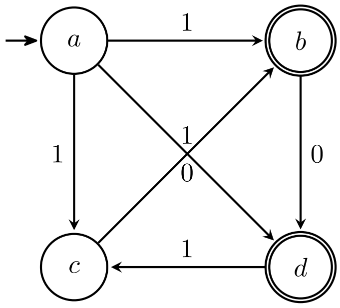
Automaten und Berechenbarkeit - Übung 03

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Aufgabe 1

NFA $M = (\{0,1\}, \{a,b,c,d\}, \delta, \{a,d\}, \{b,d\})$ δ:



Zustand	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a	$\emptyset$	$\{b,c,d\}$
b	$\{d\}$	$\emptyset$
c	$\{b\}$	$\emptyset$
d	$\emptyset$	$\{c\}$

(a)

$$\begin{aligned}
\delta^*(\{a\}, 1001) &= \bigcup_{z\in\{a\}} \delta^*(\delta(\{a\},1), 001) \\
&= \delta^*(\{b,c,d\}, 001) \\
&= \bigcup_{z\in\{b,c,d\}} \delta^*(\delta(\{b,c,d\},0), 01) \\
&= \delta^*(\{d\}, 01) \cup \delta^*(\{b\}, 01) \cup \delta^*(\emptyset, 01) \\
&= \delta^*(\delta(\{d\},0),1) \cup \delta^*(\delta(\{b\},0),1) \\
&= \emptyset \cup \delta^*(\{d\},1) \\
&= \delta^*(\delta(\{d\},1),\lambda) \\
&= \delta^*(\{c\},\lambda) \\
&= \{c\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^*(\{d\}, 1000) &= \delta^*(\delta(\{d\},1), 000) \\
&= \delta^*(\{c\}, 000) \\
&= \delta^*(\delta(\{c\},0), 00) \\
&= \delta^*(\{b\}, 00) \\
&= \delta^*(\delta(\{b\},0), 0) \\
&= \delta^*(\{d\}, 0) \\
&= \delta^*(\delta(\{d\},0), \lambda) \\
&= \delta^*(\emptyset, \lambda) = \emptyset
\end{aligned}$$

(b)

Bestimmen Sie $\{w \in \{0,1\}^* \mid \delta^*(\{a\}, w) \cap \{d\} \neq \emptyset\}$!

$\delta^*(\{a\}, w)$... Menge der möglichen Endzustände, in denen man landet, wenn man w abgearbeitet hat.

Da $\delta^*(a, w) \cup \{d\} \neq \emptyset$ gelten soll, muss $d \in \delta^*(a, w)$. 1. Fall: direkt aus a nach d. 2. Fall aus a nach b und dann nach d. 3. Fall aus a nach c und dann nach d. 4. Fall: einer der drei Fälle und dann aus d nach c und dann nach b und dann wieder nach d.

Aus Fall 1 bis 4 ergeben sich folgende Muster in den akzeptierten Wörtern: $\begin{cases} 1. & w = 1 = a \\ 2. & w = 10 = b \\ 3. & w = 100 = c \\ 4. & w = a100|b100|c100 \end{cases}$

Der 4. Fall kann als einziger immer wieder angewandt werden ohne, dass die Akzeptanz von w beeinflusst wird. Somit ergibt sich: $\{w \in \{0,1\}^* \mid \delta^*(\{a\}, w) \cap \{d\} \neq \emptyset\} = \underline{\{1, 10, 100\} \cdot \{100\}^*}$

(c)

Übergangstabelle des gegebenen NFA M:

Zustand	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a	$\emptyset$	$\{b, c, d\}$
b	$\{d\}$	$\emptyset$
c	$\{b\}$	$\emptyset$
d	$\emptyset$	$\{c\}$
$\{b, c, d\}$	$\{d, b\}$	$\{c\}$
$\{d, b\}$	$\{d\}$	$\{c\}$

