

Hausaufgabe 11.3:

Samstag, 30. Januar 2021 17:05

Hausaufgabe 11.3:

d) Eigenwerte:

λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \det(XI - A) = 0$

$$\begin{pmatrix} X-1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & X-3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & X \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \cdot \frac{1}{X-2}, \text{IV} \cdot \frac{1}{X-2}} \begin{pmatrix} X-1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & X-3+\frac{2}{X} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & X \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Blockzeilen}} \begin{pmatrix} X-1 & -1 \\ 0 & X-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X-3+\frac{2}{X} & 0 \\ -2 & X \end{pmatrix}$$

$$= (X-1)(X-2)\left(X-3+\frac{2}{X}\right)X = (X-1)(X-2)(X^2-3X+2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = \frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = 2$$

$$\lambda_4 = \frac{3}{2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = 1$$

Eigenvektoren:

$\lambda_{1,4}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_{1,4}} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\lambda_{2,3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_{2,3}} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

D.h. $\sum_{i=1}^4 \dim E_{\lambda_i}(A) = 2 \Rightarrow \text{geometrische Vielfachheit} < \text{algeb. Vielfachheit}$

\Rightarrow nicht diagonalisierbar!