Lineare Algebra für Informatiker - Übung 03

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

November 22, 2020

Hausaufgabe 3.1: Tropischer Semiring

$Sei\, T := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ für alle a,b $\in$ T gilt:

$$a \oplus b := max\{a, b\}$$
$$a \odot b := a + b$$

nun gilt es zu zeigen welche Körperaxiome erfüllt sind und Das Null- und das Einselement zu finden.

$$a \oplus b = b \oplus a$$
$$max(a, b) = max(b, a) \quad \square$$

Assoziativität von $\odot$ $\forall a, b, c \in T$:

$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$\overset{Assoz.}{\Rightarrow} a + b + c = a + b + c \quad \square$$

Assoziativität von $\oplus$ $\forall a, b, c \in T$:

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$
$$max(a, b \oplus c) = max(a \oplus b, c)$$
$$max(a, max(b, c)) = max(max(a, b), c) \quad \square$$

Distributivität $\forall a, b, c \in T$:

1. $$(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$$
$$max(a, b) + c = max(a + c, b + c)$$
wenn a > b $$a + c = max(a + c, b + c)$$
$$a + c = a + c$$
wenn b > a $$b + c = max(a + c, b + c)$$
$$b + c = b + c \quad \square$$

2. $$a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$$
$$a + max(b, c) = max(a + b, a + c)$$
wenn b > c $$a + b = max(a + b, a + c)$$
$$a + b = a + b$$
wenn c > b $$a + c = max(a + b, a + c)$$
$$a + c = a + c \quad \square$$

Neutrale Elemente $\forall a \in T$:

$$a \oplus 0 = a \qquad a \odot 1 = a$$
$$max(a, 0) = a \qquad a + 1 = a$$
$$\Rightarrow 0 := -\infty \qquad \Rightarrow 1 := 0 \quad \square$$

Negation (additives Invers) $\forall a \in T$: $\exists -a \in T$:

$$a \oplus (-a) = 0$$
$$max(a, -a) = 0 \mid \text{mit } 0 = -\infty$$
mit z.B. a = 7: $$max(7, -a) := -\infty \quad ⚡$$

Kommutativität von $\odot$ $\forall a, b \in T$:

$$\begin{aligned} a \odot b &= b \odot a \\ a + b &= b + a \quad \square \end{aligned}$$

$T^* := T \backslash \{0\}$.
Multiplikatives Invers $1 \neq 0$ und $\forall a \in T^*$: $\exists a^{-1} \in T$:

$$\begin{aligned} a \odot a^{-1} &= 1 \quad 1 \neq 0 \\ a + a^{-1} &= 1 \quad \mid \text{mit } 1 = 0 \ (NeutralesElement) \\ a + a^{-1} &= 0 \\ \Rightarrow a^{-1} &:= -a \end{aligned}$$

D.h.: Der Ring (T, $\oplus$, $\odot$, $-\infty$, 0) erfüllt alle Körperaxiome mit außer die Negation.

Hausaufgabe 3.2: $\mathbb{C}$

Sei $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit den inneren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, wobei gilt $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) = (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Da $\mathbb{R}^2$ ein Körper sein soll, wird im folgenden vorausgesetzt, dass die Körperaxiome gelten. Dies gilt es nun zu beweisen.
Kommutativität von + $\forall$ (a,b),(c,d) $\in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (c, d) + (a, b) \\ (a + c, b + d) &\overset{komm.}{=} (c + a, d + b) \quad \square \end{aligned}$$

Kommutativität von $\cdot$ $\forall$ (a,b),(c,d) $\in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (c, d) &= (c, d) \cdot (a, b) \\ (ac - bd, ad + bc) &\overset{komm.}{=} (ca - db, cb + da) \quad \square \end{aligned}$$

Assoziativität von + $\forall$ (a,b),(c,d),(e,f) $\in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a, b) + ((c, d) + (e, f)) &= ((a, b) + (c, d)) + (e, f) \\ (a, b) + (c + e, d + f) &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ (a + c + e, b + d + f) &= (a + c + e, b + d + f) \quad \square \end{aligned}$$

Assoziativität von $\cdot$ für $\forall$ (a,b),(c,d),(e,f) $\in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) &= ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) \\ (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \\ (a \cdot (ce - df) - b \cdot (cf + de), a \cdot (cf + de) + b \cdot (ce - df)) &= ((ac - bd) \cdot e - (ad + bc) \cdot f, (ac - bd) \cdot f + (ad + bc) \cdot e) \\ (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) &\overset{komm.}{=} (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \quad \square \end{aligned}$$

Distributivität 1. $\forall$ (a,b),(c,d),(e,f) $\in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} ((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) &= (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f) \\ (a + c, b + d) \cdot (e, f) &= (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) \\ ((a + c) \cdot e - (b + d) \cdot f, (a + c) \cdot f + (b + d) \cdot e) &= (ae - bf + ce - df, af + be + cf + de) \\ (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de) &\overset{komm.}{=} (ae - bf + ce - df, af + be + cf + de) \quad \square \end{aligned}$$

