Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 3

Liveaufgaben für 25./26.11.2020

Präsenzaufgabe 3.1: *Geschickt mit Restklassen rechnen*

Berechnen Sie den Rest von $3^{(4^{(5^6)})}$ bei Division durch 7.

Einige Teilprobleme:

Was ist das kleinste $n \in \mathbb{N}^*$, für das $[3]^n = [1] \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gilt? Wie also kann man den Exponenten vereinfachen? Was bedeutet „idempotent"?

Hinweis: $\forall a, d, q, r \in \mathbb{N}\colon\ a^{q \cdot d + r} = a^r \cdot \left(a^d\right)^q$.

Präsenzaufgabe 3.2: *Querverbindungen*

Zeigen Sie, dass $R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ mit der Matrixaddition und -multiplikation ein Ring ist. Kommt Ihnen dieser Ring bekannt vor?

Anmerkung: Sie dürfen hier verwenden, dass $M_2(\mathbb{R})$ ein Ring ist (das wird zum Teil gerade in HA 4.4 bewiesen). Wenn $M_2(\mathbb{R})$ ein Ring ist, was ist dann für R überhaupt noch zu zeigen?

Präsenzaufgabe 3.3: *Wurzel<u>funktion</u>??*

Für $z \in \mathbb{R}_{>0}$ hat die Gleichung $x^2 = z$ eine positive und eine negative Lösung $x \in \mathbb{R}$, und man definiert $\sqrt[2]{z}$ als die <u>positive</u> Lösung.

Sei nun $n \in \mathbb{N}^*$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Wie in der Vorlesung gesehen hat die Gleichung $x^n = z$ genau n Lösungen. Auf jeden Fall gilt $|x| = 1$ und zudem $n \cdot \arg(x) \equiv_{2\pi} \arg(z)$ (**Teilproblem:** Was ist mit dieser Notation gemeint? Kongruenz modulo 2π im Ring $\mathbb{R}$ ist damit nicht gemeint.)

Man könnte nun auf die Idee kommen, für die Definition der n-ten Wurzel eine dieser Lösungen auszuwählen, etwa $\sqrt[n]{z} := \cos(\frac{\arg(z)}{n}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\arg(z)}{n})$.

Stellen Sie sich nun vor, dass sich z auf einem Rundweg in $\mathbb{C}$ bewegt, nämlich beginnend mit $z = 1$ auf einer Kreislinie mit Radius 1 mit Mittelpunkt 0. Auf welchem Weg bewegt sich dann $\sqrt[4]{z}$? Was stellen Sie fest, wenn z am Ende des Rundwegs wieder bei 1 ankommt?

Diskutieren Sie Ideen, wie man eine Funktion $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ anders definieren kann, nämlich so, dass man am Ende jedes Rundwegs stets wieder den Anfangswert erreicht.