Automaten und Berechenbarkeit - Übung 04

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Pumping Lemma (PL)

Sei $A \in REG$. $\exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in A :| x |> n : x = uvw$:

1. $| v |\geq 1$

2. $| uv |\leq n$

3. $\forall i \geq 0 : uv^i w \in A \Leftrightarrow \{u\}\{v\}^*\{w\} \subseteq A$

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die folgenden Sprachen regulär sind oder nicht:

(a) $A = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) = 2\#_b(w)\}$

Beweis. $Ann : \ A \in REG \Rightarrow \ es \ gilt \ PL \Leftrightarrow \ Sei \ k \ Pumpingzahl :$

$$Wähle\ x = \underbrace{a^{j_1}}_{u}\underbrace{a^{j_2}}_{v}\underbrace{a^{2k-j}b^k}_{w}, j_1 + j_2 = j, \underbrace{j_2 \geq 1}_{*}, | x |\geq k$$

$$Sei\ x = uvw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gemäß\ PL :$$

$$| v |\geq 1\ und\ \ | uv |\leq n \Rightarrow uv = a^j \mid j \leq k$$

$$v^i = a^{j_2{}^i}$$

$$\overset{i=0}{\Longrightarrow} x = a^{j_1}a^{j_2{}^0}a^{2k-j}b^k = a^{j_1}\lambda a^{2k-j}b^k = \underbrace{a^{2k-j_2}b^k}_{x} \overset{*}{\Rightarrow} x \notin A \quad ↯$$

□

(b) $B = \{0^n 10^m \mid n > m\}$

Beweis. $Ann : \ B \in REG \Rightarrow \ es \ gilt \ PL \Leftrightarrow \ Sei \ k \ Pumpingzahl :$

$$Wähle\ x = ..., | x |\geq k$$

$$Sei\ x = uvw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gemäß\ PL :| v |\geq 1, | uv |\leq n$$

$$\rightarrow v = ...$$

□

(c) $C = \{x\$y \mid x, y \in \{a, b\}^*, \#_a(x) = \#_b(y)\}$

Beweis. $Ann : \ C \in REG \Rightarrow \ es \ gilt \ PL \Leftrightarrow \ Sei \ k \ Pumpingzahl :$

$$Wähle\ x = ..., | x |\geq k$$

$$Sei\ x = uvw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gemäß\ PL :| v |\geq 1, | uv |\leq n$$

$$\rightarrow v = ...$$

□

(d) $D = \{xy \mid x, y \in \{a, b\}^*, \#_a(x) = \#_b(y)\}$

Beweis. $Ann : \ D \in REG \Rightarrow \ es \ gilt \ PL \Leftrightarrow \ Sei \ k \ Pumpingzahl :$

$$Wähle\ x = ..., | x |\geq k$$

$$Sei\ x = uvw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gemäß\ PL :| v |\geq 1, | uv |\leq n$$

$$\rightarrow v = ...$$

□

(e) $E = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) - \#_b(w) \equiv 0 \mod 3\}$

Beweis. $Ann: \ E \in REG \Rightarrow \ es\ gilt\ PL \Leftrightarrow \ Sei\ k\ Pumpingzahl:$

$$W\ddot{a}hle\ x = ..., |\ x\ | \geq k$$
$$Sei\ x = uvw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gem\ddot{a}ß\ PL: |\ v\ | \geq 1, |\ uv\ | \leq n$$
$$\rightarrow v = ...$$

□

(f) $F = \{0^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ **als Sprache über dem Alphabet** $\{0\}$

Beweis. $Ann: \ F \in REG \Rightarrow \ es\ gilt\ PL \Leftrightarrow \ Sei\ k\ Pumpingzahl:$

$$W\ddot{a}hle\ x = ..., |\ x\ | \geq k$$
$$Sei\ x = uvw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gem\ddot{a}ß\ PL: |\ v\ | \geq 1, |\ uv\ | \leq n$$
$$\rightarrow v = ...$$

□

(g) Die Menge aller Wörter w **über** $\{0,1\}$**, die als Binärzahl betrachtet durch 3 teilbar sind.**

Beweis. $Ann: \ G \in REG \Rightarrow \ es\ gilt\ PL \Leftrightarrow \ Sei\ k\ Pumpingzahl:$

$$W\ddot{a}hle\ x = ..., |\ x\ | \geq k$$
$$Sei\ x = uvw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gem\ddot{a}ß\ PL: |\ v\ | \geq 1, |\ uv\ | \leq n$$
$$\rightarrow v = ...$$

□

(h) $H = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, w = w^R\}$ **(Menge aller Palindorome über** $\{a,b\}$**)**

Beweis. $Ann: \ H \in REG \Rightarrow \ es\ gilt\ PL \Leftrightarrow \ Sei\ k\ Pumpingzahl:$

$$W\ddot{a}hle\ x = ..., |\ x\ | \geq k$$
$$Sei\ x = uvw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gem\ddot{a}ß\ PL: |\ v\ | \geq 1, |\ uv\ | \leq n$$
$$\rightarrow v = ...$$

□

Aufgabe 2

Geben Sie für die Sprache $A = \{0^i1^j \mid i,j \geq 0\}$. Alle Äquivalenzklassen bezüglich der Relation R_A an und beweisen Sie ihre Behauptung.