Wintersemester 2022/23

Automaten und Berechenbarkeit - Übung 05

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Aufgabe 1

Wir betrachten die Sprache $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \in \mathbb{N}, i = 0 \textit{ oder } j = k\}$

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L erzeugt.

$$G_1 = (\{a,b,c\}, \{S,A,B,C,K\}, S, R)$$

$$\text{mit } R: \begin{cases} S & \to bKc \mid aA \mid a \mid b \mid c \mid \lambda \\ K & \to bK \mid Kc \mid b \mid c \\ A & \to aA \mid bBc \\ B & \to bBc \mid bc \end{cases}$$

Initial wird entschieden ob a in dem Wort auftreten oder nicht. Wenn dies der Fall ist, dass a auftritt, dann muss $j = k$ sein. Hierfür ist das Nichtterminal A vorgesehen. In A können noch beliebig viele a hinzugefügt werden, bis man über geht in das erzeugen des ersten bc. b und c werden immer zusammen erzeugt und dies beliebig oft. Man kann mit den Nichtterminalen bc das Wort dann irgendwann beenden und hat die Bedingung $j = k$ sichergestellt. Sollte hingegen a überhaupt nicht vorkommen, so spielt es keine Rolle wie oft b und c auftreten. Hierfür ist das Nichtterminal K vorgesehen. In K kann jeder Zeit mit b oder c beendet werden oder ein b oder c erzeugt werden. Die Spezialfälle sind in S mit beachtet: Wenn a nicht existiert kann direkt mit b, c, λ beendet werden. Wenn a mindestens einmal existiert kann auch direkt beendet werden.

(b) L ist nicht regulär. Begründen Sie, dass man durch direkte Anwendung des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen **nicht** zeigen kann, dass L nicht regulär ist.

Angenommen wir könnten es mit dem PL zeigen, dann müssten wir $x = uvw$ so wählen, dass wir zeigen können, dass $L \notin REG$. Hier wird es allerdings problematisch. Wir können u nicht frei wählen. Dass einzige was wir aus dem PL wissen ist, dass $\mid uv \mid \leq n$, somit muss unter den ersten n Buchstaben unser u sein. Da wir nun nicht eindeutig bestimmen können ob und wie oft a, b, c in u, v vorkommen können wir auch nicht wissen ob a bspw. einmal vorkommt und somit b aufpumpbar wäre um $\underbrace{j = k}_{\text{Siehe Def. } L}$ zu verletzten.

Analog können wir auch jeden anderen Fall nicht kreieren in dem sich $L \notin REG$ mittels PL zeigen lässt.

(c) Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist. Um nun zu zeigen, dass $L \notin REG$ müssen wir die allgemeine Definition des PL für Reguläre Sprachen verwenden:

Sei $A \in REG$. $\exists p \geq 1$ $(Pumpinglänge)$ $: \forall uwv \in A : \mid uwv \mid \geq p : uwv = uxyzv :$

1. $\mid xy \mid \leq p$

2. $\mid y \mid \geq 1$

3. $\forall i \geq 0 : uxy^i zv \in A$

Die von uns bisher verwendete Version folgt einem Spezialfall in dem u und v leer sind. Diese Version des PL kann für deutlich mehr Sprachen die nicht-Regularität zeigen, da Sie striktere Voraussetzungen für A birgt.

Somit lässt sich nun zeigen:

Beweis. $Ann: \; L \in REG \Rightarrow \; es\ gilt\ PL \Leftrightarrow \; Sei\ p\ Pumpinglänge:$

$$Wähle\ wort = \underbrace{a^p}_{u} \underbrace{\underbrace{b^{k_x}}_{x} \underbrace{b^{k_y}}_{y} \underbrace{b^{k_z}}_{z}}_{v} \underbrace{c^p}_{w}, k_x + k_y + k_z = p, k_y \geq 1, \mid xy \mid \geq p$$

$$Sei\ wort = uxyzw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gemäß\ PL:$$

