MAT703. Deber Seminario Investigación. Ejercicios Capítulo 1 "Bayesian Data Analysis"

Fausto Fabian Crespo Fernandez

May 2016

0.1. Ejercicio 1

Probabilidad condicional: Suponga que si $\theta = 1$, entonces y tiene una distribución normal con media 1 y desviación estándar σ, y si $\theta = 2$ entonces y tiene una distribución normal con media 2 y desviación estándar σ. También suponga que $Pr(\theta = 1) = 0{,}5$ y $Pr(\theta = 2) = 0{,}5$

- (a) Para $\sigma = 2$, escribir la fórmula de la densidad de probabilidad marginal para y y esbócela.
- (b) ¿Qué es $Pr(\theta = 1|y = 1)$, y de nuevo suponiendo que $\theta = 2$?
- (c) Describir cómo la densidad posterior de θ cambia de forma cuando σ aumenta y cuando disminuye.

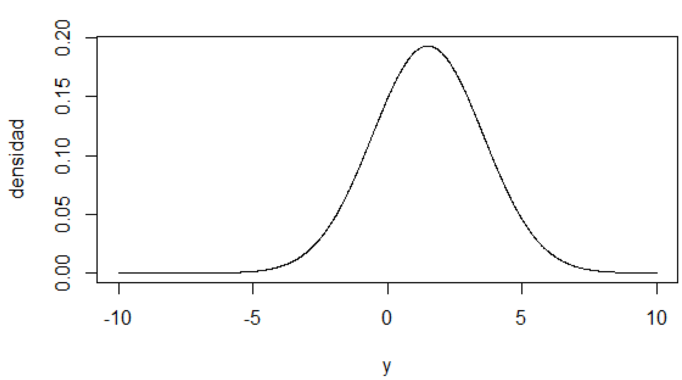
Solución

- (a) Tenemos que

$$\begin{aligned} p(y) &= Pr(\theta = 1)p(y|\theta = 1) + Pr(\theta = 2)p(y|\theta = 2) \\ &= 0{,}5N(y|1, 2^2) + 0{,}5N(y|2, 2^2) \end{aligned} \tag{1}$$

En R el código es:
y <- seq(-10,10,.01)
densidad <- 0.5*dnorm(y,1,2) + 0.5*dnorm(y,2,2)
plot (y, densidad,type=”l”, xlab=”y”, ylab=”densidad”, cex=2)

y el resultado es



- (b)

$$
\begin{aligned}
Pr(\theta=1|y=1) &= \frac{p(\theta=1,y=1)}{p(\theta=1,y=1)+p(\theta=2,y=1)} \\
&= \frac{Pr(\theta=1)p(y=1|\theta=1)}{Pr(\theta=1)p(y=1|\theta=1)+Pr(\theta=2)p(y=1|\theta=2)} \\
&= \frac{0{,}5N(1|1,2^2)}{0{,}5N(1|1,2^2)+0{,}5N(1|2,2^2)}
\end{aligned} \tag{2}
$$

  y en R
  dnorm(1,1,2) /(dnorm(1,1,2) + dnorm(1,2,2))
  y $Pr(\theta = 1|y = 1) = 0{,}5312$

- (c) Cuando $\sigma \to \infty$ la densidad a posteriori para θ se aproxima a la prior(pues los datos no contienen información)$Pr(\theta = 1|y = 1) \to \frac{1}{2}$. Si $\sigma \to 0$, la densidad a posteriori para θ se concentra alrededor de 1 y $Pr(\theta = 1|y = 1) \to 1$

0.2. Ejercicio 2

Medias condicionales y varianzas: Mostrar que (1.7) y (1.8) se cumplen si u es un vector.
Solución
Para fórmula 1.7:Para cada componente u_i se tiene que $E(u_i) = E(E(u_i|v)$ y por tanto se tiene $E(u) = E(E(u|v)$ componente a componente.
Para fórmula 1.8:Para los elementos de la diagonal de $var(u)$ se tiene que $var(u_i) = E(var(u_i|v)) + var(E(u_i|v))$ y para los elementos fuera de la diagonal principal:
$E(cov(u_i, u_j|v)) + cov[E(u_i|v), E(u_j|v)] = E[E(u_iu_j|v) - E(u_i|v)E(u_j|v)] + E[E(u_i|v)E(u_j|v)] - E[E(u_i|v)]E[E(u_j|v)] = E(u_iu_j) - E[E(u_i|v)E(u_j|v)] + E[E(u_i|v)E(u_j|v)] - E[E(u_i|v)]E[E(u_j|v)] = E(u_iu_j) - E(u_i)E(u_j) = cov(u_i, u_j)$

