Wintersemester 2022/23

Automaten und Berechenbarkeit - Übung 06

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Aufgabe 1 Untersuchen Sie, ob die folgenden Sprachen über $\{a, b\}$ bzw. $\{a, b, c\}$ kontextfrei sind:

(a) $L_1 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^*, \#_a(w) < \#_b(w) < \#_c(w)\}$ Ann: sei $L_1 \in CF \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in L_1 \; mit \; \mid x \mid \geq n : \exists x = uv_1\tilde{v}v_2w \; mit \; \mid v_1v_2 \mid \geq 1, \mid v_1\tilde{v}v_2 \mid \leq n : \forall i \in \mathbb{N} : uv_1^i\tilde{v}v_2^iw \in L_1$:

$Wähle\ x = a^n b^{n+1} c^{n+2},\ mit$

$u = a^n$
$v_1 = b^{k_1}$
$\tilde{v} = b$
$v_2 = b^{k_2}$
$w = bc^n$
$mit\ k_1 + k_2 = n - 1$

$\xRightarrow{i=0} a^n b^{n+1-k_1-k_2} c^{n+2} \xRightarrow{|v_1v_2|\geq 1} L_1 \notin CF$

(b) $L_2 = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}, n + m = k\}$ $G_2 = (\{a, b, c\}, \{S, R\}, S, R)$

$$Mit\ R =: \begin{cases} S & \rightarrow & Rc \\ R & \rightarrow & aRc \mid Rbc \mid a \mid b \end{cases}$$

(c) $L_3 = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}, n \cdot m = k\}$ Ann: sei $L_3 \in CF \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in L_3 \; mit \; \mid x \mid \geq n : \exists x = uv_1\tilde{v}v_2w \; mit \; \mid v_1v_2 \mid \geq 1, \mid v_1\tilde{v}v_2 \mid \leq n : \forall i \in \mathbb{N} : uv_1^i\tilde{v}v_2^iw \in L_3$:

$Wähle\ x = a^n b^n c^{n^2},\ mit$

$u = a^{n-k_1-k_2-k_3}$
$v_1 = a^{k_1}$
$\tilde{v} = a^{k_2}$
$v_2 = a^{k_3}$
$w = b^n c^{n^2}$
$mit\ k_1 + k_2 + k_3 \leq n$

$\xRightarrow{i=0} a^{n-k_1-k_3} b^n c^{n^2} \Rightarrow L_3 \notin CF$

$Oder:$

$u = a^n$
$v_1 = b^{k_1}$
$\tilde{v} = b^{k_2}$
$v_2 = b^{k_3}$
$w = c^{n^2}$
$mit\ k_1 + k_2 + k_3 = n$

$\xRightarrow{i=0} a^n b^{k_2} c^{n^2} \Rightarrow L_3 \notin CF$

$Oder:$

$u = a^n b^n$
$v_1 = c^{k_1}$
$\tilde{v} = c^{k_2}$
$v_2 = c^{k_3}$
$w = c^{n^2-k_1-k_2-k_3}$
$mit\ k_1 + k_2 + k_3 \leq n$

$\overset{i=0}{\Longrightarrow} a^n b^n c^{n^2-k_1-k_3} \Rightarrow L_3 \notin CF$
Man könnte auch noch in a und b oder in b und c pumpen, ebenso würde man durch pumpen ein nicht akzeptierbares Wort erhalten.

(d) $A = \{0^n 1^{n+m} 0^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n > m > 0\}$ Ann: sei $A \in CF \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in A\ mit\ \mid x \mid \geq n : \exists x = uv_1\tilde{v}v_2w\ mit\ \mid v_1v_2 \mid \geq 1, \mid v_1\tilde{v}v_2 \mid \leq n : \forall i \in \mathbb{N} : uv_1^i\tilde{v}v_2^iw \in A$:

$W\ddot{a}hle\ x = 0^n 1^{n+m} 0^m,\ mit$

$u = 0^{n-k_1-k_2-k_3}$
$v_1 = 0^{k_1}$
$\tilde{v} = 0^{k_2}$
$v_2 = 0^{k_3}$
$w = 1^{n+m}0^m$
$mit\ k_1 + k_2 + k_3 \leq n$

$\overset{i=0}{\Longrightarrow} 0^{n-k_1-k_3} 1^{n+m} 0^m \Rightarrow A \notin CF$
Auch hier gibt es mehrere Möglichkeiten, wie bei (c)

(e) $L_4 = \{x\$y \mid x, y \in \{a,b\}^*, \#_a(x) = \mid y \mid\}$ $G_2 = (\{a,b\}, \{S,R,K\}, S, R)$

$$Mit\ R =: \begin{cases} S & \rightarrow & aRa \mid aRb \mid bK \mid \$ \\ R & \rightarrow & bR \mid aRa \mid aRb \mid \$ \\ K & \rightarrow & aRa \mid aRb \mid bK \mid \$ \end{cases}$$

(f) $D = \{a^i b^j c^k \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ $G_2 = (\{a,b,c\}, \{S,R,A,B,C\}, S, R)$

$$Mit\ R =: \begin{cases} S & \rightarrow & a \mid b \mid aRb \mid aC \mid bC \mid aA \mid bB \\ R & \rightarrow & a \mid b \mid aRb \mid aC \mid bC \mid aA \mid bB \\ A & \rightarrow & a \mid aA \mid aC \\ B & \rightarrow & b \mid bB \mid bC \\ C & \rightarrow & c \mid cC \end{cases}$$

Aufgabe 2 Konstruieren Sie einen Kellerautomaten, der die Sprache $\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ akzeptiert.

$$M = (\{a,b\}, \{A, B, \Box\}, \{Z_0, Z_{ende}\}, \delta, Z_0, \{Z_{Ende}\})$$

Mit:

$$\begin{cases} (Z_0, a, \Box) & \rightarrow & (\mathrm{Z}_0, A\Box) \\ (Z_0, a, A) & \rightarrow & (\mathrm{Z}_0, AA) \\ (Z_0, a, B) & \rightarrow & (\mathrm{Z}_0, \lambda) \\ (Z_0, \lambda, \Box) & \rightarrow & (\mathrm{Z}_{ende}) \\ (Z_0, b, \Box) & \rightarrow & (\mathrm{Z}_0, B\Box) \\ (Z_0, b, A) & \rightarrow & (\mathrm{Z}_0, \lambda) \\ (Z_0, b, B) & \rightarrow & (\mathrm{Z}_0, BB) \end{cases}$$