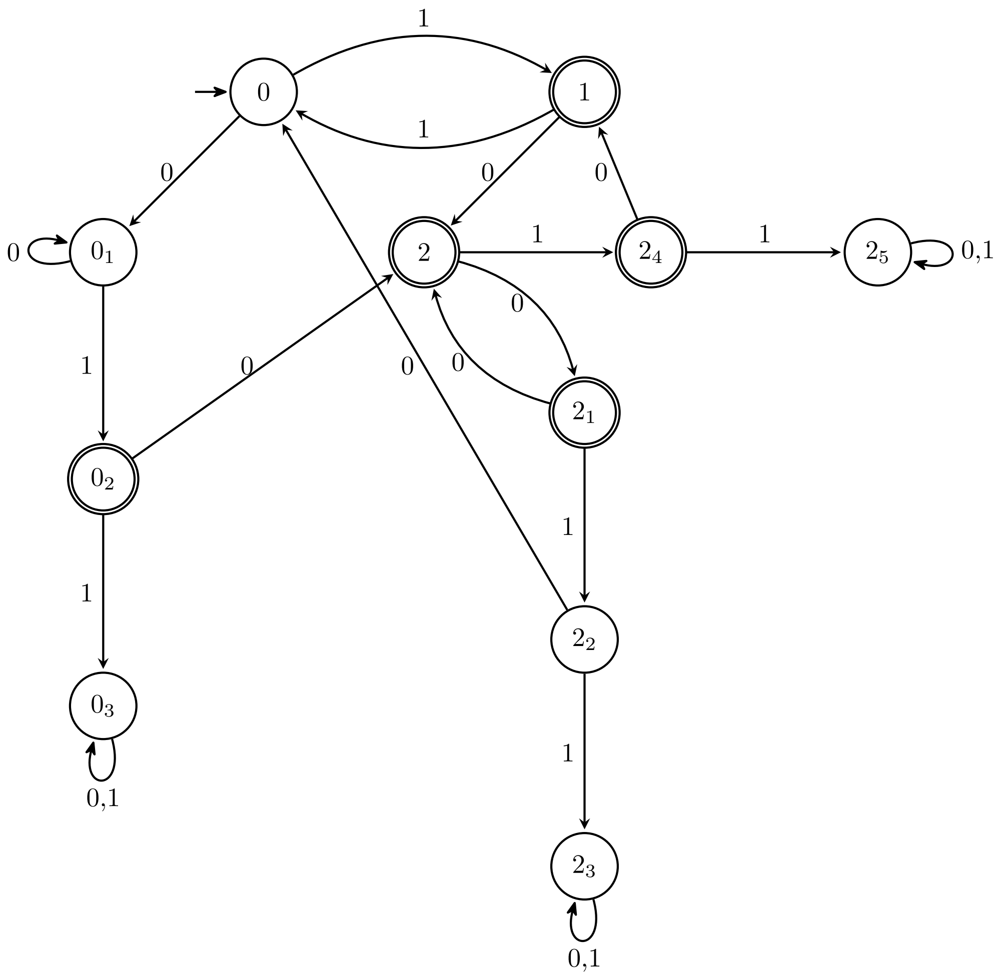
$$\stackrel{i=0}{\Longrightarrow} uxy^0 z = a^p b^{p-k_y} c^p \stackrel{p-k_y \neq p}{\Longrightarrow} L \notin REG$$

$\square$

Aufgabe 2

Gegeben sind die Sprachen $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_1(w) \equiv 0 \mod 3\}$ und
$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält das Teilwort 011 nicht$\}$.
Konstruieren Sie einen DFA M mit $L(M) = \overline{L_1} \cap L_2$

$$M = (\{0,1\}, \{0, 0_1, 0_2, 0_3, 1, 2, 2_1, 2_2, 2_3, 2_4, 2_5\}, \delta, \{0_1\}, \{0_2, 1, 2, 2_1, 2_4\})$$

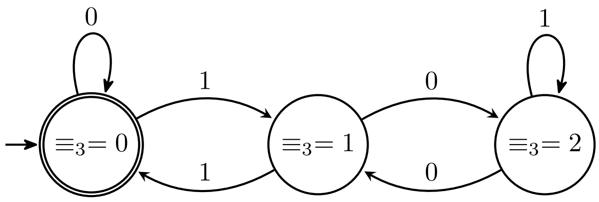


δ :

Zustand	0	1
0	0_1	1
0_1	0_1	0_2
0_2	2	0_3
0_3	0_3	0_3
1	2	0
2	2_1	2_4
2_1	2	2_2
2_2	0	2_3
2_3	2_3	2_3
2_4	1	2_5
2_5	2_5	2_5

