)(1-bc)(q-bw)}\vec{BC}\\
\vec{BI_2}&=\frac{1+pq}{1+p}\vec{BC}\\
\vec{BI_3}&=\frac{b(w-bcw-abcw+ab^2c^2w+cpqw-bcpqw-abcpqw+ab^2cpqw-pqz-apqz+abpqz+cpqz+acpqz-abc^2pqz)}{(1-bc)(1-abc)(bw-pqz)}\vec{BC}\\
\vec{BI_4}&=\frac{b(1-c)(1-ab-abc+a^2b^2c-aw+abw+abcw-ab^2cw+z-a^2z-abz+a^2bz-abcz+a^2bcz)}{(1-a)(1-bc)(1-abc)(1+z)}\vec{BC}
\end{aligned}$$

根据 z, w 的定义, 两个约束条件为:

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \frac{A-P}{D-P} : Conjugate[\frac{A-P}{D-P}] \\
w^2 &= \frac{P-A}{B-A} : Conjugate[\frac{P-A}{B-A}]
\end{aligned}
$$

如果 $pz=-1$, 那么四边形 $ABCD$ 的一对对角相等, 即 $a=c$ 或 $ab^2c=1$, 分情况讨论, 容易证明四内心共圆。

而如果 $pz \neq 1$, 则可由 (1),(3) 式解出 a, c 为其他参数的有理表示, 再由 (2) 式得到 z 的二次方程, 此时需证明四内心的交比为实数，也即交比与其共轭的比值等于 1。直接计算是很困难的, 不过我们可以利用代数技巧化简分式, 以下为此情形的主要计算过程 (Mathematica)，其中省略了较繁琐的讨论:

Clear[“Global*”];

$\text{let} = \{a \to \text{Exp}[i\angle\text{A}], b \to \text{Exp}[i\angle\text{B}], c \to \text{Exp}[i\angle\text{C}], p \to \text{Exp}[i\angle\text{BPC}], q \to \text{Exp}[i\angle\text{PBC}], z \to \text{Exp}[i\angle\text{DPA}], w \to \text{Exp}[i\angle\text{BAP}]\};$

$\text{specs} = \left\{a \to i, b \to i, c \to i, p \to e^{i\frac{7\pi}{12}}, q \to e^{i\frac{\pi}{6}}, z \to e^{i\frac{5\pi}{12}}, w \to e^{i\frac{\pi}{4}}\right\};$

$\text{conjs} = \left\{a \to \frac{1}{a}, b \to \frac{1}{b}, c \to \frac{1}{c}, p \to \frac{1}{p}, q \to \frac{1}{q}, z \to \frac{1}{z}, w \to \frac{1}{w}\right\};$

$\text{points} = \left\{A \to \frac{b(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)}, B \to 0, C \to 1, D \to \frac{b(1-c)(1+a-ab-abc)}{(1-bc)(1-abc)}, M \to \frac{(1+b)(1-c)(1+a-ab-abc)}{2(1-ac)(1-bc)}, P \to \frac{1-p^2q^2}{1-p^2}\right\};$

$\text{angleEQ} = \text{Factor}\left[pz - \text{Flatten}\left[\text{Factor}[\#/(\#/.\text{conjs})]\&/@\left(\left\{\frac{C-M}{B-M}/.\text{points}\right\}\right)\right][[1]]\right]//\text{Numerator};$

$\text{inners} = \text{Factor}\left[\left\{\text{I1} \to A + \frac{(b-q)w}{bw-q}(B-A), \text{I2} \to \frac{1+pq}{1+p}, \text{I3} \to C + \frac{pq(bcw+z)}{pqz-bw}(D-C), \text{I4} \to D + \frac{a-w}{a(1+z)}(A-D)\right\}/.\text{points}\right];$

$\text{zEQ} = \text{FactorList}\left[z^2 - \text{Flatten}\left[\text{Factor}[\#/(\#/.\text{conjs})]\&/@\left(\left\{\frac{A-P}{D-P}/.\text{points}\right\}\right)\right][[1]]\right][[-1]][[1]];$

$\text{wEQ} = \text{FactorList}\left[w^2 - \text{Flatten}\left[\text{Factor}[\#/(\#/.\text{conjs})]\&/@\left(\left\{\frac{P-A}{B-A}/.\text{points}\right\}\right)\right][[1]]\right][[-1]][[1]];$

(* a and c have a rational representation *)

$\text{asol} = \text{Solve}[\text{wEQ} == 0, a]//\text{Factor}//\text{Flatten};$

cEQ = Select[FactorList[angleEQ/.asol], FullSimplify[#[[1]]/.specs] == 0&][[1]][[1]];

$\text{csol} = \text{Solve}[\text{cEQ} == 0, c]//\text{Factor}//\text{Flatten};$

(* zEQ can be reduced to be a quadratic equation *)

tmp = Select[FactorList[zEQ/.asol], FullSimplify[#[[1]]/.specs] == 0&][[1]][[1]];

factors = Select[FactorList[tmp/.csol], FullSimplify[#[[1]]/.specs] == 0&];

zEQ = factors[[−1]][[1]];

(* to simplify a fraction by using zEQ *)

SimplifyFraction[fraction_]:=(

$\text{tmp} = \text{Factor}[J - \text{fraction}]//\text{Numerator};$

$m = \text{Exponent}[\text{tmp}, z];$

$x[\text{n\_}] := \text{Which}[n == 1, \text{tmp}, n > 1, \text{FactorList}[(x[n-1]/.z \to 0) * \text{zEQ} - (\text{zEQ}/.z \to 0) * x[n-1]][[-1]][[1]]];$

$\text{gcd} = \text{PolynomialGCD}[\text{Coefficient}[x[m], z * J], \text{Coefficient}[x[m+1], z * J]];$

$\text{tmpfactors} = \text{FactorList}\left[\text{Cancel}\left[\frac{\text{Coefficient}[x[m], z*J]}{\text{gcd}}\right] * x[m+1] - \text{Cancel}\left[\frac{\text{Coefficient}[x[m+1], z*J]}{\text{gcd}}\right] * x[m]\right];$

$\text{JEQ} = \text{Select}[\text{tmpfactors}, \text{Exponent}[\#[[1]], J] > 0\&][[1]][[1]];$

$\text{Jsol} = \text{Solve}[\text{JEQ} == 0, J]//\text{Factor}//\text{Flatten};$

$J/.\text{Jsol});$

inners = Factor[(inners/.asol)/.csol];

$\text{inners} = \{\text{I1} \to (\text{I1}/.\text{inners}), \text{I2} \to (\text{I2}/.\text{inners}), \text{I3} \to \text{SimplifyFraction}[(\text{I3}/.\text{inners})], \text{I4} \to \text{SimplifyFraction}[(\text{I4}/.\text{inners})]\};$

$\text{cross} = \text{Factor}\left[\left(\frac{\text{I3}-\text{I2}}{\text{I3}-\text{I1}}\frac{\text{I4}-\text{I1}}{\text{I4}-\text{I2}}\right)/.\text{inners}\right];$

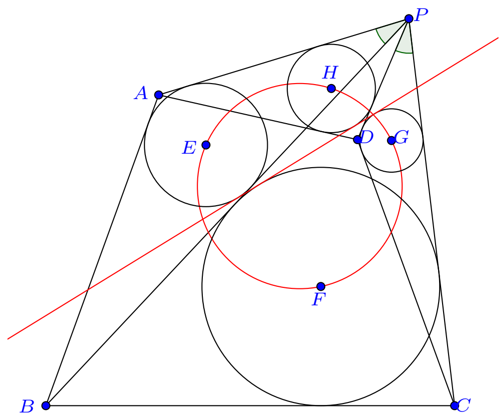
(* target should be 1 if four incenters on a circle *)

```
target = Factor[cross/(cross/.conjs)];
factors = FactorList[target];
Print["factors status: ", {Length[#[[1]]], Exponent[#[[1]], z], #[[2]]}&/@factors];
groups = {
factors[[1]], factors[[2]], factors[[3]],
{SimplifyFraction[factors[[4]][[1]]/factors[[7]][[1]]], 1},
{SimplifyFraction[factors[[6]][[1]]/factors[[5]][[1]]], -1},
{SimplifyFraction[factors[[8]][[1]]/factors[[11]][[1]]], -1},
{SimplifyFraction[factors[[10]][[1]]/factors[[9]][[1]]], 1}};
target = Factor[Times@@Power@@@groups];
factors = FactorList[target];
Print["factors status: ", {Length[#[[1]]], Exponent[#[[1]], z], #[[2]]}&/@factors];
groups = {
factors[[1]], factors[[2]], factors[[3]], factors[[4]], factors[[5]],
{SimplifyFraction[factors[[-4]][[1]]/factors[[-3]][[1]]], 1},
{SimplifyFraction[factors[[-1]][[1]]/factors[[-2]][[1]]], -1}};
target = Factor[Times@@Power@@@groups];
Print["last result: target = ", target];
```


四内心共圆问题的推广二

圆外切四边形 $ABCD$, P 是四边形外的一点, 若 $\angle APB = \angle CPD$, 则四个小三角形 $\triangle APB, \triangle BPC, \triangle CPD, \triangle DPA$ 的内心共圆。

并且, 这四个内切圆的有一条公共切线。



证明:

令

$$z = e^{i\angle APB} = e^{i\angle CPD}, \quad w = e^{i\angle APD}, \quad b = e^{i\angle PBA}, \quad c = e^{i\angle PCD}, \quad d = e^{i\angle PDA}$$

则

$$
\begin{aligned}
\vec{PB} &= \frac{1-b^2z^2}{1-b^2}\,\vec{PA}\\
\vec{PD} &= \frac{1-d^2w^2}{1-d^2}\,\vec{PA}\\
\vec{PC} &= \frac{1-c^2z^2}{1-c^2}\,\vec{PD} = \frac{1-c^2z^2}{1-c^2}\frac{1-d^2w^2}{1-d^2}\,\vec{PA}
\end{aligned}
$$

从而可将四边形 $ABCD$ 的其中三边有理表示

$$
\begin{aligned}
AB &= \frac{b(1-z^2)}{(1-b^2)z}PA\\
CD &= \frac{c(1-d^2w^2)(1-z^2)}{(1-c^2)(1-d^2)wz}PA\\
DA &= \frac{d(1-w^2)}{(1-d^2)w}PA
\end{aligned}
$$

由对边之和相等 $AB+CD=BC+AD$, 即得约束方程

$$
b-d+cw-cd^2w+dw^2-bd^2w^2-cz+bcdz-bwz+bd^2wz-bcdw^2z+cd^2w^2z=0
$$

解出

$$
z=\frac{b-d+cw-cd^2w+dw^2-bd^2w^2}{c-bcd+bw-bd^2w+bcdw^2-cd^2w^2}
$$

其余的边长

$$
\begin{aligned}
PB &= \frac{1-b^2z^2}{z(1-b^2)}PA\\
PC &= \frac{(1-d^2w^2)(1-c^2z^2)}{(1-c^2)(1-d^2)wz}PA\\
PD &= \frac{1-d^2w^2}{w-d^2w}PA
\end{aligned}
$$

从而由内心的重心坐标式知，四边形的各三角形内心均可有理表示:

记 $\triangle PAB,\triangle PBC,\triangle PCD,\triangle PDA$ 的内心分别为 I_1,I_2,I_3,I_4, 则

$$
\begin{aligned}
\vec{PI_1} &= \frac{(1+dw)(b^2+c-bd-bcd+bw+bcw-b^2dw-cdw)}{(1+b)(c-bcd+bw-bd^2w+bcdw^2-cd^2w^2)}\,\vec{PA}\\
\vec{PI_2} &= \frac{(1-d^2w^2)(b^2+c-bd-bcd+bw+bcw-b^2dw-cdw)(c+bc+bw+c^2w+bdw+c^2dw+cdw^2+bcdw^2)}{(1+b)(1+c)(c-bcd+bw-bd^2w+bcdw^2-cd^2w^2)^2}\,\vec{PA}\\
\vec{PI_3} &= \frac{(1-d^2w^2)(c+bc+bw+c^2w+bdw+c^2dw+cdw^2+bcdw^2)}{(1+c)(1+d)(c-bcd+bw-bd^2w+bcdw^2-cd^2w^2)}\,\vec{PA}\\
\vec{PI_4} &= \frac{1+dw}{1+d}\,\vec{PA}
\end{aligned}
$$

由此计算即知

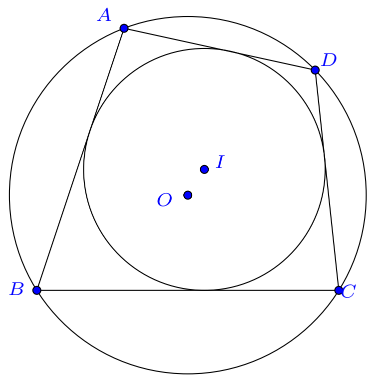
$$
\operatorname{Im}\left(\frac{I_1-I_3}{I_1-I_4}\frac{I_2-I_4}{I_2-I_3}\right)=0
$$

这就证明了四内心共圆。

感兴趣的读者可导出伪外接圆，伪内切圆，对角线交点三角形，对角线交点三角形伪外接圆，对角线交点三角形伪内切圆的有理表示

2.5.5 双心四边形

有理表示



双心四边形既是圆外切四边形，也是圆内接四边形，由圆外切四边形的表示 (XX), 及 $ac=-1$ 即得表示：

$$\vec{BA}=\frac{b(1-c)(b+c)}{(1+c)(1-bc)}\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{b(1-c)(-1+b+c+bc)}{(1+b)c(1-bc)}\vec{BC}$$

边长

$$AB=\frac{(1-c)(b+c)}{(1+c)(1-bc)}BC,\quad CD=\frac{(1-b)(b+c)}{(1+b)(1-bc)}BC,\quad DA=-\frac{(1-b)(1-c)}{(1+b)(1+c)}BC$$

圆心、半径及圆心距

内切圆圆心和半径为：

$$\vec{BI}=\frac{b(1-c)}{1-bc}\vec{BC},\quad r=\frac{i(1-b)(1-c)}{2(1-bc)}BC$$

外接圆圆心和半径为:

$$\vec{BO}=\frac{bc(1-b-c-bc)}{(1+b)(1+c)(1-bc)}\vec{BC},\quad R=\sqrt{\frac{bc(1+b+c-bc)(1-b-c-bc)}{(1+b)^2(1+c)^2(1-bc)^2}}BC$$

两圆圆心距离的平方为:

$$OI^2=-\frac{bc(1+b-c+bc)(1-b+c+bc)}{(1+b)^2(1+c)^2(1-bc)^2}BC^2$$

由此可得著名的四边形 Fuss 公式:

$$\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}$$

我们将在圆锥曲线一章中给出一般双心 n 边形的此类关系式。

其他性质

读者不难由双心四边形的表示得到它的一些其他性质，例如

$$\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IC^2}=\frac{1}{IB^2}+\frac{1}{ID^2}$$

2.5.6 对角线互相垂直的四边形

根据

$$\mathrm{Re}\left(\frac{A-C}{B-D}\right)=0$$

可得

$$1+a^2b^2-c^2-a^2b^2c^2-2a^2b\lambda+2bc^2\lambda-\lambda^2+a^2\lambda^2-b^2c^2\lambda^2+a^2b^2c^2\lambda^2=0$$

由此消去 a 即得对角线互相垂直的四边形的表示：

$$\vec{BA}=\lambda b\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{b(1-c^2)(1-\lambda b)}{\lambda+\lambda b^2c^2-b-bc^2}\,\vec{BC}$$

四线共点题目

凸四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直, $\triangle ABD,\triangle BCA,\triangle CDB,\triangle DAC$ 的外心分别为 O_1,O_2,O_3,O_4, 求证: AO_1,BO_2,CO_3,DO_4 四线共点。

证明：根据外心公式计算得到

$$\begin{aligned}
\vec{BO_1}&=\frac{b(1-b\lambda)(b^2-b^2c^2-2b\lambda+\lambda^2+b^2c^2\lambda^2)}{(1+b^2-2b\lambda)(\lambda+b^2c^2\lambda-b-bc^2)}\,\vec{BC}\\
\vec{BO_2}&=\frac{b(\lambda-b)}{(1-b^2)}\,\vec{BC}\\
\vec{BO_3}&=\frac{bc^2(1-b\lambda)}{b+bc^2-\lambda-b^2c^2\lambda}\,\vec{BC}\\
\vec{BO_4}&=\frac{b(bc^2-bc^4+b^2\lambda-b^2c^2\lambda+2b^2c^4\lambda-2b\lambda^2-bc^2\lambda^2-b^3c^4\lambda^2+\lambda^3+b^2c^2\lambda^3)}{(b-bc^2-\lambda+b^2c^2\lambda)(b+bc^2-\lambda-b^2c^2\lambda)}\,\vec{BC}
\end{aligned}$$

交点 AO_1,BO_2 的交点 M 为：

$$\vec{BM}=\frac{b(\lambda+bc^2-b-b^2c^2\lambda)}{(1+b^2c^2)(1-b\lambda)}\,\vec{BC}$$

不难验证它也在直线 CO_3 和 DO_4 上，因而结论成立。

2.5.7　对边积相等的四边形

有理表示

对于满足 $AB\cdot CD=BC\cdot DA$ 的四边形 $ABCD$，我们令

$$s=\cot\angle BAC,\quad t=\cot\angle ACB,\quad p=\cot\angle BDC,\quad q=\cot\angle DCB$$

则

$$\vec{BA}=\frac{1+is}{1-it}\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{1+ip}{1-iq}\,\vec{BC}$$

根据 $AB\cdot CD=BC\cdot DA$ 即得方程

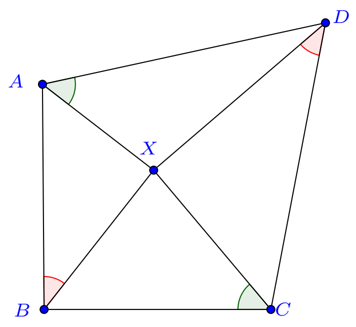
$$2p+2q-s+p^2s+2pqs-t-p^2t=0$$

这是关于 q 的一次方程, 我们可以解出它, 从而得到对边之积相等的四边形表示:

$$\vec{BA}=\frac{1+is}{1-it}\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{2(1+ps)}{2-is+ps-it-pt}\,\vec{BC}\tag{2.69}$$

2018 年 IMO 第 6 题

凸四边形 $ABCD$ 满足 $AB\cdot CD=BC\cdot DA$, 点 X 在四边形 $ABCD$ 内部, 且 $\angle XAD=\angle XCB,\angle XDC=\angle XBA$, 则 $\angle DXA+\angle BXC=180°$。



证明: 根据四边形 $ABCD$ 的表示, 再设

$$\overrightarrow{BX}=\frac{1+iu}{1-iv}\overrightarrow{BC}$$

由角度相等关系

$$\operatorname{Im}\left(\frac{X-A}{D-A}\frac{B-C}{X-C}\right)=0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{C-D}{X-D}\frac{X-B}{A-B}\right)=0$$

即可解出

$$u=\frac{-1+pt}{p+t},\quad v=\frac{2+2ps+s^2+p^2s^2-2pt+2st+t^2+p^2t^2}{2(1+ps)(p+t)}$$

另一组解在四边形外部, 这只需要取一组特殊值 (例如 $s=1,t=2,p=1$) 验证即可。[1]

因而

$$\overrightarrow{BX}=\frac{2(1+ps)(1+it)}{2+2ps+s^2+2st+t^2-ips^2+2it-ipt^2}\overrightarrow{BC}$$

由此计算即知

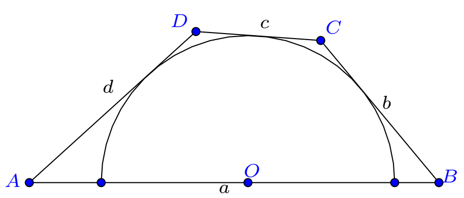
$$\operatorname{Im}\left(\frac{A-X}{D-X}\frac{C-X}{B-X}\right)=0$$

又因为 $\angle DXA$ 和 $\angle BXC$ 的取值范围均在 $(0,\pi)$ 之间, 所以必有 $\angle DXA+\angle BXC=180°$。

2.5.8 半圆外切四边形

半圆外切四边形的半径问题

四边形 $ABCD$, 边 AB 经过圆 O 的中心, 其余三边与圆 O 相切, 记 $a=AB,b=BC,c=CD,d=DA$, 求圆 O 的半径 r



解: 令 z,w 分别为内角 C,D 的单位复数: $z=e^{iC},w=e^{iD}$, 则

$$\overrightarrow{CB}=\frac{b}{c}z\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}=\frac{w-\frac{d}{c}}{w}\overrightarrow{CD}$$

---

[1] 严格的讨论需要利用到 $ABCD$ 为凸四边形:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{D-A}{B-A}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{A-B}{C-B}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{B-C}{D-C}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{C-D}{A-D}\right)>0$$

以及 X 在 $ABCD$ 内部的条件:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{X-A}{B-A}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{X-B}{C-B}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{X-C}{D-C}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{X-D}{A-D}\right)>0$$

圆 O 为 $\angle C, \angle D$ 的角平分线交点, 由此求得

$$\vec{CO} = \frac{z\,(1-w)}{1-zw}\,\vec{CD}$$

根据 ABO 三点共线可得条件

$$dw^3z^2(c-bz)+w^2z(c^2-bcz-c^2z+bdz-cdz+bcz^2)+w(bc-bcz-c^2z+bdz-cdz+c^2z^2)+d(cz-b)=0$$

由 AB 长度又得到

$$dw^2z(c-bz)+w(bc+a^2z-b^2z-c^2z-d^2z+bcz^2)+d(cz-b)=0$$

圆 O 的半径

$$r=c\mathrm{Im}\left(\frac{z\,(1-w)}{1-zw}\right)=\frac{ic(1-w)(1-z)}{2(1-wz)}$$

以上几式联立，消去参数 z, w 即可得到关于 r 的方程：

$$\begin{aligned}&16(b-c+d)^2(b+c+d)^2r^4\\&+8(a-b+c-d)(a+b-c+d)(a^2b^2-b^4+a^2c^2+2b^2c^2-c^4-6a^2bd+a^2d^2+2b^2d^2+2c^2d^2-d^4)r^2\\&+(a+b-c-d)(a-b+c-d)^2(a+b+c-d)(a-b-c+d)(a+b-c+d)^2(a-b+c+d)=0\end{aligned}$$

半切情形的四边形问题

AB, AD, CD 是圆 O 的切线, 点 K 在圆上且 OK 垂直于 BC, 求证: $BE+CF=EF$

证明: 设 AD 与圆相切于点 G, 令

$$\vec{BG}=\frac{1+is}{1-it}\,\vec{BC}$$

于是经过 B, C, G 三点的外接圆上的点可表示为:

$$\vec{BP}=\frac{1+is}{1-iu}\,\vec{BC}$$

在 P 点处的切向量为:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d}{du}\,\vec{BP}=\frac{i(1+is)}{(1-iu)^2}\,\vec{BC}$$

在 B 处的切向量为:

$$\lim_{u\to\infty}u^2\boldsymbol{v}=(-i+s)\,\vec{BC}$$

在 C 处的切向量为:

$$\lim_{u\to -s}\boldsymbol{v}=\frac{1}{-i+s}\,\vec{BC}$$

在 G 处的切向量为:

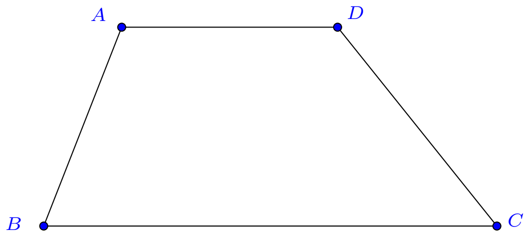
$$\lim_{u\to t}\boldsymbol{v}=\frac{i(1+is)}{(1-it)^2}\,\vec{BC}$$

进而求得

$$\begin{aligned}\vec{BD}&=\frac{(1+is)(2-is+it)}{2-2st}\,\vec{BC}\\\vec{BK}&=\frac{1}{2}(1+is-i\sqrt{1+s^2})\,\vec{BC}\\\vec{BE}&=\frac{1+s^2-(s+t)\sqrt{1+s^2}}{2(1-2st-t^2)}\,\vec{BC}\\\vec{BF}&=\frac{2+s^2-2st-t^2-(s+t)\sqrt{1+s^2}}{2(1-2st-t^2)}\,\vec{BC}\end{aligned}$$

于是 $BE+CF=EF=\frac{1}{2}BC$

2.5.9　梯形

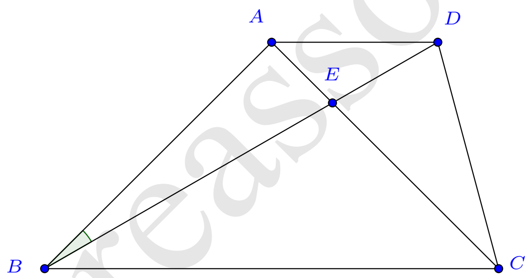


梯形的底边相互平行，因此 $ab=-1$, 于是表示为

$$\vec{BA}=b\lambda\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{b-bc^2-\lambda+b^2\lambda}{b(1-c^2)}\,\vec{BC}$$

梯形题

梯形 $ABCD$，$AD//BC$, 对角线交点为 E, $BC=BD, CD=CE, \angle ABD=15°$. 求证：$AB=AC, AB\perp AC$



证明：令 $a=e^{iA}, b=e^{iB}, c=e^{iC}$, 则四边形 $ABCD$ 的顶点的表示为

$$\vec{BA}=\lambda b\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{b(a^2b-a^2bc^2+\lambda-a^2\lambda)}{(1-a^2b^2c^2)}\,\vec{BC}$$

由 $AD//BC$ 知

$$ab=-1$$

由 $BC=BD$ 又可解出

$$\lambda=\frac{a(1-c^4)}{c^2(1-a^2)}$$

再根据 $\angle ABD=15°$ 得到

$$c^4=a^2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

于是有

$$\vec{BA}=\frac{c^4-1}{c^2+e^{i\frac{5\pi}{6}}c^6}\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=-\frac{1}{c^2}\,\vec{BC}$$

梯形的对角线交点

$$\vec{BE}=-\frac{1+(-1)^{5/6}c^4}{(1-c^2)(c^2-(-1)^{5/6}c^4)}\,\vec{BC}$$

由 $CD=CE$ 得到方程：

$$1-e^{i\frac{\pi}{6}}-ic^2+ic^6+(1+e^{i\frac{5\pi}{6}})c^8=0$$

这个方程的有效解是：

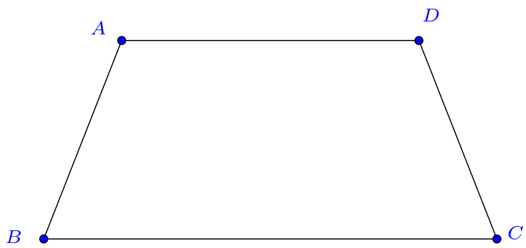
$$c^2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

其余的解并不能使得 $|c| = 1$ 或使得 $ABCD$ 成为逆时针四边形。
从而

$$\vec{BA} = \frac{1}{2}(1+i)\,\vec{BC}$$

由此即知 $AB = AC, \quad AB \perp AC$。

2.5.10 等腰梯形



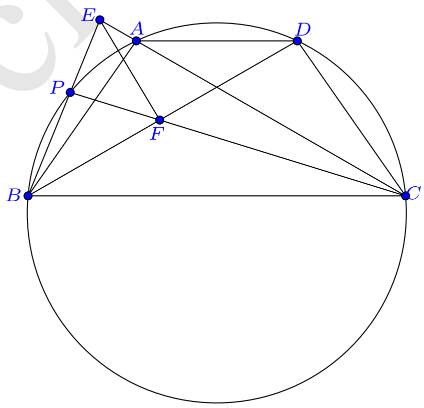
等腰梯形同一底上的的两角相等，因此 $ab = -1, c = b$, 于是表示为

$$\vec{BA} = b\lambda\,\vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b-\lambda}{b}\,\vec{BC}$$

等腰梯形也属于圆内接四边形。

等腰梯形题

等腰梯形 $ABCD, AB = CD = \frac{1}{2}BC, P$ 是外接圆上任意一点, PB 与 AC 相交于 E, PC 与 BD 相交于 F, 则 $|AE+EF| = DF$ 或 $|AE - EF| = DF$



证明：令 $b = e^{iB}$, 由 $AB = CD = \frac{1}{2}BC$ 以及 $\angle C = \angle B$ 可得顶点的表示

$$\vec{BA} = \frac{b}{2}\,\vec{BC}, \quad \vec{BD} = (1 - \frac{1}{2b})\,\vec{BC}$$

其外接圆上的点可表示为

$$\vec{BP} = \frac{b}{2-2t+bt}\,\vec{BC}$$

由此求得 PB 与 AC 的交点

$$\vec{BE} = \frac{-2b-t+2bt}{-4+3t}\,\vec{BC}$$

以及 PC 与 BD 的交点

$$\vec{BF} = \frac{2(-1+2b)}{-2+8b-2b^2+2t-5bt+2b^2t}\,\vec{BC}$$

然后我们将结论所涉及的三边边长计算出来

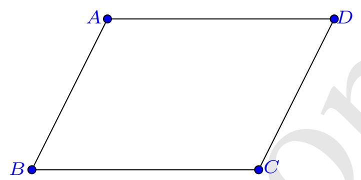
$$AE^2 = \frac{(2-b)(-1+2b)t^2}{4b(4-3t)^2}BC^2$$
$$EF^2 = \frac{(2-b)(-1+2b)(2-2b-2t+bt)^2(2-2b-t+2bt)^2}{b(4-3t)^2(-2+8b-2b^2+2t-5bt+2b^2t)^2}BC^2$$
$$DF^2 = \frac{(2-b)(-1+2b)(2-4b+2b^2-2t+5bt-2b^2t)^2}{4b(-2+8b-2b^2+2t-5bt+2b^2t)^2}BC^2$$

这三式除去公因子 $\frac{(2-b)(-1+2b)}{b}BC^2$ 后，剩余部分为平方式，并且可知

$$\frac{t}{2(4-3t)} + \frac{(2-2b-2t+bt)(2-2b-t+2bt)}{(4-3t)(-2+8b-2b^2+2t-5bt+2b^2t)} = \frac{2-4b+2b^2-2t+5bt-2b^2t}{2(-2+8b-2b^2+2t-5bt+2b^2t)}$$

因而欲证关系式成立。

2.5.11 平行四边形



平行四边形的对边相互平行，因此 $ab=-1, bc=-1$，于是表示为

$$\vec{BA} = b\lambda\,\vec{BC},\quad \vec{BD} = (1+b\lambda)\,\vec{BC}$$

题目 1

平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 O，过 O 作 $\triangle BOC$ 外接圆的切线交 CB 于点 F，直线 BC 与 $\triangle FOD$ 的外接圆不同于 F 的交点为 G，证明：$AG=AB$。

证明：令

$$\vec{BA} = \frac{1+is}{1-it}\,\vec{BC}$$

则

$$\vec{BD} = \left(1+\frac{1+is}{1-it}\right)\vec{BC}$$
$$\vec{BO} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1+is}{1-it}\right)\vec{BC}$$
$$\vec{BF} = \frac{4+s^2-2st+t^2}{4-4st}\,\vec{BC}$$
$$\vec{BG} = \frac{2-2st}{1+t^2}\,\vec{BC}$$

从而计算知

$$AG = AB = \sqrt{\frac{1+s^2}{1+t^2}}BC$$

题目 2

在平行四边形 $ABCD$ 的 AB, BC 边上分别取点 K, L 使得 $\angle AKD = \angle CLD$，求证：$\triangle BKL$ 的外心与 A, C 等距。

证明：令

$$\vec{BA} = \frac{1+is}{1-it}\,\vec{BC}$$

则

$$\overrightarrow{BD} = \left(1 + \frac{1+is}{1-it}\right)\overrightarrow{BC}$$

又令

$$\overrightarrow{BK} = \lambda\,\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BL} = \mu\,\overrightarrow{BC}$$

根据 $\angle AKD = \angle CLD$,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{A-K}{D-K}\frac{C-L}{D-L}\right) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{-s^2+t^2+\lambda+s^2\lambda}{1+t^2}$$

进而计算出 $\triangle BKL$ 的外心 O 为

$$\overrightarrow{BO} = \frac{(1+is)(-s+t+i\lambda+s\lambda)}{2(i+t)}\overrightarrow{BC}$$

$$OA = OC = \sqrt{\frac{(1+s^2)(4+s^2-2st+t^2-4\lambda-2s^2\lambda+2st\lambda+\lambda^2+s^2\lambda^2)}{4(1+t^2)}}BC$$

2.5.12 四边形的面积

根据上面的表示, 利用格林公式知, 四边形的面积为

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BC}\otimes\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\otimes\overrightarrow{BA}\right) \\ &= i\frac{1-a^2b^2-c^2+a^2b^2c^2-2b\lambda+2a^2b\lambda+2bc^2\lambda-2a^2bc^2\lambda+\lambda^2-a^2\lambda^2-b^2c^2\lambda^2+a^2b^2c^2\lambda^2}{4(1-a^2b^2c^2)}BC^2 \end{aligned} \tag{2.70}$$

继续化简为三角函数表示, 则是

$$\begin{aligned} S &= \frac{\lambda^2\sin A\sin(A+D)+2\lambda\sin A\sin C+\sin C\sin(C+D)}{2\sin D}BC^2 \\ &= \frac{AB^2\sin A\sin(A+D)+2AB\cdot BC\sin A\sin C+BC^2\sin C\sin(C+D)}{2\sin D} \end{aligned} \tag{2.71}$$

贝利契纳德公式

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4AC^2\cdot BD^2-\left(AB^2-BC^2+CD^2-DA^2\right)^2} \tag{2.72}$$

这也可以由四边形的一阶有理表示证明。

布雷特施奈德公式

应用 (2,3) 式, 以及

$$\cos^2\frac{A+C}{2} = \left(\frac{\sqrt{ac}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{ac}}\right)^2 = \frac{(1+ac)^2}{4ac}$$

我们容易证明布雷特施奈德公式:

记 $l = \frac{AB+BC+CD+DA}{2}$, 则

$$S = \sqrt{(l-AB)(l-BC)(l-CD)(l-DA)-AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA\cdot\cos^2\frac{A+C}{2}} \tag{2.73}$$

俄罗斯面积公式

在所有四边形的面积公式中, 被称为" 机器杀手" 的俄罗斯面积公式比较有名的:

$$4S = \frac{(AB+BC+CD+DA)^2}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{D}{2}} - \frac{(AB+CD-BC-DA)^2}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}} \tag{2.74}$$

代入上面边长的表示 (2), 以及

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1-a}{1+a}i,\quad \tan\frac{B}{2}=\frac{1-b}{1+b}i,\quad \tan\frac{C}{2}=\frac{1-c}{1+c}i,\quad \tan\frac{D}{2}=\frac{1-d}{1+d}i$$

其中 $d=e^{iD}$, 并根据四边形内角和为 2π 知 $abcd=1$。

化简即知 (6) 与 (3) 是等价的。

圆内接四边形面积

圆内接四边形的对角之和为 π, 从而由布雷特施奈德公式即可给出：

$$S=\sqrt{(l-AB)(l-BC)(l-CD)(l-DA)} \tag{2.75}$$

圆外切四边形面积

圆外切四边形的对边之和相等, 因而

$$l-AB=CD,\quad l-BC=DA,\quad l-CD=AB,\quad l-DA=BC$$

从而根据布雷特施奈德公式即可导出

$$S=\sqrt{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}\cdot\sin\frac{A+C}{2} \tag{2.76}$$

读者也可根据边长的表示及

$$\sin\frac{A+C}{2}=\frac{1}{2i}(\sqrt{ac}-\frac{1}{\sqrt{ac}})$$

按照前述方法予以证明。

双心四边形面积

依据圆外切四边形的面积公式，由 $A+C=\pi$ 即得

$$S=\sqrt{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA} \tag{2.77}$$

2.5.13　顶点三角形的内切圆

我们令

$$z=e^{i\angle BAC},b=e^{iB},c=e^{iC},w=e^{i\angle BDC}$$

则四边形可表示为:

$$\vec{BA}=\frac{1-z^2b^2}{1-z^2}\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{c^2-1}{c^2(1-w^2)}\vec{BC}$$

并且各边边长为:

$$AB=\frac{1-b^2z^2}{b-bz^2}BC,\quad CD=\frac{1-c^2w^2}{c-cw^2}BC,\quad AC=\frac{(-1+b^2)z}{b(-1+z^2)}BC,\quad BD=\frac{(-1+c^2)w}{c(-1+w^2)}BC$$

$$DA=\sqrt{\frac{(1-w^2+b^2w^2-b^2c^2w^2-b^2z^2+b^2c^2w^2z^2)(1-c^2w^2-z^2+c^2z^2-b^2c^2z^2+b^2c^2w^2z^2)}{b^2c^2(1-w)^2(1+w)^2(1-z)^2(1+z)^2}}BC$$

为使得 DA 表示有理化, 我们令 $a=e^{iA}$, 则 [①]

$$1-a^2c^2-c^2w^2+a^2c^2w^2-a^2b^2c^2w^2+a^2b^2c^4w^2-z^2+c^2z^2-b^2c^2z^2+a^2b^2c^2z^2+b^2c^2w^2z^2-a^2b^2c^4w^2z^2=0 \tag{2.78}$$

[①] 选取任一与 DA 边相关的角度均可使得 DA 边有理化

并由此得到

$$DA = \frac{a(1-b^2)(1-b^2c^2z^2)}{b(1-a^2b^2c^2)(1-z^2)}BC$$

记 $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ 的内切圆圆心分别为 I_1, I_2, I_3, I_4, 半径 r_1, r_2, r_3, r_4。

根据内心的重心坐标式, 并利用上面的关系式化简, 可得

$$\begin{aligned}
&\vec{BI_1} = \frac{1+bz}{1+z}\vec{BC}, \quad r_1 = \frac{i(1-b)(1+bz)}{2b(1+z)}BC \\
&\vec{BI_2} = \frac{c-1}{c(1+w)}\vec{BC}, \quad r_2 = \frac{i(1-c)(1+cw)}{2c(1+w)}BC \\
&\vec{BI_3} = \frac{1+abc-az+ab^2z-b^2z^2-abcz^2}{(1+abc)(1-z^2)}\vec{BC}, \quad r_3 = \frac{i(1-b^2)(z-a)(1+bcz)}{2b(1+abc)(1-z^2)}BC \\
&\vec{BI_4} = \frac{(1-abcw)(1-a^2+a^2b^2-a^2b^2c^2-b^2z^2+a^2b^2c^2z^2)}{(1+a)(1-a^2b^2c^2)(1-z^2)}\vec{BC}, \\
&r_4 = \frac{i(c^2-1)(1+bcw)(1-abcw)}{2(1+a)bc^2(1-w^2)}BC
\end{aligned}$$

由此, 我们可以证明 XX 的逆命题:

1. 若凸四边形 $ABCD$ 四个三角形的内切圆圆心 $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$, 则四边形内接于圆。(这一逆命题似乎不对！)
2. 若凸四边形 $ABCD$ 四个三角形的内切圆半径 $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = 0$, 则四边形内接于圆。

2.5.14 对角线交点三角形的内切圆

四边形对角线交点为

$$\vec{BM} = \frac{1-b^2z^2}{1-b^2c^2w^2z^2}\vec{BC}$$

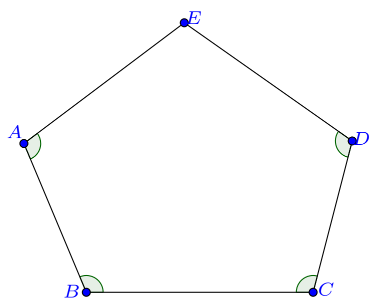
记 $\triangle MAB, \triangle MBC, \triangle MCD, \triangle MDA$ 的内切圆圆心分别为 I_5, I_6, I_7, I_8, 半径 r_5, r_6, r_7, r_8。

同上类似地，可求出

$$\begin{aligned}
\vec{BI_5} &= \frac{(1-b^2z^2)}{(1+z)(1+bcwz)}\vec{BC}, \quad r_5 = \frac{i(1+bcw)(1-b^2z^2)}{2b(1+z)(1+bcwz)}BC \\
\vec{BI_6} &= \frac{1+bz}{1-bcwz}\vec{BC}, \quad r_6 = \frac{i(1+cw)(1+bz)}{2(-1+bcwz)}BC \\
\vec{BI_7} &= \frac{c+cw+bz+bc^2wz}{c(1+w)(1+bcwz)}\vec{BC}, \quad r_7 = \frac{i(1-c^2w^2)(1+bcz)}{2c(1+w)(1+bcwz)}BC \\
\vec{BI_8} &= -\frac{(1-c^2)(1-abcw)(1+abcw-az-bcwz)}{(1-a^2)c^2(1-w^2)(1-bcwz)}\vec{BC} \\
r_8 &= \frac{i(1-b^2)(1-abcw)(z-a)(1-b^2c^2z^2)}{2b(1-a^2b^2c^2)(1-z^2)(1-bcwz)}BC
\end{aligned}$$

2.6 五边形

五边形的表示



若令

$$a=e^{iA},b=e^{iB},c=e^{iC},d=e^{iD},\lambda=\frac{AB}{BC},\mu=\frac{CD}{BC}$$

就可以得到五边形的一个表示:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA}&=\lambda b\,\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BD}&=\frac{c-\mu}{c}\,\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{BE}&=\frac{b(a^2b-a^2bc^2d^2+\lambda-a^2\lambda-a^2bc\mu+a^2bcd^2\mu)}{(1-abcd)(1+abcd)}\,\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

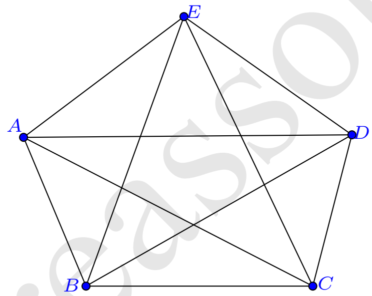
它使得五边边长均可有理表示。

对于一般的 n 边形, 均可以利用其中 $(n-1)$ 个内角及另外 $(n-3)$ 个实参进行表示, 使得各边边长有理化, 从而给计算带来相当的便利。

高斯五边形定理

给定凸五边形 $ABCDE$, 已知三角形 ABC 的面积为 a, 三角形 BCD 的面积为 b, 三角形 CDE 的面积为 c, 三角形 DEA 的面积为 d, 三角形 EAB 的面积为 e。

设五边形 $ABCDE$ 的面积为 S, 则 $S^2-(a+b+c+d+e)S+ab+bc+cd+ae+de=0$



证明：考虑以 $\overrightarrow{BC}$ 为基，其余各顶点设为

$$\overrightarrow{BA}=(s+it)\,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}=(p+iq)\,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}=(u+iv)\,\overrightarrow{BC}$$

利用面积公式可得

$$\begin{aligned}
S_{ABC}&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{BA}\otimes\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}tBC^2=a\\
S_{BCD}&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{CB}\otimes\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{2}qBC^2=b\\
S_{CDE}&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{DC}\otimes\overrightarrow{DE}\right)=\frac{1}{2}(q-qu-v+pv)BC^2=c\\
S_{DEA}&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{ED}\otimes\overrightarrow{EA}\right)=\frac{1}{2}(qs-pt-qu+tu+pv-sv)BC^2=d\\
S_{EAB}&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{AE}\otimes\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}(tu-sv)BC^2=e
\end{aligned}$$

多边形的面积为

$$\begin{aligned}
S&=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overrightarrow{BA}\otimes\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BB}\otimes\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\otimes\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\otimes\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BE}\otimes\overrightarrow{BA})\\
&=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overrightarrow{BC}\otimes\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\otimes\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BE}\otimes\overrightarrow{BA})\\
&=\frac{1}{2}(q-qu+tu+pv-sv)BC^2
\end{aligned}$$

以上方程联立消元 t,q,u,v,s 即得

$$S^2-(a+b+c+d+e)S+ab+bc+cd+ae+de=0$$

2.7 六边形

等面积题目

在凸六边形 $ABCDEF$ 中, 对角线 AD,BE,CF 交于同一点 M, $\triangle ABM,\triangle BCM,\triangle CDM,\triangle DEM,\triangle EFM$ 和 $\triangle FAM$ 都是锐角三角形, 并且这些三角形的外心在同一个圆上, 求证：四边形 $ABDE,BCEF$ 和 $CDFA$ 的面积相同。

证明：令 $b=e^{i\angle AMB},\quad c=e^{i\angle AMC}$, 则其它点可表示为:

$$\vec{MB}=\lambda b\,\vec{MA},\quad \vec{MC}=\mu c\,\vec{MA},\quad \vec{MD}=\nu\,\vec{MA},\quad \vec{ME}=\varsigma b\,\vec{MA},\quad \vec{MF}=\eta c\,\vec{MA}$$

其中 $\lambda,\mu,\nu,\varsigma,\eta$ 均为实数。

根据三角形的外心表示，求出 $\triangle ABM,\triangle BCM,\triangle CDM,\triangle DEM,\triangle EFM$ 和 $\triangle FAM$ 的外心:

$$\begin{aligned}
\vec{MO_1}&=\frac{b(\lambda-b)}{(1-b)(1+b)}\vec{MA}, & \vec{MO_2}&=\frac{bc(\mu b-\lambda c)}{(b-c)(b+c)}\vec{MA}\\
\vec{MO_3}&=\frac{c(\mu-c\nu)}{(1-c)(1+c)}\vec{MA}, & \vec{MO_4}&=\frac{b(\zeta-b\nu)}{(1-b)(1+b)}\vec{MA}\\
\vec{MO_5}&=\frac{bc(\eta b-\zeta c)}{(b-c)(b+c)}\vec{MA}, & \vec{MO_6}&=\frac{c(\eta-c)}{(1-c)(1+c)}\vec{MA}
\end{aligned}$$

根据六心共圆, 我们可列出三个方程，其中仅有解：

$$\zeta=\frac{-b+bc^2+b^2\lambda-c^2\lambda+b\nu-bc^2\nu}{(b-c)(b+c)},\quad \eta=\frac{-c+b^2c+b^2\mu-c^2\mu+c\nu-b^2c\nu}{(b-c)(b+c)}$$

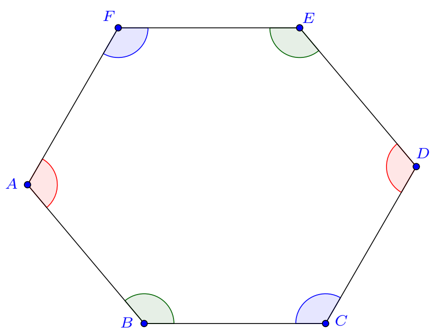
使得凸六边形的各顶点不重合，也使得各三角形的外心不发生重合。

由此即可进一步计算出

$$S_{ABDE}=S_{BCEF}=S_{CDFA}=\frac{i(1-b^2)(1-c^2)(1-\nu)^2}{4(b^2-c^2)}MA^2$$

等边六边形对角和相等问题

等边六边形的 $ABCDEF$, 若 $\angle A+\angle C+\angle E=\angle B+\angle D+\angle F$, 则有：$\angle A=\angle D,\angle B=\angle E,\angle C=\angle F$



证明：因为六边形的内角和为 4π, 所以

$$\angle A+\angle C+\angle E=\angle B+\angle D+\angle F=2\pi$$

令 $a=e^{i\angle A},b=e^{i\angle B},c=e^{i\angle C},d=e^{i\angle D},e=e^{i\angle E},f=e^{i\angle F}$, 根据题设的角度关系，有

$$ace=bdf=1$$

又因为是等边六边形, 所以

$$a=\frac{F-A}{B-A}, b=\frac{A-B}{C-B}, c=\frac{B-C}{D-C}, d=\frac{C-D}{E-D}, e=\frac{D-E}{F-E}, f=\frac{E-F}{A-F}$$

由前四式, 可以得到向量间的表示关系

$$\vec{AC}=\left(1-\frac{1}{b}\right)\vec{AB}, \vec{AD}=\frac{1-c+bc}{bc}\vec{AB}, \vec{AE}=\frac{-1+d-cd+bcd}{bcd}\vec{AB}, \vec{AF}=a\,\vec{AB}$$

将其代入后两式得到关系式

$$e=\frac{1}{1-d+cd-bcd+abcd}, f=\frac{1-d+cd-bcd+abcd}{abcd}$$

取共轭，利用单位复数的性质，又有

$$\frac{1}{e}=\frac{abcd}{1-a+ab-abc+abcd}, \frac{1}{f}=1-a+ab-abc+abcd$$

以上等式联立，即知有唯一的有效解

$$c=\frac{1}{ab}, d=a, e=b, f=\frac{1}{ab}$$

因而结论成立。

平行六边形

三对对边平行的六边形, 表示为

$$\begin{aligned}
\vec{BA}&=\lambda b\,\vec{BC}\\
\vec{BD}&=\frac{c-\mu}{c}\vec{BC}\\
\vec{BE}&=\frac{c\nu-bc\mu-\mu\nu}{c\nu}\vec{BC}\\
\vec{BF}&=\frac{c\mu-b^2c\mu+c\lambda\nu-b^2c^3\lambda\nu-b\mu\nu+bc^2\mu\nu}{bc(1-c^2)\nu}\vec{BC}
\end{aligned}$$

2.8 多边形

圆内接多边形

圆内接 $n(n>=4)$ 边形外接圆上一点至各顶点所作切线的距离之积与该点至各条对角线的距离之积的 $\frac{2}{n-3}$ 次方相等。
点 $P=\frac{1+is}{1-it}$ 到点 $Q_k=\frac{1+is}{1-iu_k}$ 所作切线的距离为

$$\frac{\sqrt{1+s^2}(t-u_k)^2}{(1+t^2)(1+u_k^2)}$$

点 $P=\frac{1+is}{1-it}$ 到点 $Q_k=\frac{1+is}{1-iu_k}$ 和 $Q_j=\frac{1+is}{1-iu_j}$ 所在线段的距离为

$$\frac{\sqrt{1+s^2}|(t-u_k)(t-u_j)|}{(1+t^2)\sqrt{(1+u_k^2)(1+u_j^2)}}$$

对每个顶点，均有 $n-3$ 条对角线, 因而这些距离之积的 $\frac{2}{n-3}$ 次方等于点至各顶点所作切线的距离之积。

圆外切多边形

正 N 边形

正 N 边形平面上的一点 X, 到各顶点的距离平方。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|XA_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OA}_k-\overrightarrow{OX}\right)\otimes\left(\overrightarrow{OA}_k-\overrightarrow{OX}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OA}_k-\overrightarrow{OX}\otimes\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA}_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA}_k\right)\otimes\overrightarrow{OX}+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OX}\\
&= n\left(R^2+|OX|^2\right)
\end{aligned}
$$

正 N 边形平面上的一点 X, 到各顶点的距离四次方。

$$\sum_{k=1}^{n}|XA_k|^4 = n\left(R^4+4R^2|OX|^2+|OX|^4\right)$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|XA_k|^4 &= \sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OA}_k-\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OA}_k-\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OX}\right)^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OA}_k+\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OX}\right)^2-2\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OA}_k+\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OX}\right)\left(\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OA}_k+\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OX}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OA}_k\right.\\
&= n\left(R^2+|OX|^2\right)^2-2\left(R^2+|OX|^2\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OA}_k+\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OX}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OA}_k+\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OX}\right)^2\\
&= n\left(R^2+|OX|^2\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OA}_k\right)^2+2\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OA}_k\right)\left(\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OX}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{OA}_k\otimes\overrightarrow{OX}\right)^2\\
&= n\left(R^2+|OX|^2\right)^2+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\frac{4(k-1)\pi}{n}}\left(\overrightarrow{OX}\otimes\overrightarrow{OA}_1\right)^2+2nR^2|OX|^2+\sum_{k=1}^{n}e^{-i\frac{4(k-1)\pi}{n}}\left(\overrightarrow{OA}_1\otimes\overrightarrow{OX}\right)^2\\
&= n\left(R^4+4R^2|OX|^2+|OX|^4\right)
\end{aligned}
$$

2.9　复合三角形

给定两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle LMN$, 它们的边长分别记为: $a=BC, b=CA, c=AB, l=MN, m=NL, n=LM$。在 $\triangle ABC$ 的外侧, 分别作与 $\triangle LMN$ 逆相似的三个三角形 $\triangle BCL^+$, $\triangle CAM^+$, $\triangle ABN^+$, 在 $\triangle ABC$ 的内侧, 分别作与 $\triangle LMN$ 顺相似的三个三角形 $\triangle BCL^-$, $\triangle CAM^-$, $\triangle ABN^-$, 则 AL^+, BM^+, CN^+ 三线共点, AL^-, BM^-, CN^- 三线共点。

证明: 令

$$\overrightarrow{BA}=z\,\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{ML}=w\,\overrightarrow{MN}$$

根据 $\triangle BCL^+$ 逆相似于 $\triangle LMN$, 有

$$\frac{L^+-B}{C-B}=\frac{L-M}{N-M}$$

由此即知

$$\overrightarrow{BL^+}=w\,\overrightarrow{BC}$$

同理求出

$$\overrightarrow{BM^+}=\frac{w-z}{w-1}\,\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BN^+}=\frac{z}{w}\,\overrightarrow{BC}$$

由以上表示, 容易得知 AL^+, BM^+, CN^+ 三线交于公共点 F^+:

$$\overrightarrow{BF^+}=\frac{(1-\bar{w})(z\,\bar{w}-w\,\bar{z})}{(w-\bar{w})(\bar{w}-\bar{z})}\,\overrightarrow{BC}$$

根据 $\triangle BCL^{-}$ 顺相似于 $\triangle LMN$, 有

$$\frac{L^{-}-B}{C-B}=Conjugate\left(\frac{L-M}{N-M}\right)$$

其中 $Conjugate(w)$ 表示对 w 取共轭。由此即知

$$\vec{BL^{-}}=\bar{w}\,\vec{BC}$$

同理求出

$$\vec{BM^{-}}=\frac{\bar{w}-z}{\bar{w}-1}\,\vec{BC}$$

$$\vec{BN^{-}}=\frac{z}{\bar{w}}\,\vec{BC}$$

由以上表示, 容易得知 AL^{-}, BM^{-}, CN^{-} 三线交于公共点 F^{-}:

$$\vec{BF^{-}}=\frac{(w-1)(zw-\bar{w}\,\bar{z})}{(w-\bar{w})(w-\bar{z})}\,\vec{BC}$$

2.10　不等式证明

利用 XXX 节各量的有理表示，我们可以将某些三角形不等式转化为次数较低的有理多项式不等式, 它们可以利用复数的模长性质 $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$ 配方为两个非负项之和，因而也就完成了证明。

欧拉不等式

欧拉不等式: $R\geq 2r$

证明:

$$R-2r=\frac{1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2}{4s(1+t^2)}BC=\frac{(1-3st)^2+(s-t)^2}{4s(1+t^2)}BC\geq 0$$

取等号的条件为 $s=t=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 即等边三角形。

Colombier-Doucet 不等式

Colombier-Doucet 不等式: $4R+r\geq\sqrt{3}l$

证明:

$$4R+r-\sqrt{3}l=\frac{1-\sqrt{3}s+s^2-\sqrt{3}t+st+t^2}{s(1+t^2)}BC=\frac{(\sqrt{3}+2s+t)^2+(1-\sqrt{3}t)^2}{4s(1+t^2)}BC\geq 0$$

Finsler-Hadwiger 不等式

Finsler-Hadwiger 不等式: $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

证明:

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2\\=&\frac{4t(1-st)(1-\sqrt{3}s+s^2-\sqrt{3}t+st+t^2)}{s(1+t^2)^2}BC\\=&\frac{t(1-st)((\sqrt{3}-2s-t)^2+(1-\sqrt{3}t)^2)}{s(1+t^2)^2}BC\geq 0\end{aligned}$$

Gerrestne 不等式

Gerrestne 不等式: $l^2-16Rr+5r^2\geq 0$

证明:

$$l^2-16Rr+5r^2=\frac{s^2-2st-4s^3t+t^2+9s^2t^2+4s^4t^2-4st^3-14s^3t^3+4s^2t^4+9s^4t^4}{s^2(1+t^2)^2}BC$$

我们只需证明分子在 $s>0, t>0, 1-st>0$ 的条件下不小于 0 即可。

事实上, 它可以配为两个平方之和。

我们先在复数范围内进行因式分解:

$$\begin{aligned}&s^2-2st-4s^3t+t^2+9s^2t^2+4s^4t^2-4st^3-14s^3t^3+4s^2t^4+9s^4t^4\\=&(4t^2+9t^4)(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)\end{aligned}$$

其中四个根分别为

$$\begin{aligned}s_1&=\frac{2-it+7t^2-6it^3+(2-it+3t^2)\sqrt{1-4t^2}}{8t+18t^3}\\s_2&=\frac{2-it+7t^2-6it^3-(2-it+3t^2)\sqrt{1-4t^2}}{8t+18t^3}\\s_3&=\frac{2+it+7t^2+6it^3-(2+it+3t^2)\sqrt{1-4t^2}}{8t+18t^3}\\s_4&=\frac{2+it+7t^2+6it^3+(2+it+3t^2)\sqrt{1-4t^2}}{8t+18t^3}\end{aligned}$$

容易看到, 如果将 $(s-s_1)(s-s_2)$ 和 $(s-s_3)(s-s_4)$ 分别配对展开, 就可以消去其中的根式

$$(s-s_1)(s-s_2)=\frac{-s+t+2s^2t-2st^2-ist+3is^2t^2}{t(2+3it)}$$

$$(s-s_3)(s-s_4)=\frac{-s+t+2s^2t-2st^2+ist-3is^2t^2}{t(2-3it)}$$

这两个式子是共轭的, 它们的乘积等于实部平方与虚部平方之和，从而得到配方

$$\begin{aligned}&s^2-2st-4s^3t+t^2+9s^2t^2+4s^4t^2-4st^3-14s^3t^3+4s^2t^4+9s^4t^4\\=&(s-t)^2(1-2st)^2+s^2t^2(1-3st)^2\end{aligned}$$

因而不等式是成立的。

同样的方法可以证明另一个 Gerrestne 不等式: $4R^2+4Rr+3r^2\geq l^2$

$$\begin{aligned}&4R^2+4Rr+3r^2-l^2\\=&\frac{1-2s^2+s^4-4st+4s^3t-2t^2+12s^2t^2-2s^4t^2+4st^3-20s^3t^3+t^4-2s^2t^4+9s^4t^4}{4s^2(1+t^2)^2}BC\\=&\frac{\left(1-s^2-2st-t^2+3s^2t^2\right)^2+4s^2(s-t)^2t^2}{4s^2(1+t^2)^2}BC\geq 0\end{aligned}$$

某些类型的几何不等式也可以通过转化成为上面的这种类型而得以证明, 例如如下关于中线的不等式。

任意点的距离平方类不等式

例如，内心 IP^2 的重心坐标表示导出的不等式

$$aPA^2+bPB^2+cPC^2\geq abc$$

用配方法予以证明。

中线不等式

记 m_a, m_b, m_c 分别为三角形 ABC 各顶点到对边中点的线段长，S 为三角形面积, 则有不等式

$$\frac{1}{m_a m_b}+\frac{1}{m_b m_c}+\frac{1}{m_c m_a}\le\frac{\sqrt{3}}{S}$$

证明：设

$$\vec{BA}=(x+yi)\,\vec{BC}$$

则可求得各中线长:

$$\begin{aligned} m_a&=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+y^2}BC\\ m_b&=\frac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}BC\\ m_c&=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}BC \end{aligned}$$

我们可以做代换消除其中的两个根式，这只需要将 $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+y^2}, \sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 视作 (x,y) 到 $(\frac{1}{2},0)$ 和 $(2,0)$ 的距离即可。因此令

$$x+yi-\frac{1}{2}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}(2-\frac{1}{2})$$

解出

$$\begin{aligned} x&=\frac{4s+3t-3s^2t-4st^2-3t^3+3s^2t^3+4st^4}{2s(1+t^2)^2}\\ y&=\frac{3t(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

其中参数 $s>0, t>0, 1-st>0$。

于是

$$\begin{aligned} m_a&=\frac{3}{2}\frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)}BC\\ m_b&=\frac{3}{4}\frac{\sqrt{4s^2+4st-4s^3t+t^2-6s^2t^2+s^4t^2-4st^3+4s^3t^3+4s^2t^4}}{s(1+t^2)}BC\\ m_c&=\frac{3}{4}\frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)}BC\\ S&=\frac{3t(s+t)(1-st)}{2s(1+t^2)^2}BC^2 \end{aligned}$$

由此, 原不等式等价于证明

$$\begin{aligned} &108s^2-96\sqrt{3}s^3+216s^4-96\sqrt{3}s^5+108s^6+108st-96\sqrt{3}s^2t-20s^3t-108s^5t+96\sqrt{3}s^6t-108s^7t\\ &+27t^2-24\sqrt{3}st^2-236s^2t^2+120\sqrt{3}s^3t^2-142s^4t^2+120\sqrt{3}s^5t^2-108s^6t^2-24\sqrt{3}s^7t^2+27s^8t^2-108st^3\\ &+96\sqrt{3}s^2t^3+20s^3t^3+108s^5t^3-96\sqrt{3}s^6t^3+108s^7t^3+108s^2t^4-96\sqrt{3}s^3t^4+216s^4t^4-96\sqrt{3}s^5t^4+108s^6t^4\\ &\ge 0 \end{aligned}$$

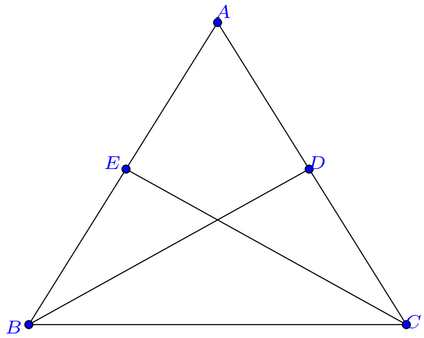
这是关于 t 的四次不等式, 我们可以应用前面的方法将左边式子化为

$$\begin{aligned} &\frac{4s^2t^2(\sqrt{3}-3s)^2(11-2\sqrt{3}s+9s^2)(9-4\sqrt{3}s+9s^2)^2}{27(1+s^2)(9-8\sqrt{3}s+9s^2)}\\ &+\frac{(6s(1+s^2)(9-8\sqrt{3}s+9s^2)(1-t^2)+(27-24\sqrt{3}s-5s^2-27s^4+24\sqrt{3}s^5-27s^6)t)^2}{3(1+s^2)(9-8\sqrt{3}s+9s^2)} \end{aligned}$$

不难知道式中各项均不小于 0, 因而也就证明了原命题。

角平分线相等

若三角形的两个内角的平分线相等, 则该三角形为等腰三角形。



证明:

令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 于是

$$\overrightarrow{BA}=\frac{(s+t)\,(1-st)}{s(1-it)^2}\,\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}=\frac{1-st}{1-it}\overrightarrow{BC}$$

再设 $\overrightarrow{BD}=\lambda\,\overrightarrow{BI}$, 由 A,D,C 三点共线有

$$\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{BD}\otimes\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}\otimes\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\otimes\overrightarrow{BD}\right)=0$$

代入各式可求得

$$\lambda=\frac{2\,(s+t)}{2s+t-s^2t}$$

同样地, 设 $\overrightarrow{BE}=\mu\,\overrightarrow{BA}$, 由 E,I,C 三点共线求得

$$\mu=\frac{s\left(1+t^2\right)}{(s+t)\,(1+st)}$$

所以

$$BD^2-CE^2=\frac{4(1-2st-t^2)(s^2+2st+2s^3t+t^2+s^2t^2-2s^4t^2-s^4t^4)}{(1+st)^2(2s+t-s^2t)^2(1+t^2)}BC^2$$

此式等于 0 的条件只能是 $1-2st-t^2=0$,

因为分子的第二个因式

$$s^2+2st+2s^3t+t^2+s^2t^2-2s^4t^2-s^4t^4=s^2+2st+t^2+2s^3t(1-st)+s^2t^2(1-s^2t^2)$$

在条件 $s>0,t>0,1-st>0$ 下，显然它是大于 0 的。

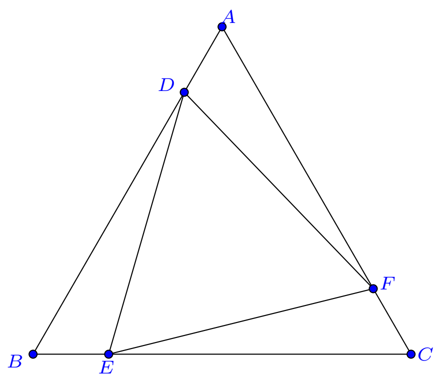
于是

$$\tan\frac{C}{2}=\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{1-st}{s+t}=t=\tan\frac{B}{2}$$

命题得证。

IBM 等边三角形

给定 $\triangle ABC, D,E,F$ 分别在边 AB,BC,CA 上，且 $AD=BE=CF$, 如果 $\triangle DEF$ 为等边三角形，则 $\triangle ABC$ 也为等边三角形。



证明：令 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 于是

$$\overrightarrow{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\overrightarrow{BC}$$

根据题设, 又可令

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda BC}{AB}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CF}=\frac{\lambda BC}{CA}\overrightarrow{CA}$$

因为 $\triangle DEF$ 为等边三角形，所以

$$\overrightarrow{ED}=e^{i\frac{\pi}{3}}\overrightarrow{EF}$$

利用向量加法将其转化为

$$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BA}=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC}\right)$$

代入前面各式化简得到

$$(i+s)\left(-s+i\sqrt{3}s-2t-2ist+2\sqrt{3}st+2s^2t+st^2-i\sqrt{3}st^2\right)+2s(i+t)\left(2-is-\sqrt{3}s+it-\sqrt{3}t\right)\lambda=0$$

分离虚实部后, 有

$$\begin{cases}\sqrt{3}+s-2\sqrt{3}st-2s^2t-\sqrt{3}t^2-st^2-2s\lambda-2t\lambda+2\sqrt{3}st\lambda+2\sqrt{3}t^2\lambda=0\\ s-\sqrt{3}s^2+2t-2\sqrt{3}st-st^2+\sqrt{3}s^2t^2-4s\lambda+2\sqrt{3}s^2\lambda+2\sqrt{3}st\lambda+2s^2t\lambda-2st^2\lambda=0\end{cases}$$

如果 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 那么 $s=\frac{1}{\sqrt{3}}$, λ 可以任意取值，此即为命题的结论。
如果 $t\neq\frac{1}{\sqrt{3}}$，则由第一式解出

$$\lambda=\frac{\left(\sqrt{3}+s\right)\left(1-2st-t^2\right)}{2(s+t)\left(1-\sqrt{3}t\right)}$$

根据问题的对称性, 不妨令 $BC<CA\leq AB$，即

$$1<\frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)}\leq\frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)}$$

联合 $s>0, t>0, 1-st>0$ 则有

$$0<s<t\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\text{或}\frac{1}{\sqrt{3}}<t<1, 0<s\leq\frac{1-t^2}{2t}$$

这两个条件均无法使得 $0<\lambda<1$，这也就说明不存在非等边三角形，使得命题成立。

2.11　结论的延拓

虚交点

上两节我们提到, 某些情况下并不存在一般意义上的交点, 但是仍然可以按复数运算规则计算出“虚交点”。“虚交点”的提出，并不是毫无意义的，我们可以用它来做结论的延拓。

例如, 与圆的割线定理相应的是:

对于给定圆 (圆心为 O, 半径为 R), 及所在平面上的一点 P, 由 P 作一条直线交圆于 A, B 两点, 又由 O 作一条射线经过点 P, 在射线上取两点 C, D, 使得 P 为 CD 的中心, 且 $OC \cdot OD = R^2$, 那么 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$。

又如, 与圆的坎迪定理相应的是:

2.12　射影变换

射影变换将直线变为直线!

