Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik
FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 0

Präsenzaufgaben für 04./05.11.2020

Präsenzaufgaben sollten in Kleingruppen bearbeitet werden. Meist haben Präsenzaufgaben mehrere Problemebenen und es ist völlig in Ordnung, dass die einzelnen Kleingruppen unterschiedliche Problemstellungen bearbeiten. Die Hauptlast der Diskussion liegt bei *Ihnen*, Ihr/e Übungsleiter/in kann aus Zeitgründen nur sporadische Anregungen und Rückmeldungen geben.

In einer Aufgabe stecken meist mehrere Problemebenen. Versuchen Sie, die zu Ihrem persönlichen Lernstand passende Problemebene zu finden.

Es ist weder sinnvoll noch erwartet, dass alle Teilnehmenden alle Aufgaben bearbeiten oder gar vollständig lösen bzw. die Aufgaben überhaupt lösbar sind.

Bitte wenden

Präsenzaufgabe 0.1: *Aussagen, Quantoren*[1] *und Negationen*
Von den folgenden zehn Aussagen sind jeweils zwei gleichbedeutend. Welche? Untersuchen Sie auch, welche Aussagen aus anderen Aussagen unter der Zusatzvoraussetzung folgen, daß es tatsächlich sowohl Menschen als auch Probleme gibt; in welchen Fällen ist die Zusatzvoraussetzung nötig, in welchen verzichtbar?

a) Es gibt Menschen, die nicht alle Probleme lösen können.

b) Jeder Mensch hat ein Problem, das er nicht lösen kann.

c) Es gibt Probleme, die kein Mensch lösen kann.

d) Zu jedem Problem findet sich ein Mensch, der es nicht lösen kann.

e) Es gibt kein Problem, das alle Menschen lösen können.

f) Es gibt keinen Menschen, der alle Probleme lösen kann.

g) Nicht jeder Mensch kann überhaupt ein Problem lösen.

h) Es gibt ein Problem, das für wenigstens einen Menschen unlösbar ist.

i) Nicht jedes Problem ist überhaupt für einen Menschen lösbar.

j) Es gibt Menschen, die kein Problem lösen können.

Präsenzaufgabe 0.2: *Formelsprache und Vorwissen*
Es sei $d \in \mathbb{N}$, $d \neq 0$. Versuchen Sie den Inhalt der folgenden Aussage zu verstehen und mit Ihrem Vorwissen zu verknüpfen:

$$\forall a \in \mathbb{Z}\colon\ \exists!\, q \in \mathbb{Z},\ r \in \{0, ..., d-1\}\colon\ a = q \cdot d + r\,.$$

Hinweis: Vielleicht hilft es, zunächst Beispiele zu finden, also etwa zu $d = 7$ oder $d = 4$ geeignete ganze Zahlen a, q, r zu finden, die die Gleichung $a = q \cdot d + r$ erfüllen. Welche Verallgemeinerung kennen Sie aus der Schule?

Bitte wenden

[1] Es ist Absicht, dass Herr Vogel und ich verschiedene Notation für Quantoren verwenden ($\bigwedge, \bigvee$ bzw. $\forall, \exists$), denn beide sind in der Literatur gebräuchlich. Laut Wikipedia gibt es sogar eine dritte Notationsart.

Präsenzaufgabe 0.3: *Mengen*
Ich gehe davon aus, dass Sie die Symbole $\in$ und $\subseteq$ aus der Schule kennen. Wenn nicht, sollten Sie die Bearbeitung der Aufgabe damit beginnen, einander diese Symbole zu erklären.

a) Geben Sie zwei Mengen M, N an, so dass M ein *Element* von N ist ($M \in N$). Können Sie erreichen, dass $M \in N$ und zugleich $M \subseteq N$?

b) Sie sahen in der vorigen Aufgabe, dass Elemente einer Menge selbst Mengen sein können. Versuchen Sie jetzt, eine Menge M hinzuschreiben, die Element von *sich selbst* ist. Diskutieren Sie Gründe, warum das, was Sie gerade hingeschrieben haben, besser nicht als Menge gelten sollte.[2]

Präsenzaufgabe 0.4: *Irrationale Zahlen*
In der Vorlesung sagte ich, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, also nicht als Bruch schreibbar ist. In dieser Aufgabe soll dies nachgewiesen werden:[3]

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$. Beweisen Sie, dass $\left(\frac{m}{n}\right)^2 \neq 2$. Untersuchen und beweisen Sie möglichst auch Verallgemeinerungen dieser Aussage.
Hinweise: Wenn ein Primfaktor k-mal in m auftritt, wie oft tritt dieser Primfaktor in m^2 auf? Nehmen Sie an, dass $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, beseitigen Sie den Nenner, betrachten Sie den Primfaktor 2 und leiten Sie daraus eine falsche Aussage her. Da aus der Annahme eine falsche Aussage folgt, muss auch schon die Annahme falsch gewesen sein (Widerspruchsbeweis).

[2] Tatsächlich folgt aus dem „Fundierungsaxiom" der Mengenlehre, dass eine solche Menge M nicht existiert. Aber das ist für die Diskussion dieser Aufgabe nebensächlich.

[3] Es wird später auch in der Vorlesung bewiesen. Bitte spicken Sie nicht im Skript!