Wintersemester 2022/23

Automaten und Berechenbarkeit - Übung 05

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Pumping Lemma (PL)

Sei $A \in REG$. $\exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in A : \mid x \mid > n : x = uvw :$

1. $\mid v \mid \geq 1$

2. $\mid uv \mid \leq n$

3. $\forall i \geq 0 : uv^i w \in A \Leftrightarrow \{u\}\{v\}^*\{w\} \subseteq A$

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die folgenden Sprachen regulär sind oder nicht:

(a) $A = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) = 2\#_b(w)\}$

Beweis. $Ann: \; A \in REG \Rightarrow \; es \; gilt \; PL \Leftrightarrow \; Sei \; k \; Pumpingzahl:$

$$\begin{aligned}
&Wähle \; x = \underbrace{a^{j_1}}_{u}\underbrace{a^{j_2}}_{v}\underbrace{a^{2k-j}b^k}_{w}, j_1 + j_2 = j, \underbrace{j_2 \geq 1}_{*}, \mid x \mid \geq k \\
&Sei \; x = uvw \; eine \; geiegnete \; Zerlegung \; gemäß \; PL: \\
&\mid v \mid \geq 1 \; und \; \mid uv \mid \leq k \Rightarrow uv = a^j \mid j \leq k \\
&v^i = a^{j_2{}^i} \\
&\overset{i=0}{\Longrightarrow} x = a^{j_1}a^{j_2{}^0}a^{2k-j}b^k = a^{j_1}\lambda a^{2k-j}b^k = \underbrace{a^{2k-j_2}b^k}_{x} \overset{*}{\Rightarrow} x \notin A \quad \lightning
\end{aligned}$$

□

(b) $B = \{0^n 1 0^m \mid n > m\}$

Beweis. $Ann: \; B \in REG \Rightarrow \; es \; gilt \; PL \Leftrightarrow \; Sei \; k \; Pumpingzahl:$

$$\begin{aligned}
&Wähle \; x = \underbrace{0^k}_{u}\underbrace{0^{k-m}}_{v}\underbrace{10^m}_{w}, \mid x \mid \geq k, k > m \\
&Sei \; x = uvw \; eine \; geiegnete \; Zerlegung \; gemäß \; PL : \mid v \mid \geq 1, \mid uv \mid \leq k \\
&\mid v \mid = \underbrace{k - m \geq 1}_{k>m} \text{ und } \mid uv \mid = k \leq k \\
&\overset{i=0}{\Longrightarrow} x = uv^0w = 0^m 1 0^m \notin B \quad \lightning
\end{aligned}$$

□

(c) $C = \{x\$y \mid x, y \in \{a, b\}^*, \#_a(x) = \#_b(y)\}$

Beweis. $Ann: \; C \in REG \Rightarrow \; es \; gilt \; PL \Leftrightarrow \; Sei \; k \; Pumpingzahl:$

$$\begin{aligned}
&Wähle \; x = \underbrace{a^{k-m}}_{u}\underbrace{a^m}_{v}\underbrace{\$b^k}_{w}, \mid x \mid \geq k, m \geq 1 \\
&Sei \; x = uvw \; eine \; geiegnete \; Zerlegung \; gemäß \; PL : \mid v \mid \geq 1, \mid uv \mid \leq k \\
&\mid v \mid = m \geq 1 \; und \; \mid uv \mid = k \leq k \\
&\overset{i=0}{\Longrightarrow} x = uv^0w = a^{k-m}\$b^k \notin C \quad \lightning
\end{aligned}$$

□

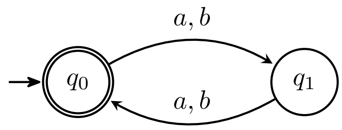
(d) $D = \{xy \mid x, y \in \{a,b\}^*, \#_a(x) = \#_b(y)\}$

Jedes Wort gerader Länge ist in D. Wenn $w \in \{a,b\}^*$ gerade ist, dann gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass $\mid w \mid = 2k \Rightarrow w$ kann in zwei Teile der Länge k aufgeteilt werden: $x, y \in \{a,b\}^* : \mid x \mid = \mid y \mid = k \Rightarrow w \in D$ $\square$

