

Diskrete Strukturen I; WS 2020/2021

Jörg Vogel

Institut für Informatik der FSU

2. Übungsserie

1.) "Turm von Hanoi"

heißt ein Spiel mit drei Stäben L , M und R und einer beliebigen, aber fixierten Anzahl n von Scheiben paarweise verschiedener Größe.

Zu Beginn des Spiels liegen alle Scheiben der Größe nach sortiert (stets kleinere auf größeren) auf dem linken Stab L und bilden einen Turm. Das Ziel des Spieles besteht darin, diesen Turm durch zugweises Umstapeln am Ende (wieder der Größe nach sortiert) auf dem rechten Stab R zu haben. Ein Zug besteht im Umlegen einer Scheibe von einem Stab auf einen anderen. Dabei gelten folgende Regeln:

(H1) Pro Zug darf genau eine Scheibe bewegt werden.

(H2) Es liegt niemals eine größere Scheibe auf einer kleineren Scheibe.

Wir vereinbaren die folgende Bezeichnung:

$T(n)$ ist die kleinste Anzahl von Zügen, die gemäß der Regeln (H1) und (H2) notwendig sind, um einen Turm aus n Scheiben von L nach R umzustapeln.

- Beschreiben Sie für kleine Beispiele für n entsprechende Zugfolgen. Überlegen Sie sich hierfür eine geeignete Notation.
- Es gilt das folgende Rekursionsschema (1) :
 $T(1) = 1, T(n+1) = T(n) + 1 + T(n)$.
Begründen Sie diese Aussage und achten Sie insbesondere darauf, dass es sich um die kleinstmögliche Anzahl von Zügen handelt.
- Ausgehend vom Rekursionsschema (1) finden Sie eine geschlossene Formel (2) für $T(n)$ und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

2.) Geraden in der Ebene

Manche Gebiete der Ebene, die durch n Geraden definiert werden, sind beschränkt (d.h. sie sind endlich), andere sind unbeschränkt (d.h. sie sind unendlich).

Bestimmen Sie die maximale Anzahl von beschränkten Gebieten $R(n)$, die durch n Geraden definiert werden, auf die folgende Weise:

- Bestimmen Sie für kleine Beispiele für n entsprechende Werte $R(n)$.
- Finden Sie ein Rekursionsschema (1). Begründen Sie Ihre Aussage.
- Ausgehend von Ihrem Rekursionsschema (1) finden Sie eine geschlossene Formel (2) für $R(n)$ und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

2.) „Gärtner Pötschke“

Gärtner Pötschke schneidet seine Bäume nach folgenden zwei Regeln:

(G1) An allen neuen Trieben werden im ersten und zweiten Jahr alle Seitentriebe entfernt.

(G1) Vom dritten Jahr an wird jedem Trieb in jedem Jahr genau ein neuer Trieb gelassen.

- Illustrieren Sie die Situation für die Jahre $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ anhand einer graphischen Darstellung.
- Finden Sie ein Rekursionsschema (1) und begründen Sie Ihre Aussage.

Abgabetermin:

Montag, 16. November 2020 bis 14 Uhr als pdf-Datei