Wintersemester 2020/21

Diskrete Strukturen - Übung 10

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Relationen

1.)

a) R ist asymmetrisch genau dann, wenn R irreflexiv und antisymmetrisch ist.
Formeller: $(xRy \wedge \neg(yRx)) \leftrightarrow (\neg(xRx) \wedge ((xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y))$

Sei 1. $xRy \wedge \neg(yRx)$

" $\rightarrow$ ". Für Fall $x = y$ folgt aus 1. $xRx \wedge \neg(xRx) \rightarrow$ *R ist irreflexiv.* $xRy \wedge yRx$ kann nicht gelten für $x \neq y$ wegen 1., somit muss $(xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y$ gelten $\rightarrow$ *R ist antisymmetrisch.* □

Sei 2. $\underbrace{\neg(xRx)}_{\kappa} \wedge \underbrace{((xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y)}_{\varkappa}$

" $\leftarrow$ ". $xRy \overset{\kappa}{\rightarrow} x \neq y \overset{\varkappa}{\rightarrow} \neg(yRx)$ □

b) Wenn R symmetrisch und antisymmetrisch ist, dann ist R auch transitiv.
Formeller: $(xRy \rightarrow yRx) \wedge ((xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y) \rightarrow (((xRy) \wedge (yRz)) \rightarrow xRz)$

Sei 1. $\underbrace{(xRy \rightarrow yRx)}_{\gamma} \wedge \underbrace{((xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y)}_{\Gamma}$

Beweis: $xRy \wedge yRx \overset{\gamma}{\rightarrow} xRy \wedge yRx \wedge yRz \wedge zRy \overset{\Gamma}{\rightarrow} x = y \wedge y = z \rightarrow x = y = z \rightarrow xRz$ □

c) Wenn R transitiv und irreflexiv ist, dann ist R auch asymmetrisch.
Formeller: $(((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz) \wedge (\neg(xRx))) \rightarrow (xRy \rightarrow \neg(yRx))$

Sei 1. $\underbrace{((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)}_{\omega} \wedge \underbrace{(\neg(xRx))}_{\Omega}$

Beweis: $\underbrace{\text{Sei}}_{*}$ $xRy \overset{\omega}{\rightarrow} xRy \wedge yRx \rightarrow xRx \overset{\Omega}{\rightarrow} \neg(xRx). I_\beta(xRy) \overset{*}{=} 1 \wedge I_\beta(yRx) =? \rightarrow I_\beta(xRx) \overset{\Omega}{=} 0$. Da aus Wahr nicht Falsch folgen kann muss $I_\beta(yRx) = 0$ sein. □

2.)

a)

Sei. $((n, m), (k, l)) \in R \Leftrightarrow n + l = m + k$.

Reflexivität: $(n, m)R(n, m) \Leftrightarrow n + m = m + n$ □

Symmetrie: $(n, m)R(k, l) \Leftrightarrow n + l = m + k \overset{kommu.}{\Longleftrightarrow} k + m = l + n \Leftrightarrow (k, l)R(n, m)$ □

Transitivität: $(n, m)R(l, k) \wedge (l, k)R(e, f) \Leftrightarrow (n + k = m + l) \wedge (l + f = k + e)$
$\Leftrightarrow (k - l = m - n) \wedge (k - l = f - e) \overset{Einsetzen}{\Longrightarrow} m - n = f - e \Leftrightarrow m + e = f + n \Leftrightarrow n + f = m + e$ □

b)

Äquivalenzklassen

Fall 1. $n = m \rightarrow n + l = n + k \Leftrightarrow l = k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : [(n, n)]_R = \{(k, k) \mid k \in \mathbb{N}\}$

Fall 2. $n \neq m \Leftrightarrow n + l = m + k \Rightarrow [(n, m)]_R = \{(k, l) \mid n + l = m + k\}$

Faktormenge $M/_R = \{[(n,n)], [(n,m)]\}$

3.)

a) $|\mathscr{P}(M \times M)| = 2^{|M|\cdot|M|} = 2^{5\cdot 5} = 2^{25}$

b) In einer binären, reflexiven Relation sind immer diejenigen Paare (a, b) enthalten die $a = b$ erfüllen. Alle anderen Elemente können 0 oder 1 annehmen, somit ist die Anzahl der unbekannten zu ermitteln welche in der Tabelle durch x visualisiert werden.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	1	x	x	x	x
M_2	x	1	x	x	x
M_3	x	x	1	x	x
M_4	x	x	x	1	x
M_5	x	x	x	x	1

D.h. $5^2 - 5 = 20$ Möglichkeiten $\Rightarrow 2^20$ reflexive Relationen. Dies gilt auch für irreflexive Relationen, hierbei werden die 1en durch 0en ersetzt.

c) Die Gesamtanzahl minus die reflexiven und irreflexiven Relationen.s $2^{25} - 2 \cdot 2^{20} = 2^{25} - 2^{21}$

d) Im symmetrischen Fall kann die Relation alle geordneten Paare auf der Diagonale enthalten sowie entweder beliebig viele Elemente oberhalb oder unterhalb der Diagonalen. Je nach dem welcher Fall eintritt, nehmen die y den Wert des bezüglich an der Diagonalen gespiegelten x an.

Oberhalb	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	x	y	y	y	y
M_2	x	x	y	y	y
M_3	x	x	x	y	y
M_4	x	x	x	x	y
M_5	x	x	x	x	x

Unterhalb	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	x	x	x	x	x
M_2	y	x	x	x	x
M_3	y	y	x	x	x
M_4	y	y	y	x	x
M_5	y	y	y	y	x

Wieder ist die Anzahl der Unbekannten (x) relevant. $(25 - 5)/2 + 5 = 15 \Rightarrow 2^{15}$ Relationen.

e) Der Unterschied zur Symmetrie ist, dass die Diagonale mit 1 besetzt ist.

Oberhalb	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	1	y	y	y	y
M_2	x	1	y	y	y
M_3	x	x	1	y	y
M_4	x	x	x	1	y
M_5	x	x	x	x	1

Unterhalb	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	1	x	x	x	x
M_2	y	1	x	x	x
M_3	y	y	1	x	x
M_4	y	y	y	1	x
M_5	y	y	y	y	1

Die Anzahl der Unbekannten verringert sich dementsprechend. $(25 - 5)/2 = 10 \Rightarrow 2^{10}$ Relationen.