Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 — Übungsblatt 8

Liveaufgaben (13.–14.01.2021)

Präsenzaufgabe 8.1: *Determinante und Invertierbarkeit*
Sei R ein kommutativer Ring. In den Beweisen zur Determinante wurde bisher an keiner Stelle die Division genutzt. Alle bisher in der Vorlesung bewiesenen Aussagen einschließlich Laplace-Entwicklung gelten also auch für Determinanten von Matrizen aus $M_n(R)$. Zudem dürfen Sie verwenden, dass $\forall A, B \in M_n(R)\colon\ \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, was in der nächsten Vorlesung bewiesen wird.

Definition Für $A \in M_n(R)$ ist die ***Adjunkte*** von A definiert als $\operatorname{adj}(A) \in M_n(R)$ mit $\left(\operatorname{adj}(A)\right)_{j,i} := (-1)^{i+j} \det(A(i,j))$ (man beachte die Vertauschung von i und j!)

a) Beweisen Sie $B := A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n$ und $C := \operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n$. **Hinweis:** Schreiben Sie $B_{i,k}$ mit der Multiplikationsformel hin und vergleichen Sie mit der Laplace-Entwicklung. Für $i \neq k$ sollten Sie mit der Laplace-Entwicklung einer Matrix vergleichen, die aus A entsteht, indem Zeile k durch eine Kopie von Zeile i ersetzt wird. Für C wird ähnlich argumentiert.

b) Was besagt die Aussage aus der vorigen Teilaufgabe im Fall $n = 2$? Vergleichen Sie mit einer früheren Hausaufgabe.

c) Folgern Sie: Es gibt $A^{-1} \in M_n(R)$ genau dann, wenn $\det(A)$ ein multiplikatives Inverses in R besitzt.

Präsenzaufgabe 8.2: *Komplexität von Matrixoperationen*
Anmerkung: In der Praxis sind bei Komplexitätsbetrachtungen die *Additionen* von Körperelementen im Vergleich zu den Multiplikationen vernachlässigbar.

a) Seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Wie viele Multiplikationen von Körperelementen treten bei der Berechnung von $A \cdot B$ nach der Formel $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$ auf? Wie viele konkret für $n = 2$? **Anmerkung:** Dazu gab es bereits eine Präsenzaufgabe.

Bitte wenden

b) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Ferner sei $\left(\begin{smallmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{smallmatrix}\right) := A \cdot B$. Sei

$$\begin{aligned} m_1 &:= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) & m_2 &:= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} \\ m_3 &:= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) & m_4 &:= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \\ m_5 &:= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} & m_6 &:= (a_{21} - a_{11}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \\ m_7 &:= (a_{12} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von $m_1, ..., m_7$ treten offenbar nur sieben Multiplikationen von Körperelementen auf. Verifizieren Sie

$$\begin{aligned} c_{11} &= m_1 + m_4 - m_5 + m_7 & c_{12} &= m_3 + m_5 \\ c_{21} &= m_2 + m_4 & c_{22} &= m_1 - m_2 + m_3 + m_6 \end{aligned}$$

Skizzieren Sie, wie man dies in einem Algorithmus für die Matrixmultiplikation verwenden kann, der eine kleinere Komplexität als der in der vorigen Teilaufgabe untersuchte Standardalgorithmus hat.
Anmerkung: Dieser Algorithmus heißt ***Strassen-Algorithmus***.