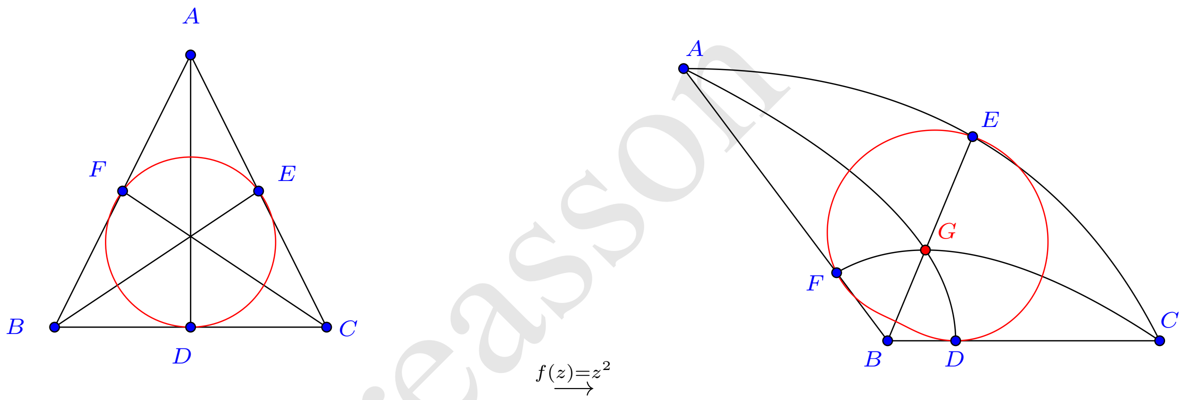
2.13　保形变换

https://zhuanlan.zhihu.com/p/105819963

https://tieba.baidu.com/p/6470274012

复线性分式变换为保形变换的特例。

保形变换：高次几何曲线。例:



分式线性变换

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

又称莫比乌斯变换。

三个基本的变换:

$$f_1(z) = z + c, (c \in \mathbb{C})$$

$$f_2(z) = az, (a \in \mathbb{C})$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z}$$

任意一个分式线性变换可由这三个基本的变换复合而成。

简单的平移和伸缩旋转并不改变几何对象的形状, 它们是平凡的, 因而我们主要讨论第三种变换。

$$\vec{BP} = z\,\vec{BC}$$

$$\vec{BQ} = \frac{1}{z}\,\vec{BC}$$

直线 –> 直线/圆

圆 —> 圆/直线

四点共圆 –> 四点共圆, (若将某一点变为无穷点, 则变换后是直线, 另外三点共线。)

四点共线 —> 四点共圆,

相切 —> 相切,

三线共点 —> 三圆共点,

平行 —> 不相交的两圆, —> 变换:

$$f(z) = \frac{az+b}{z}$$

两圆相切，切点反演 —> 两平行直线

角度相等 —> 角度相等

等同于圆的反演变换

找一些题目来详细说明之。

参考文档：平面几何讲义-利用反演变换证明多圆问题.pdf

https://max.book118.com/html/2017/0723/123789330.shtm

数学吧 — 专题反演变换

https://tieba.baidu.com/p/6106401621

https://tieba.baidu.com/p/6470274012

圆的反演变换

讨论具体的线性分式变换!

设 $\triangle ABC$ 的表示为:

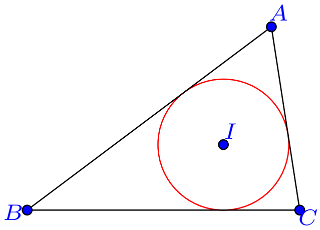
$$\vec{BA} = w\,\vec{BC}$$

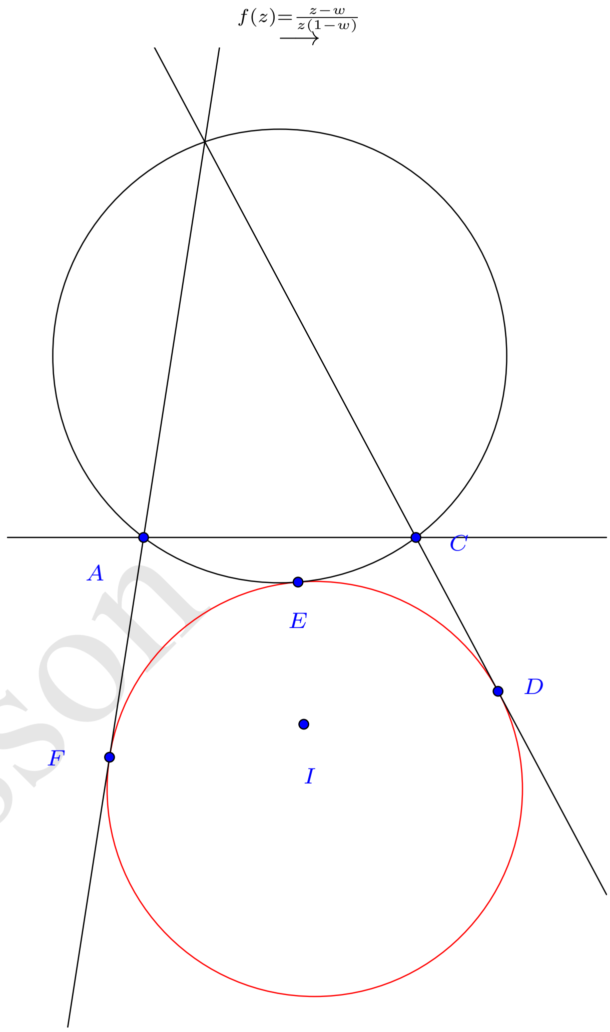
平面上的点表示为

$$\vec{BP} = z\,\vec{BC}$$

则变换 $f(z) = \frac{z-w}{z(1-w)}$ 将图形变为:

$A = 0, B = \infty, C = 1$





图中,AF 与 CD 的交点为无穷远点映射所得点。

三角形内切圆的反演

以点 A 为反演中心, 则得到：两直线 + 两圆
以点 I 为反演中心，则得到：四圆相切
以某切点为反演中心，则得到：两直线 + 两圆
以一边上的点 X 为反演中心，则得到：三圆相切
以其他任意点 X 为反演中心，则得到：四圆相切
反演的半径?

同心圆变换

题目：确定一个分式线性变换, 使得这两个圆成为同心圆。
解：不妨设圆 O_1 的圆心在原点, 半径 r, 圆 O_2 的圆心为 d, 半径 R,
则圆 O_1 上的点可表示为:

$$z = r\frac{1+iu}{1-iu}$$

圆 O_2 上的点可表示为:

$$z = d + R\frac{1+iv}{1-iv}$$

我们设所求的反演变换为

$$f(z) = \frac{az+b}{z+c}$$

为简单，不妨令 a, b, c 为实数。
圆 O_1 经变换后成为：

$$f(z) = \frac{b+ar-ibu+iaru}{c+r-icu+iru}$$

不难得知其圆心和半径分别为:

$$O_1{}' = \frac{bc-ar^2}{c^2-r^2}, \quad r' = |\frac{(b-ac)r}{c^2-r^2}|$$

圆 O_2 经变换后成为：

$$f(z) = \frac{b+ad+aR-ibv-iadv+iaRv}{c+d+R-icv-idv+iRv}$$

其圆心和半径分别为:

$$O_2{}' = \frac{bc+bd+acd+ad^2-aR^2}{(c+d-R)(c+d+R)}, \quad R' = |\frac{(b-ac)R}{(c+d-R)(c+d+R)}|$$

由 $O_1{}' = O_2{}'$ 解出

$$c = \frac{-(d^2+r^2-R^2) \pm \sqrt{\left(d^2+r^2-R^2\right)^2 - 4d^2r^2}}{2d}$$

例: 取 $r = 1, d = 4, R = 1$, 则 $c = \frac{1}{8}(-13 \pm \sqrt{105})$
取 $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{8}(-13+\sqrt{105})$，即得到一个反演变换

$$f(z) = \frac{8}{-13+\sqrt{105}+8z}$$

将两圆映射为圆心在 $\frac{4}{\sqrt{105}}$, 半径分别为:

$$r' = \frac{1}{210}(105+13\sqrt{105}), R' = \frac{1}{420}(-105+19\sqrt{105})$$

的同心圆。

【同心圆反演】设两圆的半径分别为 r, R, 圆心距 d, 则在它们的连心线上, 存在两个反演点, 使得反演后的图像为同心圆。反演点划分线段的比值等于

$$\frac{d^2-r^2+R^2\pm\sqrt{(d-r-R)(d+r-R)(d-r+R)(d+r+R)}}{d^2+r^2-R^2\mp\sqrt{(d-r-R)(d+r-R)(d-r+R)(d+r+R)}}$$

2.14 几何结论的自动发现

结论发现 —> 点的关系结论发现 —> 量的关系

四边形的面积:

1. 若以两条对边之长及三个内角表示:

令 $a=e^{iA}, b=e^{iB}, c=e^{iC}, d=e^{iD}$, 如果 $\angle B+\angle C\neq 180°$, 则:

$$S=i\frac{(1-b^2)(1-c^2)}{4(1-b^2c^2)}BC^2+i\frac{(1-a^2)(1-d^2)}{4(1-a^2d^2)}DA^2=\frac{1}{2}\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)}BC^2+\frac{1}{2}\frac{\sin A\sin D}{\sin(A+D)}DA^2$$

2. 以两条对角线之长及三个内角表示: 如果 $\angle A+\angle C\neq 180°$, 则

$$S=\frac{i(1-a^2)(1-c^2)}{4(1-a^2c^2)}AC^2+i\frac{(1-b^2)(1-d^2)}{4(1-b^2d^2)}BD^2=\frac{1}{2}\frac{\sin A\sin C}{\sin(A+C)}AC^2+\frac{1}{2}\frac{\sin B\sin D}{\sin(B+D)}BD^2$$

以任意五个量表示均可。

第三章 二次曲线

二次曲线一般指圆锥曲线，是由一平面截二次锥面得到的曲线，圆锥曲线包括椭圆、抛物线、双曲线。

在直角坐标系下，平面上的二次曲线的方程为:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

由此，利用线性方程组的理论知，一般来说，不共线的五个相异点可以唯一地确定一条二次曲线，如果其中有三点共线，那么二次曲线退化为两条相异直线。

本章我们主要用有理表示探讨二次曲线的性质。

3.1 重心坐标表示

本节需修改，参考二次曲面的重心坐标表示：其一般方程是：

$$\lambda_{11}\alpha^2+\lambda_{22}\beta^2+\lambda_{33}\gamma^2+\lambda_{12}\alpha\beta+\lambda_{13}\alpha\gamma+\lambda_{23}\beta\gamma=0$$

增加：外接椭圆、内切椭圆的重心坐标方程导出：由一般方程式导出！

在重心坐标一章中，我们曾经指出，$\triangle ABC$ 所在平面上的一点 P 有重心坐标形式

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C,(\alpha+\beta+\gamma=1)$$

如果 P 点的轨迹是一条二次曲线，α,β,γ 应满足什么关系呢？

不难得知，它的一般形式是

$$\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2+\lambda_3\gamma^2+\lambda_4\alpha\beta+\lambda_5\beta\gamma+\lambda_6\gamma\alpha+\lambda_7\alpha+\lambda_8\beta+\lambda_9\gamma+\lambda_{10}=0$$

这个重心坐标方程有相当的冗余，不便于应用。为了简化它，现在我们假定 A,B,C 是这条曲线上的三个点，则可得:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_7+\lambda_{10}=0\\ \lambda_2+\lambda_8+\lambda_{10}=0\\ \lambda_3+\lambda_9+\lambda_{10}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_7=-(\lambda_1+\lambda_{10})\\ \lambda_8=-(\lambda_2+\lambda_{10})\\ \lambda_9=-(\lambda_3+\lambda_{10})\end{cases}$$

将其代回原重心坐标方程后即成为：

$$\lambda_1\alpha(1-\alpha)+\lambda_2\beta(1-\beta)+\lambda_3\gamma(1-\gamma)+\lambda_4\alpha\beta+\lambda_5\beta\gamma+\lambda_6\gamma\alpha-\lambda_{10}(\alpha+\beta+\gamma)+\lambda_{10}=0$$

应用 $\alpha+\beta+\gamma=1$，有：

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)\alpha\beta+(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5)\beta\gamma+(\lambda_3+\lambda_1+\lambda_6)\gamma\alpha=0$$

这是一个非常简单的形式，可重新表述如下：

若 P 是经过 $\triangle ABC$ 三点的二次曲线上的一点，则它关于 A,B,C 三点的重心坐标 (α,β,γ) 满足方程组

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=1 \\ \lambda\beta\gamma+\mu\gamma\alpha+\nu\alpha\beta=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$\triangle ABC$ 外接圆的重心坐标方程：$\alpha\beta AB^2+\beta\gamma BC^2+\gamma\alpha CA^2=0$, 正是它的一个特例。

3.2 曲线的分类

因为重心坐标表示也属于仿射变换，而仿射变换并不改变曲线的类别，所以我们可以直接应用直角坐标的二次曲线分类结果。

消去其中一个变量 γ, 方程成为

$$\mu\alpha^2+\lambda\beta^2+(\lambda+\mu-\nu)\alpha\beta-\mu\alpha-\lambda\beta=0$$

根据二次曲线的分类理论，曲线的三个不变量和一个半不变量分别为:

$$\begin{cases} I_1=\lambda+\mu \\ I_2=-\frac{1}{4}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\lambda\mu-2\mu\nu-2\nu\lambda) \\ I_3=-\frac{1}{4}\lambda\mu\nu \\ K_1=-\frac{1}{4}(\lambda^2+\mu^2) \end{cases}$$

如果 λ,μ,ν 中的其中一个等于 0, 则将使得 α,β,γ 中的一个等于 0, 我们由 (3.1) 式即知此时曲线退化为两条直线。

如果 λ,μ,ν 均不等于 0, 因为 $I_2>0, I_1I_3>=0$ 是不可能成立的, 所以可得如下简明的分类:

令

$$\Delta=\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\lambda\mu-2\mu\nu-2\lambda\nu \tag{3.2}$$

$\Delta<0$ 时, 椭圆; $\Delta=0$ 时, 抛物线; $\Delta>0$ 时, 双曲线。

3.3 长度计算

3.3.1 两点之间的曲边长度

3.3.2 周长计算

3.4 面积计算

3.4.1 三角形确定的曲边面积

新增用重心坐标计算面积和周长

以及引理: 直角坐标系下, 二次曲线若是椭圆, 则其面积为:

$$V=\pi\sqrt{|\frac{{I_2}^2}{{I_2}^3}|}$$

其中 I_2,I_3 为二次曲线的两个不变量。

3.5 二次曲线有理化, 待整合

对任意一条二次曲线

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

任选其上的一点 (x_0, y_0), 考虑经过该点的直线:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

直线与曲线的另一交点为：

$$\begin{aligned} x &= -\frac{d + ek + ap - ck^2p + bq + 2ckq}{a + bk + ck^2} \\ y &= -\frac{dk + ek^2 + 2akp + bk^2p - aq + ck^2q}{a + bk + ck^2} \end{aligned}$$

随着斜率参数 k 的变化, 这个表示将给出曲线上所有点。

由此即知，二次曲线总是有形式：

$$x = \frac{\Lambda_1(u)}{\Lambda_3(u)}, y = \frac{\Lambda_2(u)}{\Lambda_3(u)}$$

的二阶有理参数表示。

3.6　二阶有理表示

现在来导出 (3.1) 式所对应的有理参数表示。

注意到第二式是关于 α, β, γ 的齐次方程, 如果 α, β, γ 使得第二式成立，那么对于任意的系数 k, $k\alpha$、$k\beta$、$k\gamma$ 均使得它成立。这允许我们只需考虑寻找 α, β, γ 的适当表示，使得第二式成立即可。

曲线总是某个单参数 t 的函数, 因而 α, β, γ 也是单参数 t 的函数，我们从最简单的多项式函数开始寻找：

一次多项式显然不满足要求, 因为它仅能表示一条直线。考虑二次式：

$$\begin{cases} \alpha(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1 \\ \beta(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2 \\ \gamma(t) = a_3t^2 + b_3t + c_3 \end{cases}$$

将其代入第二式，将得到关于参数 t 的一个四次方程。因为 t 可以取无穷多个值，所以 t 的各项系数应为 0, 由此得到方程组：

$$\begin{cases} \nu c_1c_2 + \mu c_1c_3 + \lambda c_2c_3 = 0 \\ \nu b_2c_1 + \mu b_3c_1 + \nu b_1c_2 + \lambda b_3c_2 + \mu b_1c_3 + \lambda b_2c_3 = 0 \\ \nu b_1b_2 + \mu b_1b_3 + \lambda b_2b_3 + \nu a_2c_1 + \mu a_3c_1 + \nu a_1c_2 + \lambda a_3c_2 + \mu a_1c_3 + \lambda a_2c_3 = 0 \\ \nu a_2b_1 + \mu a_3b_1 + \nu a_1b_2 + \lambda a_3b_2 + \mu a_1b_3 + \lambda a_2b_3 = 0 \\ \nu a_1a_2 + \mu a_1a_3 + \lambda a_2a_3 = 0 \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} c_1 = \frac{(\mu a_1+\lambda a_2)(\nu b_1+\lambda b_3)(\mu\nu a_1b_1-\lambda\nu a_2b_1-\lambda\mu a_1b_3-\lambda^2a_2b_3)}{4\mu^2\nu^2a_1^3} \\ b_2 = -\frac{\lambda\nu a_2^2b_1+\mu^2a_1^2b_3+2\lambda\mu a_1a_2b_3+\lambda^2a_2^2b_3}{\mu\nu a_1^2} \\ c_2 = -\frac{(\mu a_1+\lambda a_2)(\nu a_2b_1+2\mu a_1b_3+\lambda a_2b_3)(\mu\nu a_1b_1-\lambda\nu a_2b_1-\lambda\mu a_1b_3-\lambda^2a_2b_3)}{4\mu^2\nu^2a_1^4} \\ a_3 = -\frac{\nu a_1a_2}{\mu a_1+\lambda a_2} \\ c_3 = \frac{(\mu a_1+\lambda a_2)(\nu b_1+\lambda b_3)(\nu a_2b_1+2\mu a_1b_3+\lambda a_2b_3)}{4\mu^2\nu a_1^3} \end{cases} \tag{3.3}$$

这是唯一满足要求的解。我们可以指定其中的系数之值, 使得曲线上的点具有简单的参数表示, 一个合适的选取是:

$$\begin{cases} \alpha(t) = \lambda(1-t) \\ \beta(t) = \mu t \\ \gamma(t) = -\nu t(1-t) \end{cases}$$

经归一化后即得如下结论 (为下文表述方便, 这里我们更换变量 t 为 u):

$\triangle ABC$ 外接二次曲线上的点 P, 它关于 A, B, C 的重心坐标可表示为

$$P = \frac{\lambda(1-u)A + \mu u B - \nu u(1-u)C}{\lambda(1-u) + \mu u - \nu u(1-u)} \tag{3.4}$$

此表示在 $u = 0, 1, \infty$ 时分别取 A, B, C 三点。

事实上, 由 (3.3) 给出的二次曲线表示和 (3.4) 的二次曲线表示, 变量之间存在着分式线性关系：

$$t = -\frac{(\mu a_1 + \lambda a_2)(u\mu\nu a_1 b_1 + \lambda\nu a_2 b_1 - u\lambda\nu a_2 b_1 + 2\lambda\mu a_1 b_3 - u\lambda\mu a_1 b_3 + \lambda^2 a_2 b_3 - u\lambda^2 a_2 b_3)}{2\mu\nu a_1^2(u\mu a_1 - \lambda a_2 + u\lambda a_2)}$$

需要特别指出的是, (3.4) 不能表示双直线情形。

例如：对于双直线 $(y-x)(y-2x-1) = 0$, 我们取四个不共线的点 $A = 0, B = 1+i, C = i, D = 1+3i$, 则可得到表示:

$$P = \frac{u\mu}{2\mu - u\mu + \nu - 2u\nu + u^2\nu} + \frac{u(\mu - \nu + u\nu)}{2\mu - u\mu + \nu - 2u\nu + u^2\nu} i$$

它对应的直角坐标方程为:

$$\mu(y-x)(y-2x-1) - \nu x(1-x) = 0$$

若要使得 $(y-x)(y-2x-1) = 0$, 须 $\nu = 0$, 但此时

$$P = \frac{(1+i)u}{2-u}$$

仅表示其中一条直线 $y = x$。

但是, 由上面 P 的参数表示可知, 当 ν 甚小时, 该参数表示的图形是趋近于双直线的一条双曲线。

根据上述结果即知, 复平面上的一般二次曲线 (非双直线情形), 总是有如下的参数表示 [①]:

$$z(u) = \frac{a_1 u^2 + 2b_1 u + c_1}{a_3 u^2 + 2b_3 u + c_3} + \frac{a_2 u^2 + 2b_2 u + c_2}{a_3 u^2 + 2b_3 u + c_3} i \tag{3.5}$$

这种表示不是唯一的，不同的表示之间，自变量存在着分式线性变换关系。

3.6.1 有理表示示例

众所周知, 标准的椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有参数表示:

$$z(u) = a\frac{1-u^2}{1+u^2} + b\frac{2u}{1+u^2} i$$

标准的双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有参数表示:

$$z(u) = a\frac{1+u^2}{1-u^2} + b\frac{2u}{1-u^2} i$$

标准的抛物线方程 $y^2 = 2px$ 有参数表示:

$$z(u) = 2pu^2 + 2pui$$

一般圆方程 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ 有参数表示:

$$z(u) = x_0 + y_0 i + r\frac{1+iu}{1-iu} = \frac{r - ru^2 + x_0 + u^2 x_0}{1+u^2} + \frac{2ru + y_0 + u^2 y_0}{1+u^2} i$$

它们均是形如 (3.5) 的二阶有理表示。

对于一般二次曲线, 我们可以应用 (3.4) 式将其有理化表示, 这只需任意选取曲线上不共线的三点即可。

[①] 限定通分后的表示在实数范围内不可约。

例如，对于 $x^2-2xy+3y^2-4x+5y-6=0$, 选取曲线上的三点 $A=-2-i, B=-2-2i, C=4+2i$, 则得到它的一个有理表示:

$$x=\frac{2(-12+u+2u^2)}{12-4u+u^2},\quad y=\frac{2(-6-4u+u^2)}{12-4u+u^2}$$

3.6.2　有理表示的曲线分类

前面我们曾给出重心坐标方程的曲线分类，但它不便于对二阶有理表示 (3.5) 进行判别, 因此我们需要对此再做讨论。(3.5) 式所表示的曲线除了表示通常的圆锥曲线外, 它也可以表示一条线段、射线、或直线。例如:

$$z(u)=\frac{(1+u)^2}{1+2u+2u^2}+\frac{(1+u)^2}{1+2u+2u^2}i$$

表示线段 $y=x, x\in(0,1)$。

$$z(u)=\frac{(1-u)^2}{(1+u)^2}+\frac{(1-u)^2}{(1+u)^2}i$$

表示射线 $y=x, x>0$。

$$z(u)=\frac{(1+u)^2}{1+4u+2u^2}+\frac{(1+u)^2}{1+4u+2u^2}i$$

表示直线 $y=x$。

它们可分别看成是极扁的椭圆、抛物线和双曲线情形。

为将其与正常的圆锥曲线相区分, 可以任取三个不同的 u 值, 使得对应点相异且非无穷远点, 检验此三点是否共线即可。

关于 (3.5) 式表示的曲线类型，判别如下:

1. 如果 a_1、a_2、a_3 同时为 0, 且 b_1、b_2、b_3 不同时为 0, 那么它表示一条直线, 这是显然的情形。

2. 如果 (3.5) 式表示通常的圆锥曲线 (椭圆, 抛物线或双曲线), 令

$$\Delta={b_3}^2-a_3c_3 \tag{3.6}$$

$\Delta<0$, 椭圆; $\Delta=0$, 抛物线; $\Delta>0$, 双曲线。

这可根据上节的一般判别式得到, 也可将参数表示转化为直角坐标方程得到。

该判别也容易根据值域得到: 对于 (3.5), 若 $\Delta<0$, 则分母恒大于 0, 对于有限的 u 值, $z(u)$ 的取值范围有限, 并且当 $u\to\infty$ 时, $z(u)$ 仍是有限值，因而必是椭圆。若 $\Delta=0$, 则 $z(u)$ 仅有一个奇点 ($a_3=b_3=0$ 时以 $u\to\infty$ 为奇点), 也即开口方向仅有一处, 因而是抛物线。同理, 若 $\Delta>0$, 则 $z(u)$ 有两个不同的奇点, 因而是双曲线。

3. 如果 (3.5) 式表示一条直线, 且不属于情形 1, 那么计算判别式 (3.6),

若 $\Delta<0$, 线段; $\Delta=0$, 射线; $\Delta>0$, 直线。

下文的讨论中, 除非特别说明，否则 (3.5) 式一般指的是通常的圆锥曲线。

3.6.3　切线的交点

首先我们定义：对于给定的圆锥曲线 Γ 及其所在平面上的一点 P, 若由 P 可以向 Γ 引两条切线, 则称 P 点位于 Γ 的外部; 若不能向 Γ 引切线, 则称 P 点位于 Γ 的内部。

对于 (3.5) 式表示的圆锥曲线, 不难求得 $z(u)$ 和 $z(v)$ 处切线的交点为

$$z(u,v)=\frac{a_1uv+b_1(u+v)+c_1}{a_3uv+b_3(u+v)+c_3}+i\frac{a_2uv+b_2(u+v)+c_2}{a_3uv+b_3(u+v)+c_3} \tag{3.7}$$

这是一个有趣的结果, 它关于 u,v 对称, 并且与曲线上点的表示几乎相同，可以看作是由二次项 u^2 替换为 uv、并将一次项 $2u$ 替换为 $u+v$ 得到。

因为 Γ 曲线的表示 (3.5) 式关于 u 是单值的，且 u 可取遍整个实数域, 所以对于任意一对实的参数 u,v, $z(u,v)$ 所表示的点是唯一的, $z(u,v)$ 也是实平面到椭圆曲线外部的一个双射。

对于 Γ 曲线内部的点, 若仍用 (3.7) 表示，则 u,v 是一对虚部非 0 的共轭复数。

证明：首先 Γ 曲线所在平面上的任意一点均可表示为

$$\Lambda(\zeta,\eta)=\frac{a_1\zeta+b_1\eta+c_1}{a_3\zeta+b_3\eta+c_3}+i\frac{a_2\zeta+b_2\eta+c_2}{a_3\zeta+b_3\eta+c_3} \tag{3.8}$$

其中 ζ,η 是实数。

比较即有：$\zeta=uv,\quad \eta=u+v$

若 u,v 是实数, 则 $z(u,v)$ 是 Γ 外部的一点, 因而 u,v 之一必是虚部非 0 的复数, 再根据这两式即知 u,v 共轭。

我们称 (3.7) 是圆锥曲线的表示 (3.5) 的诱导表示, 它给圆锥曲线问题的处理带来了非常大的便利性。

一般情况下, 若 $z(u,v)$ 所表示的点若再圆锥曲线内部, 则 u,v 通常是成对出现的, 因而可以直接使用而不必对 u,v 是否是虚数进行讨论。若为了严格起见, 使用 (3.8) 的表示即可。

3.6.4　直线的表示

若平面上的点用 (3.8) 表示, 则该平面上的直线有表示：

$$A\zeta+B\eta+C=0 \tag{3.9}$$

这只需要将 (3.8) 代入一般直线方程化简即可得到。该方程与 (3.8) 的各系数 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,3)$ 无关, 属于直线的射影性质。

若平面上的点用 (3.7) 表示, 则该平面上的直线有表示：

$$Auv+B(u+v)+C=0 \tag{3.10}$$

由上又可知，经过两点 $z(u_1,v_1),z(u_2,v_2)$ 的直线, 其上的点 $z(u,v)$ 满足行列式方程：

$$\det\begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1+v_1 & 1\\ u_2v_2 & u_2+v_2 & 1\\ uv & u+v & 1\end{pmatrix}=0 \tag{3.11}$$

若再限定两点均在圆锥曲线上，即 $u_1=v_1,u_2=v_2$, 则它又可化简为

$$2(uv+u_1u_2)=(u+v)(u_1+u_2) \tag{3.12}$$

此直线可看作是圆锥曲线外的一点 $z(u_1,u_2)$ 向圆锥曲线所引切线的切点连线，称为 $z(u_1,u_2)$ 的极线。

若点 $z(u,v)$ 是 $z(u_1)$ 切线上的点，即令上式中 $u_2\to u_1$, 则

$$(u-u_1)(v-u_1)=0$$

因 u,v 是可交换的, 所以 $z(u,u_1)$,(u 为任意实数) 即表示点 $z(u_1)$ 的切线。

3.6.5　交比

若平面上的点用 (3.8) 表示, 则共线的四点 $A=z(\zeta_1,\eta_1),B=z(\zeta_2,\eta_2),C=z(\zeta_3,\eta_3),D=z(\zeta_4,\eta_4)$ 的交比

$$\frac{A-C}{A-D}\frac{B-D}{B-C}=\frac{(\zeta_1-\zeta_3)(\zeta_2-\zeta_4)}{(\zeta_1-\zeta_4)(\zeta_2-\zeta_3)}=\frac{(\eta_1-\eta_3)(\eta_2-\eta_4)}{(\eta_1-\eta_4)(\eta_2-\eta_3)} \tag{3.13}$$

它也有另外两种表示:

$$\frac{A-C}{A-D}\frac{B-D}{B-C}=\frac{(\eta_1-\eta_3)(\zeta_2-\zeta_4)}{(\zeta_1-\zeta_4)(\eta_2-\eta_3)}=\frac{(\zeta_1-\zeta_3)(\eta_2-\eta_4)}{(\eta_1-\eta_4)(\zeta_2-\zeta_3)} \tag{3.14}$$

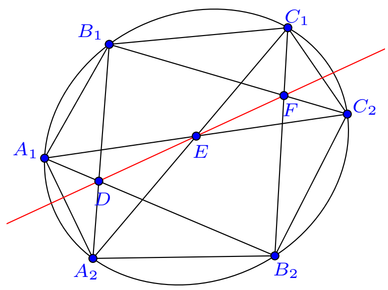
这只需要根据 A,B,C,D 共线的条件, 解出 (η_3,η_4) 、(ζ_3,ζ_4)、(ζ_3,η_4) 或 (η_3,ζ_4), 再代入化简即得。

3.7　部分应用示例

本节我们直接应用圆锥曲线最一般的表示 (3.5) 及相关推论来证明圆锥曲线的一些结论。

3.7.1　帕斯卡定理

圆锥曲线内接六边形，其三对边的交点共线。



证明：利用圆锥曲线的一般有理参数表示, 我们令

$$A_1=z(u_1),B_1=z(v_1),C_1=z(w_1),A_2=z(u_2),B_2=z(v_2),C_2=z(w_2)$$

对角线的交点可设为

$$D=z(p_1,q_1),E=z(p_2,q_2),F=z(p_3,q_3)$$

根据三点共线的结论, 即有如下方程组：

$$\begin{cases}2\left(p_1q_1+u_1v_2\right)=\left(p_1+q_1\right)\left(u_1+v_2\right)\\2\left(p_1q_1+u_2v_1\right)=\left(p_1+q_1\right)\left(u_2+v_1\right)\\2\left(p_2q_2+v_1w_2\right)=\left(p_2+q_2\right)\left(v_1+w_2\right)\\2\left(p_2q_2+v_2w_1\right)=\left(p_2+q_2\right)\left(v_2+w_1\right)\\2\left(p_3q_3+w_1u_2\right)=\left(p_3+q_3\right)\left(w_1+u_2\right)\\2\left(p_3q_3+w_2u_1\right)=\left(p_3+q_3\right)\left(w_2+u_1\right)\end{cases}$$

由此求出

$$\begin{aligned}p_1q_1&=\frac{u_1v_2\left(u_2+v_1\right)-u_2v_1\left(u_1+v_2\right)}{\left(u_1+v_2\right)-\left(u_2+v_1\right)},p_1+q_1=\frac{2\left(u_1v_2-u_2v_1\right)}{\left(u_1+v_2\right)-\left(u_2+v_1\right)}\\p_2q_2&=\frac{v_1w_2\left(v_2+w_1\right)-v_2w_1\left(v_1+w_2\right)}{\left(v_1+w_2\right)-\left(v_2+w_1\right)},p_2+q_2=\frac{2\left(v_1w_2-v_2w_1\right)}{\left(v_1+w_2\right)-\left(v_2+w_1\right)}\\p_3q_3&=\frac{w_1u_2\left(w_2+u_1\right)-w_2u_1\left(w_1+u_2\right)}{\left(w_2+u_1\right)-\left(w_1+u_2\right)},p_3+q_3=\frac{2\left(w_1u_2-w_2u_1\right)}{\left(w_2+u_1\right)-\left(w_1+u_2\right)}\end{aligned}$$

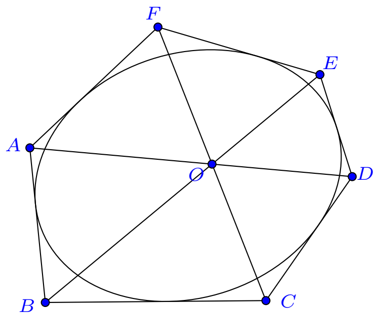
并计算知

$$\det\begin{pmatrix}p_1q_1&p_1+q_1&1\\p_2q_2&p_2+q_2&1\\p_3q_3&p_3+q_3&1\end{pmatrix}=0$$

这就证明了 D,E,F 三点共线。

3.7.2　布利昂雄定理

六条边和一条圆锥曲线相切的六边形的三条对角线共点。



证明：令

$$A = z(u_1, u_2), B = z(u_2, u_3), C = z(u_3, u_4), D = z(u_4, u_5), E = z(u_5, u_6), F = z(u_6, u_1)$$

若三条直线 AD, BE，CF 共点于 $z(p, q)$, 则应有:

$$\det\begin{pmatrix} pq & p+q & 1 \\ u_1u_2 & u_1+u_2 & 1 \\ u_4u_5 & u_4+u_5 & 1 \end{pmatrix} = 0,\ \det\begin{pmatrix} pq & p+q & 1 \\ u_2u_3 & u_2+u_3 & 1 \\ u_5u_6 & u_5+u_6 & 1 \end{pmatrix} = 0,\ \det\begin{pmatrix} pq & p+q & 1 \\ u_3u_4 & u_3+u_4 & 1 \\ u_6u_1 & u_6+u_1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

它们可以改写为 $A_kpq + B_k(p+q) + C_k = 0$, $(k = 1, 2, 3)$ 的形式。
存在解的条件即为

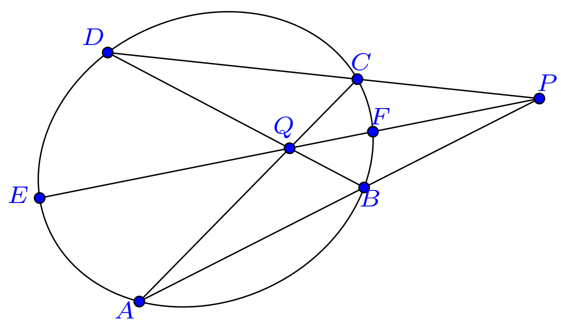
$$\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 1 \\ A_2 & B_2 & 1 \\ A_3 & B_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

计算即知这是成立的。事实上, 容易解出

$$pq = \frac{u_1u_2u_3u_4 - u_2u_3u_4u_5 + u_3u_4u_5u_6 - u_4u_5u_6u_1 + u_5u_6u_1u_2 - u_6u_1u_2u_3}{u_1u_2 - u_2u_3 + u_3u_4 - u_4u_5 + u_5u_6 - u_6u_1}$$
$$p+q = \frac{u_1u_2(u_4+u_5) - u_2u_3(u_5+u_6) + u_3u_4(u_6+u_1) - u_4u_5(u_1+u_2) + u_5u_6(u_2+u_3) - u_6u_1(u_3+u_4)}{u_1u_2 - u_2u_3 + u_3u_4 - u_4u_5 + u_5u_6 - u_6u_1}$$

3.7.3 三割线定理

给定圆锥曲线 Γ，由不在曲线上的一点 P 向曲线所引的两条直线，分别交于 A, B, C, D 四点，AC 和 BD 交于点 Q，PQ 的连线交 Γ 于 E, F，则有 $\frac{1}{PE} + \frac{1}{PF} = \frac{2}{PQ}$。



证明：令 $A = z(u_1), B = z(v_1), C = z(u_2), D = z(v_2), P = z(p_1, p_2), Q = z(q_1, q_2)$
则由 ABP 和 CDP 共线知

$$2(p_1p_2 + u_1v_1) = (p_1 + p_2)(u_1 + v_1)$$
$$2(p_1p_2 + u_2v_2) = (p_1 + p_2)(u_2 + v_2)$$

解出

$$
\begin{aligned}
p_1p_2 &= \frac{(u_1-u_2)v_1v_2+(v_1-v_2)u_1u_2}{u_1-u_2+v_1-v_2}\\
p_1+p_2 &= \frac{2(u_1v_1-u_2v_2)}{u_1-u_2+v_1-v_2}
\end{aligned}
$$

由 ADE 和 BCE 共线, 有

$$
\begin{aligned}
2(q_1q_2+u_1v_2) &= (q_1+q_2)(u_1+v_2)\\
2(q_1q_2+u_2v_1) &= (q_1+q_2)(u_2+v_1)
\end{aligned}
$$

解出

$$
\begin{aligned}
q_1q_2 &= \frac{(u_1-u_2)v_1v_2-(v_1-v_2)u_1u_2}{(u_1-u_2)-(v_1-v_2)}\\
q_1+q_2 &= \frac{2(u_1v_2-u_2v_1)}{(u_1-u_2)-(v_1-v_2)}
\end{aligned}
$$

P,Q 的连线与曲线 Γ 的交点设为 $E=z(w_1),F=z(w_2)$, 则 w_1,w_2 是如下方程的两根

$$
\det\begin{pmatrix} w^2 & 2w & 1\\ p_1p_2 & p_1+p_2 & 1\\ q_1q_2 & q_1q_2 & 1\end{pmatrix}=0
$$

代入前面求出的式子, 化简即为

$$
(u_1+u_2-v_1-v_2)w^2-2(u_1u_2-v_1v_2)w+u_1u_2(v_1+v_2)-(u_1+u_2)v_1v_2=0
$$

根据韦达定理

$$
\begin{aligned}
w_1w_2 &= \frac{u_1u_2(v_1+v_2)-v_1v_2(u_1+u_2)}{u_1+u_2-v_1-v_2}\\
w_1+w_2 &= \frac{2(u_1u_2-v_1v_2)}{u_1+u_2-v_1-v_2}
\end{aligned}
$$

而待证的结论等价于证明交比

$$
\frac{(P-F)(Q-E)}{(P-E)(Q-F)}=-1
$$

也就是

$$
\frac{(p_1p_2-w_2w_2)(q_1q_2-w_1w_1)}{(p_1p_2-w_1w_1)(q_1q_2-w_2w_2)}=-1
$$

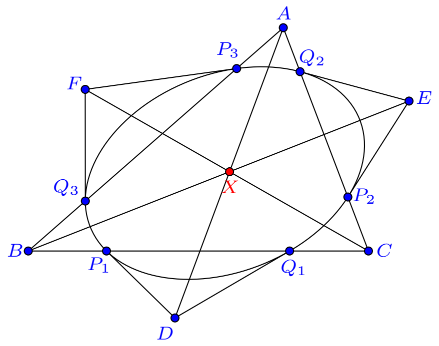
它可以简化为对称式

$$
2{w_1}^2{w_2}^2+2(p_1p_2+q_1q_2)w_1w_2-(p_1p_2+q_1q_2)(w_1+w_2)^2+2p_1p_2q_1q_2=0
$$

将前面所得各式代入即知等式是成立的，命题得证。

3.7.4　三线共点的一个问题

如果一条圆锥曲线与三角形 A,B,C 的每边交于两点，过这两点作切线，分别交于 D,E,F, 求证 AD,BE,CF 三线共点。



证明：设

$$A=z(u_1,v_1),B=z(u_2,v_2),C=z(u_3,v_3)$$

以及

$$P_1=z(p_1),Q_1=z(q_1),P_2=z(p_2),Q_1=z(q_2),P_3=z(p_3),Q_3=z(q_3)$$

则

$$\begin{cases} 2(u_1v_1+p_2q_2)=(u_1+v_1)(p_2+q_2) \\ 2(u_1v_1+p_3q_3)=(u_1+v_1)(p_3+q_3) \\ 2(u_2v_2+p_3q_3)=(u_2+v_2)(p_3+q_3) \\ 2(u_2v_2+p_1q_1)=(u_2+v_2)(p_1+q_1) \\ 2(u_3v_3+p_1q_1)=(u_3+v_3)(p_1+q_1) \\ 2(u_3v_3+p_2q_2)=(u_3+v_3)(p_2+q_2) \end{cases}$$

切线交点为

$$D=z(p_1,q_1),E=z(p_2,q_2),F=z(p_3,q_3)$$

若 AD,BE,CF 交于公共点 $X=z(\zeta,\eta)$，则如下三式应有公共解

$$\det\begin{pmatrix} \zeta\eta & \zeta+\eta & 1 \\ u_1v_1 & u_1+v_1 & 1 \\ p_1q_1 & p_1+q_1 & 1 \end{pmatrix}=0,\quad \det\begin{pmatrix} \zeta\eta & \zeta+\eta & 1 \\ u_2v_2 & u_2+v_2 & 1 \\ p_2q_2 & p_2+q_2 & 1 \end{pmatrix}=0,\quad \det\begin{pmatrix} \zeta\eta & \zeta+\eta & 1 \\ u_3v_3 & u_3+v_3 & 1 \\ p_3q_3 & p_3+q_3 & 1 \end{pmatrix}=0$$

根据线性方程组理论，它等价于

$$\det\begin{pmatrix} p_1q_1-u_1v_1 & p_1+q_1-(u_1+v_1) & p_1q_1(u_1+v_1)-(p_1+q_1)u_1v_1 \\ p_2q_2-u_2v_2 & p_2+q_2-(u_2+v_2) & p_2q_2(u_2+v_2)-(p_2+q_2)u_2v_2 \\ p_3q_3-u_3v_3 & p_3+q_3-(u_3+v_3) & p_3q_3(u_3+v_3)-(p_3+q_3)u_3v_3 \end{pmatrix}=0$$

事实上，我们由前面的方程组不难解出

$$\begin{aligned} p_1q_1&=-\frac{u_3v_3(u_2+v_2)-u_2v_2(u_3+v_3)}{(u_2+v_2)-(u_3+v_3)}, & p_1+q_1&=\frac{2(u_2v_2-u_3v_3)}{(u_2+v_2)-(u_3+v_3)} \\ p_2q_2&=-\frac{u_1v_1(u_3+v_3)-u_3v_3(u_1+v_1)}{(u_3+v_3)-(u_1+v_1)}, & p_2+q_2&=\frac{2(u_3v_3-u_1v_1)}{(u_3+v_3)-(u_1+v_1)} \\ p_3q_3&=-\frac{u_2v_2(u_1+v_1)-u_1v_1(u_2+v_2)}{(u_1+v_1)-(u_2+v_2)}, & p_3+q_3&=\frac{2(u_1v_1-u_2v_2)}{(u_1+v_1)-(u_2+v_2)} \end{aligned}$$

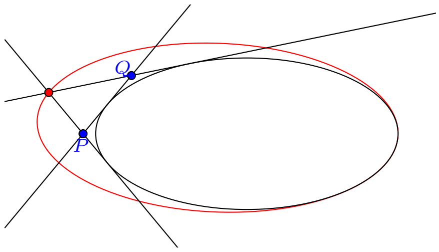
将其代入此式即知它是成立的，因而命题得证。

3.7.5 圆锥曲线内点的张角

点 $A(m,n)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内，且不与中心点重合，存在点 B，对任意经过点 A 的弦 CD,BA 都平分 $\angle CBD$。

3.7.6　定切线问题

l 是二次曲线 Γ 的一条定切线, 动点 P,Q 在 l 上且 PQ 是定值, 过 P,Q 作 Γ 的另一切线, 交点轨迹为与 Γ 相切的二次曲线。



证明：若直接使用二次曲线的一般形式，则会因系数过多而使得计算较为复杂, 我们可使用椭圆的标准形式 ①：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

它的一个参数表示是:

$$z(u)=a\frac{1-u^2}{1+u^2}+b\frac{2u}{1+u^2}i$$

由此, 椭圆外的任意一点可表示为：

$$z(u,v)=a\frac{1-uv}{1+uv}+b\frac{u+v}{1+uv}i$$

对于 Γ 的定切线 l, 设其切点表示为 $z(s)$, 则切线上的点 P,Q 可分别表示为

$$P=z(s,p),\quad Q=z(s,q)$$

$z(p,q)$ 则为 P,Q 向 Γ 所作的另一切线的交点。

由 PQ 为定长 L, 可得方程:

$$L^2(1+ps+qs+ns^2)^2=(p-q)^2(b^2+4a^2s^2-2b^2s^2+b^2s^4)$$

这是关于 p,q 的对称式, 我们引入参数: $m=p+q, n=pq$, 该式则为

$$L^2(1+ms+ns^2)^2=(m^2-4n)(b^2+4a^2s^2-2b^2s^2+b^2s^4)$$

交点的虚部和实部分别为:

$$x=a\frac{1-pq}{1+pq}=a\frac{1-n}{1+n},\quad y=b\frac{p+q}{1+pq}=\frac{bm}{1+n}$$

反解之，得

$$m=\frac{2ay}{b(a+x)},\quad n=\frac{a-x}{a+x}$$

代入前面 m,n 的方程, 即得

$$L^2(ab+abs^2+bx-bs^2x+2asy)^2+4(b^2+4a^2s^2-2b^2s^2+b^2s^4)(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)=0$$

可见它是一条二次曲线。并且易知, 它与曲线 Γ 的有唯一交点 (也即切点):

$$-a\frac{1-s^2}{1+s^2}-b\frac{2s}{1+s^2}i$$

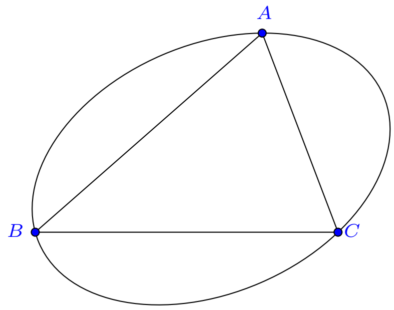
这是定切线 l 在 Γ 上的切点关于 Γ 中心的对称点。

①后文中我们将给出二次曲线的其他表示形式, 读者可应用它们对本问题进行计算。

3.8　三角形的外接圆锥曲线

3.8.1　有理表示

有理表示的导出



前文已知, $\triangle ABC$ 外接二次曲线上的点 P 可表示为

$$P=\frac{\lambda(1-u)A+\mu uB-\nu u(1-u)C}{\lambda(1-u)+\mu u-\nu u(1-u)}$$

若二次曲线是圆锥曲线, 而非双直线, 则 λ,ν,μ 均不等于 0, 令 $p=\frac{\mu}{\lambda},\quad q=\frac{\nu}{\lambda}$, 则它成为:

$$P=\frac{(1-u)A+puB-qu(1-u)C}{(1-u)+pu-qu(1-u)} \tag{3.15}$$

若设 $\overrightarrow{BA}=(s+it)\,\overrightarrow{BC}$, 则上式又成为

$$\overrightarrow{BP}=\frac{(1-u)(s+it-qu)}{1-u+pu-qu+qu^2}\,\overrightarrow{BC} \tag{3.16}$$

此式也可以由一般二次曲线的表示 (3.5) 导出:
设 $\overrightarrow{BP}=z(u)\,\overrightarrow{BC}$, 其中

$$z(u)=\frac{a_1u^2+2b_1u+c_1}{a_3u^2+2b_3u+c_3}+\frac{a_2u^2+2b_2u+c_2}{a_3u^2+2b_3u+c_3}i$$

根据同一圆锥曲线的不同二阶有理表示之间相差一个分式线性变换知, 我们总是可以令 $u\to 0$ 时, $P=A$, $u\to 1$ 时, $P=B$, $u\to\infty$ 时, $P=C$, 即有

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to 0}z(u)=\frac{c_1}{c_3}+i\frac{c_2}{c_3}=s+it\\
&\lim_{u\to 1}z(u)=\frac{a_1+2b_1+c_1}{a_3+2b_3+c_3}+i\frac{a_2+2b_2+c_2}{a_3+2b_3+c_3}=0\\
&\lim_{u\to\infty}z(u)=\frac{a_1}{a_3}+i\frac{a_2}{a_3}=1
\end{aligned}$$

解出:

$$c_1=sc_3,\quad c_2=tc_3,\quad a_1=a_3,\quad a_2=0,\quad 2b_1=-a_3-sc_3,\quad 2b_2=-tc_3$$

于是

$$z(u)=\frac{(1-u)(c_3s+ic_3t-ua_3)}{u^2a_3+2ub_3+c_3}$$

它关于参数 a_3,b_3,c_3 是齐次的, 因而又可令 $a_3=mc_3,\quad b_3=nc_3$, 从而简化为仅含两个参数的表示:

$$z(u)=\frac{(1-u)(s+it+mu)}{1+2nu+mu^2}$$

不难得到参数 m,n 与 p,q 的关系是:

$$m=q,\quad 2n=p-q-1$$

根据二次曲线的一般分类结果, 我们知道:
令 Δ 为上述表示中分母关于 u 的判别式，即

$$\Delta = 1 - 2p + p^2 - 2q - 2pq + q^2$$

$\Delta < 0$ 时, 椭圆; $\Delta > 0$ 时, 双曲线; $\Delta = 0$ 时, 抛物线。
对于抛物线, 我们再作参数代换:$q \to q^2, \quad p \to (1+q)^2$, 则得到 $\triangle ABC$ 外接抛物线的一个参数表示:

$$P = \frac{(1-u)A + (1+q)^2 uB - q^2 u(1-u)C}{(1+qu)^2} \tag{3.17}$$

若令 $\vec{BA} = (s+it)\,\vec{BC}$, 则它成为

$$\vec{BP} = \frac{(1-u)(s+it-q^2u)}{(1+qu)^2}\,\vec{BC} \tag{3.18}$$

曲线的中心

如果曲线是中心二次曲线, 即椭圆或双曲线, 根据曲线上的任意点关于中心的对称点也在曲线上这一性质，即可求出其中心，为:

$$O = \frac{(1-p-q)A - p(1-p+q)B - q(1+p-q)C}{1 - 2p + p^2 - 2q - 2pq + q^2} \tag{3.19}$$

或写为

$$\vec{BO} = \frac{(1-p-q)(s+it) - q(1+p-q)}{1 - 2p + p^2 - 2q - 2pq + q^2}\,\vec{BC} \tag{3.20}$$

它们也可以由参数表示转化为普通直角坐标方程，再应用二次曲线的一般理论得到。

曲线的端点

曲线的端点定义为与曲线上与中心距离为最值时的点。椭圆有四个端点, 双曲线有两个端点, 抛物线仅有一个端点。
我们可以应用此定义求出端点，因计算量大, 这里只给出结论, u 为如下方程的解时为曲线的端点[①]:

$$\begin{aligned}&(1-q)q^2(1-2s+s^2+t^2)(1-u)^4 + pq^2(1-4s+3s^2+3t^2+3u-4su+s^2u+t^2u)(1-u)^3\\&-p^2(1-p)(s^2+t^2) - p^2q^2(p-q)u^4 - p^2q^2(4-3u+2su)u^3 + p^2q(2s-3s^2-3t^2+4s^2u+4t^2u) = 0\end{aligned} \tag{3.21}$$

此方程在代换

$$u \to \frac{2-u+pu-qu}{1-p+q-2qu}$$

下保持形式不变, 因为同一轴上的两个端点关于中心对称。
若为抛物线, 令 $q \to q^2, \quad p \to (1+q)^2$, 则可求得唯一端点:

$$\vec{BT} = -\frac{(q^3-qs+q^2s-s^2-t^2)(q^3-qs+q^2s-s^2-2iqt-2iq^2t-t^2)}{4q(1+q)(q+s-it)^2(q+s+it)}\,\vec{BC}$$

