HCMUS - VI TÍCH PHÂN 1 (CNTT, TNT) - 13/01/2025

HỌC KÌ I - NĂM HỌC 2024 - 2025 - THỜI GIAN: 90 PHÚT

Câu 1: *Lưu ý về mặt đơn vị của dữ kiện: $r(\mu m)$*

Khi bán kính của tế bào thay đổi từ $r = 5$ đến $r = 8(\mu m)$, độ biến thiên trung bình của thể tích tỉ lệ thuận với bán kính. Áp dụng công thức biến thiên trung bình (đạo hàm) trên khoảng $[5; 8]$ với $V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$m = \frac{V(b) - V(a)}{b - a} = \frac{V(8) - V(5)}{8 - 5} = 172\pi \approx 540,35(\mu m^3)$$

Giả sử tại thời điểm $r = 5$, bán kính lúc này đã tăng một lượng đơn vị $dr = 2(\mu m/h)$. Sự thay đổi thể tích hình cầu tương đương với việc khảo sát phương trình vi phân tại một thời điểm trên khoảng xác định.

$$\frac{d}{dr}[V] = \frac{d}{dr}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right] \longleftrightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 = 4\pi 2^2 \approx 50.26\,\mathrm{\mu m^3\,h^{-1}}$$

Câu 2: Đề bài không cho biết cụ thể số liệu các cạnh của hai hình nên ta phải truy tìm mối liên hệ giữa x và a thông qua các dữ kiện then chốt về tổng chu vi. Mặt khác, để có thể xác định tại thời điểm tổng diện tích nhỏ nhất tức điểm cực tiểu ta không còn cách nào khác là khảo sát sự biến thiên của hàm số ta xét.

Chu vi của tam giác và hình chữ nhật được uốn từ sợi dây kim loại:

$$2 \cdot (x + 2x) + 3a = 60(cm) \Longrightarrow a = 20 - 2x$$

Xét hàm số biểu thị tổng diện tích của hai hình trên khoảng $\forall x \in [0, 10] \quad (x \leq 10 \wedge 0 < a < x)$:

$$2x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \Longleftrightarrow f(x) = 2x^2 + (20-2x)^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Longleftrightarrow f^{'}(x) = 4x - \sqrt{3}(20-2x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} - 30$$

Ta có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới:

x	$-\infty$		0		$20\sqrt{3} - 30$		10		$+\infty$
$f'(x)$				$-$	0	$+$			
$f(x)$			$f(0)$	$\searrow$	$f(20\sqrt{3} - 30)$	$\nearrow$	$f(10)$		

Như vậy để tổng diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất thì $x_{min} = 20\sqrt{3} - 30 \Longrightarrow a = 80 - 40\sqrt{3} \Longrightarrow$ $\boxed{\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{4}}$

Câu 3:

(a)

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(3x+2)^2}\,dx$$

Áp dụng phép đặt ẩn phụ với $u = 3x + 2 \Longrightarrow du = 3dx \Longleftrightarrow dx = \frac{1}{3}du$. Như vậy, cận của tích phân được thay đổi như sau: $\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow u = 2 \\ x = 1 \Longrightarrow u = 5 \end{cases}$

$$I = \frac{1}{3}\int_2^5 \frac{1}{u^2}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{5} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{10}$$

(b)

Xấp xỉ tích phân I bằng quy tắc trung điểm (Midpoint Rule) trên khoảng $[0, 1]$ với $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{10} = 0.1$. Dưới đây là phần gợi nhắc về cách thức tính ước lượng tích phân:

Giả sử rằng $f(x)$ là một hàm số liên tục trên khoảng $[a, b]$ với n là số nguyên dương và $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Nếu như trên khoảng xác định ấy được chia thành các đoạn con n, từng đoạn Δx và m_i là trung điểm của đoạn con lần thứ i, thật vậy:

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x \quad ; \quad m_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x = 0.1i - 0.05$$

Biểu thị phép xấp xỉ dưới dạng tổng Riemann:

$$I \approx M_{10} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[3(0.1i - 0.05) + 2]^2} \cdot 0.1 \approx 0.09970989337$$

(c)

