Lineare Algebra - Übung 07

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

January 5, 2022

7.1) Unterverktorräume

a) $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} \leq \mathbf{V}$

$$\vec{0} \in U \wedge \vec{0} \in W \Rightarrow \vec{0} \in U \cap W \neq \emptyset \quad \square$$
$$\vec{v}, \vec{w} \in U \cap W$$
$$\Rightarrow \vec{v}, \vec{w} \in U \wedge \vec{v}, \vec{w} \in W$$
$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in U \wedge \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in W \mid mit \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \text{da } U, W \text{ Unterverktorräume sind}$$
$$\Rightarrow \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in U \cap W \quad \square$$

b) $\mathbf{U} + \mathbf{W} \leq \mathbf{V}$

$$\vec{0} \in U \wedge \vec{0} \in W \Rightarrow \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in U + W \quad \square$$
$$\vec{f_1}, \vec{f_2}, \in U + W; \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$
$$\lambda\vec{f_1} + \mu\vec{f_2}$$
$$\lambda(\vec{u}_1 + \vec{w}_1) + \mu(\vec{u}_2 + \vec{w}_2) \mid \text{ mit } \vec{f_1} := \vec{u}_1 + \vec{w}_1, \vec{f_2} := \vec{u}_2 + \vec{w}_2$$
$$\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2 + \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2$$
$$\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2 \in U, \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in W \Rightarrow \lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2 + \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in U + W \quad \square$$

c) $\mathbf{U} \leq \mathbf{U} + \mathbf{W}$

$$U \subseteq U + W \Rightarrow \vec{x} \in U \Rightarrow \vec{x} \in U + W$$
$$\vec{0} \in U \quad \square$$
$$\vec{z}_1 \in U; \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$
$$\vec{z}_1 \in U \Rightarrow \vec{z}_1 = \vec{z}_1 + \vec{0} \in U$$
$$\Rightarrow \vec{z}_1 = \vec{z}_1 + \vec{0} \in U + W \mid \text{ da } \vec{0} \in W \quad \square$$

7.2) Lineare Abbildungen?

Im folgenden habe ich angenommen, dass alle Abbildungen linear sind und habe die geltenden Eigenschaften auf Widerspruchsfreiheit überprüft.

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a \cdot b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \cdot e \\ d+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+d) \cdot (b+e) \\ a+d+b+e \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} ab+de \\ a+b+d+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+ae+db+de \\ a+d+b+e \end{pmatrix} \lightning$$

D.h. f ist nicht linear!

$$g\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} a+d \\ b+e \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3a+1 \\ 4b+a+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3d+1 \\ 4e+d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(a+d)+1 \\ 4(b+e)+a+d+1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3(a+d)+2 \\ 4(b+e)+a+d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(a+d)+1 \\ 4(b+e)+a+d+1 \end{pmatrix} \lightning$$

D.h. g ist nicht linear!

$$h\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}d\\e\end{pmatrix} = h\begin{pmatrix}a+d\\b+e\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a+3b\\b+3a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d+3e\\e-3d\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+d+3(b+e)\\b+e-3(a+d)\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a+d+3(b+e)\\b+e-3(a+d)\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+d+3(b+e)\\b+e-3(a+d)\\0\end{pmatrix} \quad \square$$

$$h\left(k\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = k\cdot h\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$h\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}a+3b\\b-3a\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}ka+3kb\\kb-3ka\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ka+3kb\\kb-3ka\\0\end{pmatrix} \quad \square$$

D.h. h ist linear!

7.3) Lineare Abbildungen??

Im folgenden habe ich angenommen, dass die Abbildung linear ist und ich habe die geltenden Eigenschaften auf Widerspruchsfreiheit überprüft. Zusätzlich habe ich genutzt, dass $k \in \{0,1\}$. Da der Körper $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

$$\begin{aligned}
f(p)+f(i) &= f(p+i)\\
p^2+i^2 &= (p+i)^2\\
&= p^2+2pi+i^2 \mid 2=0,\ da\,\mathbb{K} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\\
&\Rightarrow p^2+i^2 \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(kp) &= k\cdot f(p)\\
(kp)^2 &= k\cdot p^2\\
\text{Wenn } k=0 \Rightarrow (0\cdot p)^2 &= 0\cdot p^2\\
0 &= 0 \quad \square\\
\text{Wenn } k=1 \Rightarrow 1^2\cdot p^2 &= 1\cdot p^2 \quad \square
\end{aligned}$$

7.4) Basisauswahl

Im folgenden habe ich zuerst die gegebenen Vektoren als Matrix zusammengefasst. Diese wurde auf ZSF gebracht, um den überflüssigen Vektor zu ermitteln.

$$\begin{pmatrix}1&0&5&-1&-2\\0&1&-4&2&1\\2&1&6&1&-3\\1&0&5&-3&-2\end{pmatrix} \overset{(1.)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&0&5&-1&-2\\0&1&-4&2&1\\0&1&-4&3&1\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix} \overset{(2.)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&0&5&-1&-2\\0&1&-4&2&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{(3.)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4 \text{ bilden die Basis von V}$$

D.h. $V = Span(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$ $\square$

1. Ziehe das 2-fache der ersten Zeile von der 3et ab und subtrahiere die 1te von der 4ten Zeile.
2. Von der 3ten Zeile wird die 2te abgezogen. Und die 4te wird mit $-\frac{1}{2}$ multipliziert.
3. Die 4te und 3te Zeile sind identisch, die 4te wird eliminiert. Die 3te und 5te Spalte sind keine Pivot-Spalten. Sie werden eliminiert.