Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik
FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Lösungen zu Übungsblatt 3

Hausaufgabe 3.1: *Tropischer Semiring*
(4 P.) Sei $a, b, c \in T$. Dann ist $a \oplus (b \oplus c)$ sowie $(a \oplus b) \oplus c$ das größte der drei Elemente, unabhängig von der Klammerung. Ferner ist das Maximum kommutativ. Für alle $a \in T$ gilt $(-\infty) \oplus a = a$, also ist $-\infty$ das Nullelement. Leider existieren im Allgemeinen keine additiven Inversen.

Das Assoziativ- und Kommutativgesetz der Multiplikation $\odot$ gelten, denn sie gelten für die gewöhnliche Addition reeller Zahlen. Das Einselement ist 0. Alle von $-\infty$ (also dem Nullelement) verschiedenen Elemente von T liegen in $\mathbb{R}$, haben dort ein additives Inverses, und das bedeutet sie sind bzgl. $\odot$ invertierbar in T.

Distributivgesetz: Seien $a, b, c \in T$. Dann $a \odot (b \oplus c) = a + \max(b, c) = \max(a + b,\, a + c) = a \odot b \oplus a \odot c$. Kurzum, $(T, \oplus, \odot, -\infty, 0)$ erfüllt alle Körperaxiome außer der Existenz additiver Inverser.

Hausaufgabe 3.2: $\mathbb{C}$

- (0.5 P.) Die Addition ist in jeder der beiden Komponenten einfach die gewöhnliche Addition in $\mathbb{R}$. Daher gelten Assoziativität und Kommutativität der Addition, das Nullelement ist $(0, 0)$, und $-(a, b) = (-a, -b)$.

  (0.5 P.) Kommutativität von $\cdot$: Sei $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$. Dann $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$ und $(c, d) \cdot (a, b) = (c \cdot a - d \cdot b, c \cdot b + d \cdot a)$; beides stimmt wegen Kommutativität von $\mathbb{R}$ überein.

  (1 P.) Assoziativität von $\cdot$: Sei $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$. Dann

  $$\begin{aligned} ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) &= (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \cdot (e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e)\,, \end{aligned}$$

  was übereinstimmt mit

  $$\begin{aligned} (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) &= (a, b) \cdot (c \cdot e - d \cdot f, c \cdot f + d \cdot e) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))\,. \end{aligned}$$

(1 P.) Distributivität: Seien $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$. Dann

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) =&(a,b)\cdot(c+e,d+f)\\ &= (a(c+e)-b(d+f),\, a(d+f)+b(c+e))\\ &= ((ac-bd)+(ae-bf),\, (ad+bc)+(af+be))\\ &=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)\,.\end{aligned}$$

(1 P.) Das Einselement ist $(1,0)$. Sei $(a,b) \in \mathbb{C}$, $(a,b) \neq (0,0)$. Sei $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ und $d = \frac{-b}{a^2+b^2}$. Dann gilt $(a,b)\cdot(c,d) = (1,0)$, also ist $(c,d) = (a,b)^{-1}$.

Hausaufgabe 3.3: *Besondere Ringelemente*
(1 P.) $y \cdot y = (1-x)\cdot(1-x) \overset{\text{Distr.}}{=} 1\cdot 1 + 1\cdot(-x) + (-x)\cdot 1 + x^2 \overset{\text{Idemp.}}{=} 1 + (-x) + (-x) + x \overset{\text{Neg.}}{=} 1 - x \overset{\checkmark}{=} y$.
(1 P.) $x \cdot y = x\cdot(1-x) = x\cdot 1 - x\cdot x = x - x \overset{\checkmark}{=} 0$,
$y \cdot x = (1-x)\cdot x = 1\cdot x - x\cdot x = x - x \overset{\checkmark}{=} 0$.

Hausaufgabe 3.4: *Nullteilerfreie Ringe*
Sei $x,y,z \in R$ mit $z \neq 0$ und $xz = yz$. (1 P.) Durch Addition von $-xz$ auf beiden Seiten und Anwendung der Distributivgesetze folgt $0 = yz - xz = (y-x)\cdot z$.
(1 P.) Weil R nullteilerfrei ist, folgt $x - y = 0$ oder $z = 0$.
(1 P.) Weil $z \neq 0$ vorausgesetzt wurde, ist $x - y = 0$, also nach Addition von y auf beiden Seiten $x = y$, was zu zeigen war.
Anmerkung: Vielleicht waren manche von Ihnen versucht, mit z^{-1} zu multiplizieren, denn schließlich war $z \neq 0$ vorausgesetzt. Aber wir haben nicht vorausgesetzt, dass R ein Körper ist! Wir haben im ersten Schritt das additive Inverse von xz (das gibt es in jedem Ring), aber das multiplikative Inverse steht uns nicht zur Verfügung.

In einer späteren Aufgabe wird gezeigt, dass man jeden nullteilerfreien kommutativen Ring zu einem Körper ergänzen kann, und zwar genau so, wie man $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ ergänzt. Aber wie bereits in der Aufgabenstellung gesagt gibt es Ringe, in denen Nullteiler existieren, und diese lassen sich nicht zu Körpern ergänzen.

Erreichbare Punktzahl: 13