曲线的轴方向

修改，圆锥曲线的对称轴求解, 根据对称性来求！
曲线的轴方向可由曲线同一轴上的两个端点确定。若令轴方向为 $1+ki$, 则由端点方程可导出关于 k 的方程:

$$\frac{2k}{k^2-1} = \frac{(1-p+q-2s)t}{q-s+ps-qs+s^2-t^2} \tag{3.22}$$

此方程的两个解 k_1 与 k_2 之积恒等于 -1, 这是两个轴方向正交的体现。

[①]注：若 C 为曲线的一个端点, 则方程将退化为 3 次方程, 此时补充 $u \to \infty$ 也是方程的一个解。

曲线的半轴长

中心二次曲线的实半轴长 $L \cdot BC$ 满足方程:

$$(1-2p+p^2-2q-2pq+q^2)^3L^4-4pq(1-2p+p^2-2q-2pq+q^2)(q-s+ps-qs+s^2+t^2)L^2-4p^2q^2t^2=0 \tag{3.23}$$

若为双曲线, 上述方程的一个虚根为 i 与虚半轴长的乘积。

曲线的离心率

由半轴长方程, 容易导出曲线的离心率方程:

$$\frac{(e^2-2)^2}{e^2-1}=\frac{4(q-s+ps-qs+s^2+t^2)^2}{(1-2p+p^2-2q-2pq+q^2)t^2} \tag{3.24}$$

曲线的焦点

这里我们先给出曲线焦点所满足的方程, 它由后文的 $Marden$ 定理给出:

3.8.2　三角形的最小面积外接椭圆问题

根据参数表示式，由格林面积公式即可求得三角形的外接椭圆面积为

$$S=-\frac{1}{2}\oint_L \mathrm{Im}\left(\vec{BP}\otimes\frac{d}{du}\vec{BP}\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{qt(1-u)^2}{(1-u+pu-qu+qu^2)^2}du\cdot BC^2=\frac{4pq\pi}{(-1+2p-p^2+2q+2pq-q^2)^{3/2}}S_{ABC}$$

其极值 $S_{\min}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}S_{ABC}$, 在 $p=q=1$ 处取得。
此时椭圆的中心 O 恰为三角形的重心, 并且椭圆的半轴长为

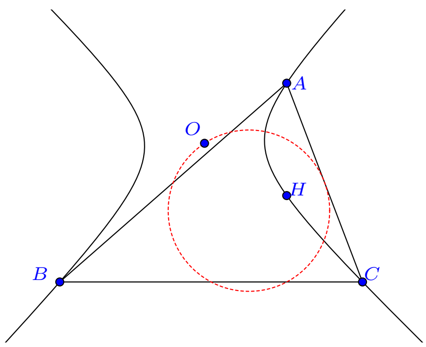
$$\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-s+s^2+t^2\pm\sqrt{1-2s+3s^2-2s^3+s^4-t^2-2st^2+2s^2t^2+t^4}}BC$$

又可化为三角形三边的表示:

$$\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2\pm 2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}$$

3.8.3　费尔巴哈双曲线

经过三角形顶点和垂心的二次曲线为等轴双曲线, 且它的中点轨迹是一个圆。



证明: 设 $\vec{BA}=(s+it)\vec{BC}$, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆锥曲线可表示为:

$$\vec{BP}=\frac{(1-u)(s+it-qu)}{1-u+pu-qu+qu^2}\vec{BC}$$

它经过垂心 $\vec{BH}=\frac{s(t+i-is)}{t}\vec{BC}$, 由此可解出

$$p=\frac{-q+s+qs-s^2-t^2}{s}$$

从而得到曲线的参数表示:

$$\vec{BP}=\frac{s(1-u)(s+it-qu)}{s-qu-s^2u-t^2u+qsu^2}\vec{BC}$$

判别式

$$\Delta=q^2-2qs^2+s^4+2qt^2+2s^2t^2+t^4=(q-s^2+t^2)^2+4s^2t^2>0$$

因而是双曲线。

曲线的半轴长 $L\cdot BC$ 满足方程

$$L^4(q^2-2qs^2+s^4+2qt^2+2s^2t^2+t^4)^3-4q^2s^4t^2(q-s-qs+s^2+t^2)^2=0$$

从而又知曲线是等轴的。

曲线的中心

$$\vec{BO}=\frac{s(q-s+it)}{q-s^2+2ist+t^2}\vec{BC}$$

做代换

$$w=\frac{q-s^2-2ist+t^2}{q-s^2+2ist+t^2}$$

即可化为

$$\vec{BO}=\left(\frac{is-is^2+t+2st+it^2}{4t}+\frac{(s-it)(-i+is+t)}{4t}w\right)\vec{BC}$$

它表示的是三角形的九点圆。

3.8.4 过四点的二次曲线

对于给定的不共线四点 A,B,C,D, 设

$$\vec{BA}=(s+it)\vec{BC},\quad \vec{BD}=(m+in)\vec{BC}$$

我们知道经过 A,B,C 三点的二次曲线 (记为 Γ) 上的点 P 可表示为

$$\vec{BP}=\frac{(1-u)(s+it-qu)}{1-u+pu-qu+qu^2}\vec{BC}$$

根据 D 点在该二次曲线上, 可解出其中一个参数

$$p=\frac{(nq-ns+mt)(n-ns-t+mt)}{n(mt-ns)}$$

因而

$$\vec{BP}=\frac{n(ns-mt)(1-u)(s+it-qu)}{n(ns-mt)(1+qu^2)-(n^2q+n^2s^2-nqt+nst-2mnst-mt^2+m^2t^2)u}\vec{BC}$$

曲线类型的判别式

$$\Delta=n^2q^2(n-t)^2-2nq(ns-mt)(n^2s-nt-mnt+nst+t^2-mt^2)+(ns-mt)^2(ns+t-mt)^2$$

如果四边形 $ABCD$ 非凸, 不妨设点 D 在三角形 ABC 内, 则根据

$$\operatorname{Im}\left(\frac{A-B}{C-B}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{D-A}{B-A}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{D-B}{C-B}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{D-C}{A-C}\right)>0$$

得到条件:

$$t>0,\quad -ns+mt>0,\quad n>0,\quad -n+ns+t-mt>0$$

此时改写判别式为

$$\Delta=\left(n(n-t)q-\frac{(ns-mt)(n^2s-nt-mnt+nst+t^2-mt^2)}{n-t}\right)^2-\frac{4nt(ns-mt)^3(-n+ns+t-mt)}{(n-t)^2}$$

即知它是恒大于 0 的，因而为双曲线。

曲线 Γ 离心率 e 的极值有如下两种情形:

(1). 离心率极值取 $e=\sqrt{2}$, 此时 Γ 是过 $ABCD$ 四点的等轴双曲线。

(2). 离心率极值取

$$\frac{e^4}{1-e^2}=\frac{(ns-ns^2-mt+m^2t+n^2t-nt^2)^2}{nt(ns-mt)(-n+ns+t-mt)}$$

如果四边形 $ABCD$ 为凸四边形, 根据凸四边形的表示, 令 $a=e^{i\angle A}, b=e^{i\angle B}, c=e^{i\angle C}$, 则

$$\vec{BA}=\lambda b\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=\frac{b(a^2b-a^2bc^2+\lambda-a^2\lambda)}{(1-abc)(1+abc)}\,\vec{BC}$$

比较即有:

$$\begin{aligned}
s&=\frac{(1+b^2)\lambda}{2b}\\
t&=\frac{i(1-b)(1+b)\lambda}{2b}\\
m&=\frac{1+a^2b^2-c^2-a^2b^2c^2+b\lambda-a^2b\lambda+bc^2\lambda-a^2bc^2\lambda}{2(1-abc)(1+abc)}\\
n&=\frac{i(1-c)(1+c)(1-a^2b^2-b\lambda+a^2b\lambda)}{2(1-abc)(1+abc)}
\end{aligned}$$

从而得到

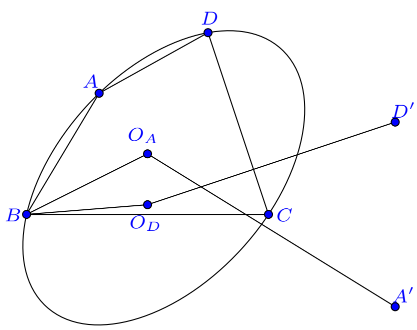
$$\frac{e^4}{1-e^2}=\frac{4b^2(1-a^2c^2)^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-a^2b^2c^2)}=\frac{\sin^2(A+C)}{\sin A\sin B\sin C\sin D}$$

根据最小离心率 e 的表示, 我们容易证明如下命题[1]:

设 $ABCD$ 是平面上的四点 (不是垂心组), 记 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_D, 半径为 R_D, 类似定义 O_A,O_B,O_C 及 R_A,R_B,R_C, 作 D 的等角共轭点 D', 类似定义 A', B', C', 则

$$\frac{O_AA'}{R_A}=\frac{O_BB'}{R_B}=\frac{O_CC'}{R_C}=\frac{O_DD'}{R_D}=\frac{2-e^2}{e^2}$$

其中 e 是过 $ABCD$ 四点的圆锥曲线 Ω 离心率的极小值。



[1] 该命题由叶中豪发现

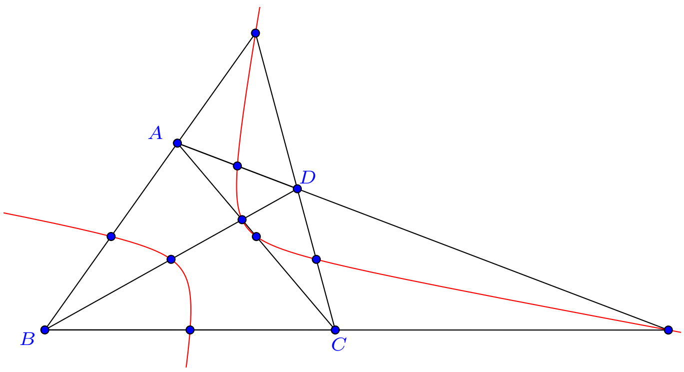
3.8.5 九点二次曲线

过 $ABCD$ 四点的二次曲线 Γ 的中心 O:

$$\vec{BO} = \frac{(1-p-q)(s+it)-q(1+p-q)}{1-2p+p^2-2q-2pq+q^2}\,\vec{BC}$$

将 p 的表示代入即知它是关于参数 q 的二次有理分式形式, 因而中心 O 的轨迹也是一条二次曲线 (记为 Ω)。

不难验证，Ω 经过 AB, BC, CD, DA, AC, BD 的中点, 并且经过 AB 与 CD 的交点, AC 与 BD 的交点, AD 与 BC 的交点, 故而曲线 Ω 又称为 A, B, C, D 的九点二次曲线。



根据这一性质, 我们重新用一个更简单的参数形式来表示它:

作代换

$$q = \frac{(ns-mt)(ns+t-mt)(-n+t-nu+nsu-mtu)}{n(n-t)(n-2ns-t+2mt-nu+nsu-mtu)}$$

则

$$\vec{BO} = \frac{(n-t)(ns-mt)-(n^2s-n^2s^2-2nst+mt^2+m^2t^2+in^2t-int^2-2in^2st+2imnt^2)u+(m+in)t(n-ns+mt)u^2}{2(n-t)(ns-mt)+4t(ns-mt)u-2t(-n+ns-mt)u^2}\,\vec{BC}$$

$u = 0, 1, \infty$ 时分别对应 BC, BA 和 BD 的中点。

九点二次曲线 Ω 的曲线类型一定不是抛物线, 因为根据判别式

$$\Delta = 16nt(-ns+mt)(n-ns-t+mt)$$

如果 Δ 等于 0, 则 $ABCD$ 四点中必有三点共线，这是不被允许的。

如果 $ABCD$ 是凸四边形，则根据

$$\operatorname{Im}\left(\frac{A-B}{C-B}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{B-C}{D-C}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{C-D}{A-D}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{D-A}{B-A}\right)>0$$

分别可知

$$t>0,\quad n>0,\quad n-ns-t+mt>0,\quad -ns+mt>0$$

从而 Δ 恒大于 0, 此时 Ω 是一条双曲线。(对于凸边形而言, 如果 $\lambda = \frac{(1-ab)(1+ab)}{(1-a)(1+a)b}$, 则中心的轨迹是一个点，否则是一条双曲线 Γ。)

如果 D 在逆时针三角形 ABC 的内部，则根据

$$\operatorname{Im}\left(\frac{A-B}{C-B}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{D-A}{B-A}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{D-B}{C-B}\right)>0,\quad \operatorname{Im}\left(\frac{D-C}{A-C}\right)>0$$

分别可得

$$t>0,\quad -ns+mt>0,\quad n>0,\quad n-ns-t+mt<0$$

因而 Δ 恒小于 0, 此时 Ω 是一条椭圆曲线。

Ω 的中点 O' 为

$$\vec{BO'} = \frac{1}{4}(1+s+it+m+in)\,\vec{BC}$$

恰是 $ABCD$ 的重心。

Ω 的半轴长 $L\cdot BC$ 满足方程:

$$\begin{aligned}256nt(ns-mt)(n-ns-t+mt)L^4+(n-t)^2(n-ns+mt)^2(ns+t-mt)^2\\-16(n-t)(n-ns+mt)(ns+t-mt)(ns-ns^2-mt+m^2t+n^2t-nt^2)L^2=0\end{aligned}$$

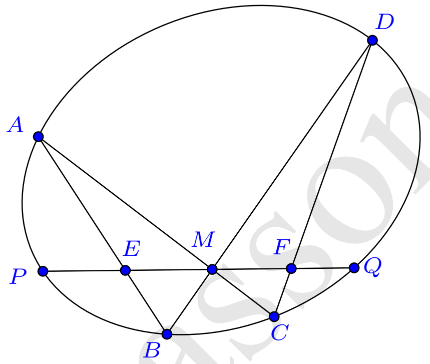
Ω 的离心率 e 满足方程[①]:

$$\frac{(e^2-2)^2}{e^2-1}=\frac{(ns-ns^2-mt+m^2t+n^2t-nt^2)^2}{nt(ns-mt)(-n+ns+t-mt)}$$

若四边形为 $ABCD$ 为凸四边形, 以 A,B,C,D 表示各内角，则为

$$\frac{(e^2-2)^2}{e^2-1}=\frac{\sin^2(A+C)}{\sin A\sin B\sin C\sin D}$$

3.8.6　坎迪定理



如图, 点 A,B,C,D,P,Q 在同一圆锥曲线上, AB 交 PQ 于 E, CD 交 PQ 于 F, AC、BD、PQ 三线共点于 M, 若点 P、E 同在 M 的一侧, 点 Q、F 同在 M 的另一侧, 则有长度关系:

$$\frac{1}{MP}-\frac{1}{MQ}=\frac{1}{ME}-\frac{1}{MF}$$

证明: 我们以 $\triangle APQ$ 为基本三角形, 设 $\vec{PA}=(s+it)\,\vec{PQ}$, 并令

$$z(u)=\frac{u(-p+pu+s+it)}{q+u-pu-qu+pu^2}$$

则圆锥曲线上的其余点可表示为

$$\vec{PB}=z(u)\,\vec{PQ},\quad \vec{PC}=z(v)\,\vec{PQ},\quad \vec{PD}=z(w)\,\vec{PQ}$$

在 PQ 上的点 M,E,F 设为

$$\vec{PM}=\lambda\,\vec{PQ},\quad \vec{PE}=\mu\,\vec{PQ},\quad \vec{PF}=\eta\,\vec{PQ}$$

根据 A,E,B 三点共线, 解得

$$\mu=\frac{pu}{pu-q}$$

[①] 由此即知曲线 Γ 的最小离心率 e_1 与曲线 Ω 的离心率 e_2 存在简单代数关系:

$${e_1}^2+{e_2}^2=2\quad 或\quad {e_1}^2+{e_2}^2-{e_1}^2{e_2}^2=2$$

它也可写作如下形式:

$$|\frac{{e_1}^2}{{e_1}^2-2}|=|\frac{{e_2}^2-2}{{e_2}^2}|$$

根据 C,F,D 三点共线, 解得

$$\eta=\frac{pvw}{pvw-q}$$

根据 A,M,C 三点共线, 解得

$$\lambda=\frac{pv}{pv-q}$$

根据 B,M,D 三点共线, 解得

$$\lambda=\frac{puw}{puw-q}$$

由此又有关系式 $v=uw$。

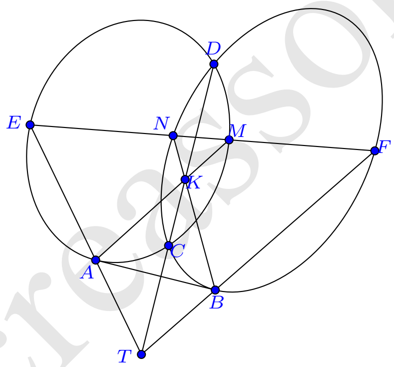
待证的结论等价于

$$\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{1-\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}-\frac{1}{\eta-\lambda}$$

将前面的各式代入, 即知它是成立的。

3.8.7　两个相交椭圆的问题

如图，两个圆锥曲线 Γ_1 和 Γ_2 交于 C,D 两点, T 是直线 CD 上不与 C,D 重合的任意点; AB 是 Γ_1 和 Γ_2 的一条公切线, 切点分别是 A 和 B; TA 与 Γ_1 交于 E, TB 与 Γ_2 交于 F; 直线 EF 分别与 Γ_1 和 Γ_2 交于 M,N; AM 和 BN 交于 K。求证: (1). K 在直线 CD 上。(2). 当 T 在 CD 上运动时, 直线 EF 经过一个定点。



证明: 因为 Γ_1 经过 C,D,A 三点, Γ_2 经过 C,D,B 三点, 根据经过三点的圆锥曲线的参数表示,

若令

$$\vec{CA}=(a+bi)\,\vec{CD},\quad \vec{CB}=(c+di)\,\vec{CD}$$

则 Γ_1 上的点 P 有表示:

$$\vec{CP}=\frac{p_1u-q_1u(1-u)(a+ib)}{1-u+p_1u-q_1u(1-u)}\,\vec{CD}$$

Γ_2 上的点 Q 有表示:

$$\vec{CQ}=\frac{p_2v-q_2v(1-v)(a+ib)}{1-v+p_2v-q_2v(1-v)}\,\vec{CD}$$

Γ_1 在 A 处的切向量为:

$$\lim_{u\to\infty}u^2\frac{d}{du}\vec{CP}=\frac{(p_1-1)(a+ib)-p_1}{q_1}\,\vec{CD}$$

Γ_2 在 B 处的切向量为:

$$\lim_{v\to\infty}v^2\frac{d}{dv}\vec{CQ}=\frac{(p_2-1)(a+ib)-p_2}{q_2}\,\vec{CD}$$

因为 AB 是 Γ_1 和 Γ_2 的公切线，所以这两切向量应是平行的, 并且平行于 AB, 由此得:

$$bc-ad-bcp_1-dp_1+adp_1+bp_2-bcp_2+adp_2-bp_1p_2+bcp_1p_2+dp_1p_2-adp_1p_2=0$$

$$bc-ad+bp_1-bcp_1-dp_1+adp_1=0$$

解出

$$p_1 = p_2 = \frac{bc - ad}{-b + bc + d - ad}$$

设 T 的表示为

$$\vec{CT} = \lambda \vec{CD}$$

则容易求出

$$\vec{CE} = \frac{\lambda(bc - ad - b\lambda + d\lambda) + (a + ib)(b - bc - d + ad)(1 - \lambda)\lambda q_1}{bc - ad - b\lambda + d\lambda + (b - bc - d + ad)(1 - \lambda)\lambda q_1} \vec{CD}$$

$$\vec{CF} = \frac{\lambda(bc - ad - b\lambda + d\lambda) + (c + id)(b - bc - d + ad)(1 - \lambda)\lambda q_2}{bc - ad - b\lambda + d\lambda + (b - bc - d + ad)(1 - \lambda)\lambda q_2} \vec{CD}$$

进而容易求出 EF 与 Γ_1 和 Γ_2 的交点 M, N, 因其表示较长, 这里不写出来。

AM 与 BN 的交点 K 为

$$\vec{CK} = \frac{(bc - ad)^2(b - bc - d + ad)(1 - \lambda)q_1q_2 + (bc - ad)(bc - ad - b\lambda + d\lambda)(bq_1 - dq_2)}{(b - d)(bc - ad - b\lambda + d\lambda)(bq_1 - dq_2) + (b - bc - d + ad)((bc - ad)^2 + (b - d)(b - 2bc - d + 2ad)\lambda)q_1q_2} \vec{CD}$$

显然它在直线 CD 上。

对于第二个结论, 若存在定点, 设该定点为 Z:

$$\vec{CZ} = (x + yi) \vec{CD}$$

则由 Z, E, F 三点共线得到关于 λ 的二次方程，该方程较长，这里不列出。

由定点条件知, λ 的各项系数均为 0, 由此即可解出 x, y, 从而得到定点的表示:

$$\vec{CZ} = \frac{aq_1 - cq_2 + ibq_1 - idq_2}{q_1 - q_2} \vec{CD}$$

该定点也在 AB 直线上。

3.9　已知中点及曲线上一点

3.9.1　有理表示

对于中心圆锥曲线 Γ，如果已知其中心 O 及 Γ 上的一点 A, 求 Γ 的表示。

解：A 关于 O 的对称点 B 显然也在曲线 Γ 上, $\vec{OB} = -\vec{OA}$。我们只需再假设曲线上另有一点 C: $\vec{OC} = (a + bi)\vec{OA}$, 则可利用过三点的圆锥曲线参数表示：对 Γ 上的任意一点 P，有参数表示

$$\vec{OP} = \frac{(1 - u)\vec{OA} + pu\vec{OB} - qu(1 - u)\vec{OC}}{(1 - u) + pu - qu(1 - u)} = \frac{1 - u - pu - aqu - ibqu + aqu^2 + ibqu^2}{1 - u + pu - qu + qu^2} \vec{OA}$$

O 是其中心, 故应有 $p = q - 1$, 从而得到 Γ 的一个有理表示:

$$\vec{OP} = \frac{1 - qu - qu(1 - u)(a + ib)}{1 - 2u + qu^2} \vec{OA}$$

这个表示是存在参数冗余的, 将其转为直角坐标方程即可看出。

我们可以先作代换 $aq = m, bq = n$ 稍作化简, 成为

$$\vec{OP} = \frac{1 - qu - u(1 - u)(m + in)}{1 - 2u + qu^2} \vec{OA}$$

然后作代换[①]

$$q \to 1 - n^2\eta, \quad m \to 1 + n\zeta + n^2\eta$$

以及参数 u 的代换:

$$u \to \frac{u}{u-n}$$

则得到曲线 Γ 的仅含两个参数的表示:

$$\vec{OP} = \frac{1 + \zeta u + \eta u^2 + iu}{1 - \eta u^2}\vec{OA} \tag{3.25}$$

根据下面的表示，这里实际上再令 $\eta \to -\frac{\eta}{4}, u \to 2u$ 更为合理。待后续修改之！

$\eta > 0$ 时为双曲线, $\eta < 0$ 时为椭圆。

曲线的半轴长 $L \cdot OA$ 满足方程:

$$4L^4\eta + L^2(1 + \zeta^2 - 4\eta) - 1 = 0$$

离心率满足方程:

$$\frac{(2-e^2)^2}{1-e^2} = \frac{(1+\zeta^2-4\eta)^2}{-4\eta}$$

如果 OA 是实半轴, 则 $L = 1$ 是上述方程的一个解，则 $\zeta = 0$, 于是得到

$$\vec{OP} = \frac{1 + iu + \eta u^2}{1 - \eta u^2}\vec{OA} \tag{3.26}$$

此时离心率满足方程:

$$(1 - e^2 + 4\eta)(1 + 4\eta - 4e^2\eta) = 0$$

若 A 是焦点所在轴上的端点, 则 η 应取 $\eta = \frac{1}{4(e^2-1)}$ 的解。

如果已知曲线的中心 O 及一个焦点 F, 根据上面的表示 (3.26) 以及 $\vec{OF} = e\,\vec{OA}$ 立即可得曲线的一个表示:

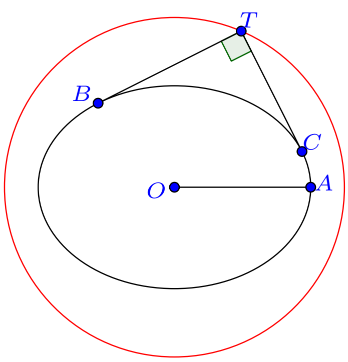
$$\vec{OP} = \frac{(2 + iu - ieu)(2 + iu + ieu)}{e(4 + u^2 - e^2u^2)}\vec{OF}$$

作代换 $u \to 2u$ 得到简洁些的表示:

$$\vec{OP} = \frac{(1-e^2)(1+iu)^2 - e^2u^2}{e(1 - e^2 + u^2)}\vec{OF} \tag{3.27}$$

3.9.2 蒙日圆

给定中心圆锥曲线 Γ, 任意两条相互垂直的切线的交点都在同一个圆上, 且该圆的圆心是 Γ 的中心。



[①]这个代换是可逆的:

$$\zeta = \frac{m+q-2}{n}, \eta = \frac{1-q}{n^2}$$

证明：记 Γ 的中心为 O, 取其实轴上的一个端点 A, 设 Γ 上两切线的切点为 B, C, 则它们可表示为

$$\vec{OB} = \frac{1+iu+\eta u^2}{1-\eta u^2}\,\vec{OA}, \quad \vec{OC} = \frac{1+iv+\eta v^2}{1-\eta v^2}\,\vec{OA}$$

它们的切向量相互垂直, 即有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d}{du}\,\vec{OB} \otimes \frac{d}{dv}\,\vec{OC}\right) = 0$$

由此得

$$1+u^2\eta+v^2\eta+16uv\eta^2+u^2v^2\eta^2=0$$

两切线的交点 T 可表示为

$$\vec{BT} = \frac{2+2uv\eta+iu+iv}{2(1-\eta uv)}\,\vec{OA}$$

我们设它可重表示为

$$\vec{BT} = (x+yi)\,\vec{OA}$$

二者比较即知

$$u+v=\frac{4y}{1+x}, \quad uv=\frac{-1+x}{(1+x)\eta}$$

将其代入前面所得的方程化简得到

$$x^2+y^2=1-\frac{1}{4\eta}$$

这清楚地表明了交点的轨迹是为以 O 为圆心的圆。

3.9.3　二次曲线特征点和特征量

对于任意给定的一条中心二次曲线, 我们可以通过参数表示 (3.26) 来求出其端点。
例如, 直角坐标系下, 给定一条二次曲线 $f(x,y)=x^2-3xy+2y^2+5x-4y+6=0$
首先，根据

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x-3y+5=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3x+4y-4=0 \end{cases}$$

求出曲线的中心, 为 $O=(8,7)$。
设曲线的端点为 $T=(p,q)$, 则由 (3.26) 知, 对于曲线上的任意一点 (x,y), 总是存在参数 u, 使得：

$$x+yi-(8+7i)=\frac{1+iu+\eta u^2}{1-\eta u^2}(p+qi-(8+7i))$$

分离实部和虚部即为：

$$x=\frac{p+7u-qu-16u^2\eta+pu^2\eta}{1-u^2\eta}$$
$$y=\frac{q-8u+pu-14u^2\eta+qu^2\eta}{1-u^2\eta}$$

将此代入曲线方程, 得到关于 u 的四次方程。因 u 是自由变量, 关于 u 的各项系数应等于 0, 从而得到

$$\begin{cases} 6+5p+p^2-4q-3pq+2q^2=0 \\ 67+34p-3p^2-58q+2pq+3q^2=0 \\ 345-53p+2p^2-38q+3pq+q^2-36\eta+10p\eta+2p^2\eta-8q\eta-6pq\eta+4q^2\eta=0 \end{cases}$$

根据前两式即可得到端点的两组解：

$$\begin{cases} p=8-\sqrt{48+78\sqrt{\frac{2}{5}}}, \quad q=7-\sqrt{24+42\sqrt{\frac{2}{5}}} \\ p=8+\sqrt{48+78\sqrt{\frac{2}{5}}}, \quad q=7+\sqrt{24+42\sqrt{\frac{2}{5}}} \end{cases}$$

另两组不符合要求的解实际上是虚端点：

$$\begin{cases} p = 8 - i\sqrt{-48 + 78\sqrt{\frac{2}{5}}}, \quad q = 7 + i\sqrt{-24 + 42\sqrt{\frac{2}{5}}} \\ p = 8 + i\sqrt{-48 + 78\sqrt{\frac{2}{5}}}, \quad q = 7 - i\sqrt{-24 + 42\sqrt{\frac{2}{5}}} \end{cases}$$

由此, 我们容易进一步计算出曲线的焦点和离心率：

$$\begin{cases} F_1 = (8 - 2\sqrt{6\sqrt{10} + 6}, 7 - 2\sqrt{6\sqrt{10} - 6}) \\ F_2 = (8 + 2\sqrt{6\sqrt{10} + 6}, 7 + 2\sqrt{6\sqrt{10} - 6}) \\ e = \sqrt{20 - 6\sqrt{10}} \end{cases}$$

这也可采用 (3.27) 及上面相同的方法直接求解。

对于一般的二次方程：

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

由上面的方法可求出, 焦点是如下方程的根：

$$(b^2 - ac)z^2 + 2(be - cd + ibd - iae)z - d^2 + e^2 + af - cf + 2ibf - 2ide = 0 \tag{3.28}$$

此式虽然是由中心二次曲线导出, 但它对抛物线也同样适用, 因为抛物线可以看作是中心二次曲线的一个极限情形。

离心率 (这里记为 s) 是如下方程的一个正根：

$$(b^2 - ac)s^4 - (a^2 + 4b^2 - 2ac + c^2)s^2 + a^2 + 4b^2 - 2ac + c^2 = 0 \tag{3.29}$$

如果曲线是中心二次曲线, 则其端点 T 可由上面两个方程的解表示出来：

$$T = \frac{z}{s} + \frac{(ibd - cd - iae + be)(1 - s)}{(b^2 - ac)s} \tag{3.30}$$

若是抛物线，则端点 T 为：

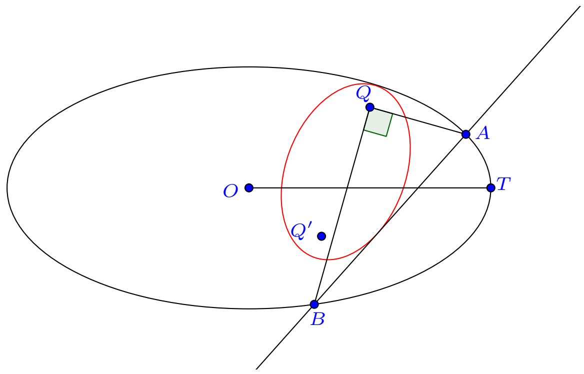
$$\begin{aligned} T &= \frac{2a(bd - ae)(ad + be) + ia(ad + be)^2 - i(a^2 + b^2)^2 f}{2(a^2 + b^2)(a - ib)(ae - bd)} \\ &= \frac{2c(cd - be)(bd + ce) + ic(bd + ce)^2 - i(b^2 + c^2)^2 f}{2(b^2 + c^2)(b - ic)(be - cd)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

半轴长 L 满足方程：

$$(b^2 - ac)^3 L^4 - (a + c)(b^2 - ac)(cd^2 - 2bde + ae^2 + b^2 f - acf)L^2 - (cd^2 - 2bde + ae^2 + b^2 f - acf)^2 = 0 \tag{3.32}$$

3.9.4　垂直直线的包络曲线问题

给定中心圆锥曲线 Γ 及其所在平面上的一个定点 Q。若动直线 l 与 Γ 的两个相异交点 A、B 满足 $QA \perp QB$, 则 l 的一条包络曲线也是二次曲线, 且 Q 是该曲线的一个焦点。



证明：设曲线 Γ 的中心为 O, 一个端点为 T, 则曲线上的点 A, B 可表示为:

$$\vec{OA} = \frac{1+iu+\eta u^2}{1-\eta u^2}\,\vec{OT}$$

$$\vec{OB} = \frac{1+iv+\eta v^2}{1-\eta v^2}\,\vec{OT}$$

又设 $\vec{OQ} = (p+iq)\,\vec{OT}$, 则由 $QA\perp QB$ 得到

$$\begin{gathered}1-2p+p^2+q^2-qu-qv+uv+u^2\eta-p^2u^2\eta-q^2u^2\eta+qu^2v\eta+v^2\eta\\-p^2v^2\eta-q^2v^2\eta+quv^2\eta+u^2v^2\eta^2+2pu^2v^2\eta^2+p^2u^2v^2\eta^2+q^2u^2v^2\eta^2=0\end{gathered}$$

设直线 AB 上的任意点 Z 的表示为: $\vec{OZ} = (x+iy)\,\vec{OT}$, 由 A, B, Z 共线, 有:

$$1-x-uv\eta-uvx\eta+2uy\eta+2vy\eta=0$$

以上两式关于 u, v 是对称的，令 $u+v=m, uv=n$, 由两个方程消去参数 n，得：

$$\begin{gathered}m^2\eta^2(1-p^2-q^2+2x-2p^2x-2q^2x+x^2-p^2x^2-q^2x^2+2qy+2qxy+4y^2\eta+8py^2\eta+4p^2y^2\eta+4q^2y^2\eta)+\\+2m\eta(-qx-qx^2+y+xy+4py\eta+4p^2y\eta+4q^2y\eta-4xy\eta-4pxy\eta)+1-x^2+4p^2\eta+4q^2\eta-8px\eta+4x^2\eta=0\end{gathered}$$

曲线的包络线要求上式左方关于参数 m 的导数也为 0, 即

$$\begin{gathered}m\eta(1-p^2-q^2+2x-2p^2x-2q^2x+x^2-p^2x^2-q^2x^2+2qy+2qxy+4y^2\eta+8py^2\eta+4p^2y^2\eta+4q^2y^2\eta)\\-qx-qx^2+y+xy+4py\eta+4p^2y\eta+4q^2y\eta-4xy\eta-4pxy\eta=0\end{gathered}$$

由这两式消去参数 m，得知包络线有三条, 其中两条是直线，另外一条是二次曲线，为：

$$\begin{gathered}1-p^2-q^2-x^2+p^2x^2+2qy-y^2+4p^2\eta-4p^4\eta+4q^2\eta-8p^2q^2\eta-4q^4\eta-8px\eta+8p^3x\eta+8pq^2x\eta\\+4x^2\eta-4p^2x^2\eta-4q^2x^2\eta+8p^2qy\eta+8q^3y\eta-8pqxy\eta+4y^2\eta-4p^2y^2\eta-4q^2y^2\eta+16q^2y^2\eta^2=0\end{gathered}$$

根据一般二次曲线的焦点方程 XX 式，即知该曲线的一个焦点是 Q, 另一个焦点 Q' 是:

$$\vec{OQ'} = \frac{(p-iq)(1+4\eta)}{-1+4\eta}\,\vec{OT}$$

直角坐标系下, 对于一般的二次曲线:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

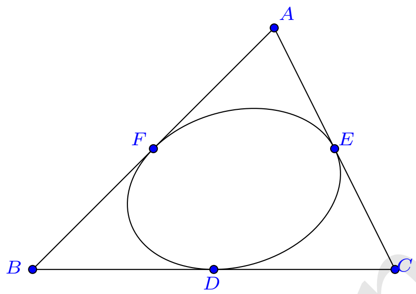
定点 $Q(p,q)$ 所对应的上述二次曲线的另一个焦点是:

$$(-\frac{ap+2bq-cp+2d}{a+c},-\frac{-aq+2bp+cq+2e}{a+c})$$

3.10 三角形的相切圆锥曲线

3.10.1 有理表示

有理表示的导出



如图, 若圆锥曲线与三角形 ABC 的三边相切于点 D、E、F, 设 $BD:DC=\lambda, CE:EA=\mu, AF:FB=\nu$, 即

$$D=\frac{B+\lambda C}{1+\lambda},\quad E=\frac{C+\mu A}{1+\mu},\quad F=\frac{A+\nu B}{1+\nu}$$

我们应用三角形外接圆锥曲线的表示, 经过 D、E、F 三点的外接圆锥曲线上的点 P 可表示为

$$P=\frac{(1-u)D+puE-qu(1-u)F}{(1-u)+pu-qu(1-u)}$$

然后求出该曲线在 D、E、F 处的切向量, 分别为:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_D}&=\lim_{u\to 0}\frac{dP}{du}=-\frac{A(q-p\mu+q\mu-p\mu\nu)}{(1+\mu)(1+\nu)}-\frac{B(p-q+p\nu+q\lambda\nu)}{(1+\lambda)(1+\nu)}+\frac{C(p+q\lambda-p\lambda\mu+q\lambda\mu)}{(1+\lambda)(1+\mu)}\\
\boldsymbol{v_E}&=\lim_{u\to 1}\frac{dP}{du}=\frac{A(q+\mu+\mu\nu-q\mu\nu)}{p(1+\mu)(1+\nu)}-\frac{B(1+\nu-q\nu-q\lambda\nu)}{p(1+\lambda)(1+\nu)}+\frac{C(1-q-q\lambda-\lambda\mu)}{p(1+\lambda)(1+\mu)}\\
\boldsymbol{v_F}&=\lim_{u\to\infty}u^2\frac{dP}{du}=-\frac{A(1-p+\mu+p\mu\nu)}{q(1+\mu)(1+\nu)}+\frac{B(1+p\nu-\lambda\nu+p\lambda\nu)}{q(1+\lambda)(1+\nu)}-\frac{C(p-\lambda+p\lambda-\lambda\mu)}{q(1+\lambda)(1+\mu)}
\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{v_D}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行, $\boldsymbol{v_E}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 平行, $\boldsymbol{v_F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 平行,
所以 $\boldsymbol{v_D}$ 的表示中关于 A 的系数应为 0, $\boldsymbol{v_E}$ 的表示中关于 B 的系数应为 0, $\boldsymbol{v_F}$ 的表示中关于 C 的系数应为 0, 即有

$$q-p\mu+q\mu-p\mu\nu=0,\quad 1+\nu-q\nu-q\lambda\nu=0,\quad p-\lambda+p\lambda-\lambda\mu=0$$

由此可知, 圆锥曲线在三边相切的比例应满足关系 $\lambda\mu\nu=1$, 否则无解。$\lambda\mu\nu=1$ 意味着 AD,BE,CF 三线共点。

$$p=\frac{\lambda(1+\mu)}{1+\lambda},\quad q=\frac{1+\lambda\mu}{1+\lambda}$$

从而我们得到, 与 $\triangle ABC$ 三边相切的圆锥曲线, 它的一个参数表示是:

$$P=\frac{\lambda\mu u^2A+(1-u)^2B+\lambda C}{u^2\lambda\mu+(1-u)^2+\lambda}\tag{3.33}$$

如果令 $\vec{BA} = (s+it)\,\vec{BC}$, 上式又成为

$$\vec{BP} = \frac{\lambda\mu u^2(s+it)+\lambda}{\lambda\mu u^2+(1-u)^2+\lambda}\,\vec{BC} \tag{3.34}$$

它也可由一般的二阶有理表示式 (3.5) 导出, 过程是类似的。

曲线类型由上述表示中分母关于 u 的判别式确定

$$\Delta = -4\lambda(1+\mu+\lambda\mu)$$

如果 λ,μ,ν 均是正实数, 那么显然为椭圆。

如果曲线是抛物线, 因 λ,μ,ν 不能为 0, 所以 $1+\mu+\lambda\mu=0$, 即

$$\mu = -\frac{1}{1+\lambda},\quad \nu = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$$

此时曲线的参数表示为:

$$P = \frac{-\lambda u^2 A+(1+\lambda)(1-u)^2 B+\lambda(1+\lambda)C}{(1+\lambda-u)^2} \tag{3.35}$$

曲线的中心

如果曲线是中心二次曲线, 则曲线的中心 O 为:

$$O = \frac{(1+\lambda)\mu A+(1+\mu)B+(1+\lambda\mu)C}{2(1+\mu+\lambda\mu)} \tag{3.36}$$

或写为

$$\vec{BO} = \frac{(1+\lambda)\mu(s+it)+1+\lambda\mu}{2(1+\mu+\lambda\mu)}\,\vec{BC} \tag{3.37}$$

曲线的端点

u 为如下方程的解时为曲线的端点:

$$\begin{aligned}
&s\mu(1-u^2+\lambda-u^2\lambda\mu)(1-2u+u^2+\lambda-2u\lambda-2u\lambda\mu+u^2\lambda\mu-2u\lambda^2\mu)\\
&+(s^2+t^2)u(1-u+\lambda)\mu^2(1-2u+u^2+2\lambda-2u\lambda-u^2\lambda+\lambda^2-u^2\lambda\mu-u^2\lambda^2\mu)\\
&+(1-u-u\lambda\mu)(1-2u+u^2-\lambda-\lambda\mu-2u\lambda\mu+2u^2\lambda\mu-\lambda^2\mu+u^2\lambda^2\mu^2)=0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

方程在如下代换下保持不变

$$u \to \frac{1-u+\lambda}{1-u-u\lambda\mu}$$

特别地, 对于抛物线, 它仅有唯一的有效解:

$$u = \frac{-1+s+s\lambda}{-s+s^2+t^2+s^2\lambda+t^2\lambda}$$

曲线的轴方向

若令轴方向为 $1+ki$, 则 k 的方程:

$$\frac{2k}{1-k^2} = \frac{2t\mu(1-\lambda+s\mu-\lambda\mu+2s\lambda\mu-\lambda^2\mu+s\lambda^2\mu)}{1+2s\mu+2\lambda\mu-2s\lambda\mu+s^2\mu^2-t^2\mu^2-2s\lambda\mu^2+2s^2\lambda\mu^2-2t^2\lambda\mu^2+\lambda^2\mu^2-2s\lambda^2\mu^2+s^2\lambda^2\mu^2-t^2\lambda^2\mu^2} \tag{3.39}$$

曲线的半轴长

曲线的半轴长 $L \cdot BC$ 满足方程:

$$\begin{aligned}&4L^4(1+\mu+\lambda\mu)^3 - L^2(1+\mu+\lambda\mu)(1+2s\mu+2\lambda\mu-2s\lambda\mu+s^2\mu^2+t^2\mu^2\\&-2s\lambda\mu^2+2s^2\lambda\mu^2+2t^2\lambda\mu^2+\lambda^2\mu^2-2s\lambda^2\mu^2+s^2\lambda^2\mu^2+t^2\lambda^2\mu^2)+t^2\lambda\mu^2=0\end{aligned} \tag{3.40}$$

若为双曲线, 上述方程的一个虚根为 i 与虚半轴长的乘积。

曲线的离心率

曲线的离心率方程:

$$\frac{(e^2-2)^2}{1-e^2} = \frac{(1+2s\mu+2\lambda\mu-2s\lambda\mu+s^2\mu^2+t^2\mu^2-2s\lambda\mu^2+2s^2\lambda\mu^2+2t^2\lambda\mu^2+\lambda^2\mu^2-2s\lambda^2\mu^2+s^2\lambda^2\mu^2+t^2\lambda^2\mu^2)^2}{4t^2\lambda\mu^2(1+\mu+\lambda\mu)} \tag{3.41}$$

曲线的焦点

3.10.2　三角形的最大面积内切椭圆问题

与三角形各边相切的椭圆面积为

$$S = -\frac{1}{2}\oint_L \operatorname{Im}\left(\vec{BP}\otimes\frac{d}{du}\vec{BP}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\lambda^2\mu u}{(1-2u+u^2+\lambda+u^2\lambda\mu)^2}du\cdot BC^2 = \frac{\pi\lambda^2\mu}{(\lambda+\lambda\mu+\lambda^2\mu)^{3/2}}S_{ABC}$$

其极值 $S_{\min} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}S_{ABC}$, 在 $\lambda=\mu=\nu=1$ 处取得。
此时椭圆的中心 O 恰为三角形的重心, 并且椭圆的半轴长为

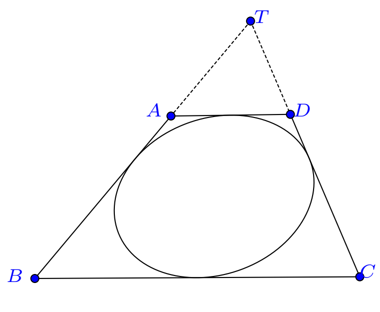
$$\frac{\sqrt{1-s+s^2+t^2+\sqrt{1-2s+3s^2-2s^3+s^4-t^2-2st^2+2s^2t^2+t^4}}}{3\sqrt{2}}BC$$

又可化为三角形三边的表示:

$$\frac{1}{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2\pm 2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}}$$

3.10.3　四边形的相切圆锥曲线

若四边形 $ABCD$ 非平行四边形, AB 不平行于 CD, 则直线 AB 与直线 CD 相交于一个有限点 T, 从而与该四边形相切的圆锥曲线也是 $\triangle TBC$ 的相切圆锥曲线，从而可以直接应用上节的表示。



设

$$\vec{BA} = (s+it)\,\vec{BC}, \quad \vec{BD} = (m+in)\,\vec{BC}$$

AB 与 CD 的交点 T 为:

$$\vec{BT} = \frac{n(s+it)}{ns+t-mt}\,\vec{BC}$$

因而与 $\triangle TBC$ 相切的圆锥曲线可设为

$$\vec{BP}=\frac{\lambda(ns+t-mt+nsu^2\mu+intu^2\mu)}{(ns+t-mt)(1-2u+u^2+\lambda+u^2\lambda\mu)}\vec{BC}$$

根据它与边 AD 相切的条件，得到

$$\lambda=\frac{ns+t-mt+ns\mu-mt\mu}{(n-ns-t+mt)\mu}$$

从而与四边形 $ABCD$ 相切的圆锥曲线可表示为:

$$\vec{BP}=\frac{(ns+t-mt+ns\mu-mt\mu)(ns+t-mt+nsu^2\mu+intu^2\mu)}{(ns+t-mt)(ns+t-mt+n\mu-t\mu-2nu\mu+2nsu\mu+2tu\mu-2mtu\mu+nu^2\mu+nsu^2\mu^2-mtu^2\mu^2)}\vec{BC}$$

曲线的中心:

$$\vec{BO}=\frac{n(1+s+it)(ns+t-mt)+(n^2s+n^2s^2-2mnst-mt^2+m^2t^2+in^2t-int^2)\mu}{2(ns+t-mt)(n+n\mu-t\mu)}\vec{BC}$$

其轨迹是一条经过四边形重心的直线。此直线又称为四边形的牛顿线。

若作代换

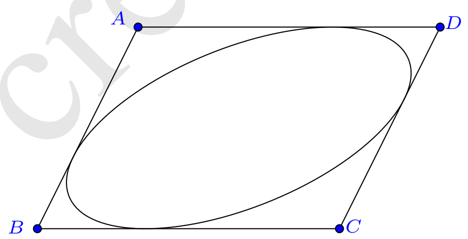
$$\eta=\frac{n^2s+nt-mnt+n^2s\mu-nt\mu-mnt\mu+nst\mu+t^2\mu-mt^2\mu}{4(ns+t-mt)(n+n\mu-t\mu)}$$

则可将其转化为如下表示

$$\vec{BO}=\left(\frac{1}{4}(1+s+it+m+in)+(1+s+it-m-in)\eta\right)\vec{BC}$$

这就清晰地表明了所述结论。

平行四边形的相切圆锥曲线



对于平行四边形:

$$\vec{BA}=(s+it)\vec{BC},\quad \vec{BD}=(1+s+it)\vec{BC}$$

因为对边延长线的交点在无穷远处，我们需要考虑一个有限的三角形, 使得圆锥曲线与之相切。容易想到的做法是在 BC 的延长线上取一点 X, 向圆锥曲线引不同于 BC 的切线，设该切线交 BA 的延长线于 Y。

即令

$$\vec{BX}=\zeta\vec{BC},\quad \vec{BY}=\eta\vec{BA}$$

则所求圆锥曲线有参数表示

$$\vec{BP}=\frac{\lambda\zeta+\lambda\mu u^2(\eta s+i\eta t)}{1-2u+u^2+\lambda+u^2\lambda\mu}\vec{BC}$$

AD、CD 与之相切, 由此即可求出:

$$\zeta=\frac{1+\mu+\lambda\mu}{1+\lambda\mu},\quad \eta=\frac{1+\mu+\lambda\mu}{\mu+\lambda\mu}$$

因而与平行四边形 $ABCD$ 相切的圆锥曲线可表示为

$$\vec{BP}=\frac{\lambda(1+\mu+\lambda\mu)(1+su^2+\lambda+su^2\lambda\mu+itu^2+itu^2\lambda\mu)}{(1+\lambda)(1+\lambda\mu)(1-2u+u^2+\lambda+u^2\lambda\mu)}\vec{BC}$$

根据判别式知曲线类型只能是中心二次曲线，而不能是抛物线，并且易知曲线的中心也是平行四边形的中心。
平行四边形的一个良好性质是：其所有内切椭圆的最大面积是平行四边形面积的 $\frac{\pi}{4}$ 倍，据上述表示不难证明它。

3.10.4 布利昂雄逆定理

如果六点形的三条对角线交于一点，则六点形有唯一的内切椭圆。
证明：设六边形为 $ABCDEF$，各顶点按逆时针顺序排列，再令

$$\vec{BA}=(a+ib)\,\vec{BC},\quad \vec{BD}=(c+id)\,\vec{BC},\quad \vec{BE}=(s+it)\,\vec{BC},\quad \vec{BF}=(m+in)\,\vec{BC}$$

延长 BC,DE,FA 得到三个交点 X,Y,Z:

$$\vec{BX}=\frac{bm-an}{b-n}\,\vec{BC}$$
$$\vec{BY}=\frac{ds-ct}{d-t}\,\vec{BC}$$
$$\vec{BZ}=\frac{bcm-acn-ads-bms+dms+ans+act-cmt+i(bdm-adn-bds+dns+bct-bmt+ant-cnt)}{bc-ad+dm-cn-bs+ns+at-mt}\,\vec{BC}$$

与三角形 XYZ 三边相切 (也即与 BC,DE,FA 三条边相切) 的二次曲线上的点可表示为:

$$P=\frac{\lambda\mu u^2X+(1-u)^2Y+\lambda Z}{u^2\lambda\mu+(1-u)^2+\lambda}$$

该曲线若与直线 AB,CD,EF 均相切，则以下三个方程关于 u 的解唯一:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{P-B}{A-B}\right)=0,\quad \mathrm{Im}\left(\frac{P-D}{C-D}\right)=0,\quad \mathrm{Im}\left(\frac{P-F}{E-F}\right)=0$$

由此得到三个关于 u 的二次方程，并根据解的唯一性要求，各方程关于 u 判别式应等于 0。
对所得的方程分解因式后逐一讨论即知，当且仅当

$$bns-bcns-dns+adns-bct+adt+bcmt-admt-ant+cnt=0$$

时，存在圆锥曲线与各边相切，否则二次曲线退化为两条直线。容易验证，此条件也使得三条对角线交于一点。
可解出参数

$$\lambda=\frac{t(ds-ct)(bc-ad+dm-cn-bs+ns+at-mt)}{(d-t)(bc-ad-bs+ds+at-ct)(ns-mt)}$$
$$\mu=\frac{(b-n)(bc-ad-bs+ds+at-ct)(mt-ns)}{n(bs-at)(bc-ad+dm-cn-bs+ns+at-mt)}$$

除已知的 u 取 $0,1,\infty$ 时的三个切点外，另外三个切点对应的 u 值分别为

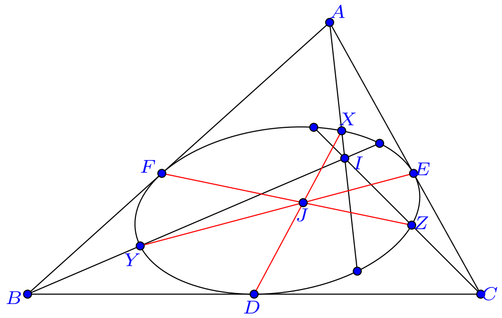
$$u=\frac{n(bs-at)}{b(ns-mt)}$$
$$u=\frac{(bc-ad)(d-ds-t+ct)}{d(bc-ad-bs+ds+at-ct)}$$
$$u=\frac{(bs-at)(dm-cn-ds+ns+ct-mt)}{(bc-ad-bs+ds+at-ct)(mt-ns)}$$

曲线的中心是 $\vec{BO}=(x+iy)\,\vec{BC}$，其中

$$x=\frac{adns+dns^2+bcmt-admt-acnt-adst-bmst-cnst+act^2+amt^2}{2(dns+bct-adt-cnt-bst+at^2)}$$
$$y=\frac{bdns-adnt-bdst-bnst+dnst+bct^2+ant^2-cnt^2}{2(dns+bct-adt-cnt-bst+at^2)}$$

3.10.5　三线共点问题

给定三角形 ABC, 圆锥曲线 Γ 分别切三边于 D,E,F, I 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点, 且使得直线 AI、BI、CI 均与 Γ 相交, 分别选取其中一个交点，记为 X,Y,Z, 则 DX,EY,FZ 连线相交于同一点。



证明：设 $\vec{BA}=(s+it)\,\vec{BC}$, 并且 $BD:DC=\lambda, CE:EA=\mu, AF:FB=\nu$, 即有

$$\vec{BD}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\,\vec{BC},\quad \vec{BE}=\frac{1+s\mu+it\mu}{1+\mu}\,\vec{BC},\quad \vec{BF}=\frac{s+it}{1+\nu}\,\vec{BC}$$

圆锥曲线 Γ 上的任意一点 P 有参数表示

$$\vec{BP}=\frac{\lambda\mu u^2(s+it)+\lambda}{\lambda\mu u^2+(1-u)^2+\lambda}\,\vec{BC}$$

又设 $\vec{BI}=(m+in)\,\vec{BC}$, 并且 u 取 α,β,γ 时分别对应 X,Y,Z 三点, 则根据共线条件得到方程

$$\begin{cases} ns-mt-2ns\alpha+2mt\alpha+ns\alpha^2-mt\alpha^2-n\lambda+ns\lambda+t\lambda-mt\lambda=0\\ n+ns\beta^2\mu-mt\beta^2\mu=0\\ n-2n\gamma+n\gamma^2+n\gamma^2\lambda\mu-ns\gamma^2\lambda\mu-t\gamma^2\lambda\mu+mt\gamma^2\lambda\mu=0\end{cases}$$

可以由此解出 α,β,γ, 但这样将含有根式，不便于运算, 因此我们反解 λ,μ:

$$\lambda=\frac{(ns-mt)(1-\alpha)^2}{n-ns-t+mt},\mu=\frac{n}{(mt-ns)\beta^2}$$

并有

$$\gamma=\frac{\beta}{1-\alpha+\beta}\text{或}\gamma=\frac{\beta}{-1+\alpha+\beta}$$

直线 DX 与 EY 的交点 J 为:

$$\vec{BJ}=\frac{\lambda(1-\alpha+\beta+s\alpha\beta\mu+it\alpha\beta\mu)}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta+\lambda-\alpha\lambda+\beta\lambda+\alpha\beta\lambda\mu}\,\vec{BC}$$

若 J 也在直线 FZ 上, 则应使得

$$(\beta-\gamma+\alpha\gamma-\beta\gamma)(1-2\gamma+\gamma^2+\lambda+\gamma^2\lambda\mu)=0$$

前面导出的一个解 $\gamma=\frac{\beta}{1-\alpha+\beta}$ 恰好满足要求, 这就说明了结论是正确的 [①]。

3.10.6　二次有理 B 样条曲线

有理 B 样条曲线又称 NURBS 曲线, 它是几何造型中广泛使用的曲线拟合工具, 具有平滑精确等拟合优点, 本节我们讨论二次曲线的拟合。

①根据 J 的表示容易看出, 一般来说共有四组允许的选择。

给定一个控制点的拟合

问题描述：已知平面上的一条曲线经过首末两点 P 和 Q, 给定一个控制点 A, 求作一条二次曲线, 使其经过 P,Q 且在这两点的切向量均指向点 A。

解: 二次曲线在 P,Q 两点与直线 AP 和 AQ 相切, 只要我们再假定它与另一直线相切, 即可将问题转化为求三角形的相切二次曲线，从而可以应用前面的结论。

不妨设直线 AP 和 AQ 上各有一点 B 和 C, 并设所分线段比例为 $p = AP : PB, q = AQ : QC$, 则与 $\triangle ABC$ 相切二次曲线上的点 T 有参数表示:

$$T = \frac{u^2A + p(1-u)^2B + qC}{u^2 + p(1-u)^2 + q}$$

将

$$B = P + \frac{1}{p}(P - A), C = Q + \frac{1}{q}(Q - A)$$

代入即化为

$$T = \frac{(1+p)(1-u)^2P + (1+q)Q - 2(1-u)A}{(1+p)(1-u)^2 + (1+q) - 2(1-u)}$$

为使得自变量 u 取 0 和 1 时分别对应 P,Q, 再作分式变换 $u \to \frac{1}{u}$, 则得到要求的二次曲线

$$T = \frac{(1+p)(1-u)^2P + (1+q)u^2Q + 2u(1-u)A}{(1+p)(1-u)^2 + (1+q)u^2 + 2u(1-u)}$$

当 u 从 0 连续变动到 1 时, 它将描绘出一条从 P 到 Q 的二次弧线。

该弧线在 P,Q 处的切向量分别为:

$$v_P = \lim_{u\to 0}\frac{dT}{du} = \frac{2}{1+p}\vec{PA}, \quad v_Q = \lim_{u\to 1}\frac{dT}{du} = -\frac{2}{1+q}\vec{QA}$$

也就是说, 可以分别通过改变 p,q 的值来调节弧线与直线 PA, QA 的贴近程度。

为了使得调节方便, 可再令

$$\lambda = \frac{2}{1+p}, \quad \mu = \frac{2}{1+q}$$

λ,μ 即为 P,Q 处斜率的调节参数, 曲线的表示成为

$$T = \frac{\lambda u^2Q + \mu(1-u)^2P + \lambda\mu(1-u)uA}{\lambda u^2 + \mu(1-u)^2 + \lambda\mu(1-u)u} \tag{3.42}$$

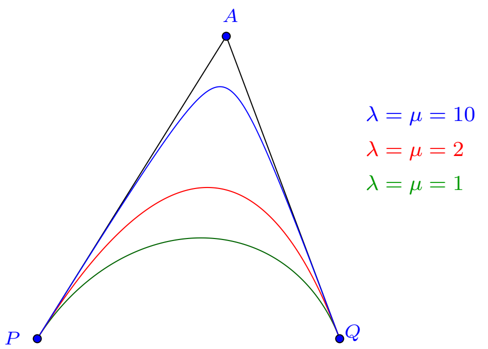
当 $\lambda > 0, \mu > 0$ 时，弧线总是位于三角形 APQ 之内。

曲线的类型由下面的判别式决定:

$$\Delta = \lambda\mu(\lambda\mu - 4)$$

$\Delta < 0$ 时, 椭圆; $\Delta = 0$ 时, 抛物线; $\Delta > 0$ 时, 双曲线。

例如, 取 $P = 0, Q = 1 + \frac{i}{3}, A = \frac{4}{5} + \frac{3}{2}i$ 时, 得到如下弧线:



给定两个控制点的拟合

问题描述：已知平面上的一条曲线经过首末两点 P 和 Q, 给定两个控制点 A,B, 求作一条二次曲线, 使其经过 P,Q 且分别与线段 PA,AB,BQ 相切。

解: 因为存在 AP 平行于 BQ 的情形, 所以我们不考虑以 AP,BQ 的交点为三角形的一个顶点的设法。

在 AP 上取一点 D, 在 BQ 上取一点 C, 并假定直线 CD 与 AB 相交于有限点 X, 设所分线段比例为 $p=AP:PD, q=BQ:QC$。

又设

$$\overrightarrow{PA}=(s+it)\,\overrightarrow{PQ},\quad \overrightarrow{PB}=(m+in)\,\overrightarrow{PQ}$$

则可求得

$$\overrightarrow{PD}=-\frac{s+it}{p}\,\overrightarrow{PQ},\quad \overrightarrow{PC}=\frac{1-m-in+q}{q}\,\overrightarrow{PQ}$$
$$\overrightarrow{PX}=\left((m+in)+\frac{(1+q)(np+ns+t-mt)(s+it-m-in)}{np+npq-nps+nqs-pt+mpt-mqt-pqt}\right)\overrightarrow{PQ}$$

与 $\triangle XAD$ 相切的二次曲线上的点 T 可表示为:

$$T=\frac{(1-u)^2A+pD+u^2p\mu X}{(1-u)^2+p+u^2p\mu}$$

根据 BQ 与曲线相切, 解出

$$\mu=\frac{-np-npq+nps-nqs+pt-mpt+mqt+pqt}{np(1+p)(1+q)}$$

又由 Q 是曲线在直线在 BQ 上的切点, 得到

$$p=-\frac{n^2s-mnt+nst+nqst+t^2-mt^2+qt^2-mqt^2}{n(ns+t-mt+qt)}$$

做代换

$$u\to\frac{n(1+p)}{n-ns-t+mt}u$$

使参数 u 取 1 时对应 Q 点, 则得到所求曲线的一个参数表示:

$$\overrightarrow{PT}=\frac{u(2ns-nsu-mtu+2int-2intu)}{-n+ns+t-mt+2nu-nu^2-tu^2}\,\overrightarrow{PQ}$$

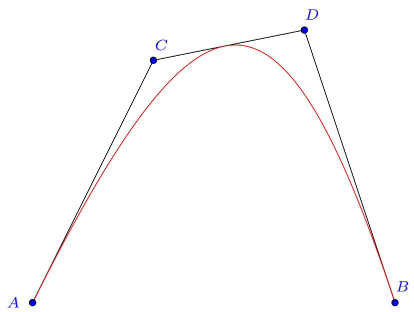
此式表明, 曲线完全由两个控制点 A,B 确定。

例如：令

$$P=0,\quad Q=1, A=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i,\quad B=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$$

则所求二次曲线为

$$P=\frac{9u^2-6u+12u^2i-12ui}{4-18u+17u^2}$$



多折线控制的分段拟合

给定连续的多条折线 $P_0P_1P_2...P_{n-1}P_n$, 求分段二次曲线, 使得它经过首末两点 P_0, P_n, 并且与所有线段 $P_0P_1, P_1P_2, ..., P_{n-1}P_n$ 均相切。

曲线控制的最优参数化

前面我们讨论了二次曲线形状拟合的问题, 但在实际应用中, 如果曲线上的点随参数变化过于剧烈时, 将使得曲线的绘制效果不够理想。

例如对于前面示例，参数曲线

$$T = \frac{3(2-u)u + 12(1-u)ui}{4+2u-3u^2}$$

虽然在 $u=0$ 时为 P 点, 在 $u=1$ 时给 Q 点, 但对于 P 到 Q 的弧线绘制, 参数 u 的变化实际是从 0 到 ∞, 再从 ∞ 到 1，这是非常不理想的。

我们可以引入额外的参数来解决这个问题。

例如，考虑分式线性变换

$$u \to \frac{au+b}{cu+d}$$

为了使得 $u=0$ 和 $u=1$ 保持不变, 则应有 $b=0, a=c+d$。再令 $d=-ck$, 即得变换

$$u \to \frac{(1-k)u}{u-k} \tag{3.43}$$

所引入的参数 k, 是曲线绘制的速率控制参数, 它不引起曲线形状的改变。

对于前面的示例, 若取 $k=\frac{1}{2}$，即作代换 $u \to \frac{u}{(2u-1)}$, 则曲线的参数表示成为

$$T = \frac{3(2-u)u + 12(1-u)u}{4+2u-3u^2}$$

u 从 0 到 1 变化时即可绘制出所需要的弧线, 这个绘制显然更容易一些。

如果考虑更高阶的有理变换, 我们就可能对曲线做更好的速率控制。什么是最好的呢?

