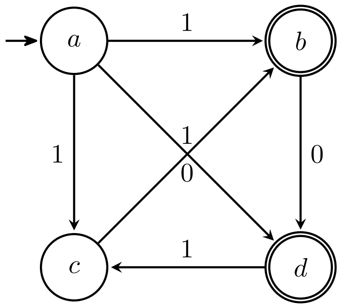
# Automaten und Berechenbarkeit - Übung 03

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

## Aufgabe 1

NFA $M = (\{0,1\}, \{a,b,c,d\}, \delta, \{a,d\}, \{b,d\})$ $\delta$:




| Zustand | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| a | $\emptyset$ | $\{b,c,d\}$ |
| b | $\{d\}$ | $\emptyset$ |
| c | $\{b\}$ | $\emptyset$ |
| d | $\emptyset$ | $\{c\}$ |

### (a)

$$\begin{aligned}
\delta^*(\{a\}, 1001) &= \bigcup_{z\in\{a\}} \delta^*(\delta(\{a\},1), 001) \\
&= \delta^*(\{b,c,d\}, 001) \\
&= \bigcup_{z\in\{b,c,d\}} \delta^*(\delta(\{b,c,d\},0), 01) \\
&= \delta^*(\{d\}, 01) \cup \delta^*(\{b\}, 01) \cup \delta^*(\emptyset, 01) \\
&= \delta^*(\delta(\{d\},0), 1) \cup \delta^*(\delta(\{b\},0), 1) \\
&= \emptyset \cup \delta^*(\{d\}, 1) \\
&= \delta^*(\delta(\{d\},1), \lambda) \\
&= \delta^*(\{c\}, \lambda) \\
&= \{c\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^*(\{d\}, 1000) &= \delta^*(\delta(\{d\},1), 000) \\
&= \delta^*(\{c\}, 000) \\
&= \delta^*(\delta(\{c\},0), 00) \\
&= \delta^*(\{b\}, 00) \\
&= \delta^*(\delta(\{b\},0), 0) \\
&= \delta^*(\{d\}, 0) \\
&= \delta^*(\delta(\{d\},0), \lambda) \\
&= \delta^*(\emptyset, \lambda) = \emptyset
\end{aligned}$$

## (b)

Bestimmen Sie $\{w \in \{0,1\}^* \mid \delta^*(\{a\}, w) \cap \{d\} \neq \emptyset\}$!

$\delta^*(\{a\}, w)$... Menge der möglichen Endzustände, in denen man landet, wenn man $w$ abgearbeitet hat.

Da $\delta^*(a, w) \cup \{d\} \neq \emptyset$ gelten soll, muss $d \in \delta^*(a, w)$. 1. Fall: direkt aus $a$ nach $d$. 2. Fall aus $a$ nach $b$ und dann nach $d$. 3. Fall aus $a$ nach $c$ und dann nach $d$. 4. Fall: einer der drei Fälle und dann aus $d$ nach $c$ und dann nach $b$ und dann wieder nach $d$.

Aus Fall 1 bis 4 ergeben sich folgende Muster in den akzeptierten Wörtern: $\begin{cases} 1. & w = 1 = a \\ 2. & w = 10 = b \\ 3. & w = 100 = c \\ 4. & w = a100|b100|c100 \end{cases}$

Der 4. Fall kann als einziger immer wieder angewandt werden ohne, dass die Akzeptanz von $w$ beeinflusst wird. Somit ergibt sich: $\{w \in \{0,1\}^* \mid \delta^*(\{a\}, w) \cap \{d\} \neq \emptyset\} = \underline{\{1, 10, 100\} \cdot \{100\}^*}$

## (c)

Übergangstabelle des gegebenen NFA $M$:

| Zustand | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| a | $\emptyset$ | $\{b, c, d\}$ |
| b | $\{d\}$ | $\emptyset$ |
| c | $\{b\}$ | $\emptyset$ |
| d | $\emptyset$ | $\{c\}$ |
| $\{b, c, d\}$ | $\{d, b\}$ | $\{c\}$ |
| $\{d, b\}$ | $\{d\}$ | $\{c\}$ |

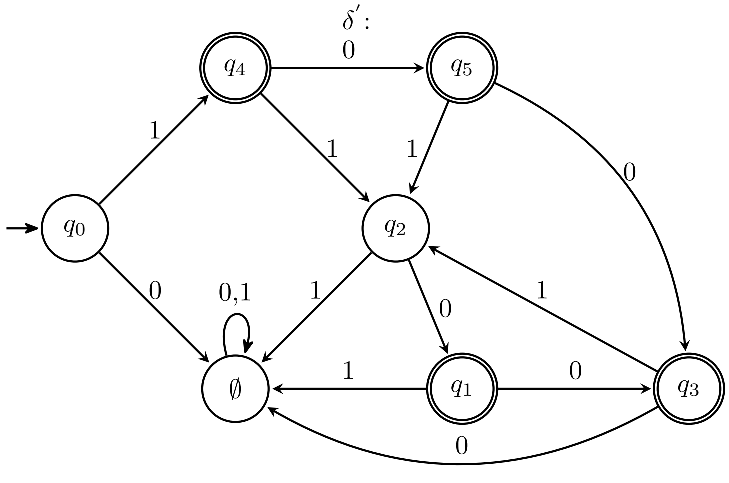
Bzw.