Der Automat ist folgendermaßen entstanden: Ich habe den Automaten der letzten Übungsserie genommen in dem beschrieben wird wann eine binär Zahl durch 3 teilbar ist:

$$M_2 = (\{0,1\}, \{\equiv_3 = 0, \equiv_3 = 1, \equiv_3 = 2\}, \delta_2, \{\equiv_3 = 0\}, \{\equiv_3 = 0\})$$



δ_2 :

Zustand	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\equiv_3 = 0$	$[\equiv_3 = 0]$	$[\equiv_3 = 1]$
$\equiv_3 = 1$	$[\equiv_3 = 2]$	$[\equiv_3 = 0]$
$\equiv_3 = 1$	$[\equiv_3 = 1]$	$[\equiv_3 = 2]$

Von hier aus habe ich dann alle Fälle betrachtet in denen eine 0 gelesen wird und habe diese dann zu einem dedizierten Zustand weitergeleitet. In jedem dieser Fälle habe ich dann betrachtet wie sich sowohl die Nicht-Teilbarkeit durch 3 verhält, als auch ob ein neuer Zustand benötigt wird um das Teilwort 011 zu kapseln. Dieser Automat kann prinzipiell jedes Wort lesen. Wenn jedoch eine Sequenz 011 auftritt, egal wo man sich vorher befunden hat, so endet man in $0_3 \vee 2_3 \vee 2_5$. Somit ist wenn dieses Teilwort aufgetreten ist es nicht mehr möglich akzeptiert zu werden. In allen anderen fällen ist es möglich ein Wort zu lesen, dass akzeptiert wird, hierfür muss jedoch die Nicht-Teilbarkeit durch 3 gegeben sein. Dieses habe ich mittels dem Automaten der Übungsserie 4 abgeleitet. Jeder Zustand im Automaten besitzt neben der Information welche Zahlen vor ihm gelesen wurden auch die Information ob er durch 3 Teilbar ist oder nicht. Diese Informationen verteilen sich wie folgt: $0, 0_1, 2_2$ sind durch 3 teilbar. $1, 0_2, 2_1$ sind durch 3 Rest 1 teilbar und somit zu akzeptieren. Und $2, 2_4$ sind durch 3 Rest 2 teilbar und folglich auch zu akzeptieren.

Aufgabe 3

Es sei $L = \{xuxvx \mid x \in \{a, b\} \wedge u, v \in \{a, b\}^* \wedge \mid u \mid = \mid v \mid\}$

(a) Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Beweis. $Ann: \; L \in REG \Rightarrow \; es \; gilt \; PL \Leftrightarrow \; Sei \; p \; Pumpinglänge:$

$$W\ddot{a}hle\ wort = \underbrace{a}_{u}\underbrace{\underbrace{b^{k_x}}_{x}\underbrace{b^{k_y}}_{y}\underbrace{b^{k_z}}_{z}}_{v}\underbrace{aa^pa}_{w} = a \cdot b^p \cdot a \cdot a^p \cdot a \in L, k_x + k_y + k_z = p, k_y \geq 1, \mid xy \mid \geq p$$

$$Sei\ wort = uxyzw\ eine\ geiegnete\ Zerlegung\ gem\ddot{a}\ss\ PL:$$

$$\overset{i=0}{\Longrightarrow} uxy^0z = ab^{p-k_y}aa^pa \overset{p-k_y \neq p}{\Longrightarrow} \mid u \mid \neq \mid v \mid \Rightarrow L \notin REG$$

□

(b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L erzeugt..

$$G_2 = (\{a, b\}, \{S, R, L\}, S, P)$$

$$\text{mit } P: \begin{cases} S & \to aRa \mid bLb \\ R & \to aRa \mid bRb \mid aRb \mid bRa \mid a \\ L & \to aLa \mid bLb \mid aLb \mid bLa \mid b \end{cases}$$

Initial wird entschieden ob am Rand außen a oder b ist. Von dann an kann beliebig mit a oder b u und v befüllt werden. Jedoch merkt man sich ob man a oder b am Rand außen hat. das Wort kann dann zum Schluss nur in der Mitte den selben Buchstaben haben um akzeptiert zu werden.