Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Henicke, Kraume, Lafeld, Max, Rump

Lineare Algebra für *-Informatik

FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 Lösungen zu Übungsblatt 1

Hausaufgabe 1.1: *Bedeutungsgleichheit testen*

a) (4 P.)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
W	W	F	F	W	W	F	F
W	F	F	W	F	W	W	W
F	W	W	F	F	W	W	W
F	F	W	W	F	F	W	W
P	Q					$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
W	W					F	F
W	F					F	F
F	W					F	F
F	F					W	W

Bei der Konstruktion der Wahrheitstafel von beispielsweise $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ muss man natürlich die Wahrheitswerte von $\neg P$, $\neg Q$ in die Wahrheitstafel von $\wedge$ einsetzen. Die Gültigkeit der de Morganschen Regeln ergibt sich aus dem Vergleich der letzten beiden Spalten in der obigen Tabelle.

Übrigens: Aus Lemma 0.1 a) und Lemma 0.1 c), was aus der oberen Hälfte der hier gegebenen Tabelle folgt, kann man Lemma 0.1 d) auch wie folgt beweisen. Für „A ist gleichbedeutend zu B" nutze ich hier das Symbol $A \equiv B$ (es ist *hier* kein Problem, wenn Sie stattdessen $=$ oder $\Leftrightarrow$ schreiben, aber Sie sollten sich generell angewöhnen, zwischen „gleich" und „gleichwertig" zu unterscheiden!). Man erhält: $\neg(P \vee Q) \overset{0.1a}{\equiv} \neg((\neg(\neg P)) \vee (\neg(\neg Q))) \overset{0.1c}{\equiv} \neg(\neg((\neg P) \wedge (\neg Q))) \overset{0.1a}{\equiv} (\neg P) \wedge (\neg(Q)$

b) (2 P.) Das Aussagenpaar $(P \wedge (Q \Rightarrow P))$, $((P \wedge Q) \vee (\neg P))$ ist nicht gleichbedeutend, denn für $P = F$ und $Q = W$ ist die erste Aussage falsch, die zweite wahr.

Hausaufgabe 1.2: *Bedeutungsgleiche Aussagen finden*
(4 P.) $P \vee Q$ ist gleichbedeutend zu $\neg(\neg(P \vee Q))$ (doppelte Negation) ist gleichbedeutend zu $\neg((\neg P) \wedge (\neg Q))$ (de Morgan).
$P \dot{\vee} Q$ ist gleichbedeutend zu $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$ (muss noch über Wahrheitstafeln nachgewiesen werden!) ist gleichbedeutend zu $(\neg((\neg P) \wedge (\neg Q))) \wedge \neg(P \wedge Q)$ (Einsetzen der vorher gezeigten Tautologie).
$P \Rightarrow Q$ ist gleichbedeutend zu $\neg(\neg(P \Rightarrow Q))$ (doppelte Negation) ist gleichbedeutend zu $\neg(P \wedge \neg Q)$ (Lemma 0.1.b).

Hausaufgabe 1.3: *Logik-Gatter konstruieren*
(4 P.) Der Einfachheit halber schreibe ich hier wieder „$\equiv$" für „ist gleichbedeutend zu".
Definiere $P * Q := \neg(P \wedge Q)$. Dann ist $\neg P \equiv \neg(P \wedge P) \equiv P * P$ und $P \wedge Q \equiv \neg(\neg(P \wedge Q)) \equiv \neg(P * Q) \equiv (P * Q) * (P * Q)$. Die zugehörige Wahrheitstafel ist

P	Q	$P * Q$
F	F	W
F	W	W
W	F	W
W	W	F

Eine weitere korrekte Antwortmöglichkeit ist $P * Q := \neg(P \vee Q)$. Übrigens nennt man die entsprechenden Logikgatter NAND-Gatter bzw. NOR-Gatter.

Erreichbare Punktzahl: 14