Lineare Algebra - Übung 08

Felix Tischler, Martrikelnummer: 191498

January 7, 2021

Hausaufgaben (Abgabe bis 11.01.2021, 14:00 Uhr)

8.1) *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.*

a)

$$g \circ f := g(f(x)) \text{ da injektiv} \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f \text{ ist injektiv.} \quad \square$$

b)

$$g(f(x)) \text{ ist surjektiv} \Rightarrow \forall z \in Z : \exists x \in X : g(f(x)) = z \Rightarrow \exists f(x) \in Y : g(f(x)) = z \Rightarrow \text{ g ist surjektiv} \quad \square$$

8.2) *Invertierbarkeit von $2 \times 2 -$ Matrizen*

a)

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 8 - 3 \cdot 2 \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} det \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 10 - (-4) \cdot (-5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \\ det(AB) &= (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) \cdot (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) - (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) \cdot (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) \\ &= \cancel{A_{11}B_{11}A_{21}B_{12}} + A_{11}B_{11}A_{22}B_{22} + A_{12}B_{21}A_{21}B_{12} + \cancel{A_{12}B_{21}A_{22}B_{22}} - \cancel{A_{11}B_{12}A_{21}B_{11}} + A_{11}B_{12}A_{22}B_{21} + A_{12}B_{22}A_{21}B_{11} + \cancel{A_{12}B_{22}A_{22}B_{21}} \\ &= A_{11}B_{11}A_{22}B_{22} + A_{12}B_{21}A_{21}B_{12} - A_{11}B_{12}A_{22}B_{21} + A_{12}B_{22}A_{21}B_{11} \\ det(A) \cdot det(B) &= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \cdot (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}) \\ &= A_{11}A_{22}B_{11}B_{22} - A_{11}A_{22}B_{12}B_{21} - A_{12}A_{21}B_{11}B_{22} + A_{12}A_{21}B_{12}B_{21} \quad \square \end{aligned}$$

D.h. $\underbrace{det(AB) = det(A) \cdot det(B)}_{(1)}$ gilt.

c)

Voraussetzung: $\underbrace{det(A) = 0}_{(2)}$

$$\text{Wenn } AB = \mathbb{1}_2 \Rightarrow det(AB) = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} det(A) \cdot det(B) = 1 \overset{(2)}{=} 0 \cdot det(B) = 1 \;\lightning \quad \square$$

d)

$det(A) \neq 0 \Rightarrow A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0 \Rightarrow A_{11}A_{22} \neq A_{12}A_{21}$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \mathbb{1}_2 \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = 1 \wedge \underbrace{A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0}_{I} \wedge A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = 1 \wedge \underbrace{A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0}_{II}$$

$$\overset{I}{\Rightarrow} A_{11}B_{12} = -A_{12}B_{22} \Rightarrow B_{12} = A_{12} \wedge B_{22} = -A_{11}$$

$$\overset{II}{\Rightarrow} A_{21}B_{11} = -A_{22}B_{21} \Rightarrow B_{11} = -A_{22} \wedge B_{21} = A_{21}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} - A_{12}A_{11} \\ -A_{21}A_{22} + A_{22}A_{21} & A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} & 0 \\ 0 & A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B := \frac{1}{A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11}} \begin{pmatrix} -A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix} \text{ denn somit folgt:}$$

$$AB = \frac{1}{A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11}} \begin{pmatrix} A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} & 0 \\ 0 & A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2 \quad \square$$

D.h. B <u>existiert</u> und zwar als $\frac{1}{A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11}} \begin{pmatrix} -A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix}$.

8.3

Aus A und $\mathbb{1}_3$ folgt die erweiterte Matrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Zeile 1 mit -1 multiplizieren. Addiere Zeile 1 zu Zeile 2.
2. Zeile 2 mit -1 multiplizieren. Ziehe 3−faches der Zeile 2 von Zeile 3 ab.
3. Addiere Zeile 3 zu Zeile 2.

Nach dem sie Mithilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus auf eine reduzierte ZSF gebracht wurde kann man A^{-1} Aus den Spalten $4-6$ ablesen.

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} -9 & 8 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ denn: } AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 8 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & -8+8 & 0 \\ 9-6-3 & -8+6+3 & -4+3+1 \\ -6+6 & 6-6 & 3-2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3 \quad \square$$

8.4

$$^B\vec{e_1}, ^B\vec{e_2} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow LR\left((\vec{b_1}, \vec{b_2}); (\vec{e_1}, \vec{e_2})\right) = \{^B\vec{e_1}, ^B\vec{e_2}\}$$

Im folgenden habe ich aus $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{e_1}, \vec{e_2}$ die erweiterte Matrix gebildet um $LR\left((\vec{b_1}, \vec{b_2}); \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ zu ermitteln.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & | & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

1. Addiere Zeile 1 zu Zeile 2.
2. Multipliziere Zeile 2 mit 2/3. Ziehe Zeile 2 von Zeile 1 ab.

$$\Rightarrow \quad ^B\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \text{ und } ^B\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \square$$

$$^B_Bf = \left(^Bf(\vec{b_1}), ^Bf(\vec{b_2})\right)$$

$$f(\vec{e_1}) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\vec{b_1}\right) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{lin.A.}{=} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e_2}) := 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{b_2}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \overset{lin.A.}{=} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Analog wie oben wird nun die erweiterte Matrix gebildet.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -5 & 4 \\ -1 & 1/2 & | & 5 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -5 & 4 \\ 0 & 3/2 & | & 0 & 6 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -5 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Addiere Zeile 1 zu Zeile 2.
2. Multipliziere Zeile 2 mit 2/3. Subtrahiere Zeile 2 von Zeile 1.

$$\Rightarrow \quad ^B_Bf = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \square$$