Lineare Algebra - Übung 11

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Hausaufgabe 11.1: 3×3 Determinanten

$$Sei\ A := \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\ dann \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \overset{laplace}{\Rightarrow} x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$

$$= \underbrace{x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)}_{\Xi}$$

$$< \vec{x} \mid (\vec{y} \times \vec{z}) > = \sum_{i=1}^{m} \vec{x}(\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{y} \times \vec{z})^T \cdot \vec{x} = (y_2z_3 - y_3z_2 \quad y_3z_1 - y_1z_3 \quad y_1z_2 - y_2z_1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$$

$$= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) = \Xi \quad \square$$

D.h. $\underbrace{\langle \vec{x} \mid (\vec{y} \times \vec{z}) \rangle = det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}_{\kappa}$

Wenn $[\vec{y}, \vec{z}]$ lin. unabhängig, dann $\vec{y} \times \vec{z} \neq \vec{0}$:

$$Wenn\ \vec{y}, \vec{z}\ lin.\ unabhängig,\ dann:\ \underbrace{\vec{z} \neq \lambda \cdot \vec{y}}_{\varkappa}\ mit\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

$$(\vec{y} \times \vec{z}) = \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} \overset{\varkappa}{\neq} \begin{pmatrix} y_2\lambda \cdot y_3 - y_3\lambda \cdot y_2 \\ y_3\lambda \cdot y_1 - y_1\lambda \cdot y_3 \\ y_1\lambda \cdot y_2 - y_2\lambda \cdot y_1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Wenn $\vec{y} \times \vec{z} \neq \vec{0}$, dann $[\vec{y}, \vec{z}]$ lin. unabhängig:

$$Sei\ \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x} \mid\ \vec{x}\ ist\ lin.\ unabhängig\ zu\ \vec{y}, \vec{z}.$$
$$\langle \vec{x} \mid (\vec{y} \times \vec{z}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \overset{\kappa}{\Rightarrow} ||\vec{y} \times \vec{z}||^2$$
$$\vec{y} \times \vec{z} \neq \vec{0} \Rightarrow ||\vec{y} \times \vec{z}|| \neq 0 \Rightarrow ||\vec{y} \times \vec{z}||^2 > 0$$
$$\overset{\kappa}{\Rightarrow} det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) > 0 \Rightarrow \vec{y}, \vec{z}\ sind\ lin.\ unabhängig\ zueinander. \quad \square$$

D.h. $[\vec{y}, \vec{z}]$ ist genau dann lin. unabhängig, wenn $\vec{y} \times \vec{z} \neq 0$

Hausaufgabe 11.2: Längen/Winkel

$$||\vec{a}|| = \sqrt{<\vec{a} \mid \vec{a}>} = \sqrt{\vec{a}^T \cdot \vec{a}} = \sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{smallmatrix}\right) \cdot (3 \quad -4 \quad 12)} = \sqrt{169} = 13$$

$$||\vec{b}|| = \sqrt{<\vec{b} \mid \vec{b}>} = \sqrt{\vec{b}^T \cdot \vec{b}} = \sqrt{\left(\begin{smallmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{smallmatrix}\right) \cdot (12\sqrt{3} \quad -3\sqrt{3} \quad -4\sqrt{3})} = \sqrt{507} = 13\sqrt{3}$$

$$||\vec{c}|| = \sqrt{<\vec{c} \mid \vec{c}>} = \sqrt{\vec{c}^T \cdot \vec{c}} = \sqrt{\left(\begin{smallmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} \\ -12+4\sqrt{3} \end{smallmatrix}\right) \cdot (-3-12\sqrt{3} \quad 4+3\sqrt{3} \quad -12+4\sqrt{3})} = \sqrt{676} = 26$$

$$<\vec{a} \mid \vec{b}> = \vec{b}^T \cdot \vec{a} = 0$$
$$<\vec{a} \mid \vec{c}> = \vec{c}^T \cdot \vec{a} = -169$$
$$<\vec{b} \mid \vec{c}> = \vec{c}^T \cdot \vec{b} = -507$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{<\vec{a} \mid \vec{b}>}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||} = \arccos \frac{0}{13 \cdot 13\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\pi$$
$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \arccos \frac{<\vec{a} \mid \vec{c}>}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{c}||} = \arccos \frac{-169}{13 \cdot 26} = \frac{2}{3}\pi$$
$$\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = \arccos \frac{<\vec{b} \mid \vec{c}>}{||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}||} = \arccos \frac{-507}{13\sqrt{3} \cdot 26} = \frac{5}{6}\pi$$

Hausaufgabe 11.3: Prüfen Sie, ob die angegebene Matrix über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und bestimmen Sie ggf. eine diagonalisierende Matrix.

(a)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \textit{ A ist symmetrisch } \Rightarrow \textit{ A ist diagonalisierbar.}$$

Eigenwerte:

$$\lambda \textit{ ist Eigenwert von } A \;\Leftrightarrow det(X\mathbb{1} - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} X-1 & -3 \\ -3 & X-1 \end{vmatrix} = 0 \overset{sarrus}{\Rightarrow} (X-1)^2 - 9 = 0$$

$$\overset{pq}{\Rightarrow} \lambda_1 = 1 + \sqrt{9} = -2 \textit{ und } \lambda_2 = 1 - \sqrt{9} = 4$$

Eigenvektoren:

λ_1 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_{\lambda_1} = Span(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$$

λ_2 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_{\lambda_2} = Span(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$$

$$\Rightarrow S = (\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \textit{ diagonalisierende Matrix.}$$

Und inverse der diagonalisierenden Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II+I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{II:2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\overset{I-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \overset{I\cdot(-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

Eigenwerte:

λ *ist Eigenwerten von* $A \Leftrightarrow det(X\mathbb{1} - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ -1 & X & -2 \\ 0 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{Spalte\,3 - 2\cdot Spalte\,1} \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -2(X-2) \\ -1 & X & 0 \\ 0 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{I+2\cdot III} \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = 0 \overset{Laplace}{\Rightarrow} (X-2)\cdot \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{Sarrus}{\Rightarrow} (X-2)(X^2-2X+1) = 0 = (X-2)(X-1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1$$

Eigenvektoren:

λ_1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_{\lambda_1} = Span(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$$

$\lambda_{2,3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$E_{\lambda_{2,3}} = Span(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$

$$\sum_{i=1}^{3} dim\, E_{\lambda_i}(A) = 2 \Rightarrow geometrische\ Vielfachheit < algebr.\ Vielfachheit$$

$\Rightarrow$ *nicht diagonalisierbar!*

(c)

Eigenwerte:

λ *ist Eigenwerten von* $A \Leftrightarrow det(X\mathbb{1} - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} X-3 & 10 & 10 \\ 0 & X-3 & 0 \\ 0 & 5 & X+2 \end{vmatrix} = 0 \overset{laplace}{\Rightarrow} (X-3) \cdot \begin{vmatrix} X-3 & 0 \\ 5 & X+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{sarrus}{\Rightarrow} (X-3)(X-3)(X+2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = -2$$

Eigenvektoren:

$\lambda_{1,2}:$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_{\lambda_{1,2}} = Span(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

$\lambda_3:$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_{\lambda_3} = Span(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$\Rightarrow S = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Und inverse der diagonalisierenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d+2g & e+2h & f+2i \\ a & b & c \\ -a+g & -b+h & -c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = c = g = 0$$

$$\Rightarrow b = i = d = h = 1$$

$$\Rightarrow f = e = -2$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$