5.2. Ley de los Grandes Números

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra IID con $\mu = EX_1$ y $\sigma^2 = V(X_1)$. La media muestral es

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

con $E\left(\bar{X}_n\right) = \mu$ y $V\left(\bar{X}_n\right) = \sigma^2/n$.

Teorema. **Ley Débil de los Grandes Números**. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son una muestra IID, entonces $\bar{X}_n \to_p \mu$.

Prueba: Desigualdad de Chebysev, asumiendo que $\sigma < \infty$.

Ejemplo. $X_i \sim \text{Bernoulli}(p = 0{,}5)$

$$\Pr\left(0{,}4 \leq \bar{X}_n \leq 0{,}6\right)?$$

En ese caso decimos que $\bar{X}_n$ es *consistente* para estimar p.

Ejemplo: Convergencia **varianza muestral** es

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2 \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2 \\
&\to_p \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\right) p\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\right) p\lim_{n\to\infty}\bar{X}_n^2 \\
&= 1\cdot EX^2 - 1\cdot(EX)^2 = EX^2 - \mu^2 = \sigma^2.
\end{aligned}$$