0.3. Ejercicio 3

El cálculo de probabilidades para la genética(Lindley 1965): Suponga que en cada individuo de una población muy grande hay un par de genes, cada uno

de los cuales puede ser escrito como x o X que controla el color de los ojos: aquellos con xx tienen ojos azules, mientras que los heterocigotos(aquellos con Xx o xX) y los que tienen XX tienen ojos marrones. la proporción de individuos con ojos azules es p^2 y de los heterocigotos es $2p(1-p)$ donde $0 < p < 1$. Cada padre transmite uno de sus propios genes a su hijo; si el padre es heterocigoto, la probabilidad de que transmita el gen de tipo X es 1/2. Asumiendo pareamiento aleatorio, mostrar que entre los hijos con ojos marrones de padres con ojos marrones, la proporción esperada de heterocigotos es $2p/(1+2p)$).Suponga que Judy tiene ojos marrones y es hija de padres de ojos marrones y se casa con un heterocigoto y tienen n hijos, todos de ojos marrones . Hallar la probababilidad a posteriori que Judy es heterocigota y la probabailidad de que su primera nieta tenga ojos azules
Solución

Supongamos los eventos:
A : el hijo es heterocigoto
C : los padres tienen ojos marrones
D : el hijo tiene ojos marrones
F : C y D $E_0 = (XX, XX)$: los padres son homocigotos con ojos marrones
$E_1 = (XX, Xx)$
$E_2 = (Xx, XX)$
$E_3 = (Xx, Xx)$
E_4 al menos uno de los padres es xx o sea tiene ojos azules
Ahora se tiene que AF=ACD=AC pues un hijo heterocigoto siempre tienen ojos marrones(A está incluido en D). Como los E_i son mutuamente excluyentes y $C = \sum_{i=0}^{3} E_i$, se tiene
$Pr(hijo\,es\,heterocigoto|hijo\,tiene\,ojos\,marrones\,y\,los\,padres\,tienen\,ojos\,marrones) =$
$Pr(A|F) = \frac{Pr(AF)}{Pr(F)} = \frac{Pr(AC)}{Pr(F)} = \frac{\sum_{i=0}^{3}(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=0}^{3}(F|E_i)P(E_i)} = \frac{0*[(1-p)^2]^2+(1/2)*2*2p(1-p)*(1-p)^2+(1/2)*[2p(1-p)]^2}{1*[(1-p)^2]^2+(1)*2*2p(1-p)*(1-p)^2+(3/4)*[2p(1-p)]^2} =$
$\frac{2p(1-p)+2p^2}{(1-p)^2+4p(1-p)+3p^2} = \frac{2p}{1+2p}$
Ahora definamos los eventos
B_i :el hijo i-esimo de Judy y su esposo tiene ojos marrones
H : el esposo de Judy es heterocigoto
$Pr(Judy\,es\,heterocigota|n\,hijos\,tienen\,ojos\,marrones\,y\,informaci\acute{o}n\,previa) =$
$Pr(A|FHB_1B_2..B_n) = \frac{Pr(B_1B_2..B_n|AHF)Pr(A|HF)}{Pr(B_1B_2..B_n|AHF)Pr(A|HF)+Pr(B_1B_2..B_n|\hat{A}HF)Pr(\hat{A}|HF)} =$
$\frac{Pr(B_1B_2..B_n|AH)Pr(A|F)}{Pr(B_1B_2..B_n|AH)Pr(A|F)+Pr(B_1B_2..B_n|\hat{A}HF)Pr(\hat{A}|F)}$
y ahora usamos el hecho de que los genotipos de los hijos son independientes

