Diskrete Strukturen - Übung 02

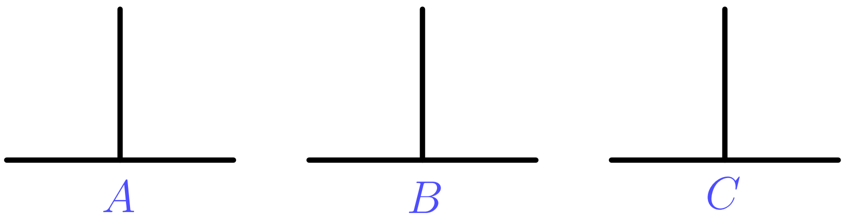
Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

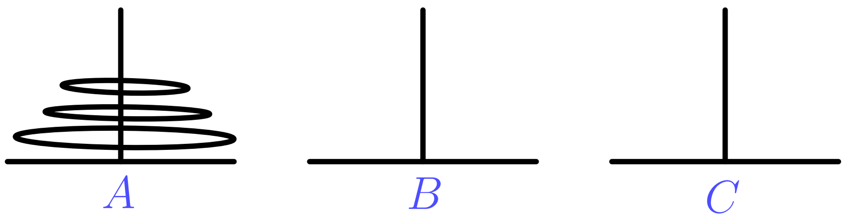
November 26, 2020

1.) Turm von Hanoi

a)

A := Startstapel, B:= Hilfsstapel, C:= Zielstapel. In der unten aufgeführten Tabelle wird verkürzt "AC" oder eine andere beliebige Abfolge von Buchstaben verwendet. Wobei "AC" steht für "Bewege die oberste Scheibe von A nach C". Es wird logischerweise immer die aktuell oberste Scheibe bewegt und der Buchstabe gibt an um auf zwischen welchen Stapeln die Scheibe bewegt wird.





n																
1	AC															
2	AB	AC	BC													
3	AC	AB	CB	AC	BA	BC	AC									
4	AB	AC	BC	AB	CA	CB	AB	AC	BC	BA	CA	BC	AB	AC	BC	
5	AC	AB	CB	AC	BA	BC	AC	AB	CB	CA	BA	CB	AC	AB	CB	
	AC	BA	BC	AC	BA	CB	CA	BA	BC	AC	AB	CB	AC	BA	BC	AC

b)

Wenn man sich an einem Beispiel von n = 4 überlegt wie genau man die Scheiben bewegen muss, dann wird relativ schnell klar, dass man zunächst 3 Scheiben also n-1 auf den Hilfsstapel (B) bewegen muss, und zwar genau diejenigen welche über der größten Scheibe liegen. Die Verschiebung erfolgt in T(n-1) also T(2+1)=T(3) Schritten. Anschließend muss die Größte Scheibe auf den Zielstapel (C) gelegt werden dies verbraucht exakt **1** Zug. Nun sind noch 3 (n-1) Scheiben auf den Zielstapel (C) zu legen. Dies verbraucht erneut T(3) Schritte. Es muss sich hierbei um die *kleinstmögliche* Anzahl handel, da die Regel (H2) uns zwingt immer die größte Scheibe als erstes zu bewegen, somit muss man zunächst alle darüber (n-1,) weg bewegen, dann die größte Scheibe **1** mal bewegen und anschließend wieder die ursprünglich drauf liegenden Scheiben (n-1) erneut auf die größte Scheibe legen. Somit verschiebt man 2 mal n-1 Scheiben und **1** mal die Größte. Wenn man nun Anstelle von n = 4 einfach n+1 = 4 schreibt und somit statt n-1 = 3 einfach n = 3, dann ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$T(1) = 1$$
$$T(n+1) = T(n) + \mathbf{1} + T(n) \qquad \square$$

c)

$$\begin{aligned} a) \quad && T(1) &= 1 \\ b) \quad && T(n+1) &= T(n) + 1 + T(n) \\ &&&= 2 \cdot T(n) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(2) &= 2 \cdot T(1) + 1 = 3 = 2^2 - 1 \\ T(3) &= 2 \cdot T(2) + 1 = 7 = 2^3 - 1 \\ T(4) &= 2 \cdot T(3) + 1 = 15 = 2^4 - 1 \\ T(5) &= 2 \cdot T(4) + 1 = 31 = 2^5 - 1 \end{aligned}$$

Anhand der mit dem Rekursionsschema berechneten Werten vermute ich, dass man allgemein die minimale Anzahl der Züge folgendermaßen berechnet: $T(n) = 2^n - 1$ dies gilt es nun zu beweisen:

