Diskrete Strukturen - Übung 07

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

January 10, 2021

Mengen

1.) *Es gibt ein Venn − Diagramm aus drei sich berschneidenden Kreisen, das alle möglichen acht Fälle zeigt, in denen sich ein Objekt in Bezug auf drei Mengen befinden kann.*

a) *Zeichnen Sie ein solches Venn − Diagramm mit drei Mengen* A, B, C*. Beschreiben Sie die acht Fälle mit Hilfe der Mengenoperationen* $\cap, \cup, \bar{}$.

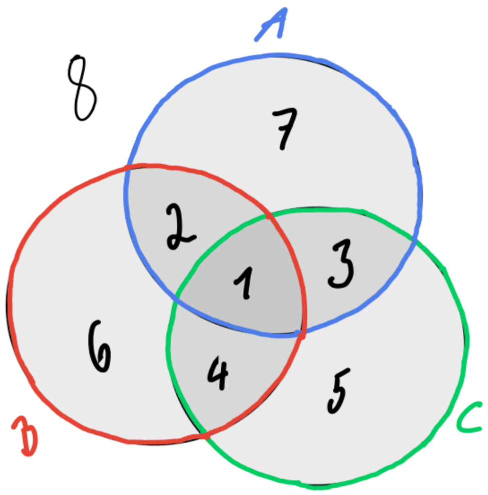

Figure 1: Venn-Diagramm mit 3 Mengen

$$1 := A \cap B \cap C,\ 2 := A \cap B \cap \bar{C},\ 3 := A \cap C \cap \bar{B},\ 4 := \bar{A} \cap B \cap C,$$
$$5 := \bar{A} \cap \bar{B} \cap C,\ 6 := \bar{A} \cap B \cap \bar{C},\ 7 := A \cap \bar{B} \cap \bar{C},\ 8 := \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C},$$

b) *Gibt es ein solches Venn − Diagramm aus vier sich berschneidenden Kreisen, welches alle möglichen* 16 *Fälle zeigt, in denen sich ein Objekt in Bezug auf diese vier Mengen befinden kann?*

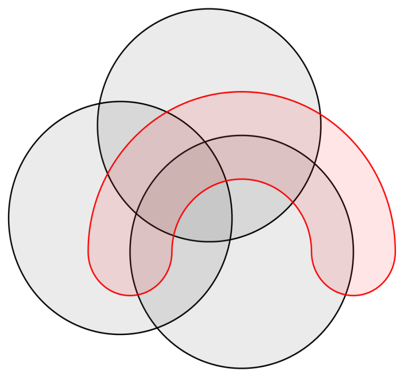

Figure 2: Venn-Diagramm mit 4 Mengen

2.) *Beweisen Sie* :

a) $\underbrace{\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)}_{**} :\Leftrightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A$

Für "$\Leftarrow$", zz. ist $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$.

$$A \subseteq B \Rightarrow \underbrace{\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(B)}_{*} \text{ und } A \cup B = B \Rightarrow \mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(B) \stackrel{*}{=} \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \quad \square$$

selbiges analog für $B \subseteq A$.

Für "$\Rightarrow$".

$$\begin{aligned} A \cup B \subseteq A \cup B \Rightarrow & \ B \cup A \in \mathscr{P}(A \cup B) \\ \Leftrightarrow & \ A \cup B \in \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \\ \stackrel{**}{\Leftrightarrow} & \ A \cup B \in \mathscr{P}(A) \vee A \cup B \in \mathscr{P}(B) \\ \Leftrightarrow & \ A \cup B \subseteq A \vee A \cup B \subseteq B \\ \Leftrightarrow & \ B \subset A \vee A \subset B \quad \square \end{aligned}$$

b) $\underbrace{\mathscr{P}(A) \Delta \mathscr{P}(B) \cap \mathscr{P}(A \Delta B) = \emptyset}_{(a)} :\Leftrightarrow \underbrace{A = B}_{(b)}$

(b)$\Rightarrow$(a):

$$\begin{aligned} & (b) \Leftrightarrow \mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B) \wedge A = B \\ \Rightarrow \quad & \mathscr{P}(A) \backslash \mathscr{P}(B) = \emptyset \wedge \mathscr{P}(B) \backslash \mathscr{P}(A) = \emptyset \wedge A \backslash B = \emptyset \wedge B \backslash A = \emptyset \\ \Rightarrow \quad & \mathscr{P}(A) \backslash \mathscr{P}(B) \cup \mathscr{P}(B) \backslash \mathscr{P}(A) = \emptyset \wedge \mathscr{P}(A \backslash B \cup B \backslash A) = \emptyset \\ \Rightarrow \quad & \mathscr{P}(A) \Delta \mathscr{P}(B) = \emptyset \wedge \mathscr{P}(A \Delta B) = \emptyset \quad \square \end{aligned}$$

(a)$\Rightarrow$(b)$\Leftrightarrow\neg$(b)$\Rightarrow \neg$(a):

$$\begin{aligned} & (b) \Leftrightarrow \mathscr{P}(A) \neq \mathscr{P}(B) \wedge A \neq B \\ \Rightarrow \quad & \mathscr{P}(A) \backslash \mathscr{P}(B) \neq \emptyset \wedge \mathscr{P}(B) \backslash \mathscr{P}(A) \neq \emptyset \wedge A \backslash B \neq \emptyset \wedge B \backslash A \neq \emptyset \\ \Rightarrow \quad & \mathscr{P}(A) \backslash \mathscr{P}(B) \cup \mathscr{P}(B) \backslash \mathscr{P}(A) \neq \emptyset \wedge \mathscr{P}(A \backslash B \cup B \backslash A) \neq \emptyset \\ \Rightarrow \quad & \mathscr{P}(A) \Delta \mathscr{P}(B) \neq \emptyset \wedge \mathscr{P}(A \Delta B) \neq \emptyset \quad \square \end{aligned}$$

c) *Wann ist* $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$?

