

Integrali multipli

1.1	Introduzione	1
1.2	Misura secondo Peano-Jordan	3
1.2.1	Classi di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan	5
1.2.2	Alcune proprietà della misura secondo Peano-Jordan	6
1.3	Integrale doppio	7
1.3.1	Calcolo di aree	9
1.3.2	Significato geometrico dell'integrale doppio	10
1.4	Integrale triplo	11
1.4.1	Calcolo di volumi	12
1.5	Proprietà dell'integrale multiplo in dimensione qualsiasi	12
1.5.1	Una classe di funzioni integrabili	12
1.5.2	Alcune proprietà dell'integrale di Riemann	13
1.5.3	Significato fisico (e probabilistico) dell'integrale	14
1.6	Integrazione per riduzione	15
1.6.1	Formule di riduzione per integrali doppi	16
1.6.2	Formule di riduzione per integrali tripli	19
1.7	Integrazione per cambiamento di coordinate	23
1.7.1	Coordinate polari centrate in (x_0, y_0)	26
1.7.2	Coordinate polari ellittiche centrate in (x_0, y_0)	26
1.7.3	Coordinate cilindriche di centro $(x_0, y_0, 0)$ e asse parallelo all'asse z	28
1.7.4	Coordinate sferiche di centro (x_0, y_0, z_0) e asse parallelo all'asse z	28
1.8	Baricentro e momenti d'inerzia	29
1.9	Primo teorema di Guldino	30
1.10	Integrali impropri di funzioni non negative	32

1.1 Introduzione

In questa parte introdurremo e studieremo il concetto di **integrale multiplo (nel senso di Riemann)** di una funzione reale di $n > 1$ variabili reali, facendo particolare riferimento al caso delle dimensioni $n = 2$ (*integrale doppio*) ed $n = 3$ (*integrale triplo*), da cui non è difficile immaginare la generalizzazione a dimensione n qualsiasi.

L'estensione del concetto di integrale a dimensioni $n > 1$ ricalca la costruzione classica dell'integrale definito in dimensione $n = 1$ (*integrale semplice*), che richiamiamo brevemente di seguito per evidenziarne gli elementi essenziali.

- Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata su un intervallo limitato che supponiamo del tipo $[a, b]$ per fissare le idee (ma il discorso sussiste tale e quale rimpiazzando $[a, b]$ con un qualsiasi altro intervallo *limitato* del tipo (a, b) , $[a, b)$ o $(a, b]$).

La limitatezza di f su $[a, b]$ significa che gli estremi inferiore e superiore di f su $[a, b]$ sono finiti¹, cioè

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) > -\infty \quad \text{e} \quad \sup_{x \in [a, b]} f(x) < +\infty.$$

- Consideriamo una qualsiasi **suddivisione** σ dell'intervallo $[a, b]$:

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tramite σ , l'intervallo $[a, b]$ viene suddiviso in n sottointervalli $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ su ciascuno dei quali f è limitata e quindi dotata di estremo inferiore ed estremo superiore, che indichiamo con

$$m_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad \text{ed} \quad M_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Chiaramente si ha $m_k \leq M_k$ per ogni k .

- I numeri

$$s(f, \sigma) := \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{ed} \quad S(f, \sigma) := \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

vengono detti **somma integrale inferiore** e **somma integrale superiore** di f *relativamente alla suddivisione* σ .

Si noti che la differenza $x_k - x_{k-1}$ è la **lunghezza** del generico sottointervallo $[x_{k-1}, x_k]$ della

¹Approfittiamo per ricordare che, se E è un insieme non vuoto qualsiasi di numeri reali, si chiama:

- **maggiorante** di E un qualsiasi numero M maggiore o uguale di tutti gli elementi di E ;
- **minorante** di E un qualsiasi numero m minore o uguale di tutti gli elementi di E ;
- **massimo** di E un maggiorante di E che appartenga ad E (il quale, se esiste, è unico);
- **minimo** di E un minorante di E che appartenga ad E (il quale, se esiste, è unico).

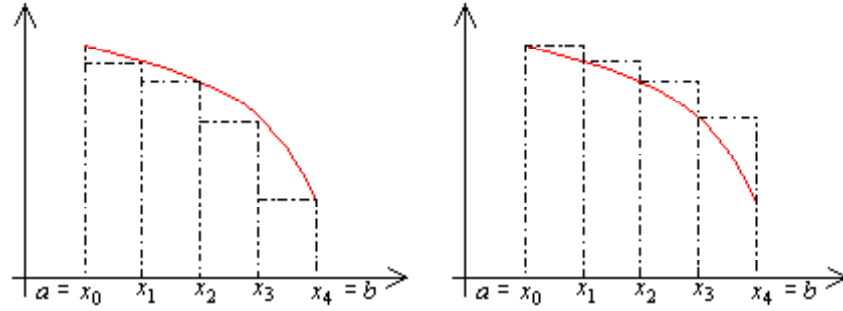
L'insieme E si dice:

- **superiormente limitato** se ammette maggioranti; in tal caso, si chiama **estremo superiore** di E il minimo dei maggioranti di E , il quale si indica con $\sup E$ (esiste sempre ed è unico);
- **inferiormente limitato** se ammette minoranti; in tal caso, si chiama **estremo inferiore** di E il massimo dei minoranti di E , il quale si indica con $\inf E$ (esiste sempre ed è unico).

Se l'insieme E è illimitato superiormente o inferiormente, si pone invece $\sup E = +\infty$ o $\inf E = -\infty$ rispettivamente.

Parlando di estremi inferiore e superiore di una funzione a valori reali, ci si riferisce naturalmente all'insieme dei valori assunti dalla funzione.

suddivisione σ , di modo che $s(f, \sigma)$ ed $S(f, \sigma)$ sono somme di aree di rettangoli con basi $x_k - x_{k-1}$ ed altezze m_k o M_k , rappresentati in figura nel caso di una f positiva.



Chiaramente si ha $s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma)$, in quanto $m_k \leq M_k$ per ogni k .

- I numeri $s(f, \sigma)$ ed $S(f, \sigma)$ dipendono ovviamente dalla particolare suddivisione σ considerata (infatti, cambiando suddivisione, cambiano i valori $m_k, M_k, x_k - x_{k-1}$ che intervengono nella definizione delle somme integrali).
È facile intuire che *aggiungendo ulteriori punti ad una suddivisione* (ossia, come si suol dire, *raffinando una suddivisione*) *le somme inferiori aumentano* (o meglio non diminuiscono) *e quelle superiori diminuiscono* (o meglio non aumentano).
- Di conseguenza, se σ_1 e σ_2 sono suddivisioni diverse, allora, detto σ il *raffinamento comune* a σ_1 e σ_2 (cioè la suddivisione ottenuta unendo tutti i punti di σ_1 e σ_2), che indicheremo simbolicamente con $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, risulta

$$s(f, \sigma_1) \leq s(f, \sigma) \quad \text{e} \quad S(f, \sigma) \leq S(f, \sigma_2). \quad (1.1)$$

Ma $s(f, \sigma)$ e $S(f, \sigma)$ sono relative alla stessa suddivisione e quindi risulta

$$s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma). \quad (1.2)$$

In definitiva, dalle (1.1) e (1.2) si ottiene

$$s(f, \sigma_1) \leq S(f, \sigma_2), \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \quad (1.3)$$

il che dimostra che *ogni somma inferiore è minore od uguale di ogni somma superiore, quand'anche tali somme siano relative a suddivisioni diverse*.

- Di conseguenza, l'insieme delle somme inferiori risulta limitato superiormente da una qualunque somma superiore e sarà quindi dotato di estremo superiore finito, mentre l'insieme delle somme superiori è limitato inferiormente da una qualunque somma inferiore e sarà quindi dotato di estremo inferiore finito.

Ha dunque senso considerare i numeri

$$\int_a^b f := \sup_{\sigma} s(f, \sigma) \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b f} := \inf_{\sigma} S(f, \sigma)$$

(dove σ varia nell'insieme di tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$), che dipendono solo più dalla

funzione f e dall'intervallo $[a, b]$ su cui la si considera e prendono il nome di **integrale inferiore** di f su $[a, b]$ ed **integrale superiore** di f su $[a, b]$.