condicionalmente al genotipo de sus padres y $Pr(A|F) = \frac{2p}{1+2p}$
y entonces
$\frac{(\frac{3}{4})^n \frac{2p}{1+2p}}{(\frac{3}{4})^n \frac{2p}{1+2p} + 1\frac{1}{1+2p}} =$
$\frac{3^n p}{3^n p + 2^{2n-1}}$
Dado que todos los hijos de Judy tienene ojos marrones, su primer nieto tendrá ojos azules sólo si el hijo de Judy que es el padre del primer nieto es "Xx/ "xX.º sea heterocigoto(pues si el hijo de Judy es "XX.^en^tonces los nietos de Judy, hijos de este hijo de Judy, tendrán ojos marrones). La probabilidad de que el hijo(a) de Judy sea Xx es
$Pr(hijo\,de\,Judy\,es\,Xx|informacion\,previa)$
$= Pr((hijo\,de\,Judy\,es\,Xx\,y\,Judy\,es\,Xx)\,or$
$(hijo\,de\,Judy\,es\,Xx\,y\,Judy\,es\,XX)|informacionprevia)$
$= \frac{(\frac{3}{4})^n \frac{2p}{1+2p}}{(\frac{3}{4})^n \frac{2p}{1+2p} + 1\frac{1}{1+2p}} \frac{2}{3} + \frac{(\frac{3}{4})^n \frac{1}{1+2p}}{(\frac{3}{4})^n \frac{2p}{1+2p} + 1\frac{1}{1+2p}} \frac{1}{2}$

Si el hijo de Judy es "Xx", sus hijos tendrán probabilidad 0,1/4,1/2 de tener ojos azules si ese hijo de Judy se casa con genotipo XX, Xx o xx respectivamente.Si se asume pareamiento aleatorio estos eventos tienen probabilidad $(1-p)^2, 2p(1-p), p^2$
Sea E el esposo(a) de la(del) hija(o) de Judy que es padre de su primer nieto y sea H la hija(o) de Judy
$Pr(nieto\,sea\,xx|toda\,información) = \frac{\frac{2}{3}\frac{2p}{1+2p}(\frac{3}{4})^n + \frac{1}{2}\frac{1}{1+2p}}{(\frac{3}{4})^n \frac{2p}{1+2p} + 1\frac{1}{1+2p}} (\frac{1}{4}2p(1-p) + \frac{1}{2}p^2)$
$= (\frac{3^{n-1}p + 2^{2n-3}}{3^n p + 2^{2n-1}})p$

0.4. Ejercicio 4

Asignación de probabilidad: Usaremos los datos de futbol para estimar algunas probabilidades condicionales acerca de los jugadores de futbol.Hubo 12 juegos con diferencia de 8 puntos: los resultados en esos juegos fueron: -7,-5,-3,-3,1,6,7,13,15,16,20 y 21 con valores positivos indican gana el favorito y valores negatios indica ganados por el no favorito.Considerar las siguientes probabilidades condicionales.
$Pr(favorito\,gana|diferencia\,de\,puntos\; = 8)$,
$Pr(favorito\,gana\,por\,al\,menos\,8|diferencia\,de\,puntos\; = 8)$
$Pr(favorito\,gana\,por\,al\,menos\,8|diferencia\,de\,puntos\; = 8\,y\,favorito\,gana)$

- (a) Estimar cada una de estas usando frecuencias relativas de juegos con diferencia de puntos de 8.
- (b) Estimar cada una usando la aproximación normal para la distribución de (resultados - diferencia de puntos)

Solución

- (a) Usando frecuencias relativas.
  $Pr(A|B) = \frac{\# \, casos \, de \, A \, y \, B}{\# \, casos \, de \, B}$ y
  $Pr(favorito \, gana|diferencia \, de \, puntos \; = 8) = \frac{8}{12} = 0{,}67$

  $Pr(favorito \, gana \, por \, al \, menos \, 8|diferencia \, de \, puntos \; = 8) = \frac{5}{12} = 0{,}42$
  $Pr(favorito \, gana \, por \, al \, menos \, 8|diferencia \, de \, puntos \; = 8 \, y \, favorito \, gana) = \frac{5}{8} = 0{,}63$

- (b) Usando la aproximación normal para $d = (resultados - diferenciadepuntos)$ y $dN(0, 13{,}86^2)$ y
  $Pr(A|B) = \frac{\# \, casos \, de \, A \, y \, B}{\# \, casos \, de \, B}$ y
  $Pr(favorito \, gana|diferencia \, de \, puntos \; = 8) = \Phi(\frac{8{,}5}{13{,}86}) = 0{,}73$

  $Pr(favorito \, gana \, por \, al \, menos \, 8|diferencia \, de \, puntos \; = 8) = \Phi(\frac{0{,}5}{13{,}86}) = 0{,}514$
  $Pr(favorito \, gana \, por \, al \, menos \, 8|diferencia \, de \, puntos \; = 8 \, y \, favorito \, gana) = \frac{0{,}514}{0{,}73} = 0{,}70$

0.5. Ejercicio 5

Asignación de probabilidad: Los 435 congresistas de EEUU son elegidos por período de 2 años; el número de votantes en una elección para el congreso varía entre 50000 y 350000. Usaremos varias fuentes para estimar la probabilidad de al menos una elección de congresista empatada en la próxima elección nacional.

