Deber Seminario

Fausto Fabian Crespo Fernández

Modelos logísticos y puntos periódicos

La sistema logístico que analizamos es $f(x) = \lambda x(1-x) = x + (\lambda-1)x - \lambda x^2 = x + x(\lambda - 1)(1 - \frac{\lambda}{\lambda-1}x)$ y el puntos fijos se producen cuando $x = f(x)$ o sea cuando $x(\lambda-1)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-1}x\right) = 0$ o sea en $x = 0$ y $x = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Ahora los dos puntos fijos no son iguales, el punto fijo $x = 0$ es inestable si $|\lambda| > 1$y el $x = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ es estable si $0 < \lambda < 2$ o sea el primero repele las iteraciones y el segundo las atrae, o sea que no importa cuán cerca empecemos de 0 siempre las iteraciones $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ serán repelidas de 0. Un punto fijo es estable o atractor si $|f'(x)| < 1$ e inestable si $|f'(x)| > 1$. En este caso $f'(x) = \lambda - 2\lambda x$ y $|f'(0)| = |\lambda|$ y $\left|f'(\frac{\lambda-1}{\lambda})\right| = \left|\lambda - 2\lambda\frac{\lambda-1}{\lambda}\right| = |\lambda - 2\lambda + 2| = |2-\lambda|$ que es estable si $|2-\lambda| < 1\ o\ 1 < \lambda < 3$ y para esos valores de λ es $x = 0$ es inestable.

Por ejemplo si tomamos $x_0 = 0.001$ y $\lambda = 1.5$, el punto fijo es repelido por $x = 0$ y atraído hacia $x = \frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{1}{3} = 0.33 \ldots$

.Ahora analicemos los puntos periódicos de periodo 2(los puntos periódicos $x = p$ de periodo n de la función $f(x)$son los que cumplen que $p = f^n(p)$y $p \neq f^k(p)$ para $1 \leq k < n$).

Los dos puntos fijos de $f(x) = \lambda x(1-x)$: $x = 0$ y $x = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ son también puntos fijos de $f^2(x), f^3(x), \ldots\ldots$, y son puntos periódicos de periodo 1. Como la función $f(x) = \lambda x(1-x)$ es cuadrática la función $f^2(x)$ va a ser de grado 4 y la ecuación $f^2(x) = x$ va a tener 4 raíces (reales o complejas) . Analicemos para que λ son reales las dos raíces adicionales de $f^2(x) = x$:

$$f^2(x) - x = \lambda^2 x(1-x)[1 - \lambda x(1-x)] - x = 0$$

$$x[\lambda^2(1-x)(1-\lambda x + \lambda x^2) - 1] = 0$$

$$x[\lambda^3x^3 - 2\lambda^3x^2 + (\lambda^2+\lambda^3)x + (1-\lambda^2)] = 0$$

Pero sabemos que $x = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ también es raíz y

$$\begin{array}{ccccc}
 & \lambda^3 & -2\lambda^3 & \lambda^2+\lambda^3 & 1-\lambda^2 \\
\frac{\lambda-1}{\lambda} & & \lambda^2(\lambda-1) & \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) & (\lambda+1)(\lambda-1) \\
\hline
 & \lambda^3 & -\lambda^2(\lambda+1) & \lambda(\lambda+1) & 0
\end{array}$$

Entonces $x(x - \frac{\lambda-1}{\lambda})(\lambda^3x^2 - \lambda^2(\lambda+1)x + \lambda(\lambda+1)) = 0$

$\lambda x(x - \frac{\lambda-1}{\lambda})(\lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda+1)x + (\lambda+1)) = 0$ (I)

Si x_2 y x_3 son las raíces de $\lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda+1)x + (\lambda+1)$ entonces

$x_2 = \frac{\lambda(\lambda+1) - \sqrt{\lambda^2(\lambda+1)^2 - 4\lambda^2(\lambda+1)}}{2\lambda^2} = \frac{\lambda+1}{2\lambda} - \frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda^2}$ y

$x_3 = \frac{\lambda+1}{2\lambda} + \frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda^2}$ Para que existan x_2, x_3 reales debe ocurrir

$\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3) > 0.$

O sea $\lambda < -1$ o $\lambda > 3$.

