Exercice 01 et 04

Loi des Grands Nombres pour une Distribution Uniforme

Dans cet exercice, nous avons illustré la loi des grands nombres (LLN) pour une variable aléatoire X suivant une distribution uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. L'objectif était d'observer comment la moyenne des échantillons converge vers la moyenne théorique attendue.

Méthode

La loi des grands nombres stipule que, à mesure que le nombre d'échantillons n augmente, la moyenne des échantillons converge vers la moyenne théorique de la distribution. La moyenne théorique de la distribution uniforme sur $[0, 1]$ est :

$$\mu = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Nous avons généré des échantillons de tailles croissantes et calculé la moyenne pour chaque taille d'échantillon. Ensuite, nous avons tracé la convergence de la moyenne des échantillons vers la valeur théorique.

Code R Utilisé

Le code R suivant génère des échantillons et trace la convergence de la moyenne des échantillons vers la moyenne théorique :

```
lln_uniforme <- function(n) {
  borne_gauche_intervalle <- 0
  borne_droite_intervalle <- 1
  moyennes <- numeric(n)
  for(i in 1:n) {
    echantillon <- runif(i, borne_gauche_intervalle, borne_droite_intervalle)
    moyennes[i] <- mean(echantillon)
  }
  plot(1:n, moyennes, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
       xlab = "Nombre d'échantillons", ylab = "Moyenne des échantillons",
       main = "Convergence de la moyenne des échantillons vers la moyenne théorique")
  abline(h = (borne_gauche_intervalle + borne_droite_intervalle) / 2, col = "red", lty = 2)
}

lln_uniforme(10000)
```

Résultats

En exécutant ce code, nous avons observé que la moyenne des échantillons converge rapidement vers la moyenne théorique de $\frac{1}{2}$, comme le montre le graphique suivant.

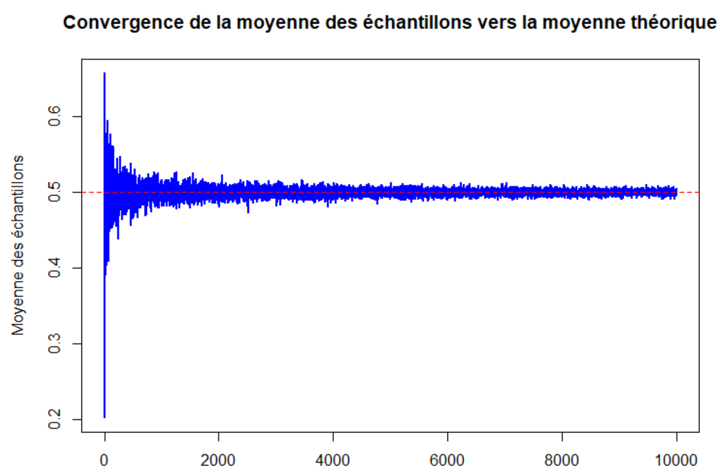

Figure 1: Convergence de la moyenne des échantillons vers la moyenne théorique

Midpoints

Dans cet exercice, nous avons estimé l'intégrale de la fonction $f(x) = x \cdot \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, en utilisant la méthode des *midpoints*. Cette méthode consiste à diviser l'intervalle d'intégration en n sous-intervalles et à approximativement calculer l'aire sous la courbe en utilisant les valeurs de la fonction aux points milieux de chaque sous-intervalle.

L'approximation de l'intégrale de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ peut être obtenue par la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x\right) \cdot \Delta x$$

Où :

- $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ est la largeur de chaque sous-intervalle.
- $x_{\text{mid}} = a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x$ est le point milieu du i-ème sous-intervalle.
- n est le nombre de sous-intervalles choisis.

Code R Utilisé

Le code R suivant illustre l'implémentation de la méthode des *midpoints* :

```
f <- function(x) {
  x * sin(x)
}

b <- pi / 2
a <- 0
integral_sum <- 0
n <- 1000
interval <- (b - a) / n

for(i in 0:999) {
  x_mid <- a + (i + 0.5) * interval
  integral_sum <- integral_sum + f(x_mid) * interval
}
cat("La valeur estimée de l'intégrale est :", integral_sum, "\n")
```

Résultats

L'exécution du code R ci-dessus permet d'estimer la valeur de l'intégrale de la fonction $f(x) = x \cdot \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. La valeur estimée de l'intégrale est affichée comme suit :

La valeur estimée de l'intégrale est : (afficher ici la valeur obtenue par le code)

Cette estimation converge rapidement vers la valeur exacte de l'intégrale au fur et à mesure que le nombre d'intervalles n augmente.

Illustration

Voici une illustration de l'intégrale calculée, où l'aire sous la courbe est approximée par la méthode des *midpoints* :

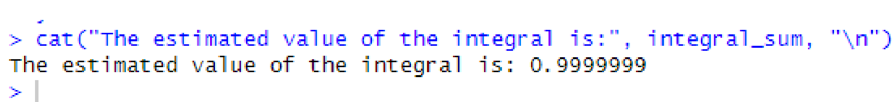
```
> cat("The estimated value of the integral is:", integral_sum, "\n")
The estimated value of the integral is: 0.9999999
>
```

Figure 2: Illustration de l'intégrale de $f(x) = x \cdot \sin(x)$ avec la méthode des *midpoints*