- (a) Usar cualquier conocimiento acerca de la política en EEUU. Especificar claramente que información está usando para construir la probabilidad condicional íncluso si la respuesta es solo un estimado.
- (b) Usar los siguiente: en el período 1900-1992, hubo 20597 elecciones, de las cuales 6 de 10 fueron decididas por menos de 10 votos y 49 decididas por menos de 100 votos.

Solución

- (a) Existen muchas posibles respuestas. Una posible es que las elecciones para congreso son realizadas con 2 candidatos y que cada candidato recibe entre 30 % y 70 % de los votos. Sea n el número total de votos y y el número de votos recibidos por el candidato del partido demócrata. Si no asumimos ningún conocimiento previo podemos tomar que y/n está uniformemente distribuida entre 30 % y 70 % y $Pr(elección\, empatada|n) = Pr(y = n/2) = \begin{cases} \frac{1}{0{,}4n} & \text{if } n\, es\, par \\ 0 & \text{if } n\, es\, impar \end{cases}$

Si n es aproximadamente 200000 con probabilidad de 1/2 de ser par entonces $Pr(elección\, empatada) \approx \frac{1}{160000}$ Las elecciones se hacen para 435 congresistas, asi que la probabilidad de al menos una empatada (asumiendo independencia) es
$Pr(al\, menos\, una\, empatada) = 1 - (1 - \frac{1}{160000})^{435} \approx \frac{435}{160000} \approx \frac{1}{370}$. Que una elección este empatada es $y = n/2$ o $2y - n = 0$ y el evento de que la elección este decidida por menos de 100 votos $|y - (n - y)| = |2y - n| \leq 100$.Ahora $2y - n$ es una variable aleatoria que toma valores enteros y si n es grande $2y - n$ tiene distribución uniforme alrededor de 0 y
$Pr(|2y - n| = 0) = \frac{1}{201} Pr(|2y - n| \leq 100)$
Y la probabilidad de un empate es $\frac{1}{201}\frac{49}{20957}$

- (b) Una estimación empírica que una elección se va a decidir por menos de 100 votos es 49/20597 y la probabilidad de que al menos una de las 435 elecciones este empatada es $435\frac{1}{201}\frac{49}{20957} \approx \frac{1}{190}$

0.6. Ejercicio 6

Probabilidad condicional:Aproximadamente 1/125 de todos los nacimientos son gemelos fraternales y 1/300 son gemelos idénticos. Elvis Presley tuvo un hermano gemelo(que murió al nacer). Cúal es la probabilidad de que Elvis Presley tuvo un hermano gemelo idéntico?(La probabilidad de hombre o mujer es 1/2)

Solución

Tenemos

$Pr(gemelos\,idénticos\,y\,hermano\,gemelo)$
$= Pr(gemelos\,idénticos)Pr(ambos\,varones|gemelos\,idénticos) = \frac{1}{2}\frac{1}{300}$
$Pr(gemelos\,fraternos\,y\,hermano\,gemelo)$
$= Pr(gemelos\,fraternos)Pr(ambos\,varones|gemelos\,fraternos) = \frac{1}{4}\frac{1}{125}$
y $Pr(gemelos\,idénticos|hermano\,gemelo) = \frac{Pr(gemelos\,idénticos\,y\,hermano\,gemelo)}{Pr(hermano\,gemelo)}$
$= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{300}}{\frac{1}{2}\frac{1}{300}+\frac{1}{4}\frac{1}{125}} = \frac{5}{11}$

0.7. Ejercicio 7

7. Conditional probability: the following problem is loosely based on the television game show *Let's Make a Deal*. At the end of the show, a contestant is asked to choose one of three large boxes, where one box contains a fabulous prize and the other two boxes contain lesser prizes. After the contestant chooses a box, Monty Hall, the host of the show, opens one of the two boxes containing smaller prizes. (In order to keep the conclusion suspenseful, Monty does not open the box selected by the contestant.) Monty offers the contestant the opportunity to switch from the chosen box to the remaining unopened box. Should the contestant switch or stay with the original choice? Calculate the probability that the contestant wins under each strategy. This is an exercise in being clear about the information that should be conditioned on when constructing a probability judgment. See Selvin (1975) and Morgan et al. (1991) for further discussion of this problem.