Jedes Wort in L ist gerader Länge. Für jedes Wort in D mit gerader Länge gilt: *Sei* $w \in D$ nach Definition von D folgt: $\exists x, y \in \{a,b\}^* : \mid x \mid = \mid y \mid$ und $w = xy \Rightarrow \mid w \mid = \mid x \mid + \mid y \mid = 2 \mid x \mid \Rightarrow w$ hat gerade Länge. $\square$

$D \in REG$.

$$M = (\{a,b\}, \{q_0, q_1\}, \delta, \{q_0\}, \{q_0\})$$



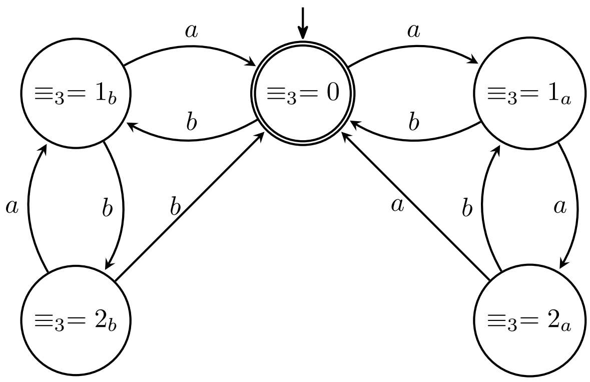
δ :

Zustand	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$

$\square$

(e) $E = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) - \#_b(w) \equiv 0 \mod 3\}$

y Wir können einen DFA M konstruieren, der die Sprache E akzeptiert.
Sei $M = (\{a,b\}, \{\equiv_3 = 0, \equiv_3 = 1_a, \equiv_3 = 2_a, \equiv_3 = 1_b, \equiv_3 = 2_b, \delta, \{\equiv_3 = 0\}, \{\equiv_3 = 0\})$



δ :

Zustand	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\equiv_3 = 0$	$\{\equiv_3 = 1_a\}$	$\{\equiv_3 = 1_b\}$
$\equiv_3 = 1_a$	$\{\equiv_3 = 2_a\}$	$\{\equiv_3 = 0\}$
$\equiv_3 = 2_a$	$\{\equiv_3 = 0\}$	$\{\equiv_3 = 1_a\}$
$\equiv_3 = 1_b$	$\{\equiv_3 = 0\}$	$\{\equiv_3 = 2_b\}$
$\equiv_3 = 2_b$	$\{\equiv_3 = 1_b\}$	$\{\equiv_3 = 0\}$

(f) $F = \{0^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ als Sprache über dem Alphabet $\{0\}$

Beweis. $Ann: \ F \in REG \Rightarrow \ es \ gilt \ PL \Leftrightarrow \ Sei \ k \ Pumpingzahl:$

$$Wähle \ x = \underbrace{0^{k-m}}_{u}\underbrace{0^m}_{v}\underbrace{0^k}_{w}, \mid x \mid \geq k; k \geq m \geq 1$$

$$Sei \ x = uvw \ eine \ geiegnete \ Zerlegung \ gemäß \ PL : \mid v \mid \geq 1, \mid uv \mid \leq k$$

$$\mid v \mid = k - m \geq 1 \ und \ \mid uv \mid = k \leq k$$

$$\xRightarrow{i=2} x = 0^{k-2}0^{m^2}0^k = 0^k0^m0^k = 0^{2^k+m}$$

$$Betrachten \ wir \ die \ Exponenten:$$

$$2^k < 2^k + m \leq 2^k + k, \quad da \ gilt: k \geq m \geq 1$$

$$mit \ k < 2^k \ folgt$$

$$2^k < 2^k + m < 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow uv^2w \notin F \quad ↯$$

□

(g) Die Menge aller Wörter w über $\{0,1\}$, die als Binärzahl betrachtet durch 3 teilbar sind.

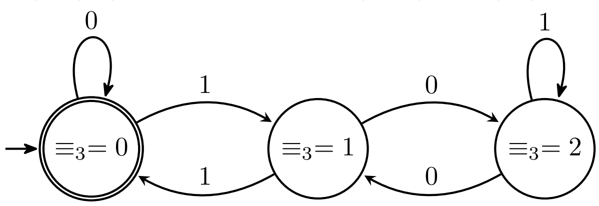
Beweis. $Beh:$

$$K_1 = [\lambda] = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ w ist als Binärzahl betrachtet durch 3 teilbar mit Rest 0}\}$$
$$K_2 = [1] = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ w ist als Binärzahl betrachtet durch 3 teilbar mit Rest 1}\}$$
$$K_3 = [10] = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ w ist als Binärzahl betrachtet durch 3 teilbar mit Rest 2}\}$$

