Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 12

Hausaufgaben (Abgabe bis 08.02.2021, 14:00 Uhr)

Hausaufgabe 12.1: *Orthogonales Komplement*
Sei $(V, \langle|\rangle)$ ein Skalarproduktraum und $M \subseteq V$.

a) (1 P.) Zeigen Sie, dass $M^\perp$ ein Untervektorraum von V ist (auch wenn M selbst möglicherweise kein UVR ist).

b) (1 P.) Zeigen Sie $M \subset (M^\perp)^\perp$.

c) (1 P.) Wir betrachten $V := \mathbb{R}^3$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt. Sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in V$. Berechnen Sie $\{\vec{u}\}^\perp$.
Hinweis: Formen Sie die Definition von $\{\vec{u}\}^\perp$ in ein lineares Gleichungssystem um.

Hausaufgabe 12.2: *Orthonormalisierung*
Sei $[\vec{u}_1, ..., \vec{u}_4] \subset \mathbb{R}^4$, $\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 := \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(4 P.) Führen Sie mit den gegebenen Vektoren das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^4$ durch.
Anmerkung: Es ist nicht einfach nur irgendeine ONB von $\mathbb{R}^4$ gesucht (sonst könnte man ja die Standardbasis wählen), sondern eine ONB $[\vec{v}_1, ..., \vec{v}_4]$ von $\mathbb{R}^4$ mit $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k) = \mathrm{Span}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k)$ für alle $k \in \{1, ..., 4\}$.

Hausaufgabe 12.3: *Hauptachsentransformation*
(5 P.) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Es ist offenbar $A = A^\top$. Berechnen Sie die Hauptachsentransformation von A.
Hinweise: Die Eigenwerte sind kleine ganze Zahlen; ein Eigenraum ist zweidimensional.

Erreichbare Punktzahl: 12