Solución

Comparemos la probabilidad de ganar si nos quedamos con la caja elegida primeramente o si cambiamos. Sea

Q: evento de ganar premio mayor si no cambiamos de caja

C:evento de ganar el premio mayor si se cambia de caja

A : evento que la primera caja escogida tiene el premio mayor

A^c:evento que la primera caja escogida no tiene el premio mayor

. Entonces

$Pr(Q) = Pr(Q|A)Pr(A) + Pr(Q|A^c)Pr(A^c) = 1\frac{1}{3} + 0\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ y
$Pr(C) = Pr(C|A)Pr(A) + Pr(C|A^c)Pr(A^c) = 0\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Pues $Pr(C|A^c) = 1$ ya que Monty abre una de las cajas con premios menores no seleccionadas por el concursante, y como el concursante la primera vez no selecciona la caja del premio mayor(tiene premio menor), Monty solo puede

abrir la caja restante con premio menor, y si el concursante se cambia de caja, estaría escogiendo la caja con el premio mayor con seguridad.
También se pudo haber obtenido el segundo resultado de la probabilidad condicional de ganar el premio mayor si se cambia de caja de la siguiente forma.Sea
C:evento de ganar el premio mayor si se cambia de caja
M_1, M_2, M_3 eventos de que el premio mayor este en la caja 1,2 o 3
E_1, E_2, E_3 eventos de que el concursante escoja primeramente la caja 1,2 o 3
B_1, B_2, B_3 eventos de que el presentador Monty abra la caja 1,2 o 3
Supongamos que el concursante escoge la caja 1(sin pérdida de generalidad),entonces como la posición del premio mayor en las cajas es independiente de la elección del concursante:
$Pr(M_i|E_1) = 1/3$ y
$Pr(B_3|M_1, E_1) = 1/2$ pues Monty abre una de los cajas con premios menores(excluyendo la seleccionada por el concursante). Suponemos sin pérdida de generalidad que Monty abre caja 3 y
$Pr(B_3|M_2, E_1) = 1$ pues queda una sola caja con premio menor no seleccionada por el concursante
$Pr(B_3|M_3, E_1) = 1$ pues Monty no abre cajas con el premio mayor
Entonces si el concursante escoge primeramente la caja 1 y Monty abre la caja 3, la probabilidad de ganar cambiando de caja corresponde a la probabilidad condicional de que el premio mayor este en la caja 2 M_2:
$Pr(M_2|E_1, B_3) = \frac{Pr(M_2,E_1,B_3)}{Pr(E_1,B_3)} = \frac{Pr(B_3|E_1,M_2)Pr(M_2|E_1)}{Pr(E_1,B_3)}$
$= \frac{Pr(B_3|E_1,M_2)Pr(M_2|E_1)}{Pr(B_3|E_1,M_1)Pr(M_1|E_1)+Pr(B_3|E_1,M_2)Pr(M_2|E_1)+Pr(B_3|E_1,M_3)Pr(M_3|E_1)}$
Pero $Pr(M_i|E_1) = 1/3$ y entonces
$Pr(M_2|E_1, B_3) = \frac{Pr(B_3|E_1,M_2)}{Pr(B_3|E_1,M_1+Pr(B_3|E_1,M_2)+Pr(B_3|E_1,M_3)} = \frac{1}{(1/2)+1+0} = 2/3$

Por tanto es mejor cambiarse de caja pues $(2/3) > (1/3)$

0.8. Ejercicio 8

8. Subjective probability: discuss the following statement. 'The probability of event E is considered "subjective" if two rational persons A and B can assign unequal probabilities to E, $P_A(E)$ and $P_B(E)$. These probabilities can also be interpreted as "conditional": $P_A(E) = P(E|I_A)$ and $P_B(E) = P(E|I_B)$, where I_A and I_B represent the knowledge available to persons A and B, respectively.' Apply this idea to the following examples.
   (a) The probability that a '6' appears when a fair die is rolled, where A observes the outcome of the die roll and B does not.
   (b) The probability that Brazil wins the next World Cup, where A is ignorant of soccer and B is a knowledgeable sports fan.

