Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik
FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Lösungen zu Übungsblatt 2

Hausaufgabe 2.1: *Mengen*
(1 P.) $\{K \in \mathscr{P}(C) \mid B \subseteq K\} \cap \{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \subseteq K\} = \{K \in \mathscr{P}(C) \mid (A \subseteq K) \wedge (B \subseteq K)\}$. Wir müssen also zeigen: $\forall K \subseteq C\colon\ ((A \subseteq K) \wedge (B \subseteq K)) \iff (A \cup B \subseteq K)$. Nach der Definition von Teilmengen müssen wir für alle $K \subseteq C$ und alle x zeigen: $((x \in A \Rightarrow x \in K) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in K))$ ist gleichbedeutend zu $(x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in K)$. **Anmerkung:** Wir haben Definitionen eingesetzt. Das sollte für Sie beim Problemlösen zum Automatismus werden.

(1 P.) Ist $x \notin A \cup B$, also $x \notin A \wedge x \notin B$ nach den de Morganschen Regeln, so sind die Prämissen aller drei Implikationen falsch, also alle drei Implikationen wahr, also ist in diesem Fall Bedeutungsgleichheit gegeben.

(1 P.) Ist $x \in K$, so sind alle Implikationen wahr, also ist in diesem Fall Bedeutungsgleichheit gegeben.

(1 P.) Im verbleibenden Fall $(x \notin K) \wedge (x \in A \cup B)$ ist die dritte Implikation falsch. $x \in A \cup B$ impliziert $x \in A$ (dann ist die erste Implikation falsch) oder $x \in B$ (dann ist die zweite Implikation falsch). Die Konjunktion ist also falsch, so dass die Bedeutungsgleichheit auch hier gegeben ist.

Hausaufgabe 2.2: *Die Menge der Abbildungen*
Anmerkung: Zur Lösung muss man sich nicht-offensichtliche Zusammenhänge erschließen. In der Schuldidaktik zählt man solche Aufgaben zum „Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren“, und es ist klar, dass es solche Aufgaben an Hochschulen häufiger als an Schulen gibt.

Wir definieren die Aussageform $\mathcal{F}(G) := \forall x \in X\colon\ \exists! y_x \in Y\colon\ (x, y_x) \in G$.

(2 P.) Für $G \subset X \times Y$ gilt: $\mathcal{F}(G) \iff \exists f\colon X \to Y$ mit $G = \Gamma_f$. Ist nämlich $f\colon X \to Y$, so gilt $\mathcal{F}(\Gamma_f)$ mit $y_x := f(x)$. Ist $G \subset X \times Y$ mit $\mathcal{F}(G)$, denn können wir $f_G\colon X \to Y$ durch $f_G(x) := y_x$ definieren. f_G ist durch G eindeutig bestimmt und $G = \Gamma_{f_G}$. Wir erhalten eine Eins-zu-Eins-Beziehung zwischen Abbildungen und den durch $\mathcal{F}$ bestimmten Teilmengen von $X \times Y$.

(2 P.) $X \times Y$ ist eine Menge (siehe Vorlesung), also $\mathscr{P}(X \times Y)$ ebenfalls (Potenzmengenaxiom), also $M := \{G \in \mathscr{P}(X \times Y) \mid \mathcal{F}(G)\}$ ebenfalls (Aussonderungsaxiom), also $\{f_G \mid G \in M\}$ ebenfalls (Ersetzungsaxiom). Und wie oben begründet ist $\{f\colon X \to Y\} = \{f_G \mid G \in M\}$.

Hausaufgabe 2.3: *Ein erstes lineares Gleichungssystem*
Anmerkung: Die Lösung erfolgt mit Schulmethoden und das Lernziel der Aufgabe ist, dass Sie sich die Funktionsweise der Schulmethoden bewusst machen, statt sie einfach nur anzuwenden (daher die Frage nach der Begründung des Vorgehens). In spätestens zwei Wochen sollten Sie sich allerdings von den Schulmethoden lösen.

(3 P.) Die erste Gleichung minus viermal die letzte ergibt $15\,y - 15\,z = 0$, also $y = z$. Einsetzen von $y = z$ in die letzte Gleichung ergibt $x - 2\,z = 0$, also $x = 2\,z$. Probe: Wir setzen $x = 2\,z$ und $y = z$ in alle Gleichungen ein und verifizieren

$$\begin{aligned} 8\,z - 5\,z - 3\,z &\overset{\checkmark}{=} 0 \\ -6\,z + 4\,z + 2\,z &\overset{\checkmark}{=} 0 \\ 2\,z - 5\,z + 3\,z &\overset{\checkmark}{=} 0 \end{aligned}$$

Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{(2\,z,\, z,\, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. (1 P.) Begründung des Vorgehens: Die Gleichungen werden so kombiniert (Additionsverfahren), dass jeweils eine Variable wegfällt, so dass wir am Ende alle Variablen einer Lösung durch die Werte einer Variable (hier: z) ausdrücken können.

Erreichbare Punktzahl: 12