Distributivität 2. $\forall$ (a,b),(c,d),(e,f) $\in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) &= (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)\\ (a,b)\cdot(c+e,d+f) &= (ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\ (a\cdot(c+e)-b\cdot(d+f),a\cdot(d+f)+b\cdot(c+e)) &= (ac-bd+ae-bf,ad+bc+af+be)\\ (ac+ae-bd+bf,ad+af+bc+be) &\overset{komm.}{=} (ac-bd+ae-bf,ad+bc+af+be) \quad \square\end{aligned}$$

Neutrale Elemente, wobei (c,d)$\in \mathbb{R}^2$ jeweils das neutrales Element ist: $\forall$ (a,b)$\in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &additiv:\\ (a,b)+(c,d) &= (a,b)\\ (a+c,b+d) &= (a,b)\\ \Rightarrow (c,d) &:= (0,0) \quad \square\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &multiplikativ:\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (a,b)\\ (ac-bd,ad+bc) &= (a,b)\\ \Rightarrow (c,d) &:= (1,0) \quad \square\end{aligned}$$

Additives Invers: $\forall$ (a,b) $\in \mathbb{R}^2$: $\exists -(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(a,b)+(-(a,b)) &= (0,0)\\ (a-a,b-b) &= (0,0)\\ \Rightarrow additive\, Invers\ &:= (-a,-b) \quad \square\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^{2*} := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$
Multiplikative Invers: $1 \neq 0$ und $\forall$ (a,b) $\in \mathbb{R}^{2*}$: $\exists (a,b)^{-1} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot(a,b)^{-1} &= (1,0), \quad (a,b)^{-1} := (c,d)\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd,ad+bc) = (1,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.\quad ac-bd &= 1\\ 2.\quad ad+bc &= 0\\ c &= \frac{a}{a^2+b^2}\\ d &= \frac{-b}{a^2+b^2}\\ 1.\quad a\cdot\frac{a}{a^2+b^2}-b\cdot\frac{-b}{a^2+b^2} &= 1\\ \frac{a^2}{a^2+b^2}-(-\frac{b^2}{a^2+b^2}) &= 1\\ \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} &= 1\\ 2.\quad a\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}+b\cdot\frac{a}{a^2+b^2} &= 0\\ -\frac{a\cdot b}{a^2+b^2}+\frac{a\cdot b}{a^2+b^2} &= 0\end{aligned}$$

$$(a,b)^{-1} := (\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}) \quad \square$$

D.h.: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist ein Körper.

Hausaufgabe 3.3: Besondere Ringelemente

Es sei R ein Ring, Man nennt x ∈ R idempotent gdw. x · x = x (Beispiel:1 und 0 sind immer idempotent, aber in manchen Ringen gibt es weitere Idempotente). Zeigen Sie: Wenn x ∈ R idempotent ist, dann ist auch y := 1 - x. idempotent und es gilt x · y = y · x = 0. f) $\forall x \in R : (-1) \cdot x = -x$.

$$
\begin{aligned}
y &:= 1 - x \\
y &= y \cdot y = (1-x)(1-x) \\
&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-x) + (-x) \cdot 1 + (-x)(-x) \\
&\overset{f)}{=} 1 - x - x + x \\
&= 1 - x \quad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y \cdot x &= (x-1) \cdot x \\
&= 1 \cdot x + (-x) \cdot x \\
&\overset{assoz.}{=} x + (-1(x \cdot x)) \\
&\overset{idempo.}{=} x - x = 0 \quad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \cdot y &= x \cdot (x-1) \\
&= x \cdot x + x \cdot (-1) \\
&\overset{idempo.}{=} x - x = 0 \quad \square
\end{aligned}
$$

Hausaufgabe 3.4: Nullteilerfreie Ringe

Ein Ring R heißt nullteilerfrei gdw. für alle a, b ∈ R mit a · b = 0 folgt a = 0 oder b = 0. Zeigen Sie: Ist R ein nullteilerfreier Ring, dann gilt die multiplikative Kürzungsregel:

$$\forall x, y, z \in R, z \neq 0 : (x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y) \wedge (z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y)$$

$$
\begin{aligned}
x \cdot z &= y \cdot z \quad | -x \cdot z \\
x \cdot z - x \cdot z &= y \cdot z - x \cdot z \\
&\overset{Distributiv.}{\Rightarrow} 0 = z \cdot (y - x) \\
&\overset{Nullteilerfrei.}{\Rightarrow} z = 0 \vee y - x = 0 \\
&\overset{z \neq 0}{\Rightarrow} y - x = 0 \quad | +x \\
&\quad y = x \quad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z \cdot x &= z \cdot y \quad | -z \cdot x \\
z \cdot x - z \cdot x &= z \cdot y - z \cdot x \\
&\overset{Distributiv.}{\Rightarrow} 0 = z \cdot (y - x) \\
&\overset{Nullteilerfrei.}{\Rightarrow} z = 0 \vee y - x = 0 \\
&\overset{z \neq 0}{\Rightarrow} y - x = 0 \quad | +x \\
&\quad y = x \quad \square
\end{aligned}
$$