| Zustand | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $q_0$ | $\emptyset$ | $\{q_4\}$ |
| $q_1$ | $\{q_3\}$ | $\emptyset$ |
| $q_2$ | $\{q_1\}$ | $\emptyset$ |
| $q_3$ | $\emptyset$ | $\{q_2\}$ |
| $q_4$ | $\{q_5\}$ | $\{q_2\}$ |
| $q_5$ | $\{q_3\}$ | $\{q_2\}$ |

Bestimmung der Einträge in der Übergangstabelle:

$$\begin{aligned} \delta^*(\{d, b\}, 0) &= \delta^*(\emptyset \cup \{d\}, \lambda) = \{d\} \\ \delta^*(\{d, b\}, 1) &= \delta^*(\{\mathrm{c}\} \cup \emptyset, \lambda) = \{c\} \\ \delta^*(\{b, c, d\}, 0) &= \delta^*(\{d\} \cup \{b\} \cup \emptyset, \lambda) = \{d, b\} \\ \delta^*(\{b, c, d\}, 1) &= \delta^*(\emptyset \cup \emptyset \cup \{c\}) \end{aligned}$$

DFA $M'$:



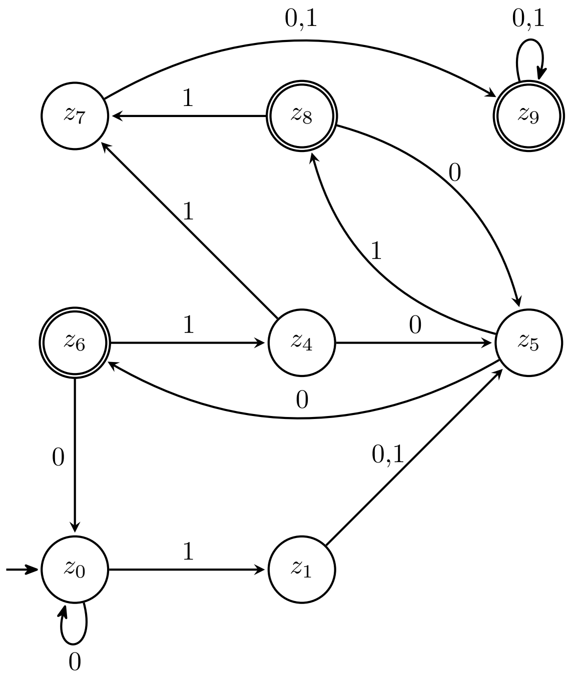

$M' = (\{0, 1\}, Z', \delta', S', Z'_E)$

# Aufgabe 2

## (a)

Der DFA ist mittel Potenzmengenkonstruktion aus dem NFA in (b) entstanden. Die Zustände $z_2$ und $z_3$ wurden entfernt, da Sie nicht erreichbar sind. Im Teil (b) habe ich den NFA bewiesen. Da dieser DFA auf jenem beruht gilt er ebenso.

$M' = (\{0,1\}, Z', \delta^{'}, S', Z'_E)$ $\delta$:



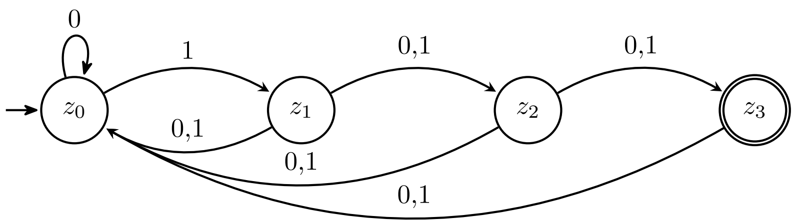

| Zustand | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $z_0$ | $\{z_0\}$ | $\{z_1\}$ |
| $z_1$ | $\{z_0, z_2\}$ | $\{z_0, z_2\}$ |
| $z_2$ | $\{z_0, z_3\}$ | $\{z_0, z_3\}$ |
| $z_3$ | $\{z_0\}$ | $\{z_0\}$ |
| $\{z_0, z_1\}$ | $\{z_0, z_2\}$ | $\{z_0, z_1, z_2\}$ |
| $\{z_0, z_2\}$ | $\{z_0, z_3\}$ | $\{z_0, z_1, z_3\}$ |
| $\{z_0, z_3\}$ | $\{z_0\}$ | $\{z_0, z_1\}$ |
| $\{z_0, z_1, z_2\}$ | $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ | $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ |
| $\{z_0, z_1, z_3\}$ | $\{z_0, z_2\}$ | $\{z_0, z_1, z_2\}$ |
| $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ | $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ | $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ |

