Diskrete Strukturen - Übung 04

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

December 5, 2020

Fibonacci-Zahlen

1.)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über m, dass das sogenannte "Additionstheorem" für Fibonacci-Zahlen für alle $n \geq 1$ und $m \geq 2$ gilt:

$$f_{m+n} = f_{m+1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n-1}$$

Induktionsanfang

falls $m = 1$ und falls $m = 2$:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} = f_2 \cdot f_n + f_1 \cdot f_{n-1} = 1 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n-1} \\ f_{2+n} &= f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = f_n + f_{n-1} + f_n = 2 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n-1} \\ &= f_3 \cdot f_n + f_2 \cdot f_{n-1} \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung IV

mit $m = k, n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1, m \geq 2$:

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_{n+k} &= f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1} \\ f_{n+k-1} &= f_k \cdot f_n + f_{k-1} \cdot f_{n-1} \end{aligned}$$

Induktionsbehauptung

mit $m = k + 1$:

$$f_{k+1+n} = f_{k+2} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1}$$

Induktionsbeweis

$$\begin{aligned} f_{k+1+n} &= f_{n+(k+1)} = f_{n+k} + f_{n+k-1} \mid \text{ mit IV} \\ &\Rightarrow f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1} + f_{n+k-1} \mid \text{mit IV} \\ &\Rightarrow f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1} + f_k \cdot f_n + f_{k-1} \cdot f_{n-1} \\ &= (f_{k+1} + f_k) \cdot f_n + (f_k + f_{k-1}) \cdot f_{n-1} \\ &= (f_{k+2}) \cdot f_n + (f_{k+1}) \cdot f_{n-1} \quad \square \end{aligned}$$

2.)

Nun betrachten wir folgende Gleichung für die Fibonacci-Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

a)

Beweisen Sie diese Gleichung durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang

falls: $n = 1$

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_1 \cdot f_2 \\ 1^2 &= 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung IV

mit $n = k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^2 = f_k \cdot f_{k+1}$$

Induktionsbehauptung

mit $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_i^2 = f_{k+1} \cdot f_{k+2}$$

Induktionsbeweis

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} f_i^2 &= \sum_{i=1}^{k} f_i^2 + f_{k+1}^2 \mid \text{mit IV} \\ &\Rightarrow f_k \cdot f_{k+1} + f_{k+1} \cdot f_{k+1} \\ &= f_{k+1} \cdot (f_k + f_{k+1}) \\ &= f_{k+1} \cdot f_{k+2} \qquad \square \end{aligned}$$

b)

Versuchen Sie einen alternativen Beweis, der ohne Induktion auskommt, indem bereits bewiesene Gleichungen für Fibonacci-Zahlen verwendet werden.

$$\begin{aligned} f_n \cdot f_{n+1} &= (f_{n-1} + f_{n-2}) \cdot (f_n + f_{n-1}) \\ &= f_{n-1} \cdot f_n + f_{n-1}^2 + f_{n-2} \cdot f_n + f_{n-2} \cdot f_{n-1} \\ &= f_{n-1}^2 + f_n \cdot (f_{n-1} + f_{n-2}) + f_{n-2} \cdot f_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} f_i^2 + f_{n-1}^2 + f_n^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \end{aligned} \qquad \square$$

3.)

Zum Abschluss formulieren Sie einen Beweiß für eine weitere Identität der Fibonacci-Zahlen:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{3k} = \frac{1}{2} \cdot (f_{3n+2} - 1)$$

Induktionsanfang

falls $n = 1$:

$$\frac{1}{2} \cdot (f_5 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 = f_3$$

Induktionsvoraussetzung IV

mit: $n = k, i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{k} f_{3i} = \frac{1}{2} \cdot (f_{3k+2} - 1)$$

Induktionsbehauptung

mit: $n = k + 1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_{3i} = \frac{1}{2} \cdot (f_{3(k+1)+2} - 1) = \frac{1}{2} \cdot (f_{3k+5} - 1)$$

Induktionsbeweis

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} f_{3i} &= \sum_{i=1}^{k} f_{3i} + f_{3(k+1)} \mid \text{mit IV} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (f_{3k+2} - 1) + f_{3k+3} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (f_{3k+2} + 2f_{3k+3} - 1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (f_{3k+2} + f_{3k+3} + f_{3k+3} - 1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (f_{3k+4} + f_{3k+3} - 1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (f_{3k+5} - 1) \qquad \square
\end{aligned}$$