Induktionsanfang

$$\begin{aligned} T(1) &= 2^1 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung

für $n = k \in \mathbb{N}, k \geq 0: \quad T(k) = 2^k - 1$

Induktionsbehauptung

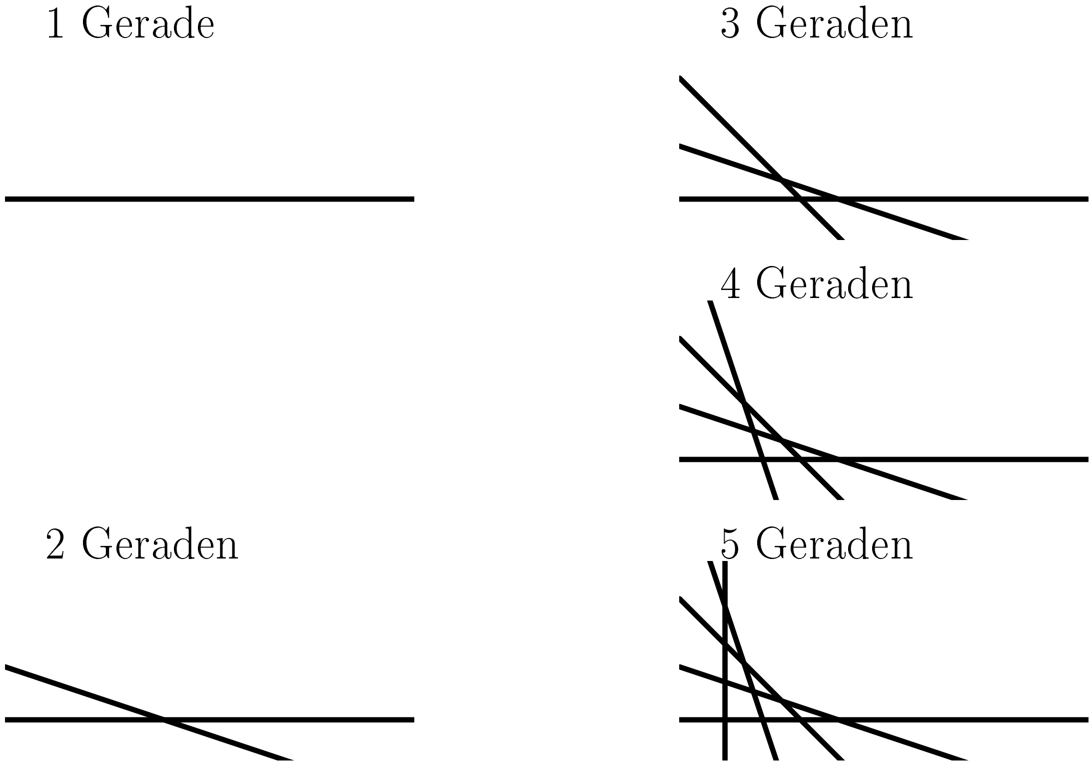
für $n = k + 1 : T(k+1) = 2^{k+1} - 1$

Induktionsbeweis

$$\begin{aligned} T(k+1) &= 2^{k+1} - 1 && \mid \text{mit Rekursionsformel b)} \\ T(k) + 1 + T(k) &= 2 \cdot 2^k - 1 && \mid \text{mit Induktionsvoraussetzung} \\ 2 \cdot T(k) &= 2 \cdot T(k) && \square \end{aligned}$$

2.) Geraden in der Ebene

a)



Ausgehend von den Abbildungen können wir folgendes beobachten, hierzu sei n die Anzahl der geraden und F(n) die Anzahl der Begrenzten Flächen:

n	F(n)
1	0
2	0
3	1
4	3
5	6

Folgende zusammenhänge ergeben sich aus der Tabelle:

$$F(1) = 0$$
$$F(2) = 0$$
$$F(3) = 1$$
$$F(4) = 3$$
$$F(5) = 6$$

Vermutung: F(n)=F(n-1)+(n-2)
Beispiel: $F(4) = F(3) + 2 = F(1) + 2 = 1 + 2 = 3$

Daraus ergibt sich folgendes Rekursionsschema:

$$\begin{array}{ll} a) & F(1) = 0 \\ b) & F(2) = 0 \\ c) & F(n) = F(n-1) + (n-2) \\ d) & F(n+1) = F(n) + (n-1) \end{array}$$