- Chiaramente, per la (1.3), si ha

$$\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}.$$

Se l'integrale inferiore di f su $[a, b]$ coincide con l'integrale superiore di f su $[a, b]$ si dice che f è **integrabile su** $[a, b]$ e, in tal caso, il valore comune di integrale inferiore ed integrale superiore è chiamato **integrale di f su $[a, b]$** ed è denotato con

$$\int_a^b f(x) dx.$$

A conclusione di questo richiamo, osserviamo che il procedimento descritto si fonda sulla costruzione delle somme inferiori e superiori, la quale si basa sui seguenti elementi fondamentali:

- la funzione integranda deve essere **limitata** (per poter assicurare la finitezza degli estremi m_k ed M_k);
- il dominio di integrazione deve essere **limitato** (altrimenti somme inferiori e superiori dovrebbero essere definite come serie);
- il dominio di integrazione deve essere suddiviso in insiemi dotati di **misura** (data dalle lunghezze $x_k - x_{k-1}$).

La costruzione degli integrali multipli procede in modo del tutto analogo, basandosi sugli stessi elementi fondamentali, dove la nozione di misura di un insieme di \mathbb{R}^n a cui fare riferimento non potrà più ovviamente essere quella di *lunghezza*, ma sarà sostituita dalla **misura secondo Peano-Jordan**, che, in dimensione $n = 2$ o $n = 3$, estende ad insiemi generici le nozioni di *area* e *volume* classicamente definite per le figure della geometria elementare.

1.2 Misura secondo Peano-Jordan

La misura secondo Peano-Jordan di un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , quando esiste, è definita tramite un procedimento di “approssimazione dell'insieme” mediante insiemi contenuti e contenenti, ai quali si possa associare una misura in maniera elementare.

Definizione 1 Chiamiamo **intervallo n -dimensionale** il prodotto cartesiano

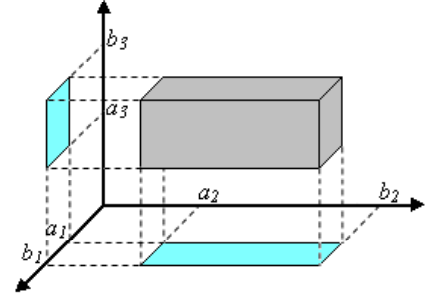
$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

di n intervalli chiusi e limitati $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$. Chiamiamo **misura di un intervallo n -dimensionale I** il numero reale

$$|I| := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) \geq 0.$$

Un intervallo bidimensionale I è un rettangolo, di cui $|I|$ è l'area. Siccome è ammesso che sia $a_i = b_i$ per qualche i o anche per tutti, tale rettangolo può anche degenerare in un segmento o in un solo punto; in tal caso si ha $|I| = 0$ (perché $a_i - b_i = 0$).

Un intervallo tridimensionale I è un parallelepipedo (eventualmente degenere in un rettangolo, un segmento o un solo punto), di cui $|I|$ è il volume.



Definizione 2 Chiamiamo **plurintervallo n -dimensionale** l'unione di un numero finito qualsiasi N di intervalli n -dimensionali I_k con interni a due a due disgiunti. Chiamiamo **misura di un plurintervallo n -dimensionale** $p = \bigcup_{k=1}^N I_k$ il numero reale

$$|p| := \sum_{k=1}^N |I_k| \geq 0.$$

In dimensione $n = 2$ o $n = 3$, la misura $|p|$ coincide ovviamente con l'area o il volume della figura p . È immediato intuire che se p_1 e p_2 sono due plurintervalli qualsiasi, allora vale la seguente implicazione:

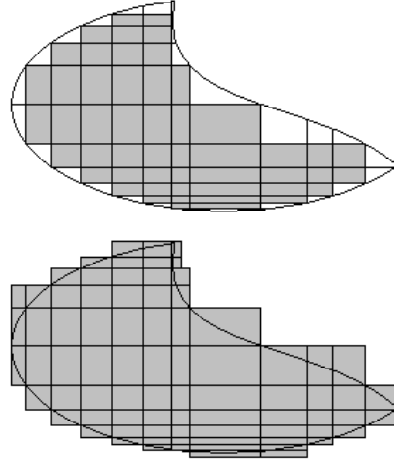
$$p_1 \subseteq p_2 \implies |p_1| \leq |p_2|. \quad (1.4)$$

Sia ora $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n . Poiché esistono certamente plurintervalli contenuti in A (ad esempio i punti di A) e plurintervalli contenenti A (perché A è limitato), ha senso considerare i valori

$$\mu_*(A) := \sup_{\substack{p \text{ plurintervallo,} \\ \text{contenuto in } A}} |p|$$

e

$$\mu^*(A) := \inf_{\substack{p \text{ plurintervallo,} \\ \text{contenente } A}} |p|$$



detti rispettivamente **misura interna** e **misura esterna** di A . Poiché la (1.4) assicura che la misura di ogni plurintervallo contenuto in A non supera la misura di ogni plurintervallo contenente A , tali valori sono finiti e soddisfano

$$0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A).$$

Definizione 3 Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n . Se misura interna ed esterna di A coincidono, allora diciamo che A è **misurabile (secondo Peano-Jordan)**; in tal caso, il valore comune di misura interna ed esterna di A è denotato con $|A|$ ed è chiamato **misura di A (secondo Peano-Jordan)**. Conveniamo inoltre che anche l'insieme vuoto \emptyset sia misurabile e che abbia misura $|\emptyset| = 0$.

Se $n = 2$ o $n = 3$, la misura di un insieme misurabile A viene anche detta *area* o *volume* di A , rispettivamente; in simboli

$$\text{area}(A) = |A| \text{ se } n = 2, \quad \text{vol}(A) = |A| \text{ se } n = 3.$$

La definizione precedente è giustificata dal fatto che esistono insiemi non misurabili.

Esempio 4 (di insieme non misurabile secondo Peano-Jordan) Sia A l'insieme dei punti del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ a coordinate razionali, cioè

$$A := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Gli unici plurintervalli contenuti in A sono i punti di A (qualsiasi altro conterrebbe anche punti a coordinate irrazionali), quindi $\mu_*(A) = 0$. Tutti i plurintervalli contenenti A devono contenere l'intero quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ (altrimenti lascerebbero fuori qualche punto di A), il quale è esso stesso un plurintervallo contenente A , quindi $\mu^*(A) = |[0, 1] \times [0, 1]| = 1$. Dunque $\mu_*(A) < \mu^*(A)$ e pertanto A non è dotato di area. ■

Per stabilire se un insieme sia misurabile o meno e, nel primo caso, per calcolarne la misura, non è chiaramente agevole ricorrere alla definizione. Nel paragrafo seguente illustreremo allora alcune classi di insiemi misurabili e, più avanti, vedremo alcuni metodi per calcolare aree di insiemi piani e volumi di insiemi solidi tramite il calcolo di opportuni integrali.

1.2.1 Classi di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan

Si può dimostrare che:

- tutte le figure (piane o solide) della geometria elementare sono misurabili ed hanno misura data dalle usuali formule della geometria classica;
- tutti gli insiemi convessi e limitati sono misurabili.

Altre classi di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan possono essere individuate mediante la caratterizzazione degli insiemi misurabili espressa dal teorema seguente. Premettiamo una definizione.

Definizione 5 Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è detto **trascurabile** se è misurabile e la sua misura vale 0.

Ad esempio, ogni insieme costituito da un numero finito di punti è chiaramente trascurabile.

Teorema 6 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Allora A è misurabile se e solo se ∂A è trascurabile.

Tenendo presente le seguenti classi di insiemi trascurabili, il teorema precedente fornisce un criterio molto comodo per stabilire la misurabilità di un insieme piano o solido.

In dimensione $n = 2$, hanno area nulla:

- i grafici di funzioni di una variabile definite su intervallo ed ivi integrabili (nel senso di Riemann, visto nei corsi di Analisi 1);
- i segmenti e le porzioni limitate di coniche e di curve regolari (nel senso visto nei corsi di Geometria).

