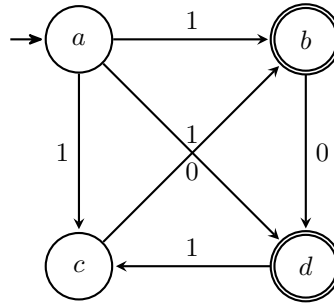


## AUTOMATEN UND BERECHENBARKEIT - ÜBUNG 03

FELIX TISCHLER, MATRIKELNUMMER: 191498

## Aufgabe 1

NFA  $M = (\{0, 1\}, \{a, b, c, d\}, \delta, \{a, d\}, \{b, d\})$   $\delta$ :

Zustand	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a	$\emptyset$	$\{b, c, d\}$
b	$\{d\}$	$\emptyset$
c	$\{b\}$	$\emptyset$
d	$\emptyset$	$\{c\}$

(a)

$$\begin{aligned}
 \delta^*(\{a\}, 1001) &= \bigcup_{z \in \{a\}} \delta^*(\delta(\{a\}, 1), 001) \\
 &= \delta^*(\{b, c, d\}, 001) \\
 &= \bigcup_{z \in \{b, c, d\}} \delta^*(\delta(\{b, c, d\}, 0), 01) \\
 &= \delta^*(\{d\}, 01) \cup \delta^*(\{b\}, 01) \cup \delta^*(\emptyset, 01) \\
 &= \delta^*(\delta(\{d\}, 0), 1) \cup \delta^*(\delta(\{b\}, 0), 1) \\
 &= \emptyset \cup \delta^*(\{d\}, 1) \\
 &= \delta^*(\delta(\{d\}, 1), \lambda) \\
 &= \delta^*(\{c\}, \lambda) \\
 &= \{c\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta^*(\{d\}, 1000) &= \delta^*(\delta(\{d\}, 1), 000) \\
 &= \delta^*(\{c\}, 000) \\
 &= \delta^*(\delta(\{c\}, 0), 00) \\
 &= \delta^*(\{b\}, 00) \\
 &= \delta^*(\delta(\{b\}, 0), 0) \\
 &= \delta^*(\{d\}, 0) \\
 &= \delta^*(\delta(\{d\}, 0), \lambda) \\
 &= \delta^*(\emptyset, \lambda) = \emptyset
 \end{aligned}$$

(b)

Bestimmen Sie  $\{w \in \{0,1\}^* \mid \delta^*(\{a\}, w) \cap \{d\} \neq \emptyset\}$ !

$\delta^*(\{a\}, w)$ ... Menge der möglichen Endzustände, in denen man landet, wenn man  $w$  abgearbeitet hat.

Da  $\delta^*(a, w) \cup \{d\} \neq \emptyset$  gelten soll, muss  $d \in \delta^*(a, w)$ . 1. Fall: direkt aus  $a$  nach  $d$ . 2. Fall aus  $a$  nach  $b$  und dann nach  $d$ . 3. Fall aus  $a$  nach  $c$  und dann nach  $d$ . 4. Fall: einer der drei Fälle und dann aus  $d$  nach  $c$  und dann nach  $b$  und dann wieder nach  $d$ .

Aus Fall 1 bis 4 ergeben sich folgende Muster in den akzeptierten Wörtern:

$$\begin{cases} 1. & w = 1 = a \\ 2. & w = 10 = b \\ 3. & w = 100 = c \\ 4. & w = a100|b100|c100 \end{cases}$$

Der 4. Fall kann als einziger immer wieder angewandt werden ohne, dass die Akzeptanz von  $w$  beeinflusst wird. Somit ergibt sich:  $\{w \in \{0,1\}^* \mid \delta^*(\{a\}, w) \cap \{d\} \neq \emptyset\} = \underline{\{1, 10, 100\} \cdot \{100\}^*}$

(c)

Übergangstabelle des gegebenen NFA  $M$ :

Zustand	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a	$\emptyset$	$\{b, c, d\}$
b	$\{d\}$	$\emptyset$
c	$\{b\}$	$\emptyset$
d	$\emptyset$	$\{c\}$
$\{b, c, d\}$	$\{d, b\}$	$\{c\}$
$\{d, b\}$	$\{d\}$	$\{c\}$