一般来说, 最恰当的变换是以曲线的弧长作为参数, 它可以使得曲线的绘制更加平稳:

设已知曲线的一个参数表示是 $T = x(u) + iy(u)$, $u = 0, 1$ 时对应弧线的首末两点, 最恰当的代换即是

$$u \to \frac{\int_0^u \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du}{\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du}$$

是否弄反了?

对于二次曲线, 式中的积分是超越函数, 不便于应用, 我们可以用一系列的有理函数来逼近它。举几个有理函数的例子

3.10.7 证明六点共圆锥曲线问题

数学研发论坛，mathe 发布在数学欣赏的问题：“六心共曲线” http://bbs.emath.ac.cn/thread-17868-1-1.html

```
(*题目：https://bbs.emath.ac.cn/thread-17868-1-1.html
    蓝色圆O及其外接六边形ABCDEF,三条主对角线AD,BE,EF交于圆心O.点G,H,I,J,K,L满足
  /_GCO=/_OCH, /_HDO=/_ODI, /_IEO=/_JEO, /_JFO=/_KFO, /_KAO=/_LAO,/_LBO=/_OBG
而且KOH,LOI,GOJ都三点共线。于是GHIJKL六点经过公共的圆锥曲线。
*)


Clear["Global`*"];
(*设点*)
(*Z[u_,v_]:=-((-ⅈ-ⅈ p+p u) (-ⅈ-ⅈ p+p v))/(1+p+p u v);
PO = 1/2;*)
Z[u_, v_] := -((-ⅈ + u) (-ⅈ + v))/(1 + u v);
PO = 0;
PA = Z[a, b]; PB = Z[b, c]; PC = Z[c, d]; PD = Z[d, e]; PE = Z[e, f]; PF = Z[f, a];

(*AOD, BOE, COF三点共线*)
linst1 = Factor[
   ComplexExpand[Im[PA * Conjugate[PO] + PO * Conjugate[PD] + PD * Conjugate[PA]]]];
linst2 = Factor[ComplexExpand[
    Im[PB * Conjugate[PO] + PO * Conjugate[PE] + PE * Conjugate[PB]]]];
linst3 = Factor[ComplexExpand[Im[PC * Conjugate[PO] +
       PO * Conjugate[PF] + PF * Conjugate[PC]]]];
(*这三式不是独立的,任意两式可推出第三式，可解出e,f*)
efsolve = Solve[{linst1, linst2, linst3} == 0, {e, f}] // Factor // Flatten;
(*设点G,H,I,J,K,L*)
(*Q[ξ_,η_]:=-(-1-2 p-p^2+p^2 ξ-ⅈ p η-ⅈ p^2 η)/(1+p+p ξ);*)
Q[ξ_, η_] := -(-1 + ξ - ⅈ η)/(1 + ξ);
PG = Q[G1, G2]; PH = Q[H1, H2]; PI = Q[I1, I2];
PJ = Q[J1, J2]; PK = Q[K1, K2]; PL = Q[L1, L2];
(*KOH,LOI,GOJ共线*)
linst4 = Factor[
   ComplexExpand[Im[PK * Conjugate[PO] + PO * Conjugate[PH] + PH * Conjugate[PK]]]];
linst5 = Factor[ComplexExpand[
    Im[PL * Conjugate[PO] + PO * Conjugate[PI] + PI * Conjugate[PL]]]];
linst6 = Factor[ComplexExpand[Im[PG * Conjugate[PO] +
```

```
                  因式分解 复展开              虚部     共轭
      PO * Conjugate[PJ] + PJ * Conjugate[PG]]]];
            共轭                   共轭
(*可解出J2,K2,L2*)
JKLsolve = Solve[{linst4, linst5, linst6} == 0, {J2, K2, L2}] // Factor // Flatten;
           解方程                                              因式分解  压平
(*角度相等*)
angst1 = Factor[ComplexExpand[Im[((PG - PC) * (PH - PC))/((PO - PC)^2)]]] // Numerator;
         因式分解 复展开          虚部                                         分子

angst2 = Factor[ComplexExpand[Im[((PH - PD) * (PI - PD))/((PO - PD)^2)]]] // Numerator;
         因式分解 复展开          虚部                                         分子

angst3 = Factor[ComplexExpand[Im[((PI - PE) * (PJ - PE))/((PO - PE)^2)]]] // Numerator;
         因式分解 复展开          虚部                                         分子

angst4 = Factor[ComplexExpand[Im[((PJ - PF) * (PK - PF))/((PO - PF)^2)]]] // Numerator;
         因式分解 复展开          虚部                                         分子

angst5 = Factor[ComplexExpand[Im[((PK - PA) * (PL - PA))/((PO - PA)^2)]]] // Numerator;
         因式分解 复展开          虚部                                         分子

angst6 = Factor[ComplexExpand[Im[((PL - PB) * (PG - PB))/((PO - PB)^2)]]] // Numerator;
         因式分解 复展开          虚部                                         分子

angsts =
  FactorList[#][[-1]][[1]] & /@ {angst1, angst2, angst3, angst4, angst5, angst6};
  因子列表
(*代入前述关系化简*)
solved = Flatten[{efsolve, JKLsolve}];
         压平
angsts = Factor[angsts /. solved] // Numerator;
         因式分解                   分子
angsts = FactorList[#][[-1]][[1]] & /@ angsts;
         因子列表
(*GHIJKL六点共圆锥曲线*)
ReIms = Factor[ComplexExpand[ReIm[{PG, PH, PI, PJ, PK, PL}]]];
        因式分解 复展开          实部虚部列表
ReIms = (ReIms /. solved) // Factor;
                              因式分解
matrix = {#[[1]]^2, #[[1]] * #[[2]], #[[2]]^2, #[[1]], #[[2]], 1} & /@ ReIms;
conicst = Det[matrix] // Factor // Numerator;
          行列式          因式分解  分子
conicst = FactorList[conicst][[-1]][[1]];
          因子列表
conicst = Factor[conicst /. solved] // Numerator;
          因式分解                     分子
(*GroebnerBasis[Flatten[{angsts,conicst}],{I2,H1,H2,J1,K1,L1}]*)
  格罗布纳基      压平
(*各变量的幂次*)
Exponent[#, {G1, G2, H1, H2, I1, I2, J1, J2, K1, K2, L1, L2}] & /@ angsts
最高次数
```

```
最高次数
(*消元求解*)
(*消去L1*)
angst5 = SubresultantPolynomialRemainders[angsts[[6]], angsts[[5]], L1][[-1]];
         子结式多项式余数序列
angst5 = FactorList[angst5][[-1]][[1]];
         因子列表
(*消去K1*)
angst4 = SubresultantPolynomialRemainders[angst5, angsts[[4]], K1][[-1]];
         子结式多项式余数序列
angst4 = FactorList[angst4][[-1]][[1]];
         因子列表
(*消去J1*)
angst3 = SubresultantPolynomialRemainders[angst4, angsts[[3]], J1][[-1]];
         子结式多项式余数序列
angst3 = FactorList[angst3][[-1]][[1]];
         因子列表
(*消去H2*)
angst2 = SubresultantPolynomialRemainders[angst3, angsts[[2]], H2][[-1]];
         子结式多项式余数序列
angst2 = FactorList[angst2][[-1]][[1]];
         因子列表
angst1 = SubresultantPolynomialRemainders[angsts[[2]], angsts[[1]], H2][[-1]];
         子结式多项式余数序列
angst1 = FactorList[angst1][[-1]][[1]];
         因子列表
(*消去H1, 有两个有效因式, 取最后一个因式即可*)
solve1 = SubresultantPolynomialRemainders[angst2, angst1, H1][[-1]];
         子结式多项式余数序列
solve1 = FactorList[solve1][[-1]][[1]]; (*G1,G2,I1,I2*)
         因子列表
(*回代消元*)
solve2 = SubresultantPolynomialRemainders[angst1, solve1, I2][[-1]];
         子结式多项式余数序列
solve2 = FactorList[solve2][[-1]][[1]]; (*G1,G2,I1,H1*)
         因子列表
solve3 = SubresultantPolynomialRemainders[angst3, solve1, I2][[-1]];
         子结式多项式余数序列
solve3 = FactorList[solve3][[-1]][[1]];
         因子列表
solve3 = SubresultantPolynomialRemainders[solve3, solve2, H1][[-1]];
         子结式多项式余数序列
solve3 = FactorList[solve3][[-1]][[1]]; (*G1,G2,I1,H2*)
         因子列表
(*solve4= SubresultantPolynomialRemainders[angsts[[3]], solve1, I2][[-1]];
           子结式多项式余数序列
solve4 = FactorList[solve4][[-1]][[1]];  (*G1,G2,I1,J1*)
         因子列表
solve5 = SubresultantPolynomialRemainders[angsts[[4]],  solve2, H1][[-1]];
         子结式多项式余数序列
solve5 = FactorList[solve5][[-1]][[1]];
         因子列表
solve5 = SubresultantPolynomialRemainders[solve5,  solve3, H2][[-1]];
         子结式多项式余数序列
solve5 = FactorList[solve5][[-1]][[1]];
         因子列表
```

```
因子列表
solve5 = SubresultantPolynomialRemainders[solve5,  solve4, J1][[-1]];
  子结式多项式余数序列
solve5 = FactorList[solve5][[-1]][[1]];  (*G1,G2,I1,K1*)
  因子列表
solve6  = SubresultantPolynomialRemainders[angsts[[6]],  solve1, I2][[-1]];
  子结式多项式余数序列
solve6= FactorList[solve6][[-1]][[1]];  (*G1,G2,I1,L1*)*)
  因子列表
(*共圆锥条件检验*)
check = SubresultantPolynomialRemainders[conicst,  angsts[[1]], I2][[-1]];
  子结式多项式余数序列
check =  FactorList[check][[-1]][[1]];
  因子列表
check = SubresultantPolynomialRemainders[check,  solve2, H1][[-1]];
  子结式多项式余数序列
check =  FactorList[check][[-1]][[1]];
  因子列表
PolynomialGCD[check, solve3]
多项式的最大公因式
(*存在公因式则表明conicst在以上条件等式下是等于0的*)
```

```
{{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, [illegible] 0, 0, 0},
 {1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0}, {1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, [illegible] 1, 0, 0, 0},
 {0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0}, {1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0}}
```

$$a^3 c + 2 a^2 b c + a b^2 c - a^2 c^2 - 2 a b c^2 - b^2 c^2 [illegible] c^3 + 2 a^2 b c^3 - a^3 b^2 c^3 + c^4 - 2 a b c^4 + a^2 b^2 c^4 + a^3 d + 2 a^2 b d + a b^2 d - 3 a^2 c d - 4 [illegible] d + 2 a^3 b c d - b^2 c d + 2 a^2 b^2 c d + a c^2 d + \cdots 2204 \cdots + 3 a^3 b c^2 d^4 G2 H2 I1 [illegible] 2 b^2 c^2 d^4 G2 H2 I1 + 3 a^2 b^2 c^2 d^4 G2 H2 I1 + 2 a c^3 d^4 G2 H2 I1 - 2 a^3 c^3 d^4 G2 H2 I1 + 2 b c [illegible] d^4 G2 H2 I1 - 6 a^2 b c^3 d^4 G2 H2 I1 - 4 a b^2 c^3 d^4 G2 H2 I1 + a^2 c^4 d^4 G2 H2 I1 + 2 a b c^4 d^4 G2 H2 I1 + b^2 c^4 d^4 G2 H2 I1 - a^2 c d^5 G2 H2 I1 - a b c d^5 G2 H2 I1 [illegible] a^3 b c d^5 G2 H2 I1 + a^2 b^2 c d^5 G2 H2 I1 + a c^2 d^5 G2 H2 I1 - a^3 c^2 d^5 G2 H2 I1 + b c^2 d^5 G2 H2 I1 - 3 a^2 b c^2 d^5 G2 H2 I1 - 2 a b^2 c^2 d^5 G2 H2 I1 + a^2 c^3 d^5 G2 H2 I1 + 2 a b c^3 d^5 G2 H2 I1 + b^2 c^3 d^5 G2 H2 I1$$

大型输出 | 显示更少 | 显示更多 | 显示全部 | 设定大小限制...

椭圆 O 内切于六边形 $ABCDEF$，三条主对角线 AD, BE, CF 交于一点。
点 G, H, I, J, K, L 满足：
$\angle GCO = \angle OCH, \angle HDO = \angle ODI, \angle IEO = \angle OEJ, \angle JFO = \angle OFK, \angle KAO = \angle OAL, \angle LBO = \angle OBG$
而且 KOH, LOI, GOJ 都三点共线。
证明：$GHIJKL$ 六点共圆锥曲线。

3.11　已知一个焦点的圆锥曲线

3.11.1　有理表示

对于一条圆锥曲线 Γ, 如果已知它的一个焦点 F 及曲线上的一点 A, 求曲线的表示。
解：根据圆锥曲线的一般二阶有理表示, 我们设 Γ 上的点 P 为:

$$\vec{FP} = \left(\frac{u^2a_1 + 2ub_1 + c_1}{u^2a_3 + 2ub_3 + c_3} + \frac{u^2a_2 + 2ub_2 + c_2}{u^2a_3 + 2ub_3 + c_3}i\right)\vec{FA}$$

并令 $u = 0$ 时取点 $A, u \to \infty$ 时取直线 FA 与 Γ 的另一个交点, 则有

$$c_1 = c_3, \quad c_2 = 0, \quad a_2 = 0$$

又根据圆锥曲线定义：曲线上的点 P 到焦点 F 的距离, 与 P 到定直线 l 的距离之比是一个常数，此常数即为离心率 e。
我们假设焦点 F 在直线 l 上的垂足点 T 为 $\vec{FT} = (p + iq)\,\vec{FA}$,
又设 A 在 l 上的垂足点为 M, 设 P 在 l 上的垂足点为 N, 则根据 $AM//FT, AM\perp TM, PN//FT, PN\perp TN$ 求出

$$\vec{FM} = \frac{p^2 - iq + q^2}{p - iq}\vec{FA}$$
$$\vec{FN} = \frac{(p^2+q^2)(u^2a_3 + 2ub_3 + c_3) - i(qu^2a_1 + 2qub_1 - 2pub_2 + qc_3)}{(p - iq)(u^2a_3 + 2ub_3 + c_3)}\vec{FA}$$

再根据 Γ 的离心率

$$e = \frac{AF}{AM} = \frac{PF}{PM}$$

即可得到关于 u 的三次方程。因为 u 是自由变化的，所以其各项系数均为 0, 从而解得

$$a_3 = \frac{2p - p^2 - q^2}{p^2 + q^2}a_1, \quad b_1 = 0, \quad b_3 = \frac{q}{p^2+q^2}b_2, \quad c_3 = -\frac{b_2^2}{a_1}$$

于是

$$\vec{FP} = \frac{(p^2+q^2)(ua_1 + ib_2)^2}{2pu^2a_1^2 - p^2u^2a_1^2 - q^2u^2a_1^2 + 2qua_1b_2 - p^2b_2^2 - q^2b_2^2}\vec{FA}$$

再做代换 $u \to \frac{b_2}{a_1}u$ 即得到仅含两个参数的表示式:

$$\vec{FP} = \frac{(p^2+q^2)(1 - iu)^2}{p^2 + q^2 - 2qu + (p^2 + q^2 - 2p)u^2}\vec{FA} \tag{3.44}$$

如果曲线是抛物线, 则

$$2p^3 - p^4 + q^2 + 2pq^2 - 2p^2q^2 - q^4 = 0$$

此时可作代换:

$$p = \frac{2(1-s^2)}{(1+s^2)^2}, \quad q = \frac{4s}{(1+s^2)^2}$$

则得到抛物线的参数表示:

$$\vec{FP} = \frac{(1 - iu)^2}{(1 - su)^2}\vec{FA} \tag{3.45}$$

如果点 A 是曲线上靠近 F 的端点, 则 $p=1+\frac{1}{e}, q=0$

$$\vec{FP}=\frac{(1+e)(1-iu)^2}{(1+e)+(1-e)u^2}\vec{FA} \tag{3.46}$$

如果点 A 是曲线上远离 F 的端点, 则 $p=1-\frac{1}{e}, q=0$

$$\vec{FP}=\frac{(1-e)(1-iu)^2}{(1-e)+(1+e)u^2}\vec{FA} \tag{3.47}$$

对于此式, 若作代换

$$\vec{FP}=\frac{1-e}{1-e\cos\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)\vec{FA}$$

它正是圆锥曲线极坐标的等价表示。

容易求得曲线的另一个焦点 G 为

$$\vec{FG}=\frac{2(p^2+q^2)(p+iq)}{2p^3-p^4+q^2+2pq^2-2p^2q^2-q^4}\vec{FA}$$

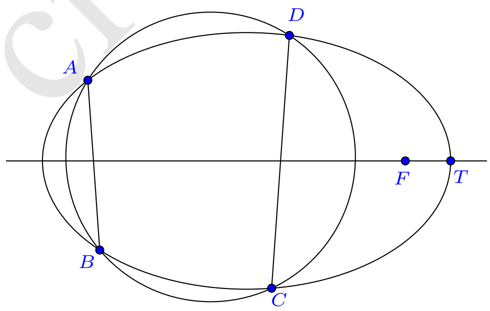
3.11.2　焦点弦的性质

若 AB 是椭圆内过焦点的弦，则 $\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}$ 为定值。

(或可省略之！因为大多数教材都有提及)

3.11.3　曲线上四点共圆的条件

对于任意圆锥曲线, 曲线上四点共圆的充要条件是其中两点的连线与焦点所在轴线的夹角和另外两点的连线与焦点所在轴线的夹角互补。



如图, 命题的表述则是: F 是圆锥曲线 Γ 的一个焦点, T 是紧邻 F 的端点, Γ 上四点 $ABCD$ 共圆的充要条件是: 直线 BA 与直线 FT 的夹角和直线 CD 与直线 FT 的夹角之和等于 $180°$。

证明：我们选取圆锥曲线的焦点 F 及紧邻焦点的端点 T 作为基向量, 曲线上的点 P 有表示:

$$\vec{FP}=\frac{(1-iu)^2}{1+su^2}\vec{FT}$$

其中 $s=\frac{1-e}{1+e}$, e 为离心率。

从而可设曲线上的四点分别为:

$$\vec{FA}=\frac{(1-ia)^2}{1+sa^2}\vec{FT},\quad \vec{FB}=\frac{(1-ib)^2}{1+sb^2}\vec{FT},\quad \vec{FC}=\frac{(1-ic)^2}{1+sc^2}\vec{FT},\quad \vec{FD}=\frac{(1-id)^2}{1+sd^2}\vec{FT}$$

四点共圆的条件是

$$a+b+c+d-abcs-abds-acds-bcds=0$$

另一方面, 因为 $\angle(BA, FT)$ 与 $\angle(CD, FT)$ 的取值范围是 $(0, 180°)$, 所以 $\angle(BA, FT) + \angle(CD, FT) = 180°$ 等价于

$$\operatorname{Im}\left(\frac{A-B}{F-T}\frac{D-C}{F-T}\right) = 0$$

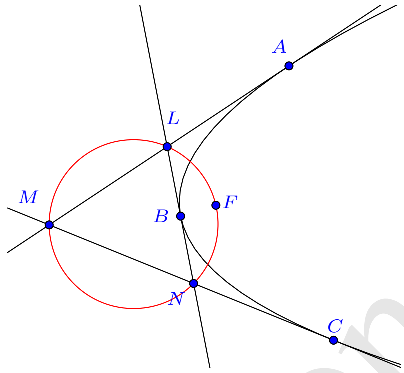
它同样导致条件

$$a+b+c+d-abcs-abds-acds-bcds=0$$

这就说明了二者互为充要条件。

3.11.4 抛物线切线交点与焦点共圆

抛物线上三条切线的交点与焦点四点共圆。



证明：设抛物线的焦点为 F, 三切点分别为 A, B, C, 则由抛物线的参数表示:

$$\vec{FB} = \frac{(1-iu)^2}{(1-su)^2}\vec{FA}, \quad \vec{FC} = \frac{(1-iv)^2}{(1-sv)^2}\vec{FA}$$

由此求出三条切线的交点 L, M, N 分别为:

$$\vec{FL} = \frac{1-iu}{1-su}\vec{FA}, \quad \vec{FM} = \frac{1-iv}{1-sv}\vec{FA}, \quad \vec{FN} = \frac{(1-iu)(1-iv)}{(1-su)(1-sv)}\vec{FA}$$

计算知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{M-F}{N-F}\frac{N-L}{M-L}\right) = 0$$

即 F, L, M, N 四点共圆。

3.11.5 Marden 定理及其应用

Marden 定理的导出

圆锥曲线与 $\triangle ABC$ 的各边分别相切与 D、E、F, 使得 $BD : DC = \lambda, CE : EA = \mu, AF : FB = \nu(\lambda\mu\nu = 1)$, 求圆锥曲线的焦点。

解：设圆锥曲线的一个焦点为 Z, 与之相近的端点为 T, 则圆锥曲线上的任意点 P 可表示为:

$$\vec{ZP} = \frac{(1+iu)^2}{1+su^2}\vec{ZT}$$

设 $u = a, b, c$ 时对应的点分别是 D, E, F, 即:

$$\vec{ZD} = \frac{(1+ia)^2}{1+sa^2}\vec{ZT}, \quad \vec{ZE} = \frac{(1+ib)^2}{1+sb^2}\vec{ZT}, \quad \vec{ZF} = \frac{(1+ic)^2}{1+sc^2}\vec{ZT}$$

$\triangle ABC$ 的各顶点是这三点的切线交点, 从而又有：

$$\vec{ZA} = \frac{(1-bc)+i(b+c)}{1+sbc}\vec{ZT}, \quad \vec{ZB} = \frac{(1-ca)+i(c+a)}{1+sca}\vec{ZT}, \quad \vec{ZC} = \frac{(1-ab)+i(a+b)}{1+sab}\vec{ZT}$$

根据线段的比值，得到三个方程:

$$\frac{(c-a)(1+sab)}{(a-b)(1+sca)}=\lambda,\quad \frac{(a-b)(1+sbc)}{(b-c)(1+sab)}=\mu,\quad \frac{(b-c)(1+sca)}{(c-a)(1+sbc)}=\nu$$

注意到式子的对称性, 我们可以引入参数 k:

$$k=\frac{a-b}{1+sab}=\mu\frac{b-c}{1+sbc}=\frac{1}{\lambda}\frac{c-a}{1+sca}$$

由前两式解出 a,c:

$$a=\frac{b+k}{1-bks},\quad c=\frac{b\mu-k}{bks+\mu}$$

再代入第三式, 得到

$$k(1+b^2s)(1-k^2s\lambda+\mu+\lambda\mu)=0$$

要使得 a,b,c 两两不等, 应有

$$k^2=\frac{1+\mu+\lambda\mu}{s\lambda}$$

将以上表示回代，则得到：

$$\begin{aligned}
\vec{ZA}&=\frac{(1+ib)(bks+\mu+ib\mu-ik)}{(1+b^2s)\mu}\vec{ZT}\\
\vec{ZB}&=\frac{(1-bks+ib+ik)(bks+\mu+ib\mu-ik)}{(1+b^2s)(\mu-k^2s)}\vec{ZT}\\
\vec{ZC}&=\frac{(1+ib)(1-bks+ib+ik)}{1+b^2s}\vec{ZT}
\end{aligned}$$

在复平面上, 我们可将各点作为复数参与运算。根据以上四个等式, 我们可以解出焦点 Z 和端点 T, 及实参 b、k 和 s。其中焦点 Z 满足下述方程，它可通过直接消元得到：

$$(Z-B)(Z-C)+\lambda\mu(Z-C)(Z-A)+\mu(Z-A)(Z-B)=0 \tag{3.48}$$

这也就是 Marden 定理所述内容: 复平面上, 与三角形三边相切的圆锥曲线，其焦点是上述二次方程的两根。
它又常被写为如下更简洁的形式:

$$\frac{1}{Z-A}+\frac{\lambda\mu}{Z-B}+\frac{\mu}{Z-C}=0 \tag{3.49}$$

焦点的等角共轭性质

与三角形相切的圆锥曲线, 它的两个焦点关于三角形是等角共轭的。
证明: 设三角形 $\triangle ABC$ 的表示为

$$\vec{BA}=z\,\vec{BC}$$

与三角形各边相切的圆锥曲线的一个焦点 P 为

$$\vec{BP}=w\,\vec{BC}$$

根据 Marden 定理, 它应满足方程：

$$(w-0)(w-1)+\lambda\mu(w-1)(w-z)+\mu(w-z)(w-0)=0$$

取共轭又有

$$(\bar{w}-0)(\bar{w}-1)+\lambda\mu(\bar{w}-1)(\bar{w}-\bar{z})+\mu(\bar{w}-\bar{z})(\bar{w}-0)=0$$

以上两式联立即可解出

$$\lambda=\frac{w\,\bar{w}(w-z-\bar{w}+z\,\bar{w}+\bar{z}-w\,\bar{z})}{(1-w)(1-\bar{w})(w\,\bar{z}-z\,\bar{w})},\quad \mu=\frac{(1-w)(1-\bar{w})(z\,\bar{w}-w\,\bar{z})}{(w-z)(w-\bar{w})(\bar{w}-\bar{z})}$$

又根据韦达定理, 曲线的另一个焦点 Q 是

$$Q=\frac{A(1+\lambda)\mu+B(1+\mu)+C(1+\lambda\mu)}{1+\mu+\lambda\mu}-P$$

代入前面的各式化简即得

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{z\,\bar{w}(w-z-\bar{w}+z\,\bar{w}+\bar{z}-w\,\bar{z})}{-z\,\bar{w}+wz\,\bar{w}+w\,\bar{z}-wz\,\bar{z}-w\,\bar{w}\,\bar{z}+z\,\bar{w}\,\bar{z}}\overrightarrow{BC}$$

这正是 P 关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭点的表示。

三角形外接圆锥曲线的焦点

Marden 定理实际上给出了求任意圆锥曲线焦点的方法：

只需在圆锥曲线上选择任意的三点作切线，求出切线所交的三个点，然后计算切点所分各边的比例, 则应用 Marden 定理即可解出焦点的位置。

对于三角形外接圆锥曲线的表示式 XX：

$$P=\frac{(1-u)A+puB-qu(1-u)C}{(1-u)+pu-qu(1-u)}$$

以各顶点分别作切线, 切线的交点记为 D,E,F, 则

$$D=\frac{A-pB-qC}{1-p-q},\quad E=\frac{A-pB+qC}{1-p+q},\quad F=\frac{A+pB-qC}{1+p-q}$$

进而求出切点所分各边比例：

$$\lambda=\frac{AE}{FA}=\frac{1+p-q}{1-p+q},\quad \mu=\frac{BF}{DB}=\frac{-1+p+q}{1+p-q},\quad \nu=\frac{CD}{EC}=\frac{1-p+q}{-1+p+q}$$

圆锥曲线的焦点 Z 满足方程：

$$(Z-E)(Z-F)+\lambda\mu(Z-F)(Z-D)+\mu(Z-D)(Z-E)=0$$

化简即为

$$(Z-A)^2+p^2(Z-B)^2+q^2(Z-C)^2-2p(Z-A)(Z-B)-2pq(Z-B)(Z-C)-2q(Z-C)(Z-A)=0 \tag{3.50}$$

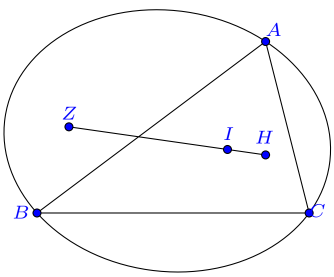
若记 $Z_A=Z-A,\quad Z_B=p(Z-B),\quad Z_C=q(Z-C)$, 则上式简写为：

$$Z_A^2+Z_B^2+Z_C^2-2Z_AZ_B-2Z_BZ_C-2Z_CZ_A=0$$

三角形两焦点之间的关系

作为上面结论的一个应用, 我们来证明如下命题：

若椭圆的内接三角形以椭圆的一个焦点为垂心, 则该三角形的内心在两焦点的连线上。



证明：记 $s=\tan\frac{A}{2}, t=\tan\frac{B}{2}$, 则

$$\overrightarrow{BA}=\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\overrightarrow{BC}$$

垂心 H 和内心 I 分别是：

$$\vec{BH} = -\frac{i(1+is)^2(1-t^2)}{2s(1-it)^2}\vec{BC}$$

$$\vec{BI} = \frac{1-st}{1-it}\vec{BC}$$

$\triangle ABC$ 的外接椭圆设为：

$$P = \frac{(1-u)A + puB - qu(1-u)C}{(1-u) + pu - qu(1-u)}$$

将垂心 H 代入椭圆的焦点方程 XX 式。

在椭圆的判别式 $1-2p+p^2-2q-2pq+q^2<0$ 和固有条件 $s>0, t>0, 1-st>0$ 下，即可得到 p, q 的唯一解：

$$p = \frac{1-s^2}{1-t^2}, \quad q = \frac{(1-s^2)(s+t)^2}{(1+s+t-st)(-1+s+t+st)}$$

然后求出椭圆的另一个焦点为

$$\vec{BZ} = \frac{i(1-t^2)(1-s^2-4st+2s^3t-t^2+3s^2t^2-is(1-s^2-2st+t^2+s^2t^2))^2}{2s(1-it)^2(1-2s^2+s^4-4st+4s^3t-2t^2+8s^2t^2-2s^4t^2+4st^3-12s^3t^3+t^4-2s^2t^4+5s^4t^4)}\vec{BC}$$

验证即知内心在垂心和它的连线上。

三角形内心和旁心的求解

根据 Marden 定理, 我们又可导出三角形内心和旁心的统一方程式。

若与三角形相切的圆锥曲线是圆, 则它的两个焦点是重合的, 由 Marden 方程

$$(Z-B)(Z-C) + \lambda\mu(Z-C)(Z-A) + \mu(Z-A)(Z-B) = 0$$

对 Z 求导，有：

$$(1+\lambda)\mu(Z-A) + (1+\mu)(Z-B) + (1+\lambda\mu)(Z-C) = 0$$

取共轭又得

$$(1+\lambda)\mu(\overline{Z}-\overline{A}) + (1+\mu)(\overline{Z}-\overline{B}) + (1+\lambda\mu)(\overline{Z}-\overline{C}) = 0$$

对 Marden 方程再取共轭

$$(\overline{Z}-\overline{B})(\overline{Z}-\overline{C}) + \lambda\mu(\overline{Z}-\overline{C})(\overline{Z}-\overline{A}) + \mu(\overline{Z}-\overline{A})(\overline{Z}-\overline{B}) = 0$$

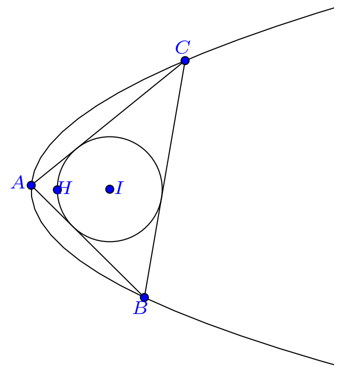
以上四式联立, 消元到 λ, μ 和 $\overline{Z}$, 经化简即得到关于 Z 的四次方程

$$\begin{aligned}
&\overline{A}(B-C)(Z^2-2AZ+AB-BC+CA)^2 \\
&+\overline{B}(C-A)(Z^2-2BZ+AB+BC-CA)^2 \\
&+\overline{C}(A-B)(Z^2-2CZ-AB+BC+CA)^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

四个根分别是 $\triangle ABC$ 的内心和三个旁心。

三角形内切圆恒定的问题

给定抛物线, 若其内接三角形 ABC 的垂心是抛物线的焦点, 则三角形的内切圆恒定。



证明：设抛物线的端点为 T, 则抛物线的内接三角形 ABC 可令为：

$$\overrightarrow{HA}=(1-ia)^2\,\overrightarrow{HT},\quad \overrightarrow{HB}=(1-ib)^2\,\overrightarrow{HT},\quad \overrightarrow{HC}=(1-ic)^2\,\overrightarrow{HT}$$

根据 $HA\perp BC, HB\perp CA, HC\perp AB$ 得到方程组：

$$\begin{cases} 4a=(1-a^2)(b+c)\\ 4b=(1-b^2)(c+a)\\ 4c=(1-c^2)(a+b) \end{cases}$$

其中仅有两个方程是独立的。不难解出

$$a+b=\frac{4c}{1-c^2},\quad ab=\frac{c^2-5}{1-c^2}$$

根据三角形的内心所满足的方程 XXX 式, 即可求出内心 I:

$$\overrightarrow{HI}=-2\,\overrightarrow{HT}$$

它在 AB 上的垂足点 D 为

$$\overrightarrow{HD}=-\frac{4}{1+ic}\,\overrightarrow{HT}$$

从而知半径 $r=ID=2HT$, 也是一个定值。

3.12 已知两个焦点的圆锥曲线

3.12.1 有理表示

对于一条中心圆锥曲线 Γ, 如果已知它的两个焦点 F_1、F_2, 求曲线的表示。

解：设 A 是圆锥曲线靠近 F_2 的一个端点, e 为离心率, 则

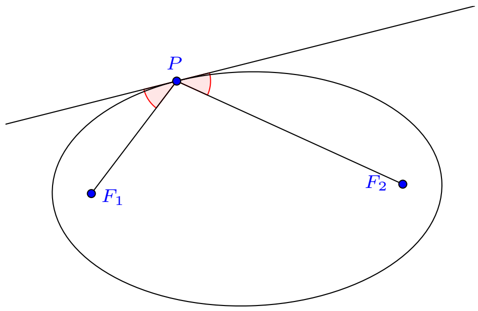
$$\overrightarrow{F_1A}=\frac{1+e}{2e}\,\overrightarrow{F_1F_2}$$

从而由上节的表示 XX 式给出

$$\overrightarrow{F_1P}=\frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)}\,\overrightarrow{F_1F_2} \tag{3.52}$$

3.12.2 反射定理

如图, 椭圆两焦点到曲线上点 P 的连线，与 P 点处的切线形成的两夹角大小相等。



证明：根据中心圆锥曲线上点 P 的表示

$$\overrightarrow{F_1P}=\frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)}\overrightarrow{F_1F_2}$$

P 点处的切向量是

$$\boldsymbol{v}=\frac{d}{du}\overrightarrow{F_1P}=\frac{(e^2-1)(1-iu)(u+eu+i-ie)}{e(1-e+u^2+eu^2)^2}\overrightarrow{F_1F_2}$$

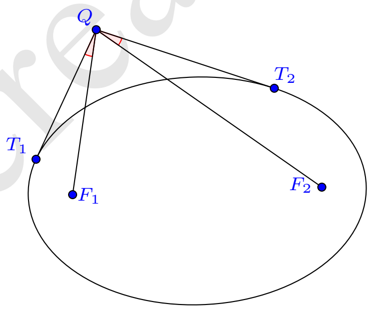
计算有

$$\frac{P-F_1}{\boldsymbol{v}}\frac{P-F_2}{\boldsymbol{v}}=\frac{(1-e+u^2+eu^2)^2}{4(e^2-1)}\in\mathbb{R}$$

由此即知，对于椭圆和双曲线，结论均成立。

3.12.3　彭赛列小定理

以 F_1,F_2 为焦点的椭圆，其外一点 Q 向椭圆作切线，切点 T_1,T_2。那么 $\angle F_1QT_1=\angle F_2QT_2$



证明：中心圆锥曲线外的一点，可以表示为：

$$\overrightarrow{F_1Q}=\left(\frac{(1-e^2)(1-uv)}{2e(1-e+uv+euv)}-\frac{(1-e^2)(u+v)}{2e(1-e+uv+euv)}i\right)\overrightarrow{F_1F_2}$$

它的两个切点：

$$\overrightarrow{F_1T_1}=\frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)}\overrightarrow{F_1F_2}$$

$$\overrightarrow{F_1T_2}=\frac{(1-e^2)(1-iv)^2}{2e(1-e+v^2+ev^2)}\overrightarrow{F_1F_2}$$

计算即有：

$$\frac{Q-T_1}{Q-F_1}\frac{Q-T_2}{Q-F_2}=\frac{(1-e^2)(u-v)^2}{(1-e+u^2+eu^2)(1-e+v^2+ev^2)}\in\mathbb{R}$$

因而对于椭圆和双曲线均成立。

容易看到，反射定理是彭赛列小定理的一个特例。

3.12.4 彭赛列小定理之逆定理

点 Q 是平面上的光滑曲线 Γ 上的动点, 作 Q 点的切线 T_1T_2, 若平面上存在两个不在曲线上的定点 F_1 和 F_2, 使得恒有 $\angle F_1QT_1 = \angle F_2QT_2$, 则 Γ 是以 F_1、F_2 为焦点的一条圆锥曲线。

证明: 设曲线 Γ 上的点 Q 的表示为:

$$\overrightarrow{F_1Q} = (x+iy)\,\overrightarrow{F_1F_2}$$

则它在 Q 点处的微分为:

$$d\,\overrightarrow{F_1Q} = (dx+idy)\,\overrightarrow{F_1F_2}$$

根据 $\angle F_1QT_1 = \angle F_2QT_2$, 得微分方程:

$$(1-2x)y(dx)^2 - (1-2x)y(dy)^2 - 2(x-x^2+y^2)(dx)(dy) = 0$$

我们先尝试直接解出 $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-x^2+y^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}}{(2x-1)y}$$

注意到上式右方的根式是 $(x+iy)$ 到 0 和 1 的距离之积，因而我们考虑前面经常使用的有理代换:

$$x+iy = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}$$

分离实部和虚部后即为:

$$x = \frac{(1-t^2)(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{2t(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)^2}$$

在此代换下，微分方程成为:

$$\left(t(1+t^2)ds + (s+2t-st^2)dt\right)\left(t(1+t^2)ds - s(1-2st-t^2)dt\right) = 0$$

容易解出

$$s = \frac{1}{t} + c\frac{1+t^2}{t} \quad 或 s = \frac{t}{c+t^2c-1}$$

这二者均使得曲线取如下的参数表示形式:

$$\overrightarrow{F_1Q} = \frac{K(1+K)(i-t)^2}{1+K+Kt^2}\,\overrightarrow{F_1F_2}$$

作代换:

$$K = -\frac{1+e}{2e}, \quad t = -u$$

即化为前面已知两焦点的圆锥曲线的标准表示形式:

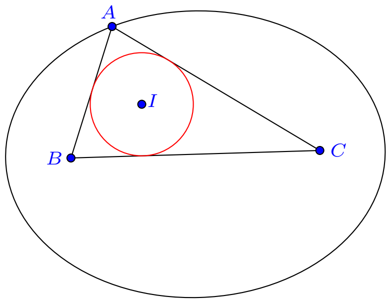
$$\overrightarrow{F_1Q} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)}\,\overrightarrow{F_1F_2}$$

3.12.5 焦点三角形

给定一条中心圆锥曲线 Γ, 若以它的两个焦点及曲线上一点为三角形的顶点，则称该三角形为 Γ 的焦点三角形。

焦点三角形拥有非常良好的性质, 其中之一是三角形的所有二阶特征点均可有理参数化表示。

证明: 如图，设曲线 Γ 的两个焦点为 B, C, 点 A 在 Γ 上。



可令

$$\vec{BA} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)}\vec{BC}$$

根据三角形的内心-旁心方程 (XX 式), 即可求出 $\triangle ABC$ 的内心和旁心, 分别为:

$$\vec{BI} = \frac{(1-e)(1-iu)}{1-e+u^2+eu^2}\vec{BC}$$
$$\vec{BI_A} = \frac{(1+e)u(i+u)}{1-e+u^2+eu^2}\vec{BC}$$
$$\vec{BI_B} = \frac{(1+e)(1-iu)}{2e}\vec{BC}$$
$$\vec{BI_C} = \frac{(-1+e)(i+u)}{2eu}\vec{BC}$$

根据 XX 结论即知三角形的所有二阶特征点均可有理参数化表示。
因为焦点三角形内心和旁心也是参数 u 的二阶有理表示，因此它们的轨迹仍是二次曲线。[①]

又如性质：对于焦点三角形, 若记 r, R 分别为椭圆焦点三角形的内切圆和外接圆的半径, e 为椭圆离心率, 则有

$$(1).\frac{r}{R} \le 2(1-e)e; \qquad (2).R = \frac{er}{2(1-e)} + \frac{1-e}{8e}\frac{BC^2}{r}$$

我们只需计算出 r, R 的参数表示

$$r = \frac{(1-e)}{1-e+u^2+eu^2}|u|BC$$
$$R = \frac{(1+u^2)((1-e)^2+(1+e)^2u^2)}{8e(1-e+u^2+eu^2)|u|}BC$$

即可完成上述性质的证明。

3.12.6 包络椭圆问题

椭圆 Γ 左右焦点为 A, B, 以 A 和椭圆上一点 P 为焦点作一个过点 B 的新椭圆 Ω, Ω 与 Γ 相交两点连线为 l, 求证 l 与定椭圆相切。

证明: 设椭圆 Γ 上的点 P 有表示

$$\vec{AP} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)}\vec{AB}$$

又设椭圆 Ω 上的点 B 有表示

$$\vec{AB} = \frac{(1-s^2)(1-iv)^2}{2s(1-s+v^2+sv^2)}\vec{AP}$$

[①] 若转化为直角坐标系下的描述, 例如对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (a>b>0)$, 记 $c=\sqrt{a^2-b^2}$, 则它的两个焦点是 $B=-c, C=c$, 离心率 $e=\frac{c}{a}$。
设 $\triangle ABC$ 内心为：$I = x+iy$, 代入参数表示, 有

$$x+iy+c = \frac{(a-c)(1-iu)}{a-c+au^2+cu^2}2c$$

分离虚部和实部，然后消去 u, 得到

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{(a+c)y^2}{(a-c)c^2}=1$$

由此二式，得方程

$$\frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)}\cdot\frac{(1-s^2)(1-iv)^2}{2s(1-s+v^2+sv^2)}=1$$

分离实部和虚部，我们可得到唯一符合要求 $(0\le e<1, 0\le s<1)$ 的解：

$$s=\frac{(1-e)(1+u^2)}{1-e+u^2+3eu^2}, v=-u$$

因而椭圆 Ω 上的任意点 Q 可表示为：

$$\vec{AQ}=\frac{(1+e)u^2(1-iu)(1-iw)^2}{(1+iu)(2eu^2+w^2-ew^2+u^2w^2+eu^2w^2)}\vec{AB}$$

它与椭圆 Γ 的两个交点 T_1, T_2 是：

$$\vec{AT_1}=\frac{(1+e)(1-e+2eu-iu+ieu)^2}{2e(1-2e+e^2+4eu-4e^2u+u^2+3e^2u^2)}\vec{AB}$$
$$\vec{AT_2}=\frac{(1+e)(1-e-2eu-iu+ieu)^2}{2e(1-2e+e^2-4eu+4e^2u+u^2+3e^2u^2)}\vec{AB}$$

经过 T_1, T_2 的直线 l 上的点 Z 设为 $\vec{AZ}=(x+yi)\vec{AB}$，则有

$$1-e-e^2+e^3+u^2-eu^2-5e^2u^2-3e^3u^2-2ex+4e^2x-2e^3x+2eu^2x+6e^3u^2x+4euy-4e^2uy=0$$

其包络线方程为：

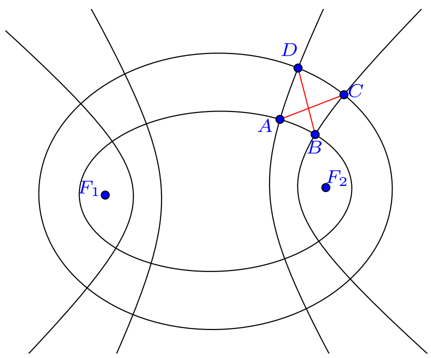
$$1-6e^2-8e^3-3e^4+4e^2x+16e^3x+12e^4x-4e^2x^2-12e^4x^2-4e^2y^2=0$$

所表示的是正是一个固定椭圆。[1]

下面我们介绍共焦圆锥曲线的一些性质

3.12.7 Ivory 定理

共焦的两椭圆与两双曲线的交点中，位于同一象限的对角交点的连线长度相等。



证明：设四条共焦曲线 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 的离心率分别为 e_1, e_2, e_3, e_4, $(0\le e_1, e_2<1, 1<e_3, e_4)$，则各曲线上的点 $P_k(k=1,2,3,4)$ 有表示：

$$\vec{F_1P_k}=\frac{(1-{e_k}^2)(1-iu_k)^2}{2e_k(1-e_k+{u_k}^2+e_k{u_k}^2)}\vec{F_1F_2}$$

[1]若转化为直角坐标系下的表示，设椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则定椭圆方程为：

$$\frac{(4a^2-3b^2)^2}{a^2b^4}\left(x-\frac{4a(a^2-b^2)}{4a^2-3b^2}\right)^2+\frac{(4a^2-3b^2)}{b^4}y^2=1$$

在第一象限, 两椭圆和两双曲线的四个交点 A, B, C, D 分别为:

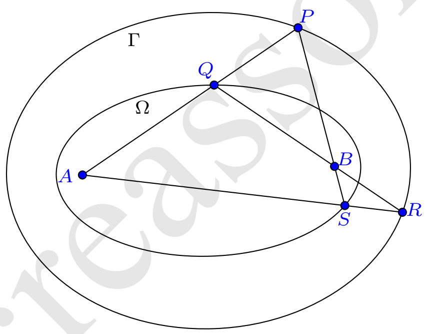
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_1A} &= \frac{\left(\sqrt{(1+e_1)(1+e_3)}+i\sqrt{(e_3-1)(1-e_1)}\right)^2}{4e_1e_3}\overrightarrow{F_1F_2} \\
\overrightarrow{F_1B} &= \frac{\left(\sqrt{(1+e_1)(1+e_4)}+i\sqrt{(e_4-1)(1-e_1)}\right)^2}{4e_1e_4}\overrightarrow{F_1F_2} \\
\overrightarrow{F_1C} &= \frac{\left(\sqrt{(1+e_2)(1+e_4)}+i\sqrt{(e_4-1)(1-e_2)}\right)^2}{4e_2e_4}\overrightarrow{F_1F_2} \\
\overrightarrow{F_1D} &= \frac{\left(\sqrt{(1+e_2)(1+e_3)}+i\sqrt{(e_3-1)(1-e_2)}\right)^2}{4e_2e_3}\overrightarrow{F_1F_2}
\end{aligned}$$

由此计算即知

$$AC = BD = \sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}+\frac{1}{e_3^2}+\frac{1}{e_4^2})-\frac{1+\sqrt{(1-e_1^2)(1-e_2^2)(e_3^2-1)(e_4^2-1)}}{2e_1e_2e_3e_4}}F_1F_2$$

3.12.8 Urquhart 定理

如图, 设 P, R 是以 A, B 为焦点的二次曲线 Γ 上的两点, AP 交 BR 于 Q， AR 交 BP 于 S, 则 Q, S 也在某一以 A, B 为焦点的二次曲线 Ω 上。



证明：令

$$\overrightarrow{AP} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{(1-e^2)(1-iv)^2}{2e(1-e+v^2+ev^2)}\overrightarrow{AB}$$

则 AP 与 BR 的交点 Q, AR 与 BP 的交点 S 分别为:

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2v}{(v-u+eu+ev)(1-e+uv+euv)}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{(1-e^2)(1-iv)^2u}{(u-v+eu+ev)(1-e+uv+euv)}\overrightarrow{AB}$$

命题断言 Q, S 也在以 A, B 为焦点的二次曲线上, 即使得 Q, S 具有如下的表示形式 (s 为曲线 Ω 的离心率):

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{(1-s^2)(1-ip)^2}{2s(1-s+p^2+sp^2)}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{(1-s^2)(1-iq)^2}{2s(1-s+q^2+sq^2)}\overrightarrow{AB}$$

事实上, 容易解出

$$s = \frac{1-e+uv+euv}{1-e-uv-euv}, \quad p = u, \quad q = v$$

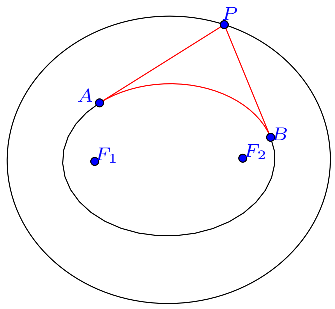
或

$$s=-\frac{1-e+uv+euv}{1-e-uv-euv},\quad p=-\frac{1}{u},\quad q=-\frac{1}{v}$$

上面的两组解能且仅取其中一组, 因为离心率要求 $s\geq 0$, 这就说明了 Q,S 在某一以 A,B 为焦点的二次曲线 Ω 上。

3.12.9 Graves 定理

对于给定的共焦椭圆, 外椭圆上的一点向内椭圆引切线, 则两切线段的长度之和, 与两个切点间劣弧的长度之差是一个定值。



证明: 设内椭圆上的点 A 和 B 分别为:

$$\overrightarrow{F_1A}=\frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)}\overrightarrow{F_1F_2}$$

$$\overrightarrow{F_1B}=\frac{(1-e^2)(1-iv)^2}{2e(1-e+v^2+ev^2)}\overrightarrow{F_1F_2}$$

不妨设 $u<v$, 则 A、B 处切线的交点 P 为:

$$\overrightarrow{F_1P}=\frac{(1-e^2)(1-iu)(1-iv)}{2e(1-e+uv+euv)}\overrightarrow{F_1F_2}$$

由此计算出

$$PA=\frac{(1-e^2)(v-u)\sqrt{(1+u^2)((1-e)^2+(1+e)^2u^2)}}{2e|1-e+uv+euv|(1-e+u^2+eu^2)}F_1F_2$$

$$PB=\frac{(1-e^2)(v-u)\sqrt{(1+v^2)((1-e)^2+(1+e)^2v^2)}}{2e|1-e+uv+euv|(1-e+v^2+ev^2)}F_1F_2$$

$$\widehat{AB}=\int_u^v\frac{(1-e^2)\sqrt{(1+t^2)((1-e)^2+(1+e)^2t^2)}}{e(1-e+t^2+et^2)^2}dtF_1F_2$$

另一方面, P 点在同焦椭圆之上，因此又可令:

$$\overrightarrow{F_1P}=\frac{(1-s^2)(1-iw)^2}{2s(1-s+w^2+sw^2)}\overrightarrow{F_1F_2}$$

其中 s 为外椭圆的离心率, $s<e$。
两式比较, 然后消去 w, 将得到关于 u,v 的等式:

$$(1-e^2)^2s^2(u+v)^2-(1-e)^2(e^2-s^2)(1-s^2)-(1+e)^2(e^2-s^2)(1-s^2)(uv)^2-2(1-e^2)(1-s^2)(e^2+s^2)uv=0$$

在此等式之下, 即是要证明 $PA+PB-\widehat{AB}$ 恒为定值。
一个简便的计算方案是利用彭赛列小定理:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{P-A}{dP}\frac{P-B}{dP}\right)=0$$

导出[①]

$$\frac{du}{\sqrt{(1+u^2)((1-e)^2+(1+e)^2u^2)}}=\pm\frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)((1-e)^2+(1+e)^2v^2)}}$$

由此不难计算知待证等式是恒成立的。

3.13　彭赛列闭合定理

在所有的初等几何命题中, 最为引人入胜的当属彭赛列闭合定理, 它揭示了圆锥曲线的一种特殊结构。本节我们将用有理参数表示的方法来处理这个伟大的命题, 先从一个点的轨迹问题开始。

3.13.1　点的轨迹问题

如图, P 是椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 上的一个动点, 过点 P 作单位圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线分别与椭圆交于 A,B 两点, 再过 A,B 分别作单位圆的另一条切线 AQ 和 BQ, Q 是这两条切线的交点。求点 Q 的轨迹。

解：利用单位圆的参数表示：

$$z(u)=\frac{1+iu}{1-iu}=\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}i$$

根据第一节的讨论, 我们知道, 由这个二阶有理表示诱导出单位圆外的任意点有表示:

$$z(u,v)=\frac{1-uv}{1+uv}+\frac{u+v}{1+uv}i$$

若点在外椭圆上, 将该表示代入外椭圆的方程则得:

$$f(u,v)=4-3u^2+10uv-3v^2+4u^2v^2=0$$

设 $P=z(p,q)$, 则由 P 向单位圆所引切线的两个切点分别为 $z(p),z(q)$, 因而又可令 $A=z(p,a),B=z(b,q)$。
A,B 向单位圆所作的另一切线 AQ,BQ 的交点 Q 则是 $Q=z(a,b)$。
将 P,A,B 在外椭圆上的条件方程一一列出：

$$\begin{cases} f(p,q)=4-3p^2+10pq-3q^2+4p^2q^2=0\\ f(p,a)=4-3p^2+10pa-3a^2+4p^2a^2=0\\ f(b,q)=4-3b^2+10bq-3q^2+4b^2q^2=0\end{cases}$$

消去参数 p,q 得:

$$(4-3a^2+10ab-3b^2+4a^2b^2)(2896804-7216803a^2+15552970ab-7216803b^2+2896804a^2b^2)=0$$

左方第一个因式是不等于 0 的, 否则 $q=b$, 即 B 点在单位圆上, 因而排除。
第二个因式是关于 a,b 的对称式, 可改写为:

$$2896804+29986576ab+2896804a^2b^2-7216803(a+b)^2=0$$

为了将其表示成直角坐标方程, 令 $Q=x+yi$, 则由 $Q=z(a,b)=x+yi$ 知:

$$a+b=\frac{2y}{1+x},\quad ab=\frac{1-x}{1+x}$$

代入化简，即得轨迹方程：

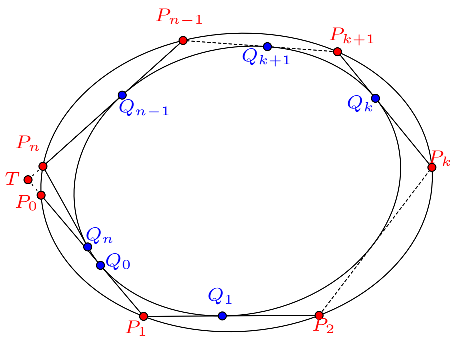
$$\frac{2209x^2}{3267}+\frac{2209y^2}{2738}=1$$

[①]注: 也可由上面关于 u,v 的方程直接导出。这只需要对该等式微分后，联立消元 s 即可。

本例事实上给出了两条圆锥曲线间的外切-内接多边形的一般解法。

3.13.2 彭赛列闭合定理

彭赛列闭合定理：平面上给定两条圆锥曲线，若存在一封闭多边形外切其中一条圆锥曲线且内接另一条圆锥曲线，则此封闭多边形内接的圆锥曲线上每一个点都是满足这样外切-内接多边形的顶点，且所有满足此性质的封闭多边形的边数相同。



如图所示, 由外圆锥曲线 Γ 上的 P_0 点向内圆锥曲线 Ω 作逆时针方向的切线, 切点为 Q_0, 对应参数 u_0, 切线与 Γ 再交于 P_1。由 P_1 再向 Ω 作逆时针方向的切线, 如此继续, 直至 P_n 与 P_0 重合或线段 P_0P_n 不再与 Ω 有交点。

彭赛列闭合定理即是断言：如果存在这样一个点 P_0, 使得 P_n 与之重合, 则以 Γ 上的任意点为起始点，终点 P_n 均与之重合。

前面示例所介绍的方法适用于 n 较小时的情形, 为了证明一般情形, 我们还需要利用如下的 Euler-Trudi 定理[①]:

如果 u, v 满足双纽线方程:

$$A(uv)^2 + 2B(uv)(u+v) + C(u+v)^2 + 2D(u+v) + 2E(uv) + F = 0 \tag{3.53}$$

则有微分等式:

$$\frac{du}{\sqrt{\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon}} = \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^4 + \beta v^3 + \gamma v^2 + \delta v + \varepsilon}}$$

其中

$$\begin{cases} A = 4\alpha\,(K+\gamma) - \beta^2 \\ B = 2\alpha\delta + K\beta \\ C = 4\alpha\varepsilon - K^2 \\ D = 2\beta\varepsilon + \delta K \\ E = \beta\delta + 2\,(K+\gamma)\,K \\ F = 4\varepsilon\,(K+\gamma) - \delta^2 \end{cases} \tag{3.54}$$

它是容易被验证的，这只需要对原方程两端微分, 然后代入微分等式化简即可。

下面我们来完成闭合定理的证明：

首先, 内圆锥曲线上的点可表示为有理参数形式:

$$x = \frac{a_1u^2 + 2b_1u + c_1}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3}, \quad y = \frac{a_2u^2 + 2b_2u + c_2}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3}$$

由此诱导出内圆锥曲线外的任意一点 P 均可表示为:

$$x = \frac{a_1uv + b_1(u+v) + c_1}{a_3uv + b_3(u+v) + c_3}, \quad y = \frac{a_2uv + b_2(u+v) + c_2}{a_3uv + b_3(u+v) + c_3}$$

式中 u, v 是 P 在内圆锥曲线上的切点所对应的参数值。

① 见《Poncelet’s porism: a long story of renewed discoveries, I》(作者: Andrea Del Centina1) 第 47-49 页

将其代入外圆锥曲线的方程, 即知 u, v 应满足一个形如

$$A(uv)^2+2B(uv)(u+v)+C(u+v)^2+2D(u+v)+2E(uv)+F=0$$

的方程。

设 Q_k 所对应的参数为 $u_k \quad (k=0,1,2,...n)$, 根据欧拉-XXX 定理, 则有:

$$\frac{du_0}{\sqrt{\alpha u_0^4+\beta u_0^3+\gamma u_0^2+\delta u_0+\varepsilon}}=\frac{du_1}{\sqrt{\alpha u_1^4+\beta u_1^3+\gamma u_1^2+\delta u_1+\varepsilon}}=...=\frac{du_n}{\sqrt{\alpha u_n^4+\beta u_n^3+\gamma u_n^2+\delta u_n+\varepsilon}}$$

如果 P_n 与 P_0 重合, 则又有 $u_n=u_0$, 则上式表明无论 u_0 发生怎样的变化, u_n 均随之发生相同大小的变化，因而也就保持 P_n 与 P_0 始终重合, 这就证明了彭赛列闭合定理。

如果 P_n 与 P_0 不重合, 直线 P_0P_1 与 $P_{n-1}P_n$ 的交点 T 的轨迹是怎样的呢?

