Lineare Algebra für *-Informatik - Übung 02

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

November 19, 2020

Hausaufgaben

Hausaufgabe 2.1

Mengen

Sei C eine Menge, A ⊆ C und B ⊆ C. Des weiteren geht aus der Definition der Teilmenge hervor: Eine Menge N heißt eine Teilmenge einer Menge M :⇔ jedes Element von N ist auch ein Element aus M. Bezeichnung: N ⊆ M.[1]. Mann kann also N⊆ M ⇔ ∀ x ∈ N ⇒ x ∈ M schreiben. Es ist zu beweisen, dass gilt:

$$\{K \in \mathscr{P}(C) \mid B \subseteq K\} \cap \{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \subseteq K\} = \{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \cup B \subseteq K\}$$

$$\begin{aligned}
\{K \in \mathscr{P}(C) \mid B \subseteq K\} &= \{K \in \mathscr{P}(C) \mid \forall x \in B \Rightarrow x \in K\} \\
\{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \subseteq K\} &= \{K \in \mathscr{P}(C) \mid \forall x \in A \Rightarrow x \in K\} \\
\{K \in \mathscr{P}(C) \mid B \subseteq K\} \cap \{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \subseteq K\} &= \{K \in \mathscr{P}(C) \mid \forall x \in B \Rightarrow x \in K\} \cap \{K \in \mathscr{P}(C) \mid \forall x \in A \Rightarrow x \in K\} \\
&= \{K \in \mathscr{P}(C) \mid \forall x \in (a \cup b) \Rightarrow x \in K\}
\end{aligned}$$

$$\{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \cup B \subseteq K\} = \{K \in \mathscr{P}(C) \mid \forall x \in (a \cup b) \Rightarrow x \in K\} \quad \square$$

Das man so schlussfolgern kann zeige ich anhand folgender Wahrheitstabelle:

Es gilt $a \in A, b \in B$

a	b	$a \cup b$	K	$a \Rightarrow K$	$b \Rightarrow K$	$(a \Rightarrow K) \cap (b \Rightarrow K)$	$(a \cup b) \Rightarrow K$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	F	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W	W	W
W	F	W	F	F	W	F	F
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	W	F	F	F
F	F	F	W	W	W	W	W
F	F	F	F	W	W	W	W

Hausaufgabe 2.2

Definitionen

Sei $f : D \to M$ eine Abbildung.

- f heißt **injektiv**, wenn $\forall x_1, x_2 \in D \mid x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- f heißt **surjektiv**, wenn wenn jedes Element von M das Bild eines Elements aus D ist, kurz: $f(D) = M$, Schreibweise: $f : X \twoheadrightarrow Y$
- f heißt **bijektiv** oder **eins-zu-eins Abbildung**, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.[2]
- der **Graph** von f ist die Menge: $G_f := \{(x, f(x)) \in D \times M \mid x \in D\}$, somit ist der Graph eine spezielle Teilmenge des Kartesischen Produkts.[3]

[1] Definition aus der Vorlesung
[2] Teschl und Teschl, 2013, Mathematik für Informatiker, 4. Auflage, Springer-Verlag Berlin, Seite 156
[3] Wikipedia: Definition Funkltionsgraph

Die Menge der Abbildungen

Der Funktionsgraph einer Abbildung sei definiert als $f : X \to Y$ ist $\Gamma_f := \{(x, f(x) \mid x \in X)\} \subset X \times Y$. und es sei G $\subset X \times Y$. Nun ist festzulegen wann $G = \Gamma_f$ gilt. Vereinfacht kann man sich ein beliebiges Tupel veranschaulichen:

$$\begin{aligned} G &= \Gamma_f \\ (x_G, y_G) &= (x_\Gamma, f(x_\Gamma)) \\ x_G = x_\Gamma &\Rightarrow y_G = f(x_\Gamma) \qquad \text{(a)} \end{aligned}$$

Aus $y_0 = f(x_0)$ folgt $G_{f1} : X \twoheadrightarrow Y$ (**surjektiv**). Nun betrachten wir G_{f1} als mögliche Abbildung $f_1 : X \to Y$ von G:

$$\begin{aligned} G_{f1} &= \Gamma_f \\ (x_G, f_1(x_G)) &= (x_\Gamma, f(x_\Gamma)) \\ x_G = x_\Gamma &\Rightarrow f_1(x_G) = f(x_\Gamma) \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

Aus $f_1(x_G) = f(x_\Gamma) \Rightarrow x_G = x_\Gamma$ folgt, dass G_{f1} auch **injektiv** ist. Somit ist G_{f1} **bijektiv** unter der Bedingung, dass (a) und (b) gelten. Somit gilt $G = \Gamma_f$ für eine Abbildung $f : X \to Y$, wenn f bijektiv ist.

Ein Paar der Funktion f ist als $f = (X, Y)$ definiert. Da nun aber $x_G = x_\Gamma$ gelten soll, kann dieses Paar als $f = (G, Y)$ beschrieben werden, wobei hier die Definitionsmenge durch den ersten Teil von G und zwar x_G festgelegt ist. Nehmen wir nun eine Menge $M := \{f : X \to Y\}$ welche die Gesamtheit aller bijektiven Abbildungen darstellt. Nehmen wir hierzu mal das Gegenteil an, wenn M keine Menge ist, dann gilt auch nicht $K := \{x \in M | x \notin x\}$ nach dem Aussonderungsaxiom. Allerdings gilt $K \notin K$, denn für K gilt $f = (G, Y)$ und da $K \notin G \Rightarrow K \notin K$ da also das Aussonderungsaxiom gilt ist M eine Menge.

Hausaufgabe 2.3

Ein erstes lineares Gleichungssystem

Es sind alle (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ zu berechnen welche die Gleichungen 1), 2) und 3) erfüllen:

$$\begin{aligned} 1) \qquad 4x - 5y - 3z &= 0 \\ 2) \qquad -3x + 4y + 2z &= 0 \\ 3) \qquad x - 5y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} aus\ \ 1) - 3)\, folgt: \qquad 3x - 6z &= 0 && |\, +6z \\ 3x &= 6z && |\, \div 3 \\ x &= 2z \\ x = 2z\, einsetzen\, in\, "3x - 6z\ =\ 0": \qquad 3(2z) - 6z &= 0 \\ z &= z \\ z = z\, und\, x = 2z\, einsetzen\, in\ \ 3): \qquad 2z - 5y + 3z &= 0 && |\, +5y \\ z &= y \end{aligned}$$

d.h. (x,y,z) $\in \mathbb{R}^3$ | $x = 2z,\ y = z,\ z = z$