In dimensione $n = 3$, hanno volume nullo:

- i grafici di funzioni di due variabili definite su insieme misurabile ed ivi integrabili (nel senso della successiva Definizione 7 di integrale doppio);
- le porzioni limitate di piani, di quadriche e di superfici regolari (nel senso dei corsi di Geometria).

In dimensione n qualsiasi, oltre agli insiemi costituiti da un numero finito di punti, hanno misura nulla:

- i sottoinsiemi di insiemi trascurabili;
- le unioni finite di insiemi trascurabili.

Osserviamo che, in accordo con il Teorema 6, l'insieme non misurabile A considerato nell'Esempio 4 non ha frontiera trascurabile. Infatti è facile verificare che tutti i punti del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ sono di frontiera per A e quindi risulta $|\partial A| = 1$.

1.2.2 Alcune proprietà della misura secondo Peano-Jordan

- [1] La differenza di due insiemi $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ misurabili è un insieme misurabile; inoltre, se $A_1 \subset A_2$, allora risulta

$$|A_2 \setminus A_1| = |A_2| - |A_1|,$$

da cui segue che $|A_1| \leq |A_2|$ (**monotonia**) e $|A_1| = |A_2|$ se e solo se $|A_2 \setminus A_1| = 0$.

- [2] Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile, allora ogni insieme B tale che $A^\circ \subseteq B \subseteq \overline{A}$ è misurabile e risulta $|B| = |A|$.

- [3] Unioni e intersezioni finite di insiemi misurabili sono insiemi misurabili.

- [4] (**modularità**) Se $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ sono misurabili, allora

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- [5] (**finita additività**) Se $A_1, \dots, A_N \subset \mathbb{R}^n$ sono misurabili e con intersezioni a due a due trascurabili (cioè $|A_i \cap A_j| = 0$ se $i \neq j$), allora

$$\left| \bigcup_{i=1}^N A_i \right| = \sum_{i=1}^N |A_i|.$$

1.3 Integrale doppio

Sfruttando la nozione di area di insiemi misurabili, presentiamo la costruzione dell'integrale di Riemann per funzioni di due variabili.

- Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile (e quindi limitato) ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata su A .
- La limitatezza di A assicura che esiste un intervallo bidimensionale $[a, b] \times [c, d]$ che contiene A . Consideriamo due suddivisioni qualsiasi σ_x e σ_y di $[a, b]$ e $[c, d]$:

$$\sigma_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\sigma_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d.$$

Per ciascun intervallo bidimensionale $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ generato da tali suddivisioni poniamo

$$A_{ij} := A \cap ([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]).$$

La famiglia di sottoinsiemi di A così ottenuta, cioè

$$\sigma := \{A_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}},$$

costituisce quella che chiameremo una **suddivisione di A** . Scriveremo simbolicamente $\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$.

- La limitatezza di f assicura che f è dotata di estremi inferiore e superiore finiti su ogni A_{ij} ; poniamo

$$m_{ij} := \inf_{(x,y) \in A_{ij}} f(x,y) \quad \text{ed} \quad M_{ij} := \sup_{(x,y) \in A_{ij}} f(x,y).$$

Chiaramente si ha $m_{ij} \leq M_{ij}$ per ogni i, j .

- La misurabilità di A assicura che gli insiemi A_{ij} sono misurabili, in quanto intersezione di insiemi misurabili. Possiamo dunque definire i numeri reali

$$s(f, \sigma) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} |A_{ij}| \quad \text{ed} \quad S(f, \sigma) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} |A_{ij}|,$$

che vengono detti **somma integrale inferiore** e **somma integrale superiore di f relativamente alla suddivisione σ** . Chiaramente risulta $s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma)$, in quanto $m_{ij} \leq M_{ij}$ per ogni i, j .

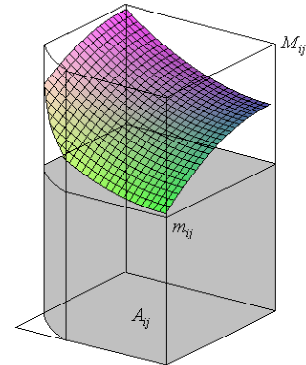
Osserviamo che, se f è non negativa su A_{ij} , allora $m_{ij} |A_{ij}|$ ed $M_{ij} |A_{ij}|$ sono i volumi dei parallelepipedoidi

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A_{ij}, 0 \leq z \leq m_{ij}\}$$

e

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A_{ij}, 0 \leq z \leq M_{ij}\}$$

(che sono parallelepipedi se $A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$).



Di conseguenza, i numeri $s(f, \sigma)$ ed $S(f, \sigma)$ sono somme di volumi di parallelepipedi con basi $|A_{ij}|$ ed altezze m_k oppure M_k , che possono essere visualizzati come una sorta di “grattacieli” i cui tetti stanno tutti, rispettivamente, al di sotto oppure al di sopra del grafico di f (sempre supponendo $f \geq 0$).

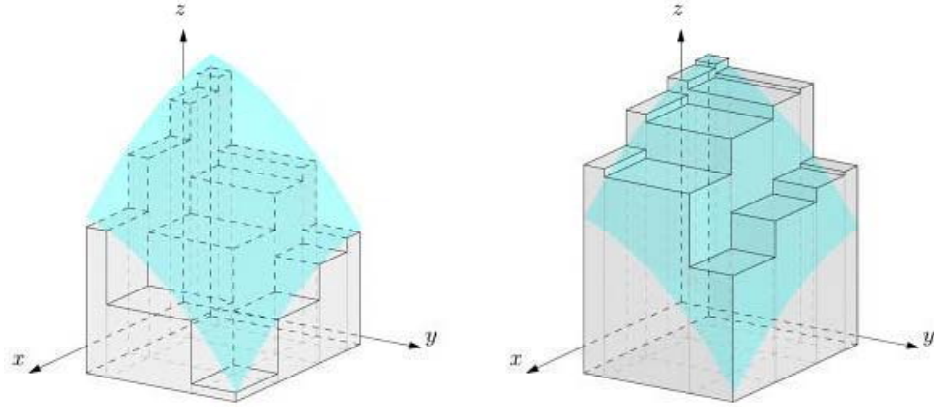


Figura 8.3. Somme inferiori (a sinistra) e superiori (a destra)

[presa da C.Canuto, A.Tabacco, *Analisi Matematica II*, Springer, 2008]

- I numeri $s(f, \sigma)$ ed $S(f, \sigma)$ dipendono ovviamente dalla particolare suddivisione σ considerata (cambiando suddivisione, cambiano infatti i valori m_{ij} , M_{ij} , $|A_{ij}|$ che intervengono nella definizione delle somme integrali).
È facile però intuire che *raffinando almeno una delle suddivisioni σ_x e σ_y , le somme inferiori aumentano* (o meglio non diminuiscono) *e quelle superiori diminuiscono* (o meglio non aumentano).
- Di conseguenza, se $\sigma_1 = \sigma_x^1 \times \sigma_y^1$ e $\sigma_2 = \sigma_x^2 \times \sigma_y^2$ sono suddivisioni diverse di A , allora, detto σ il *raffinamento comune* a σ_1 e σ_2 (cioè la suddivisione $\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$ con $\sigma_x = \sigma_x^1 \cup \sigma_x^2$ e $\sigma_y = \sigma_y^1 \cup \sigma_y^2$), risulta

$$s(f, \sigma_1) \leq s(f, \sigma) \quad \text{e} \quad S(f, \sigma) \leq S(f, \sigma_2). \quad (1.5)$$

Ma $s(f, \sigma)$ e $S(f, \sigma)$ sono relative alla stessa suddivisione e quindi risulta

$$s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma). \quad (1.6)$$

In definitiva, mettendo insieme la (1.5) e la (1.6), si ottiene

$$s(f, \sigma_1) \leq S(f, \sigma_2), \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \quad (1.7)$$

il che dimostra che *ogni somma inferiore è minore od uguale di ogni somma superiore, quand'anche tali somme siano relative a suddivisioni diverse*.