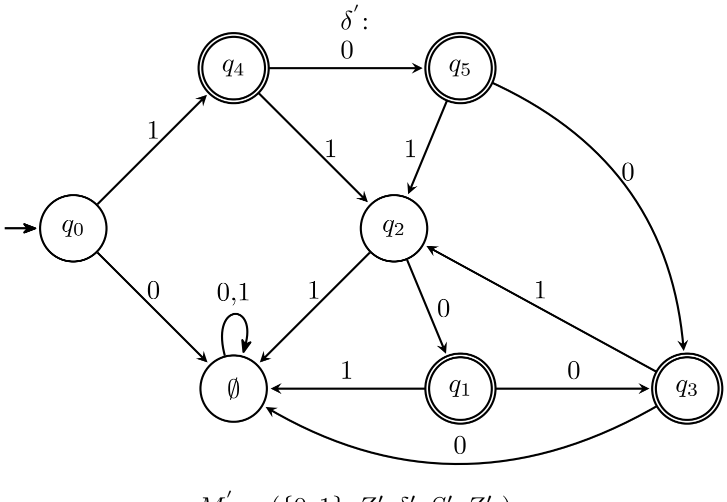
Bzw.

Zustand	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_0	$\emptyset$	$\{q_4\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_4	$\{q_5\}$	$\{q_2\}$
q_5	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$

Bestimmung der Einträge in der Übergangstabelle:

$$\begin{aligned} \delta^*(\{d, b\}, 0) &= \delta^*(\emptyset \cup \{d\}, \lambda) = \{d\} \\ \delta^*(\{d, b\}, 1) &= \delta^*(\{\mathrm{c}\} \cup \emptyset, \lambda) = \{c\} \\ \delta^*(\{b, c, d\}, 0) &= \delta^*(\{d\} \cup \{b\} \cup \emptyset, \lambda) = \{d, b\} \\ \delta^*(\{b, c, d\}, 1) &= \delta^*(\emptyset \cup \emptyset \cup \{c\}) \end{aligned}$$

DFA M':



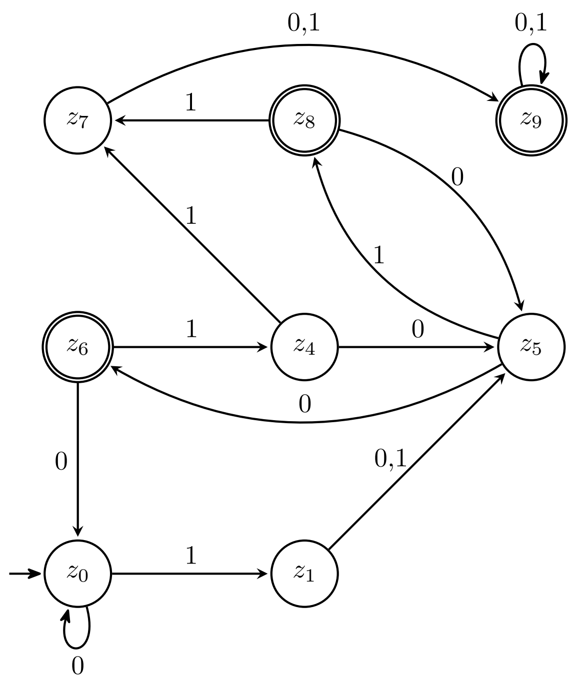
$M' = (\{0,1\}, Z', \delta', S', Z'_E)$

Aufgabe 2

(a)

Der DFA ist mittel Potenzmengenkonstruktion aus dem NFA in (b) entstanden. Die Zustände z_2 und z_3 wurden entfernt, da Sie nicht erreichbar sind. Im Teil (b) habe ich den NFA bewiesen. Da dieser DFA auf jenem beruht gilt er ebenso.

$M' = (\{0,1\}, Z', \delta', S', Z'_E)$ δ:



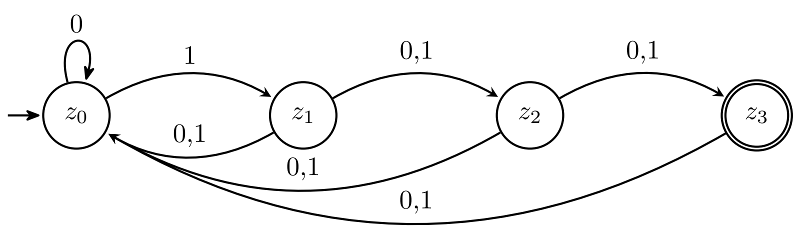
Zustand	0	1
z_0	$\{z_0\}$	$\{z_1\}$
z_1	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_2\}$
z_2	$\{z_0, z_3\}$	$\{z_0, z_3\}$
z_3	$\{z_0\}$	$\{z_0\}$
$\{z_0, z_1\}$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2\}$
$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_3\}$	$\{z_0, z_1, z_3\}$
$\{z_0, z_3\}$	$\{z_0\}$	$\{z_0, z_1\}$
$\{z_0, z_1, z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$
$\{z_0, z_1, z_3\}$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2\}$
$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$

Bzw.