Si λ >0 entonces $\frac{\lambda+1}{2\lambda} > \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{\lambda+1}{2\lambda} + \frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda^2} > \frac{\lambda+1}{2\lambda} > \frac{1}{2}$ y

$x_2 = \frac{\lambda+1}{2\lambda} - \frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda^2}$ Va a ser menor de $\frac{1}{2}$ si

$$\frac{\lambda+1}{2\lambda} - \frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda^2} < \frac{1}{2}$$

$-\frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda^2} < \frac{-1}{2\lambda}$ o $(\lambda+1)(\lambda-3) > 1$ o $\lambda^2 - 2\lambda - 4 > 0$ o sea para

$$\lambda > 1 + \sqrt{5} \approx 3.26$$

Además $f(x_2) = \lambda x_2(1 - x_2)$ (II) pero de (I) y usando la teorema de Viette,

$$x_2 + x_3 = \frac{\lambda+1}{\lambda} = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

Y $$x_2 x_3 = \frac{\lambda+1}{\lambda^2}$$

Entonces $1 - x_2 = x_3 - \frac{1}{\lambda}$ y $x_2 x_3 = \frac{\lambda+1}{\lambda^2}$.Sustituyendo en (II)

$$f(x_2) = \lambda x_2\left(x_3 - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda x_2 x_3 - x_2 = \lambda\frac{(\lambda+1)}{\lambda^2} - x_2 = \frac{\lambda+1}{\lambda} - x_2 = x_3$$

Similarmente $f(x_3) = x_2$ y empezando en uno de esos dos puntos se produce un ciclo de periodo 2.

Analicemos la convergencia de $f^2(x)$ comenzando con un $x_0 \in (0,1)$, o sea la convergencia de las iteraciones $x_{n+1} = f^2(x_n)$ con $x_0 \in (0,1)$. Los puntos fijos de $f^2(x)$ son $0, \frac{\lambda-1}{\lambda}, x_2\ y\ x_3$ (estos dos últimos los puntos periódicos de periodo 2) son estables o atractores si el módulo de la derivada en esos puntos es menor que 1:

$$\left|\frac{d}{dx} f^2(x)\right| < 1$$

Y $\left|\frac{d}{dx} f^2(x)\right| = \left|\frac{d}{dx}(f(f(x))\right| = \left|f'\big(f(x)\big) * f'(x)\right| = |(\lambda - 2\lambda^2 x(1-x))(\lambda - 2\lambda x)|$

Para $x=0$, $\left|\frac{d}{dx}f^2(0)\right| = \lambda^2$ o sea $x = 0$ seria atractor o estable si $\lambda^2 < 1$ o $-1 < \lambda < 1$

Para $x = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, $\left|\frac{d}{dx}f^2(\frac{\lambda-1}{\lambda})\right| = |(2\lambda^2 - 5\lambda + 4)(2-\lambda)|$ pero

$2\lambda^2 - 5\lambda + 4 > 0\ \ \forall\lambda$ Pues $D = b^2 - 4ac = 25 - 4*4*2 = -7 < 0$ y $a = 2 > 0$

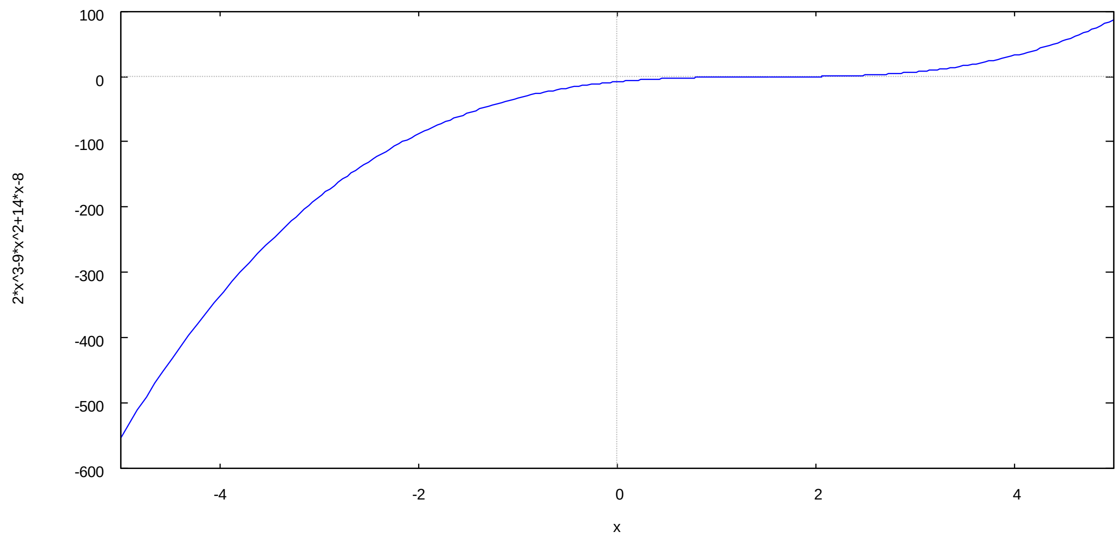
Entonces el signo de $(2\lambda^2 - 5\lambda + 4)(2-\lambda)$ es el de $2-\lambda$.

