Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 6

Liveaufgaben für 16./17.12.2020

Präsenzaufgabe 6.1: *Rang*

Es sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}^*$ ist. Sei $B := (A, \vec{b})$ die erweiterte Matrix. Für $i \in \{1, ..., m\}$ sei $\underline{B}_i$ die i-te Zeile von B. Beweisen Sie:

a) $\mathrm{LR}(A; \vec{b}) \neq \emptyset \iff \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$. **Hinweis:** Wie berechnet man die Ränge und wie berechnet man den Lösungsraum?

b) $\mathrm{LR}(A; \vec{b}) = \emptyset \iff (\underbrace{0\ 0\ ...\ 0}_{k\text{-mal}}\ 1) \in \mathrm{Span}(\underline{B}_1, ..., \underline{B}_m)$.

Präsenzaufgabe 6.2: *Vorbereitung: Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung*

Sei $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. $B := [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ ist eine Basis von $V := \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \leq \mathbb{R}^3$. Sei $A := (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

a) Berechnen Sie ${}^B\vec{u}$ für $\vec{u} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Bringen Sie die erweiterte Matrix $(A, \mathbb{1}_3)$ auf reduzierte ZSF (A', P') mit $P' \in M_3(\mathbb{R})$. Es sei $P \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ die aus den ersten beiden Zeilen von P' gebildete Matrix.

c) Begründen Sie: Wenn $P \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ so wie in b) und $\vec{u} \in V$ ist, dann liefern die beiden Einträge von $P \cdot \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ die Koordinaten von $\vec{u}$ bezüglich $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Überprüfen Sie dies für den in a) gegebenen Vektor $\vec{u}$.

d) Die Abbildung $p\colon \mathbb{R}^3 \to V$ sei gegeben durch $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3\colon p(\vec{x}) := A \cdot P \cdot \vec{x}$. Wieso liegt das Ergebnis in V? Wie lässt sich diese Abbildung geometrisch beschreiben? **Hinweis:** Welche Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ werden von p auf $\vec{0}$ abgebildet?