

1 Контрольная (домашняя) работа

При решении рекомендуем опираться на математику и здравый смысл.

1. (3 балла) Пусть загаданы 2 строки s и t длины 100. $s \leq t$ (лексикографически). Обе строки состоят только из 0 и 1. Валя хочет отгадать эти строки. Валя провёл 100 экспериментов и получил 100 новых строк. Опишем 1 независимый эксперимент:
 - 1) Равновероятно выбирается строка $r = s$ или $r = t$.
 - 2) Выбираются ровно 15 различных позиций (каждое сочетание 15 элементов равновероятно).
 - 3) В выбранных позициях в строке r биты инвертируются.
 - 4) Полученную строку берут в качестве результата.Валя утверждает, что вероятность того, что в строке x , в позиции y символ был инвертирован $p = 0.15$. Прав ли он?
2. (3 балла) Допустим, Валя прав. Теперь он считает, что в строке x , позиции y ошибка возникает с вероятностью $p = 0.15$. Рассмотрим 1-ю позицию во всех строках. Если нулей больше, чем 75, то Валя скажет, что s и t начинаются с 0. Если нулей меньше 25, то Валя скажет, что s и t начинаются с 1. Иначе Валя скажет, что s начинается с 0, t с 1, и подумает над чемнибудь ещё. Пусть s и t отличаются в 1-й позиции. Какова вероятность того, что Валя этого не заметит?
3. (3 балла) В урне находятся a белых шаров, которые наугад по одному без возвращения извлекаются из урны до тех пор, пока она не опустеет. Какое событие более вероятно: “первый извлечённый шар - белый”, или “последний извлечённый шар - белый”?
4. (3 балла) Пусть отличник правильно решает задачу с вероятностью 0.95, а двоечник с вероятностью 0.15. Какое минимальное количество задач нужно дать на зачёте и сколько требовать при этом решить, чтобы отличник не сдал зачёт с вероятностью не большей 0.01, а при этом двоечник сдал зачёт с вероятностью, не большей 0.1.
5. (3 балла) Из урны, в которой находится 6 белых и 4 черных шара, извлекаются наудачу один за другим три шара. Найти вероятность того, что:
 - (a) все три шара будут черными;
 - (b) будет не меньше двух шаров черного цвета.

6. (3 балла) Даны натуральные числа m и n , причем $m < n$. Из чисел $1, 2, \dots, n$ последовательно выбирают наугад два различных числа. Найдите вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше m .
7. (3 балла) Две урны содержат одинаковое количество шаров. Шары окрашены в белый и чёрный цвета. Из каждой урны вынимают по n шаров с возвращением, $n \geq 3$. Найдите n и “состав” каждой урны, если вероятность того, что все шары, взятые из 1-й урны, только белые, равна вероятности того, что все шары, взятые из 2-й урны, либо только белые, либо только чёрные.
8. (3 балла) Рассмотрим цепь с 3 состояниями и матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите распределение вероятности состояний в момент времени 335, если в начальный момент времени распределение вероятностей:

- (a) $(1/3, 1/3, 1/3)$
 (b) $(1, 0, 0)$
 (c) (a, b, c)
9. (3 балла) Пуля и генерал играют в игру. В свой ход игрок вращает барабан револьвера и спускает курок. Вероятность выстрела $p = 1/6$ и не зависит ни от игрока, ни от номера хода. Выстреливший - проигрывает. Найдите вероятности выигрыша Пули и генерала. Генерал стреляет первым.

10. (3 балла) Валя отгадывает бинарную строку s длины 3. Валя может задавать вопросы “сколько единиц на отрезке строки с l -го символа по r -й”. Про каждый отрезок Валя спросил ровно 1 раз. Ответ на вопрос Вали получается так:

- 1) Подбрасывается правильная монетка.
- 2) Если выпал орёл, то на вопрос даётся правильный ответ.
- 3) Если выпала решка, то на вопрос даётся неправильный ответ. Из всех возможных неправильных ответов каждый раз независимо и равновероятно выбирается один.

На вопросы Валя получил следующие ответы:

[1; 1]: 2

[1; 2]: 0

[1; 3]: 2

[2; 2]: 0

[2; 3]: 1

[3; 3]: 0

Какая строка, вероятнее всего, была загадана? Не нужно учитывать то, что ответы сгенерированы по строке 001, считайте, что все исходные строки - равновероятны.