T 是内圆锥曲线 Ω 在 Q_0 与 Q_{n-1} 处切线的交点, 也即

$$x_T=\frac{a_1u_0u_{n-1}+b_1(u_0+u_{n-1})+c_1}{a_3u_0u_{n-1}+b_3(u_0+u_{n-1})+c_3},\quad y_T=\frac{a_2u_0u_{n-1}+b_2(u_0+u_{n-1})+c_2}{a_3u_0u_{n-1}+b_3(u_0+u_{n-1})+c_3}$$

根据微分等式

$$\frac{du_0}{\sqrt{\alpha u_0^4+\beta u_0^3+\gamma u_0^2+\delta u_0+\varepsilon}}=\frac{du_{n-1}}{\sqrt{\alpha u_{n-1}^4+\beta u_{n-1}^3+\gamma u_{n-1}^2+\delta u_{n-1}+\varepsilon}}$$

知 u_0, u_{n-1} 也有如下形式的关系:

$$A'(u_0u_{n-1})^2+2B'(u_0u_{n-1})(u_0+u_{n-1})+C'(u_0+u_{n-1})^2+2D'(u_0+u_{n-1})+2E'(u_0u_{n-1})+F'=0$$

此处的各系数 A',B',C',D',E',F' 的表示，与前面系数 A,B,C,D,E,F 的表示, 仅有 K 值的不同。

因而点当 P_0 在外圆锥曲线上运动时, T 的轨迹也是一条圆锥曲线。

根据这个结论, 我们重新来求解前面点的轨迹问题:

令

$$z(u,v)=\frac{1-uv}{1+uv}+\frac{u+v}{1+uv}i$$

外椭圆上的点 $z(u,v)$ 满足:

$$4-3u^2+10uv-3v^2+4u^2v^2=0$$

改写为

$$4u^2v^2-3(u+v)^2+16uv+4=0$$

与标准形式 (3.53) 对比即有：

$$A=4,\quad B=0,\quad C=-3,\quad D=8,\quad E=0,\quad F=4$$

根据 (3.54) 解出 (取其中一组解即可):

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=0,\quad \gamma=0,\quad \delta=0,\quad \varepsilon=\frac{1}{2},\quad K=2$$

于是新系数

$$A=2K,\quad B=0,\quad C=1-K^2,\quad D=0,\quad E=2K^2,\quad F=2K$$

令 $Q=z(u,v)$, 则 u,v 满足方程：

$$2K(uv)^2+(1-K^2)(u+v)^2+4K^2(uv)+2K=0$$

转化为直角坐标方程则是:

$$(K^2-K)x^2+(K^2-1)y^2-K(1+K)=0$$

现在我们任取一点作为初始点来确定常数 K:

取 $u_0=0$, 根据递推关系:

$$4-3u_k+10u_ku_{k+1}-3u_{k+1}^2+4u_k^2u_{k+1}^2=0$$

计算出第 4 个值即可 (因为是四边形):

$$u_1=-\frac{2}{\sqrt{3}},\quad u_2=\frac{20\sqrt{3}}{7},\quad u_3=\frac{1702}{1551\sqrt{3}}$$

Q 的一个值即为

$$z(u_0,u_3)=z(0,\frac{1702}{1551\sqrt{3}})$$

由此即确定出 K 值为: $K=\frac{2738}{529}$

代回化简即知 Q 点的轨迹是:

$$\frac{2209x^2}{3267}+\frac{2209y^2}{2738}=1$$

3.13.3 闭合条件的积分表示

对于两圆锥曲线间的外切-内接多边形, 注意到它在各切点处的参数 u_k 所满足的微分式是相等的, 因而当点从一个切点沿内圆锥曲线绕行至另一个切点时, 对各段的积分应等于对整条曲线积分的 $\frac{1}{n}$, 即:

$$\int_{u_k}^{u_{k+1}}\frac{du}{\sqrt{\alpha u^4+\beta u^3+\gamma u^2+\delta u+\varepsilon}}=\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{\alpha u^4+\beta u^3+\gamma u^2+\delta u+\varepsilon}} \tag{3.55}$$

3.13.4 双心多边形问题

彭赛列闭合定理最显著应用, 即是用于寻找两条圆锥曲线的外切-内接 n 边形闭合时的条件, 其中之一是双心多边形情形: 若 n 边形外切于圆 $x^2+y^2=r^2$, 并内接于圆 $(x-d)^2+y^2=R^2$ (两圆不相交的条件是 $d+r<R$), 求闭合条件。

解: 内圆的一个二阶有理参数表示:

$$x=r\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad y=r\frac{2u}{1+u^2}$$

由此诱导出内圆外的一点, 其有理参数表示是:

$$x=r\frac{1-uv}{1+uv},\quad y=r\frac{u+v}{1+uv}$$

代入外圆方程, 得到约束条件:

$$d^2-2dr+r^2-R^2+r^2u^2+2d^2uv-2R^2uv+r^2v^2+d^2u^2v^2+2dru^2v^2+r^2u^2v^2-R^2u^2v^2=0$$

可以作代换

$$p=\frac{R+d}{r},\quad q=\frac{R-d}{r}$$

使之简化为:

$$1-p+q-pq+u^2-2pquv+v^2+u^2v^2+pu^2v^2-qu^2v^2-pqu^2v^2=0$$

于是内圆上切点的参数 u_k 有递推关系:

$$1-p+q-pq+u_k^2-2pqu_ku_{k+1}+u_{k+1}^2+u_k^2u_{k+1}^2+pu_k^2u_{k+1}^2-qu_k^2u_{k+1}^2-pqu_k^2u_{k+1}^2=0$$

相邻两个递推关系式相减则知:

$$u_{k+2}=-u_k+\frac{2pqu_{k+1}}{1+(1+p)(1-q)u_{k+1}^2}$$

因为结论并不依赖于初值的选取, 为简便, 我们让多边形的第一条边与垂直于 x 轴, 则可利用图形对称性减少一半的计算。
取 $u_0=-u_1=\sqrt{\frac{q+1}{q-1}}$, 则双心 n 边形的闭合条件是:
若 $n=2m+1$, 则 $u_{m+1}=0$; 若 $n=2m$, 则 $u_m+u_{m+1}=0$。

对于三角形 $n=3$, 根据 $u_2=0$ 得到：$p+q=pq$。
对于四边形 $n=4$, 根据 $u_2+u_3=0$ 得到：$p^2+q^2=p^2q^2$。
在实际的计算中, 做代换 $\sqrt{\frac{q+1}{q-1}}=t$, 即 $q=\frac{t^2+1}{t^2-1}$ 使初值有理化可极大地简化运算。
另外, 记

$$s=\frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{q+1}},\quad k^2=\frac{q^2-1}{p^2-1}$$

则闭合条件的一个积分表示是:

$$\int_0^s\frac{1}{\sqrt{(1+u^2)(1+k^2u^2)}}du=\frac{1}{n}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{(1+u^2)(1+k^2u^2)}}du$$

3.13.5　同心椭圆的闭合条件

若 n 边形外切于椭圆 $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$ 并内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 求闭合条件。
解：内椭圆的一个二阶有理参数表示:

$$x=p\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad y=q\frac{2u}{1+u^2}$$

由此诱导出内椭圆外的一点，其有理参数表示是:

$$x=p\frac{1-uv}{1+uv},\quad y=q\frac{u+v}{1+uv}$$

代入外椭圆方程, 得到约束条件:

$$a^2b^2-b^2p^2-a^2q^2u^2+2a^2b^2uv+2b^2p^2uv-2a^2q^2uv-a^2q^2v^2+a^2b^2u^2v^2-b^2p^2u^2v^2=0$$

因而内椭圆上切点的参数 u_k 有递推关系:

$$a^2b^2-b^2p^2-a^2q^2u_k^2+2a^2b^2u_ku_{k+1}+2b^2p^2u_ku_{k+1}-2a^2q^2u_ku_{k+1}-a^2q^2u_{k+1}^2+a^2b^2u_k^2u_{k+1}^2-b^2p^2u_k^2u_{k+1}^2=0$$

相邻两个递推关系式相减得到:

$$u_{k+2}=-u_k+\frac{2(a^2b^2+b^2p^2-a^2q^2)u_{k+1}}{a^2q^2+b^2(p^2-a^2)u_{k+1}^2}$$

同前面一样，根据对称性选取初值:

$$u_0=-u_1=\frac{\sqrt{a+p}}{\sqrt{a-p}}$$

则闭合条件为：若 $n=2m+1$, 则 $u_{m+1}=0$; 若 $n=2m$, 则 $u_m+u_{m+1}=0$。

对于三角形 $n=3$, 根据 $u_2=0$ 得到：$aq+bp=ab$。
对于四边形 $n=4$, 根据 $u_2+u_3=0$ 得到：$a^2q^2+b^2p^2=a^2b^2$。
另外, 记

$$s=\frac{\sqrt{a-p}}{\sqrt{a+p}},\quad k=\frac{(a^2q^2+p^2q^2-2b^2p^2)}{(a^2-p^2)q^2}$$

则闭合条件的一个积分表示是:

$$\int_0^s\frac{du}{\sqrt{1-2ku^2+u^4}}=\frac{1}{n}\int_0^\infty\frac{du}{\sqrt{1-2ku^2+u^4}}$$

3.13.6 闭合条件的加倍关系

前面我们已知, 相邻切点之间的积分是相等的，因而有：

$$\int_{u_0}^{u_{km}} \frac{du}{\sqrt{\alpha u^4+\beta u^3+\gamma u^2+\delta u+\varepsilon}} = k\int_{u_0}^{u_m} \frac{du}{\sqrt{\alpha u^4+\beta u^3+\gamma u^2+\delta u+\varepsilon}}$$

满足这个关系式的 u_0, u_m, u_{km} 之间存在着代数多项式关系。

事实上, 由微分等式
$$\frac{du}{\sqrt{\alpha u^4+\beta u^3+\gamma u^2+\delta u+\varepsilon}} = \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^4+\beta v^3+\gamma v^2+\delta v+\varepsilon}}$$

两端积分：
$$\int_{\eta}^{v} \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^4+\beta v^3+\gamma v^2+\delta v+\varepsilon}} = \int_{\eta}^{u} \frac{du}{\sqrt{\alpha u^4+\beta u^3+\gamma u^2+\delta u+\varepsilon}} + T$$

其中 η 和 T 是常数, η 可任意选取。

令 $u=\eta$, 代入等式

$$A(uv)^2+2B(uv)(u+v)+C(u+v)^2+2D(u+v)+2E(uv)+F=0$$

解出 $v=\zeta$, 于是得到表示:

$$\int_{\eta}^{v} \frac{dt}{\sqrt{\alpha t^4+\beta t^3+\gamma t^2+\delta t+\varepsilon}} = \int_{\eta}^{u} \frac{dt}{\sqrt{\alpha t^4+\beta t^3+\gamma t^2+\delta t+\varepsilon}} + \int_{\eta}^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{\alpha t^4+\beta t^3+\gamma t^2+\delta t+\varepsilon}}$$

其中 ζ, η 满足
$$A(\zeta\eta)^2+2B(\zeta\eta)(\zeta+\eta)+C(\zeta+\eta)^2+2D(\zeta+\eta)+2E(\zeta\eta)+F=0$$

将这个式子与
$$A(uv)^2+2B(uv)(u+v)+C(u+v)^2+2D(u+v)+2E(uv)+F=0$$

联立 (代入各系数关于 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,K$ 的表示 (3.54)), 消去 K, 将得到 ζ,η,u,v 和已知常数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ 之间的关系。

这个关系式甚长, 故不列出, 将其简记为: $S(\zeta,\eta,u,v)=0$。

现在, 若将 ζ 也视为自由的变量, 然后令 $\eta=u_0, \zeta=u=u_m, v=u_{2m}$, 则得闭合条件的二倍关系式, 即：

若
$$\int_{u_0}^{u_{2m}} \frac{du}{\sqrt{\alpha u^4+\beta u^3+\gamma u^2+\delta u+\varepsilon}} = 2\int_{u_0}^{u_m} \frac{du}{\sqrt{\alpha u^4+\beta u^3+\gamma u^2+\delta u+\varepsilon}}$$

则 u_0, u_m, u_{2m} 满足多项式方程：$S(u_m, u_0, u_m, u_{2m})=0$

对于同心椭圆：

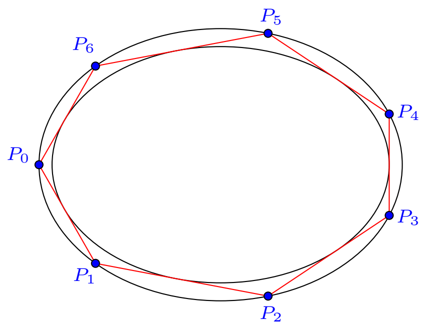
$$\alpha \to \frac{a^2q-p^2q}{4p}, \quad \beta\to 0, \quad \gamma \to \frac{2b^2p^2-a^2q^2-p^2q^2}{2pq}, \quad \delta\to 0, \quad \varepsilon \to \frac{a^2q-p^2q}{4p}$$

在 $u_0=-u_1=\frac{\sqrt{a+p}}{\sqrt{a-p}}$ 的初值选取下, 加倍关系式成为：

$$4b^2(u_0-1)^2(u_0+1)^2u_m^2(u_m^2-u_0u_{2m})(u_0u_m^2u_{2m}-1)+q^2(u_0^2-2u_m^2+u_0^2u_m^4+u_0u_{2m}-2u_0^3u_m^2u_{2m}+u_0u_m^4u_{2m})^2=0$$

利用上述关系, 我们可以快速进行计算彭赛列多边形的闭合条件：

例如：求同心椭圆的闭合 7 边形条件。



前面已知，闭合条件应使得 $u_4=0$，将其代入加倍关系式，得到：

$$(qu_0^2+2bu_2^2-2qu_2^2-2bu_0^2u_2^2+qu_0^2u_2^4)(qu_0^2-2bu_2^2-2qu_2^2+2bu_0^2u_2^2+qu_0^2u_2^4)=0$$

代入

$$u_0=\sqrt{\frac{a-p}{a+p}},\quad u_2=\frac{(ab+bp-aq)(ab+bp+aq)}{(ab-bp-aq)(ab-bp+aq)}\sqrt{\frac{a-p}{a+p}}$$

筛选因式，则得到其闭合条件:

$$\begin{aligned}&a^6b^6+2a^5b^6p-a^4b^6p^2-4a^3b^6p^3-a^2b^6p^4+2ab^6p^5+b^6p^6+2a^6b^5q-2a^5b^5pq-2a^2b^5p^4q\\&+2ab^5p^5q-a^6b^4q^2+2a^4b^4p^2q^2-a^2b^4p^4q^2-4a^6b^3q^3-4a^3b^3p^3q^3-a^6b^2q^4-2a^5b^2pq^4\\&-a^4b^2p^2q^4+2a^6bq^5+2a^5bpq^5+a^6q^6=0\end{aligned}$$

上面的一般结论是：对任意初值的数列 $\{a_n\}$，若它有如下形式的递推关系式：

$$A(a_na_{n+1})^2+2B(a_na_{n+1})(a_n+a_{n+1})+C(a_n+a_{n+1})^2+2D(a_n+a_{n+1})+2E(a_na_{n+1})+F=0$$

且 a_{n+1} 总是取同一分支上的解，则 a_n 存在多项式方程表示的加倍关系。
二倍情形按上述方法推导即可，例如给定数列：

$$a_0=0,\quad 4(a_na_{n+1})^2+4(a_n+a_{n+1})^2-8(a_n+a_{n+1})-8a_na_{n+1}+3=0$$

a_{n+1} 选取分支：

$$a_{n+1}=\frac{2-\sqrt{1+8a_n-7a_n^2+8a_n^3-4a_n^4}}{2(1+{a_n}^2)}$$

这也等价于

$$a_0=0,\quad a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}+a_{n-1}=\frac{2}{1+a_n^2}$$

则有二倍关系式：

$$4a_n^2(1+a_n^2-4a_n^4)=(1+4a_n^4)^2a_{2n}^2$$

3.13.7　最大周长多边形问题

给定椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，求它的内接 n 边形的周长最大值。
解：椭圆的内接多边形的各顶点 P_k 有参数表示：

$$P_k=a\frac{1-u_k^2}{1+u_k^2}+ib\frac{2u_k}{1+u_k^2}$$

因而与 P_k 为端点的两边长度之和为:

$$P_{k-1}P_k + P_kP_{k+1} = \frac{2\sqrt{(u_k-u_{k-1})^2(b^2+a^2u_{k-1}^2+2a^2u_{k-1}u_k-2b^2u_{k-1}u_k+a^2u_k^2+b^2u_{k-1}^2u_k^2)}}{(1+u_{k-1}^2)(1+u_k^2)} + \frac{2\sqrt{(u_{k+1}-u_k)^2(b^2+a^2u_k^2+2a^2u_ku_{k+1}-2b^2u_ku_{k+1}+a^2u_{k+1}^2+b^2u_k^2u_{k+1}^2)}}{(1+u_k^2)(1+u_{k+1}^2)}$$

其余各边边长均与点 P_k 无关, 也即与参数 u_k 无关, 因此当多边形的周长为最大时，上式也应是 u_k 的极值，从而得到极值条件：

$$b^2u_{k-1}-2b^2u_k-4a^2u_k^3+2b^2u_k^3-b^2u_{k-1}u_k^4+b^2u_{k+1}+4a^2u_{k-1}u_ku_{k+1}-2b^2u_{k-1}u_ku_{k+1}+2b^2u_{k-1}u_k^3u_{k+1}-b^2u_k^4u_{k+1}=0$$

根据这个递推关系式, 我们可以计算出椭圆内接多边形的周长最大值。

以 $n=3, a=2, b=1$ 为例, 其极值条件是:

$$\begin{cases} u_1-2u_2+u_3-u_1u_2^4-u_2^4u_3-14u_2^3+2u_1u_2^3u_3+14u_1u_2u_3=0 \\ u_2-2u_3+u_1-u_2u_3^4-u_3^4u_1-14u_3^3+2u_2u_3^3u_1+14u_1u_2u_3=0 \\ u_3-2u_1+u_2-u_3u_1^4-u_1^4u_2-14u_1^3+2u_3u_1^3u_2+14u_1u_2u_3=0 \end{cases}$$

由此解出

$$u_1 = -\frac{50u_3+14\sqrt{13}u_3+\sqrt{7+2\sqrt{13}}\sqrt{1+350u_3^2+96\sqrt{13}u_3^2+u_3^4}}{-1+7u_3^2+2\sqrt{13}u_3^2}$$

$$u_2 = \frac{-50u_3-14\sqrt{13}u_3+\sqrt{7+2\sqrt{13}}\sqrt{1+350u_3^2+96\sqrt{13}u_3^2+u_3^4}}{-1+7u_3^2+2\sqrt{13}u_3^2}$$

所有这些三角形的周长值均为:

$$L_{max} = \sqrt{\frac{280}{9}+\frac{104\sqrt{13}}{9}}$$

上面这个解法虽然可行，但计算量太大。事实上, 我们可以利用如下结论另行计算:

具有最大周长值的椭圆内接 n 边形, 也必然是该椭圆的光反射多边形，这些多边形均外切于某个与椭圆共焦的另一椭圆。

光反射性只需要利用光反射的条件:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{(P_{k-1}-P_k)}{\boldsymbol{v_k}}\frac{(P_{k+1}-P_k)}{\boldsymbol{v_k}}\right)=0$$

其中 $\boldsymbol{v_k}$ 是椭圆在点 P_k 处的切向量:

$$\boldsymbol{v_k} = -\frac{4au_k}{(1+u_k^2)^2}+i\frac{2b(1-u_k^2)}{(1+u_k^2)^2}$$

化简即知它与上面求得的极值条件一致。

共焦 XXXX 由 XXX 知, 由此即知这些多边形是两个共焦椭圆之间的彭赛列闭合多边形。

对于上面的情形: $n=3, a=2, b=1$, 计算如下:

设内椭圆为 $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$, 根据共焦条件 $a^2-b^2=p^2-q^2$, 及闭合条件 $aq+bp=ab$ 解出：

$$p=\frac{2}{3}(-1+\sqrt{13}),\quad q=\frac{1}{3}(4-\sqrt{13})$$

设外椭圆上的各点为：

$$P_k = p\frac{1-u_ku_{k+1}}{1+u_ku_{k+1}}+q\frac{u_k+u_{k+1}}{1+u_ku_{k+1}}, (k=0,1,2)$$

初值按前面的取法：

$$u_0 = -u_1 = \frac{\sqrt{a+p}}{\sqrt{a-p}} = \sqrt{7+2\sqrt{13}}$$

闭合条件 $u_2 = 0$, 从而计算出三角形各顶点：

$$P_0 = \frac{-2+2\sqrt{13}+i\sqrt{-5+2\sqrt{13}}}{3}, \quad P_1 = -2, \quad P_2 = \frac{-2+2\sqrt{13}-i\sqrt{-5+2\sqrt{13}}}{3}$$

于是内接三角形的最大周长值为：

$$L_{max} = |P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_0| = \sqrt{\frac{280}{9} + \frac{104\sqrt{13}}{9}}$$

另外, 根据 Graves 定理, 我们可以得到椭圆内接 n 边形最大周长的另一个计算式：

$$L_{\max} = 2n\frac{b}{a}\sqrt{a^2-p^2} + \int_0^{2\pi}\sqrt{p^2\sin^2\theta + q^2\cos^2\theta}d\theta - 2n\int_0^{\arccos\frac{p}{a}}\sqrt{p^2\sin^2\theta + q^2\cos^2\theta}d\theta$$

3.14 二次曲线的高阶参数表示

寻找一个三次、四次有理分式的表示。

3.15 附录, 待查

光反射椭圆定理：(from https://bbs.emath.ac.cn/thread-4216-5-1.html 42#)

Geometry II (Marcel Berger, Michael Cole, Silvio Levy)

244 页命题 17.6.6：椭圆内接最大周长的 N 边形外切于共焦椭圆。

245 页命题 17.6.7: 共焦椭圆的彭赛列 n 边形的 Cayley 闭合条件。

3.16 包络二次曲线问题

给定单位圆 $x^2+y^2=1$ 及椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (a>b>1)$, 点 P 是椭圆上的动点，由 P 向单位圆作两条切线，切线再交椭圆于 A, B 两点，求证：直线 AB 的包络线是一条圆锥曲线。

证明：设点 P 的表示为：

$$P = \frac{1-uv}{1+uv} + \frac{u+v}{1+uv}i$$

将其代入椭圆方程, 得到:

$$f(u,v) = (1-a^2)b^2(uv)^2 + a^2(u+v)^2 - 2(1+a^2)b^2(uv) + (1-a^2)b^2 = 0$$

又设点 A, B 分别为:

$$A = \frac{1-uw}{1+uw} + \frac{u+w}{1+uw}i, \quad B = \frac{1-vs}{1+vs} + \frac{v+s}{1+vs}i$$

同理有

$$f(u,w) = 0, f(v,s) = 0$$

可以解出：

$$w = \frac{2a^4u - 2a^2b^2u - 2a^4b^2u + a^4v - b^4v + 2a^2b^4v - a^4b^4v}{-a^4 + b^4 - 2a^2b^4 + a^4b^4 + 2a^2b^2uv - 2a^4b^2uv - 2b^4uv + 2a^4b^4uv}$$

$$s = \frac{a^4u - b^4u + 2a^2b^4u - a^4b^4u + 2a^4v - 2a^2b^2v - 2a^4b^2v}{-a^4 + b^4 - 2a^2b^4 + a^4b^4 + 2a^2b^2uv - 2a^4b^2uv - 2b^4uv + 2a^4b^4uv}$$

又设 AB 直线上的点 Q 为

$$Q = x + yi$$

根据 Q,A,B 共线，有方程：

$$s-u+v+suv-w-suw+svw-uvw-sx+ux-vx+suvx+wx-suwx+svwx-uvwx-2svy+2uwy=0$$

将 w,s 的表示代入，将得到关于 u,v 的一个对称方程，记为 $g(u,v)=0$

因为是对称的，所以令 $m=u+v,n=uv$, 则由 $f(u,v)=0$ 和 $g(u,v)=0$ 可消去其中一个参数 m，得到关于 n 的单参数方程，

$$\begin{aligned}&a^4b^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2(1+n)^2-2a^2b^2(a^2+b^2-a^2b^2)(a^2-b^2+a^2b^2)(1-n^2)x+\\&b^2(a^2-b^2+a^2b^2)^2(1-n)^2x^2-a^2(a^2-b^2-a^2b^2)^2(1+a-n+an)(1-a-n-an)y^2=0\end{aligned}$$

由此求得包络线方程为：

$$\frac{(a^2-b^2+a^2b^2)^2}{a^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2}x^2+\frac{(a^2-b^2-a^2b^2)^2}{b^2(a^2+b^2-a^2b^2)^2}y^2=1$$

第四章　一般有理曲线

一般的三次曲线是不可有理参数化表示的，可有理参数化的三次曲线均有二重点。

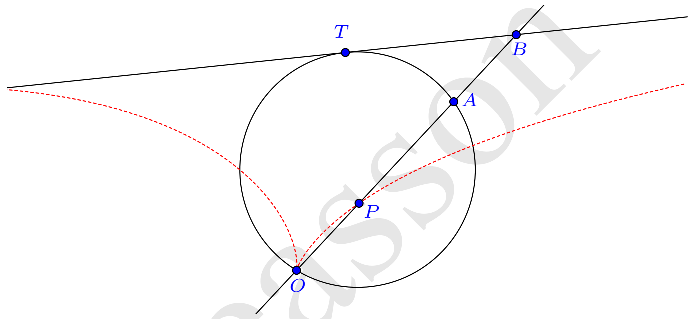
对于三次曲线 $f(x,y)=0$, 二重点的计算如下：

如果 $f(x,y)=0,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$ 有一个唯一的实解，那么该解为曲线的二重点。

本章我们主要介绍一些较知名的有理三次曲线的有理表示[①]。

4.1　蔓叶线

给定一个圆, 及圆上的两个定点 O 和 T, 设 A 是圆上的一个动点, 直线 OA 与设圆在 T 处的切线 l 相交于点 B, 若直线 OA 上的点 P 使得 $OP=AB$, 则 P 的轨迹是一条蔓叶线。



解: 对于经过 OT 两定点的圆, 其上的点 A 有参数表示：

$$\vec{OA}=\frac{1+is}{1-iu}\vec{OT}$$

在 T 处的切向量为:

$$\boldsymbol{v_T}=\lim_{u\to -s}\frac{d}{du}\left(\frac{1+is}{1-iu}\right)\vec{OT}=\frac{1}{s-i}\vec{OT}$$

设 $\vec{OP}=\lambda\vec{OA}$, 根据 $OP=AB$ 知 $\vec{OB}=(1+\lambda)\vec{OA}$。

点 B 在 T 的切线上即有：$\boldsymbol{v_T}//\vec{OP}$, 由此求出 λ, 从而知点 P 有参数表示：

$$\vec{OP}=\frac{(1+is)(s+u)^2}{(1-iu)(1-s^2-2su)}\vec{OT}$$

特别地, 如果 OT 是圆的直径, 此时 $s=0$, 则有：

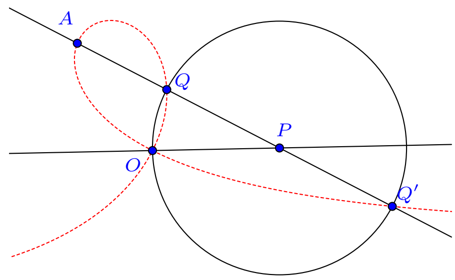
$$\vec{OP}=\frac{u^2}{1-iu}\vec{OT}$$

这称为正蔓叶线，其余情形是斜蔓叶线。

4.2　环索线

给定直线 l 及其上一定点 O, 另一定点 A 在直线外, 动点 P 在直线 l 上, 在直线 AP 上的点 Q 使得 $|PQ|=|OP|$, 则 Q 点的轨迹称为环索线。

[①]这部分内容可见于陈谷新《平面三次代数曲线》



解: 因为 O 和 A 均是定点, 所以选取 $\vec{OA}$ 为基向量。
定直线 l 上的点 P 可视为由 OA 经固定的角度 θ 旋转和任意长度的缩放而得, 故可设

$$\vec{OP}=te^{i\theta}\,\vec{OA}$$

根据 $|PQ|=|OP|$ 知 Q 在以 P 为圆心，OP 为半径的圆上, 因而可令:

$$\vec{PQ}=\frac{1+iu}{1-iu}\,\vec{PO}$$

改写为基向量 OA 的表示则是:

$$\vec{OQ}=\frac{2tu}{i+u}e^{i\theta}\,\vec{OA}$$

再由 A,P,Q 三点共线知:

$$2tu-2u\cos\theta-\sin\theta+u^2\sin\theta=0$$

这是关于 t 的一次式, 因而解出 t, 代回则得到 Q 的表示为:

$$\vec{OQ}=\frac{(2u\cos\theta+\sin\theta-u^2\sin\theta)}{i+u}e^{i\theta}\,\vec{OA}$$

若要将上式用有理参数进行表示，可再令 $e^{i\theta}=\frac{1+is}{1-is}$, 则

$$\vec{OQ}=\frac{2(s+u)(1-su)}{(1-is)^2(i+u)}\,\vec{OA}$$

如果 $\theta=\frac{\pi}{2}$(或 $s=1$), 则有:

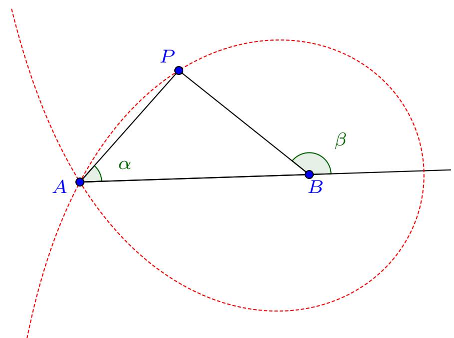
$$\vec{OQ}=\frac{1-u^2}{1-iu}\,\vec{OA}$$

称为正环索线, 其余情形是斜环索线。

4.3　麦克劳林三等分角线

麦克劳林三等分角线是可用于将一个角三等分的平面曲线。它的构造方式有多种, 我们选取其中较典型的两种进行求解。

一、给定一条线段 AB, 过端点 A,B 分别作直线 l,l', 它们与 AB 的夹角分别为 α,β, 若 $\alpha:\beta=1:3$, 则两直线的交点轨迹为麦克劳林三等分角线。



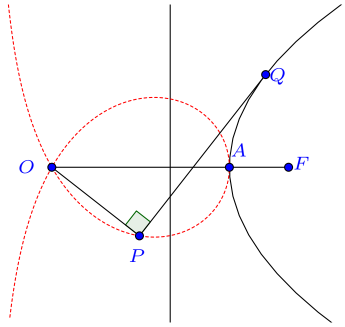
解: 根据三角形的角角边表示，有

$$\vec{AP}=\frac{e^{i2\alpha}(1-e^{-i2\beta})}{1-e^{i(2\alpha-2\beta)}}\vec{AB}=\frac{e^{i2\alpha}(1-e^{-i6\alpha})}{1-e^{-i4\alpha}}\vec{AB}$$

令 $e^{i2\alpha}=\frac{1+iu}{1-iu}$, 即得

$$\vec{AP}=\frac{3-u^2}{2(1-iu)}\vec{AB}$$

二、从抛物线的焦点 F 关于准线的对称点 O, 引此抛物线的切线的垂线, 垂足的轨迹是麦克劳林三等分角线。



解：图中, A 是抛物线的端点，在抛物线上的点 Q 有参数表示：

$$\vec{FQ}=(1-iu)^2\,\vec{FA}$$

其切向量为

$$\boldsymbol{v_Q}=-2i(1-iu)\,\vec{FA}$$

因而 Q 点处切线上的点 P 可设为：

$$\vec{FP}=\left((1-iu)^2-2\lambda i(1-iu)\right)\vec{FA}$$

点 O 的表示是

$$\vec{FO}=4\,\vec{FA}$$

根据 $OP\perp QP$ 即可解出 λ, 从而得到 P 点的参数表示

$$\vec{FP}=\frac{1+4iu+u^2}{1+iu}\vec{FA}$$

如果以 $\vec{OF}$ 为基向量，则其表示为

$$\vec{OP}=\frac{3-u^2}{4(1+iu)}\vec{OF}$$

4.4 笛卡尔叶形线

4.5 蚌线

4.6 主等角共轭三次曲线, 成书时删掉

主等角共轭三次曲线是三角形性质研究中一类较重要的曲线, 虽然它不属于有理曲线。

令

$$\vec{BA}=(x+iy)\,\vec{BC},\quad \vec{BP}=(u+iv)\,\vec{BC}$$

则 P 的等角共轭点 Q 为

$$\vec{BQ}=\frac{(x+iy)(u-iv)(v-vx-y+uy)}{vx-vx^2-uy+u^2y+v^2y-vy^2}\vec{BC}$$

若 P, Q 与某固定点 S 共线:

$$\vec{BS} = (p + iq)\,\vec{BC}$$

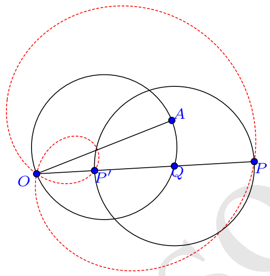
则得到方程：

$$\begin{aligned}&2pv^2x - 2uv^2x - 2pv^2x^2 + 2uv^2x^2 + qu^2y - qu^3y - 2puvy + u^2vy + pu^2vy + qv^2y\\&-quv^2y - v^3y + pv^3y - quxy + qu^2xy - pvxy + 2uvxy + 2puvxy - 3u^2vxy - qv^2xy\\&+v^3xy + puy^2 - u^2y^2 - pu^2y^2 + u^3y^2 - qvy^2 + 2quvy^2 + v^2y^2 - pv^2y^2 - uv^2y^2 = 0\end{aligned}$$

一般情况下，主等角共轭三次曲线非有理三次曲线，因而删掉。

4.7　蚶线

过半径为 a 的定圆上一个定点 O，任作一直线 l 交圆周于另一点 Q，在 l 上取 P 点，使得 $PQ = b(b > 0)$, 则 P 点的轨迹称为蜗线, 也称为蚶线。



解：如图, OA 为定圆的直径, 并设 OA 长度为 a, 则定圆上的点 Q 有表示

$$\vec{OQ} = \frac{1}{1 - iu}\,\vec{OA}$$

设点 P 为 $\vec{OP} = \lambda\vec{OQ}$, 根据 $PQ = b$ 解得:

$$\lambda = 1 \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 + u^2}$$

因而

$$\vec{OP} = (1 \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 + u^2})\frac{1}{1 - iu}\,\vec{OA}$$

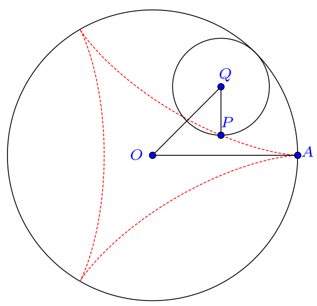
为消去根式，作代换 $u = \frac{2t}{1-t^2}$, 则得

$$\vec{OP} = \frac{a - b - at^2 - bt^2}{a(1 - it)^2}\,\vec{OA}$$

参数 t 取值范围为整个实数域 $\mathbb{R}$，这就是蚶线的有理参数表示。

4.8　内摆线

一个动圆内切于一个定圆作无滑动的滚动, 动圆圆周上一个定点的轨迹称为内摆线。



解：如图，设外圆半径为 a, 内圆半径 b, 由向量加法

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

而

$$\vec{OQ} = (a-b)e^{i\theta(t)}, \quad \vec{QP} = be^{i\varphi(t)}$$

其中 θ 为 OQ 与固定线 OA 的夹角, φ 为 QP 与 OA 的夹角。
因为动圆在定圆内作无滑动的滚动，所以切点的滚动距离应等于定点 P 绕 Q 所转动的距离, 即

$$|\frac{d}{dt}(a-b)e^{i\theta(t)}| = |\frac{d}{dt}be^{i\varphi(t)}|$$

化简为

$$(a-b)|\frac{d\theta}{dt}| = b|\frac{d\varphi}{dt}|$$

容易得知，θ 与 φ 的变化方向是相反的，因而有

$$(a-b)\frac{d\theta}{dt} = -b\frac{d\varphi}{dt}$$

从而得到:

$$\varphi(t) = -\frac{a-b}{b}\theta(t) + C$$

简单地，取 $C=0$ 使得当 $\theta=0$ 时 $\varphi=0$, 则得到 P 点的轨迹:

$$\vec{OP} = (a-b)e^{i\theta} + re^{-i\frac{a-b}{b}\theta}$$

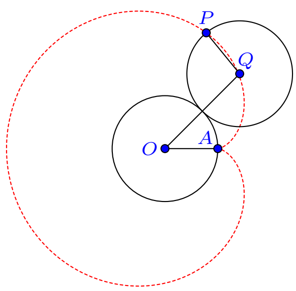
若 $a = kb, (k \in \mathbb{N})$, 内摆线是一条有理曲线, 通过令 $e^{i\theta} = \frac{1+iu}{1-iu}$ 即可得到其有理参数表示。图所示是 $k=3$ 的情形，又称三尖瓣线。

4.9　外摆线

一个动圆外切于一个定圆作无滑动的滚动, 动圆圆周上一个定点的轨迹称为外摆线。
同上推导易知，外摆线上点 P 的表示为:

$$\vec{OP} = (a+b)e^{i\theta} - be^{i\frac{a+b}{b}\theta}$$

特别地, $a=b$ 时，因曲线形状类似心形, 又称为心脏线。



4.10　玫瑰线

定长线段 AB =2a，它的两个端点在垂直两直线上滑动，从两直线的交点 O 向线段 AB 作垂线 OM，垂足 M 的轨迹称一’为四叶玫瑰线.

第五章　四面体

5.1　表示和符号约定

空间中任意不共面的四点构成一个四面体，又称为三棱锥。

在第一章中我们已知，对于四面体 $ABCD$, 空间中的任意点 P，均可表示为 A,B,C,D 的重心坐标形式：

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D, (\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1)$$

因为四面体涉及的量较多，为使行文简洁，我们先约定四面体各量的记号。

对于四面体 $ABCD$, 在不引起歧义的情况下, 约定如下:

enumerate 比 itemize 好用多了！

1. **顶点的表示** 以大写字母 $ABCD$ 表示四面体的顶点。

2. **棱长表示** 四面体的棱长：

$$DA = a, DB = b, DC = c, BC = l, AC = m, AB = n$$

根据余弦定理，有：

$$\begin{cases} l^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta_a \\ m^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\theta_b \\ n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta_c \end{cases}$$

3. **面积表示** 以 S_A, S_B, S_C, S_D 表示四面体各面的面积：

$$S_A = S_{BCD}, \quad S_B = S_{CDA}, \quad S_C = S_{DAB}, \quad S_D = S_{ABC}$$

4. **高线表示** 以 h_A, h_B, h_C, h_D 表示四面体各面的高线：

$$h_A = d_{A-BCD}, \quad h_B = d_{B-CDA}, \quad h_C = d_{C-DAB}, \quad h_D = d_{D-ABC}$$

5. **体积表示** 以字母 V 表示四面体的体积。

6. **棱的夹角表示** 约定 $<AB-CD>$ 表示直线 AB, CD 之间的夹角。

对于顶点 D 处的三条棱, 又以 $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ 分别表示 DB 与 DC、DC 与 DA、DA 与 DB 之间的夹角：

$$\theta_a = <DB-DC>, \quad \theta_b = <DC-DA>, \quad \theta_c = <DA-DB>$$

7. **面的夹角表示** 约定 $<A-BC-D>$ 表示平面 ABC 与平面 BCD 之间的二面角。

对于顶点 D 处的三个二面角, 又以 $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ 分别表示面 DAB 与面 DAC 的二面角、面 DBC 与面 DBA 的二面角、面 DCA 与面 DCB 的二面角：

$$\theta_A = <B-DA-C>, \quad \theta_B = <C-DB-A>, \quad \theta_C = <A-DC-B>$$

5.2　四面体的基本量

5.2.1　四面体的侧面面积法向量

定义：对于四面体的四个侧面, 若向量的大小等于侧面面积、方向与侧面垂直, 则称该向量为四面体的侧面面积法向量。

如果侧面面积法向量的方向指向四面体的内部，称为侧面面积内法向量，反之则称为侧面面积外法向量。

对于四面体 $ABCD$, 我们以 $\vec{S_A},\vec{S_B},\vec{S_C},\vec{S_D}$ 表示各侧面的侧面面积内法向量。

我们容易得到各面内法向量的表示，例如

$$\vec{S_A}=\frac{1}{2}\vec{BC}\times\vec{BD}=\frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{CB}=\frac{1}{2}\vec{DB}\times\vec{DC}$$

下面我们对侧面面积法向量的表示作进一步的讨论。

为行文简洁，我们以 a、b、c 分别表示棱长 DA、DB、DC, 以 θ_a、θ_b、θ_c 分别表示棱 DB 与 DC 的夹角、棱 DC 与 DA 的夹角、棱 DA 与 DB 的夹角。

由第一章我们已经知道，空间中的任意向量均可用三个不共面向量线性地表示，所以可设

$$\vec{S_A}=\frac{1}{2}\vec{DB}\times\vec{DC}=\alpha\vec{DA}+\beta\vec{DB}+\gamma\vec{DC}$$

将其分别点乘 $\vec{DB}$、$\vec{DC}$，根据向量的垂直关系，即有：

$$\begin{cases}0=2\vec{S_A}\cdot\vec{DB}=\alpha ab\cos\theta_c+\beta b^2+\gamma bc\cos\theta_a\\0=2\vec{S_A}\cdot\vec{DC}=\alpha ac\cos\theta_b+\beta bc\cos\theta_a+\gamma c^2\end{cases}$$

另一方面 $\vec{S_A}$ 与自身的点乘为：

$${S_A}^2=\vec{S_A}\cdot\vec{S_A}=\alpha^2a^2+\beta^2b^2+\gamma^2c^2+2\alpha\beta ab\cos\theta_c+2\beta\gamma bc\cos\theta_a+2\gamma\alpha ca\cos\theta_b$$

以上三式联立，并利用 $S_A=\frac{1}{2}bc\sin\theta_a$, 即可解出：

$$\alpha=\frac{bc\sin^2\theta_a}{2ka},\quad\beta=\frac{c(\cos\theta_a\cos\theta_b-\cos\theta_c)}{2k},\quad\gamma=\frac{b(\cos\theta_c\cos\theta_a-\cos\theta_b)}{2k}$$

其中的记号 k 为

$$k=\sqrt{1-\cos^2\theta_a-\cos^2\theta_b-\cos^2\theta_c+2\cos\theta_a\cos\theta_b\cos\theta_c}$$

于是我们得到 DBC 面的面积法向量的一个表示为

$$\vec{S_A}=\frac{bc}{2k}\left(\frac{1}{a}\sin^2\theta_a\vec{DA}+\frac{1}{b}(\cos\theta_a\cos\theta_b-\cos\theta_c)\vec{DB}+\frac{1}{c}(\cos\theta_c\cos\theta_a-\cos\theta_b)\vec{DC}\right)\tag{5.1}$$

根据对称性，对上式作轮换 $A\to B\to C\to A,\quad a\to b\to c\to a$，又可得到：

$$\vec{S_B}=\frac{ca}{2k}\left(\frac{1}{b}\sin^2\theta_b\vec{DB}+\frac{1}{c}(\cos\theta_b\cos\theta_c-\cos\theta_a)\vec{DC}+\frac{1}{a}(\cos\theta_a\cos\theta_b-\cos\theta_c)\vec{DA}\right)$$
$$\vec{S_C}=\frac{ab}{2k}\left(\frac{1}{c}\sin^2\theta_c\vec{DC}+\frac{1}{a}(\cos\theta_c\cos\theta_a-\cos\theta_b)\vec{DA}+\frac{1}{b}(\cos\theta_b\cos\theta_c-\cos\theta_a)\vec{DB}\right)$$

另外，我们也可以将 $\vec{DA}$、$\vec{DB}$、$\vec{DC}$ 用 $\vec{S_A}$、$\vec{S_B}$、$\vec{S_C}$ 来表示：

$$\vec{DA}=\frac{2}{kbc}(a\vec{S_A}+c\cos\theta_b\vec{S_C}+b\cos\theta_c\vec{S_B})$$
$$\vec{DB}=\frac{2}{kca}(b\vec{S_B}+a\cos\theta_c\vec{S_A}+c\cos\theta_a\vec{S_C})$$
$$\vec{DC}=\frac{2}{kab}(c\vec{S_C}+b\cos\theta_a\vec{S_B}+a\cos\theta_b\vec{S_A})$$

对于侧面 ABC, 我们无须由上面的方法来求解，而可以直接利用如下的四面面积法向量恒等式 (由向量的加法易证):

$$\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0$$

从而

$$\overrightarrow{S_A}+\overrightarrow{S_B}+\overrightarrow{S_C}+\overrightarrow{S_D}=0$$

5.2.2 四面体的高线

求四面体 $ABCD$ 的各顶点在对面的垂足点。

解：设 D 点在平面 ABC 上垂足点 P_D 为：

$$P_D=\alpha A+\beta B+\gamma C,(\alpha+\beta+\gamma=1)$$

则

$$\begin{aligned}DP_D{}^2&=\alpha DA^2+\beta DB^2+\gamma DC^2-(\alpha\beta AB^2+\beta\gamma BC^2+\gamma\alpha AC^2)\\&=\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2-\alpha\beta(a^2+b^2-2ab\cos\theta_c)-\beta\gamma(b^2+c^2-2bc\cos\theta_a)-\gamma\alpha(c^2+a^2-2ca\cos\theta_b)\end{aligned}$$

求极值得到

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{l^2(m^2+n^2-l^2)+b^2(l^2+m^2-n^2)+c^2(n^2+l^2-m^2)-2a^2l^2}{(l+m+n)(l+m-n)(m+n-l)(n+l-m)}\\\beta&=\frac{a^2(l^2+m^2-n^2)+m^2(n^2+l^2-m^2)+c^2(m^2+n^2-l^2)-2b^2m^2}{(l+m+n)(l+m-n)(m+n-l)(n+l-m)}\\\gamma&=\frac{a^2(n^2+l^2-m^2)+b^2(m^2+n^2-l^2)+n^2(l^2+m^2-n^2)-2c^2n^2}{(l+m+n)(l+m-n)(m+n-l)(n+l-m)}\end{aligned}$$

D 点对应的高线长:

$$h_D=\frac{\sqrt{4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(c^2+a^2-m^2)^2-c^2(a^2+b^2-n^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(c^2+a^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)}}{\sqrt{(l+m+n)(l+m-n)(m+n-l)(n+l-m)}}\tag{5.2}$$

5.2.3 四面体的体积

根据高线长的表示 (5.2), 注意到分母

$$\sqrt{(l+m+n)(l+m-n)(m+n-l)(n+l-m)}=4S_D$$

因而体积

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}S_D\cdot h_D\\&=\frac{\sqrt{4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(c^2+a^2-m^2)^2-c^2(a^2+b^2-n^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(c^2+a^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)}}{12}\end{aligned}$$

上述六棱长表示的体积公式又有以下两种行列式表示，分别称为四面体体积的欧拉公式和 Cayley-Menger 公式。

$$V^2=\frac{1}{288}\begin{vmatrix}2a^2&a^2+b^2-n^2&c^2+a^2-m^2\\a^2+b^2-n^2&2b^2&b^2+c^2-l^2\\c^2+a^2-m^2&b^2+c^2-l^2&2c^2\end{vmatrix}=\frac{1}{288}\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&a^2&b^2&c^2\\1&a^2&0&n^2&m^2\\1&b^2&n^2&0&l^2\\1&c^2&m^2&l^2&0\end{vmatrix}$$

四面体的体积也可以直接由 $V=\frac{1}{3}\vec{S_A}\cdot\vec{DA}$ 给出, 利用 (5.1) 即得:

$$V=\frac{1}{6}abc\sqrt{1-\cos^2\theta_a-\cos^2\theta_b-\cos^2\theta_c+2\cos\theta_a\cos\theta_b\cos\theta_c} \tag{5.3}$$

又可写为:

$$V=\frac{1}{6}abc\sqrt{\begin{vmatrix}1 & \cos\theta_a & \cos\theta_b\\ \cos\theta_a & 1 & \cos\theta_c\\ \cos\theta_b & \cos\theta_c & 1\end{vmatrix}} \tag{5.4}$$

5.2.4　四面体的二面角

四面体的二面角可以直接由面积法向量求出。

例如，为求点 A 所对侧面与点 B 所对侧面的夹角，利用体积的表示，先将 $\vec{S_A}$ 改写为:

$$\vec{S_A}=\frac{ab^2c^2}{12V}\left(\frac{1}{a}\sin^2\theta_a\vec{DA}+\frac{1}{b}(\cos\theta_a\cos\theta_b-\cos\theta_c)\vec{DB}+\frac{1}{c}(\cos\theta_c\cos\theta_a-\cos\theta_b)\vec{DC}\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\vec{S_A}\cdot\vec{S_B}&=\vec{S_A}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{DC}\times\vec{DA}\right)\\&=\frac{1}{2}\vec{DA}\times\vec{S_A}\cdot\vec{DC}\\&=\frac{abc^2}{24V}(\cos\theta_a\cos\theta_b-\cos\theta_c)\vec{DA}\times\vec{DB}\cdot\vec{DC}\\&=\frac{abc^2}{4}(\cos\theta_a\cos\theta_b-\cos\theta_c)\end{aligned}$$

另一方面:

$$\vec{S_A}\cdot\vec{S_B}=S_A\cdot S_B\cdot\cos(\pi-\theta_C)=\frac{1}{2}bc\sin\theta_a\cdot\frac{1}{2}ca\sin\theta_b\cdot(-\cos\theta_C)$$

从而得到二面角的计算式:

$$\cos\theta_C=\frac{\cos\theta_c-\cos\theta_a\cos\theta_b}{\sin\theta_a\sin\theta_b} \tag{5.5}$$

轮换即得另外两个二面角的表示:

$$\cos\theta_A=\frac{\cos\theta_a-\cos\theta_b\cos\theta_c}{\sin\theta_b\sin\theta_c}$$

$$\cos\theta_B=\frac{\cos\theta_b-\cos\theta_c\cos\theta_a}{\sin\theta_c\sin\theta_a}$$

根据以上三式，又可导出二面角的正弦定理:

$$\frac{\sin\theta_A}{\sin\theta_a}=\frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_b}=\frac{\sin\theta_C}{\sin\theta_c}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta_a-\cos^2\theta_b-\cos^2\theta_c+2\cos\theta_a\cos\theta_b\cos\theta_c}}{\sin\theta_a\sin\theta_b\sin\theta_c} \tag{5.6}$$

另外，根据侧面面积法向量的恒等式

$$\vec{S_A}+\vec{S_B}+\vec{S_C}+\vec{S_D}=0$$

可导出其它一些二面角的等式。

5.2.5　四面体的对棱

对棱夹角

求异面直线 AB 与 CD 的夹角 $<AB-CD>$。

解：根据 $|\vec{AB}\cdot\vec{CD}|=AB\cdot CD\cdot\cos<AB-CD>$, 我们需要计算向量的内积。

一方面, 我们可以直接由

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=\vec{AB}\cdot(\vec{AD}-\vec{AC})=\frac{1}{2}(AB^2+AD^2-BD^2)-\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\frac{1}{2}(AD^2+BC^2-AC^2-BD^2)$$

得到

$$\cos<AB-CD>=\frac{a^2+l^2-b^2-m^2}{2cn} \tag{5.7}$$

另一方面，我们也可由

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=(\vec{DB}-\vec{DA})\cdot(-\vec{DC})=\vec{DA}\cdot\vec{DC}-\vec{DB}\cdot\vec{DC}=ac\cos\theta_b-bc\cos\theta_a$$

得到

$$\cos<AB-CD>=\frac{a\cos\theta_b-b\cos\theta_a}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta_c}}$$

对棱距离

求异面直线 AB,CD 之间的距离。

解：设直线 AB 上的点 P 和 CD 上的点 Q 之间的距离为最短，令

$$P=\lambda A+(1-\lambda)B,\quad Q=\mu C+(1-\mu)D$$

根据重心坐标的距离公式，有：

$$\begin{aligned}PQ^2&=-\lambda(1-\lambda)AB^2+\lambda\mu AC^2+\lambda(1-\mu)AD^2+(1-\lambda)\mu BC^2+(1-\lambda)(1-\mu)BD^2-\mu(1-\mu)CD^2\\&=-\lambda(1-\lambda)n^2+\lambda\mu m^2+\lambda(1-\mu)a^2+(1-\lambda)\mu l^2+(1-\lambda)(1-\mu)b^2-\mu(1-\mu)c^2\end{aligned}$$

求极值得到

$$\begin{aligned}&d_{AB-CD}=PQ_{min}\\&=\frac{\sqrt{4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(c^2+a^2-m^2)^2-c^2(a^2+b^2-n^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(c^2+a^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)}}{\sqrt{(a^2-b^2+l^2-m^2+2cn)(a^2-b^2+l^2-m^2-2cn)}}\\&=\frac{ab\sqrt{1-\cos^2\theta_a-\cos^2\theta_b-\cos^2\theta_c+2\cos\theta_a\cos\theta_b\cos\theta_c}}{a^2\sin^2\theta_b+b^2\sin^2\theta_a+2ab(\cos\theta_a\cos\theta_b-\cos\theta_c)}\end{aligned}$$

根据四面体体积的表示式 (**??**) 以及对棱夹角的表示式 (5.7), 又可得知:

$$V=\frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot d_{AB-CD}\cdot\sin<AB-CD> \tag{5.8}$$

5.3　四面体的特征点

5.3.1　重心

熟知，四面体的重心为:

$$G=\frac{1}{4}(A+B+C+D)$$

5.3.2　外心

四面体的外心为四面体外接球的球心，它到各顶点的距离是相同的，我们可由此导出它的重心坐标表示：

设 $O=\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D$, 则根据距离公式，有：

$$\begin{cases} R^2=OA^2=\beta n^2+\gamma m^2+\delta a^2-(\alpha\beta n^2+\alpha\gamma m^2+\alpha\delta a^2+\beta\gamma l^2+\beta\delta b^2+\gamma\delta c^2) \\ R^2=OB^2=\alpha n^2+\gamma l^2+\delta b^2-(\alpha\beta n^2+\alpha\gamma m^2+\alpha\delta a^2+\beta\gamma l^2+\beta\delta b^2+\gamma\delta c^2) \\ R^2=OC^2=\alpha m^2+\beta l^2+\delta c^2-(\alpha\beta n^2+\alpha\gamma m^2+\alpha\delta a^2+\beta\gamma l^2+\beta\delta b^2+\gamma\delta c^2) \\ R^2=OD^2=\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2-(\alpha\beta n^2+\alpha\gamma m^2+\alpha\delta a^2+\beta\gamma l^2+\beta\delta b^2+\gamma\delta c^2) \end{cases}$$

以 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 分别乘以上述四式后相加，利用 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ 得知

$$\alpha\beta n^2+\alpha\gamma m^2+\alpha\delta a^2+\beta\gamma l^2+\beta\delta b^2+\gamma\delta c^2=R^2$$

于是可将上述方程组化为线性方程组

$$\begin{cases} 2R^2=2OA^2=\beta n^2+\gamma m^2+\delta a^2 \\ 2R^2=2OB^2=\alpha n^2+\gamma l^2+\delta b^2 \\ 2R^2=2OC^2=\alpha m^2+\beta l^2+\delta c^2 \\ 2R^2=2OD^2=\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2 \end{cases}$$

从而解出

$$\alpha=\frac{a^2l^2(b^2+c^2-l^2)+b^2m^2(c^2+l^2-b^2)+c^2n^2(l^2+b^2-c^2)-2b^2c^2l^2}{2(4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(a^2+c^2-m^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(a^2+c^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)-c^2(a^2+b^2-n^2)^2)}$$
$$\beta=\frac{b^2m^2(c^2+a^2-m^2)+c^2n^2(a^2+m^2-c^2)+a^2l^2(m^2+c^2-a^2)-2c^2a^2m^2}{2(4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(a^2+c^2-m^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(a^2+c^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)-c^2(a^2+b^2-n^2)^2)}$$
$$\gamma=\frac{c^2n^2(a^2+b^2-n^2)+a^2l^2(b^2+n^2-a^2)+b^2m^2(n^2+a^2-b^2)-2a^2b^2n^2}{2(4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(a^2+c^2-m^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(a^2+c^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)-c^2(a^2+b^2-n^2)^2)}$$
$$\delta=\frac{a^2l^2(m^2+n^2-l^2)+b^2m^2(n^2+l^2-m^2)+c^2n^2(l^2+m^2-n^2)-2l^2m^2n^2}{2(4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(a^2+c^2-m^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(a^2+c^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)-c^2(a^2+b^2-n^2)^2)}$$

5.3.3 内心

四面体的内心是其内切球的球心，利用空间点的重心坐标的体积意义，不难得知, 四面体的内心为：

$$I=\frac{S_AA+S_BB+S_CC+S_DD}{S_A+S_B+S_C+S_D}$$

5.3.4 旁心

四面体的旁心是与四面体侧面相切的球的球心，我们将在后文进行推导，这里先给出其重心坐标表示：

$$I_A=\frac{-S_AA+S_BB+S_CC+S_DD}{-S_A+S_B+S_C+S_D}$$
$$I_B=\frac{S_AA-S_BB+S_CC+S_DD}{S_A-S_B+S_C+S_D}$$
$$I_C=\frac{S_AA+S_BB-S_CC+S_DD}{S_A+S_B-S_C+S_D}$$
$$I_D=\frac{S_AA+S_BB+S_CC-S_DD}{S_A+S_B+S_C-S_D}$$

5.3.5 蒙日点

通过一个四面体各边中点所作的与对边垂直的平面相交于一点, 称为蒙日点，又称为拟垂心。
证明：我们先求经过 AB 中点且与 CD 垂直的平面的表示：
设该平面上的点 P 关于四面体顶点的重心坐标方程为：

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D,(\alpha+\beta+\gamma+\delta=1)$$