$K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{a,b\}^*, K_i \ sind \ paarweise \ disjunkt.$ □

□

$$M = (\{0,1\}, \{\equiv_3 = 0, \equiv_3 = 1, \equiv_3 = 2\}, \delta, \{\equiv_3 = 0\}, \{\equiv_3 = 0\})$$



$\delta:$

Zustand	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\equiv_3 = 0$	$\{\equiv_3 = 0\}$	$\{\equiv_3 = 1\}$
$\equiv_3 = 1$	$\{\equiv_3 = 2\}$	$\{\equiv_3 = 0\}$
$\equiv_3 = 1$	$\{\equiv_3 = 1\}$	$\{\equiv_3 = 2\}$

Wenn eine Zahl durch 3 Teilbar ist gibt es nur drei Möglichkeiten. Der Rest kann 0,1 oder 2 sein. Im DFA M sind diese drei Zustände angegeben und in δ ihre Übergänge definiert. Man betrachtet die Wirkung der einzelnen Buchstaben auf das gesamte Wort und erkennt: wenn man in $\equiv_3 = 0$ ist ändert eine 0 nichts an der Teilbarkeit durch 3. Eine eins hingegen ehröht den Rest bei Division durch 3 auf 1. Deshalb landet man in $\equiv_3 = 1$. Wenn nun direkt eine 1 kommt wandert man wieder zurück, da dann $11_{bin} = 3_{dez}$ angehängt wurde, was durch 3 mit Rest 0 teilbar ist. Fügt man hingegen eine 0 an und hat das Teilwort 10 angehängt, so landet man in $\equiv_3 = 2$, da $10_{bin} = 2_{dez}$. Von hier aus kann man mit einer 0 zurück, da $101_{bin} = 4_dez \equiv_3 = 1$. Sollte man eine 1 lesen bleibt man solange im Zustand bis eine 0 kommt. Dies liegt daran, dass $1011_{bin} = 11_{dez} \equiv_3 = 2, 10111_{bin} = 23 \equiv_3 = 2, ...$ $\Rightarrow G \in REG.$

(h) $H = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, w = w^R\}$ **(Menge aller Palindorome über** $\{a,b\}$**)**

Beweis. $Ann: \; H \in REG \Rightarrow \; es \; gilt \; PL \Leftrightarrow \; Sei \; k \; Pumpingzahl:$

$$\begin{aligned}
&W\ddot{a}hle \; x = \underbrace{a^{k-m}}_{u}\underbrace{a^m}_{v}\underbrace{b^k a^k}_{w}, \mid x \mid \geq k, m \geq 1 \\
&Sei \; x = uvw \; eine \; geiegnete \; Zerlegung \; gem\ddot{a}\ss \; PL: \mid v \mid \geq 1, \mid uv \mid \leq k \\
&\mid v \mid = m \geq 1, \mid uv \mid = k \leq k \\
&\xRightarrow{i=0} x = a^{k-m} b^k a^k \notin H \quad \lightning
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

Geben Sie für die Sprache $A = \{0^i 1^j \mid i, j \geq 0\}$. Alle Äquivalenzklassen bezüglich der Relation R_A an und beweisen Sie ihre Behauptung.

Beweis. $Beh:$

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left[0^i\right] = \{0^i 1^j \mid j = 0, i \geq 0\} \\
K_2 &= \left[0^i 1^{j+1}\right] = \{0^i 1^{j+1} \mid i, j \geq 0\} \\
K_3 &= \left[0^i 1^{j+1} 0\right] = \emptyset
\end{aligned}$$

$K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{a,b\}^*, K_i$ *sind paarweise disjunkt.*
K_1 beschreibt die Klasse, welche alle möglichen Worte hat, die ausschließlich aus Nullen bestehen. K_2 ist heirzu definitiv disjunkt, da wenn $j = 0$ durch $1^{j+1} = 1^1 = 1$ folgt und somit jedes Wort in K_2 mindestens eine eins hat. K_3 beschreibt alle nicht zu akzeptierenden Wörter. Da K_1, K_2 akzeptiert werden sind beide Klassen zu K_3 disjunkt. $\Rightarrow$ von R_A ist 3. $\Rightarrow A \in REG$. □