Aplicações de Álgebra Linear

Roberto

21 de abril de 2025

Exercícios

Exercício 1

Enunciado 1: Use Gaussian Elimination and three-digit chopping arithmetic to solve the following linear systems, and compare the approximations to the actual solution.

1.
$$
\begin{aligned}
0.03x_1 + 58.9x_2 &= 59.2 \\
5.31x_1 - 6.10x_2 &= 47.0
\end{aligned}
$$

Solução exata: $\big(10,\ 1\big)$

2.
$$
\begin{aligned}
3.03x_1 - 12.1x_2 + 14x_3 &= -119 \\
-3.03x_1 + 12.1x_2 - 7x_3 &= 120 \\
6.11x_1 - 14.2x_2 + 21x_3 &= -139
\end{aligned}
$$

Solução exata: $\big(0,\ 10,\ \tfrac{1}{7}\big)$

3.
$$
\begin{aligned}
1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 &= 1.12 \\
14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 &= 3.44 \\
0x_1 + 100x_2 - 99.9x_3 + x_4 &= 2.15 \\
15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 &= 4.16
\end{aligned}
$$

Solução exata: $\big(0.176,\ 0.0126,\ -0.0206,\ -1.18\big)$

Exercício 2

Enunciado 2: Determine which of the following matrices are nonsingular, and compute the inverse of these matrices:

1.
$$
\begin{bmatrix}
4 & 2 & 6 \\
3 & 0 & 7 \\
-2 & -1 & -3
\end{bmatrix}
$$

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

4.
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 3

Enunciado 3: Calcule o determinante usando a triangularização (atenção para as regras de mudança de sinal).

1.
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercício 4

Enunciado 4: Resolver os sistemas usando a decomposição LU e posteriormente as substituições diretas e reversas.

1.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 0x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= 1 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{8}x_3 &= 2 \\ \frac{2}{5}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{8}x_3 &= -3 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 6 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 2.121x_1 - 3.460x_2 + 0x_3 + 5.217x_4 &= 1.909 \\ 0x_1 + 5.193x_2 - 2.197x_3 + 4.206x_4 &= 0 \\ 5.132x_1 + 1.414x_2 + 3.141x_3 + 0x_4 &= -2.101 \\ -3.111x_1 - 1.732x_2 + 2.718x_3 + 5.212x_4 &= 6.824 \end{aligned}$$

Exercício 5

Enunciado 5: Encontrar a fatorização $A = P^T LU$.

1.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

3.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

4.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercício 6

Enunciado 6: Resolver os sistemas usando as fatorizações LDL^T e LL^T (Cholesky) e posteriormente as substituições necessárias.

1.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 0x_3 &= 4 \\ x_1 + 0x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 0x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -2 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$