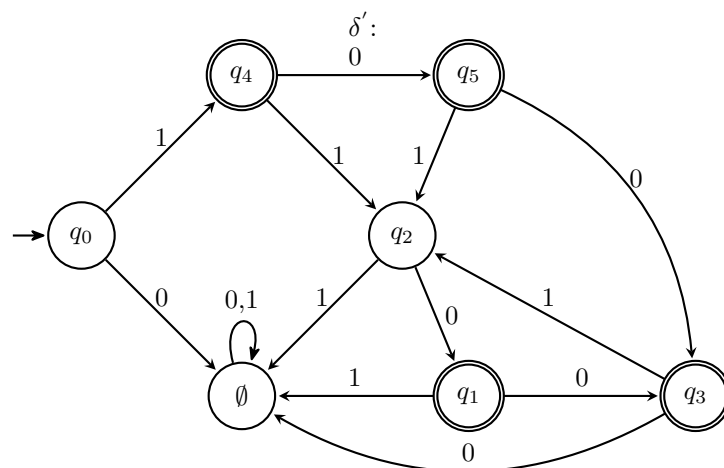
Bzw.

Zustand	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$q_0$	$\emptyset$	$\{q_4\}$
$q_1$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$q_2$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
$q_3$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$q_4$	$\{q_5\}$	$\{q_2\}$
$q_5$	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$

Bestimmung der Einträge in der Übergangstabelle:

$$\begin{aligned} \delta^*(\{d, b\}, 0) &= \delta^*(\emptyset \cup \{d\}, \lambda) = \{d\} \\ \delta^*(\{d, b\}, 1) &= \delta^*(\{c\} \cup \emptyset, \lambda) = \{c\} \\ \delta^*(\{b, c, d\}, 0) &= \delta^*(\{d\} \cup \{b\} \cup \emptyset, \lambda) = \{d, b\} \\ \delta^*(\{b, c, d\}, 1) &= \delta^*(\emptyset \cup \emptyset \cup \{c\}) \end{aligned}$$

DFA  $M'$ :



$$M' = (\{0,1\}, Z', \delta', S', Z'_E)$$

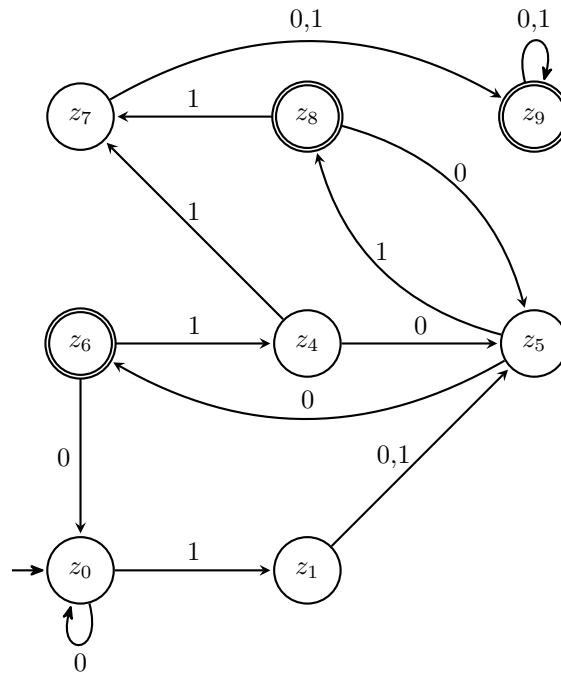
## Aufgabe 2

(a)

Der DFA ist mittel Potenzmengenkonstruktion aus dem NFA in (b) entstanden. Die Zustände  $z_2$  und  $z_3$  wurden entfernt, da Sie nicht erreichbar sind. Im Teil (b) habe ich den NFA bewiesen. Da dieser DFA auf jenem beruht gilt er ebenso.

$$M' = (\{0, 1\}, Z', \delta', S', Z'_E)$$

$\delta$ :



Zustand	0	1
$z_0$	$\{z_0\}$	$\{z_1\}$
$z_1$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_2\}$
$z_2$	$\{z_0, z_3\}$	$\{z_0, z_3\}$
$z_3$	$\{z_0\}$	$\{z_0\}$
$\{z_0, z_1\}$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2\}$
$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_3\}$	$\{z_0, z_1, z_3\}$
$\{z_0, z_3\}$	$\{z_0\}$	$\{z_0, z_1\}$
$\{z_0, z_1, z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$
$\{z_0, z_1, z_3\}$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2\}$
$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$	$\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$

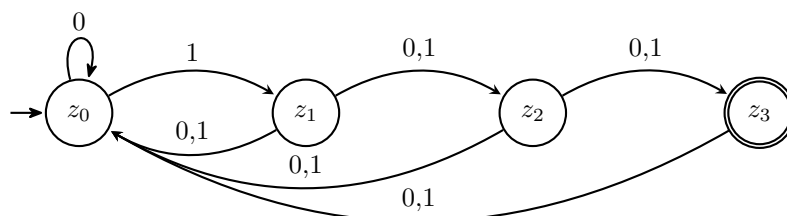
Bzw.

