Deber Seminario

Fausto Fabian Crespo Fernandez

Demostración de que los racionales positivos son contables usando una biyección especifica con los naturales

En la clase anterior usamos la siguiente biyección entre los racionales positivos y los naturales,

$f\left(\frac{p}{q}\right)=\sum_{i=2}^{q-1}\varphi(i)+k$ donde $\varphi(i)$ $es\ la\ funcion\ de\ Euler, o\ sea\ el\ numero\ de\ naturales\ menos\ que\ i\ y\ primo\ relativo\ con\ el$

Y $1\leq k\leq\varphi(q)$

O sea los racionales positivos los ordenamos de la siguiente forma:

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\dots.\right\}$$

Demostremos que es una biyección

Inyectiva) Supongamos sin pérdida de generalidad que tenemos 2 racionales positivos distintos $\frac{p}{q}$ y $\frac{p'}{q'}$ y que $q<q'$ entonces si

$f\left(\frac{p}{q}\right)=\sum_{i=2}^{q-1}\varphi(i)+k=f\left(\frac{p'}{q'}\right)=\sum_{i=2}^{q'-1}\varphi(i)+k'$ y

$1\leq k\leq\varphi(q)\ y\ 1\leq k'\leq\varphi(q')$ Entonces

$\sum_{i=q}^{q'-1}\varphi(i)=k-k'<k<\varphi(q)$ y

$\sum_{i=q+1}^{q'-1}\varphi(i)<0$ lo cual es imposible pues $\varphi(i)\geq 1$ y de hecho para $i\geq 3$

$\varphi(i)\geq 2$ Pues 1 y $i-1$ siempre son primos relativos con i.

Análogamente si $q'<q$ y $f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\frac{p'}{q'}\right)$ llegamos a una contradicción. Por tanto

$q=q'$ y entonces si $f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\frac{p'}{q'}\right)$ entonces $k=k'$ y entonces en el conjunto de los primos relativos con $q=q'$, los números p y p' ocupan posiciones similares, como asumimos que tomamos elementos de este conjunto de menos a mayor ,

Y $p'=p$. Con lo que es inyectaba.

Sobreyectiva) Para todo $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ tenemos que dos casos, el primero es existe q tal que $\sum_{i=2}^{q-1}\varphi(i)<n<\sum_{i=2}^{q}\varphi(i)$ y entonces podemos escoger el numero

$\frac{p}{q}$ (Racional positivo) con p el entero positivo en la posición $n-\sum_{i=2}^{q-1}\varphi(i)$ dentro del conjunto de los primos relativos con q y entonces $f\left(\frac{p}{q}\right)=\sum_{i=2}^{q-1}\varphi(i)+k=$

$\sum_{i=2}^{q-1}\varphi(i)+n-\sum_{i=2}^{q-1}\varphi(i)=n$. El segundo caso es cuando existe q tal que $\sum_{i=2}^{q-1}\varphi(i)=n$

Entonces podemos escoger el racional positivo $\frac{p}{q-1}$ donde p es el último elemento del conjunto del conjunto de los primos relativos con q

$$f\left(\frac{p}{q-1}\right)=\sum_{i=2}^{q-2}\varphi(i)+\varphi(q-1)=\sum_{i=2}^{q-1}\varphi(i)=n$$

Por tanto es sobreyectiva y es una biyeccion.