又设 AB 的中点为 T:

$$T=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$$

两式相减，得

$$\vec{TP}=(\alpha-\frac{1}{2})\,\vec{DA}+(\beta-\frac{1}{2})\,\vec{DB}+\gamma\,\vec{DC}$$

因为 $\vec{TP}$ 是平面上的向量，它恒与 CD 垂直，即有:

$$0=\vec{TP}\cdot\vec{DC}=(\alpha-\frac{1}{2})\,\vec{DA}\cdot\vec{DC}+(\beta-\frac{1}{2})\,\vec{DB}\cdot\vec{DC}+\gamma\,\vec{DC}\cdot\vec{DC}$$

化为六棱长的表示则为:

$$(c^2+a^2-m^2)(\alpha-\frac{1}{2})+(c^2+b^2-l^2)(\beta-\frac{1}{2})+2c^2\gamma=0$$

同理，我们可以得到其余五个平面的表示:

$$\begin{cases}(b^2+a^2-n^2)(\alpha-\frac{1}{2})+(b^2+c^2-l^2)(\gamma-\frac{1}{2})+2b^2\beta=0\\(l^2+n^2-m^2)(\alpha-\frac{1}{2})+(l^2+b^2-c^2)(\delta-\frac{1}{2})+2l^2\gamma=0\\(a^2+b^2-n^2)(\beta-\frac{1}{2})+(a^2+c^2-m^2)(\gamma-\frac{1}{2})+2a^2\alpha=0\\(m^2+n^2-l^2)(\beta-\frac{1}{2})+(m^2+a^2-c^2)(\delta-\frac{1}{2})+2m^2\gamma=0\\(n^2+a^2-b^2)(\delta-\frac{1}{2})+(n^2+m^2-l^2)(\gamma-\frac{1}{2})+2n^2\beta=0\end{cases}$$

联立以上六式，解得

$$\alpha=\frac{a^2b^2m^2+a^2c^2n^2+a^2l^2m^2+a^2l^2n^2+b^2c^2l^2+b^2m^2n^2+c^2m^2n^2-a^2b^2n^2-a^2c^2m^2-l^2m^2n^2-a^4l^2-b^2m^4-c^2n^4}{2(4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(a^2+c^2-m^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(a^2+c^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)-c^2(a^2+b^2-n^2)^2)}$$

$$\beta=\frac{a^2b^2l^2+a^2c^2m^2+a^2l^2n^2+b^2c^2n^2+b^2l^2m^2+b^2m^2n^2+c^2l^2n^2-a^2b^2n^2-b^2c^2l^2-l^2m^2n^2-a^2l^4-b^4m^2-c^2n^4}{2(4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(a^2+c^2-m^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(a^2+c^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)-c^2(a^2+b^2-n^2)^2)}$$

$$\gamma=\frac{a^2b^2n^2+a^2c^2l^2+a^2l^2m^2+b^2c^2m^2+b^2l^2m^2+c^2l^2n^2+c^2m^2n^2-a^2c^2m^2-b^2c^2l^2-l^2m^2n^2-a^2l^4-b^2m^4-c^4n^2}{2(4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(a^2+c^2-m^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(a^2+c^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)-c^2(a^2+b^2-n^2)^2)}$$

$$\delta=\frac{a^2b^2l^2+a^2b^2m^2+a^2c^2l^2+a^2c^2n^2+b^2c^2m^2+b^2c^2n^2+l^2m^2n^2-a^2b^2n^2-a^2c^2m^2-b^2c^2l^2-a^4l^2-b^4m^2-c^4n^2}{2(4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(a^2+c^2-m^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(a^2+c^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)-c^2(a^2+b^2-n^2)^2)}$$

验证即知，蒙日点 (记为 H) 与四面体的重心 G 和外心 O 的关系是：$H+O=2G$。

5.4 四面体的相关球

对于四面体 $ABCD$ 所在空间中的球, 若其球心为 O, 球面上的点

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D,(\alpha+\beta+\gamma+\delta=1)$$

则由距离公式 (**??**), 有:

$$R^2=OP^2=\alpha OA^2+\beta OB^2+\gamma OC^2+\delta OD^2-(\alpha\beta AB^2+\alpha\gamma AC^2+\alpha\delta AD^2+\beta\gamma BC^2+\beta\delta BD^2+\gamma\delta CD^2)$$

根据 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$, 即知一般的球面方程有如下形式:

$$\alpha\beta AB^2+\alpha\gamma AC^2+\alpha\delta AD^2+\beta\gamma BC^2+\beta\delta BD^2+\gamma\delta CD^2+\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma+\lambda_4\delta=0 \tag{5.9}$$

在前面约定的记号下，它又成为

$$\alpha\beta n^2+\alpha\gamma m^2+\alpha\delta a^2+\beta\gamma l^2+\beta\delta b^2+\gamma\delta c^2+\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma+\lambda_4\delta=0 \tag{5.10}$$

5.4.1　外接球

外接球的球面方程为：

$$\alpha\beta n^2+\alpha\gamma m^2+\alpha\delta a^2+\beta\gamma l^2+\beta\delta b^2+\gamma\delta c^2=0$$

球面的中心 O 可由此方程分别对 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 求偏导后联立解出。

外接球的半径为

$$R=\frac{\sqrt{(al+bm+cn)(bm+cn-al)(al+bm-cn)(cn+al-bm)}}{2\sqrt{4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-l^2)^2-b^2(a^2+c^2-m^2)^2+(b^2+c^2-l^2)(a^2+c^2-m^2)(a^2+b^2-n^2)-c^2(a^2+b^2-n^2)^2}} \tag{5.11}$$

由此及四面体体积 V 的表示 (??), 知有 A.L.Crelle 公式:

$$6RV=\sqrt{p(p-al)(p-bm)(p-cn)} \tag{5.12}$$

其中 $p=\frac{1}{2}(al+bm+cn)$。

5.4.2　与各侧面相切的球

我们可从一般的球面表示方程 (5.10) 式导出与四面体各侧面相切的球的表示:

对该式微分，得

$$(n^2\beta+m^2\gamma+a^2\delta+\lambda_1)d\alpha+(n^2\alpha+l^2\gamma+b^2\delta+\lambda_2)d\beta+(m^2\alpha+l^2\beta+c^2\delta+\lambda_3)d\gamma+(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+\lambda_4)d\delta=0$$

平面 BCD 的切微分为:

$$d\alpha=0,\quad d\beta+d\gamma+d\delta=0$$

若球与 BCD 平面相切, 则对应的微分分量成比例, 即有:

$$\begin{cases} n^2\alpha+l^2\gamma+b^2\delta+\lambda_2=k \\ m^2\alpha+l^2\beta+c^2\delta+\lambda_3=k \\ a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+\lambda_4=k \end{cases}$$

而球面与 BCD 平面相交的条件为

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta+\gamma+\delta=1 \\ \alpha\beta n^2+\alpha\gamma m^2+\alpha\delta a^2+\beta\gamma l^2+\beta\delta b^2+\gamma\delta c^2+\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma+\lambda_4\delta=0 \end{cases}$$

以上六式联立, 消元 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,k$ 后得关系式:

$$c^2\lambda_2^2+b^2\lambda_3^2+l^2\lambda_4^2+(b^2+c^2-l^2)(l^2\lambda_4-\lambda_2\lambda_3)+(c^2+l^2-b^2)(b^2\lambda_3-\lambda_2\lambda_4)+(l^2+b^2-c^2)(c^2\lambda_2-\lambda_3\lambda_4)+b^2c^2l^2=0$$

同理, 我们可得到另外三个面与球面相切的条件。

在一般情况下，上述方程组有 8 组解, 记

$$T_A=\pm S_A,\quad T_B=\pm S_B,\quad T_C=\pm S_C,\quad T_D=\pm S_D$$

则得到解的表示为：

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{-9V^2 + n^2T_B^2 + m^2T_C^2 + a^2T_D^2 + (n^2+m^2-l^2)T_BT_C + (m^2+a^2-c^2)T_CT_D + (a^2+n^2-b^2)T_DT_B}{(T_A+T_B+T_C+T_D)^2} \\
\lambda_2 &= -\frac{-9V^2 + l^2T_C^2 + b^2T_D^2 + n^2T_A^2 + (l^2+b^2-c^2)T_CT_D + (b^2+n^2-a^2)T_DT_A + (n^2+l^2-m^2)T_AT_C}{(T_A+T_B+T_C+T_D)^2} \\
\lambda_3 &= -\frac{-9V^2 + c^2T_D^2 + m^2T_A^2 + l^2T_B^2 + (c^2+m^2-a^2)T_DT_A + (m^2+l^2-n^2)T_AT_B + (l^2+c^2-b^2)T_BT_D}{(T_A+T_B+T_C+T_D)^2} \\
\lambda_4 &= -\frac{-9V^2 + a^2T_A^2 + b^2T_B^2 + c^2T_C^2 + (a^2+b^2-n^2)T_AT_B + (b^2+c^2-l^2)T_BT_C + (c^2+a^2-m^2)T_CT_A}{(T_A+T_B+T_C+T_D)^2}
\end{aligned}
$$

球心 I 和半径 r 分别为:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{T_AA + T_BB + T_CC + T_DD}{T_A+T_B+T_C+T_D} \\
r &= \frac{3V}{|T_A+T_B+T_C+T_D|}
\end{aligned}
$$

其中 T_A, T_B, T_C, T_D 的取值符号全部相同时对应内切球, 这四者中的一个取值符号与另外三个不同时称为旁切球。

5.4.3 蒙日十二点球

四面体的各面重心, 蒙日点到各顶点的第一个三等分点, 以及此三等分点在所对侧面上的射影点，此十二点共球面。
证明：四面体各面的重心为：

$$G_1 = \frac{B+C+D}{3}, \quad G_2 = \frac{C+D+A}{3}, \quad G_3 = \frac{D+A+B}{3}, \quad G_4 = \frac{A+B+C}{3}$$

蒙日点 H 到各顶点的第一个三等分点为：

$$T_A = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}H, \quad T_B = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}H, \quad T_C = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}H, \quad T_D = \frac{1}{3}D + \frac{2}{3}H$$

为简洁, 这里仅给出 T_A 在所对侧面 BCD 上的投影:

$$
\begin{aligned}
H_A = &\left(\frac{1}{3} + \frac{2(a^2b^2 + l^2m^2 + 2c^2n^2 - a^2c^2 - a^2l^2 - b^2m^2 - c^2m^2)}{3(b^4 - 2b^2c^2 + c^4 - 2b^2l^2 - 2c^2l^2 + l^4)}\right)B \\
&+ \left(\frac{1}{3} + \frac{2(a^2c^2 + l^2n^2 + 2b^2m^2 - a^2b^2 - a^2l^2 - b^2n^2 - c^2n^2)}{3(b^4 - 2b^2c^2 + c^4 - 2b^2l^2 - 2c^2l^2 + l^4)}\right)C \\
&+ \left(\frac{1}{3} + \frac{2(b^2n^2 + c^2m^2 + 2a^2l^2 - b^2m^2 - l^2m^2 - c^2n^2 - l^2n^2)}{3(b^4 - 2b^2c^2 + c^4 - 2b^2l^2 - 2c^2l^2 + l^4)}\right)D
\end{aligned}
$$

不难验证，这些点均在如下球面上：

$$
\begin{aligned}
&n^2\alpha\beta + m^2\alpha\gamma + a^2\alpha\delta + l^2\beta\gamma + b^2\beta\delta + c^2\gamma\delta - \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2) \\
&+\frac{1}{3}(b^2+c^2+l^2)\alpha + \frac{1}{3}(c^2+a^2+m^2)\beta + \frac{1}{3}(a^2+b^2+n^2)\gamma + \frac{1}{3}(l^2+m^2+n^2)\delta = 0
\end{aligned}
$$

蒙日十二点球的球心为 $\frac{4}{3}G - \frac{1}{3}O$, 其中 G 是四面体的重心, O 是外心; 半径是四面体外接球半径的 $\frac{1}{3}$。
结合之前的结论知：重心、外心、蒙日点、蒙日球球心四点共线, 此直线又称四面体的欧拉线。

5.5 特殊四面体

为行文简洁, 我们不再详细推导特殊四面体的基本量的计算表示, 而主要介绍它们的一些独特性质。

5.5.1 等腰四面体

定义：对棱相等的四面体称为等腰四面体, 又称等面四面体。

在前述约定记号下, 即有 $l=a,\quad m=b,\quad n=c$

二面角性质

对于等腰四面体的任一顶点, 它的三个侧面二面角的余弦和为 1, 且各棱长与对应的二面角的正弦之比相等。

证明：根据棱夹角余弦的计算式：

$$\cos\theta_a=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos\theta_b=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos\theta_c=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

以及二面角余弦的计算式：

$$\cos\theta_A=\frac{\cos\theta_a-\cos\theta_b\cos\theta_c}{\sin\theta_b\sin\theta_c}=-1+a(\frac{1}{a-b-c}+\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{a+b+c})$$

$$\cos\theta_B=\frac{\cos\theta_b-\cos\theta_c\cos\theta_a}{\sin\theta_c\sin\theta_a}=-1+b(-\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+b+c})$$

$$\cos\theta_C=\frac{\cos\theta_c-\cos\theta_a\cos\theta_b}{\sin\theta_a\sin\theta_b}=-1+c(-\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b+c})$$

即知

$$\cos\theta_A+\cos\theta_B+\cos\theta_C=1$$

$$\frac{a}{\sin\theta_A}=\frac{b}{\sin\theta_B}=\frac{c}{\sin\theta_C}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2\sqrt{2}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}}$$

三心重合性质

等腰四面体的重心、外心、内心三心重合。

证明：首先，等腰四面体的各面相等，根据内心计算式即知内心与重心重合。

对于外接球球心，我们可直接根据球心到四顶点的距离式：

$$\begin{cases}2R^2=2OA^2=\beta c^2+\gamma b^2+\delta a^2\\2R^2=2OB^2=\alpha c^2+\gamma a^2+\delta b^2\\2R^2=2OC^2=\alpha b^2+\beta a^2+\delta c^2\\2R^2=2OD^2=\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2\end{cases}$$

易知 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{4}$ 满足上述方程组，根据解的唯一性即知外心与重心重合。

四面体内点到侧面距离之和恒定

等腰四面体内的点到各侧面的距离之和为定值。

证明：利用重心坐标分量的体积意义：

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta=V_{P-BCD}:V_{P-CDA}:V_{P-DAB}:V_{P-ABC}$$

而等腰四面体的各侧面面积相等, 所以

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta=h_{P-BCD}:h_{P-CDA}:h_{P-DAB}:h_{P-ABC}$$

于是知

$$h_{P-BCD}+h_{P-CDA}+h_{P-DAB}+h_{P-ABC}=\frac{3V}{S}$$

外接球球面点与顶点的距离平方和恒定

等腰四面体的外接球球面上的点，到各顶点的距离的平方之和恒为定值。

证明：设 P 为等腰四面体 $ABCD$ 外接球球面上的点：

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D, (\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1)$$

根据距离公式 (??) 及球面的重心坐标方程：

$$\alpha\beta n^2 + \alpha\gamma m^2 + \alpha\delta a^2 + \beta\gamma l^2 + \beta\delta b^2 + \gamma\delta c^2 = 0$$

有

$$\begin{cases} AP^2 = \beta c^2 + \gamma b^2 + \delta a^2 \\ BP^2 = \alpha c^2 + \gamma a^2 + \delta b^2 \\ CP^2 = \alpha b^2 + \beta a^2 + \delta c^2 \\ DP^2 = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 \end{cases}$$

于是

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

其逆命题也是成立的。

5.5.2 垂心四面体

定义：对棱相互垂直的四面体称为垂心四面体，又称正交四面体。

对棱平方和性质

垂心四面体的三组对棱的平方和相等。

证明：对于垂心四面体, 根据四面体对棱夹角的计算式：

$$\cos < AB - CD > = \frac{AD^2 + BC^2 - BD^2 - AC^2}{2AB \cdot CD} = 0$$

$$\cos < AC - BD > = \frac{AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2}{2AC \cdot BD} = 0$$

即知

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

根据这个关系式，通常我们另外选择参数表示棱长, 令

$$\begin{aligned} AB^2 &= a + b, \quad CD^2 = c + d \\ AC^2 &= a + c, \quad BD^2 = b + d \\ AD^2 &= a + d, \quad BC^2 = b + c \end{aligned}$$

在此表示下, 垂心四面体的各量有较简洁的形式, 例如:

垂心四面体的各侧面面积：

$$S_A = \frac{\sqrt{cd + db + bc}}{2}, \quad S_B = \frac{\sqrt{da + ac + cd}}{2}, \quad S_C = \frac{\sqrt{ab + bd + da}}{2}, \quad S_D = \frac{\sqrt{bc + ca + ab}}{2}$$

体积：

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{bcd + cda + dab + abc}$$

外接球半径:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(a + b + c + d) - \frac{4abcd}{bcd + cda + dab + abc}}$$

垂心

垂心四面体的四条高线交于一点，称为垂心，这也是垂心四面体的得名原因。

证明：不难求出，垂心四面体的各顶点在对面的垂足点分别为：

$$H_A=\frac{cdB+dbC+bcD}{cd+db+bc},\quad H_B=\frac{daC+acD+cdA}{da+ac+cd},\quad H_C=\frac{abD+bdA+daB}{ab+bd+da},\quad H_D=\frac{bcA+caB+abC}{bc+ca+ab}$$

进而求出垂心为：

$$H=\frac{bcdA+cdaB+dabC+abcD}{bcd+cda+dab+abc}$$

不难得知，垂心是垂心四面体的蒙日点，这也是蒙日点得名拟垂心点的由来。

对于垂心四面体, 相应的蒙日十二点球定理为如下所述之普鲁海定理:

垂心四面体中,垂心到四个顶点连线的第一个三等分点 T_A,T_B,T_C,T_D,四个面的重心 G_A,G_B,G_C,G_D 和垂心 H_A,H_B,H_C,H_D,合计十二点共球。

上述求四面体垂心的过程也可以反向进行:

由四面体中特征点的表示, 判断它在各侧面上的射影点属于该侧面三角形的何种特征点。

例如，给定垂心四面体的一个特征点 T:

$$T=\frac{aA+bB+cC+dD}{a+b+c+d}$$

它在侧面三角形 ABC 上的射影点为：

$$T_D=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$$

根据该三角形三边的表示：

$$AB^2=a+b,\quad BC^2=b+c,\quad AC^2=a+c$$

反解得到：

$$a=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2),\quad b=\frac{1}{2}(AB^2+BC^2-AC^2),\quad c=\frac{1}{2}(AC^2+BC^2-AB^2)$$

于是 T_D 可完全由三角形 ABC 的量表示:

$$T_D=\frac{(AB^2+AC^2-BC^2)A+(AB^2+BC^2-AC^2)B+(AC^2+BC^2-AB^2)C}{(AB^2+AC^2+BC^2)}$$

查表知, T_D 是三角形 ABC 的反补三角形中的共轭重心 X_{69}。

各棱中点共球

垂心四面体的各棱中点在同一球面上。

证明：根据一般球面的方程式 (5.9), 对于垂心四面体，为：

$$(a+b)\alpha\beta+(a+c)\alpha\gamma+(a+d)\alpha\delta+(b+c)\beta\gamma+(b+d)\beta\delta+(c+d)\gamma\delta+\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_3+\delta\lambda_4=0$$

代入各棱中点的重心坐标, 即知该球面为

$$(a+b)\alpha\beta+(a+c)\alpha\gamma+(a+d)\alpha\delta+(b+c)\beta\gamma+(b+d)\beta\delta+(c+d)\gamma\delta-\frac{1}{2}(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)=0$$

此球的中点为垂心四面体的重心，半径

$$R=\frac{\sqrt{a+b+c+d}}{4}$$

5.5.3 棱切四面体

定义：给定四面体，若存在一球与四面体的各棱相切，则称为棱切四面体。

对棱之和性质

棱切四面体的对棱之和相等。

证明：根据四面体的一般球面方程 (5.9), 以及各棱与球相切的条件即可导出如下方程组：

$$\begin{cases} AB^4+2AB^2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2=0 \\ AC^4+2AC^2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2=0 \\ AD^4+2AD^2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2=0 \\ BC^4+2BC^2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2=0 \\ BD^4+2BD^2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2=0 \\ CD^4+2CD^2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2=0 \end{cases}$$

在四面体的约束下, 此方程组有解的充要条件是:

$$AB+BC=AC+BD=AD+BC$$

根据这个关系式，通常我们另外选择参数表示棱长, 令

$$\begin{aligned} AB=a+b,&\quad CD=c+d \\ AC=a+c,&\quad BD=b+d \\ AD=a+d,&\quad BC=b+c \end{aligned}$$

在此代换下，棱切球的重心坐标方程为：

$$\alpha\beta(a+b)^2+\alpha\gamma(a+c)^2+\alpha\delta(a+d)^2+\beta\gamma(b+c)^2+\beta\delta(b+d)^2+\gamma\delta(c+d)^2-(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta)=0$$

棱切球球心和半径分别为：

$$O=\frac{(abc+abd+acd+bcd)(bcdA+cdaB+dabC+abcD)-2(b^2c^2d^2A+c^2d^2a^2B+d^2a^2b^2C+a^2b^2c^2D)}{(bcd+cda+dab+abd)^2-2(b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2+a^2b^2c^2)}$$

$$R=\frac{2abcd}{\sqrt{(bcd+cda+dab+abd)^2-2(b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2+a^2b^2c^2)}}$$

棱切四面体的体积为：

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{(bcd+cda+dab+abd)^2-2(b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2+a^2b^2c^2)}$$

由此又有:

$$RV=\frac{2}{3}abcd$$

葛尔刚点

棱切四面体的顶点与其对面三角形的葛尔刚点连线交于一点，称为棱切四面体的葛尔刚点。

证明：根据棱切球的重心坐标方程，不难得知棱切球在各棱上的切点分别为：

$$\frac{bA+aB}{a+b},\quad \frac{cA+aC}{a+c},\quad \frac{dA+aD}{a+d},\quad \frac{cB+bC}{b+c},\quad \frac{dB+bD}{b+d},\quad \frac{dC+cD}{c+d}$$

于是各侧面的葛尔刚点：

$$Ge_A=\frac{cdB+dbC+bcD}{cd+bd+bc},\quad Ge_B=\frac{daC+acD+cdA}{da+ac+cd},\quad Ge_C=\frac{abD+bdA+daB}{ab+bd+da},\quad Ge_D=\frac{bcA+caB+abC}{bc+ca+ab}$$

进而求得棱切四面体的葛尔刚点：

$$Ge = \frac{bcdA + cdaB + dabC + abcD}{bcd + cda + dab + abc}$$

奈格尔点

棱切四面体的顶点与其对面三角形的奈格尔点连线交于一点，称为棱切四面体的奈格尔点。

证明与葛尔刚点是完全类似的，这里直接给出奈格尔点的重心坐标表示：

$$Na = \frac{aA + bB + cC + dD}{a + b + c + d}$$

5.5.4 直角四面体

定义：若四面体的其中一个顶点的三条棱两两垂直，则称为直角四面体。直角顶点所对的面称为侧斜面，过直角顶点的三个侧面称为直角侧面。

直角四面体是垂心四面体的特例情形，但一般我们并不使用垂心四面体的记号来表示。

设点 D 是直角顶点，令

$$AD = a, \quad BD = b, \quad CD = c$$

则根据勾股定理，有

$$AB^2 = a^2 + b^2, \quad BC^2 = b^2 + c^2, \quad AC^2 = c^2 + a^2$$

如此可使得直角四面体的表示更简便一些。

不难得到直角四面体的以下性质：

1. 四个侧面的面积有关系式：

$${S_D}^2 = {S_A}^2 + {S_B}^2 + {S_C}^2$$

2. 侧斜面的高线 h 满足关系式:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

3. 直角四面体的外接球半径 R 为：

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

4. 直角四面体的内切球半径 r 满足关系式：

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{h}$$

二面角性质

记直角四面体的侧斜面与三个直角侧面的二面角分别为 ϕ_A, ϕ_B, ϕ_C, 则：

$$\cos^2\phi_A + \cos^2\phi_B + \cos^2\phi_C = 1$$

证明：易知三个直角侧面的面积法向量是相互垂直的：

$$\vec{S_A} \cdot \vec{S_B} = 0, \quad \vec{S_B} \cdot \vec{S_C} = 0, \quad \vec{S_C} \cdot \vec{S_A} = 0$$

而四面体有面积法向量恒等式：

$$\vec{S_A} + \vec{S_B} + \vec{S_C} + \vec{S_D} = 0$$

分别点乘 $\vec{S_A}, \vec{S_B}, \vec{S_C}$ 得

$$\begin{cases} \vec{S_D} \cdot \vec{S_A} = -S_D S_A \cos\phi_A = -S_A^2 \\ \vec{S_D} \cdot \vec{S_B} = -S_D S_B \cos\phi_B = -S_B^2 \\ \vec{S_D} \cdot \vec{S_C} = -S_D S_C \cos\phi_C = -S_C^2 \end{cases}$$

于是

$$\cos\phi_A = \frac{S_A}{S_D}, \quad \cos\phi_B = \frac{S_B}{S_D}, \quad \cos\phi_C = \frac{S_C}{S_D}$$

从而

$$\cos^2\phi_A + \cos^2\phi_B + \cos^2\phi_C = \frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2}{S_D^2} = 1$$

5.5.5 正四面体

定义：各棱相等的四面体称为正四面体。

正四面体是等腰四面体, 也是垂心四面体和棱切四面体。

5.6 空间向量的转动

已知向量:

$$\boldsymbol{v_1} = \alpha_1 \overrightarrow{DA} + \beta_1 \overrightarrow{DB} + \gamma_1 \overrightarrow{DC}$$

以及向量

$$\boldsymbol{v_2} = \alpha_2 \overrightarrow{DA} + \beta_2 \overrightarrow{DB} + \gamma_2 \overrightarrow{DC}$$

求 $\boldsymbol{v_1}$ 绕 $\boldsymbol{v_2}$ 转动 θ 后的表示。

5.6.1 刚体转动

第六章　二次曲面

在直角坐标系下, 空间二次曲面的一般方程为:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_14x+2a_24y+2a_34z+a_44=0$$

本章我们主要用重心坐标和有理表示研究二次曲面的一些性质。

6.1　重心坐标表示

6.1.1　一般方程

对于给定得不共面四点 A,B,C,D, 空间中的二次曲面上的任意点 P 有一般的重心坐标表示:

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D,(\alpha+\beta+\gamma+\delta=1)$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 满足二次方程:

$$\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2+\lambda_3\gamma^2+\lambda_4\delta^2+\lambda_5\alpha\beta+\lambda_6\alpha\gamma+\lambda_7\alpha\delta+\lambda_8\beta\gamma+\lambda_9\beta\delta+\lambda_{10}\gamma\delta+\lambda_{11}\alpha+\lambda_{12}\beta+\lambda_{13}\gamma+\lambda_{14}\delta+\lambda_{15}=0$$

但这个方程有相当的参数冗余，利用 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$, 我们可以替代其中的平方项和常数项:

$$\begin{cases}\alpha^2\to\alpha(1-\beta-\gamma-\delta)\\\beta^2\to\beta(1-\alpha-\gamma-\delta)\\\gamma^2\to\gamma(1-\alpha-\beta-\delta)\\\delta^2\to\delta(1-\alpha-\beta-\gamma)\\1\to\alpha+\beta+\gamma+\delta\end{cases}$$

如此，则可简化二次曲面的重心坐标方程为如下形式:

$$\lambda_{12}\alpha\beta+\lambda_{13}\alpha\gamma+\lambda_{14}\alpha\delta+\lambda_{23}\beta\gamma+\lambda_{24}\beta\delta+\lambda_{34}\gamma\delta+\lambda_{10}\alpha+\lambda_{20}\beta+\lambda_{30}\gamma+\lambda_{40}\delta=0\tag{6.1}$$

齐次化方程表示

$$\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2+\lambda_3\gamma^2+\lambda_4\delta^2+\lambda_{12}\alpha\beta+\lambda_{13}\alpha\gamma+\lambda_{14}\alpha\delta+\lambda_{23}\alpha\gamma+\lambda_{24}\beta\delta+\lambda_{34}\gamma\delta=0$$

特别地, 如果二次曲面经过 A,B,C,D 四点, 则方程化为:

$$\lambda_{12}\alpha\beta+\lambda_{13}\alpha\gamma+\lambda_{14}\alpha\delta+\lambda_{23}\beta\gamma+\lambda_{24}\beta\delta+\lambda_{34}\gamma\delta=0\tag{6.2}$$

6.1.2　12 点二次曲面

普鲁海定理: 对于任意一个四面体 $ABCD$ 及所在空间中的一点 P(不在四面体的各面上), 四面体各面的重心, 四面体各顶点与 P 点连线的 2:1 分位点, 以及四面体各顶点与 P 点连线在对面的交点, 此 12 点位于同一二次曲面上。

证明：设 P 点关于四面体的重心坐标为：$P = aA + bB + cC + dD, (a+b+c+d=1)$, 容易求出这 12 点分别有表示：

$$G_1 = \frac{1}{3}(B+C+D), \quad G_2 = \frac{1}{3}(C+D+A), \quad G_3 = \frac{1}{3}(D+A+B), \quad G_4 = \frac{1}{3}(A+B+C)$$
$$G_5 = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}P, \quad G_6 = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}P, \quad G_7 = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}P, \quad G_8 = \frac{1}{3}D + \frac{2}{3}P$$
$$G_9 = \frac{bB+cC+dD}{b+c+d}, \quad G_{10} = \frac{cC+dD+aA}{c+d+a}, \quad G_{11} = \frac{dD+aA+bB}{d+a+b}, \quad G_{12} = \frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$$

不难得知, 它们均位于位于如下关于 A, B, C, D 的重心坐标表示的二次曲面上：

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\alpha\beta + (\frac{1}{a}+\frac{1}{c})\alpha\gamma + (\frac{1}{a}+\frac{1}{d})\alpha\delta + (\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\beta\gamma + (\frac{1}{b}+\frac{1}{d})\beta\delta + (\frac{1}{c}+\frac{1}{d})\gamma\delta - \frac{2}{3}(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}) = 0$$

6.1.3　24 点二次曲面

若 P 是不在四面体的面所在平面上的一点，且 P 点不在过棱且平行于对棱的平面上，则四面体的各棱中点、过各棱与点 P 的平面与对棱所在直线的交点、及过各顶点与点 P 的直线与四面体对面所在平面的交点和四面体在这个面上的顶点的连线中点，这 24 个点在同一个二次曲面上[①]。

证明：设四面体的顶点为 A, B, C, D, 点 $P = aA + bB + cC + dD, (a+b+c+d=1)$, 则

各棱中点：

$$M_1 = \frac{1}{2}(A+B), \quad M_2 = \frac{1}{2}(A+C), \quad M_3 = \frac{1}{2}(A+D)$$
$$M_4 = \frac{1}{2}(B+C), \quad M_5 = \frac{1}{2}(B+D), \quad M_6 = \frac{1}{2}(C+D)$$

过各棱与点 P 的平面与对棱所在直线的交点：

$$M_7 = \frac{aA+bB}{a+b}, \quad M_8 = \frac{aA+cC}{a+c}, \quad M_9 = \frac{aA+dD}{a+d}$$
$$M_{10} = \frac{bB+cC}{b+c}, \quad M_{11} = \frac{bB+dD}{b+d}, \quad M_{12} = \frac{cC+dD}{c+d}$$

过各顶点与点 P 的直线与四面体对面所在平面的交点是:

$$T_1 = \frac{aA+bB+cC}{a+b+c}, \quad T_2 = \frac{bB+cC+dD}{b+c+d}, \quad T_3 = \frac{cC+dD+aA}{c+d+a}, \quad T_4 = \frac{dD+aA+bB}{d+a+b}$$

这四个交点和它们各自所在四面体的面上的顶点连线的中点则为：

$$M_{13} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}A, \quad M_{14} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}B, \quad M_{15} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}C$$
$$M_{16} = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}B, \quad M_{17} = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}C, \quad M_{18} = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}D$$
$$M_{19} = \frac{1}{2}T_3 + \frac{1}{2}C, \quad M_{20} = \frac{1}{2}T_3 + \frac{1}{2}D, \quad M_{21} = \frac{1}{2}T_3 + \frac{1}{2}A$$
$$M_{22} = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{2}D, \quad M_{23} = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{2}A, \quad M_{24} = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{2}B$$

我们选取前 9 点即可求出二次曲面关于 A, B, C, D 的重心坐标方程：

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\alpha\beta + (\frac{1}{a}+\frac{1}{c})\alpha\gamma + (\frac{1}{a}+\frac{1}{d})\alpha\delta + (\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\beta\gamma + (\frac{1}{b}+\frac{1}{d})\beta\delta + (\frac{1}{c}+\frac{1}{d})\gamma\delta - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}\right) = 0$$

不难验证后 15 点均在其上，故命题得证。

[①] 见于《塞瓦定理在空间的推广》, 周建仁, Vol 12 No.1 Jan.2009 高等数学研究

6.2 曲面的分类

重心坐标方程的分类同直角坐标方程的分类是一致的，为简洁，这里仅列出经过已知四点的二次曲面重心坐标方程的分类结果。

6.2.1 不变量及分类

联合方程 (6.2) 和固有条件 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$, 消去其中一个变量 δ, 得:

$$-\lambda_{14}\alpha^2-\lambda_{24}\beta^2-\lambda_{34}\gamma^2+(\lambda_{12}-\lambda_{14}-\lambda_{24})\alpha\beta+(\lambda_{23}-\lambda_{24}-\lambda_{34})\beta\gamma+(\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{34})\gamma\alpha+\lambda_{14}\alpha+\lambda_{24}\beta+\lambda_{34}\gamma=0$$

根据一般二次曲面的分类理论, 其分类由以下四个不变量和两个半不变量决定:

$$\begin{aligned}
I_1=&-\lambda_{14}-\lambda_{24}-\lambda_{34}\\
I_2=&-\frac{1}{4}(\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2+2\lambda_{14}^2+2\lambda_{24}^2+2\lambda_{34}^2)\\
&+\frac{1}{2}(\lambda_{12}\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{24}+\lambda_{13}\lambda_{14}+\lambda_{13}\lambda_{34}+\lambda_{14}\lambda_{24}+\lambda_{14}\lambda_{34}+\lambda_{23}\lambda_{24}+\lambda_{23}\lambda_{34}+\lambda_{24}\lambda_{34})\\
I_3=&\frac{1}{4}(\lambda_{12}^2\lambda_{34}+\lambda_{13}^2\lambda_{24}+\lambda_{14}^2\lambda_{23}+\lambda_{23}^2\lambda_{14}+\lambda_{24}^2\lambda_{13}+\lambda_{34}^2\lambda_{12})+\frac{1}{4}(\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23}+\lambda_{12}\lambda_{14}\lambda_{24}+\lambda_{13}\lambda_{14}\lambda_{34}+\lambda_{23}\lambda_{24}\lambda_{34})\\
&-\frac{1}{4}(\lambda_{12}\lambda_{34}(\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{23}+\lambda_{24})+\lambda_{13}\lambda_{24}(\lambda_{12}+\lambda_{14}+\lambda_{23}+\lambda_{34})+\lambda_{14}\lambda_{23}(\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{24}+\lambda_{34}))\\
I_4=&\frac{1}{16}(\lambda_{12}^2\lambda_{34}^2+\lambda_{13}^2\lambda_{24}^2+\lambda_{14}^2\lambda_{23}^2-2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{24}\lambda_{34}-2\lambda_{13}\lambda_{14}\lambda_{23}\lambda_{24}-2\lambda_{12}\lambda_{14}\lambda_{23}\lambda_{34})\\
K_1=&-\frac{1}{4}(\lambda_{14}^2+\lambda_{24}^2+\lambda_{34}^2)\\
K_2=&\frac{1}{4}(\lambda_{12}\lambda_{14}\lambda_{24}+\lambda_{13}\lambda_{14}\lambda_{34}+\lambda_{23}\lambda_{24}\lambda_{34})
\end{aligned}$$

非退化情形的二次曲面共有九种, 它们的判别式罗列如下：

1. 椭球面: $I_2>0,\quad I_1I_3>0,\quad I_4<0$
2. 单叶双曲面: $I_3\neq 0,\quad I_2\leq 0(\text{或}I_1I_3<0),\quad I_4>0$
3. 双叶双曲面: $I_3\neq 0,\quad I_2\leq 0(\text{或}I_1I_3<0),\quad I_4<0$
4. 二次锥面: $I_3\neq 0,\quad I_2\leq 0(\text{或}I_1I_3<0),\quad I_4=0$
5. 椭圆抛物面: $I_3=0,\quad I_4<0$
6. 双曲抛物面: $I_3=0,\quad I_4>0$
7. 椭圆柱面: $I_3=0,\quad I_4=0,\quad I_2>0,\quad I_1K_2<0$
8. 双曲柱面: $I_3=0,\quad I_4=0,\quad I_2<0,\quad K_2\neq 0$
9. 抛物柱面: $I_2=0,\quad I_3=0,\quad I_4=0,\quad K_2\neq 0$

6.2.2 中心二次曲面

有唯一中心的二次曲面称为中心二次曲面, 其充要条件是 $I_3\neq 0$。

没有中心的、中心为直线、或中心为平面的二次曲面称为非中心二次曲面, 其充要条件是 $I_3=0$。

曲面中心

同直角坐标系下的求法一致, 我们可以对重心坐标方程求偏导, 然后求解方程组即得。

例如, 给定单叶双曲面的一个重心坐标方程:

$$f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=39\alpha\beta+52\alpha\gamma+26\beta\gamma+18\alpha\delta+54\beta\delta+24\gamma\delta=0$$

将 $\delta=1-\alpha-\beta-\gamma$ 代入消元, 得到

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=18\alpha-18\alpha^2+54\beta-33\alpha\beta-54\beta^2+24\gamma+10\alpha\gamma-52\beta\gamma-24\gamma^2=0$$

分别对 α,β,γ 求偏导, 列方程组如下:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial\alpha}=18-36\alpha-33\beta+10\gamma=0\\ \frac{\partial f}{\partial\beta}=54-33\alpha-108\beta-52\gamma=0\\ \frac{\partial f}{\partial\gamma}=24+10\alpha-52\beta-48\gamma=0\end{cases}$$

解出

$$\alpha=\frac{3}{13},\quad \beta=\frac{9}{26},\quad \gamma=\frac{9}{52},\quad \delta=\frac{1}{4}$$

从而知曲面的中心为

$$O=\frac{3}{13}A+\frac{9}{26}B+\frac{9}{52}C+\frac{1}{4}D$$

6.2.3 直纹面

由一族直线构成的曲面称为直纹面，单叶双曲面、双曲抛物面、二次锥面、椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面这六种属于直纹面。

直母线

对于重心坐标方程表示的直纹面, 其直母线的求法仍同直角坐标系下的求法一致，仍以上面的例子介绍求解过程：
求曲面 $f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=39\alpha\beta+52\alpha\gamma+26\beta\gamma+18\alpha\delta+54\beta\delta+24\gamma\delta=0$ 上点 P: 重心坐标 $(\frac{1}{4},-\frac{3}{8},\frac{19}{24},\frac{1}{3})$ 的直母线。
解：设所求直母线点的重心坐标为

$$\alpha=\frac{1}{4}+at,\quad \beta=-\frac{3}{8}+bt,\quad \gamma=\frac{19}{24}+ct,\quad \delta=\frac{1}{3}-(a+b+c)t$$

将其代入重心坐标方程, 得

$$-\frac{1}{24}t(-703a-1082b-192c+432a^2t+792abt+1296b^2t-240act+1248bct+576c^2t)=0$$

因 t 可取任意实数, 所以关于 t 的各项系数均为 0, 从而有:

$$\begin{cases}703a+1082b+192c=0\\ 18a^2+33ab+54b^2-10ac+52bc+24c^2=0\end{cases}$$

解出

$$a=\frac{606c}{875},b=-\frac{549c}{875}\quad\text{或}\quad a=\frac{102c}{83},b=-\frac{81c}{83}$$

于是得到过 P 点的两条直母线：

$$\begin{aligned}l_1:(\frac{1}{4}+\frac{606}{875}u)A-(\frac{3}{8}+\frac{549}{875}u)B+(\frac{19}{24}+u)C+(\frac{1}{3}-\frac{932}{875}u)D\\ l_2:(\frac{1}{4}+\frac{102}{83}u)A-(\frac{3}{8}+\frac{81}{83}u)B+(\frac{19}{24}+u)C+(\frac{1}{3}-\frac{104}{83}u)D\end{aligned}$$

6.3 方程的简化

在一般情形下, 经过 A、B、C、D 四点的二次曲面, 其上点的重心坐标方程由 (6.2) 给出, 即:

$$\lambda_{12}\alpha\beta+\lambda_{13}\alpha\gamma+\lambda_{14}\alpha\delta+\lambda_{23}\beta\gamma+\lambda_{24}\beta\delta+\lambda_{34}\gamma\delta=0$$

对于非退化二次曲面，此方程的六个系数中，至少有三个非 0。

而对于特定的曲面类型, 方程的系数之间还存在特定的关系，我们可以利用这些关系简化方程，使之更方便于应用, 下面逐一作讨论。

抛物面

抛物面的判别式是 $I_3 = 0$

对于抛物面, 其判别式是 $I_3 = 0$, 该方程关于各系数均是二次的。我们先看方程关于 λ_{34} 的判别式:

$$\Delta = (\lambda_{12}^2 - 2\lambda_{12}\lambda_{13} + \lambda_{13}^2 - 2\lambda_{12}\lambda_{23} - 2\lambda_{13}\lambda_{23} + \lambda_{23}^2)(\lambda_{12}^2 - 2\lambda_{12}\lambda_{14} + \lambda_{14}^2 - 2\lambda_{12}\lambda_{24} - 2\lambda_{14}\lambda_{24} + \lambda_{24}^2)$$

其中第一个因式关于 λ_{23} 的判别式为 $16\lambda_{12}\lambda_{13}$, 第二个因式关于 λ_{24} 的判别式为 $16\lambda_{12}\lambda_{14}$, 因此考虑代换:

$$\lambda_{13} = a^2\lambda_{12}, \quad \lambda_{14} = b^2\lambda_{12}$$

这使得第一个因式可分解为:

$$(\lambda_{12} - 2a\lambda_{12} + a^2\lambda_{12} - \lambda_{23})(\lambda_{12} + 2a\lambda_{12} + a^2\lambda_{12} - \lambda_{23})$$

第二个因式分解为:

$$(\lambda_{12} - 2b\lambda_{12} + b^2\lambda_{12} - \lambda_{24})(\lambda_{12} + 2b\lambda_{12} + b^2\lambda_{12} - \lambda_{24})$$

再做代换

$$\frac{\lambda_{12} - 2a\lambda_{12} + a^2\lambda_{12} - \lambda_{23}}{\lambda_{12} + 2a\lambda_{12} + a^2\lambda_{12} - \lambda_{23}} = c^2$$
$$\frac{\lambda_{12} - 2b\lambda_{12} + b^2\lambda_{12} - \lambda_{24}}{\lambda_{12} + 2b\lambda_{12} + b^2\lambda_{12} - \lambda_{24}} = d^2$$

即

$$\lambda_{23} = \frac{(1-a-c-ac)(1-a+c+ac)}{1-c^2}\lambda_{12}, \quad \lambda_{24} = \frac{(1-b-d-bd)(1-b+d+bd)}{1-d^2}\lambda_{12}$$

则可解得

$$\lambda_{34} = \frac{(a-b-ac-bc-ad-bd+acd-bcd)(a-b+ac+bc+ad+bd+acd-bcd)}{(1-c^2)(1-d^2)}\lambda_{12}$$

于是我们得到抛物面的重心坐标方程系数的一个表示:

$$\begin{cases} \lambda_{12} = (1-c^2)(1-d^2) \\ \lambda_{13} = a^2(1-c^2)(1-d^2) \\ \lambda_{14} = b^2(1-c^2)(1-d^2) \\ \lambda_{23} = (1-a+c+ac)(1-a-c-ac)(1-d^2) \\ \lambda_{24} = (1-b+d+bd)(1-b-d-bd)(1-c^2) \\ \lambda_{34} = (a-b-ac-bc-ad-bd+acd-bcd)(a-b+ac+bc+ad+bd+acd-bcd) \end{cases}$$

二次锥面

二次锥面的判别式为 $I_4 = 0$, 方程关于各系数均是二次的，我们任选其一计算判别式:

$$\Delta(\lambda_{14}) = 16\lambda_{12}\lambda_{14}\lambda_{23}\lambda_{24}^2\lambda_{34}$$

不妨假设 $\lambda_{12} = 0$, 作代换

$$\lambda_{13} = a\lambda_{12}, \lambda_{14} = b\lambda_{12}, \lambda_{23} = c\lambda_{12}, \lambda_{24} = abcd^2\lambda_{12}$$

则可求解出

$$\lambda_{34} = bc(1 \pm ad)^2\lambda_{12}$$

因为我们并未限定参量 d 的取值范围，所以任取其中一解即可。

从而得到二次锥面的重心坐标方程系数的一个表示：

$$\lambda_{12}=1,\quad \lambda_{13}=a,\quad \lambda_{14}=b,\quad \lambda_{23}=c,\quad \lambda_{24}=abcd^2,\quad \lambda_{34}=bc(1+ad)^2 \tag{6.3}$$

为使得曲面非退化，a,c 不能为 0。

柱面

法一

柱面可视为中心在无穷远点的一类特殊二次锥面, 将上面得到的二次锥面系数表示代入判别式 $I_3=0$, 得到方程

$$1-b+bd-abd-bcd-abcd^2=0$$

解出 a，即得到柱面的重心坐标方程系数的一个表示：

$$\begin{cases}\lambda_{12}=bd(1+cd)^2\\ \lambda_{13}=(1+cd)(1-b+bd-bcd)\\ \lambda_{14}=b^2d(1+cd)^2\\ \lambda_{23}=bcd(1+cd)^2\\ \lambda_{24}=bcd^2(1+cd)(1-b+bd-bcd)\\ \lambda_{34}=cd(1+bd)^2\end{cases}$$

法二

柱面的重心坐标方程的系数也可以直接得到：

根据 $I_3=0,I_4=0$, 消去 λ_{34} 后有

$$\begin{gathered}\lambda_{12}^2\lambda_{13}\lambda_{23}-2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{14}\lambda_{23}+\lambda_{13}\lambda_{14}^2\lambda_{23}-\lambda_{12}^2\lambda_{14}\lambda_{24}+2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{14}\lambda_{24}\\ -\lambda_{13}^2\lambda_{14}\lambda_{24}-2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23}\lambda_{24}+2\lambda_{12}\lambda_{14}\lambda_{23}\lambda_{24}-\lambda_{14}\lambda_{23}^2\lambda_{24}+\lambda_{13}\lambda_{23}\lambda_{24}^2=0\end{gathered}$$

此式关于 λ_{12} 的判别式是

$$\Delta=4\lambda_{13}\lambda_{14}\lambda_{23}\lambda_{24}(\lambda_{13}-\lambda_{14}+\lambda_{23}-\lambda_{24})^2$$

因此考虑代换：

$$\lambda_{13}\lambda_{14}\lambda_{23}\lambda_{24}=w^2$$

从而解出：

$$\begin{aligned}\lambda_{34}&=\frac{(w-\lambda_{13}\lambda_{24})^2}{\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{24}}\\ \lambda_{14}&=\frac{w(w+\lambda_{12}\lambda_{13}-\lambda_{13}\lambda_{24})}{\lambda_{13}(w+\lambda_{12}\lambda_{24}-\lambda_{13}\lambda_{24})}\\ \lambda_{23}&=\frac{w(w+\lambda_{12}\lambda_{24}-\lambda_{13}\lambda_{24})}{\lambda_{24}(w+\lambda_{12}\lambda_{13}-\lambda_{13}\lambda_{24})}\end{aligned}$$

再做代换

$$\lambda_{13}=p\lambda_{12},\quad \lambda_{24}=q\lambda_{12},\quad w=(pq+r)\lambda_{12}^2$$

则得到柱面的重心坐标方程系数的一个表示：

$$\begin{cases} \lambda_{12} = pq(p+r)(q+r) \\ \lambda_{13} = p^2q(p+r)(q+r) \\ \lambda_{14} = q(p+r)^2(pq+r) \\ \lambda_{23} = p(q+r)^2(pq+r) \\ \lambda_{24} = pq^2(p+r)(q+r) \\ \lambda_{34} = r^2(p+r)(q+r) \end{cases} \tag{6.4}$$

此表示与前面表示的关系是：

$$b = \frac{(p+r)(pq+r)}{p(q+r)}, \quad c = \frac{(q+r)(pq+r)}{q(p+r)}, \quad d = -\frac{q}{pq+r}$$

抛物柱面

对于抛物柱面，在柱面条件下, 又要求 $I_2 = 0$，将柱面的重心坐标方程系数的表示 (**??**) 代入，满足条件的非退化解仅能取如下形式：

$$p = m^2, \quad q = n^2, \quad r = mn(1+m+n)$$

于是得到抛物柱面的重心坐标方程系数的一个表示：

$$\lambda_{12} = 1, \quad \lambda_{13} = m^2, \quad \lambda_{14} = (1+n)^2, \quad \lambda_{23} = (1+m)^2, \quad \lambda_{24} = n^2, \quad \lambda_{34} = (1+m+n)^2 \tag{6.5}$$

6.4　二阶有理表示

6.4.1　有理表示的导出

同二次曲线一样，我们只需要寻找适当的二元二次多项式函数 $\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v), \delta(u,v)$, 使之满足方程 (6.2), 然后归一化，则可得到二次曲面上任意点 P 的二阶有理表示：

$$P(u,v) = \frac{\alpha(u,v)A + \beta(u,v)B + \gamma(u,v)C + \delta(u,v)D}{\alpha(u,v) + \beta(u,v) + \gamma(u,v) + \delta(u,v)}$$

若直接设 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为二元二次多项式函数的一般形式进行求解，计算量会很大，这里我们利用前面二次曲线的表示进行推导。

对于 ABD 平面所截曲线, 此时 $\gamma = 0$, 根据 (6.2) 式, 有

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{14}\alpha\delta + \lambda_{24}\beta\delta = 0$$

不妨设该曲线也是 $v = 0$ 时的曲线, 且不是退化的直线情形，即 $\lambda_{12}, \lambda_{14}, \lambda_{24}$ 均不为 0, 则由二次曲线的有理表示，得

$$P(u,0) = \frac{\lambda_{24}(1-u)A + \lambda_{14}uB - \lambda_{12}u(1-u)D}{\lambda_{24}(1-u) + \lambda_{14}u - \lambda_{12}u(1-u)}$$

于是可设

$$\begin{cases} \alpha(u,v) = \lambda_{24}(1-u) + a_1uv + b_1v^2 + c_1v \\ \beta(u,v) = \lambda_{14}u + a_2uv + b_2v^2 + c_2v \\ \gamma(u,v) = a_3uv + b_3v^2 + c_3v \\ \delta(u,v) = -\lambda_{12}u(1-u) + a_4uv + b_4v^2 + c_4v \end{cases}$$

现在考虑 ACD 平面所截曲线, 此时 $\beta = 0$, 解出

$$u = -\frac{v(vb_2 + c_2)}{va_2 + \lambda_{14}}$$

根据 (??) 式，又有

$$\lambda_{13}\alpha\gamma+\lambda_{14}\alpha\delta+\lambda_{34}\gamma\delta=0$$

将前面的参数表示代入, 将得关于 v 的一个六次方程。

若该六次方程不可做进一步的因式分解，则根据 v 是自由变量, 其各项系数均为 0, 解得:

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{b_2\lambda_{14}}{a_2}\\
c_3 &= -\frac{(a_2c_4+b_2\lambda_{12})\lambda_{14}}{a_2\lambda_{13}}\\
b_1 &= \frac{\lambda_{13}^2(a_2^2c_1^2+4a_1a_2b_2\lambda_{24}+2a_2b_2c_1\lambda_{24}+b_2^2\lambda_{24}^2)-(a_2c_4+b_2\lambda_{12})^2\lambda_{34}^2}{4a_2^2\lambda_{13}^2\lambda_{24}}\\
b_3 &= \frac{2a_2a_3b_2\lambda_{13}^2\lambda_{24}-(a_2c_4+b_2\lambda_{12})\lambda_{13}\lambda_{14}(a_2c_1+b_2\lambda_{24})+(a_2c_4+b_2\lambda_{12})^2\lambda_{14}\lambda_{34}}{2a_2^2\lambda_{13}^2\lambda_{24}}\\
b_4 &= \frac{\lambda_{13}(a_2^2c_1c_4+a_2b_2c_1\lambda_{12}+2a_2a_4b_2\lambda_{24}+a_2b_2c_4\lambda_{24}-b_2^2\lambda_{12}\lambda_{24})+(a_2c_4+b_2\lambda_{12})^2\lambda_{34}}{2a_2^2\lambda_{13}\lambda_{24}}
\end{aligned}$$

将以上代入到 (??) 式, 同理解出其余参数：

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{a_2\lambda_{24}}{\lambda_{14}}\\
a_3 &= 0\\
b_2 &= \frac{a_2(c_1\lambda_{14}-2a_2\lambda_{24})(\lambda_{13}\lambda_{24}-\lambda_{14}\lambda_{23})+\lambda_{34}a_2(c_1\lambda_{12}\lambda_{14}-a_2\lambda_{12}\lambda_{24}+a_4\lambda_{14}\lambda_{24})}{\lambda_{14}\lambda_{24}(\lambda_{14}\lambda_{23}-\lambda_{13}\lambda_{24}+\lambda_{12}\lambda_{34})}\\
c_4 &= \frac{\lambda_{12}\lambda_{14}\lambda_{23}(c_1\lambda_{14}-2a_2\lambda_{24})+(c_1\lambda_{12}\lambda_{14}-a_2\lambda_{12}\lambda_{24}+a_4\lambda_{14}\lambda_{24})(\lambda_{13}\lambda_{24}-\lambda_{12}\lambda_{34})}{\lambda_{14}\lambda_{24}(\lambda_{14}\lambda_{23}-\lambda_{13}\lambda_{24}+\lambda_{12}\lambda_{34})}
\end{aligned}$$

为进一步简化二次曲面的参数表示形式, 再作代换:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{\lambda_{14}}{\zeta}\\
c_1 &= \frac{(1-\zeta\chi)\lambda_{24}}{\zeta}\\
a_4 &= \frac{(1+\zeta\eta+\zeta\chi)(\lambda_{13}\lambda_{24}-\lambda_{14}\lambda_{23})+\zeta(\chi-\eta)\lambda_{12}\lambda_{34}}{\zeta\lambda_{34}}
\end{aligned}$$

则得到二次曲面的一个二阶有理参数表示:

$$P(u,v)=\frac{\alpha(u,v)A+\beta(u,v)B+\gamma(u,v)C+\delta(u,v)D}{\alpha(u,v)+\beta(u,v)+\gamma(u,v)+\delta(u,v)} \tag{6.6}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha(u,v) =&\lambda_{24}\lambda_{34}\zeta(v+\zeta)(1-u-v\chi)\\
\beta(u,v) =&\lambda_{14}\lambda_{34}\zeta(v+\zeta)(u-v\eta)\\
\gamma(u,v) =&\lambda_{14}\lambda_{24}(1+\zeta\eta+\zeta\chi)v(v+\zeta)\\
\delta(u,v) =&-\lambda_{12}\lambda_{34}\zeta^2(u-v\eta)(1-u-v\chi)-\lambda_{13}\lambda_{24}\zeta(1+\zeta\eta+\zeta\chi)v(1-u-v\chi)\\
&-\lambda_{14}\lambda_{23}\zeta(1+\zeta\eta+\zeta\chi)v(u-v\eta)
\end{aligned}$$

上述表示中, 参数 ζ,η,χ 可任意取值而不改变曲面的形状。

注意到

$$P(0,0)=A, P(1,0)=B, P(\frac{\eta}{\eta+\chi},\frac{1}{\eta+\chi})=C, P(u,-\zeta)=D$$

如果要求 $P(0,1)=C$，则 $\eta=0,\chi=1$, 得到表示

$$
\begin{aligned}
\alpha(u,v) =&\lambda_{24}\lambda_{34}\zeta(1-u-v)(v+\zeta)\\
\beta(u,v) =&\lambda_{14}\lambda_{34}\zeta u(v+\zeta)\\
\gamma(u,v) =&\lambda_{14}\lambda_{24}(1+\zeta)v(v+\zeta)\\
\delta(u,v) =&-\lambda_{12}\lambda_{34}\zeta^2u(1-u-v)-\lambda_{13}\lambda_{24}\zeta(1+\zeta)v(1-u-v)-\lambda_{14}\lambda_{23}\zeta(1+\zeta)uv
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

如果又要求 $P(u,\infty)=D$, 则 $\zeta\to\infty$, 得到表示:

$$
\begin{aligned}
\alpha(u,v) =&\lambda_{24}\lambda_{34}(1-u-v)\\
\beta(u,v) =&\lambda_{14}\lambda_{34}u\\
\gamma(u,v) =&\lambda_{14}\lambda_{24}v\\
\delta(u,v) =&-(\lambda_{12}\lambda_{34}u+v\lambda_{13}\lambda_{24})(1-u-v)-\lambda_{14}\lambda_{23}uv
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

在前面的推导过程中, 我们并未对特殊情形进行讨论，因而上述表示在某些特殊情形下可能失效, 此时我们可以考虑调整基准点的顺序或者另选基准点，否则需重新按上述程序求解进行参数化。

例如，对于二次锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, 在其上取四个点: $A(a,0,c),B(0,b,c),C(0,0,0),D(-a,0,c)$,

得到二次锥面关于 $ABCD$ 四点的重心坐标方程为：$\alpha\beta+2\alpha\delta+\beta\delta=0$

此时 (6.8) 式失效，我们需要重新求解：

令

$$
\begin{cases}
\alpha=-2(1-u)+uva_1+v^2b_1+vc_1\\
\beta=-4u+uva_2+v^2b_2+vc_2\\
\gamma=uva_3+v^2b_3+vc_3\\
\delta=2(1-u)u+uva_4+v^2b_4+vc_4
\end{cases}
$$

代入重心坐标方程，容易求解出

$$
a_1=-\frac{a_2}{2},a_4=-\frac{a_2^2+8b_2}{2a_2},b_1=\frac{1}{8}(-a_2^2-4b_2),b_4=-\frac{b_2(a_2^2+4b_2)}{2a_2^2},c_1=\frac{a_2^2+2b_2}{a_2},c_2=-\frac{4b_2}{a_2},c_4=\frac{2b_2}{a_2}
$$

或

$$
a_1=0,\quad a_2=0,\quad a_4=c_2,\quad b_1=0,\quad b_2=0,\quad b_4=-\frac{c_2^2}{8},\quad c_1=-\frac{c_2}{2},\quad c_4=-\frac{c_2}{2}
$$

这两组解都是有效的。为简洁, 这里选取第二组解，再令

$$
c_2=0,\quad a_3=0,\quad b_3=0,\quad c_3=2
$$

则得到表示：

$$
x=a\frac{1-u^2}{1+u^2-v},\quad y=b\frac{2u}{1+u^2-v},\quad z=c\frac{1+u^2}{1+u^2-v}
$$

又令 $v=v+1$, 得到更简化的表示:

$$
x=a\frac{1-u^2}{u^2-v},\quad y=b\frac{2u}{u^2-v},\quad z=c\frac{1+u^2}{u^2-v}
$$

6.4.2 有理表示的具体示例

椭球面

标准椭球面的直角坐标方程是：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 我们在其上取四个点 $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c),D(-a,0,0)$ 作为基准点, 设椭球面上的点 $P(x,y,z)$ 有重心坐标表示:

$$
P=\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D,(\alpha+\beta+\gamma+\delta=1)
$$

则得到

$$x = a(\alpha - \delta), \quad y = b\beta, \quad z = c\gamma$$

代入椭球面的方程，有

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta - 1 = 0$$

为将其化为 (??) 的形式, 我们只需将含有平方的项进行替换即可, 例如 $\alpha^2 \to \alpha(1 - \beta - \gamma - \delta)$, 则得:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + 2\alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta = 0$$