Si $\lambda > 2$, $\left|\frac{d}{dx}f^2(x)\right| = (2\lambda^2 - 5\lambda + 4)(\lambda - 2) < 1$ si $2\lambda^3 - 9\lambda^2 + 14\lambda - 8 < 0$

Con wxMaxima:

f(x):=2*x^3-9*x^2+14*x-8;

plot2d(f(x),[x,-5,5]);



Y escribiendo como $\lambda^3 - \frac{9}{2}\lambda^2 + 7\lambda - 4 < 0$. Las raíces de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se calculan cambiando $\lambda = y + d$ y escogiendo el $d = \frac{-a}{3}$ para transformar la ecuación en

$y^3 + py + q = 0$ con $p = 3d^2 + 2ad + b = 3*\frac{9}{4} - 2*\frac{9}{2}*\frac{3}{2} + 7 = \frac{27-54+28}{4} = \frac{1}{4}$ y

$$q = d^3 + ad^2 + bd + c = \frac{27}{8} - \frac{9}{2}*\frac{9}{4} + 7*\frac{3}{2} - 4 = \frac{27 - 81 + 84 - 32}{8} = \frac{-1}{4}$$

Y las raíces son $y_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

Y $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{1}{64} + \frac{1}{64*27} = \frac{28}{64*27} = \frac{7}{16*27}$

Y y tiene una única raíz real que es aproximadamente 1.91 y $\lambda = y + d \approx 1.91 + 1.5 \approx 2.41$

O sea si $\lambda > 2.41$e, punto $x = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ es atractor de $f^2(x)$

Para $x = x_2$, $\left|\frac{d}{dx} f^2(x_2)\right| = |(\lambda - 2\lambda^2 x_2(1 - x_2))(\lambda - 2\lambda x_2)| = |\lambda^2(1 - 2x_2 - 2\lambda x_2(1 - 3x_2 + 2{x_2}^2))|$

Igualmente para $x = x_3$,

$$\left|\frac{d}{dx} f^2(x_3)\right| = |(\lambda - 2\lambda^2 x_3(1 - x_3))(\lambda - 2\lambda x_3)| = |\lambda^2(1 - 2x_3 - 2\lambda x_3(1 - 3x_3 + 2{x_3}^2))|$$

Podemos calcular los valores $\lambda\ para\ que$ $\left|\frac{d}{dx} f^2(x_2)\right| < 1$ o $\left|\frac{d}{dx} f^2(x_3)\right| < 1$ y como

$\left|\frac{d}{dx} f^2(x_2)\right| = |f'(f(x_2))f'(x_2)| = |f'(x_3)f'(x_2)| = |(\lambda - 2\lambda x_3)(\lambda - 2\lambda x_2)| = \lambda^2|(1 - 2x_3)(1 - 2x_2)| < 1$ o

$$-1 < \lambda^2(1 - 2x_3)(1 - 2x_2) < 1$$

$$-1 < \lambda^2(1 - 2(x_2 + x_3) + 4x_2x_3) < 1$$

$$-1 < \lambda^2(1 - 2\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda}\right) + 4\frac{\lambda + 1}{\lambda^2}) < 1$$

$$-1 < -\lambda^2 + 2\lambda + 4 < 1$$

$$1 > \lambda^2 - 2\lambda - 4 > -1$$

$0 > \lambda^2 - 2\lambda - 5$ o $\lambda^2 - 2\lambda - 3 > 0$ o sea los ceros del primer polinomio son

$\frac{2 \pm \sqrt{4+20}}{2} = 1 \pm \sqrt{6}$ y λ tiene que estar entre ellos y los ceros del segundo polinomio son -1 y 3 y λ debe ser menor que -1 o mayor que 3, pero como estamos considerando los $\lambda > 3$ para que existan los puntos x_2 y x_3, entonces

$$\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6}\ \approx 3.449)$$