- Di conseguenza, l'insieme delle somme inferiori risulta limitato superiormente da una qualunque somma superiore ed è quindi dotato di estremo superiore finito, mentre l'insieme delle somme superiori è limitato inferiormente da una qualunque somma inferiore ed è quindi dotato di estremo inferiore finito. Ha dunque senso considerare i numeri reali

$$\int_A f := \sup_{\sigma} s(f, \sigma) \quad \text{e} \quad \overline{\int}_A f := \inf_{\sigma} S(f, \sigma)$$

dove σ varia nell'insieme di tutte le possibili suddivisioni di A .

Tali numeri dipendono solo dalla funzione f e dall'insieme A su cui la si considera (si può infatti dimostrare che non dipendono dall'intervallo $[a, b] \times [c, d]$ scelto all'inizio) e prendono il nome di **integrale inferiore di f su A** ed **integrale superiore di f su A** .

Chiaramente si ha

$$\int_A f \leq \overline{\int_A f}$$

per la (1.7).

Definizione 7 Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ misurabile ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su A . Se

$$\int_A f = \overline{\int_A f}$$

allora diciamo che f è **integrabile su A (nel senso di Riemann)**; in tal caso, il valore comune degli integrali inferiore e superiore è chiamato **integrale doppio di f su A (nel senso di Riemann)** ed è denotato con i seguenti simboli

$$\int_A f, \quad \int_A f(x, y) dA, \quad \int_A f(x, y) dx dy, \quad \iint_A f(x, y) dx dy.$$

La definizione precedente è giustificata dal fatto che esistono funzioni non integrabili.

Esempio 8 (funzione di Dirichlet) Sia $f : A = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita $\forall (x, y) \in A$ da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per qualsiasi suddivisione σ di A , risulta $m_{ij} = 0$ e $M_{ij} = 1$, in quanto ogni rettangolo A_{ij} contiene punti in cui f vale 0 e punti in cui f vale 1. Allora $\forall \sigma$ si ha

$$s(f, \sigma) = 0 \quad \text{e} \quad S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A_{ij}| = \text{area}(A) = 1,$$

da cui, passando a \sup_σ e \inf_σ , segue $\int_A f = 0$ e $\overline{\int_A f} = 1$. ■

È chiaro che ricorrere alla definizione precedente per stabilire se una funzione sia integrabile o meno e, nel primo caso, per calcolarne l'integrale non è cosa agevole. Fra poco vedremo una condizione molto semplice che garantisce l'integrabilità delle funzioni che la soddisfano (Teorema 12) e, in seguito, daremo alcune regole per calcolare l'integrale doppio di funzioni continue (Sezioni 1.6 e 1.7).

1.3.1 Calcolo di aree

Quando avremo a disposizione le suddette regole per il calcolo di un integrale doppio, il seguente risultato potrà essere utilizzato per calcolare l'area di insiemi piani.

Proposizione 9 Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile. Allora l'area di A è data dall'integrale su A della funzione costantemente uguale ad 1, cioè

$$\text{area}(A) = \int_A dx dy.$$

Dimostrazione Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = 1, \forall (x, y) \in A$. Per ogni suddivisione σ di A , risulta $m_{hk} = M_{hk} = 1$ e quindi

$$s(f, \sigma) = S(f, \sigma) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m |A_{hk}| = \text{area}(A).$$

Dunque, passando a \sup_σ e \inf_σ , si ottiene $\underline{\int}_A f = \overline{\int}_A f = \text{area}(A)$. ■

1.3.2 Significato geometrico dell'integrale doppio

Analogamente all'integrale semplice, anche l'integrale doppio ha un significato geometrico notevole: è il *volume con segno della parte di spazio compresa tra il piano xy ed il grafico della funzione integranda*. In questo paragrafo precisiamo questo fatto, dando le formule che legano integrali doppi e volumi sottesi dalle funzioni integrande.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $A \subset \mathbb{R}^2$ (quindi, ricordiamo, A è misurabile e limitato ed f è limitata su A). Si chiama **cilindroide sotteso da f su A** l'insieme

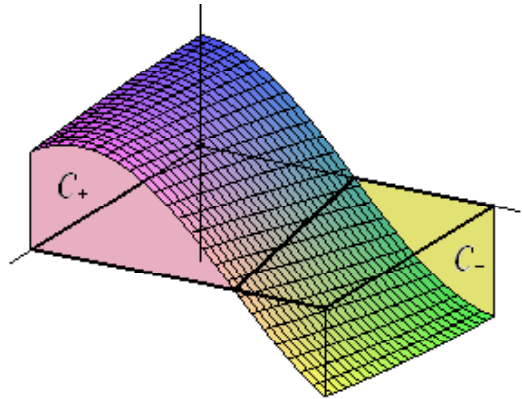
$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_{f,A} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y) \text{ oppure } f(x, y) \leq z \leq 0\}.$$

Chiaramente \mathcal{C} può essere espresso come unione disgiunta dei seguenti sottoinsiemi:

$$\mathcal{C}_+ := \{(x, y, z) \in \mathcal{C} : f(x, y) \geq 0\}$$

$$\mathcal{C}_- := \{(x, y, z) \in \mathcal{C} : f(x, y) < 0\}.$$

Come si intuisce facilmente dalla costruzione dell'integrale doppio (e come si potrebbe provare precisamente più avanti, grazie alla Proposizione 11 ed al teorema di integrazione per fili), risulta:



$$\int_A f(x, y) dx dy = \text{vol}(\mathcal{C}_+) - \text{vol}(\mathcal{C}_-)$$

e

$$\text{vol}(\mathcal{C}) = \int_A |f(x, y)| dx dy$$

dove l'integrabilità di $|f|$ segue automaticamente da quella di f (v. Paragrafo 1.5.2, Proprietà 5).

1.4 Integrale triplo

Adattiamo brevemente al caso tridimensionale la costruzione già vista in dimensione $n = 1$ ed $n = 2$.

- Siano $A \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata su A .
- Sia $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ un intervallo tridimensionale contenente A e sia

$$\sigma = \{A_{ijk}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,l}},$$

una **suddivisione di A** , dove gli insiemi

$$A_{ijk} := A \cap ([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k])$$

sono ottenuti intersecando A con gli intervalli tridimensionali generati da tre suddivisioni $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ di $[a, b], [c, d], [p, q]$.

- Poniamo

$$m_{ijk} := \inf_{P \in A_{ijk}} f(P) \quad \text{ed} \quad M_{ijk} := \sup_{P \in A_{ijk}} f(P).$$

Chiaramente si ha $m_{ijk} \leq M_{ijk}$ per ogni i, j, k .

- I numeri reali

$$s(f, \sigma) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l m_{ijk} |A_{ijk}| \quad \text{ed} \quad S(f, \sigma) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l M_{ijk} |A_{ijk}|$$

vengono detti **somma integrale inferiore** e **somma integrale superiore** di f relativamente alla suddivisione σ .

Chiaramente si ha $s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma)$, in quanto $m_{ijk} \leq M_{ijk}$ per ogni i, j, k .

- *Raffinando almeno una delle suddivisioni $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, le somme inferiori $s(f, \sigma)$ aumentano (o meglio non diminuiscono) e quelle superiori $S(f, \sigma)$ diminuiscono (o meglio non aumentano).*

Di conseguenza, preso il *raffinamento* σ comune a due suddivisioni diverse qualsiasi σ_1 e σ_2 , risulta

$$s(f, \sigma_1) \leq s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma) \leq S(f, \sigma_2),$$

il che dimostra che *ogni somma inferiore è minore od uguale di ogni somma superiore, quand'anche tali somme siano relative a suddivisioni diverse.*

- Di conseguenza, i valori

$$\int_A f := \sup_{\sigma} s(f, \sigma) \quad \text{e} \quad \overline{\int_A f} := \inf_{\sigma} S(f, \sigma)$$

(dove σ varia nell'insieme di tutte le possibili suddivisioni di A) sono finiti e soddisfano

$$\int_A f \leq \overline{\int_A f}.$$

Essi vengono detti **integrale inferiore** di f su A ed **integrale superiore** di f su A .

