LINEARE ALGEBRA - ÜBUNG 10

FELIX TISCHLER, MARTRIKELNUMMER: 191498

Hausaufgaben (Abgabe bis 25.01.2021, 14:00 Uhr)

Hausaufgabe 10.1: (4 P.) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ gilt gilt:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \ldots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i).$$

Induktionsanfang

falls: $n = 1$

$$|1| = \prod 1 \checkmark$$

falls: $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} x_2 - x_1 \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung IV

mit: $n = k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le k} (x_j - x_i)$$

Induktionsbehauptung

mit: $n = k + 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{k+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^k & x_2^k & \ldots & x_{k+1}^k \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le k+1} (x_j - x_i)$$

Induktionsbeweis

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{k+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^k & x_2^k & \ldots & x_{k+1}^k \end{vmatrix} \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & \ldots & x_{k+1} - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_{k+1}^2 - x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^k & x_2^k - x_1^k & \ldots & x_{k+1}^k - x_1^k \end{vmatrix} \overset{Laplace}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_{k+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \ldots & x_{k+1}^2 - x_1^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_2^k - x_1^k & x_3^k - x_1 & \ldots & x_{k+1}^k - x_1^k \end{vmatrix} \overset{(2)}{\rightsquigarrow}$$

$$\prod_{i=2 \le k} (x_i - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 & \ldots & x_{k+1} + x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \sum_{i=0}^{k-1} (x_2^{k-1-i} \cdot x_1^i) & \ldots & & \sum_{i=0}^{k-1} (x_{k+1}^{k-1-i} \cdot x_1^i) \end{vmatrix} \overset{(3)}{\rightsquigarrow} \prod_{i=2 \le k} (x_i - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_{k+1} \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_{k+1}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \ldots & x_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{IV}{=} \prod_{i=2\leq k} (x_i - x_1) \cdot \prod_{2\leq i\leq j\leq k+1} (x_i - x_j) = \prod_{1\leq i\leq j\leq k+1} (x_j - x_i) \quad \square$$

1. Jede Spalte außer der ersten minus die erste.
2. Aus jeder $i-$ten Spalte $(x_i - x_1)$ heraus skaliert.
3. Jede Zeile minus x_1-fachen der vorherigen Zeile (da die erste Zeile immer 1 ist, kann dieser Schritt erfolgen).

Hausaufgabe 10.2: *Einige kleine Beweise* Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in N^*$ und $A \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie:

(a) (1 P.) $\forall B \in M_n(\mathbb{K})$: Spur$(A \cdot B)$=Spur$(B \cdot A)$.

(b) (2 P.) Wenn $S \in GL_n(\mathbb{K})$ und $B := S^{-1}AS$, dann $\chi_B(X) = \chi_A(X)$.

(c) (1 P.) Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Basen B_1, B_2 und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $A_1 := {}^{B_1}_{B_1}\varphi$ und $A_2 := {}^{B_2}_{B_2}$. Zeigen Sie $\chi_{A_1}(X) = \chi_{A_2}(X)$.

(a)

$$spur(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} (A \cdot B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{j,i}) \overset{komm.}{=} \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} B_{j,i} A_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} (B \cdot A)_{i,i} = spur(B \cdot A) \quad \square$$

(b)

$$\begin{aligned}\chi_B(X) =& det(X\mathbb{1}_n - S^{-1}AS) = det(S^{-1}X\mathbb{1}S - S^{-1}AS) = det(S^{-1}(X\mathbb{1} - A)S)\\ \overset{Produktregel}{=}& det(S^{-1}) \cdot det(X\mathbb{1} - A) \cdot det(S) \overset{Lemma\,5.5}{=} \underbrace{det(S)^{-1} \cdot det(X\mathbb{1} - A) \cdot det(S)}_{det(S)^{-1} \cdot det(S) = 1}\\ =& det(X\mathbb{1} - A) = \chi_A(X) \quad \square\end{aligned}$$

(c) In diesem Fall gilt $\underbrace{{}^{B_1}_{B_1}\varphi = {}^{B_1}_{B_2}\mathbb{T} \cdot {}^{B_2}_{B_2}\varphi \cdot {}^{B_2}_{B_1}\mathbb{T}}_{*}$ nach Beobachtung 4.6 im Skript.

$$\chi_{A_1}(X) = det(X\mathbb{1} - {}^{B_1}_{B_1}\varphi) \overset{*}{=} det(X\mathbb{1} - \underbrace{{}^{B_1}_{B_2}\mathbb{T} \cdot {}^{B_2}_{B_2}\varphi \cdot {}^{B_2}_{B_1}\mathbb{T}}_{\underbrace{{}^{B_1}_{B_2}\mathbb{T} \cdot {}^{B_2}_{B_1}\mathbb{T} = 1}_{\text{Korollar 4.21}}}) = det(X\mathbb{1} - {}^{B_2}_{B_2}\varphi)$$

Hausaufgabe 10.3: *Berechnung von Eigenräumen*
Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.
(4 P.) Berechnen Sie die Eigenwerte von A sowie jeweils Basen der zugehören Eigenräume. **Hinweise:** Die Eigenwerte sind kleine ganze Zahlen; einer der Eigenräumen ist zweidimensional.

$$\lambda \textit{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) \Leftrightarrow \underbrace{det(X\mathbb{1} - A) = 0}_{*}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 2 & 2 & X+2 \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\overset{Sarrus}{=} (X-1) \cdot (X-1) \cdot (X+2) + (1) \cdot (2) \cdot (2) + (2) \cdot (1) \cdot (2) - (2) \cdot (X-1) \cdot (2) - (X-1) \cdot (2) \cdot (2) - (1) \cdot (1) \cdot (X+2) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (X-1)^2 \cdot (X+2) + 4 + 4 - 4(X-1) - 4(X-1) - (X+2) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (X^2 - 2X + 1)(X+2) + 8 - 4x + 4 - 4x + 4 - x - 2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 - 12X + 16 = (X-2)^2(X+4) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow X_{1,2} = 2, X_3 = -4 \Rightarrow \; A \textit{ hat Eigenwerte } \lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -4 \quad \square$$

Eigenvektoren:

Für $\lambda_{1,2} = 2$:

$$E_{\lambda_{1,2}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II=I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-2\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D.h. $E_{\lambda_{1,2}}(A) = Span(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ $\square$

Für $\lambda_3 = -4$

$$E_{\lambda_3}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrows II} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-2\cdot I]{II+5\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -24 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II \leftrightarrows III} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & -24 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[II\cdot 12^{-1}]{III+2\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D.h. $E_{\lambda_3}(A) = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ $\square$