Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

# Lineare Algebra für *-Informatik

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 7

## Weihnachtsaufgabe — Die Rettung der Weihnacht

Dieses Jahr machte Knecht Ruprecht ernst: Er kidnappte das Christkind, die Drei Weisen aus dem Morgenland, den Nikolaus, den Weihnachtsmann samt seiner 9 Rentiere und dazu 9 Weihnachtswichtel.

Höhnisch grinsend trat Ruprecht vor die 24 Weihnachtswesen: „Jahrhundertelang haben fast alle Kinder nicht brav ihre Mathematikhausaufgaben gemacht. Jetzt reicht es mir. Weihnachten soll dieses Jahr fast sicher ausfallen.“ Der Weihnachtsmann schmunzelte, da Ruprecht den Begriff „fast sicher“ fast sicher nicht im Sinne der Definition verwendete. Doch der Nikolaus wusste: Ruprecht verstand in Sachen Mathematikhausaufgaben keinen Spaß.

Ruprecht fuhr fort: „Für alle $k \in \{1, ..., 24\}$ soll das $k$-te Weihnachtswesen am $k$-ten Dezember das $k$-te Türchen des Adventskalenders öffnen. Nur wenn das jedem von Euch gelingt, wird Weihnachten stattfinden!“ Die Wichtel freuten sich — das hörte sich ja leicht an. „Freut Euch nicht zu früh! Ich habe die Zahlen zufällig vertauscht. Die zu findende Zahl steht nicht außen am Türchen, sondern ist erst nach dem Öffnen sichtbar. Wenn auch nur eines von Euch nicht das richtige Türchen öffnet, fällt Weihnachten aus!“ Das Christkind fing an zu weinen.

„Aber ich bin ja kein Unmensch. Jeder von Euch darf bis zu 12 Türchen öffnen. Die Spielregeln sind also: Ihr kommt in Einzelzellen, damit Ihr Euch nicht absprechen könnt. Am $k$-ten Dezember werden alle 24 Türchen verschlossen. Der $k$-te von Euch hat dann 12 Versuche, um das Türchen zu finden, hinter dem die Zahl $k$ steht. Wenn dies allen gelingt, findet Weihnachten statt, sonst nicht. Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt an jedem Tag $\frac{1}{2}$, Weihnachten wird also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{1}{2}\right)^{24} \approx 5.96 \times 10^{-8}$ stattfinden, muahahahaha!“

Die Rentiere scharrten ob des diabolischen Lachens unruhig mit den Hufen. Doch die Drei Weisen blieben gelassen; lag das am inhalierten Weihrauch? Nicht nur! Bevor alle in Einzelzellen kamen, empfahl der erste Weise: „Folgt nicht dem Stern, sondern den Zahlen!“ Der zweite sang: „I find it hard to tell you, I find it hard to take. When people run in circles it’s a very very mad world, mad world.“[1] Der dritte sprach: „Die Harmonie kennt keine Grenzen. Außer wenn man sie teilt.“

Die Drei Weisen sprachen wie üblich in Rätseln, doch sogar die Rentiere verstanden, was zu tun war. Rentier Rudolph rechnete und rief: „Dann können wir ja Weihnachten mit 32%-iger Wahrscheinlichkeit retten!“ Wie ist den Weihnachtswesen dies gelungen?

[1] Die hier geschilderten Ereignisse waren sicherlich der Grund, warum „Mad World“ 1983 zum Weihnachts-Nummer-eins-Hit in Großbritannien wurde.

## Hausaufgaben (Abgabe bis 04.01.2021, 14:00 Uhr)

**Hausaufgabe 7.1:** *Unterverktorräume*
Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U, W \leq V$.
Für $A, B \subset V$ sei $A + B := \{\vec{a} + \vec{b} \mid \vec{a} \in A,\ \vec{b} \in B\}$. Beweisen Sie:

a) (1 P.) $U \cap W \leq V$ b) (1 P.) $U + W \leq V$ c) (1 P.) $U \leq U + W$.

**Hausaufgabe 7.2:** *Lineare Abbildungen?*
Drei Abbildungen $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $h\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \cdot b \\ a+b \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 4b+a+1 \end{pmatrix}$ und $h\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+3b \\ b-3a \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(3 P.) Prüfen Sie jeweils, ob $f$, $g$ bzw. $h$ linear sind. **Hinweis:** Um eine Aussage zu widerlegen, genügt die Angabe eines Gegenbeispiels.

**Hausaufgabe 7.3:** *Lineare Abbildung??*
Es sei $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit zwei Elementen. Sei $V := \mathbb{K}[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_dX^d \mid d \in \mathbb{N},\ a_0, ..., a_d \in \mathbb{K}\}$ die Menge der Polynom über $\mathbb{K}$, die analog zu Polynomen aus $\mathbb{R}[X]$ addiert und multipliziert werden.
(3 P.) Die Abbildung $f\colon\ V \to V$ sei definiert durch $\forall p \in V\colon\ f(p) := p^2$. Weisen Sie nach, dass $f$ linear ist. **Hinweis:** $2 = 0$ in $\mathbb{K}$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\colon\ \lambda^2 =??$
**Anmerkung:** Wäre $\mathbb{K}$ irgend ein anderer Körper, so wäre die hier definierte Abbildung *nicht* linear.

**Hausaufgabe 7.4:** *Basisauswahl*
(3 P.) Seien $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5 \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie aus $[\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5]$ eine Basis von $V := \mathrm{Span}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5)$ aus.

**Erreichbare Punktzahl:** 12