Deber Seminario Investigación

Fausto Fabián Crespo Fernández

Demostrar que si $f(x)$ es continua y $p\ punto\ fijo$ se cumple que

$$p < f(x) < x \quad \forall x \in intervalo\ de\ p\ a\ s, que\ incluye\ a\ p\ pero\ no\ a\ s$$

Entonces $f^k(x) \to p\ cuando\ k \to \infty$.

Respuesta: Comenzando en cualquier punto x_0 del intervalo $de\ p\ a\ s$ tenemos la sucesión $\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \ldots .. \}$donde $x_{i+1} = f(x_i)$ y esta sucesión de decreciente pues

$x_{i+1} = f(x_i) < x_i$ ya que $f(x) < x \ \ \forall x \in intervalo\ de\ p\ a\ s, que\ incluye\ a\ p\ pero\ no\ a\ s$.

(Pues si empezamos en x_0 en el intervalo entonces la secuencia $\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \ldots .. \}$ va a estar en el intervalo pues como $s \geq x_0 > p$, entonces $x_1 = f(x_0) > p$ y

$x_1 = f(x_0) < x_0 \leq s$ y $x_1\ esta\ en\ el\ intervalo\ y$ así sucesivamente todos los elementos de la sucesión están el intervalo de p a s .)O sea la sucesión es decreciente y acotada inferiormente por p, por tanto tiene límite L

Y como $f(x)$ es continua $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(L)$ y además $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} f^k(x) = L$ y

$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_k = L$ (Pues la sucesión $f(x_k) = \{x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \ldots\}\ es\ una\ subsucesion\ de\ \{x_k\}\ \ que\ es\ convergente\ a\ L, y\ por\ tanto\ tambien\ converge\ a\ L$) , por tanto $f(L) = L$ y L es un punto fijo de $f(x)$. Pero como $f(x) < x$ el único punto fijo en ese intervalo es p y $L = p$ y por tanto $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = L = p$ o

$f^k(x) \to p\ cuando\ k \to \infty$.