Seien F, T Mengen.

Für " $\subseteq$ ":

$F \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$
$F \in \mathscr{P}(A) \wedge F \in \mathscr{P}(B)$
$F \subseteq A \wedge F \subseteq B$
$F \subseteq A \cap B$
$F \in \mathscr{P}(A \cap B) \quad \square$

Für " $\supseteq$ ":

$T \in \mathscr{P}(A \cap B)$
$T \subseteq A \cap B$
$T \subseteq A \wedge T \subseteq B$
$T \in \mathscr{P}(A) \wedge T \in \mathscr{P}(B)$
$T \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \quad \square$

3.) *Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \geq 2$*

a) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = A_1 \backslash [(A_1 \backslash A_2) \cup (A_1 \backslash A_3) \cup \dots \cup (A_1 \backslash A_n)]$

$Induktionsanfang$

$falls : n = 2$

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= A_1 \backslash [(A_1 \backslash A_2)] \\ x \in A_1 \wedge x \in A_2 &= x \in A_1 \wedge x \notin A_1 \backslash A_2 \\ &= x \in A_1 \wedge x \notin A_1 \wedge \bar{A}_2 \\ &= x \in A_1 \wedge x \in A_2 \quad \square \end{aligned}$$

$Induktionsvoraussetzung\ IV$

$mit : n = k, n \in \mathbb{N}\ sei :$ $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = A_1 \backslash [(A_1 \backslash A_2) \cup (A_1 \backslash A_3) \cup \dots \cup (A_1 \backslash A_k)]$

$Induktionsbehauptung$

$mit : n = k + 1\ sei :$ $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1} = A_1 \backslash [(A_1 \backslash A_2) \cup (A_1 \backslash A_3) \cup \dots \cup (A_1 \backslash A_{k+1})]$

$Induktionsbeweis$

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1} &\Leftrightarrow \emptyset \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{k+1}) \\ &\Leftrightarrow (A_1 \cap \neg A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{k+1}) \\ &\stackrel{distr.}{\Longleftrightarrow} A_1 \cap [\neg A_1 \cup (A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{k+1})] \\ &\stackrel{distr.}{\Longleftrightarrow} A_1 \cap [(\neg A \cup A_2) \cap (\neg A_1 \cup A_3) \cap \dots \cap (\neg A_1 \cup A_{k+1})] \\ &\stackrel{deMor.}{\Longleftrightarrow} A_1 \cap \neg [(A_1 \cap \neg A_2) \cup (A_1 \cap \neg A_3) \cup \dots \cup (A_1 \cap \neg A_{k+1})] \\ &\Leftrightarrow A_1 \backslash [(A_1 \backslash A_2) \cup (A_1 \backslash A_3) \cup \dots \cup (A_1 \backslash A_{k+1})] \quad \square \end{aligned}$$

b) $(A_1 \backslash B_1) \cap (A_2 \backslash B_2) \cap \dots \cap (A_n \backslash B_n) = (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \backslash (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)$

$Induktionsanfang\ für\ n = 2\ gilt :$

$$\begin{aligned} (A_1 \backslash B_1) \cap (A_2 \backslash B_2) &\Longleftrightarrow (A_1 \cap \neg B_1) \cap (A_2 \cap \neg B_2) \\ &\stackrel{kommu.}{\Longleftrightarrow} (A_1 \cap A_2) \cap (\neg B_1 \cap \neg B_2) \\ &\stackrel{deMor.}{\Longleftrightarrow} (A_1 \cap A_2) \cap \neg (B_1 \cup B_2) \\ &\Leftrightarrow (A_1 \cap A_2) \backslash (B_1 \cup B_2) \quad \square \end{aligned}$$

$Induktionsvoraussetzung\ IV$

$mit: n = k, n \in \mathbb{N}\ gilt:$

$$(A_1 \backslash B_1) \cap (A_2 \backslash B_2) \cap \cdots \cap (A_k \backslash B_k) = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \backslash (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k)$$

$Induktionsbehauptung$

$mit: n = k+1\ sollgelten:$

$$(A_1 \backslash B_1) \cap (A_2 \backslash B_2) \cap \cdots \cap (A_{k+1} \backslash B_{k+1}) = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k+1}) \backslash (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k+1})$$

$Induktionsbeweis$

$$\begin{aligned}(A_1 \backslash B_1) \cap (A_2 \backslash B_{k+1}) \cap \cdots \cap (A_{k+1} \backslash B_n) &\Leftrightarrow (A_1 \cap \neg B_1) \cap (A_2 \cap \neg B_2) \cap \cdots \cap (A_{k+1} \cap \neg B_{k+1}) \\ &\overset{komm.}{\Longleftrightarrow} (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k+1}) \cap (\neg B_1 \cap \neg B_2 \cap \cdots \cap \neg B_{k+1}) \\ &\Longleftrightarrow (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k+1}) \backslash (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k+1}) \quad \square\end{aligned}$$