Biết rằng K thuộc miền giá trị của $|f''(x)| \quad \forall x \in [0; 1]$, từ điều kiện của đề bài và đạo hàm bậc nhất - bậc hai của hàm số $f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$

$$f'(x) = \frac{-2}{(3x+2)^2} \Longrightarrow f''(x) = \frac{6}{(3x+2)^4} \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

$$\Longleftrightarrow 2 \le 3x + 2 \le 5 \Longleftrightarrow 16 \le (3x+2) \le 625 \Longleftrightarrow \frac{1}{625} \le \frac{1}{(3x+2)^4} \le \frac{1}{16}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{6}{625} \le \frac{6}{(3x+2)^2} \le \underbrace{\frac{3}{8}}_{\text{K}} \tag{1}$$

Theo công thức tính cận sai số cho phép xấp xỉ trung điểm:

$$|E_m| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2} \Longleftrightarrow |I - M_{10}| \le \frac{\frac{3}{8}}{24 \cdot 10^2} = 0.00015625$$

$$\Longleftrightarrow 0.00029010663 \ge 0.00015625$$

Như vậy khẳng định "$|I - M_n| \le \frac{K}{24n^2}$" là sai.

Câu 4:

(a)

$\int x^2 \ln x \, dx$ là dạng tích phân bất định.

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = \ln x$ và $dv = x^2 \, dx$:

$$I = u \cdot v - \int v \, du \Longrightarrow I = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \Longrightarrow I = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Xét trên khoảng $x \in [0; 1]$, rõ ràng tích phân không xác định tại điểm gián đoạn $x = 0$ vì $\lim_{x \to 0} \ln x = \infty$. Vậy đây là tích phân suy rộng loại 2 (Gián đoạn tại một điểm xác định)

$$\int_0^1 x^2 \ln x \, dx \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to 0} \int_t^1 x^2 \ln x \, dx \quad = \quad \lim_{t \to 0} \left[\frac{x^3}{3} \ln x \Big|_t^1 - \frac{1}{3} \int_t^1 x^2 \, dx \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{-t^3 \ln t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{t^3}{9} \right] = \frac{-1}{9} - \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{t \to 0} \left[t^3 \ln t \right]}_{\text{L'Hôpital's } (= 0/0)} = \frac{-1}{9}$$

(b) Tích phân suy rộng loại 1 (Trên một khoảng xác định từ một hay cả hai điểm của cận đều tiến tới vô cùng)

$$I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} \, dx \Longrightarrow I = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} \, dx \Longrightarrow \begin{cases} u = \ln x \Longleftrightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = \frac{1}{x^2} \, dx \Longleftrightarrow v = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{-\ln x}{x} \Big|_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2} \, dx \right] = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{-\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1 \right] = 1 - \underbrace{\lim_{t \to \infty} \left[\frac{\ln t}{t} \right]}_{\text{L'hospital } (\frac{\infty}{\infty})} = 1$$

Câu 5: Hàm đa thức cũng chính là cách khai triển chuỗi Taylor và Maclaurin (cho trường hợp $a = 0$). Lưu ý, hàm số khi xấp xỉ phải thoả mãn 2 điều kiện như sau: Hàm số khả vi trên khoảng vô cùng và phần dư của khai triển (Remainder Term) hội tụ tại 0.

(a)

$f(x) = \cos(x)$	$f(a) = \frac{1}{2},\ a = \frac{\pi}{3}$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f'(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f''(x) = -\cos(x)$	$f''(a) = -\frac{1}{2}$
$f'''(x) = \sin(x)$	$f'''(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$f^{(4)}(x) = \cos(x)$	$f^{(4)}(a) = \frac{1}{2}$
$f^{(5)}(x) = -\sin(x)$	$f^{(5)}(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f^{(6)}(x) = -\cos(x)$	$f^{(6)}(a) = -\frac{1}{2}$
$f^{(7)}(x) = \sin(x)$	$f^{(7)}(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Phép xấp xỉ hàm $f(x)$ bởi đa thức Taylor đến bậc 7 tại tâm $a = \frac{\pi}{3}$:

$$P_7(x) = f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(7)}(a)}{7!}\cdot(x-a)^7 = \sum_{n=0}^{7}\frac{\cos(\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{2})}{n!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$\Longrightarrow P_7(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{3})^3 + \cdots + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{7!}(x-\frac{\pi}{3})^7$$

Với bậc thứ 99, ta rút gọn khai triển của hàm $f(x) = \cos x$ dưới dạng tổng Riemann:

$$f(x) \approx P_{99}(x) = \sum_{n=0}^{99}\frac{\cos(\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{2})}{n!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n$$