Definizione 10 Siano $A \subset \mathbb{R}^3$ misurabile ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su A . Se

$$\int_A f = \overline{\int_A f}$$

allora diciamo che f è **integrabile su A (nel senso di Riemann)**; in tal caso, il valore comune degli integrali inferiore e superiore è chiamato **integrale triplo di f su A (nel senso di Riemann)** ed è denotato con i seguenti simboli

$$\int_A f, \quad \int_A f(x, y, z) dA, \quad \int_A f(x, y, z) dx dy dz, \quad \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz.$$

Come nel caso dell'integrale doppio, vedremo che l'esistenza dell'integrale triplo è garantita per un'ampia classe di funzioni (Teorema 12) e daremo regole per calcolare l'integrale triplo di funzioni continue (Sezioni 1.6 e 1.7).

Il significato geometrico visto nel Paragrafo 1.3.2 per l'integrale doppio non ha un analogo per gli integrali tripli, ma per tutti (compreso l'integrale semplice) sussiste un'interpretazione di tipo fisico-probabilistico che illustreremo brevemente nel Paragrafo 1.5.3.

1.4.1 Calcolo di volumi

Quando avremo a disposizione regole per il calcolo di un integrale triplo, il seguente risultato fornirà un metodo per calcolare il volume di insiemi solidi.

Proposizione 11 Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile. Allora il volume di A è dato dall'integrale su A della funzione costantemente uguale ad 1, cioè

$$\boxed{\text{vol}(A) = \int_A dx dy dz}.$$

Dimostrazione Identica a quella del caso piano. ■

1.5 Proprietà dell'integrale multiplo in dimensione qualsiasi

In questa sezione, senza ripetere in dimensione maggiore la costruzione già vista per $n = 1, 2, 3$, diamo alcune proprietà dell'integrale di Riemann che valgono in ogni dimensione $n \geq 1$.

Sarà utile disporre della seguente terminologia:

*diciamo che una proposizione dipendente dai punti di un insieme misurabile A vale **quasi ovunque su A** se il sottoinsieme dei punti di A per cui essa non vale è trascurabile.*

1.5.1 Una classe di funzioni integrabili

Il seguente teorema individua una classe (già molto ampia per i nostri scopi) di funzioni integrabili.

Teorema 12 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. Ogni funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **limitata su A** e **continua quasi ovunque su A** è integrabile su A .

Ribadiamo che “ f continua quasi ovunque su A ” significa “ f continua in tutti i punti di A tranne al più quelli di un insieme di misura nulla”, ossia “l’insieme dei punti di discontinuità di f è trascurabile”. Ovviamente una funzione continua è anche continua quasi ovunque (l’insieme dei suoi punti di discontinuità è vuoto e quindi ha misura nulla).

1.5.2 Alcune proprietà dell’integrale di Riemann

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Indicheremo con $\mathcal{R}(A)$ l’insieme dei campi scalari integrabili su A .

- [1] Se $|A| = 0$, ogni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata è integrabile su A e risulta

$$\int_A f = 0.$$

- [2] **(additività rispetto al dominio)** Sia $A = A_1 \cup A_2$ con A_1, A_2 misurabili e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Allora $f \in \mathcal{R}(A)$ se e solo se f è integrabile su entrambi A_1 ed A_2 ; in tal caso, se $|A_1 \cap A_2| = 0$ allora risulta

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

Tale formula si estende naturalmente ad un numero finito qualsiasi di insiemi A_1, \dots, A_N .

- [3] Sia $f \in \mathcal{R}(A)$ e sia $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata tale che $g = f$ quasi ovunque su A . Allora $g \in \mathcal{R}(A)$ e risulta

$$\int_A g = \int_A f.$$

- [4] Sia $f : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e tale che $f \in \mathcal{R}(A)$. Allora f è integrabile su ogni insieme B tale che $A^\circ \subseteq B \subseteq \overline{A}$ e risulta

$$\int_B f = \int_A f.$$

Siano ora $f, g \in \mathcal{R}(A)$.

- [5] Risulta $|f|, fg, \alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(A)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Inoltre si ha

$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A f$$

(linearità) e

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

(disuguaglianza triangolare integrale). In particolare, $\mathcal{R}(A)$ è uno spazio vettoriale reale.

Si noti che, per linearità, si ha $\int_A \alpha dA = \alpha \int_A dA = \alpha |A|$ per ogni costante $\alpha \in \mathbb{R}$.

Osserviamo infine che, mentre l’integrabilità di f implica quella di $|f|$, può accadere che $|f|$ sia integrabile senza che lo sia f ; ad esempio la funzione $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è integrabile su $[0, 1] \times [0, 1]$, mentre $|f|$ è la funzione costantemente uguale ad 1 (integrabile).

[6] (**positività**) Se $f \geq 0$ quasi ovunque su A , allora

$$\int_A f \geq 0 .$$

In particolare, se $f \geq 0$ è continua su A e $|A| \neq 0$, allora $\int_A f = 0$ se e solo se f è identicamente nulla su A .

[7] (**monotonia rispetto all'integrando**) Se $f \geq g$ quasi ovunque su A , allora

$$\int_A f \geq \int_A g .$$

[8] (**monotonia rispetto al dominio**) Se $f \geq 0$ quasi ovunque su A , allora $\forall B \subset A$ misurabile risulta

$$\int_B f \leq \int_A f .$$

[9] (**teorema della media integrale**) Risulta

$$\inf_A f \leq \frac{1}{|A|} \int_A f \leq \sup_A f ,$$

dove il numero $\frac{1}{|A|} \int_A f$ è detto **media integrale di f su A** .

Se inoltre f è continua su A ed A è compatto e connesso, allora esiste almeno un punto $P \in A$ tale che

$$f(P) = \frac{1}{|A|} \int_A f$$

(cioè la media integrale di f su A è un valore assunto da f su A).

1.5.3 Significato fisico (e probabilistico) dell'integrale

Illustriamo molto brevemente il significato che, in una qualsiasi dimensione $n \geq 1$, l'integrale

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n) dA$$

assume in molti contesti applicativi (soprattutto fisici e probabilistici).

- Supponiamo che sull'insieme A sia distribuita una certa grandezza. Ad esempio, A potrebbe essere un intervallo di \mathbb{R} che rappresenta un filo rettilineo dotato di massa o di carica elettrica, oppure un insieme misurabile di \mathbb{R}^2 che rappresenta una lamina piana materiale o carica, oppure ancora un insieme misurabile di \mathbb{R}^3 che rappresenta un corpo solido su cui è distribuita una massa o una quantità di carica.
- Supponiamo che la grandezza distribuita su A abbia densità espressa da una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, la quale associa ad ogni punto $P = (x_1, \dots, x_n) \in A$ la densità $f(P)$ di tale grandezza in quel punto.
- Allora l'integrale di f su A fornisce la quantità totale di tale grandezza contenuta in A .

In sintesi:

$$\boxed{\int_A f(P) dA = \text{quantità totale di grandezza avente densità } f \text{ contenuta in } A}.$$

Giustificiamo intuitivamente questa relazione, ragionando ad esempio in dimensione 3 e nel caso in cui la grandezza di densità f sia la massa (che è entrata in questi discorsi come grandezza distribuita su insiemi per antonomasia). Senza essere troppo precisi, preso un punto $P \in A$ e considerata una porzione di A contenente P di volume “sufficientemente piccolo”, che indichiamo con dA , la densità $f(P)$ si può approssimativamente pensare come rapporto

$$f(P) \simeq \frac{\text{quantità di massa contenuta nella porzione di volume } dA}{dA},$$

per cui la quantità di massa contenuta nella porzione di volume dA può essere recuperata come prodotto $f(P) dA$. Allora, ricordando il procedimento che definisce l'integrale di Riemann, ciascun addendo $m_{ijk} |A_{ijk}|$ ed $M_{ijk} |A_{ijk}|$ delle somme integrali di f relative a suddivisioni σ “sufficientemente fini” può essere inteso come approssimazione, rispettivamente per difetto e per eccesso, della massa contenuta nella porzione A_{ijk} di A , in quanto tale massa è data da $f(P) |A_{ijk}|$ con $P \in A_{ijk}$ qualsiasi (perché $|A_{ijk}|$ è “sufficientemente piccolo” se σ è “sufficientemente fine”) e si ha ovviamente $m_{ijk} |A_{ijk}| \leq f(P) |A_{ijk}| \leq M_{ijk} |A_{ijk}|$ (perché $m_{ijk} \leq f(P) \leq M_{ijk}$). Di conseguenza, $s(f, \sigma)$ ed $S(f, \sigma)$ forniscono approssimazioni della massa totale di A , per difetto e per eccesso. Ma $s(f, \sigma)$ ed $S(f, \sigma)$ approssimano l'integrale $\int_A f$ e pertanto tale integrale rappresenta la misura della quantità di massa totale contenuta in A .

