Diskrete Strukturen - Übung 11

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Relation

1.) Es sei $[M, \leq]$ eine halbgeordnete Menge und $A \subseteq M$.

a)

∘) $x \in M$ ist **untere Schranke** von A$\leftrightarrow_{df} \bigwedge\limits_{a \in A} (a \geq x)$

∘) $x \in M$ ist **Minimum** von A$\leftrightarrow_{df}$ es gilt:
1.) "x ist untere Schranke von A" und 2.) $x \in A$

∘) $x \in M$ ist **Infimum** von A$\leftrightarrow_{df}$ es gilt:
1.) "x ist untere Schranke von A" und 2.) $\bigwedge\limits_{y \in M} \left(\bigwedge\limits_{a \in A} (a \geq y) \rightarrow x \geq y \right)$

∘) $x \in M$ ist **minimales Element** von A$\leftrightarrow_{df}$ es gilt:
1.) $x \in A$ und 2.) es gibt kein Element $z \in A$ mit $z \neq x$ und $x \geq z$

b)

Beispiel 1: $[\mathbb{R}, \leq]$: Es sei $A = \mathbb{R}$. *A besitzt keine **untere Schranken**, folglich kein **Minimum** und kein **Infimum**, aber auch keine **minimalen Elemente**.*

Beispiel 2: $[\mathbb{N}, \leq]$: $A = \{0, 1, 2\}$. Untere Schranken sind $0, -1, -2, -3....$ Die 0 *ist **untere Schranke**, **minimales Element**, **Minimum** und **Infimum**.*

2.) Wir wissen: Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen mit der üblichen kleiner-gleich-Relation $\leq$ ist eine halbgeordnete Menge $[\mathbb{N}, \leq]$

Fall:	$m \leq n$	$n \leq m$	$m = n$
$Sup_{\leq}(\{m,n\})$	n	m	$max\{m,n\}$
$Inf_{\leq}(\{m,n\})$	m	n	$min\{m,n\}$

Fall 1 und 2 sind wohldefiniert, Fall 3 ebenfalls, da Maximum und Minimum immer existieren.

3.) Wir wissen: Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen mit der üblichen Teilerrelation $\setminus$ ist eine halbgeordnete Menge $[\mathbb{N}, \setminus]$

$Sup_{\setminus}(\{m,n\}) = kgV(m,n)$, da $m \mid kgV(m,n)$ und $n \mid kgV(m,n)$, denn "kleinste" im Namen bedeutet dass es sich um die kleinste obere Schranke handelt.

$Inf_{\setminus}(\{m,n\}) = ggT(m,n)$, da $ggT(m,n) \mid m$ und $ggT(m,n) \mid n$, denn "größte" im Namen bedeutet dass es sich um die größte untere Schranke handelt.

Falls m und n teilerfremd sind, haben sie zumindest 1 als ggT und das kgV ist höchstens $m \cdot n$. Beides existiert immer.

4.) Wir wissen: Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen mit der üblichen Teilmengenbeziehung $\subseteq$ ist eine halbgeordnete Menge $[\mathscr{P}(M), \subseteq]$

$Sup_{\subseteq}(X,Y) = X \cup Y$, wenn man ein Element wegnehmen würde, wäre die Relation nicht mehr gegeben, d.h. es handelt sich hierbei um die kleinste Schranke.

$Inf_{\subseteq}(X,Y) = X \cap Y$, wenn man ein Element hinzugeben würde, wäre die Relation nicht mehr gegeben, d.h. es handelt sich hierbei um die größte Schranke.

Schnitt und Vereinigung existieren immer.