Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 10

Hausaufgaben (Abgabe bis 25.01.2021, 14:00 Uhr)

Hausaufgabe 10.1: (4 P.) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)\,.$$

Hinweis: Diese Matrix nennt man ***Vandermonde–Matrix***. Vereinfachung durch Zeilenoperationen, Laplace–Entwicklung, Induktion.

Hausaufgabe 10.2: *Einige kleine Beweise*
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}^*$ und $A \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie:

a) (1 P.) $\forall B \in M_n(\mathbb{K})\colon\ \mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$.
Anmerkung: Einsetzen der Definitionen von Matrixmultiplikation und Spur. Die Gleichung ist nichttrivial, da im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$.

b) (2 P.) Wenn $S \in GL_n(\mathbb{K})$ und $B := S^{-1}AS$, dann $\chi_B(X) = \chi_A(X)$.
Hinweis: Rechenregeln für Determinanten.

c) (1 P.) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basen B_1, B_2 und $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $A_1 := {}^{B_1}_{B_1}\varphi$ und $A_2 := {}^{B_2}_{B_2}\varphi$. Zeigen Sie $\chi_{A_1}(X) = \chi_{A_2}(X)$. **Hinweise:** Vorige Teilaufgabe; Basiswechsel.
Anmerkung: Man kann also $\chi_\varphi(X) := \chi_{A_1}(X)$ und ebenso $\mathrm{Spur}(\varphi) := \mathrm{Spur}(A_1)$ sowie $\det(\varphi) := \det(A_1)$ definieren — wie hier gezeigt wird, ist dies von der Wahl der Basis B_1 unabhängig, also wohldefiniert.

Hausaufgabe 10.3: *Berechnung von Eigenräumen*
Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.
(4 P.) Berechnen Sie die Eigenwerte von A sowie jeweils Basen der zugehörigen Eigenräume. **Hinweise:** Die Eigenwerte sind kleine ganze Zahlen; einer der Eigenräume ist zweidimensional.

Erreichbare Punktzahl: 12