Come si è detto, il caso della massa è solo un esempio e, contesto per contesto, f può rappresentare la densità di grandezze diverse, come ad esempio la carica elettrica. Un caso a metà strada tra l'astratto e l'applicativo, di cui diamo solo un rapidissimo cenno, è quello in cui la f abbia significato di *densità di probabilità*. In Teoria della Probabilità, gli eventi sono sottoinsiemi di uno spazio (*spazio campione*) i cui punti rappresentano tutti i possibili risultati di un esperimento e, se tale spazio può essere identificato con un insieme misurabile $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, allora la probabilità associata a quell'esperimento è tipicamente espressa da una funzione di densità $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. In tal caso, l'integrale $\int_A f$ fornisce la probabilità $\mathbb{P}(A)$ dell'evento $A \subseteq \Omega$:

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n) dA = \mathbb{P}(A).$$

In altri termini, come per le grandezze fisiche, l'integrale opera in modo da raccogliere la probabilità distribuita sull'insieme A attraverso la densità f e restituire quindi la probabilità complessiva dell'evento rappresentato da A . Va comunque detto che spazio campione ed eventi sono generalmente insiemi illimitati, per cui tale discorso utilizza di solito la nozione di integrale in senso improprio (che introdurremo brevemente nella Sezione 1.10 finale).

1.6 Integrazione per riduzione

Per il calcolo effettivo di un integrale multiplo, si dispone fondamentalmente di due risultati: le cosiddette *formule di riduzione a due integrazioni successive* (Teoremi 15, 16 e 18), che consentono di riportare il calcolo di un integrale a quello di più integrali in dimensione minore, e la *formula di integrazione per cambiamento di coordinate* (Teorema 22), che consente di trasformare un integrale in un altro, il quale è nella stessa dimensione di quello di partenza ma può risultare più facile da calcolarsi tramite riduzione.

1.6.1 Formule di riduzione per integrali doppi

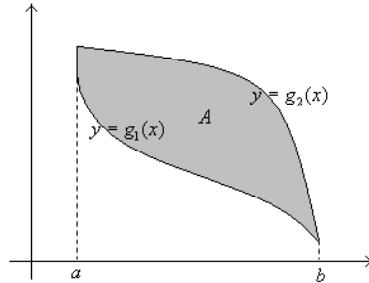
Le formule di riduzione per integrali doppi (Teorema 15) riportano il calcolo di un integrale *doppio* a quello di due integrali *semplici*. Esse valgono per funzioni continue su insiemi di integrazione che abbiano la forma descritta nella seguente definizione.

Definizione 13 Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^2 si dice **verticalmente convesso** o **semplice rispetto all'asse y** se è la parte di piano compresa tra i grafici di due funzioni continue della variabile x su un intervallo compatto $[a, b]$, ossia è della forma

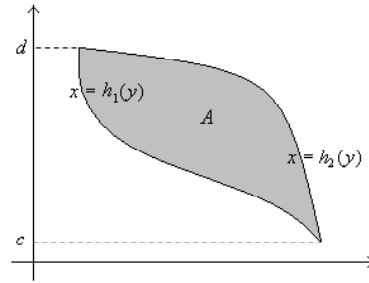
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \quad \text{con } g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue.}$$

Analogamente, $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice **orizzontalmente convesso** o **semplice rispetto all'asse x** se è la parte di piano compresa tra i grafici di due funzioni continue della variabile y su un intervallo compatto $[c, d]$, ossia è della forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \quad \text{con } h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue.}$$



A verticalmente convesso

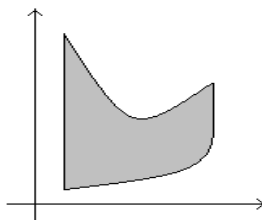


A orizzontalmente convesso

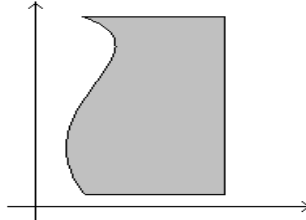
Osserviamo che, se A è verticalmente convesso, allora l'intervallo $[a, b]$ è la sua proiezione sull'asse x e per ogni $x_0 \in [a, b]$ il segmento verticale di estremi $P_1 = (x_0, g_1(x_0))$ e $P_2 = (x_0, g_2(x_0))$ (che si riduce ad un solo punto se $g_1(x_0) = g_2(x_0)$) è interamente contenuto in A . Da qui il termine *verticalmente convesso*.

Inoltre, ogni retta verticale $x = x_0$ con $x_0 \in (a, b)$ interseca la frontiera di A solo in P_1 e P_2 e, immaginando di percorrere la retta nel verso dell'asse y , si usa dire che P_1 e P_2 sono i punti in cui tale retta incontra ∂A , rispettivamente, *in ingresso* e *in uscita*. Per questo motivo, i grafici di g_1 e g_2 sono spesso chiamati **frontiera di ingresso** e **frontiera di uscita** dell'insieme A . Analogamente per insiemi orizzontalmente convessi.

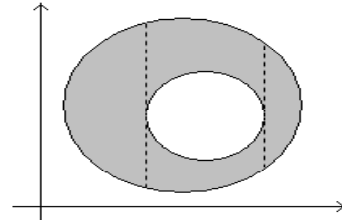
Le figure precedenti mostrano chiaramente come uno stesso insieme possa essere semplice rispetto ad entrambi gli assi. Altri casi sono mostrati dagli esempi seguenti.



convesso verticalmente,
non orizzontalmente



convesso orizzontalmente,
non verticalmente



non semplice rispetto ad alcun asse,
ma unione di insiemi semplici

Prendendo spunto dall'ultima figura, osserviamo esplicitamente che, spesso, un insieme che non sia semplice rispetto ad alcun asse può comunque essere recuperato come unione finita di insiemi semplici, operando opportune suddivisioni.

Osservazione 14 Poiché le funzioni g_1, g_2 sono continue su intervalli compatti, esse ammettono massimo e minimo su tali intervalli (teorema di Weierstrass) e quindi un insieme verticalmente convesso

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

è sempre contenuto nel rettangolo $[a, b] \times [\min_{[a,b]} g_1, \max_{[a,b]} g_2]$ ed è pertanto *limitato*. Inoltre, la frontiera di A risulta costituita dai grafici di g_1, g_2 ed eventualmente da segmenti delle rette $x = a$ (nel caso sia $g_1(a) \neq g_2(a)$) ed $x = b$ (nel caso sia $g_1(b) \neq g_2(b)$), per cui:

- ∂A ha misura nulla (in quanto unione di curve a misura nulla);
- ∂A è contenuta in A , cioè A è *chiuso*, in quanto nella definizione di A appaiono tutte disuguaglianze attenuate.

