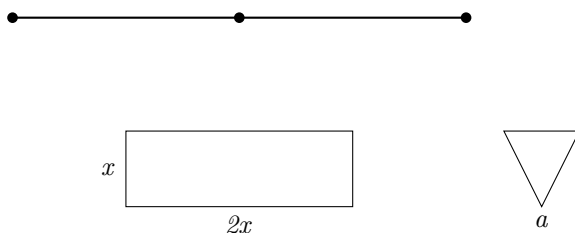


HCMUS - VI TÍCH PHẦN 1 (CNTT, TNT) - 13/01/2025
HỌC KÌ I - NĂM HỌC 2024 - 2025 - THỜI GIAN: 90 PHÚT

Câu 1. (1đ) Một tế bào hình cầu đang phát triển có thể tích là $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, trong đó bán kính được đo bằng μm .

- (a) (0.5đ) Tìm tỉ lệ biến thiên trung bình của V đối với r khi r thay đổi từ 5 đến 8.
(b) (0.5đ) Giả sử vào thời điểm khi $r = 5$, tốc độ tăng trưởng kích thước r là $2\mu m/h$. Hãy tính tốc độ tăng thể tích V vào thời điểm này, ghi rõ đơn vị.

Câu 2. (1đ) Từ một sợi dây kim loại dài 60cm người ta cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được gấp bẻ tạo thành hình chữ nhật với chiều rộng là x (cm) và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Đoạn dây thứ hai được gấp bẻ tạo thành một tam giác đều có cạnh là a (cm). Để tổng diện tích của hai hình thu được là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{x}{a}$ bằng bao nhiêu?



Câu 3. (2đ) Cho hàm số f xác định bởi

$$f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}, x \neq -\frac{2}{3}$$

- (a) (0.5đ) Tính $I = \int_0^1 f$ bằng cách tìm nguyên hàm.
(b) (0.5đ) Hãy xấp xỉ I bởi tổng Riemann (tổng tích phân) M_{10} theo quy tắc trung điểm (khi phân hoạch đều đoạn $[0;1]$ thành 10 đoạn nhỏ).
(c) Tìm K là giá trị lớn nhất của $|f''(x)|$ với $x \in [0;1]$. Người ta chứng minh được rằng độ lớn sai số của phép xấp xỉ không vượt quá $\frac{K}{24n^2}$, với n là số đoạn nhỏ khi phân hoạch đều đoạn $[0;1]$. Hãy chỉ ra một giá trị của n sao cho phép xấp xỉ $I \approx M_n$ có độ lớn sai số không quá 10^{-3} . Với giá trị n vừa chỉ ra, dùng máy tính bỏ túi để tính M_n , đồng thời kiểm tra xem khẳng định " $|I - M_n| \leq \frac{K}{24n^2}$ " là đúng hay sai.

Câu 4. (2đ) Thực hiện các câu sau.

- (a) Bằng cách đặt $u = \ln x$ và $dv = x^2 dx$, hãy tìm nguyên hàm $\int x^2 \ln x dx$, nếu hội tụ. Sau đó tính tích phân suy rộng $\int_0^1 x^2 \ln x dx$, nếu hội tụ.
(b) Tính tích phân suy rộng $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}$, nếu hội tụ.

Câu 5. (2đ) Cho hàm số f định bởi $f(x) = \cos x$.

- (a) (1đ) Lập phép xấp xỉ hàm f bởi đa thức Taylor T_7 , tâm tại (xung quanh điểm) $a = \frac{\pi}{3}$, đến bậc 7. Từ đó hãy mô tả dạng của đa thức Taylor tâm tại $\frac{\pi}{3}$, bậc 99.
(b) Với $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, cần xấp xỉ $f(x)$ bởi đa thức Taylor tâm tại $\frac{\pi}{3}$ đến bậc bao nhiêu để phép xấp xỉ có độ lớn sai số không quá $\varepsilon = 10^{-6}$?

Câu 6. (2đ) Cho chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} \left(2x + \frac{1}{2}\right)^n$$

- (a) (1đ) Dùng tiêu chuẩn tỉ số, hãy tìm R là bán kính hội tụ của chuỗi trên. Tâm khai triển α của chuỗi lũy thừa là gì?
- (b) (1đ) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi khi $x = \alpha - R$; $x = \alpha + R$, từ đó cho biết miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.

HẾT.