

인공지능수학 퀴즈 1

문제 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ 그리고 } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ 라고 하자.}$$

- (a) Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 $Ax = b$ 를 푸시오.
- (b) 벡터 b 를 A 의 column들의 linear combination으로 표현하시오.
- (c) 행렬 A 의 inverse를 구하시오.

문제 2. 두 행렬 A, B 의 곱이 잘 정의된다고 가정하자.

- (a) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ 임을 증명하시오.
- (b) 행렬 A, B 가 가역(invertible)일 때, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 임을 증명하시오.
또한 $((AB)^T)^{-1}$ 를 구하시오.

문제 3. 두 행렬 A, B 가 $AB = BA$ 를 만족할 때, 임의의 행렬 다항식 $f(A), g(B)$ 에 대하여 $f(A)g(B) = g(B)f(A)$ 가 성립함을 증명하시오. (여기서 $f(x)$ 를 다항식이라고 할 때, 행렬 다항식 $f(A)$ 는 x 대신 A 를 넣은 다항식을 의미한다. $g(B)$ 도 마찬가지로 생각하면 된다.)

문제 4. 정방행렬 A 가 $A^4 = O$ 을 만족할 때, $I + A$ 의 역원을 구하시오.

문제 5. 케일리-해밀턴(Cayley-Hamilton) 정리에 의하면 임의의 행렬 A 에 대하여 $f(A) = O$ 를 만족하는 다항식 $f(x)$ 가 존재한다는 것이다. 이 정리를 이용하여 A 의 역원을 어떻게 구할 수 있는지 구체적으로 설명하시오.

문제 6. 0과 1로 이루어진 $n \times n$ 행렬로 각 행과 열에 정확히 하나의 1만 있을 때 이 행렬을 Permutation 행렬 P 라고 한다. $P^k = I$ (단위행렬)을 만족하는 자연수 k 가 존재함을 증명하시오.