Zustand	0	1
z_0	$\{z_0\}$	$\{z_1\}$
z_1	$\{z_5\}$	$\{z_5\}$
z_2	$\{z_6\}$	$\{z_6\}$
z_3	$\{z_0\}$	$\{z_0\}$
z_4	$\{z_5\}$	$\{z_7\}$
z_5	$\{z_6\}$	$\{z_8\}$
z_6	$\{z_0\}$	$\{z_4\}$
z_7	$\{z_9\}$	$\{z_9\}$
z_8	$\{z_5\}$	$\{z_7\}$
z_9	$\{z_9\}$	$\{z_9\}$

(b)

$M = (\{0,1\}, Z, \delta, S, Z_E)$ δ:

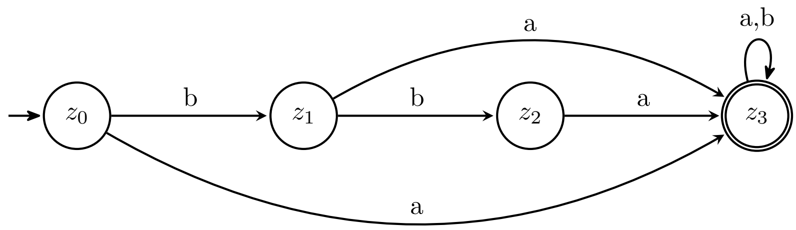


Zustand	0	1
z_0	$\{z_0\}$	$\{z_1\}$
z_1	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_2\}$
z_2	$\{z_0, z_3\}$	$\{z_0, z_3\}$
z_3	$\{z_0\}$	$\{z_0\}$

Beweis. ” $\subseteq$ ” $\mid w \mid \geq 3$ ist trivial. Wir sehen, dass der Automat frühestens nach einer Wortlänge von 3 ein Wort akzeptiert. Denn es muss mindestens $z_0 \to z_1 \to z_2 \to z_3$ abgearbeitet sein um akzeptiert zu werden. Der Übergang von $z_0 \to z_1$ bestimmt das 3. letzte Zeichen. Da $z_0 \to z_1$ nur durch eine 1 möglich ist, ist garantiert, dass das 3. letzte Zeichen eine 1 ist. □

Beweis. ” $\supseteq$ ” Jedes Wort ist lesbar, da in jedem Zustand eine 0 oder 1 gelesen werden kann. Jedoch: kann ein Wort akzeptiert werden, so kann es nach beliebiger Anzahl von 0 und 1 in z_0 nach z_1 wandern, insofern der dritt letzte Buchstabe eine 1 ist (andern falls bleibt es in z_0). von dort kann es dann mit 2 variablen Buchstaben nach z_3 wo es schließlich akzeptiert wird. □

Aufgabe 3



Zustand	a	b
z_0	z_3	z_1
z_1	z_3	z_2
z_2	z_3	$\emptyset$
z_3	z_3	z_3

Beweis. ” $\subseteq$ ” Mittels eines a’s kann in jedem Zustand ein Wort akzeptiert werden. Sollte jedoch nach den ersten 2 gelesenen Buchstaben kein a dabei gewesen sein, also der Fall, dass man in z_2 sich befindet, so kann nur durch ein a in z_3 übergegangen werden. Alle anderen Wörter sind nicht lesbar, z_2 bildet bei Eingabe eines b’s in $\emptyset$ ab. Somit ist sichergestellt, dass der NFA nur die Wörter akzeptiert, die laut Aufgabenstellung zulässig sind. □

Beweis. ” $\supseteq$ ” Jedes Wort, dass ein a unter den ersten 3 Buchstaben enthält landet in z_3. Von dort aus kann es beliebig lang sein und immer akzeptiert werden. □

Aufgabe 4

$$G_1 = (\{a,b\}, \{S, A, B, E1, E2\}, S, R) \text{ mit } R : \begin{cases} S & \to aA \mid Bb \\ A & \to E_1 b \mid b \\ B & \to aE_2 \mid a \\ E_1 & \to aA \\ E_2 & \to Bb \end{cases}$$