In definitiva, un insieme verticalmente convesso è sempre *compatto e misurabile*. Analogamente per gli insiemi orizzontalmente convessi. ■

Teorema 15 (di riduzione per integrali doppi) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è verticalmente convesso ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (1.8)$$

dove $[a, b]$ è la proiezione di A sull'asse x e g_1 e g_2 sono le sue frontiere di ingresso e di uscita. Analogamente, se $A \subset \mathbb{R}^2$ è orizzontalmente convesso ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (1.9)$$

Osserviamo che, in pratica, applicare la formula (1.8) significa:

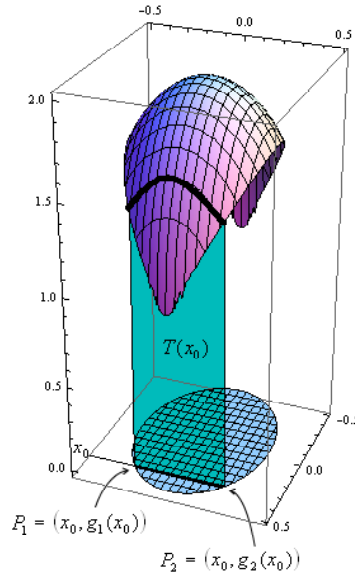
- immaginare la variabile x come momentaneamente fissata nell'intervallo $[a, b]$ e calcolare l'integrale semplice $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$, dove la variabile di integrazione è y e la x va vista come una costante;
- integrare su $[a, b]$ la funzione della variabile x ottenuta al passo precedente, come risultato della prima integrazione.

Analogamente per la formula (1.9).

Non daremo la dimostrazione del teorema precedente, limitandoci alle seguenti osservazioni.

[1] L'integrale a primo membro delle formule (1.8)-(1.9) esiste. Infatti, essendo semplice rispetto ad un asse, l'insieme A è misurabile e compatto (v. Osservazione 14) e quindi f è integrabile su A per il Teorema 12, in quanto ivi continua (per ipotesi) e limitata (per il teorema di Weierstrass multidimensionale).

[2] Le formule (1.8)-(1.9) possono essere interpretate in termini del significato geometrico dell'integrale doppio, come segue. Ricordiamo che l'integrale $\int_A f(x, y) dx dy$ è il volume (con segno) del cilindroide $\mathcal{C}_{f,A}$ di f su A . Fissando $x_0 \in [a, b]$, il grafico della funzione $y \mapsto f(x_0, y)$ sull'intervallo $[g_1(x_0), g_2(x_0)]$ si visualizza sul piano $x = x_0$ come intersezione di tale piano con il grafico $z = f(x, y)$ della funzione f su A (v. figura).



Allora, per il significato geometrico dell'integrale semplice (ben noto dall'Analisi 1), la funzione

$$\varphi(x) := \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \quad \text{con } x \in [a, b] \text{ generico (ma momentaneamente fissato)} \quad (1.10)$$

rappresenta l'area (con segno) del trapezoide $T(x)$ sotteso dalla funzione $y \mapsto f(x, y)$ sull'intervallo $[g_1(x), g_2(x)]$. In quest'ottica, la formula (1.8) afferma dunque che il volume (con segno) del cilindroide $\mathcal{C}_{f,A}$ è dato dall'integrale su $[a, b]$ della funzione $\varphi(x) = \text{area}(T(x))$, come se la seconda integrazione restituisse tale volume "raccolgendo" le aree di tutti i trapezoidi $T(x)$ in cui il $\mathcal{C}_{f,A}$ risulta ripartito al variare di $x \in [a, b]$. Analogamente per la formula (1.9).

[3] Pensando $f(x, y)$ come la densità nel punto (x, y) di una grandezza distribuita su A , ad esempio la massa, le formule (1.8)-(1.9) possono essere interpretate in termini del significato fisico dell'integrale doppio, come segue. Ricordiamo che l'integrale $\int_A f(x, y) dx dy$ fornisce la massa totale di A ed osserviamo che i punti (x, y) su cui viene valutata la funzione f nel calcolare l'integrale (1.10) sono solo i punti del segmento di estremi $P_1(x) = (x, g_1(x))$ e $P_2(x) = (x, g_2(x))$. Allora, in quest'ottica, la formula (1.8) afferma che la massa totale di A è data dall'integrale su $[a, b]$ della funzione $\varphi(x)$ definita in (1.10), come se l'integrale che definisce $\varphi(x)$ "raccolgesse" la massa sul segmento $\overline{P_1(x)P_2(x)}$ e la successiva integrazione su $[a, b]$ fornisse la massa totale di A "raccolgendo" a sua volta le masse di tutti i segmenti $\overline{P_1(x)P_2(x)}$ in cui A risulta ripartito al variare di $x \in [a, b]$. Analogamente per la formula (1.9).

Casi particolari (importanti) delle formule di riduzione

[1] Il caso più elementare di insieme semplice è il rettangolo, che è convesso sia verticalmente che orizzontalmente. Allora, se f è una funzione continua su $A = [a, b] \times [c, d]$, le formule (1.8)-(1.9) diventano

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \text{e} \quad \int_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

In particolare, si ha $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ e quindi, integrando su un rettangolo, l'ordine di integrazione (prima rispetto ad y e poi rispetto ad x , o viceversa) risulta in generale irrilevante. Per questo motivo, si usa abolire l'utilizzo delle parentesi e scrivere brevemente

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy, \quad (1.11)$$

avendo però cura di mantenere l'ordine originario dei simboli di integrale e differenziale (ad esempio $\int_1^2 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ significa che x varia in $[0, 1]$ ed y in $[1, 2]$, non viceversa).

[2] Un caso ancora più particolare (e facile) del precedente si ha se $f(x, y) = \alpha(x) \beta(y)$ con $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. In tal caso, l'integrale doppio si riduce al prodotto di due integrali semplici:

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [c,d]} \alpha(x) \beta(y) dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b \alpha(x) \beta(y) dx \right) dy = \int_c^d \beta(y) \left(\int_a^b \alpha(x) dx \right) dy \\ &= \left(\int_a^b \alpha(x) dx \right) \left(\int_c^d \beta(y) dy \right), \end{aligned}$$

in quanto le costanti moltiplicative filtrano fuori dal segno di integrale per linearità.

1.6.2 Formule di riduzione per integrali tripli

Le formule di riduzione per integrali tripli riportano il calcolo di un integrale *triplo* al calcolo successivo di due integrali in dimensione minore: un'integrale *semplice* prima ed uno *doppio* poi (Teorema 16), oppure viceversa (Teorema 18).

Il primo risultato richiede la continuità della funzione integranda su un insieme di integrazione che sia *semplice* rispetto ad un asse cartesiano. La nozione di semplicità nello spazio è del tutto simile a quella nel piano, quindi evitiamo una definizione a parte e la includiamo nel teorema di riduzione.

Teorema 16 (di integrazione per fili) Supponiamo che:

- $A \subset \mathbb{R}^3$ sia **semplice rispetto all'asse z** , cioè sia la regione di spazio compresa tra i grafici di due funzioni continue delle variabili x, y su un dominio compatto e misurabile $D \subset \mathbb{R}^2$; formalmente:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

con $D \subset \mathbb{R}^2$ compatto e misurabile e $g_1, g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue;

- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua.

