Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

# Lineare Algebra für *-Informatik
## FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Übungsblatt 10

## Liveaufgaben (27.–28.01.2021)

**Präsenzaufgabe 10.1:** *Orthogonalisierung*
Es sei $[\vec{u}, \vec{v}]$ eine Basis von $V \leq \mathbb{R}^3$. Gesucht ist ein Vektor $\vec{w}$, so dass $[\vec{u}, \vec{w}]$ eine Basis von $V$ und $\vec{u} \perp \vec{w}$.

a) Machen Sie sich die Problemstellung durch eine Zeichnung klar.

b) Geben Sie eine Formel für $\vec{w}$, ausgedrückt durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Nutzen Sie dabei, dass man die senkrechte Projektion (Lotfußpunkt) von $\vec{v}$ auf $\mathrm{Span}(\vec{u})$ mittels des Skalarprodukts berechnen kann.

c) Suchen Sie nach Beispielen, in denen Rundungsfehler bei Anwendung des Verfahrens aus b) zu erheblichen Fehlern führen würden.

d) Überlegen Sie sich mindestens zwei weitere geometrische Konstruktionen, mit denen man $\vec{w}$ finden kann.

**Präsenzaufgabe 10.2:** *Tridiagonalisierung*

a) Verallgemeinerung eines Beispiels aus der Vorlesung: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq d \leq n$. Gesucht ist eine Dreiecksmatrix $A \in M_n(\mathbb{K})$, so dass $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ mit algebraischer Vielfachheit $n$ (d.h. $\chi_A(X) = (X - \lambda)^n$) und geometrischer Vielfachheit $d$ ist. Berechnen Sie auch $(\lambda \mathbb{1}_n - A)^k$ für $k = 1, 2, 3, ....$
**Tipp:** Rangformel.

b) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{d_1} \cdot ... \cdot (X - \lambda_k)^{d_k}$ für paarweise verschiedene $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ sowie $d_1, ..., d_k \in \mathbb{N}^*$ mit $d_1 + ... + d_k = n$.

Zeigen Sie: Es gibt $S \in GL_n(\mathbb{K})$, so dass $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix ist, auf deren Diagonale jeweils $d_i$-mal der Wert $\lambda_i$ steht. **Anleitung:**

- Sei die erste Spalte von $T \in GL_n(\mathbb{K})$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1$; warum ist $T^{-1}AT = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbb{0} & A' \end{smallmatrix}\right)$ mit $A' \in M_{n-1}(\mathbb{K})$?
- Warum ist $\chi_{A'}(X) = (X - \lambda_1)^{d_1 - 1}(X - \lambda_2)^{d_2} \cdot ... \cdot (X - \lambda_k)^{d_k}$?
- Folgern Sie nun die Existenz von $S$ mit vollst. Induktion nach $n$.