# 인공지능수학 개론

(저자 김종락)

(임시적인) 목록


**I. 선형대수와 인공지능**
1. 파이썬 소개: 수식 중심으로
2. 선형대수 기초
2.1 실습
3. 행렬의 연산 및 역행렬
3.1 실습
4. 벡터와 공간, 행렬과 사상
4.1 실습
5. 고윳값, 고유벡터
5.1 실습

**II. 미적분학과 인공지능**
6. 미분과 적분
6.1 실습
7. 편미분과 경사 하강법
7.1 실습

**III. 확률과 통계와 관련된 인공지능**
8. 조건부 확률과 베이즈 정리
8.1 실습
9. 상관분석과 분산 분석
9.1 실습

**IV. 머신러닝과 딥러닝와의 연계**
10. 머신러닝 소개
10.1 실습
11. 딥러닝 소개
11.1 실습

# Chapter 4. 벡터와 공간, 행렬과 사상

벡터는 선형대수에서 행렬만큼 중요한 주제이다. $n$차원 벡터는 보통 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$로 표현된다. 우리가 알고 있는 실수는 1차원 벡터, 평면 위의 좌표는 2차원 벡터, 공간 위의 좌표는 3차원 벡터로 생각할 수 있다. 하나의 데이터 혹은 샘플은 3차원 이상의 성분으로 이루어져 있다. 이때 각 성분을 피쳐(feature)라고도 한다.

벡터들로 이루어진 집합이 벡터의 합과 스칼라 곱에 닫혀있을 때 이 집합 $V$을 **벡터 공간**이라고 한다. 두 개의 벡터 공간 $V, W$가 있을 때 이 두 개를 연결하는 함수를 **선형 변환**(linear transformation)이라고 한다. 이 선형 변환이 행렬로 표현된다는 것은 중요한 사실이다.

이 장에서는 여러 개념들을 소개하고 서로 어떻게 연결되는지 살펴본다.

## ■ 벡터와 벡터공간

● 벡터의 합과 차

$u=(u_1, \ldots, u_n), v=(v_1, \ldots, v_n)$라고 할 때

합은$u+v=(u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)$, 차는 $u-v=(u_1-v_1, \ldots, u_n-v_n)$

로 표현된다.

● 벡터의 스칼라 곱

$\alpha$가 스칼라이고 $u=(u_1, \ldots, u_n)$라고 할 때

스칼라 곱은 $\alpha u=(\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n)$로 표현된다.

● 벡터 공간

$\alpha, \beta$가 스칼라이고, $u, v, w$를 $n$차원 벡터라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$이면, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$이다.

(2) $\alpha \boldsymbol{u} \in V$

(3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(4) $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(5) $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}$인 영벡터 $\mathbf{0}$가 $V$에 단 하나 존재한다.

(6) $V$의 모든 벡터 $\boldsymbol{u}$에 대해,
$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$를 만족하는 $-\boldsymbol{u}$가 존재한다.

(7) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$

(8) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$

(9) $\alpha(\beta\boldsymbol{u})=(\alpha\beta)\boldsymbol{u}$

(10) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

이것을 만족하는 집합을 **벡터공간(vector space)**라고 한다. 이 원소들을 벡터라고 한다.

(1)~(6)을 만족하는 것은?

● 벡터 공간의 예

$R^n$

$R^n$의 부분 공간

$P_n$

$M_{m \times n}(R)$

● 부분 공간의 정의

● 선형결합(linear combination)

● 선형종속(linearly dependent)와 선형독립(linearly independent)

● 예제

● 생성 집합(spanning set)

V=span(S)

● 기저(basis)

● 표준기저(standard basis)

● 정리
벡터공간 V의 기저가 주어져 있을 때, V의 임의의 원소는 기저들의 선형결합으로 유일하게 표현된다.

● 차원(dimension of a vector space)

● 벡터의 크기(norm)

● 벡터의 내적

(1) $\| \boldsymbol{u} \| \geq 0$

(2) $\| \alpha \boldsymbol{u} \| = |\alpha| \, \| \boldsymbol{u} \|$

(3) $\| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \| \leq \| \boldsymbol{u} \| + \| \boldsymbol{v} \|$

(4) $\| \boldsymbol{u} \| = 0$인 경우는 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$일 때뿐이다.

● 내적의 성질

(1) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$

(2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$

(3) $\boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}$

(4) $c(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (c\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (c\boldsymbol{y})$

(5) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$

(6) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$일 때만 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0$이다.

● 내적과 사잇각

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$$

● 코시-슈바르츠 부등식 Cauchy-Schwarz inequality

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

● 삼각부등식 Triangle inequality

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$$

● 직교 orthogonal

$x \cdot y = 0$

■ 실습