由参数表示式 (??), 即得到椭球面的一个著名表示:

$$x = a\frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2}, \quad y = b\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \quad z = c\frac{2v}{1 + u^2 + v^2}$$

单叶双曲面

标准单叶双曲面的直角坐标方程是：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, 在其上取四个点 $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(\frac{5}{3}a, 0, \frac{4}{3}c), D(-a, 0, 0)$, 同上即可得到参数化表示：

$$x = a\frac{4 - 4u^2 + v^2}{4 + 4u^2 - v^2}, \quad y = b\frac{8u}{4 + 4u^2 - v^2}, \quad z = c\frac{4v}{4 + 4u^2 - v^2}$$

若作代换 $v \to 2v$, 则得到更简洁的表示:

$$x = a\frac{1 - u^2 + v^2}{1 + u^2 - v^2}, \quad y = b\frac{2u}{1 + u^2 - v^2}, \quad z = c\frac{2v}{1 + u^2 - v^2}$$

双叶双曲面

标准双叶双曲面的直角坐标方程是：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, 在其上取四个点: $A(0, 0, c), B(\frac{4a}{3}, 0, \frac{5c}{3}), C(0, \frac{4}{3}b, \frac{5}{3}c), D(0, 0, -c)$, 同上得参数化表示:

$$x = a\frac{4u}{4 - u^2 - v^2}, \quad y = b\frac{4v}{4 - u^2 - v^2}, \quad z = c\frac{4 + u^2 + v^2}{4 - u^2 - v^2}$$

若作代换 $u \to 2u, v \to 2v$, 则得更简洁的表示:

$$x = a\frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \quad y = b\frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \quad z = c\frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}$$

二次锥面

标准二次锥面的直角坐标方程是: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, 在其上取四个点：$A(a, 0, c), B(0, b, c), C(2a, 0, 2c), D(-a, 0, c)$, 同上得参数化表示:

$$x = a\frac{2(1 - u^2)}{2 + 2u^2 - v}, \quad y = b\frac{4u}{2 + 2u^2 - v}, \quad z = c\frac{2(1 + u^2)}{2 + 2u^2 - v}$$

若作代换 $v \to 2v + 2$, 则得更简洁的表示：

$$x = a\frac{1 - u^2}{u^2 - v}, \quad y = b\frac{2u}{u^2 - v}, \quad z = c\frac{1 + u^2}{u^2 - v}$$

椭圆抛物面

标准椭圆抛物面的直角坐标方程是: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$, 在其上取四个点: $A(a, 0, 1), B(\frac{a}{2}, 0, \frac{1}{4}), C(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1}{2}), D(0, 0, 0)$, 同上得参数化表示:

$$x = a\frac{1 + u}{1 + 2u + u^2 + v^2}, \quad y = b\frac{v}{1 + 2u + u^2 + v^2}, \quad z = \frac{1}{1 + 2u + u^2 + v^2}$$

作代换：$u \to u - 1$, 则得

$$x = a\frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = b\frac{v}{u^2 + v^2}, \quad z = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

双曲抛物面

标准双曲抛物面的直角坐标方程是: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, 在其上取四个点:$A(0,b,-1), B(a,0,1), C(-a,0,1), D(0,0,0)$, 同上得参数化表示:

$$x = a\frac{v-u}{(2u-1)(2v-1)}, \quad y = b\frac{1-u-v}{(2u-1)(2v-1)}, \quad z = \frac{-1}{(2u-1)(2v-1)}$$

作代换:

$$u = \frac{1}{2}(1+u+v), \quad v = \frac{1}{2}(1-u+v)$$

则得到

$$x = a\frac{u}{u^2-v^2}, \quad y = b\frac{v}{u^2-v^2}, \quad z = \frac{1}{u^2-v^2}$$

椭圆柱面

标准椭圆柱面的直角坐标方程是: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 在其上取四个点:$A(a,0,0), B(0,b,0), C(a,0,1), D(-a,0,0)$, 同上得参数化表示:

$$x = a\frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad y = b\frac{2u}{1+u^2}, \quad z = \frac{v}{1+u^2}$$

双曲柱面

标准双曲柱面的直角坐标方程是: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 在其上取四个点: $A(a,0,0), B(\frac{5}{3}a, \frac{4}{3}b, 0), C(a,0,1), D(-a,0,0)$, 同上得参数化表示:

$$x = a\frac{4+u^2}{4-u^2}, \quad y = b\frac{4u}{4-u^2}, \quad z = \frac{4v}{4-u^2}$$

作代换：$u \to 2u$, 则得:

$$x = a\frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad y = b\frac{2u}{1-u^2}, \quad z = \frac{v}{1-u^2}$$

抛物柱面

标准抛物柱面的直角坐标方程是: $y^2 = 2px$, 在其上取四个点：$A(2p,2p,0), B(\frac{p}{2},p,0), C(2p,2p,1), D(0,0,0)$, 同上得参数化表示:

$$x = \frac{2p}{(1+u)^2}, \quad y = \frac{2p}{(1+u)}, \quad z = \frac{v}{(1+u)^2}$$

作代换：$u \to u-1$, 则得:

$$x = \frac{2p}{u^2}, \quad y = \frac{2p}{u}, \quad z = \frac{v}{u^2}$$

6.4.3　有理表示的规律

上面示例中，我们对九种标准的二次曲面进行了二阶有理参数化表示。曲面的类型与与有理表示的分母存在着如下的对应关系：

曲面类型	有理表示的分母	曲面类型	有理表示的分母	曲面类型	有理表示的分母
椭球面	$1+u^2+v^2$	单叶双曲面	$1+u^2-v^2$	双叶双曲面	$1-u^2-v^2$
二次锥面	u^2-v	椭圆抛物面	u^2+v^2	双曲抛物面	u^2-v^2
椭圆柱面	$1+u^2$	双曲柱面	$1-u^2$	抛物柱面	u^2

一般地，对于非退化的二次曲面 $f(x,y,z)=0$, 若其二阶有理参数表示的分母 $g(u,v)$ 也是二次的, 则有

$f(x,y,z)=0$	$g(u,v)=0$	$f(x,y,z)=0$	$g(u,v)=0$	$f(x,y,z)=0$	$g(u,v)=0$
椭球面	虚椭圆	单叶双曲面	双曲线	双叶双曲面	椭圆
二次锥面	抛物线	椭圆抛物面	点	双曲抛物面	一对相交直线
椭圆柱面	一对平行的虚直线	双曲柱面	一对平行直线	抛物柱面	一对重合的直线

特别需要说明的是，某些二次曲面有分段的二阶有理表示，但不属于本节所述的表示。

例如，对于标准二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, 它的一个参数表示是：

$$\begin{cases} x=a(s^2-t^2), \quad y=2bst, \quad z=c(s^2+t^2) \\ x=a(s^2-t^2), \quad y=2bst, \quad z=-c(s^2+t^2) \end{cases}$$

6.4.4 有理表示之间的关系

二阶表示的关系

同一二次曲面有多种二阶有理参数表示，这些表示之间存在着怎样的关系呢？

容易得知, 一个二阶有理表示经过如下简单的分式线性变换后仍是一个二阶有理表示：

$$u \to \frac{a_1u+b_1v+c_1}{a_3u+b_3v+c_3}, \quad v \to \frac{a_2u+b_2v+c_2}{a_3u+b_3v+c_3}$$

另外，也存在着一些二阶的变换，例如, 对于标准的椭球面方程: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,

前面已经得到了它的一个二阶有理表示：

$$x=a\frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}, \quad y=b\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad z=c\frac{2v}{1+u^2+v^2}$$

现在我们以 $A(a,0,0), B(0,b,0), C(\frac{5}{3}a,0,\frac{4}{3}c), D(0,0,-c)$ 为基准点，同理得到它的另一个二阶有理表示：

$$x=a\frac{2(1-s-t)}{2-2s+2s^2-2t+2st+t^2}, \quad y=b\frac{2s}{2-2s+2s^2-2t+2st+t^2}, \quad z=c\frac{2s-2s^2+2t-2st-t^2}{2-2s+2s^2-2t+2st+t^2}$$

这两种表示之间存在双有理映射关系：

$$u=\frac{2s}{4-4s+2s^2-4t+2st+t^2}, \quad v=\frac{2s-2s^2+2t-2st-t^2}{4-4s+2s^2-4t+2st+t^2}$$
$$s=\frac{2u}{1+u^2+2v+v^2}, \quad t=\frac{2(-u+u^2+v+v^2)}{1+u^2+2v+v^2}$$

直纹面的直线族表示

对于直纹二次曲面, 我们可以由二阶有理表示导出它的一个直线族表示。

以标准的单叶双曲面为例：

前已得知, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的一个二阶有理表示为：

$$x=a\frac{1-u^2+v^2}{1+u^2-v^2}, \quad y=b\frac{2u}{1+u^2-v^2}, \quad z=c\frac{2v}{1+u^2-v^2}$$

$z=0$ 平面所截的腰椭圆为：

$$x=a\frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad y=b\frac{2u}{1+u^2}, \quad z=0$$

在腰椭圆上的一点 ($u=s$ 处)，其直母线总是有两条：

$$l_1: x=a\frac{1-s^2}{1+s^2}+2ast, \quad y=b\frac{2s}{1+s^2}-b(1-s^2)t, \quad z=c(1+s^2)t$$
$$l_2: x=a\frac{1-s^2}{1+s^2}+2ast, \quad y=b\frac{2s}{1+s^2}-b(1-s^2)t, \quad z=-c(1+s^2)t$$

这也是单叶二次曲面的一个直线族参数表示。

二阶有理表示与直线族参数表示的变量之间也存在着双有理映射关系：

以 l_1 为例, 该关系为:

$$u=\frac{2s-t+s^4t}{2(1+st+s^3t)},\quad v=\frac{\left(1+s^2\right)^2t}{2(1+st+s^3t)}$$
$$s=u+v,\quad t=\frac{2v}{(1+u^2-v^2)(1+u^2+2uv+v^2)}$$

6.5 截交线与三角曲面片

二次曲面的截交线是指当平面与二次曲面的交线。

6.5.1 简单三角曲面片

三角曲面片是三个平面在二次曲面上的截交线所围成的区域。

如果三个平面的交点也位于二次曲面上，则该三角曲面片是容易表示的。

例如，对于单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 给定其上三点：$A(1,0,0),B(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0),C(\frac{5}{13},0,\frac{12}{13})$,

以及另外一点 $D(-1,0,0)$, 三角曲面片为三个平面 DAB,DBC,DCA 所截曲线围成的区域，求该三角曲面片的表示。

解：以 A,B,C,D 为基准点，可知球面上点的重心坐标方程为：

$$13\alpha\beta+20\alpha\gamma+65\alpha\delta+25\beta\gamma+52\beta\delta+45\gamma\delta=0$$

对于三角曲面片上的点，根据空间中重心坐标的体积意义知：

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \gamma>0,\quad \delta<0$$

以有理参数表示，则为：

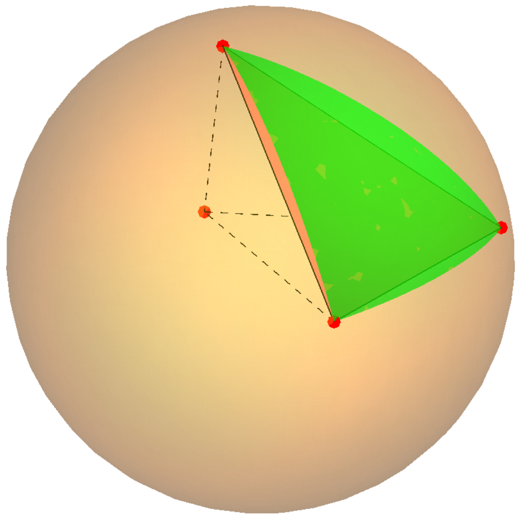
$$\alpha=\frac{36(1-u-v)}{36+9u^2+16v^2},\quad \beta=\frac{45u}{36+9u^2+16v^2},\quad \gamma=\frac{52v}{36+9u^2+16v^2},\quad \delta=\frac{-9u+9u^2-16v+16v^2}{36+9u^2+16v^2}$$

以及

$$x=\frac{36-9u^2-16v^2}{36+9u^2+16v^2},\quad y=\frac{36u}{36+9u^2+16v^2},\quad z=\frac{48v}{36+9u^2+16v^2}$$

参数的取值范围是：$0<v<1,\quad 0<u<1-v$

图形绘制如下：



Show[Graphics3D[Dashed, Line[1, 0, 0, −1, 0, 0], Line[3/5, 4/5, 0, −1, 0, 0], Line[5/13, 0, 12/13, −1, 0, 0]], ParametricPlot3D[− None, PlotStyle− > Green, Opacity[0.7], MaxRecursion− > 5], ListPointPlot3D[1, 0, 0, 3/5, 4/5, 0, 5/13, 0, 12/13, −1, 0, 0, PlotSt Red, PointSize[Large]], ListPlot3D[1, 0, 0, 3/5, 4/5, 0, 5/13, 0, 12/13, PlotStyle− > Pink, Mesh− > Full], ContourPlot3D[x^2+ y^2+z^2 == 1, x, −1, 1, y, −1, 1, z, −1, 1, Mesh− > None, ContourStyle− > Opacity[0.3]], BoxRatios− > 1, 1, 1, PlotRange− > All, Axes− > False, Boxed− > False]

6.5.2 一般三角曲面片

同上例, 三角曲面片为 A, B, C 与球心 O 的连线所围成的区域，求它的一个表示。

解：将球面上的点表示为 A, B, C, O 的重心坐标:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta O, (\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1)$$

展开即为:

$$x = \alpha + \frac{3\beta}{5} + \frac{5\gamma}{13}, \quad y = \frac{4\beta}{5}, \quad z = \frac{12\gamma}{13}$$

由此求出:

$$\alpha = \frac{1}{12}(12x - 9y - 5z), \quad \beta = \frac{5y}{4}, \quad \gamma = \frac{13z}{12}, \quad \delta = \frac{1}{6}(6 - 6x - 3y - 4z)$$

若我们选取选择球面的如下表示:

$$x = \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2}, y = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, z = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}$$

则得:

$$\alpha = \frac{6 - 9u - 6u^2 - 5v - 6v^2}{6(1 + u^2 + v^2)}, \quad \beta = \frac{5u}{2(1 + u^2 + v^2)}, \quad \gamma = \frac{13v}{6(1 + u^2 + v^2)}, \quad \delta = \frac{-3u + 6u^2 - 4v + 6v^2}{3(1 + u^2 + v^2)}$$

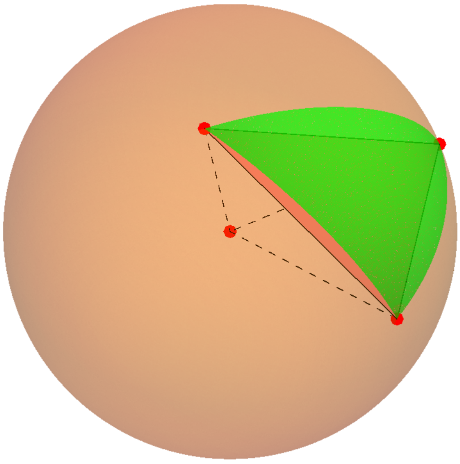
三角曲面片上的点满足

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad \delta < 0$$

求解得到 u, v 的取值范围是：

$$0 < u < \frac{1}{2}, \quad 0 < v < -\frac{5}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{169 - 216u - 144u^2}$$

图形绘制如下：



Show[Graphics3D[Dashed, Line[1, 0, 0, 0, 0, 0], Line[3/5, 4/5, 0, 0, 0, 0], Line[5/13, 0, 12/13, 0, 0, 0]], ParametricPlot3D[(1 − u^2
None, ExclusionsStyle− > None, Red, PlotStyle− > Directive[Green, Opacity[0.7]], MaxRecursion− > 5, PlotPoints− >
200], ListPointPlot3D[1, 0, 0, 3/5, 4/5, 0, 5/13, 0, 12/13, 0, 0, 0, PlotStyle− > Red, PointSize[Large]], ListPlot3D[1, 0, 0, 3/5, 4/5, 0
Pink, Mesh− > Full], ContourPlot3D[$x^2 + y^2 + z^2$ == 1, x, −1, 1, y, −1, 1, z, −1, 1, Mesh− > None, ContourStyle− >
Directive[Orange, Opacity[0.3]], MaxRecursion− > 5, PlotPoints− > 200], BoxRatios− > 1, 1, 1, PlotRange− > All, Axes− >
False, Boxed− > False]

6.5.3　控制参数调节

在计算机辅助几何设计中，如何绘制出更光滑的曲面是非常重要的，它对于机械部件的加工至关重要。如果已知曲面的一个有理参数表示，我们可以再对变量参数做一个有理映射，该映射并不对曲面的形状产生任何影响，却可以用于调节曲面的绘制。

对于三角曲面片而言，一般我们总是要求在顶点处的参数值保持固定，即：$P(0,0) = A, P(1,0) = B, P(0,1) = C$。易知如下的两个分式线性映射：

$$u \to \frac{(1+m)u}{1+mu}, \quad v \to \frac{(1+n)v}{1+nv}$$

及

$$u \to \frac{(1+m)u}{1+mu+nv}, \quad v \to \frac{(1+n)v}{1+mu+nv}$$

是符合要求的，它们也保持有理表示的阶数不变，其中 p, q 又称为控制参数。

有理映射的次数越高，允许的控制参数越多，选取适当的控制参数可以使得绘制的曲面更平滑。

如果要求保持有理表示的阶数不变，对于二次曲面的三角曲面片，可以通过改变另一个顶点在曲面上所处的位置，利用 (6.8) 重新参数化表示来得到多控制参数的有理表示。

例如，前面简单三角曲面片的示例中，另取 D 点为三角曲面片之外的一个点，设为 $D(\frac{1-p^2-q^2}{1+p^2+q^2}, \frac{2p}{1+p^2+q^2}, \frac{2q}{1+p^2+q^2})$

根据 (6.8), 可得到球面以 A, B, C, D 为基准点的一个有理表示, 记为

$$x = x(s,t), y = y(s,t), z = z(s,t)$$

该表示与前面表示

$$x = \frac{36-9u^2-16v^2}{36+9u^2+16v^2}, \quad y = \frac{36u}{36+9u^2+16v^2}, \quad z = \frac{48v}{36+9u^2+16v^2}$$

的关系是一个双有理映射:

$$s = \frac{3(1-4p+4p^2+4q^2)(18p^2u-12qu+18q^2u-9pu^2+16pv-16pv^2)}{(-3p+6p^2-4q+6q^2)(36p^2+36q^2-36pu+9u^2-48qv+16v^2)}$$
$$t = \frac{(4+9p^2-12q+9q^2)(9qu-9qu^2-12pv+24p^2v+24q^2v-16qv^2)}{(-3p+6p^2-4q+6q^2)(36p^2+36q^2-36pu+9u^2-48qv+16v^2)}$$

与分式线性有理映射复合，则可得到含四个控制参数的一个有理映射。

6.6 二次曲面的相切问题

6.6.1 切平面

对于重心坐标方程表示的二次曲面, 其切平面的求法与直角坐标方程表示的曲面求法是一致的。

例如：已知二次曲面关于 A, B, C, D 的重心坐标方程：

求曲面在点 P 处的切平面。

解：

6.6.2 二次曲面的光滑拼接

曲面拼接问题是计算机辅助几何设计理论研究的另一个核心内容。

如果两个曲面仅在拼接处连续, 称为 $G0$ 拼接; 若法向量方向保持一致, 称为 $G1$ 拼接; 若法向量和曲率均保持一致, 称为 $G2$ 拼接。

这里我们讨论二次曲面在截交线处的 $G1$ 拼接：

对于给定的二次曲面 Γ 和截平面，以及二次曲面外的一点 P, 总是存在一个确定的二次曲面 Ω，使得它在截交线处与 Γ 有 $G1$ 拼接, 且经过点 P。

例：给定单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 已知截平面经过球面上的两点 $A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), B(\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13})$, 以及球心 $O(0,0,0)$,

求一个二次曲面 Ω, 使之与单位球面在截交线处有 $G1$ 拼接, 且经过点 $C(1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$。

解：我们先在截交线上另找一点 $D(-(3/5), -4/5, 0)$, 所求二次曲面即经过 A, B, C, D 四点，空间中的任意点 $P(x,y,z)$ 可表示为这四点的重心坐标形式：

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D, (\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1)$$

于是

$$x = \frac{1}{65}(39\alpha+25\beta+65\gamma-39\delta), \quad y = \frac{1}{15}(12\alpha-5\gamma-12\delta), \quad z = \frac{2}{65}(30\beta+13\gamma)$$

代入球面方程，得到球面上点的重心坐标方程：

$$-2925+2925\alpha^2+1350\alpha\beta+2925\beta^2+1950\alpha\gamma+4410\beta\gamma+3718\gamma^2-5850\alpha\delta-1350\beta\delta-1950\gamma\delta+2925\delta^2=0$$

化为标准形式则是：

$$4500\alpha\beta+4693\alpha\gamma+11700\alpha\delta+2233\beta\gamma+7200\beta\delta+8593\gamma\delta-793\gamma=0$$

在截交线上, $\gamma = 0$, 并有

$$4500\alpha\beta+11700\alpha\delta+7200\beta\delta=0$$

Ω 经过此截交线，因而它的重心坐标方程可设为：

$$4500\alpha\beta + 11700\alpha\delta + 7200\beta\delta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{23}\beta\gamma + \lambda_{34}\gamma\delta = 0$$

我们不必转化重心坐标方程为直角坐标形式来求曲面在截交线处的法向量，因为这两个曲面取的是相同的基准点。先利用 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ 消去一个重心坐标分量 δ, 球面的重心坐标方程成为：

$$11700\alpha - 11700\alpha^2 + 7200\beta - 14400\alpha\beta - 7200\beta^2 + 7800\gamma - 15600\alpha\gamma - 13560\beta\gamma - 8593\gamma^2 = 0$$

求全微分，得：

$$(11700-23400\alpha-14400\beta-15600\gamma)d\alpha+(7200-14400\alpha-14400\beta-13560\gamma)d\beta+(7800-15600\alpha-13560\beta-17186\gamma)d\gamma=0$$

在截交线处，$\gamma=0$, 从而得到球面在截交线处的微分关系式：

$$(11700-23400\alpha-14400\beta)d\alpha+(7200-14400\alpha-14400\beta)d\beta+(7800-15600\alpha-13560\beta)d\gamma=0$$

同理，求出曲面 Ω 在截交线处的微分关系式：

$$(11700-23400\alpha-14400\beta)d\alpha+(7200-14400\alpha-14400\beta)d\beta+(-11700\alpha-7200\beta+\alpha\lambda_{13}+\beta\lambda_{23}+\lambda_{34}-\alpha\lambda_{34}-\beta\lambda_{34})d\gamma=0$$

若两曲面在截交线处的法向量方向一致，则上述两个微分分量对应成比例，从而求出：

$$\lambda_{13}=3900,\quad \lambda_{23}=1440,\quad \lambda_{34}=7800$$

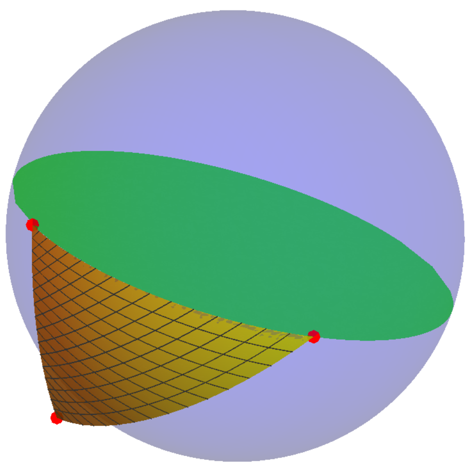
即得曲面 Ω 的重心坐标方程

$$4500\alpha\beta + 3900\alpha\gamma + 1440\beta\gamma + 11700\alpha\delta + 7200\beta\delta + 7800\gamma\delta = 0$$

它转化为直角坐标方程的形式是：

$$29241x^2 + 33084y^2 + 36500z^2 + 13176xy - 5490yz + 7320xz - 38025 = 0$$

图形绘制如下：



$Show[ContourPlot3D[x^2+y^2+z^2 == 1, x, -1, 1, y, -1, 1, z, -1, 1, Mesh- > None, MaxRecursion- > 5, ContourStyle- > Directive[Blue, Opacity[0.2]], PlotPoints- > 50], ListPointPlot3D[A/.points, B/.points, C/.points, PlotStyle- > Red, PointSiz$ $None, MaxRecursion- > 5, PlotStyle- > Directive[Green, Opacity[0.7]], PlotPoints- > 50], ParametricPlot3D[-((-120-80$ $5, PlotStyle- > Yellow, Opacity[0.9], PlotPoints- > 50], BoxRatios- > 1, 1, 1, PlotRange- > All, Axes- > False, Boxed- > False]$

6.6.3　四面体的相切二次曲面 I

给定四面体 A, B, C, D, 已知二次曲面与四面体的各面相切, 切点分别为:

$$\begin{cases} X = b_1B + c_1C + d_1D, (b_1 + c_1 + d_1 = 1) \\ Y = c_2C + d_2D + a_2A, (c_2 + d_2 + a_2 = 1) \\ Z = d_3D + a_3A + b_3B, (d_3 + a_3 + b_3 = 1) \\ W = a_4A + b_4B + c_4C, (a_4 + b_4 + c_4 = 1) \end{cases}$$

求各切点应满足的条件以及二次曲面的表示。

解：空间中的点 P 可表示为 X, Y, Z, W 的重心坐标形式：

$$P = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta W, (\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1)$$

代入切点关于四面体顶点的表示, 又有:

$$P = (\beta a_2 + \gamma a_3 + \delta a_4)A + (\alpha b_1 + \gamma b_3 + \delta b_4)B + (\alpha c_1 + \beta c_2 + \delta c_4)C + (\alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3)D$$

在二次曲面上，其重心坐标方程设为：

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{14}\alpha\delta + \lambda_{23}\beta\gamma + \lambda_{24}\beta\delta + \lambda_{34}\gamma\delta = 0$$

求微分，有：

$$(\lambda_{12}\beta + \lambda_{13}\gamma + \lambda_{14}\delta)d\alpha + (\lambda_{12}\alpha + \lambda_{23}\gamma + \lambda_{24}\delta)d\beta + (\lambda_{13}\alpha + \lambda_{23}\beta + \lambda_{34}\delta)d\gamma + (\lambda_{14}\alpha + \lambda_{24}\beta + \lambda_{34}\gamma)d\delta = 0$$

对关系式 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ 求微分，又有

$$d\alpha + d\beta + d\gamma + d\delta = 0$$

对于 BCD 平面，P 关于 A 点的重心坐标分量为 0，即有：

$$\beta a_2 + \gamma a_3 + \delta a_4 = 0$$

求微分，得到

$$a_2 d\beta + a_3 d\gamma + a_4 d\delta = 0$$

因为二次曲面与 BCD 平面相切于点 X, 所以以上三个微分等式在点 X 处 $(\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0)$ 处是相容的。

消去 $d\alpha, d\beta$, 得到:

$$(a_3\lambda_{12} - a_2\lambda_{13})d\gamma + (a_4\lambda_{12} - a_2\lambda_{14})d\delta = 0$$

微元 $d\beta, d\gamma$ 是不相关的，由上即知：

$$a_3\lambda_{12} = a_2\lambda_{13}, \quad a_4\lambda_{12} = a_2\lambda_{14}$$

同理, 根据二次曲面与其余三个面的相切，可以得到另外三组关系式：

$$b_3\lambda_{12} = b_1\lambda_{23}, \quad b_4\lambda_{23} = b_3\lambda_{24}$$

$$c_4\lambda_{13} = c_1\lambda_{34}, \quad c_4\lambda_{23} = c_2\lambda_{34}$$

$$d_2\lambda_{14} = d_1\lambda_{24}, \quad d_3\lambda_{14} = d_1\lambda_{34}$$

由此我们得到切点的重心坐标所应满足的三个条件:

$$a_2b_3c_1 = a_3b_1c_2, \quad a_2b_4d_1 = a_4b_1d_2, \quad a_3c_4d_1 = a_4c_1d_3 \tag{6.9}$$

以及二次曲面关于各面切点的重心坐标方程:

$$a_2\alpha\beta + a_3\alpha\gamma + a_4\alpha\delta + \frac{a_2b_3}{b_1}\beta\gamma + \frac{a_2b_4}{b_1}\beta\delta + \frac{a_3c_4}{c_1}\gamma\delta = 0 \tag{6.10}$$

例如：已知四面体 $ABCD$ 的顶点为: $A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1), D = (0,0,0)$, 若二次曲面与各面相切于点:

$$X = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}), \quad Y = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}), \quad Z = (\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, 0), \quad W = (\frac{4}{17}, \frac{9}{17}, \frac{4}{17})$$

则二次曲面关于 $XYZW$ 的重心坐标方程为：

$$51\alpha\beta + 34\alpha\gamma + 36\alpha\delta + 34\beta\gamma + 54\beta\delta + 48\gamma\delta = 0$$

转化为直角坐标则是：

$$18 - 81x + 117x^2 - 54y + 87xy + 52y^2 - 54z + 18xz + 12yz + 144z^2 = 0$$

6.6.4 四面体的相切二次曲面 II

现在我们考虑另一个问题：给定四面体 $ABCD$, 若二次曲面在 A, B, C 三点的切平面相交于点 D, 求该二次曲面。
解：因为二次曲面经过 ABC 三点，所以它关于 $ABCD$ 的重心坐标方程取如下形式：

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{14}\alpha\delta + \lambda_{23}\beta\gamma + \lambda_{24}\beta\delta + \lambda_{34}\gamma\delta + \lambda_{40}\delta = 0$$

对其取微分，得

$$(\beta\lambda_{12} + \gamma\lambda_{13} + \delta\lambda_{14})d\alpha + (\alpha\lambda_{12} + \gamma\lambda_{23} + \delta\lambda_{24})d\beta + (\alpha\lambda_{13} + \beta\lambda_{23} + \delta\lambda_{34})d\gamma + (\alpha\lambda_{14} + \beta\lambda_{24} + \gamma\lambda_{34} + \lambda_{40})d\delta = 0$$

对固有关系式 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ 求微分，又有

$$d\alpha + d\beta + d\gamma + d\delta = 0$$

空间中平面关于 $ABCD$ 的一般重心坐标方程为：

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0$$

二次曲面在 A 点处的切平面经过 D 点，则该切平面方程取

$$\beta + k_1\gamma = 0$$

的形式, 取微分即得:

$$d\beta + k_1 d\gamma = 0$$

在 A 点处 $(\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0)$, 以上三个微分式是相容的。
消去 $d\beta, d\delta$, 得到:

$$(\lambda_{14} + \lambda_{40})d\alpha + (k_1\lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{14} - k_1\lambda_{14} + \lambda_{40} - k_1\lambda_{40})d\gamma = 0$$

微元 $d\alpha, d\gamma$ 是不相关的，由上即知：

$$\lambda_{14}+\lambda_{40}=0$$

同理, 另外两个关系式为：

$$\lambda_{24}+\lambda_{40}=0$$

$$\lambda_{34}+\lambda_{40}=0$$

由此, 我们知二次曲面关于 $ABCD$ 的重心坐标方程取如下形式

$$\lambda_{12}\alpha\beta+\lambda_{13}\alpha\gamma+\lambda_{23}\beta\gamma+\lambda_{40}\delta^2=0$$

6.7　二次曲面的复切与周切

若两个二次曲面有两个公共点，并在公共点处有相同的切平面，则称曲面是复切的。

6.7.1　复切定理

复切定理：两二次曲面复切, 则两曲面交于两根平面曲线。

证明：设两曲面 Γ_1, Γ_2 的复切点为 A, B, Γ_1 又经过与 A, B 不在同一面上的 C, D 两点，则 Γ_1 的重心坐标方程为：

$$\lambda_{12}\alpha\beta+\lambda_{13}\alpha\gamma+\lambda_{14}\alpha\delta+\lambda_{23}\beta\gamma+\lambda_{24}\beta\delta+\lambda_{34}\gamma\delta=0$$

又设 Γ_2 的重心坐标方程：

$$\mu_{12}\alpha\beta+\mu_{13}\alpha\gamma+\mu_{14}\alpha\delta+\mu_{23}\beta\gamma+\mu_{24}\beta\delta+\mu_{34}\gamma\delta+\mu_{30}\gamma+\mu_{40}\delta=0$$

这二者在 A 点处的切微分方程分别为：

$$\begin{aligned}&\lambda_{12}d\beta+\lambda_{13}d\gamma+\lambda_{14}d\delta=0\\&\mu_{12}d\beta+(\mu_{13}+\mu_{30})d\gamma+(\mu_{14}+\mu_{40})d\delta=0\end{aligned}$$

根据对应的微分分量成比例关系即得：

$$\begin{cases}\lambda_{13}\mu_{12}-\lambda_{12}\mu_{13}-\lambda_{12}\mu_{30}=0\\\lambda_{14}\mu_{12}-\lambda_{12}\mu_{14}-\lambda_{12}\mu_{40}=0\end{cases}$$

同理，根据曲面在 B 点复切知

$$\begin{cases}\lambda_{23}\mu_{12}-\lambda_{12}\mu_{23}-\lambda_{12}\mu_{30}=0\\\lambda_{24}\mu_{12}-\lambda_{12}\mu_{24}-\lambda_{12}\mu_{40}=0\end{cases}$$

以上解出：

$$\mu_{23}=\frac{-\lambda_{13}\mu_{12}+\lambda_{23}\mu_{12}+\lambda_{12}\mu_{13}}{\lambda_{12}},\quad \mu_{24}=\frac{-\lambda_{14}\mu_{12}+\lambda_{24}\mu_{12}+\lambda_{12}\mu_{14}}{\lambda_{12}}$$
$$\mu_{30}=\frac{\lambda_{13}\mu_{12}-\lambda_{12}\mu_{13}}{\lambda_{12}},\quad \mu_{40}=\frac{\lambda_{14}\mu_{12}-\lambda_{12}\mu_{14}}{\lambda_{12}}$$

进而知两个曲面的交线满足方程：

$$(\lambda_{13}\mu_{12}-\lambda_{12}\mu_{13})\gamma^2+(\lambda_{13}\mu_{12}+\lambda_{14}\mu_{12}-\lambda_{34}\mu_{12}-\lambda_{12}\mu_{13}-\lambda_{12}\mu_{14}+\lambda_{12}\mu_{34})\gamma\delta+(\lambda_{14}\mu_{12}-\lambda_{12}\mu_{14})\delta^2=0$$

这是关于 γ, δ 的二次齐次方程，可分解为两个一次因式之积，故知两曲面相交于两根平面曲线。

特别地, 如果这两根平面曲线是重合的, 则两曲面在这条平面曲线上的每一点均相切，此时称两曲面周切，并称该平面曲线为周切线。

对于重合情形，关于 δ 的判别式为：

$$\Delta = (\lambda_{13}\mu_{12} + \lambda_{14}\mu_{12} - \lambda_{34}\mu_{12} - \lambda_{12}\mu_{13} - \lambda_{12}\mu_{14} + \lambda_{12}\mu_{34})^2 - 4(\lambda_{13}\mu_{12} - \lambda_{12}\mu_{13})(\lambda_{14}\mu_{12} - \lambda_{12}\mu_{14})$$

因而考虑代换

$$\frac{\lambda_{14}\mu_{12} - \lambda_{12}\mu_{14}}{\lambda_{13}\mu_{12} - \lambda_{12}\mu_{13}} = p^2$$

则可得系数的一个表示

$$\mu_{13} = \frac{\lambda_{13}\mu_{12} + 2p\lambda_{13}\mu_{12} + p^2\lambda_{13}\mu_{12} - \lambda_{34}\mu_{12} + \lambda_{12}\mu_{34}}{\lambda_{12}(1+p)^2}$$
$$\mu_{14} = \frac{\lambda_{14}\mu_{12} + 2p\lambda_{14}\mu_{12} + p^2\lambda_{14}\mu_{12} - p^2\lambda_{34}\mu_{12} + p^2\lambda_{12}\mu_{34}}{\lambda_{12}(1+p)^2}$$

此时 Γ_2 的重心坐标方程成为：

$$(\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{14}\alpha\delta + \lambda_{23}\beta\gamma + \lambda_{24}\beta\delta + \lambda_{34}\gamma\delta)\frac{\mu_{12}}{\lambda_{12}} + \frac{(\lambda_{34}\mu_{12} - \lambda_{12}\mu_{34})}{\lambda_{12}(1+p)^2}(\gamma - p\delta)^2 = 0$$

做代换

$$\frac{(\lambda_{34}\mu_{12} - \lambda_{12}\mu_{34})}{\mu_{12}(1+p)^2} = q$$

即化为更简单的表示：

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{14}\alpha\delta + \lambda_{23}\beta\gamma + \lambda_{24}\beta\delta + \lambda_{34}\gamma\delta + q(\gamma - p\delta)^2 = 0$$

根据这个结论，我们即可证明蒙日定理。

6.7.2 蒙日定理

如果两个二次曲面同时内周切或外周切于第三个二次曲面, 那么它们相交于平面曲线。

证明：设三个二次曲面分别为 Γ_1、Γ_2 和 Γ_3, Γ_1 与 Γ_3 周切于平面曲线 l_1, Γ_2 与 Γ_3 周切于平面曲线 l_2,

在 l_1 上取两点 A, B, 在 l_2 上取两点 C, D, 并且 A, B, C, D 不在同一面上，则 Γ_1 关于 A, B, C, D 的重心坐标方程形式为：

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{14}\alpha\delta + \lambda_{23}\beta\gamma + \lambda_{24}\beta\delta + \lambda_{34}\gamma\delta = 0$$

Γ_2 的重心坐标方程形式为：

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{14}\alpha\delta + \lambda_{23}\beta\gamma + \lambda_{24}\beta\delta + \lambda_{34}\gamma\delta + q_1(\gamma - p_1\delta)^2 = 0$$

Γ_3 的重心坐标方程形式为：

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{14}\alpha\delta + \lambda_{23}\beta\gamma + \lambda_{24}\beta\delta + \lambda_{34}\gamma\delta + q_2(\alpha - p_2\beta)^2 = 0$$

两式相减得：

$$q_1(\gamma - p_1\delta)^2 = q_2(\alpha - p_2\beta)^2$$

显然，只要 q_1 与 q_2 同号，则上述方程表述的正是两条平面曲线。

6.8 第一基本形式

根据微分几何的定义, 曲面的第一基本形式为 $I = dP \cdot dP$

对于以重心坐标表示的曲面

$$P(u,v)=\alpha(u,v)A+\beta(u,v)B+\gamma(u,v)C+(1-\alpha(u,v)-\beta(u,v)-\gamma(u,v))D$$

求微分即得:

$$dP=d\alpha\,\vec{DA}+d\beta\,\vec{DB}+d\gamma\,\vec{DC}$$

因而

$$I=AD^2(d\alpha)^2+BD^2(d\beta)^2+CD^2(d\gamma)^2+(2\,\vec{DA}\cdot\vec{DB})d\alpha d\beta+(2\,\vec{DB}\cdot\vec{DC})d\beta d\gamma+(2\,\vec{DC}\cdot\vec{DA})d\gamma d\alpha$$

利用微分计算式:

$$\begin{aligned}d\alpha&=\frac{\partial\alpha}{\partial u}du+\frac{\partial\alpha}{\partial v}dv\\d\beta&=\frac{\partial\beta}{\partial u}du+\frac{\partial\beta}{\partial v}dv\\d\gamma&=\frac{\partial\gamma}{\partial u}du+\frac{\partial\gamma}{\partial v}dv\end{aligned}$$

以及向量内积的性质:

$$\begin{aligned}2\,\vec{DA}\cdot\vec{DB}&=AD^2+BD^2-AB^2\\2\,\vec{DB}\cdot\vec{DC}&=BD^2+CD^2-BC^2\\2\,\vec{DC}\cdot\vec{DA}&=CD^2+AD^2-AC^2\end{aligned}$$

即可得到曲面第一基本形式在重心坐标下的表示。

$$I=E(du)^2+2F(du)(dv)+G(dv)^2$$

其中

$$\begin{aligned}E&=\\F&=\\G&=\end{aligned}$$

6.9 第二基本形式

曲面的第二基本形式的定义为 $II=\vec{n}\cdot d^2P$, 其中 $\vec{n}$ 为曲面在点 P 处的单位法向量。

我们先来计算点 P 处的法向量:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial u}\times\frac{\partial P}{\partial v}&=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\vec{DA}+\frac{\partial\beta}{\partial u}\vec{DB}+\frac{\partial\gamma}{\partial u}\vec{DC}\right)\times\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\vec{DA}+\frac{\partial\beta}{\partial v}\vec{DB}+\frac{\partial\gamma}{\partial v}\vec{DC}\right)\\&=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)\vec{DA}\times\vec{DB}+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)\vec{DB}\times\vec{DC}+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\vec{DC}\times\vec{DA}\end{aligned}$$

利用拉格朗日向量混合积恒等式:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

及上面提到的向量内积性质,即可计算其模长的平方，为：

$$
\begin{aligned}
&|\frac{\partial P}{\partial u}\times\frac{\partial P}{\partial v}|^2 = \\
&\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2\left(AD^2\cdot BD^2-\frac{1}{4}(AD^2+BD^2-AB^2)^2\right)+ \\
&\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2\left(BD^2\cdot CD^2-\frac{1}{4}(BD^2+CD^2-BC^2)^2\right)+ \\
&\left(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)^2\left(AD^2\cdot CD^2-\frac{1}{4}(AD^2+CD^2-AC^2)^2\right)+ \\
&\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{2}(AD^2+BD^2-AB^2)(BD^2+CD^2-BC^2)-(AD^2+CD^2-AC^2)BD^2\right)+ \\
&\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{2}(AD^2+CD^2-AC^2)(BD^2+CD^2-BC^2)-(AD^2+BD^2-AB^2)CD^2\right)+ \\
&\left(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{2}(AD^2+BD^2-AB^2)(AD^2+CD^2-AC^2)-(BD^2+CD^2-BC^2)AD^2\right)
\end{aligned}
$$

另一方面

$$d^2P=\vec{DA}\,d^2\alpha+\vec{DB}\,d^2\beta+\vec{DC}\,d^2\gamma$$

利用

$$6V_{ABCD}=\vec{DA}\times\vec{DB}\cdot\vec{DC}=\vec{DB}\times\vec{DC}\cdot\vec{DA}=\vec{DC}\times\vec{DA}\cdot\vec{DB}$$

可知

$$(\frac{\partial P}{\partial u}\times\frac{\partial P}{\partial v})\cdot d^2P=6V_{ABCD}\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)d^2\gamma+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)d^2\alpha+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)d^2\beta\right)$$

其中

$$d^2\alpha=\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}(du)^2+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}(dv)^2$$

余者类似。

根据以上即可得到曲面第二基本形式在重心坐标下的表示：

$$II=L(du)^2+2M(du)(dv)+N(dv)^2$$

其中

$$
\begin{aligned}
L&=\\
M&=\\
N&=
\end{aligned}
$$

6.10 面积计算

6.10.1 平面截二次曲面的区域面积

1. 球冠 2. 圆锥曲线面积

6.10.2 椭球截平面三角形的面积

椭球面三角形不同于球面三角形的定义：椭球面三角形是以大地线为边，而大地线并不是过椭球中心的平面所截的线！因此，本小节改称为截平面三角形！

在大地测量中,经常需要计算椭球面上三角形区域的面积,我们可以利用重心坐标来解决它。

设椭球面为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

球面上三角形区域的顶点

$$
\begin{aligned}
A &= (a\sin\theta_1\cos\varphi_1, b\sin\theta_1\sin\varphi_1, c\cos\theta_1)\\
B &= (a\sin\theta_2\cos\varphi_2, b\sin\theta_2\sin\varphi_2, c\cos\theta_2)\\
C &= (a\sin\theta_3\cos\varphi_3, b\sin\theta_3\sin\varphi_3, c\cos\theta_3)
\end{aligned}
$$

椭球中心 $O = (0,0,0)$。

设点 P 在椭球面上, 将 P 点表示为 A,B,C,O 四点的重心坐标:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta O$$

则可得其重心坐标的方程:

$$
\begin{aligned}
&-1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\\
&2\beta\gamma(\cos\varphi_2\cos\varphi_3+\cos(\theta_2-\theta_3)\sin\varphi_2\sin\varphi_3)+2\gamma\alpha(\cos\varphi_3\cos\varphi_1+\cos(\theta_3-\theta_1)\sin\varphi_3\sin\varphi_1)=0
\end{aligned}
$$

在三角形区域内, 有 $\alpha>0,\beta>0,\gamma>0$。

球面三角形的面积:

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_\Omega |\frac{\partial P}{\partial \alpha}\times\frac{\partial P}{\partial \beta}|d\alpha d\beta\\
&= \iint_\Omega |(\vec{OA}+\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\vec{OC})\times(\vec{OB}+\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\vec{OC})|d\alpha d\beta
\end{aligned}
$$

其中偏导数由前面的重心坐标方程求出, 为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} &= -\frac{\alpha+\beta(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\gamma(\cos\varphi_1\cos\varphi_3+\cos(\theta_1-\theta_3)\sin\varphi_1\sin\varphi_3)}{\gamma+\alpha(\cos\varphi_1\cos\varphi_3+\cos(\theta_1-\theta_3)\sin\varphi_1\sin\varphi_3)+\beta(\cos\varphi_2\cos\varphi_3+\cos(\theta_2-\theta_3)\sin\varphi_2\sin\varphi_3)}\\
\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} &= -\frac{\beta+\alpha(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\gamma(\cos\varphi_2\cos\varphi_3+\cos(\theta_2-\theta_3)\sin\varphi_2\sin\varphi_3)}{\gamma+\alpha(\cos\varphi_1\cos\varphi_3+\cos(\theta_1-\theta_3)\sin\varphi_1\sin\varphi_3)+\beta(\cos\varphi_2\cos\varphi_3+\cos(\theta_2-\theta_3)\sin\varphi_2\sin\varphi_3)}
\end{aligned}
$$

在一般情形下, 积分表示式较长。

例如, 取

$$a=1,b=2,c=3,\theta_1=0,\varphi_1=0,\theta_2=\frac{\pi}{4},\theta_3=\frac{\pi}{2},\varphi_2=\frac{\pi}{6},\varphi_3=\frac{\pi}{3}$$

则得到椭球面 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 上三角形 $A(0,0,3),B(\frac{1}{2\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},\frac{3\sqrt3}{2}),C(0,\sqrt3,\frac32)$ 所围面积为: 0.47520251747768

表面积微元: $|\frac{\partial P}{\partial u}\times\frac{\partial P}{\partial v}|dudv$

6.10.3 椭球表面积

椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的表面积:

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sqrt{c^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)\sin^4\varphi+\frac14 a^2b^2\sin^2 2\varphi}$$

6.10.4 椭球面平面截线区域的面积

$$
\begin{aligned}
&O\to\{0,0,0\}\\
&A\to\{aCos[\theta_1]Sin[\varphi_1], bSin[\theta_1]Sin[\varphi_1], cCos[\varphi_1]\}\\
&B\to\{aCos[\theta_2]Sin[\varphi_2], bSin[\theta_2]Sin[\varphi_2], cCos[\varphi_2]\}\\
&C\to\{aCos[\theta_3]Sin[\varphi_3], bSin[\theta_3]Sin[\varphi_3], cCos[\varphi_3]\}
\end{aligned}
$$

计算 $O-ABC$ 球面的面积。

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta O$$

代入椭球面方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

得到重心坐标方程：

$$\begin{aligned}&2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\alpha\beta+\\&2(\cos\varphi_2\cos\varphi_3+\cos(\theta_2-\theta_3)\sin\varphi_2\sin\varphi_3)\beta\gamma+\\&2(\cos\varphi_3\cos\varphi_1+\cos(\theta_3-\theta_1)\sin\varphi_3\sin\varphi_1)\gamma\alpha+\\&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0\end{aligned}$$

位于三棱锥体之内的部分要求:

$$\alpha>0,\beta>0,\gamma>0$$

将 γ 视为 α,β 的函数，求偏导得到:

根据

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C+(1-\alpha-\beta-\gamma)O$$

6.10.5　三角曲面片面积

$$\begin{aligned}S&=\iint_S|(\vec{AB}-\tfrac{13(5\beta+3\gamma)}{5(4\gamma+13\delta)}\vec{AD})\times(\vec{AC}-\tfrac{(39\beta+65\gamma+20\delta)}{5(4\gamma+13\delta)}\vec{AD})|d\beta d\gamma\\&=\int_0^1 d\beta\int_0^{-\frac{3\beta}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{25-16\beta^2}}\frac{48}{5(4\gamma+13\delta)}d\gamma\\&=\int_0^1 d\beta\int_0^{-\frac{3\beta}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{25-16\beta^2}}\frac{48}{\sqrt{5}\sqrt{845-845\beta^2-1014\beta\gamma-765\gamma^2}}d\gamma\\&=2\arctan\frac{12}{31}\\&=\int_0^1 d\gamma\int_0^{-\frac{4\gamma}{13}+\frac{1}{13}\sqrt{169-153\gamma^2}}\frac{48}{13(5\beta+3\gamma)}d\delta\\&=\int_0^1 d\gamma\int_0^{-\frac{4\gamma}{13}+\frac{1}{13}\sqrt{169-153\gamma^2}}\frac{48}{\sqrt{13}\sqrt{325-208\gamma^2-200\gamma\delta-325\delta^2}}d\delta\end{aligned}$$

6.11　体积计算

$$\begin{aligned}V&=\iiint_\Omega\frac{\partial P}{\partial\alpha}\times\frac{\partial P}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial\gamma}d\alpha d\beta d\gamma\\&=\vec{DA}\times\vec{DB}\cdot\vec{DC}\iiint_\Omega d\alpha d\beta d\gamma\\&=6V_{ABCD}\iiint_\Omega d\alpha d\beta d\gamma\end{aligned}$$

原创力文档: https://max.book118.com/html/2014/1218/10720800.shtm

(n-1) 维曲面所围空间体积的计算公式.pdf

二次曲面的体积：

引理: 直角坐标系下, 二次曲面若为椭球面, 则其体积为:

$$V=\frac{4}{3}\pi\sqrt{|\frac{{I_4}^3}{{I_3}^4}|}$$

其中 I_3,I_4 为二次曲面的两个不变量。

引用：[1] 赵虹．二次曲面所围封闭图形的体积, 大学数学,2013,(29)6: 139—140.

6.11.1　椭球体积

6.11.2　三棱锥面体积

球面三角形与球面上一点连线围成的三棱锥体的体积：

$$V=6V_{ABCD}\iiint_{\Omega}d\alpha d\beta d\delta=\frac{9+8\sqrt{3}\pi}{81}$$

$$\Omega:\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta=0$$

$$\Omega:2\alpha-2\alpha^2+\beta-2\alpha\beta-\beta^2+\delta-2\alpha\delta-\beta\delta-\delta^2<0,0<\alpha<1,0<\beta<1,0<\delta<1$$

球面三角形与球心连线围成的三棱锥体的体积：

Mathematica 求体积的两种方式：**NIntegrate[**

Boole $\left[-130\alpha+65\alpha^2-130\beta+130\alpha\beta+130\beta^2-90\gamma+90\alpha\gamma+168\beta\gamma+90\gamma^2\leq 0\&\&\alpha\leq 0\&\&\beta\geq 0\&\&\right.$
$\left.\gamma\geq 0\&\&1-\alpha-\beta-\gamma\geq 0\right],\{\alpha,-1,1\},\{\beta,-1,1\},\{\gamma,-1,1\},$ **WorkingPrecision** $\to 18]$

0.166759552069783179

Volume [**ImplicitRegion** $\left[-130\alpha+65\alpha^2-130\beta+130\alpha\beta+130\beta^2-90\gamma+90\alpha\gamma+168\beta\gamma+90\gamma^2\leq 0\&\&\right.$
$\left.\alpha\leq 0\&\&\beta\geq 0\&\&\gamma\geq 0\&\&1-\alpha-\beta-\gamma\geq 0,\{\alpha,\beta,\gamma\}\right],$ **WorkingPrecision** $\to 18]$

0.166759552069783179

单位球体积：

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{Boole}\left[x^2+y^2+z^2-1<0\right]dzdydx=\frac{4\pi}{3}$$

球面三棱锥的准确体积是：

$$V=\frac{1}{3}\arctan\frac{744}{817}=0.246222$$

(**Volume** [**ImplicitRegion** $\left[-130\alpha+65\alpha^2-130\beta+130\alpha\beta+130\beta^2-90\gamma+90\alpha\gamma+168\beta\gamma+90\gamma^2\leq 0\&\&\right.$
$\left.\alpha\leq 0\&\&\beta\geq 0\&\&\gamma\geq 0\&\&1-\alpha-\beta-\gamma\geq 0,\{\alpha,\beta,\gamma\}\right],$ **WorkingPrecision** $\to 18]+\frac{1}{6})*6*$
Volume [**Simplex** $\left[\{\{0,0,0\},\{1,0,0\},\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\},\{0,\frac{5}{13},\frac{12}{13}\}\}\right]]$

0.246222438451532194

$N\left[\frac{1}{3}\mathbf{ArcTan}\left[\frac{744}{817}\right],18\right]$

0.246222438449083726

体积计算。

$$V=6V_{ABCD}\iiint_{\Omega}d\beta d\gamma d\delta=\frac{2}{3}\arctan\frac{12}{31}$$

$$\Omega:-65+65\beta^2+78\beta\gamma+65\gamma^2+40\gamma\delta+65\delta^2<0,0<\beta<1,0<\gamma<1,0<\delta<1$$

6.11.3　四面体的最小体积外接椭球

根据二次曲面的体积公式，四面体的最小体积外接椭球，其中心是四面体的重心。
其体积为：$V_{min}=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi V_{ABCD}$
其重心坐标方程为：

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta=0$$

6.11.4 四面体的最大体积内切椭球

根据二次曲面的体积公式, 四面体的最大体积内切椭球, 其中心是四面体的重心。
其体积为: $V_{max} = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi V_{XYZW} = \frac{\pi}{36\sqrt{3}} V_{ABCD}$

6.12 二次曲面拟合

举一个示例就 OK！柱面的情形吧！

第七章　一般有理曲面

本章简要介绍一般有理曲线和曲面的有理参数表示, 而不介绍它们的几何性质, 感兴趣的读者可参阅相关文献资料。

7.1　有理化的条件

Cayley—Riemann 定理: n 次代数曲线/曲面可参数有理化的充要条件是曲线/曲面的亏格为 0。

亏格计算软件：singular

在线计算亏格的网站：https://www.singular.uni-kl.de:8003/

计算示例: $LIB"normal.lib"; ring r = 0,(x,y),dp; ideal i = 2*y^3-5*x^2*y^2+4*(x^4-9*x)*y-x^6+20*x^3-108; genus(i);$

三次曲线若不可有理化，那么根据 Mordell-Weil 定理，椭圆曲线上的有理点构成的群是有限生成的，但不一定是有限的。

Faltings 定理 (Mordell 猜想)：亏格大于 1 的代数曲线只有有限个有理点。

Mordell(1950). 椭圆曲线上的有理点组成一个有限生成的交换子群。即从有限个有理点出发，通过 +，-运算可求出所有有理点。

Faltings(1986). 亏格 $g > 1$ 的曲线上最多只有有限个有理点。

曲线的双有理不变量——亏格——正是与有理点多寡相关的最重要的基本量。

参数有理化的表示计算可见于论文 Rational Parametrizations of Algebraic Curves using a Canonical Divisor (MARK VAN HOEIJ, 1996)

7.2　有理表示的结论

猜想可能已被证明，见 Rational algebraic curves A computer algebra approach by Sendra J.R., Winkler F., Perez-Diaz S.

