Wintersemester 2020/21

Lineare Algebra - Übung 09

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

Hausaufgaben (Abgabe bis 18.01.2021, 14:00 Uhr)

Hausaufgabe 9.1): *Abbildungsmatrizen II*

a)

Zz. ist, dass wenn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ darstellbar als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ist, so kann man $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ umschreiben und ebenso eine Linearkombination für $\begin{pmatrix} z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$ erhalten. Dies ist in Aufgabe (b) implizit gezeigt worden. Es reicht im folgenden $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2)$ zu betrachten, da sich jeder andere Vektor $f(\vec{a})$ als Linearkombination $\lambda f(\vec{v}_1) + \mu f(\vec{v}_2)$ darstellen lässt. $\square$

b)

$$ {}_B^B f = ({}^B f(\vec{v}_1),\ {}^B f(\vec{v}_2)) $$

$$ {}^B f(\vec{v}_1) = {}^B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}^B f(\vec{v}_2) = {}^B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} $$

$$ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{III-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{II\cdot -2^{-1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) $$

$$ \overset{I-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow {}_B^B f = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \square $$

Hausaufgabe 9.2): *Determinanten I*

In Hausaufgabe 9.2) und Hausaufgabe 9.3) habe ich die folgenden Regeln und Verfahren wie folgt abgekürzt:

- (S)... Regel von Sarrus
- (L)... Laplacescher Entwicklungssatz
- (B)... Blockmatrix
- (D)... Dreiecksmatrix

a)

$$ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \overset{(S)}{=} 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 2 = 15 + 4 = 19 $$

b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{vmatrix} \overset{(S)}{=} 3 \cdot (-6) - (-9) \cdot 2 = 0$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=} 3-15=-12} -3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=} -6+9=3} +2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=} 10-3=7} = -12 - 9 + 14 = -7$$

d)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -2 & 3 \\ \mathbf{3} & 1 & -5 \\ \mathbf{5} & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(L)}{=} \mathbf{1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=} 1-15=-14} -\mathbf{3} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=} -2+9=7} +5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=} 10-3=7} = -14 - 21 + 35 = 0$$

e)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(B)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(S)}{=} (2-3) \cdot (2+2) = -4$$

f)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\textit{kein Vorzeichenwechsel}]{II \rightleftarrows IV,\ \textit{dann}\ IV \rightleftarrows III} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(D)}{=} 1$$

Hausaufgabe 9.3): *Determinanten II*

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & 37 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{I-2\cdot III} \begin{vmatrix} -5 & -1-2\sqrt{2} & -67 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & 37 & \mathbf{1} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(L)}{=} -\mathbf{1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1-2\sqrt{2} & -67 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{(L)}{=} -1 \cdot \left(-5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=} 2} \right) \overset{(S)}{=} 5 \cdot 2 = 10$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & 8 & 18 \end{vmatrix} \xrightarrow[III-I]{IV-II} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 15 \end{vmatrix} \overset{(B)}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=}2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} \overset{(S)}{=} 2 \cdot (3 \cdot 15 - 8 \cdot 6) = 90 - 96 = -6$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{II-3\cdot I \\ III-6\cdot I \\ IV-4\cdot I}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\textit{kein Vorzeichenwechsel} \\ \textit{denn es wird 2-mal} \\ \textit{die Zeile vertauscht}}]{I \rightleftarrows IV,\ dann\ II \rightleftarrows III} \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{(B)}{=} \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}}_{\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right| \overset{(*)}{\Rightarrow} \left|\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|} \overset{(L)}{=} -\mathbf{1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=}-1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\overset{(S)}{=}1} = 1$$

(*) II-4·I, und III-4·I