Diskrete Strukturen - Übung 05

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

December 12, 2020

Das Prinzip der Vollständigen Induktion

1.) Anwendung des Induktionsprinzip in der Analysis

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$$

Induktionsanfang

falls: $n=1$

$$(1+x) \geq 1+1\cdot x \quad \square$$

Induktionsvoraussetzung IV

mit: $n=k\in\mathbb{N}$

$$(1+x)^k \geq 1+k\cdot x$$

Induktionsbehauptung

mit: $n=k+1$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)\cdot x$$

Induktionsbeweis

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k\cdot(1+x)\\
(1+x)^{k+1} &\overset{IV}{\geq} (1+k\cdot x)\cdot(1+x)\\
&= 1+x+kx+kx^2\\
&= 1+(k+1+kx)x\\
&\geq 1+(k+1)x \quad \square
\end{aligned}$$

2.) Anwendung des Induktionsprinzips in der Geometrie

Sei $Z_n := \{\text{Zerlegungen der Ebene durch n Geraden}\}$ und $A(Z_n) := Z_n$ färbbar durch zwei Farben.

Induktionsanfang

Sei $n=1$, da jede Zerlegung der Ebene mit einer Geraden zu zwei Gebieten führt ist $A(Z_1)$ wahr.

Induktionsvoraussetzung IV

mit: $n=k\in\mathbb{N}$ wird im folgenden $A(Z_k)$ als wahr vorausgesetzt.

Induktionsbehauptung

mit: $n=k+1$ ist nun zu zeigen, das $A(Z_{k+1})$ wahr ist.

Induktionsbeweis

Laut IV ist $A(Z_k)$ färbbar und $A(Z_{k+1})$ ist die k-fache Zerlegung der Ebene unter der Hinzugabe einer weiteren Geraden. Eine Gerade kann die bereits vorhandene Teilebenen halbieren oder sie lässt sie unberührt. Ersteres lässt zwei neue Teilebenen entstehen welche die selbe Farbe besitzen. Tauscht man in einer und nur einer von zwei solchen Teilebenen die Farbe,

und macht man dies konsequent für alle entstandenen Teilebenen, dann gilt $A(Z_{k+1})$ $\square$

3.) Anwendung einer Vorwärts-Rückwärts-Induktion

$$E(n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)^n \text{, falls } x_1, ..., x_n > 0$$

a)

$$E(2) = x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$$
$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Wenn $x_1 = x_2$:

$$\sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Es gilt:

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

Wenn $x_1 \neq x_2$

$$0 < (x_1 - x_2)^2 \mid +4x_1x_2$$
$$4x_1x_2 < x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1x_2 \mid Binom$$
$$4x_1x_2 < (x_1 + x_2)^2 \mid \sqrt{}$$
$$\sqrt{x_1x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \square$$

b)

$$E(n-1) = x_1 \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n-1} \leq \left(\frac{x_1 + ... + x_n + x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

Mit $x_n = \frac{x_1 + ... + x_{n-1}}{n-1}$

$$x_1 \cdot ... \cdot \frac{x_1 + ... + x_{n-1}}{n-1} \cdot x_{n-1} \leq \left(\frac{x_1 + ... + (\frac{x_1 + ... + x_{n-1}}{n-1}) + x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$
$$\frac{x_1 \cdot ... \cdot (x_1 + ... + x_{n-1}) \cdot x_{n-1}}{n-1} \leq \left(\frac{x_1(n-1) + ...(x_1 + ... + x_{n-1}) + x_{n-1}(n-1)}{(n-1)^2}\right)^{n-1} \quad \square$$

Da $n > 1$ ist $x_1(n-1) + ...(x_1 + ... + x_{n-1}) + x_{n-1}(n-1) \geq (n-1)$ d.h. $\frac{x_1(n-1) + ...(x_1 + ... + x_{n-1}) + x_{n-1}(n-1)}{(n-1)^2} \geq 0$.

c)

$$E(n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)^n$$
$$E(2) = x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$$
$$E(2n) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{2n} \leq \left(\frac{x_1 + ... + x_{2n}}{2n}\right)^{2n}$$

d)