(b) $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right] \wedge f(x)$ có đạo hàm đến cấp n + 1, ta có phép chia dư được rút ra từ khai triển Taylor kể từ bậc n

$$|R_n| = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\cdot|x-a|^{n+1}$$

Để phép xấp xỉ có sai số $\epsilon < 10^{-6}$ thì khoảng cách phương sai giữa $\zeta \in (x;a)$ là tối thiểu nhất, nói cách khác, $\left|x-\frac{\pi}{3}\right| < \frac{\pi}{6}$. Mặt khác tuy hàm số f(x) khi đạo hàm đến bậc n + 1 có thể cho ra 2 trường hợp $\pm cos(x) \vee \pm sin(x)$, về cơ bản miền giá trị vẫn không đổi.

$$-1 \le \pm cos(x) \vee \pm sin(x) \le 1 \quad \Longrightarrow \quad |f^{(n+1)}(\zeta)| \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |R_n| \le \frac{(\frac{\pi}{6})^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

Đến đây có thể biện luận bằng cách thế từng giá trị n thoả mãn bất phương trình hoặc sử dụng phép xấp xỉ tiệm cận **Stirling** - áp dụng cho các phép tính giai thừa $n!, \ln n!, ...$

$$\frac{(\frac{\pi}{6})^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6} \Longleftrightarrow \ln\left[\frac{(\frac{\pi}{6})^{n+1}}{(n+1)!}\right] < \ln 10^{-6} \Longleftrightarrow (n+1)\ln\left(\frac{\pi}{6}\right) - \ln\left[(n+1)!\right] < -6\ln 10$$

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Longrightarrow (n+1)! \approx \sqrt{\pi(2n+2)}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} \tag{2}$$

Thế phép tính vào (2) ra được một dãy hàm logarithm

$$(n+1)\ln\left(\frac{\pi}{6}\right) - \ln\left[\sqrt{\pi(2n+2)}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\right] < -6\ln 10$$

$$\Longleftrightarrow (n+1)\ln\left(\frac{\pi}{6}\right) - \ln\left(\sqrt{\pi(2n+2)}\right) + (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{e}\right) < -6\ln 10$$

Giải bất phương trình này sẽ cho ra kết quả $n \approx 6.29$. Như vậy, hàm đa thức Taylor với tâm $a = \frac{\pi}{3}$ cần phải được xấp xỉ đến bậc $n \ge 7$ để sai số không quá 10^{-6}!

Câu 6:

Sử dụng tiêu chuẩn tỉ số cho chuỗi luỹ thừa với $a_n = \frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}\left(2x+\frac{1}{2}\right)^n$ và $a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)\cdot 3^{n+1}}\left(2x+\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)3^n\left(2x+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(2x+\frac{1}{2}\right)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\left|2x+\frac{1}{2}\right|\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left|2x+\frac{1}{2}\right| = L$$

Để chuỗi số hội tụ trên khoảng bán kính khai triển $\iff |L| < 1 \iff \frac{1}{3}\left|2x+\frac{1}{2}\right| < 1 \iff \left|x+\frac{1}{4}\right| < \frac{3}{2}$.

Ta tìm được bán kính hội tụ $R = \frac{3}{2}$ và tâm khai triển $\alpha = \frac{-1}{4}$

Tiếp theo, khảo sát sự hội tụ của chuỗi trên các điểm mở $x = \frac{-7}{4}$ và $x = \frac{5}{4}$.

$$\left|x+\frac{1}{4}\right| < \frac{3}{2} \iff \frac{-3}{2} < x+\frac{1}{4} < \frac{3}{2} \iff \frac{-7}{4} < x < \frac{5}{4}$$

- $x = \frac{-7}{4} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n(n+1)} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+1)}$. Áp dụng tiêu chuẩn đan dấu sẽ cho ra chuỗi đan dấu điều hoà (Alternating Harmonic Series) hội tụ tại điểm này $\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0, f'(x) < 0\right)$.

- $x = \frac{5}{4} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Áp dụng tiêu chuẩn so sánh trực tiếp, nhận thấy $a_n = \frac{1}{n+1} \leq b_n = \frac{1}{n} \implies$ Chuỗi điều hoà (Harmonic Series) phân kỳ tại điểm xác định.

Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}\left(2x+\frac{1}{2}\right)^n$ thuộc khoảng $\boxed{\left[\frac{-7}{4},\frac{5}{4}\right)}$.

HẾT.