Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 7

Liveaufgaben für 06./07.01.2021

Präsenzaufgabe 7.1: *Direkte Summen*
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U, W \leq V$ mit $U + W = V$. Weisen Sie nach: $U \oplus W = V \iff$ jedes $\vec{v} \in V$ hat genau eine Darstellung $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{u} \in U$ und $\vec{w} \in W$.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe für $\vec{v}$ zwei Darstellungen. Nach einer Umformung ist ein ähnliches Argument möglich wie im Beweis der Dimensionsformel.

Präsenzaufgabe 7.2: *Quotientenraum*
Sei V eine $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq V$. Auf V definieren wir eine Relation durch $\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2 :\Leftrightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \in U$.

a) Weisen Sie nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Sei ${}^{V}\!/_{U} := V/\!\sim\, := \{[\vec{v}] \mid \vec{v} \in V\}$ die Menge der Äquivalenzklassen.

b) Machen Sie aus ${}^{V}\!/_{U}$ einen $\mathbb{K}$-Vektorraum, so dass $\varphi\colon V \to {}^{V}\!/_{U}$ mit $\varphi(\vec{v}) := [\vec{v}]$ eine lineare Abbildung ist. **Hinweis:** Wie haben wir Restklassenringe konstruiert?
Anmerkung: Man nennt ${}^{V}\!/_{U}$ ***Quotientenraum*** (auch: ***Faktorraum***) und φ ***kanonischen Homomorphismus***.

Präsenzaufgabe 7.3: *Permutationen*
Definition Sei $\sigma \in S_n$. Sei b_1 die Anzahl der $a \in \{1, ..., n\}$ mit $\sigma(a) = a$ und für $j \in \{2, ..., n\}$ sei b_j die Anzahl der j-Zyklen in der Zyklendarstellung von σ. Der ***Zykeltyp*** von σ ist $\mathrm{typ}(\sigma) := (b_2, ..., b_n)$.
In den folgenden Teilaufgaben sei $\sigma \in S_7$ gegeben durch $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 7$, $\sigma(4) = 6$, $\sigma(5) = 1$, $\sigma(6) = 4$, $\sigma(7) = 3$.

a) Bestimmen Sie Zyklendarstellung und Zykeltyp von σ.

b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}^*$, so dass σ^m (also $\underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{m\text{-mal}}$) das neutrale Element von S_7 ist. Wie können Sie diese Zahl an $\mathrm{typ}(\sigma)$ ablesen?
Anmerkung: Man bezeichnet die hier berechnete Zahl m als *Ordnung* $\mathrm{ord}(\sigma)$ von σ.