Lineare Algebra - Übung 04

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

November 30, 2020

4.1) Quadratische Gleichungen

$x^2+px+q=0$, lässt sich mit der pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ lösen. Dies gilt auch für $x^2+(2\mathrm{i}-4)\cdot x - 4\mathrm{i} = 0$. mit $p = (2\mathrm{i}-4)$ und $q = -4\mathrm{i}$ folgt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{(2\mathrm{i}-4)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(2\mathrm{i}-4)}{2}\right)^2 + 4\mathrm{i}} \\
&= 2 - \mathrm{i} + \sqrt{3 - 4\mathrm{i} + \mathrm{i}} \\
&= 2 + \sqrt{3} - \mathrm{i} \\
x_2 &= -\frac{(2\mathrm{i}-4)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(2\mathrm{i}-4)}{2}\right)^2 + 4\mathrm{i}} \\
&= 2 - \mathrm{i} - \sqrt{3 - 4\mathrm{i} + \mathrm{i}} \\
&= 2 - \sqrt{3} - \mathrm{i}
\end{aligned}$$

D.h.: $x \in \{2+\sqrt{3}-\mathrm{i}, 2-\sqrt{3}-\mathrm{i}\}$

4.2) Wurzelziehen in $\mathbb{C}$

Wenn $w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}^*$, dann gilt für $z^n = w$ wie bereits in der Vorlesung definiert:

$$a) \quad z = \sqrt[n]{|w|}\left(cos(\frac{arg(w)}{n} + \varphi) + sin(\frac{arg(w)}{n} + \varphi)\mathrm{i}\right)$$

Aus $z^5 = 8(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + 8(\sqrt{6}+\sqrt{2})\mathrm{i}$ folgt $n=5$, $w = 8(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + 8(\sqrt{6}+\sqrt{2})\mathrm{i}$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{2k\pi}{n},\, mit\, k \in \{0,1,2,3,4\} \\
|w| &= \sqrt{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + 8(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = 32 \\
arg(w) &= arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\, mit\, a = 8(\sqrt{6}-\sqrt{2}), b = 8(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \\
&= arccos\left(\frac{a}{|w|}\right) = \frac{5}{12}\pi
\end{aligned}$$

Durch einsetzen in $a)$ und $k=0 \Rightarrow \varphi = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
Z_1 :&= \sqrt[5]{32}\left(cos(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5}) + sin(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5})\mathrm{i}\right) \\
&= \sqrt[5]{32}\left(cos(\frac{\pi}{12}) + sin(\frac{\pi}{12})\mathrm{i}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}\right) \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

für $k=1 \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{5}$ folgt:

$$\begin{aligned}
Z_2 &= 2\left(cos(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}) + sin(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5} + \frac{2\pi}{5})\mathrm{i}\right) \\
&= 2(cos(\frac{29}{60}\pi) + sin(\frac{29}{60}\pi)\mathrm{i})
\end{aligned}$$

für $k=2 \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{5}$ folgt:

$$\begin{aligned}
Z_3 &= 2\left(cos(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}) + sin(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5} + \frac{4\pi}{5})\mathrm{i}\right) \\
&= 2(cos(\frac{53}{60}\pi) + sin(\frac{53}{60}\pi)\mathrm{i})
\end{aligned}$$

für $k = 3 \Rightarrow \varphi = \frac{6\pi}{5}$ folgt:

$$\begin{aligned} Z_4 &= 2\left(cos(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5} + \frac{6\pi}{5}) + sin(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5}\frac{6\pi}{5})\mathrm{i}\right) \\ &= 2(cos(\frac{77}{60}\pi) + sin(\frac{77}{60}\pi)\mathrm{i}) \end{aligned}$$

für $k = 4 \Rightarrow \varphi = \frac{8\pi}{5}$ folgt:

$$\begin{aligned} Z_5 &= 2\left(cos(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}) + sin(\frac{\frac{5}{12}\pi}{5} + \frac{8\pi}{5})\mathrm{i}\right) \\ &= 2(cos(\frac{101}{60}\pi) + sin(\frac{101}{60}\pi)\mathrm{i}) \end{aligned}$$

4.3) Matrixprodukte

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

dann sind alle möglichen Produkte:[1]

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -17 \\ 5 & 49 & -20 \\ -6 & -33 & 91 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57 \end{pmatrix}$$

[1] die dazugehörigen Rechnungen finden sie im Anhang in Moodle.

4.4) Matrixarithmetik

Es sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times p}, C \in \mathbb{K}^{p\times q}$. Des weiteren sind $i, l, k, t \in \mathbb{N}^*$ Zunächst betrachtet man die Dimensionen:

$$AB \in \mathbb{K}^{m\times p} \Rightarrow (AB)C \in \mathbb{K}^{m\times q}$$
$$BC \in \mathbb{K}^{n\times q} \Rightarrow A(BC) \in \mathbb{K}^{m\times q}$$

Die Dimensionen stimmen überein, somit gilt für alle $i \leq m$ und $l \leq q$:

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{il} &= (A(BC))_{il} \\
\sum_{k=1}^{n}(AB)_{i,k}C_{k,l} &= \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}(BC)_{k,l} \\
\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{p} A_{i,t}B_{t,k}\right)C_{k,l} &= \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}\left(\sum_{t=1}^{n} B_{k,t}C_{t,l}\right) \\
\overset{Distr.}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{p} A_{i,t}B_{t,k}C_{k,l}\right) &= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{n} A_{i,k}B_{k,t}C_{t,l}\right) \\
\overset{Komm.}{\Rightarrow} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{p} A_{i,t}B_{t,k}C_{k,l}\right) \\
&= ((AB)C)_{i,l} \quad \square
\end{aligned}$$

In den Schritten bezüglich der Kommutativität und Distributivität wurde das Distributivitätsgesetz und die Kommutativität der Addition von $\mathbb{K}$ vorausgesetzt.