Diskrete Strukturen I;   WS 2020/2021

Jörg Vogel
Institut für Informatik der FSU

5. Aufgabenblatt

Das Prinzip der Vollständigen Induktion

1.) **Anwendung des Induktionsprinzips in der Analysis**

Beweisen Sie die „Bernoullische Ungleichung“ durch vollständige Induktion über n: Für alle reellen Zahlen $x > -1$ und alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

2.) **Anwendung des Induktionsprinzips in der Geometrie**

Auf dem 2. Aufgabenblatt wurden schon einmal „Geraden in der Ebene“ thematisiert. Heute formulieren wir in diesem Kontext eine neue Aussage.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n: Jede Zerlegung der Ebene durch n Geraden lässt sich *zulässig* mit zwei Farben färben!

Dabei ist eine Färbung *zulässig* genau dann, wenn Gebiete, die eine gemeinsame Grenze haben, verschieden gefärbt sind.
(Klar ist dabei, dass ausschließlich „gemeinsame Schnittpunkte“ keine gemeinsame Grenze sind.)

3.) **Anwendung einer Vorwärts-Rückwärts-Induktion**

Wir betrachten folgende Ungleichung.
Dabei steht $E(n)$ als Abkürzung für

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right)^n, \quad \text{falls } x_1, \ldots, x_n > 0$$

Zeigen Sie:

a) Für $n = 2$ gilt $E(2)$.

b) Der folgende Ansatz $x_n = \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$ ermöglicht den Nachweis, dass aus $E(n)$ die Gültigkeit von $E(n-1)$ gefolgert werden kann (für $n > 1$).

c) Wenn $E(n)$ und $E(2)$ gilt, dann gilt auch $E(2n)$.

d) Begründen Sie, weshalb aus a), b) und c) $E(n)$ für alle $n > 1$ folgt.
(Bemerkung: $E(1)$ gilt trivialerweise; $E(0)$ macht keinen Sinn.)

Abgabetermin:
Montag, 14. Dezember 2020 bis 14 Uhr als pdf-Datei .
Bitte schreiben Sie in den Titel dieser pdf-Datei Ihren Namen.