Hierbei wird n = 1 und n = 2 gesondert betrachtet, da in diesem Bereich für n noch keine begrenzte Fläche geben kann. Optional lässt sich dieses Schema auch in Python übertragen und somit kann man leicht die folgende Tabelle berechnen.

```python
def f(n):
    if n == 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 0
    elif n == 2:
        return 1
    else:
        return (f(n-1)+(n-2))
```

rekursiv.py

b)

Im folgenden sind mithilfe des Rekursionschema Werte bis n = 20 für F(n) berechnet:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F(n)	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
$\sum_{i=1}^{n} i$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
$\sum_{i=1}^{n-2} i$	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Vermutung: für n > 2[1]

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n-2} i = \frac{(n-2) \cdot ((n-2)+1)}{2}$$

Beweis:

Induktionsanfang

$$F(3) \quad = \quad \sum_{i=1}^{3-2} i = 1 \quad \square$$

Induktionsvoraussetzung IV

für $n = k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$: $\quad F(k) \quad = \quad \sum_{i=1}^{k-2} i$

Induktionsbehauptung

für $n = k + 1 : F(k+1) = \sum_{i=1}^{k-1} i$

---

1 $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Induktionsbeweis

$$F(k+1) \overset{d)}{\Rightarrow} F(k) + (k-1) \overset{IV}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{k-2} i + (k-1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} i + (k-1) &= 1 + 2 + 3 + ... + k - 2 + k - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{k-2} i + (k-1) \quad \square \end{aligned}$$

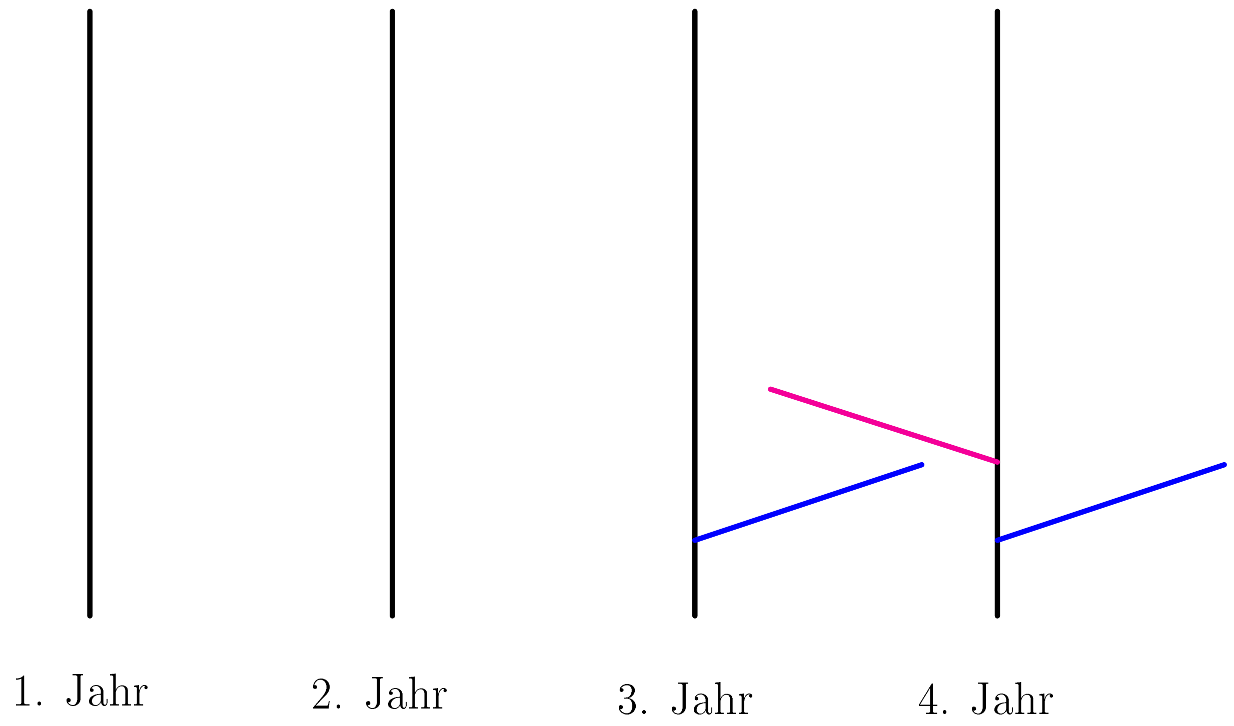
D.h.: für n $>$ 2 gilt: $F(n) = \sum_{i=1}^{n-2} i = \frac{(n-2)\cdot((n-2)+1)}{2}$. Und ist somit die Geschlossene Formel. Dies lässt sich ebenfalls in Python implementieren:

