Diskrete Strukturen - Übung 08

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Aussagen und Formeln

1.) *Sind die folgenden Schlussfolgerungen richtig oder falsch? Formalisieren Sie und überprüfen Sie, ob die Gesamtheit der jeweiligen Annahmen die angegebene Konsequenz zur Folge hat.*

a) *Anton ist ein Lügner oder Bertram war in Berlin oder Claudius ist kein Erpresser. Wenn Bertram nicht in Berlin war, dann ist Anton kein Lügner oder Claudius ist ein Erpresser. Folglich muss Bertram in Berlin gewesen sein.*

1. Anton ist Lügner $\vee$ Betram war in Berlin $\vee$ Claudius ist $\neg$Erpresser
2. Betram war $\neg$in Berlin $\Rightarrow$(Anton ist $\neg$Lügner $\vee$ Claudius ist kein Erpresser)
3. $\Longrightarrow$ Betram war in Berlin

Sei *A:= Anton ist ein Lügner*, *B:= Betram war in Berlin* und *C:= Claudius ist ein Erpresser*.

$$\underbrace{(A \vee B \vee C)}_{x1} \wedge \underbrace{(\neg B \Rightarrow (\neg A \vee \neg C))}_{x2} \Rightarrow B$$

Angenommen es sei $\neg B$. x1 und x2 wären weiterhin erfüllt und aus ihnen würde B folgen. Also führt die Annahme $\neg B$ zu B und dies ist ein Widerspruch. $\lightning$

b) *Wenn der Staatshaushalt nicht gekürzt wird, dann bleiben die Preise stabil dann und nur dann, wenn die Steuern erhöht werden. Der Staatshaushalt wird nicht gekürzt, wenn die Steuern erhöht werden. Wenn die Preise stabil bleiben, werden die Steuern nicht erhöht. Folglich werden die Steuern nicht erhöht.*

1. Staatshaushalt wird $\neg$gekürzt $\Rightarrow$ Preise bleiben stabil $\Leftrightarrow$ Steuern werden erhöht
2. Staatshaushalt wird $\neg$gekürzt $\Leftarrow$ Steuern werden erhöht
3. Preise bleiben stabil $\Rightarrow$ Steuern werden $\neg$erhöht
4. $\Longrightarrow$ Steuern werden $\neg$erhöht

Sei *A:= Staatshaushalt wird nicht gekürzt*, *B:= Preise bleiben stabil* und *C:= Steuern werden erhöht*.

$$\underbrace{((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C)}_{x1} \wedge \underbrace{(C \Rightarrow A)}_{x2} \wedge \underbrace{(B \Rightarrow \neg C)}_{x3} \Rightarrow \neg C$$

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$\neg C$	x1	x2	x3	(x1 $\wedge$ x2 $\wedge$ x3) $\Rightarrow \neg C$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1

D.h. unabhängig von A,B oder C ist die Aussage $(x1 \wedge x2 \wedge x3) \Rightarrow \neg C$ immer wahr. $\square$

2.)

a) *Bestimmen Sie die zugehörige Boolesche Funktion f_F für folgende aussagenlogischen Formel :*

$$F = \underbrace{((C \to \neg A) \wedge (\underbrace{(A \wedge \neg B) \to (B \vee \neg C)}_{*}))}_{**} \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$$

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg A$	$C \to \neg A$	$A \wedge \neg B$	$B \vee \neg C$	*	**	$((C \to \neg A) \wedge ((A \wedge \neg B) \to (B \vee \neg C))) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$
0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1

b) *Bestimmen Sie eine aussagenlogische Formel G, in der die Atome A, B und C vorkommen (und keine weiteren), so dass die zugehörige Wahrheitswerttabelle bei der von uns verwendeten Standardanordnung als Ergebniseintrag von oben nach unten das Tupel* $(1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$ *enthlt.*

A	B	C	$(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B \wedge C)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

D.h. z.B. $F := (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B \wedge C)$

3.) *Geben Sie eine aussagenlogische Formel H mit den Atomen A, B und C an, die die folgende Eigenschaft für alle Belegungen β erfüllt : Ändert man genau einen der Werte $\beta(A)$ bzw. $\beta(B)$ bzw. $\beta(C)$, dann ändert sich auch der Wert $I_\beta(H)$.*

.

A	B	C	$I_\beta(H)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$H := (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

4.) *Beweisen Sie, dass die folgenden vier Aussagen quivalent sind :*

a) *Es gibt eine Formel G, so das gilt : G ist Folgerung aus F und* $\neg G$ *ist Folgerung aus F. (Dies ist die Definition für : F ist kontradiktorisch.)*

b) $(A \wedge \neg A)$ *ist Folgerung aus F.*

c) *Jede beliebige Formel H ist Folgerung aus F.*

d) *F ist nicht erfüllbar. (Dies ist die Definition für : F ist unerfüllbar.)*

Die vier Aussagen wurden zunächst umgeschrieben:

(a) $I_\beta(F) \leq I_\beta(G) \wedge I_\beta(F) \leq I_\beta(\neg G)$
(b) $I_\beta(F) \leq I_\beta(A \wedge \neg A)$
(c) $I_\beta(F) \leq I_\beta(H)$
(d) $I_\beta(F) = 0$

$$\begin{aligned}(a) &\leftrightarrow (F \to G) \text{ Tautologie } \wedge (\neg F \to G) \text{ Tautologie}\\ &\leftrightarrow [(F \to G) \wedge (\neg F \to G)] \text{ Tautologie}\\ &\leftrightarrow [(\neg F \vee G) \wedge (\neg F \vee \neg G)] \text{ Tautologie}\\ &\leftrightarrow \neg F \vee (G \wedge \neg G) \text{ Tautologie}\\ &\leftrightarrow \underbrace{\neg F \text{ Tautologie}}_{*}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) &\leftrightarrow F \to (A \wedge \neg A) \text{ Tautologie}\\ &\leftrightarrow \neg F \vee (A \wedge \neg A) \text{ Tautologie}\\ &\leftrightarrow *\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c) &\leftrightarrow F \to H \text{ Tautologie}\\ &\leftrightarrow \neg F \vee H \text{ Tautologie}\\ &\leftrightarrow *\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d) &\leftrightarrow I_\beta(F) = 0\\ &\leftrightarrow I_\beta(\neg F) = 1\\ &\leftrightarrow *\end{aligned}$$

$\square$