Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 4

Liveaufgaben für 02./03.12.2020

Thema: Konstruktion weiterer Beispiele von Körpern

Implizite Aufgabe: Was lernten Sie in HA 3.4 über nullteilerfreie Ringe?

Präsenzaufgabe 4.1: *Endliche Primkörper*
$p \in \mathbb{N}_{>1}$ heißt ***prim*** $:\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{N}$: Wenn $p \mid (ab)$, dann $p \mid a$ oder $p \mid b$.

a) Stimmt das mit Ihrer Vorstellung von Primzahlen überein?

b) Sei $d \in \mathbb{N}_{>1}$. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn d prim ist.

c) Welche Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ bzw. von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ haben ein multiplikatives Inverses? Geben Sie es jeweils explizit an.

d) Sei $d \in \mathbb{N}_{>1}$. Versuchen Sie zu beweisen: $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn d prim ist. **Hinweis:** Nur eine Richtung ist leicht.

Bitte wenden

Präsenzaufgabe 4.2: *Bruchrechnung*
Der Inhalt dieser Aufgabe ist die Verallgemeinerung des Übergangs von den ganzen auf die rationalen Zahlen. **Versuchen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe stets, den Bezug zur Bruchrechnung herzustellen.**

Es sei R ein kommutativer nullteilerfreier Ring und $X := R \times R^*$. Auf X definieren wir eine Relation $\sim$ durch $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a \cdot b' = a' \cdot b$.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
Teilprobleme: Interpretation von (a, b) als $\frac{a}{b}$ im Fall $R = \mathbb{Z}$? Was bewirkt Kürzen?

Wir definieren $K := \{[(a, b)] \mid a \in R,\, b \in R^*\}$.

b) Für $[(a, b)], [(c, d)] \in K$ seien $[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(a \cdot c,\, b \cdot d)]$ und $[(a, b)] + [(c, d)] := [(a \cdot d + b \cdot c,\, b \cdot d)]$. Zeigen Sie, dass dadurch innere Verknüpfungen auf K wohldefiniert sind. **Teilproblem:** Hängt das Ergebnis beim Rechnen mit Brüchen davon ab, ob man zwischendurch kürzt? Woran liegt das?

c) Zeigen Sie, dass K mit den inneren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Körper ist. Man nennt K den ***Quotientenkörper*** von R.
Hinweis: Die Aufgabe läuft auf die Verifikation von Bruchrechenregeln hinaus, deren Gültigkeit Sie natürlich nicht schon voraussetzen dürfen!

d) Kennen Sie aus der Schule außer $\mathbb{Q}$ noch weitere Beispiele von Quotientenkörpern? **Hinweis:** Ist $\mathbb{R}[X]$ nullteilerfrei? Wieso?