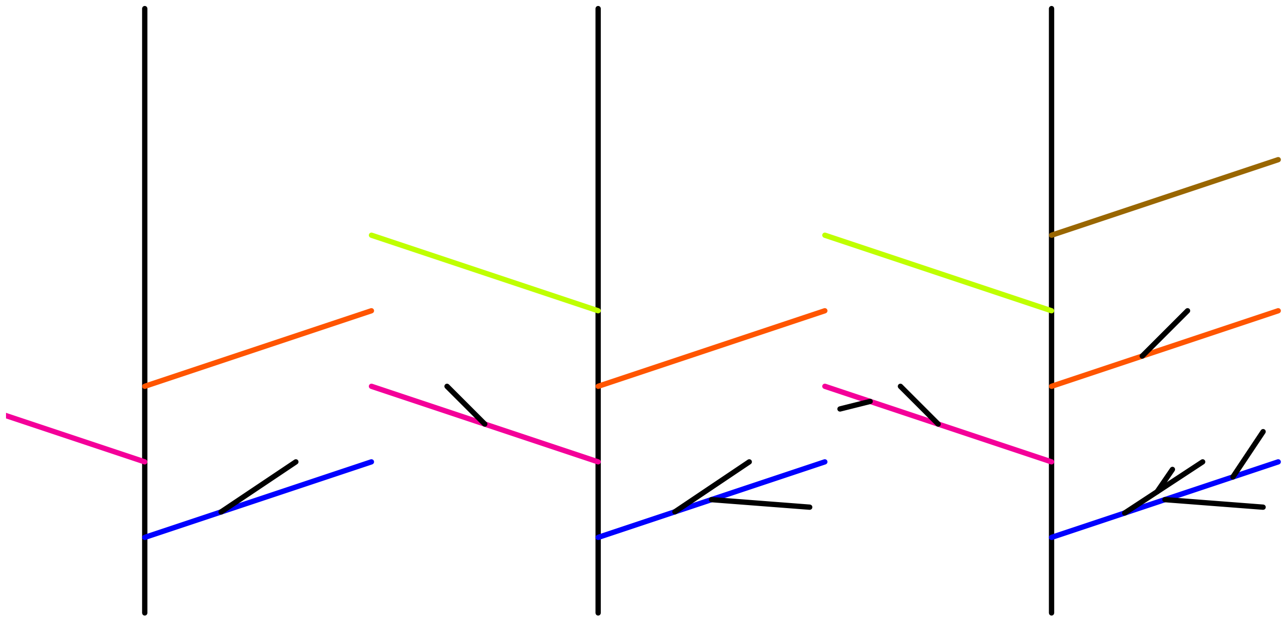
```python
def f(n):
    if n == 1:
        return 0
    elif n == 2:
        return 0
    else:
        f = 0
        for i in range(n-1):
            f += i
        return f
```

geschlossene–formel.py

3.) „Gärtner Pötschke“

a)





5. Jahr   6. Jahr   7. Jahr

b)

Durch abzählen der einzelnen Äste der Abbildung in b) kann man folgendes beobachten:

$$Z(1) = 1, \quad Z(2) = 1, \quad Z(3) = 2,$$
$$Z(4) = 3, \quad Z(5) = 5, \quad Z(6) = 8,$$
$$Z(7) = 13$$

Z(n) sei hierbei die Anzahl der Zweige welche nach n Jahren gewachsen sind. Im folgenden sind die Werte für $2 < n < 11$ aufgelistet. n=1 und n=2 wurden ignoriert, da es in diesem Zeitraum noch kein Wachstum gibt.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
Z(n)	2	3	5	8	13	21	34	55
Z(n-1)	1	2	3	5	8	13	21	34
Z(n-2)	1	1	2	3	5	8	13	21
Z(n-1)+Z(n-2)	2	3	5	8	13	21	34	55

Anhand der Tabelle können wir erkennen, dass gilt: $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1, 2\}$: Z(n) = Z(n-1)+Z(n-2). Also lautet das Rekurionsschema:

$$Z(1) = 1$$
$$Z(2) = 1$$
$$Z(n) = Z(n-1) + Z(n-2)$$

Dies ergibt auch Sinn, da ein neuer Zweig zunächst 2 Jahre braucht eh er einen neuen Zweig Produzieren kann. Es muss dementsprechend auf n = 1 und n = 2 gesondert beachtet werden, da in diesem Zeitraum kein neuer Zweig wächst.