Bzw.

| Zustand | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $z_0$ | $\{z_0\}$ | $\{z_1\}$ |
| $z_1$ | $\{z_5\}$ | $\{z_5\}$ |
| $z_2$ | $\{z_6\}$ | $\{z_6\}$ |
| $z_3$ | $\{z_0\}$ | $\{z_0\}$ |
| $z_4$ | $\{z_5\}$ | $\{z_7\}$ |
| $z_5$ | $\{z_6\}$ | $\{z_8\}$ |
| $z_6$ | $\{z_0\}$ | $\{z_4\}$ |
| $z_7$ | $\{z_9\}$ | $\{z_9\}$ |
| $z_8$ | $\{z_5\}$ | $\{z_7\}$ |
| $z_9$ | $\{z_9\}$ | $\{z_9\}$ |

## (b)

$M = (\{0,1\}, Z, \delta, S, Z_E)$ $\delta$:

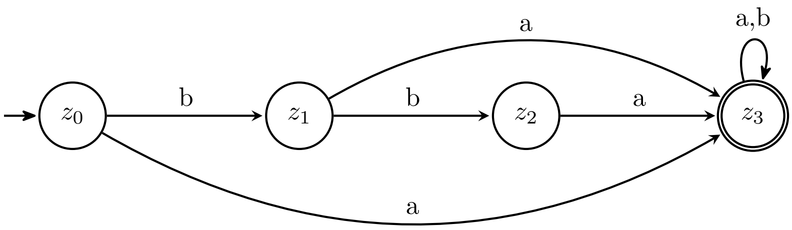


| Zustand | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $z_0$ | $\{z_0\}$ | $\{z_1\}$ |
| $z_1$ | $\{z_0, z_2\}$ | $\{z_0, z_2\}$ |
| $z_2$ | $\{z_0, z_3\}$ | $\{z_0, z_3\}$ |
| $z_3$ | $\{z_0\}$ | $\{z_0\}$ |

*Beweis.* " $\subseteq$ " $\mid w \mid \geq 3$ ist trivial. Wir sehen, dass der Automat frühestens nach einer Wortlänge von 3 ein Wort akzeptiert. Denn es muss mindestens $z_0 \to z_1 \to z_2 \to z_3$ abgearbeitet sein um akzeptiert zu werden. Der Übergang von $z_0 \to z_1$ bestimmt das 3. letzte Zeichen. Da $z_0 \to z_1$ nur durch eine 1 möglich ist, ist garantiert, dass das 3. letzte Zeichen eine 1 ist. □

*Beweis.* " $\supseteq$ " Jedes Wort ist lesbar, da in jedem Zustand eine 0 oder 1 gelesen werden kann. Jedoch: kann ein Wort akzeptiert werden, so kann es nach beliebiger Anzahl von 0 und 1 in $z_0$ nach $z_1$ wandern, insofern der dritt letzte Buchstabe eine 1 ist (andern falls bleibt es in $z_0$). von dort kann es dann mit 2 variablen Buchstaben nach $z_3$ wo es schließlich akzeptiert wird. □

## Aufgabe 3




| Zustand | a | b |
|---|---|---|
| $z_0$ | $z_3$ | $z_1$ |
| $z_1$ | $z_3$ | $z_2$ |
| $z_2$ | $z_3$ | $\emptyset$ |
| $z_3$ | $z_3$ | $z_3$ |

*Beweis.* " $\subseteq$ " Mittels eines a's kann in jedem Zustand ein Wort akzeptiert werden. Sollte jedoch nach den ersten 2 gelesenen Buchstaben kein a dabei gewesen sein, also der Fall, dass man in $z_2$ sich befindet, so kann nur durch ein a in $z_3$ übergegangen werden. Alle anderen Wörter sind nicht lesbar, $z_2$ bildet bei Eingabe eines b's in $\emptyset$ ab. Somit ist sichergestellt, dass der NFA nur die Wörter akzeptiert, die laut Aufgabenstellung zulässig sind. □

*Beweis.* " $\supseteq$ " Jedes Wort, dass ein a unter den ersten 3 Buchstaben enthält landet in $z_3$. Von dort aus kann es beliebig lang sein und immer akzeptiert werden. □

## Aufgabe 4

$$G_1 = (\{a, b\}, \{S, A, B, E1, E2\}, S, R) \text{ mit } R : \begin{cases} S & \to aA \mid Bb \\ A & \to E_1 b \mid b \\ B & \to aE_2 \mid a \\ E_1 & \to aA \\ E_2 & \to Bb \end{cases}$$