Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 4

Hausaufgaben (Abgabe bis 30.11.2020, 14:00 Uhr)

Hausaufgabe 4.1: *Quadratische Gleichungen*
(2 P.) Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ von $x^2 + (2\,\mathrm{i} - 4) \cdot x - 4\,\mathrm{i} = 0$.
Hinweis: Die Schulmethoden zur Lösung quadratischer Gleichungen (quadratische Ergänzung, p, q-Formel) funktionieren auch in $\mathbb{C}$. Die Aufgabe ist so gestellt, dass man nur die Wurzel aus einer *reellen* Zahl ziehen braucht.

Hausaufgabe 4.2: *Wurzelziehen in* $\mathbb{C}$
(4 P.) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 = 8 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 8 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \mathrm{i}$$

mit $z \in \mathbb{C}$. Geben Sie alle fünf Lösungen in Polardarstellung an; geben Sie mindestens eine der Lösungen zusätzlich in Standarddarstellung an.
Hinweis: Bsp. 1.20 und die Tabelle auf Seite 26 im Skript.

Hausaufgabe 4.3: *Matrixprodukte*
(4 P.) Berechnen Sie alle möglichen Produkte der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Es kommt im Allgemeinen auf die Reihenfolge an. Sie sollten auf 5 mögliche Produkte kommen.

Hausaufgabe 4.4: *Matrixarithmetik*
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ und $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$.
(2 P.) Beweisen Sie das ***Assoziativgesetz*** $(AB)C = A(BC)$.
Hinweise: Gehen Sie komponentenweise vor, d.h. vergleichen Sie $((AB)C)_{i,\ell}$ mit $(A(BC))_{i,\ell}$. Wenn Sie die Definition des Matrixproduktes einsetzen, treten teilweise „Doppelsummen“ auf (d.h. achten Sie darauf, die Laufindizes unterschiedlich zu benennen). Die beiden Doppelsummen gehen durch Umstellen der Summanden ineinander über.

Bitte wenden

Falls Sie in Ihrer Freizeit schöne Bilder im Zusammenhang mit $\mathbb{C}$ programmieren möchten...

Für $c \in \mathbb{C}$ definieren wir rekursiv eine Zahlenfolge $z_{c,0}, z_{c,1}, z_{c,2}, \ldots \in \mathbb{C}$ wie folgt: $z_{c,0} := 0$ und $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ z_{c,n+1} := z_{c,n}^2 + c$.

Definition $M := \{c \in \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N}\colon\ |z_{c,n}| \leq 2\}$ heißt ***Mandelbrot-Menge***.

Schreiben Sie ein Programm, das eine Detailansicht von M in einem vorgegebenen rechteckigen Bildausschnitt der gaußschen Zahlenebeneproduziert.

Ideen dazu:

- Viele Programmiersprachen (C, Python-3) stellen einen Datentyp für komplexe Zahlen zur Verfügung.
- Da Sie $z_{c,n}$ nur für endlich viele n berechnen können, können Sie nicht in endlicher Zeit sicher entscheiden, ob $c \in M$ gilt. Stattdessen könnten Sie die Mengen

  $$M_k := \{c \in \mathbb{C} \mid |z_{c,k}| > 2 \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}_{<k}\colon\ |z_{c,n}| \leq 2\}$$

  für verschiedene $k \in \mathbb{N}$ mit unterschiedlichen Farben darstellen.
- Um Rechenzeit zu sparen, kann man nutzen, dass M zusammenhängend ist.
- In Wikipedia sehen Sie einige Beispiele, wie die von Ihrem Programm generierten Bilder aussehen könnten.

Erreichbare Punktzahl: 12