Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 11

Liveaufgaben (03.–04.02.2021)

Präsenzaufgabe 11.1: *Hauptochsentransformation*
Dozent K. hat sich ein sensationelles neues Verfahren zur Berechnung der Hauptachsentransformation ausgedacht. Es funktioniert wie folgt:

a) Gegeben sei $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A^\top$. Weil A symmetrisch ist, ist eine symmetrische Bilinearform b auf $\mathbb{R}^n$ durch $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n\colon\ b(\vec{v}, \vec{w}) := \vec{w}^\top \cdot A \cdot \vec{v}$ definiert.

b) Es sei $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Für $r = 1, 2, ..., n$ definieren wir nacheinander $\vec{w}_r := \vec{e}_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{b(\vec{e}_r, \vec{w}_i)}{b(\vec{w}_i, \vec{w}_i)} \vec{w}_i$.

c) Für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i \neq j$ gilt $b(\vec{w}_i,\, \vec{w}_j) = 0$, was man mit vollständiger Induktion zeigen kann.

d) Weil A die Darstellungsmatrix von b bezüglich der Standardbasis ist, gilt $b(\vec{w}_i,\, \vec{w}_j) = \vec{w}_j^\top \cdot A \cdot \vec{w}_i$.

Wir setzen $S := (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$. Nach d) gilt $(S^\top \cdot A \cdot S)_{i,j} = b(\vec{w}_j, \vec{w}_i)$, und wegen c) ist $S^\top \cdot A \cdot S$ diagonal. Das ist also die Hauptachsentransformation von A — sie ließ sich ohne vorherige Kenntnis der Eigenwerte von A berechnen!

Aufgabe: Untersuchen Sie, was an diesem Verfahren dran ist. Ist das Verfahren wirklich neu? Stimmen die in c) und d) stehenden Behauptungen? Ist $S^\top \cdot A \cdot S$ wirklich diagonal? Ist das wirklich eine Hauptachsentransformation?
Anmerkung 1: Selbstverständlich sollten Sie in der Klausur zur Berechnung einer Hauptachsentransformation unbedingt so wie im Skript vorgehen!! Die Aufgabe soll lediglich dazu anregen, sich mit Begriffen rund um das Thema „Hauptachsentransformation“ und „Orthonormalbasen“ auseinanderzusetzen.
Anmerkung 2: Mit einer Modifikation dieses Verfahrens kann man die Vorzeichen der Eigenwerte einer symmetrischen Matrix berechnen, ohne die Eigenwerte konkret bestimmen zu müssen. Es ist also nützlich, aber nicht so, wie hier behauptet.

Bitte wenden

Präsenzaufgabe 11.2: *Gram-Schmidt für ein Nichtstandardskalarprodukt*
Es sei $V := \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$; wir fanden in früheren Aufgaben, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Eine Abbildung $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert: Für alle $f, g \in V$ sei $b(f,g) := \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

a) In Beispielen aus der Vorlesung wird implizit behauptet, b sei ein Skalarprodukt. Verifizieren Sie dies, d.h. zeigen Sie, dass b symmetrisch, bilinear und positiv definit ist. **Anmerkung:** Um zu zeigen, dass $\int\limits_{-1}^{1} (f(x))^2\,\mathrm{d}x$ für eine stetige Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ nur dann Null ist, wenn f konstant Null ist, sollten Sie sich aus der Schule in Erinnerung rufen, was ein Integral geometrisch bedeutet und dass stetige Funktionen nicht „springen".

b) Es sei $U := \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2. Aus früheren Aufgaben wissen wir, dass U ein Untervektorraum von V ist und die Basis $B = [X^0, X^1, X^2]$ hat, also $\dim(U) = 3$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix ${}_Bb$. Wie viele Integrale muss man dafür (nur) berechnen?

c) Berechnen Sie eine ONB von V bezüglich des durch b gegebenen Skalarprodukts, indem Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf B anwenden.

Anmerkung: Verallgemeinerungen des hier erzielten Ergebnisses haben Anwendungen in der numerischen Approximation von Integralen.