Solución

Si consideramos la probabilidad como el grado de certeza de un suceso en un tiempo dado para una persona, entonces dos personas racionales en un mismo tiempo, basados únicamente en su conocimiento previo(por eso también se pueden considerar condicionales), personalidad, etc pueden asignarle probabilidades distintas a un mismo evento E. En este sentido cualquier evento sería subjetivo, pero la matemática estudia la probabilidad como una medida de cuán frecuente ocurre un suceso(enfoque frecuentista) independientemente del observador. Desde el punto de vista bayesiano se puede tener distribuciones a priori de parámetros distintas para distintas personas racionales(caracter subjetivo) pero una vez que se tienen los datos se calcula la distribución a posteriori(que ya no depende tanto del observador) y que puede modificar la concepción subjetiva inicial que si dependía del observador.(a) Si el observador A observa algunas tiradas del dado está en ventaja al observador B . El observador B asumiendo que el dado no está cargado dirá que la probabilidad de que salga 6 es 1/6, sin embargo el A puede partir de la ditribución a priori de la probabilidad de salida de 6 tiene cierta forma(uniforma en $[0, 1]$ o igual 1 si $p = 1/6$)e ir calculando sucesivamente las distribuciones a posteiori dados las diferentes salidas del dado, lo que hace que sus estimaciones sean más veridicas. (b) En este caso las probabilidades que puede asignar el observador A a que gane Brasil pueden ser bastantes erroneas, sin embargo las de B, que es aficionado a los deportes serán más veridicas y basadas en los resultados frente a los distintos contrarios en copas del mundo anteriores, etc.

0.9. Ejercicio 9

9. Simulation of a queuing problem: a clinic has three doctors. Patients come into the clinic at random, starting at 9 a.m., according to a Poisson process with time parameter 10 minutes: that is, the time after opening at which the first patient appears follows an exponential distribution with expectation 10 minutes and then, after each patient arrives, the waiting time until the next patient is independently exponentially distributed, also with expectation 10 minutes. When a patient arrives, he or she waits until a doctor is available. The amount of time spent by each doctor with each patient is a random variable, uniformly distributed between 5 and 20 minutes. The office stops admitting new patients at 4 p.m. and closes when the last patient is through with the doctor.

(a) Simulate this process once. How many patients came to the office? How many had to wait for a doctor? What was their average wait? When did the office close?

(b) Simulate the process 100 times and estimate the median and 50% interval for each of the summaries in (a).

Solución

Este es un problema de teoria de colas. El tiempo de llegada del primer paciente luego de las 9 am sigue una distribución exponencial con media 10 min y como la media de la distribucion exponencial es $1/\lambda$ entonces $\lambda = 1/10$ y $T_1 \sim Exp(\frac{1}{10})$ o
$p(T_1 = t) = \frac{1}{10}e^{-\lambda t}$Los tiempos de llegada de los pacientes siguientes también siguen una distribución exponencial con igual media $T_i \sim Exp(\frac{1}{10})$ con $i = 2, 3, ...$ Los tiempos de atención de los doctores con cada paciente siguen una distribución uniforme $U(5, 20)$. El tiempo de cierre es a las 4pm.
(a) Este problema esta resuelto para 1 doctor atendiendo y una cola de un solo paciente(o sea si llega un paciente y ya hay un paciente en cola se va e el primer paciente) en https://dahl.byu.edu/223/2016a/2016-04-12/exam2-2015d/solutions/queue.R.
En R:
. (El archivo va como adjunto) obtenermos que el tiempo de espera promedio para una simulación fue de 0.5014671, arribaron 42 pacientes y esperaron 7 de ellos.El tiempo ce cierre fue de 430.8085
(b) En R:
. (El archivo va como adjunto) obtenemos que el tiempo de espera promedio es de 0.579366 con 100 simulaciones y un intervalos al 50 %(25 % al 75 %) de [0.1339134, 0.7153199] . La cantidad promedio de pacientes que arribó fue de 41.75 con un intervalo al 50 % de [37, 46]y la media

de los que esperaron fue de 5.69 con un intervalo al 50 % de [2,8]. La media del tiempo de cierre de la clinica fue de 423.6725 y el intervalo al 50 % fue de [418.3640, 431.1029]

0.10. Bibliografía

http://www.stat.columbia.edu/ gelman/book/solutions2.pdf
http://acccn.net/cr569/mat368/eyes/eyes.pdf
https://dahl.byu.edu/223/2016a/2016-04-12/exam2-2015d/solutions/queue.R.
http://www.lce.hut.fi/teaching/S-114.2601/ex/exercises.shtml