

# Diskrete Strukturen - Übung 01

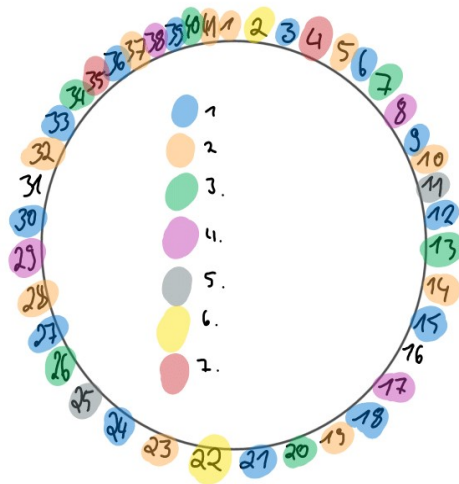
Felix Tischler, Matrikelnummer: 191498

November 15, 2020

# Das Josephus Problem

1.)

a)



## Erste Runde

3 ist aus!  
6 ist aus!  
9 ist aus!  
12 ist aus!  
15 ist aus!  
18 ist aus!  
21 ist aus!  
24 ist aus!  
27 ist aus!  
30 ist aus!  
33 ist aus!  
36 ist aus!  
39 ist aus!

## Zweite Runde

1 ist aus!  
5 ist aus!  
10 ist aus!  
14 ist aus!  
19 ist aus!  
23 ist aus!  
28 ist aus!  
32 ist aus!  
37 ist aus!  
41 ist aus!

## Dritte Runde

7 ist aus!  
13 ist aus!  
20 ist aus!  
26 ist aus!  
34 ist aus!  
40 ist aus!

## Vierte Runde

8 ist aus!  
17 ist aus!  
29 ist aus!  
38 ist aus!

## Fünfte Runde

11 ist aus!  
25 ist aus!

## Sechste Runde

2 ist aus!  
22 ist aus!

## Siebte Runde

4 ist aus!  
35 ist aus!

Person 16 und 31 überleben!

b)

**Erste Runde**

10 ist aus!  
20 ist aus!  
30 ist aus!  
40 ist aus!

**Zweite Runde**

9 ist aus!  
21 ist aus!  
32 ist aus!

**Dritte Runde**

2 ist aus!  
14 ist aus!  
26 ist aus!  
38 ist aus!

**Vierte Runde**

11 ist aus!  
24 ist aus!  
37 ist aus!

**Fünfte Runde**

12 ist aus!  
27 ist aus!

**Sechste Runde**

1 ist aus!  
17 ist aus!  
34 ist aus!

**Siebte Runde**

8 ist aus!  
29 ist aus!

**Achte Runde**

6 ist aus!  
28 ist aus!

**Neunte Runde**

7 ist aus!  
33 ist aus!

**Zehnte Runde**

16 ist aus!  
41 ist aus!

**Elfte Runde**

25 ist aus!  
18 ist aus!

**Zwölfte Runde**

5 ist aus!  
3 ist aus!  
39 ist aus!

**Dreizehnte Runde**

4 ist aus!  
15 ist aus!  
23 ist aus!

**Vierzehnte Runde**

13 ist aus!  
36 ist aus!

**Fünfzehnte Runde**

22 ist aus!  
31 ist aus!

Person 19 und 35 überleben!

2.)

**Erste Runde**

- 3 Personen aus  
10 ist aus!  
20 ist aus!  
30 ist aus!

**Zweite Runde**

- 2 Personen aus  
11 ist aus!  
22 ist aus!

**Dritte Runde**

- 3 Personen aus  
3 ist aus!  
15 ist aus!  
27 ist aus!

**Vierte Runde**

- 2 Personen aus  
9 ist aus!  
24 ist aus!

**Fünfte Runde**

- 2 Personen aus  
7 ist aus!  
23 ist aus!

**Vierzehnte Runde**

- 2 Personen aus  
8 ist aus!  
26 ist aus!

**Vierzehnte Runde**

- 1 Person aus  
14 ist aus!

**Von nun an stehen nur noch  
15 Personen**

d.h. die Sicheren Positionen  
für die Gläubigen sind die  
folgenden:

1, 2, 4, 5, 6, 12, 13, 16, 17,

18, 19, 21, 25, 28, 29!

3.)

**Rekursionsschema:**

$$\begin{array}{llll} J(1) & = & 1 & a) \\ J(2n) & = & 2 * J(n) - 1 & b) \\ J(2n + 1) & = & 2 * J(n) + 1 & c) \end{array}$$

a)

Es gilt zu zeigen, dass  $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 0 : J(2^m) = 1$

**Induktionsanfang**

$$J(2^0) = 1$$

**Induktionsvoraussetzung**

$$\text{für } m = k \in \mathbb{N}, k \geq 0 : J(2^k) = 1$$

**Induktionsbehauptung**

$$\text{für } m = k + 1 : J(2^{k+1}) = 1$$

**Induktionsbeweis**

$$\begin{array}{llll} J(2^{k+1}) & = & 1 & \\ J(2 * 2^k) & = & 1 & | \text{ mit b) und } n = 2^k \\ 2 * J(2^k) - 1 & = & 1 & | \text{ mit Induktionsvoraussetzung} \\ 2 * 1 - 1 & = & 1 & \square \end{array}$$

b)

Es gilt zu zeigen, dass  $\forall m \in \mathbb{N}, m > 0 : J(2^m - 1) = 2^m - 1$

**Induktionsanfang**

$$\begin{array}{ll} J(2^1 - 1) & = 2^1 - 1 \\ J(1) & = 1 \end{array}$$

**Induktionsvoraussetzung**

$$\text{für } m = k \in \mathbb{N}, k > 0 : J(2^k - 1) = 2^k - 1$$

**Induktionsbehauptung**

$$J(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1} - 1$$

### Induktionsbeweis

$$\begin{aligned} J(2^{k+1} - 1 - 1 + 1) &= 2^{k+1} - 1 \\ J(2^{k+1} - 2 + 1) &= 2^{k+1} - 1 \\ J(2 * (2^k - 1) + 1) &= 2^{k+1} - 1 \quad | \text{ mit c) und } n = (2^k - 1) \\ 2 * J(2^k - 1) + 1 &= 2^{k+1} - 1 \\ 2 * (2^k - 1) + 1 &= 2^{k+1} - 1 \\ 2^{k+1} - 1 &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

□

c)

Es gilt zu zeigen, dass  $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 0 : J(5 * 2^m) = 2^{m+1} + 1$

### Induktionsanfang

$$\begin{aligned} J(5 * 2^0) &= 2^{0+1} + 1 \\ J(5) &= 3 \end{aligned}$$

### Induktionsvoraussetzung

$$\text{für } m = k \in \mathbb{N}, k \geq 0 : J(5 * 2^k) = 2^{k+1} + 1$$

### Induktionsbehauptung

$$\text{für } m = k + 1 : J(5 * 2^{k+1}) = 2^{k+2} + 1$$

### Induktionsbeweis

$$\begin{aligned} J(5 * 2^{k+1}) &= 2^{k+2} + 1 \\ J(2 * 5 * 2^k) &= 2^{k+2} + 1 \quad | \text{ mit Rekursionsgleichung b) und } n = 5 * 2^k \\ 2 * J(5 * 2^k) - 1 &= 2^{k+2} + 1 \quad | \text{ mit Induktionsvoraussetzung} \\ 2 * (2^{k+1} + 1) - 1 &= 2^{k+2} + 1 \end{aligned}$$

□