猜想 1: 有理曲线/曲面的最低阶有理表示之间是双有理映射的。

猜想 2: 直纹有理曲面的最低阶有理表示与其最低阶直线族参数有理表示之间是双有理映射的。

猜想 3: 有理曲线/曲面的任一有理表示，总是其最低阶有理表示的一个有理映射。

7.3　高次有理曲线

7.3.1　高次曲线有理化

1. $x^6+3x^4y^2-4x^2y^2+3x^2y^4+y^6=0$ 可用参数表示为:

$x=\frac{35721-2844072t+6914160t^2+151338240t^3-297826560t^4-2104338432t^5+2144374784t^6}{125\sqrt{2}(729-5832t+81648t^2-366336t^3+2467584t^4-5326848t^5+20123648t^6)}$

$y=\frac{-5103+795096t-32017680t^2+70606080t^3+804314880t^4-1619994624t^5+778047488t^6}{125\sqrt{2}(729-5832t+81648t^2-366336t^3+2467584t^4-5326848t^5+20123648t^6)}$

2. $-2x^4+8x^3y+5x^3-17x^2y^2-2x^2+8xy^3-xy^2+y^4=0$ 可用参数表示为

$x=\frac{81(t-1)^2t^2}{101t^4+98t^3-339t^2-460t+200}$

$y=-\frac{9(t-5)(t+4)(t-1)t}{101t^4+98t^3-339t^2-460t+200}$

7.4　高次有理曲面

7.4.1　一般二次型

同二次曲面参数化类似,

例如:

1.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{w^2}{d^2}=1$$

的一个有理化表示为

$$x=a\frac{2u}{1+u^2+v^2+s^2},\quad y=b\frac{2v}{1+u^2+v^2+s^2},\quad z=c\frac{2s}{1+u^2+v^2+s^2},\quad w=d\frac{1-u^2-v^2-s^2}{1+u^2+v^2+s^2}$$

2.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$$

的一个有理化表示为

$$x=a\frac{1+s^2-u^2-v^2}{1-s^2+u^2+v^2},\quad y=b\frac{2u}{1-s^2+u^2+v^2},\quad z=c\frac{2v}{1-s^2+u^2+v^2},\quad w=d\frac{2s}{1-s^2+u^2+v^2}$$

3.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$$

的一个有理化表示为

$$x=a\frac{1+s^2+u^2-v^2}{1-s^2-u^2+v^2},\quad y=b\frac{2u}{1-s^2-u^2+v^2},\quad z=c\frac{2v}{1-s^2-u^2+v^2},\quad w=d\frac{2s}{1-s^2-u^2+v^2}$$

4.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$$

的一个有理化表示为

$$x=a\frac{1+s^2+u^2+v^2}{1-s^2-u^2-v^2},\quad y=b\frac{2u}{1-s^2-u^2-v^2},\quad z=c\frac{2v}{1-s^2-u^2-v^2},\quad w=d\frac{2s}{1-s^2-u^2-v^2}$$

7.4.2 费马曲面

著名的费马三次曲面 $x^3+y^3+z^3=1$ 的一个有理表示为:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{3t-\frac{1}{3}(s^2+st+t^2)^2}{t(s^2+st+t^2)-3}\\
y &= \frac{3s+3t+\frac{1}{3}(s^2+st+t^2)^2}{t(s^2+st+t^2)-3}\\
z &= \frac{-3-(s^2+st+t^2)(s+t)}{t(s^2+st+t^2)-3}
\end{aligned}$$

7.5 方程组

例如：对方程组 $\begin{cases} x^2-y^3=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 的参数化程序为

$B := mkImplAlgSet([x^2-y^3, z+y+x], [x,y,z]); Bpara := toPara(B);$

可得到参数表示: $\begin{cases} x=\frac{1+3t+3t^2+t^3}{-1+3t-3t^2+t^3} \\ y=\frac{1+2t+t^2}{1-2t+t^2} \\ z=-\frac{2t(1+2t+t^2)}{-1+3t-3t^2+t^3} \end{cases}$

7.6 CASA 系统

$CASA$ 是一套以 Mapple 为基础的代数系统，可实现参数化。

详细介绍可见于: https://www3.risc.jku.at/software/casa/QuickCasaTour.html

下载页面: https://www3.risc.jku.at/software/casa/download/

第八章　基于重心坐标的拟合

删除本章

8.1　平面直线的拟合

设平面上有某条直线的 n 个测量点 $P_i=(x_i,y_i,z_i)$, 我们从测量点中选取 2 点 A,B 作为基准点，并选取平面上的另一定点 C(不与 A,B 共线且远离测量点所在直线, 一般考虑到平面的各向同性，可选取与 A,B 构成正三角形的点), 与 A,B 相近的 2 个直线上的点记为 $\overline{A},\overline{B}$。

记 $V=\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^T$, $\overline{V}=\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} & C \end{pmatrix}^T$,

因 A,B 与 $\overline{A},\overline{B}$ 是贴近的，所以可令 $V=(I+E)\,\overline{V}$,

其中 I 为单位矩阵, $E=\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

各元素 $\varepsilon_{ij}\to 0$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}=0\,(i=1,2)$

平面上的点可表示为 A,B,C 的重心坐标形式：$P=\alpha A+\beta B+\gamma C,(\alpha+\beta+\gamma=1)$

记号 $g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^T$，即有：$P=g^TV=g^T\,(I+E)\,\overline{V}=(g')^T\,\overline{V}$,

其中 $g'=\left(I+E^T\right)g=\begin{pmatrix} \alpha+\alpha\varepsilon_{11}+\beta\varepsilon_{21} \\ \beta+\alpha\varepsilon_{12}+\beta\varepsilon_{22} \\ \gamma+\alpha\varepsilon_{13}+\beta\varepsilon_{23} \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} \end{pmatrix}$

若点 P 在直线 l 上，则应有 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=1$

对于测量点 P_i，记它关于 A,B,C 的重心坐标为 $g_i=\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \end{pmatrix}^T$,

测量点到直线 l 的仿射误差函数即可定义为:

$S_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\alpha_i+\alpha_i\varepsilon_{11}+\beta_i\varepsilon_{21}+\beta_i+\alpha_i\varepsilon_{12}+\beta_i\varepsilon_{22}-1\right)^2$

另一方面, 我们还希望测量点关于 $\overline{A},\overline{B},C$ 的重心坐标与关于 A,B,C 的重心坐标偏差不大，因此又可定义重心坐标误差函数:

$S_2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\alpha_i},\overline{\beta_i},\overline{\gamma_i}\right)-(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\right|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\varepsilon_{11}+\beta_i\varepsilon_{21}\right)^2+\left(\alpha_i\varepsilon_{12}+\beta_i\varepsilon_{22}\right)^2+\left(\alpha_i\varepsilon_{13}+\beta_i\varepsilon_{23}\right)^2$

根据 S_1 与 S_2 的重要性，我们可以有不同的求解结果。

若优先拟合直线，即先求 S_1 的极值条件，再求 S_2 的极值条件，则计算可得：

$$\left\{\begin{aligned} e_{11}=e_{12}&=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}{\beta_i}^2\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_i-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_i}{2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}{\alpha_i}^2\sum\limits_{i=1}^{n}{\beta_i}^2-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)} \\ e_{21}=e_{22}&=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}{\alpha_i}^2\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_i-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_i}{2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}{\alpha_i}^2\sum\limits_{i=1}^{n}{\beta_i}^2-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)} \end{aligned}\right.$$

拟合直线为 $2e_{11}\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}+2e_{22}\det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x & y & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$

记点 (x,y) 为 P, S_{ABP} 表示三角形 ABP 的有向面积，上式又可写作：

$$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_i-\sum\limits_{i=1}^{n}{\beta_i}^2\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_i\right)S_{PBC}+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_i-\sum\limits_{i=1}^{n}{\alpha_i}^2\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_i\right)S_{APC}+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}{\alpha_i}^2\sum\limits_{i=1}^{n}{\beta_i}^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2\right)S_{ABP}$$

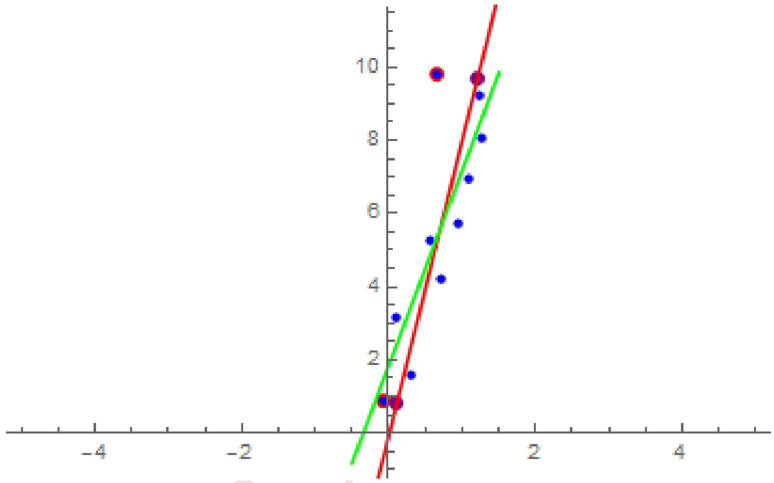
0

例如：给定平面上的 10 个点 (-0.06, 0.86), (0.32, 1.61), (0.09, 3.16), (0.71, 4.22), (0.56, 5.26), (0.94, 5.75), (1.08, 6.95), (1.28, 8.03), (1.25, 9.23), (0.66, 9.79),

我们取第 1 个点 $A:(-0.06,0.86)$ 和第 10 个点 $B:(0.66,9.79)$，这两个点位于两端，相隔较远，可以使得各点的重心坐标在一个较适当的范围内，避免个别值太大影响拟合效果。

再选取与这两点构成正三角形的点 $C:(-8.92,6.81)$ 作为基准点，由此求得拟合直线方程：$y=-0.08+8.07x$(红色线)，绿色线为传统最小二乘法拟合的直线: $y=1.85+5.33x$。

另外我们还可得到对应的校准基准点: $\overline{A}=(0.11,0.83)$, $\overline{B}=(1.21,9.70)$，若再以校准基准点重新拟合，还可稍微提高拟合效果。



如果使用多目标优化的组合求解方式, 即以 $\omega_1 S_1+\omega_2 S_2$ 作为优化目标, 则可得到另外不同的结果 (一般情况下差异比较细微)。

另外, 基准点的选取也会影响到拟合结果，但只要基准点在一个合理的范围内 (基准点靠近测量点, 三角形的形状接近正三角形且不太小)，那么所得拟合直线也是相差甚微的。以上为例，取基准点 $A:(0,0),B:(2,10),C:(-7.66,6.73)$, 拟合直线为：$y=-0.08+8.06x$

如果基准点的地位不是平等的，我们还可以定义加权的重心坐标误差函数：

$$S_2=\sum_{i=1}^{n}\omega_1(\alpha_i\varepsilon_{11}+\beta_i\varepsilon_{21})^2+\omega_2(\alpha_i\varepsilon_{12}+\beta_i\varepsilon_{22})^2+\omega_3(\alpha_i\varepsilon_{13}+\beta_i\varepsilon_{23})^2$$

这相当于对重心坐标进行了缩放，与改变基准点的位置是等效的。

8.1.1 已知直线斜率的拟合

例如：已知直线 l 的形式为 $y=x+b$.

此时直线 l 上的基准点 $\overline{A},\overline{B}$ 须取特定的形式：$\overline{A}=(p,p+b)$, $\overline{B}=(q,q+b)$,

代入方程 $V=(I+E)\overline{V}$ 后，有：

$$\begin{cases} x_A=(1+\varepsilon_{11})\,p+\varepsilon_{12}q+\varepsilon_{13}x_C \\ x_B=\varepsilon_{21}p+(1+\varepsilon_{22})\,q+\varepsilon_{23}x_C \\ y_A=(1+\varepsilon_{11})\,(p+b)+\varepsilon_{12}\,(q+b)+\varepsilon_{13}y_C \\ y_B=\varepsilon_{21}\,(p+b)+(1+\varepsilon_{22})\,(q+b)+\varepsilon_{23}y_C \end{cases}$$

消去参数 p,q,b 后得到限定方程：$(1+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22})\,(y_A-x_A)=(1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12})\,(y_B-x_B)$

8.1.2 x 值测量精准时的拟合

假定关于 x 的测量是无偏差的，那么应有：$x_{\overline{A}}=x_A,x_{\overline{B}}=x_B$，

由此得到限定方程：$\begin{cases} \varepsilon_{11}x_A+\varepsilon_{12}x_B+\varepsilon_{13}x_C=0 \\ \varepsilon_{21}x_A+\varepsilon_{22}x_B+\varepsilon_{23}x_C=0 \end{cases}$

仿射参数表示的曲线/曲面的拟合与直角坐标表示的曲线/曲面的拟合，这两种拟合方式是不一样的！

8.2　平面二次曲线的拟合

由二次曲线一章，过三点 A, B, C 的二次曲线上的点 P 可表示为：$P = \frac{tA+\lambda(1-t)B+\mu t(1-t)C}{t+\lambda(1-t)+\mu t(1-t)}$

写作重心坐标方程即有：令 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$, 则

$\lambda\alpha(1-\alpha) + \beta(1-\beta) - (1+\lambda+\mu)\alpha\beta = 0$,

又可简化为 $\alpha(1-\alpha) + p\alpha\beta + q\beta(1-\beta) = 0$ 的形式。

由此我们可以给出一般二次曲线的仿射拟合。

对于给定的某条二次曲线的 n 个测量点 P_i, 可以取其中的三个点 A, B, C, 设与这三点靠近的二次曲线上的点为 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$,

记 $V = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^T, \overline{V} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} & \overline{C} \end{pmatrix}^T$, 那么可令 $V = (I+E)\overline{V}$,

其中 I 为单位矩阵，$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$, E 的各元素 $e_{ij} \to 0$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{3} e_{ij} = 0, (i = 1,2,3)$

这样对于该条二次曲线的点 P，若 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C = \overline{\alpha}\,\overline{A} + \overline{\beta}\,\overline{B} + \overline{\gamma}\,\overline{C}$,

记 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^T, \overline{g} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} & \overline{\gamma} \end{pmatrix}^T$,

则 $P = g^T V = g^T (I+E)\overline{V} = \left(\overline{g}\right)^T \overline{V}$

于是 $\overline{g} = \left(I + E^T\right) g$

也即 $\begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & 1+e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & 1+e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + e_{11}\alpha + e_{21}\beta + e_{31}\gamma \\ \beta + e_{12}\alpha + e_{22}\beta + e_{32}\gamma \\ \gamma + e_{13}\alpha + e_{23}\beta + e_{33}\gamma \end{pmatrix}$

将其代入二次曲线的方程即有：

$(\alpha + e_{11}\alpha + e_{21}\beta + e_{31}\gamma)(1 - \alpha - e_{11}\alpha - e_{21}\beta - e_{31}\gamma) + p(\alpha + e_{11}\alpha + e_{21}\beta + e_{31}\gamma)(\beta + e_{12}\alpha + e_{22}\beta + e_{32}\gamma) + q(\beta + e_{12}\alpha + e_{22}$

0

对于各测量点 $P_i = \overline{\alpha_i}\,\overline{A} + \overline{\beta_i}\,\overline{B} + \overline{\gamma_i}\,\overline{C} = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C$,

即有：$\begin{cases} \overline{\alpha_i} = \alpha_i + e_{11}\alpha_i + e_{21}\beta_i + e_{31}\gamma_i \\ \overline{\beta_i} = \beta_i + e_{12}\alpha_i + e_{22}\beta_i + e_{32}\gamma_i \end{cases}$

由此我们可定义仿射拟合曲线的误差：

$S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\overline{\alpha_i}(1-\overline{\alpha_i}) + p\,\overline{\alpha_i}\,\overline{\beta_i} + q\,\overline{\beta_i}\left(1-\overline{\beta_i}\right)\right)^2$

另一方面，我们希望 $\left(\overline{\alpha_i}, \overline{\beta_i}, \overline{\gamma_i}\right)$ 尽可能与 $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ 接近，因此又可定义仿射坐标误差：

$S_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\left(\overline{\alpha_i}, \overline{\beta_i}, \overline{\gamma_i}\right) - (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (e_{11}\alpha_i + e_{21}\beta_i + e_{31}\gamma_i)^2 + (e_{12}\alpha_i + e_{22}\beta_i + e_{32}\gamma_i)^2 + (e_{13}\alpha_i + e_{23}\beta_i + e_{33}\gamma_i)^2$

如果三点 A, B, C 不构成正三角形，那么需要进行修正：

取 A, B, C 的最大边长，假设为 BC 边，取与 A 同侧的一点 A'，使 A', B, C 构成正三角形。则对平面上的任意一点 P，由 $P = \alpha' A' + \beta' B + \gamma' C = \alpha A + \beta B + \gamma C$，可求得 $(\alpha', \beta', \gamma')$ 为关于 (α, β, γ) 的线性表达式，由此仿射误差为：

$S_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta\alpha')^2 + (\Delta\beta')^2 + (\Delta\gamma')^2$

例如：若 $A = (0,1), B = (0,0), C = (2,0)$, 则取 BC 为边，向上作正三角形，得到点 $A' = \left(1, \sqrt{3}\right)$

令 $P = \alpha' A' + \beta' B + \gamma' C = \alpha A + \beta B + \gamma C$

可求得 $\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \beta' = \frac{6-\sqrt{3}}{6}\alpha + \beta, \gamma' = -\frac{\sqrt{3}\alpha}{6} + \gamma$,

$\Delta\alpha' = \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{3}}, \Delta\beta' = \frac{6-\sqrt{3}}{6}\Delta\alpha + \Delta\beta, \Delta\gamma' = -\frac{\sqrt{3}\Delta\alpha}{6} + \Delta\gamma$

于是可定义误差函数

$S_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{e_{11}\alpha_i + e_{21}\beta_i + e_{31}\gamma_i}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{6-\sqrt{3}}{6}(e_{11}\alpha_i + e_{21}\beta_i + e_{31}\gamma_i) + (e_{12}\alpha_i + e_{22}\beta_i + e_{32}\gamma_i)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}(e_{11}\alpha_i + e_{21}\beta_i + e_{31}\gamma_i) + (e\right.$

最后根据 S_1 与 S_2 的重要性，加权求最小值即可。

8.2.1　圆的拟合

圆的拟合很有意思：

从测量点中任取不共线的三点 A, B, C, 设其对应的圆上的点为 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

可令 $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+e_{11} & e_{12} & -e_{11}-e_{12} \\ e_{21} & 1+e_{22} & -e_{21}-e_{22} \\ e_{31} & e_{32} & 1-e_{31}-e_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \\ \overline{C} \end{pmatrix}$

这样，若

$$P=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta} & \overline{\gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{A}\\\overline{B}\\\overline{C}\end{pmatrix}$$

则：$\begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta} & \overline{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+e_{11} & e_{12} & -e_{11}-e_{12}\\ e_{21} & 1+e_{22} & -e_{21}-e_{22}\\ e_{31} & e_{32} & 1-e_{31}-e_{32}\end{pmatrix}$

而经过 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 三点的圆，其仿射方程为：

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,|\,\overline{A}-\overline{B}\,|^2+\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,|\,\overline{B}-\overline{C}\,|^2+\overline{\gamma}\,\overline{\alpha}\,|\,\overline{C}-\overline{A}\,|^2=0$

令仿射误差函数

$S=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\overline{\alpha_i}\,\overline{\beta_i}\,|\,\overline{A}-\overline{B}\,|^2+\overline{\beta_i}\,\overline{\gamma_i}\,|\,\overline{B}-\overline{C}\,|^2+\overline{\gamma_i}\,\overline{\alpha_i}\,|\,\overline{C}-\overline{A}\,|^2\right)^2$

(注：如果使用 $\overline{\alpha}\,\overline{\beta}+\lambda\overline{\beta}\,\overline{\gamma}+\mu\overline{\gamma}\,\overline{\alpha}=0$ 作为误差函数，则不能得到正确结果，因为基准点可取无穷大，各点关于基准点的坐标恒为定值，此时误差趋于 0。

距离 AB 平方的存在使得误差在欧式距离下保持稳定！)

将

$$\begin{pmatrix}\overline{A}\\\overline{B}\\\overline{C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+e_{11} & e_{12} & -e_{11}-e_{12}\\ e_{21} & 1+e_{22} & -e_{21}-e_{22}\\ e_{31} & e_{32} & 1-e_{31}-e_{32}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$$

及前面的式子代入,然后对 $e_{11},e_{12},e_{21},e_{22},e_{31},e_{32}$ 求极值,最终可得到与直角坐标方式 ($S'=\sum\limits_{i=1}^{n}\left({x_i}^2+{y_i}^2+ax_i+by_i+c\right)^2$) 相同的结果。

这也容易理解，因为都是容许各向同性。

但若假定 A,B,C 的 x 测量是完全准确的,那么就需要加上三个限定方程:

$$\begin{cases}x_A=(1+e_{11})\,x_A+e_{12}x_B-(e_{11}+e_{12})\,x_C\\ x_B=e_{21}x_A+(1+e_{22})\,x_B-(e_{21}+e_{22})\,x_C\\ x_C=e_{31}x_A+e_{32}x_B+(1-e_{31}-e_{32})\,x_C\end{cases}$$

此时求得的结果就不一样了。

如果假定 A,B,C 中的两点或一点的 x 或 y 测量是准确的，可得到另外的结果。这也是传统方法难以处理的情形。这说明仿射拟合法是更适用的。

一般二次曲线/二次曲面的仿射拟合均应考虑加入距离的平方，这是欧式空间决定的。球面的拟合同圆的拟合类似，用重心坐标的距离方程即可:

$OP^2=\alpha OA^2+\beta OB^2+\gamma OC^2+\delta OD^2-\left(\alpha\beta AB^2+\alpha\gamma AC^2+\alpha\delta AD^2+\beta\gamma BC^2+\beta\delta BD^2+\gamma\delta CD^2\right)$

O 为球心时即成为：

$\alpha\beta AB^2+\alpha\gamma AC^2+\alpha\delta AD^2+\beta\gamma BC^2+\beta\delta BD^2+\gamma\delta CD^2=0$

8.2.2　抛物线的拟合

8.2.3　$y=ax^2+b$ 的拟合

来源：传统最小二乘法曲线拟合的缺陷及其改进 $https://wenku.baidu.com/view/323f6b2a0066f5335a8121e9.html$

已知抛物线的形式为：$y=ax^2+b$, 及 4 个测量点 (1.0, 3.8), (2.5, 15), (3.5, 26.0), (4.0, 33.0)，求拟合曲线。

传统的最小二乘法拟合结果为：$y=2.27+1.93x^2$, 改进的最小二乘法拟合结果为: $y=1.79+2x^2$

可以按照已知重心坐标方程的步骤来求解，但这样做会导致复杂性，主要的困难在于直角坐标到重心坐标的逆变换, 因此我们需要逆向进行：

取测量点 $A:(1.0,3.8),B(2.5,15),C(4.0,33.0)$ 为基准点, 对应曲线上三个真实点 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$, 则：

$$\begin{pmatrix}\overline{A}\\\overline{B}\\\overline{C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+e_{11} & e_{12} & e_{13}\\ e_{21} & 1+e_{22} & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & 1+e_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$$

于是由 $P=\begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta} & \overline{\gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{A}\\\overline{B}\\\overline{C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$

可得：$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} & \overline{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 1+e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 1+e_{33} \end{pmatrix}$

再由 $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ 得到

$\begin{cases} x = \alpha + \frac{5}{2}\beta + 4\gamma = \frac{1}{2}(8 - 6\eta_{31} - 3\eta_{32}) - \frac{3}{2}\overline{\alpha}(2 + 2\eta_{11} + \eta_{12} - 2\eta_{31} - \eta_{32}) - \frac{3}{2}\overline{\beta}(1 + 2\eta_{21} + \eta_{22} - 2\eta_{31} - \eta_{32}) \\ y = \frac{19}{5}\alpha + 15\beta + 33\gamma = \frac{1}{5}(165 - 146\eta_{31} - 90\eta_{32}) - \frac{2}{5}\overline{\alpha}(73 + 73\eta_{11} + 45\eta_{12} - 73\eta_{31} - 45\eta_{32}) - \frac{2}{5}\overline{\beta}(45 + 73\eta_{21} + 45\eta_{22} - 73\eta \end{cases}$

将其代入 $y = ax^2 + b$ 即得仿射方程：

$f\left(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, a, b, \eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{21}, \eta_{31}, \eta_{31}, \eta_{32}\right) = 0$

J: 曲线拟合误差，R：重心坐标误差, $eq1, eq2, eq3$：基准点在曲线上

$\begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} & \overline{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 1+e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 1+e_{33} \end{pmatrix}^{-1}$

欲使得重心坐标误差误差尽可能小，则应使 R 的系数较大。取：$H = J + 10000000R + \lambda eq_1 + \mu eq_2 + \nu eq_3$

求得 $a = 1.993422, b = 1.893793, e_{11} = 0.037994, e_{12} = -0.061825, e_{21} = -0.113, e_{22} = 0.183654, e_{31} = 0.087961, e_{32} = -0.142937, \lambda = 5.000986, \mu = -8.128162, \nu = 3.071487$

绘图比较 $Show[ListPlot[1.0, 3.8, 2.5, 15, 3.5, 26.0, 4.0, 33.0, PlotStyle- > Red], Plot[1.993422x^2 + 1.893793, 2x^2 + 1.79, x, 0.5, 5 Red, Green], PlotRange- > 0.0, 5.0, 0.0, 33]$

另外一种方式：取两点在曲线上，另一点固定。

8.2.4 一般二次曲线的拟合

令

$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 1+e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 1+e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \\ \overline{C} \end{pmatrix}$

$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 为二次曲线上的真实点，这样对于平面上的任意点

$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 1+e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 1+e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \\ \overline{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} & \overline{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \\ \overline{C} \end{pmatrix}$

而二次曲线关于 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 的重心坐标满足方程：

$\lambda\,\overline{\alpha}\,\overline{\beta} + \mu\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma} + \eta\,\overline{\gamma}\,\overline{\alpha} = 0$

因此可定义所有测量点的仿射误差：$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\,\overline{\alpha_i}\,\overline{\beta_i} + \mu\,\overline{\beta_i}\,\overline{\gamma_i} + \eta\,\overline{\gamma_i}\,\overline{\alpha_i}\right)^2$

一般情况下 λ, μ, η 不同时为 0, 而且它们成比例关系，我们可令 $\lambda^2 + \mu^2 + \eta^2 = 3$,

这样定义目标函数：

$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\,\overline{\alpha_i}\,\overline{\beta_i} + \mu\,\overline{\beta_i}\,\overline{\gamma_i} + \eta\,\overline{\gamma_i}\,\overline{\alpha_i}\right)^2 + k\left(\lambda^2 + \mu^2 + \eta^2 - 3\right)$

写作矩阵形式：

矩阵：

$H = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \eta \\ \lambda & 0 & \mu \\ \eta & \mu & 0 \end{pmatrix}, \overline{V} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1+e_{11} & e_{12} & -e_{11}-e_{12} \\ e_{21} & 1+e_{22} & -e_{21}-e_{22} \\ e_{31} & e_{32} & 1-e_{31}-e_{32} \end{pmatrix}$

方程：

$\left(\overline{V}\right)^T = V^T E \Rightarrow \overline{V} = E^T V$

$\left(\overline{V}\right)^T H\,\overline{V} = 0$

目标：

$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\overline{V_i}\right)^T H\,\overline{V_i}\right)^2 + k\left(\lambda^2 + \mu^2 + \eta^2 - 3\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(V_i{}^T E H E^T V_i\right)^2 + k\left(\lambda^2 + \mu^2 + \eta^2 - 3\right)$

初值：$\{\{e_{11}, 0\}, \{e_{12}, 0\}, \{e_{21}, 0\}, \{e_{22}, 0\}, \{e_{31}, 0\}, \{e_{32}, 0\}, \{\lambda, 1\}, \{\mu, 1\}, \{\eta, 1\}, \{k, 1\}\}$

抛物线拟合示例 1:

In[573]:=

```
(*生成随机圆*)
x0 = 1; y0 = 2; a = 3; b = 6; r=9;  p = 0.10; n=1000;
datas = Table[{x0 + a * k / n + RandomReal[{-p, p}],
y0 + b * (k/n)^2+RandomReal[{-p,p}]},{k,1,n}];
figure1 = ListPlot[datas, PlotRange->{{x0 - a - p - 2, x0 + a + p + 2},
{y0 - b - p - 2,y0 + b + p + 2}}, AspectRatio->1];
(*选取三个基本点*)
A=datas[[1]];B=datas[[Floor[n/2]]];Z=datas[[Floor[n]]];
figure2 = ListPlot[{A,B,Z},PlotStyle->{Red,PointSize[Medium]}];
(*求各点的重心坐标*)
α[{x_,y_}]:=Det[({{x, y, 1},{B[[1]], B[[2]], 1},{Z[[1]], Z[[2]], 1}})]/
Det[({{A[[1]], A[[2]], 1},{B[[1]], B[[2]], 1},{Z[[1]], Z[[2]], 1}})]
β[{x_,y_}]:=Det[({{A[[1]], A[[2]], 1},{x, y, 1},{Z[[1]], Z[[2]], 1}})]/
Det[({{A[[1]], A[[2]], 1},{B[[1]], B[[2]], 1},{Z[[1]], Z[[2]], 1}})]
γ[{x_,y_}]:=Det[({{A[[1]], A[[2]], 1},{B[[1]], B[[2]], 1},{x, y, 1}})]/
Det[({{A[[1]], A[[2]], 1},{B[[1]], B[[2]], 1},{Z[[1]], Z[[2]], 1}})]
g=Transpose[{α/@datas,β/@datas,γ/@datas}];
(*定义矩阵, T: 基准测试点到基准真实点的矩阵, H: 仿射方程系数矩阵: V.H.V^T=0*)
```

$$T=\begin{pmatrix} 1+e11 & e12 & -e11-e12 \\ e21 & 1+e22 & -e21-e22 \\ e31 & e32 & 1-e31-e32 \end{pmatrix};\ H=\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \eta \\ \lambda & 0 & \mu \\ \eta & \mu & 0 \end{pmatrix};\ V=(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma);$$

```
inv=Inverse[T];
rep = {x1->A[[1]],x2->B[[1]],x3->Z[[1]],y1->A[[2]],y2->B[[2]],y3->Z[[2]]};
X = Flatten[inv.Transpose[{{x1, x2, x3}}]];
Y = Flatten[inv.Transpose[{{y1, y2, y3}}]];
STriangle = Det[Transpose[{X,Y,{1,1,1}}]]//Factor;
STriangle = (STriangle/(-x2 y1+x3 y1+x1 y2-x3 y2-x1 y3+x2 y3))//Factor;
FSEQS = Flatten[Factor[V.T.H.Transpose[T].Transpose[V]]][[1]];
funcS[{u_,v_,w_}]:= (FSEQS/.{α->u,β->v,γ->w})^2;
S = Total[funcS/@g]//Factor;
S = S+ξ*(λ^2+μ^2+η^2-3);
root = FindRoot[{D[S, e11], D[S,e12], D[S,e13],D[S, e21], D[S,e22], D[S,e23],
D[S,λ], D[S,μ], D[S,η], D[S,ξ]},{{e11,0}, {e12,0},{e21,0},{e22,0},
{e31,0},{e32,0},{λ,1},{μ,1},{η,1},{ξ,1}},AccuracyGoal->Infinity,PrecisionGoal→50];
Print["root = ", root, "\tloss=", S/.root];
P = Transpose[({Flatten[X],Flatten[Y]}/.root)/.rep];
PA = P[[1]]; PB = P[[2]]; PC =P[[3]];
ga = Det[({{x, y, 1},{PB[[1]], PB[[2]], 1},{PC[[1]], PC[[2]], 1}})]/
Det[({{PA[[1]], PA[[2]], 1},{PB[[1]], PB[[2]], 1},{PC[[1]], PC[[2]], 1}})];
gb = Det[({{PA[[1]], PA[[2]], 1},{x, y, 1},{PC[[1]], PC[[2]], 1}})]/
Det[({{PA[[1]], PA[[2]], 1},{PB[[1]], PB[[2]], 1},{PC[[1]], PC[[2]], 1}})];
gc = Det[({{PA[[1]], PA[[2]], 1},{PB[[1]], PB[[2]], 1},{x, y, 1}})]/
Det[({{PA[[1]], PA[[2]], 1},{PB[[1]], PB[[2]], 1},{PC[[1]], PC[[2]], 1}})];
fitres = Factor[Flatten[(ga * gb * λ + gb * gc * μ + ga * gc * η)/.root]]//Numerator;
fitres = Expand[Factor[fitres / Coefficient[fitres, x^2]]];
centerp ={x,y}/.Solve[{D[fitres, x]==0, D[fitres, y]==0}, {x,y}]//Flatten;
fitr = Sqrt[-fitres/.{x->centerp[[1]], y->centerp[[2]]}];
Print["拟合中心: ", centerp, "\t拟合半径a: ", fitr, "\t拟合方程:", fitres];
figure3 = ListPlot[P, PlotStyle->{Red, PointSize[Medium]}, PlotMarkers->{"*"}];
figure4 =ContourPlot[fitres==0, {x, x0 - a - p -2, x0 + a + p + 2},
{y, y0 - b - p - 2,y0 + b + p + 2}];
centero = {x0, y0};
origineq = Expand[(((x-x0)/a)^2-(y-y0)/b)];
```

```
Print["原始中心: ", centero,  "\t原始方程:", N[origineq]];
funcR[{u_,v_}]:=(u^2 + sa * v^2 + sb*u*v + sc*u + sd*v + se)^2;
SR = Total[funcR/@datas];
rootR = FindRoot[{D[SR, sa], D[SR, sb], D[SR, sc], D[SR, sd], D[SR, se]},
{{sa, 1},{sb,1},{sc,1},{sd,1},{se,1}},AccuracyGoal->Infinity,PrecisionGoal→50];
recteq =Expand[ (x^2 + sa * y^2 + sb*x*y + sc*x + sd*y + se)/.Flatten[%]];
Print["loss=", SR/.rootR];
Print["直角拟合: ",  recteq];
Show[figure1, figure2, figure3, figure4]
```

... FindRoot: Failed to converge to the requested accuracy or precision within 100 iterations.

root = {e11 → −0.98197, e12 → 1.51052, e21 → 0.00455615, e22 → 0.146956, e31 → −0.00601716, e32 → 0.70058, λ → 1.37956, μ → 0.0344316, η → 1.04674, ζ → −0.000435226}   loss=0.000776474

拟合中心: {−71.6193, 502.868}   拟合半径a: 26.8114   拟合方程:6.37229 − 1.82078 x + 1. x^2 − 3.14366 y + 0.288464 x y + 0.0236675 y^2

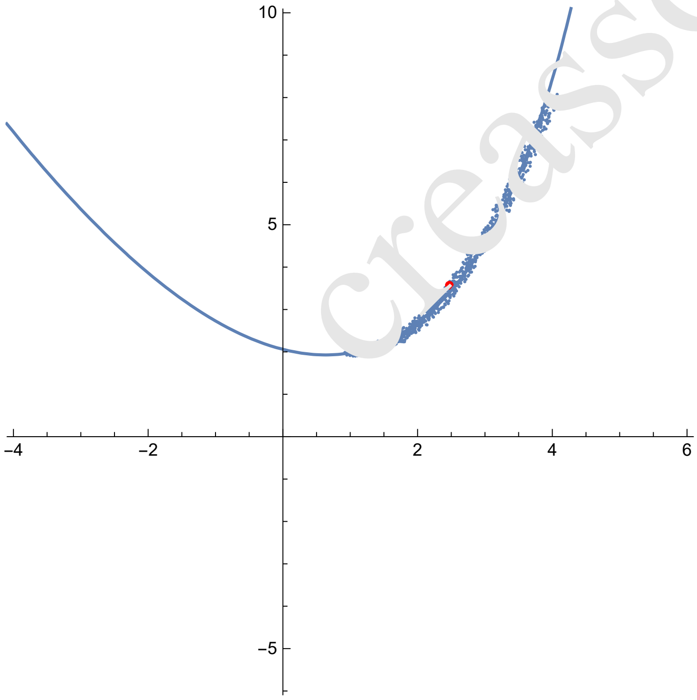
原始中心: {1, 2}   原始方程:0.444444 − 0.222222 x + 0.111111 x^2 − 0.166667 y

... FindRoot: The line search decreased the step size to within tolerance specified by AccuracyGoal and PrecisionGoal but was unable to find a sufficient decrease in the merit function. You may need more than MachinePrecision digits of working precision to meet these tolerances.

loss=2.4415

直角拟合: 0.215881 − 1.0394 x + x^2 + 0.489402 y − 0.954141 x y − 0.228832 y^2

Out[616]=



椭圆拟合示例 2：

In[3589]:=

```
Clear["Global`*"];
(*随机生成点*)
x0 = 0; y0 = 0; ra = 1; rb = 10; rp = 0.2;
datas =
  Table[With[{θ = RandomReal[{0, 2 * π}]}, {x0 + ra * Cos[θ] + RandomReal[{-rp, rp}],
     y0 + rb * Sin[θ] + RandomReal[{-rp, rp}]}], {n, 1000}];
figure1 = ListPlot[datas, PlotStyle -> {PointSize[Small]}, AspectRatio -> 1];
(*任意选取三个测量基准点*)
samples = RandomSample[datas, 3];
QA = samples[[1]]; QB = samples[[2]]; QC = samples[[3]];
figure2 = ListPlot[samples,
   PlotStyle -> {Red, PointSize[Medium]}, AspectRatio -> 1, PlotMarkers → {"●"}];
(*点的重心坐标与直角坐标存在线性关系，并由QA,QB,QC决定各系数的初始值*)
gα = a1 * x + b1 * y + c1;
gβ = a2 * x + b2 * y + c2;
gγ = 1 - gα - gβ;
g = ( gα  gβ  gγ );
params0 = Solve[{ ({gα, gβ} /. {x → QA[[1]], y → QA[[2]]}) == {1, 0},
     ({gα, gβ} /. {x → QB[[1]], y → QB[[2]]}) == {0, 1},
     ({gα, gβ} /. {x → QC[[1]], y → QC[[2]]}) == {0, 0}},
    {a1, b1, c1, a2, b2, c2}] // Flatten;
(*过三点的二次曲线的重心坐标方程，因为λ,μ,ν均不能为0,因此可取λ=1*)
H = ( 0  1  μ
      1  0  ν
      μ  ν  0 );
geq = Flatten[g.H.Transpose[g]][[1]];
(*定义累积误差函数S，并求极小值*)
funcG[{u_, v_}] := (geq /. {x → u, y → v})^2;
S = Total[funcG /@ datas];
(*求μ，ν的初始值*)
initS = Factor[S /. params0];
params1 = FindRoot[{D[initS, μ], D[initS, ν]},
   {{μ, 1}, {ν, 1}}, AccuracyGoal -> Infinity, PrecisionGoal -> 50];
initparams = Union[Transpose[{{a1, b1, c1, a2, b2, c2},
     {a1, b1, c1, a2, b2, c2} /. params0}], Transpose[{{μ, ν}, {μ, ν} /. params1}]];
Print["初始点:", samples, "\t初始系数:", initparams];
(*(*用FindRoot函数求极值点*)
```

```
solve = FindRoot[{D[S, a1], D[S,a2], D[S, b1], D[S,b2], D[S, c1], D[S,c2], D[S,μ],
        求根      偏导      偏导       偏导      偏导       偏导      偏导       偏导
    D[S,ν]}, initparams, AccuracyGoal->Infinity,PrecisionGoal->50];*)
    偏导                  准确度目标    无穷大      精确度指标
(*用FindMinimum求极值点*)
solve = FindMinimum[{S}, initparams][[2]];
        求极小值和其坐标
(*基准点求解*)
gα = (gα /. solve);
gβ = (gβ /. solve);
PA = {x, y} /. Solve[{gα, gβ} == {1, 0}, {x, y}] // Flatten;
               解方程                                  压平
PB = {x, y} /. Solve[{gα, gβ} == {0, 1}, {x, y}] // Flatten;
               解方程                                  压平
PC = {x, y} /. Solve[{gα, gβ} == {0, 0}, {x, y}] // Flatten;
               解方程                                  压平
Print["基准点:", {PA, PB, PC}, "\t求解系数:", solve];
打印
(*得到拟合方程，为便于比较各拟合结果的误差，做系数归一化*)
fitEQ = Factor[geq /. solve];
        因式分解
coefs = Coefficient[fitEQ, {x^2, x*y, y^2}];
        系数
SE = Dot[coefs, coefs];
     点积
fitEQ = Expand[fitEQ / Sqrt[SE]];
        展开           平方根
fixedS = (S /. solve) / SE;
Print["拟合方程:", fitEQ, "\t拟合误差:", fixedS];
打印
figure3 = ListPlot[{PA, PB, PC},
          绘制点集
  PlotStyle -> {Red, PointSize[Medium]}, AspectRatio -> 1, PlotMarkers → {"*"}];
  绘图样式      红色  点的大小   中          宽高比                绘制点的标记
(*绘制真实曲线与拟合曲线*)
range = Transpose[{Min /@ Transpose[datas] - 1, Max /@ Transpose[datas] + 1}];
        转置       最小值 转置                   最大值 转置
```

$$\text{trueEQ} = \left(\frac{(x - x0)\hat{}2}{ra^2} + \frac{(y - y0)\hat{}2}{rb^2} - 1\right);$$

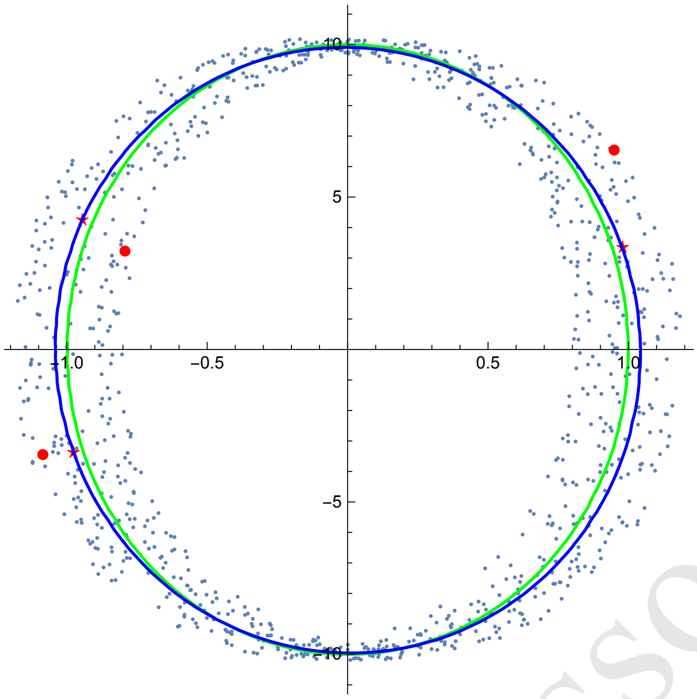
```
figure4 = ContourPlot[trueEQ == 0, {x, range[[1]][[1]], range[[1]][[2]]},
          绘制等高线
  {y, range[[2]][[1]], range[[2]][[2]]}, ContourStyle → {Green}];
                                         等高线样式       绿色
figure5 = ContourPlot[fitEQ == 0, {x, range[[1]][[1]], range[[1]][[2]]},
          绘制等高线
  {y, range[[2]][[1]], range[[2]][[2]]}, ContourStyle → {Blue}];
                                         等高线样式       蓝色
Show[figure1, figure2, figure3, figure4, figure5]
显示
```

初始点:{{-1.08802, -3.42574}, {0.946203, 6.54685}, {-0.795175, 3.24959}}
初始系数:{{a1, 0.309351}, {a2, 0.626282}, {b1, -0.163377}, {b2, -0.0274752}, {c1, 0.776895}, {c2, 0.587287}, {μ, 0.113199}, {ν, 0.718923}}

基准点:{{-0.976692, -3.3793}, {0.978415, 3.33465}, {-0.9456, 4.24278}}
求解系数:{a1 → -0.0618059, a2 → 0.518748, b1 → -0.130946, b2 → -0.00211604, c1 → 0.49713, c2 → 0.499506, μ → 0.147558, ν → 0.852442}

拟合方程:$1.08709 + 0.00167352\,x - 0.999937\,x^2 - 0.00049011\,y - 0.00224815\,x\,y - 0.0110187\,y^2$ 拟合误差:30.3328

Out[3627]=



8.3 空间直线的拟合

空间直线的拟合，是空间曲线的严重退化情形。

可从测量点中选取两个点 A, B，再选取空间中另外两个定点 C, D (可选取以 AB 为一边的正四面体的另两个顶点)。

记 $V = \begin{pmatrix} A & B & C & D \end{pmatrix}^T, \overline{V} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} & C & D \end{pmatrix}^T,$

因为测量点与真实点是贴近的，所以可令 $V^T = (I+E)\,\overline{V}^T$

I 为单位矩阵, $E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 各元素 $\varepsilon_{ij} \to 0$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{4} \varepsilon_{ij} = 0\,(i = 1, 2)$

其余测量点可表示为 A, B, C, D 的重心坐标形式，$P_i = a_i A + b_i B + c_i C + d_i D$,

记号 $g_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \end{pmatrix}^T$, 则由上式有：

$P_i = {g_i}^T V = {g_i}^T (I+E)\,\overline{V} = ({g_i}')^T\,\overline{V},$

其中 ${g_i}' = \left(I + E^T\right) g_i = \begin{pmatrix} a_i + a_i\varepsilon_{11} + b_i\varepsilon_{21} \\ b_i + a_i\varepsilon_{12} + b_i\varepsilon_{22} \\ c_i + a_i\varepsilon_{13} + b_i\varepsilon_{23} \\ d_i + a_i\varepsilon_{14} + b_i\varepsilon_{24} \end{pmatrix}$

对于真实点 $\overline{P_i} = (\overline{g_i})^T\,\overline{V}$, ($\overline{g_i} = \begin{pmatrix} \overline{a_i} & \overline{b_i} & \overline{c_i} & \overline{d_i} \end{pmatrix}^T$)

其仿射方程为：$\overline{a_i} + \overline{b_i} - 1 = 0, \overline{c_i} = 0, \overline{d_i} = 0$

我们希望所有测量点尽可能与直线贴近，因此可以定义直线拟合的仿射误差函数:

$S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + a_i\varepsilon_{11} + b_i\varepsilon_{21} + b_i + a_i\varepsilon_{12} + b_i\varepsilon_{22} - 1)^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} (c_i + a_i\varepsilon_{13} + b_i\varepsilon_{23})^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} (d_i + a_i\varepsilon_{14} + b_i\varepsilon_{24})^2$

由此式并不能唯一地确定真实点的重心坐标，因为可以任意选取直线上的点作为基准点，但我们希望测量点与真实点是接近的，所以可定义测量误差函数：

$S_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i\varepsilon_{11} + b_i\varepsilon_{21})^2 + (a_i\varepsilon_{12} + b_i\varepsilon_{22})^2 + (a_i\varepsilon_{13} + b_i\varepsilon_{23})^2 + (a_i\varepsilon_{14} + b_i\varepsilon_{24})^2$

8.4 空间二次曲线的拟合

与平面直线拟合类似

8.5 空间二次曲面的拟合

二次曲面参数坐标的一般形式：

令 $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & d & 0 & f \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix}$

则 $VHV^T = 2\,(aXY + bXZ + cXW + dYZ + eYW + fZW) = 0$

==

设二次曲面上有 n 个测量点 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, 对应的 n 个真实点为 $Q_i = (\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}), (i = 1, 2, 3, ...n)$

从测量点中选取 4 点 A, B, C, D 作为基准点，对应的 4 个真实点 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$。因为测量点与真实点是贴近的，所以可令

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1+\varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} \\ \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & 1+\varepsilon_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \\ \overline{C} \\ \overline{D} \end{pmatrix} \text{ 其中 } \sum_{j=1}^{4} \varepsilon_{ij} = 1\,(i = 1, 2, 3, 4)$$

其余测量点可表示

$$P_i = (a_i, b_i, c_i, d_i) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = (a_i, b_i, c_i, d_i) \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1+\varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} \\ \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & 1+\varepsilon_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \\ \overline{C} \\ \overline{D} \end{pmatrix} = ({a_i}', {b_i}', {c_i}', {d_i}') \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \\ \overline{C} \\ \overline{D} \end{pmatrix}$$

对于真实点 $\overline{P_i}$, 其仿射方程为：$q\lambda\,\overline{a_i}\,\overline{b_i}+p\mu\,\overline{a_i}\,\overline{c_i}+p\lambda\,\overline{a_i}\,\overline{d_i}+(p+\lambda-\eta)\,\overline{b_i}\,\overline{d_i}+\lambda\,\overline{b_i}\,\overline{d_i}+p\,\overline{c_i}\,\overline{d_i}=0$

写作矩阵形式即为：$\begin{pmatrix}\overline{a_i} & \overline{b_i} & \overline{c_i} & \overline{d_i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & q\lambda & 0 & p\lambda\\ 0 & 0 & p-\eta+\lambda & \lambda\\ p\mu & 0 & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{a_i}\\ \overline{b_i}\\ \overline{c_i}\\ \overline{d_i}\end{pmatrix}=0$

因此我们可定义误差函数：

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(\left({a_i}',{b_i}',{c_i}',{d_i}'\right)\begin{pmatrix}0 & q\lambda & 0 & p\lambda\\ 0 & 0 & p-\eta+\lambda & \lambda\\ p\mu & 0 & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{a_i}'\\ {b_i}'\\ {c_i}'\\ {d_i}'\end{pmatrix}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left((a_i,b_i,c_i,d_i)\begin{pmatrix}1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14}\\ \varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1+\varepsilon_{33} & \varepsilon_{34}\\ \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & 1+\varepsilon_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & q\lambda & 0 & p\lambda\\ 0 & 0 & p-\eta+\lambda & \lambda\\ p\mu & 0 & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon\\ \varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1+\varepsilon_{33} & \varepsilon\\ \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & 1+\end{pmatrix}\right.$$

此误差的主要部分为

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}\left((a_i,b_i,c_i,d_i)\begin{pmatrix}0 & q\lambda & 0 & p\lambda\\ 0 & 0 & p-\eta+\lambda & \lambda\\ p\mu & 0 & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\\ c_i\\ d_i\end{pmatrix}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(q\lambda a_ib_i+p\mu a_ic_i+p\lambda a_id_i+(p+\lambda-\eta)\,b_ic_i+\lambda b_id_i+pc_id_i\right)^2$$

可先以此为优化目标，求出参数 p,q,λ,μ,η。

代入 S 后再求出其余。

==

重新表述如下：

==

设二次曲面上有 n 个测量点 $P_i=(x_i,y_i,z_i)$, 对应的 n 个真实点为 $\overline{P_i}=(\overline{x_i},\overline{y_i},\overline{z_i}),(i=1,2,3,...n)$

从测量点中选取不在同一平面上的 4 点 A,B,C,D 作为基准点，对应的 4 个真实点 $\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}$。

记 $V=\begin{pmatrix}A & B & C & D\end{pmatrix}^T,\overline{V}=\begin{pmatrix}\overline{A} & \overline{B} & \overline{C} & \overline{D}\end{pmatrix}^T,$

因为测量点与真实点是贴近的，所以可令 $V^T=(I+E)\,\overline{V}^T$

I 为单位矩阵, $E=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34}\\ \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & \varepsilon_{44}\end{pmatrix}$, 各元素 $\varepsilon_{ij}\to 0$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{4}\varepsilon_{ij}=0\,(i=1,2,3,4)$

其余测量点可表示为 A,B,C,D 的重心坐标形式，$P_i=a_iA+b_iB+c_iC+d_iD$,

记号 $g_i=\begin{pmatrix}a_i & b_i & c_i & d_i\end{pmatrix}^T$, 则由上式有：$P_i={g_i}^TV={g_i}^T\,(I+E)\,\overline{V}=({g_i}')^T\,\overline{V}$, 其中 ${g_i}'=\left(I+E^T\right)g_i$

对于真实点 $\overline{P_i}=(\overline{g_i})^T\,\overline{V},(\overline{g_i}=\begin{pmatrix}\overline{a_i} & \overline{b_i} & \overline{c_i} & \overline{d_i}\end{pmatrix}^T)$

其仿射方程为：$q\lambda\,\overline{a_i}\,\overline{b_i}+p\mu\,\overline{a_i}\,\overline{c_i}+p\lambda\,\overline{a_i}\,\overline{d_i}+(p+\lambda-\eta)\,\overline{b_i}\,\overline{d_i}+\lambda\,\overline{b_i}\,\overline{d_i}+p\,\overline{c_i}\,\overline{d_i}=0$

可写作矩阵形式：$(\overline{g_i})^T H\,(\overline{g_i})=0$, 其中 $H=\begin{pmatrix}0 & q\lambda & 0 & p\lambda\\ 0 & 0 & p-\eta+\lambda & \lambda\\ p\mu & 0 & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

我们希望所有测量点尽可能与二次曲面贴近，因此可以定义曲面拟合的仿射误差函数

$S_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(({g_i}')^TH\,({g_i}')\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left({g_i}^T\,(I+E)\,H\left(I+E^T\right)g_i\right)^2$

由此式并不能唯一地确定真实点的重心坐标，因为可以任意选取曲面上的点作为基准点。但我们希望测量点与真实点是接近的，因此还可以定义测量误差函数：

$S_2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(({g_i}'-g_i)^T\,({g_i}'-g_i)\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left({g_i}^TEE^Tg_i\right)^2$

由此即可完全地确定各参数之值。理论上来说，拟合的曲面形状与基准测量点的选取无关，但考虑到计算误差的存在，一般我们总是选取相隔较远的基准测量点。

二次曲线的拟合与此类似。

例 1：球面 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$ 的点云数据。对于球面, 参数 $p=2, q=1, \lambda=2, \mu=1, \eta=2$ 为固定。可精确求解！

例 2：圆柱面的点云数据。

一般的仿射拟合：

例 3：平面直线拟合：

设平面上有 n 个测量点 $P_i=(x_i, y_i)$, 对应的 n 个真实点为 $\overline{P_i}=(\overline{x_i}, \overline{y_i}), (i=1,2,3,...n)$

从测量点中选取 2 点 A, B 作为基准点，对应的 2 个真实点 $\overline{A}, \overline{B}$。

因测量点与真实点接近，因此可设 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \end{pmatrix}$

这样 $P_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i+\alpha_i\varepsilon_{11}+\beta_i\varepsilon_{21} & \beta_i+\alpha_i\varepsilon_{12}+\beta_i\varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \end{pmatrix}$

相应的 $\overline{P_i} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_i} & \overline{\beta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \end{pmatrix}$

对于真实点, 仿射方程为：$\overline{\alpha_i}+\overline{\beta_i}-1=0$

因此可定义误差函数:

$S=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i-1+\alpha_i\varepsilon_{11}+\beta_i\varepsilon_{21}+\alpha_i\varepsilon_{12}+\beta_i\varepsilon_{22})^2+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\varepsilon_{11}+\beta_i\varepsilon_{21})^2+(\alpha_i\varepsilon_{12}+\beta_i\varepsilon_{22})^2$

例如: 对于给定的 10 个点数据:

$(0.188847, 1.19711), (0.823606, 2.75233), (1.87973, 4.93649), (3.24075, 7.08719), (4.01789, 8.78967),$

$(4.99725, 10.9162), (5.92202, 12.6263), (6.70731, 14.9703), (7.64877, 16.9244), (8.81696, 18.7441)$

拟合方程为：$y=2.009521x+1.027583$

拟合程序见附件：*images/linefit.py*

例 4：空间直线拟合

例 5：二次曲线拟合: 与二次曲面的类似。

例 6：平面拟合

** 空间二次柱面的拟合：可以求得：

$$\begin{cases} \mu \to qs^2 \\ \lambda \to 1-s+ps-qs+qs^2 \\ \eta \to 1+p-q-s+ps+qs \end{cases}$$

一般曲线的拟合，均可以的。

8.5.1　圆柱面的拟合

同球面一样，圆柱面的重心坐标方程的系数与基准点有关, 这可以由仿射方程，利用重心坐标面积表示式转化为直角坐标方程而得到。

由不变量 $I3=I4=0$, 通过适当参数代换使其自动满足。圆锥面也是一样。

8.6　仿射拟合的缺陷

1. 测量基准点的选取对求解影响很大，因为对非线性方程组，只能用 *Findroot* 命令，非常依赖于初始值的选取。

2. 测量基准点可以选取不是测量点的点，只要选取的点靠近曲面/曲线就行，某些情形下甚至可以远离曲面/曲线时，仍然能准确求出拟合。

3. 任意维度的平面、直线的情形，可以准确求出公式。

4. 可以用直角坐标进行拟合，从所得解中选取初值点，仿射拟合就容易收敛。

5. 可以对初值偏量做一定的限制，例如真实点的 X 值等于测量点的 x 值，但前提是 x 值确实在曲线/曲面容许的范围内。理论上，每一个基准点仅需保留 1 个参数，都能正确拟合。

6. 直角坐标拟合的参数容易全局收敛，而仿射拟合仅在基准点附近收敛，这可能是因为基准点可以选取任意选取的缘故，任意两个基准点相互交换，其拟合结果也是相同的，由此造成相互交叉的区域甚多，施加一定的限制或许有助于改善收敛性。

7. 仿射拟合转换为直角拟合，其参数关系是怎样的。如找到二者的简单关系的话，可以改善仿射拟合的收敛性差的问题。

8.7 二次曲面的拟合简化

选取 4 个测量点 A, B, C, D，再选取空间中的一点 O，假设 O 与测量点的连线与二次曲面的交点为 A', B', C', D', 也即：

$$\begin{cases} A' = t_1 A + (1 - t_1) O \\ B' = t_2 B + (1 - t_2) O \\ C' = t_3 C + (1 - t_3) O \\ D' = t_4 D + (1 - t_4) O \end{cases}$$

对于二次曲面的其余点 P，其重心坐标：

$\alpha = \frac{V_{PB'C'D'}}{V_{A'B'C'D'}}, \beta = \frac{V_{A'PC'D'}}{V_{A'B'C'D'}}, \gamma = \frac{V_{A'B'PD'}}{V_{A'B'C'D'}}, \delta = \frac{V_{A'B'C'P}}{V_{A'B'C'D'}}$

以 $V_{PB'C'D'}$ 的计算为例：

$$\begin{aligned} & 6V_{PB'C'D'} = PB' \times PC'PD' \\ & = (t_2 PB + (1 - t_2) PO) \times (t_3 PC + (1 - t_3) PO) (t_4 PD + (1 - t_4) PO) \\ & = t_2 t_3 t_4 PB \times PCPD + t_2 (1 - t_3) t_4 PB \times POPD + (1 - t_2) t_3 t_4 PO \times PCPD + t_2 t_3 (1 - t_4) PB \times PCPO \\ & = 6 t_2 t_3 t_4 V_{PBCD} + 6 t_2 (1 - t_3) t_4 V_{PBOD} + 6 (1 - t_2) t_3 t_4 V_{POCD} + 6 t_2 t_3 (1 - t_4) V_{PBCO} \end{aligned}$$

也即：$V_{PB'C'D'} = t_2 t_3 t_4 V_{PBCD} + t_2 (1 - t_3) t_4 V_{PBOD} + (1 - t_2) t_3 t_4 V_{POCD} + t_2 t_3 (1 - t_4) V_{PBCO}$

代入二次曲面的仿射方程：$\lambda_1 \alpha\beta + \lambda_2 \alpha\gamma + \lambda_3 \alpha\delta + \lambda_4 \beta\gamma + \lambda_5 \beta\delta + \lambda_6 \gamma\delta = 0$

舍去分母 $V_{A'B'C'D'}$, 则可得到关于 t_1, t_2, t_3, t_4 的多项式方程。

8.8 一般曲线/曲面的拟合

一般 n 元二次型的拟合：

总可以在其上取 $n + 1$ 个点，使得仿射方程为 $g^T H g = 0$, 其中 H 为对角线元素为 0 的对称矩阵。

第九章　计划

1. 曲线与曲面的微分几何
2. 现代几何学
3. 现代极小曲面讲义
4. 代数几何引论
5. 代数几何
6. 代数曲线
7. 微分几何
8. 黎曼几何选讲

第一章　附录

A.1　Mathematica 命令及示例

1. SubresultantPolynomialRemainders 辗转相除
2. Collect
3. FullSimplify
4. Select
5. ComplexExpand
6. Conjugate
7. ReIm, Re, Im
8. Abs
9. PolynomialRemainder
10. PolynomialGCD
11. Factor
12. Numerator, Denominator
13. GroebnerBasis
14. Eliminate
15. Reduce
16. SymmetricReduction 对称约化
17. Exponent
18. Coefficient, CoefficientList
19. MinimalPolynomial 最小多项式
20. ToRadicals 根式转化
21. Put 导出变量到文件 (也可用 Export[,"WDX"])
22. Get 导入变量到文件 (也可用 Import[,"WDX"])
23. Fit 曲线拟合
24. MonomialList 单项式列表 $MonomialList[ax^2 + bxy + cy^2 + d * x + e * y + f, x, y]$
25. $(x == 3)/.Equal- > Subtract$ 等式转换

绘图:

$PA = 0; PB = 1-2I; PC = 2+2*I; p = 1/2; q = -(1/3); Show[ListPlot[ReIm[PA, PB, PC], PlotStyle- > Red], Graphics[Black,$

绘图:

$Show[ListPlot[ReIm[0, 1, A/.A- > -(1/2) + 2I], PlotStyle- > Red], Graphics[Black, Line[ReIm[0, 1, A/.A- > -(1/2) + 2I, 0]]]$

绘图

$Show[ListPlot[0, 0, 1, 1/3, 4/5, 3/2, PlotStyle- > Red], Graphics[Black, Line[ReIm[P, Q, A, P/.P- > 0, Q- > 1 + I/3, A- > 4/5$

A.2　直角坐标系下的二次曲线理论

A.3　曲面的第一、第二基本形式

A.4　多项式理论

参考文献

[Marcel Berger, M. Cole, S. Levy] Geometry I, II

[约翰逊] 近代欧氏几何学

[盖拉特雷] 近代的三角形几何学

[吴悦辰] 三线坐标与三角形特征点

[沈文选] 平面几何证明方法全书

[萧振纲] 几何变换与几何证题

[沈文选, 杨清桃] 几何瑰宝：平面几何 500 名题暨 1000 条定理

[梁绍鸿] 初等数学复习及研究 (平面几何)

[作者] 机器证明：质点法，复数法 (提一下吴文俊、张景中、杨璐、周小山、李涛、彭翕成等)

[张景中, 彭翕成] 绕来绕去的向量法

[李涛, 邹宇, 张景中] 几何定理机器证明复系数质点法的改进及其应用

[Andrea Del Centina] Poncelet’s porism a long story of renewed discoveries

[邱维声] 解析几何

[A. 科克肖特,F.B. 沃尔特斯] 圆锥曲线的几何性质

[作者] 曲线曲面论

[王国瑾] 计算机辅助几何设计

[作者] 多项式理论

[作者] 克利福特代数 (Clifford Algebra)

[作者] 平面三次代数曲线 (陈谷新)

[作者] 曲线有理化

[作者] 提一下纯几何吧, 几何吧, 数学研发论坛, 数学中论坛, AOPS.

[作者] 旋量代数与李群、李代数 by 戴建生 (z-lib.org)

[作者] 俄罗斯平面几何问题集

[作者] 100 个著名初等数学问题

[Janos Kollár, Shigefumi Mori] Birational Geometry of Algebraic Varieties

[Gerd Fischer] Plane Algebraic Curves

[E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris] Geometry of Algebraic Curves

[吕林根, 许子道] 解析几何

[樊益武] 四面体-不等式哈尔滨工业大学出版社 2017.3

[沈文选] 从高维 Pythagoras 定理谈起-单形论漫谈

[何万程, 孙文彩] 立体几何技巧与方法

[波拉索洛夫] 俄罗斯平面几何问题集

[波拉索洛夫] 俄罗斯立体几何问题集

[Josef Schicho] Rational Parametrization of Surfaces

[Sendra J.R., Winkler F., Perez-Diaz S] Rational algebraic curves A computer algebra approach

[G. A. Tsintsifas] The applications of Leibniz’s formula in Geometry

[Paul Yiu] Introduction to the Geometry of the Triangle