Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik
FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 — Übungsblatt 5

Liveaufgaben für 09./10.12.2020

Präsenzaufgabe 5.1:

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, wobei die Vektoraddition die gewöhnliche Addition reeller Zahlen und die Skalarmultiplikation die gewöhnliche Multiplikation einer rationalen mit einer reellen Zahl ist.
Teilproblem: Wie prüft man, ob eine Definition auf ein konkret gegebenes Objekt zutrifft?

b) Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum wie in der vorigen Teilaufgabe. Untersuchen Sie jeweils auf lineare Unabhängigkeit:

- $S = [\frac{7}{3},\ \frac{2}{5}]$
- $S = [2,\ \sqrt{2}]$

Teilproblem: Übertragen Sie die Definition der Linearkombination und der linearen (Un-)Abhängigkeit von $\mathbb{K}^n$ auf allgemeine Vektorräume. Wenden Sie das dann auf den hier genannten Spezialfall an.

Präsenzaufgabe 5.2: *Komplexität*
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Untersuchen Sie obere Schranken für die Anzahl der Additionen und Multiplikationen von Körperelementen, die bei ...

- ... der Berechnung von $A \cdot B$ auftreten.
- ... dem Gaußschen Eliminationsverfahren angewandt auf A auftreten.

Bitte wenden

Präsenzaufgabe 5.3: *Matrixprodukte in der Geometrie*
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die Matrix $R_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$.
Überlegen Sie sich nötigenfalls Beispiele, etwa $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

a) Sei $\varphi_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\varphi_\alpha(\vec{x}) := R_\alpha \cdot \vec{x}$. Beschreiben Sie φ_α geometrisch. **Anleitung:** Wenden Sie φ_α auf $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ an, tragen Sie das Ergebnis in eine Zeichnung ein und identifizieren Sie α als einen Winkel in Ihrer Zeichnung.

b) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Finden Sie ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $R_\gamma = R_\beta \cdot R_\alpha$. **Hinweis:** Geometrische Intuition für die Gültigkeit von $\varphi_\gamma(\vec{x}) = \varphi_\beta(\varphi_\alpha(\vec{x}))$?

c) Berechnen Sie nun $R_\beta \cdot R_\alpha$ und vergleichen Sie koeffizientenweise mit R_γ. Machen Sie sich bewusst, dass Sie soeben die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus begründet haben.

d) Was hat R_α mit $\mathbb{C}$ zu tun?