Zustand	0	1
$z_0$	$\{z_0\}$	$\{z_1\}$
$z_1$	$\{z_5\}$	$\{z_5\}$
$z_2$	$\{z_6\}$	$\{z_6\}$
$z_3$	$\{z_0\}$	$\{z_0\}$
$z_4$	$\{z_5\}$	$\{z_7\}$
$z_5$	$\{z_6\}$	$\{z_8\}$
$z_6$	$\{z_0\}$	$\{z_4\}$
$z_7$	$\{z_9\}$	$\{z_9\}$
$z_8$	$\{z_5\}$	$\{z_7\}$
$z_9$	$\{z_9\}$	$\{z_9\}$

(b)

$$M = (\{0, 1\}, Z, \delta, S, Z_E)$$

$\delta$ :

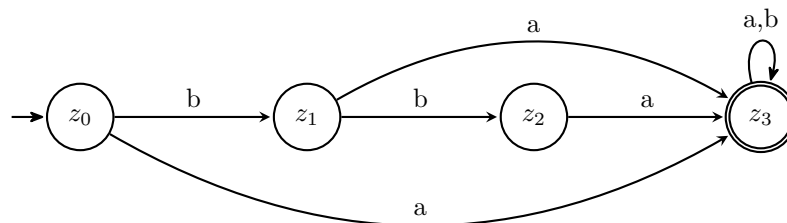


Zustand	0	1
$z_0$	$\{z_0\}$	$\{z_1\}$
$z_1$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_2\}$
$z_2$	$\{z_0, z_3\}$	$\{z_0, z_3\}$
$z_3$	$\{z_0\}$	$\{z_0\}$

*Beweis.* " $\subseteq$ "  $|w| \geq 3$  ist trivial. Wir sehen, dass der Automat frühestens nach einer Wortlänge von 3 ein Wort akzeptiert. Denn es muss mindestens  $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$  abgearbeitet sein um akzeptiert zu werden. Der Übergang von  $z_0 \rightarrow z_1$  bestimmt das 3. letzte Zeichen. Da  $z_0 \rightarrow z_1$  nur durch eine 1 möglich ist, ist garantiert, dass das 3. letzte Zeichen eine 1 ist.  $\square$

*Beweis.* " $\supseteq$ " Jedes Wort ist lesbar, da in jedem Zustand eine 0 oder 1 gelesen werden kann. Jedoch: kann ein Wort akzeptiert werden, so kann es nach beliebiger Anzahl von 0 und 1 in  $z_0$  nach  $z_1$  wandern, insofern der dritt letzte Buchstabe eine 1 ist (andern falls bleibt es in  $z_0$ ). von dort kann es dann mit 2 variablen Buchstaben nach  $z_3$  wo es schließlich akzeptiert wird.  $\square$

### Aufgabe 3



Zustand	a	b
$z_0$	$z_3$	$z_1$
$z_1$	$z_3$	$z_2$
$z_2$	$z_3$	$\emptyset$
$z_3$	$z_3$	$z_3$

*Beweis.* " $\subseteq$ " Mittels eines a's kann in jedem Zustand ein Wort akzeptiert werden. Sollte jedoch nach den ersten 2 gelesenen Buchstaben kein a dabei gewesen sein, also der Fall, dass man in  $z_2$  sich befindet, so kann nur durch ein a in  $z_3$  übergegangen werden. Alle anderen Wörter sind nicht lesbar,  $z_2$  bildet bei Eingabe eines b's in  $\emptyset$  ab. Somit ist sichergestellt, dass der NFA nur die Wörter akzeptiert, die laut Aufgabenstellung zulässig sind.  $\square$

*Beweis.* " $\supseteq$ " Jedes Wort, dass ein a unter den ersten 3 Buchstaben enthält landet in  $z_3$ . Von dort aus kann es beliebig lang sein und immer akzeptiert werden.  $\square$

### Aufgabe 4

$$G_1 = (\{a, b\}, \{S, A, B, E_1, E_2\}, S, R) \text{ mit } R : \begin{cases} S & \rightarrow aA \mid Bb \\ A & \rightarrow E_1b \mid b \\ B & \rightarrow aE_2 \mid a \\ E_1 & \rightarrow aA \\ E_2 & \rightarrow Bb \end{cases}$$