Allora A è misurabile, f è integrabile su A e risulta

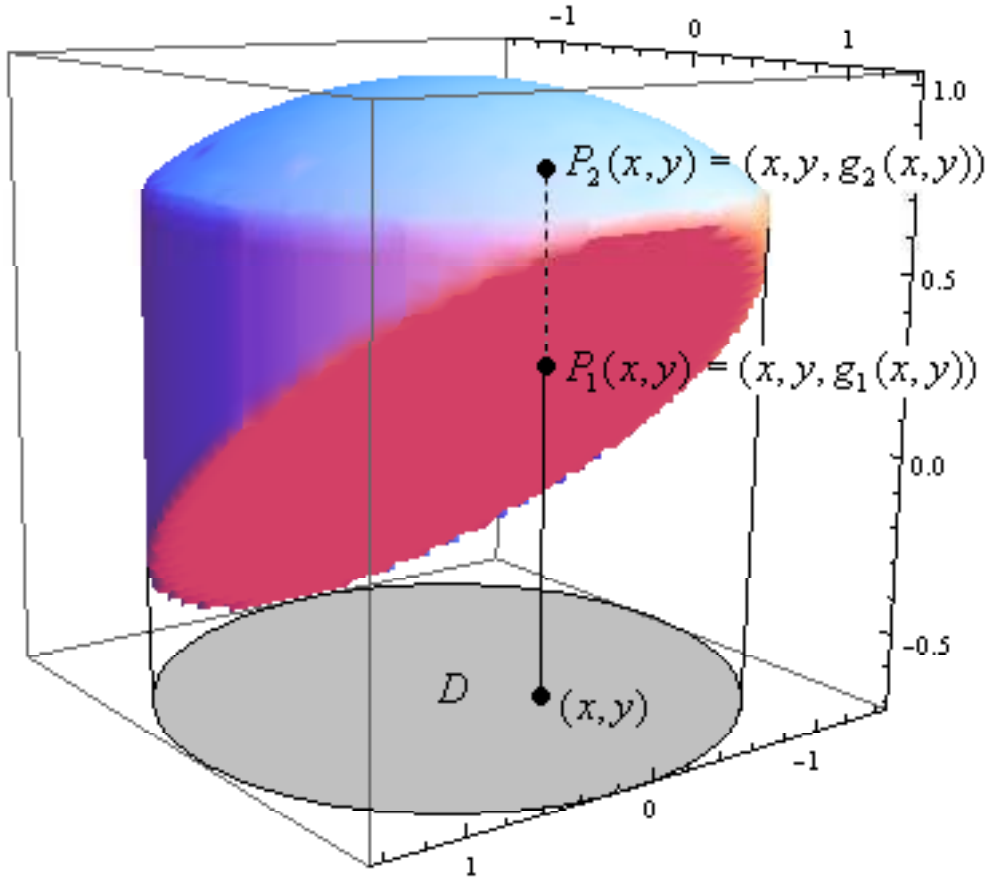
$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (1.12)$$

Osserviamo che, se A è semplice rispetto all'asse z , allora D è la proiezione di A sul piano xy , cioè

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists z \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in A\}.$$

In termini più intuitivi e geometrici, allora, la semplicità di un insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ rispetto all'asse z richiede che:

- la proiezione D di A sul piano xy sia compatta e misurabile;
- preso un generico $(x, y) \in D$, la retta verticale passante per (x, y) incontri l'insieme A una ed una sola volta 'in ingresso' ed una ed una sola volta 'in uscita', diciamo in due punti $P_1 = (x, y, z_1)$ e $P_2 = (x, y, z_2)$, le cui quote z_1, z_2 dipendono ovviamente da (x, y) ;
- le quote $z_i = g_i(x, y)$ dei punti di ingresso e di uscita siano funzioni continue di $(x, y) \in D$.



In tal caso, allora, applicare la formula (1.12) significa:

- immaginare le variabili x, y come momentaneamente fissate nel dominio D ed integrare la funzione $f(x, y, z)$ della sola variabile z tra la quota di ingresso $z_1 = g_1(x, y)$ e quella di uscita $z_2 = g_2(x, y)$;
- calcolare l'integrale doppio su D della funzione di (x, y) che si ottiene come risultato dell'integrazione effettuata al punto precedente.

Non daremo la dimostrazione del Teorema 16, limitandoci ad un'interpretazione della formula (1.12) in termini del significato fisico dell'integrale triplo. Ricordiamo che, pensando $f(x, y, z)$ come la densità nel punto (x, y, z) di una grandezza distribuita su A , ad esempio la massa, l'integrale $\int_A f(x, y, z) dx dy dz$ fornisce la massa totale di A . Osserviamo poi che nell'integrale semplice più interno della formula (1.12), cioè

$$\varphi(x, y) := \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad \text{con } (x, y) \in D \text{ generico (momentaneamente fissato),}$$

i punti (x, y, z) su cui viene valutata la funzione f sono solo i punti del segmento di estremi $P_1(x, y) = (x, y, g_1(x, y))$ e $P_2(x, y) = (x, y, g_2(x, y))$. Allora, in quest'ottica, la formula (1.12) afferma che la massa totale di A è data dall'integrale su D della funzione $\varphi(x, y)$, come se l'integrale che definisce $\varphi(x, y)$ avesse "raccolto" la massa del "filo" $\overline{P_1(x)P_2(x)}$ e la successiva integrazione su D fornisse la massa totale di A "raccolgendo" a sua volta le masse di tutti i "fili" $\overline{P_1(x)P_2(x)}$ in cui A risulta ripartito al variare di $(x, y) \in D$.

Osservazione 17 Il Teorema 16 ammette chiaramente due analoghe versioni per insiemi semplici rispetto agli assi x o y , fornendo rispettivamente le formule

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left(\int_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy dz \quad (1.13)$$

(con D proiezione di A sul piano yz) e

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left(\int_{k_1(x, z)}^{k_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz \quad (1.14)$$

(con D proiezione di A sul piano xz). ■

Diamo ora il secondo risultato di riduzione a due integrazioni successive, che riconduce il calcolo di un integrale triplo a quello di un integrale doppio prima e semplice poi.

Teorema 18 (di integrazione per fette, o strati) *Supponiamo che:*

- $A \subset \mathbb{R}^3$ sia della forma

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [\alpha, \beta], (x, y) \in D_z\}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $z \in [\alpha, \beta]$ l'insieme $D_z \subset \mathbb{R}^2$ è compatto e misurabile;

- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua.

Allora A è misurabile, f è integrabile su A e risulta

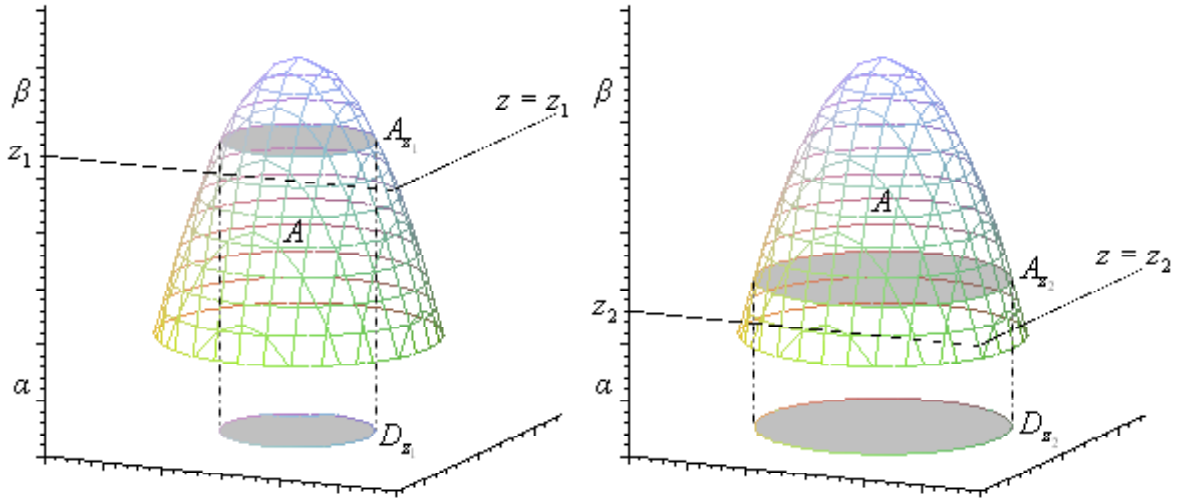
$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz. \quad (1.15)$$

Osserviamo che, se A è della forma prevista dal teorema, allora $[\alpha, \beta]$ è la proiezione di A sull'asse z e D_z è la proiezione sul piano xy dell'intersezione di A con il piano orizzontale a quota z , cioè

$$[\alpha, \beta] = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) \in A\} \quad \text{e} \quad D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}.$$

In termini più intuitivi e geometrici, allora, il teorema precedente richiede che l'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ sia tale che:

- la proiezione di A sull'asse z sia un intervallo compatto $[\alpha, \beta]$;
- preso un generico $z \in [\alpha, \beta]$ e considerata la sezione piana A_z di A col piano orizzontale a quota z , la proiezione di A_z sul piano xy (che in generale dipenderà da z) sia un insieme compatto e misurabile D_z .



In tal caso, allora, applicare la formula (1.15) significa:

- immaginare la variabile z come momentaneamente fissata nella proiezione $[\alpha, \beta]$ e calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x, y, z)$ delle sole variabili x, y sulla proiezione D_z della sezione A_z ;
- calcolare l'integrale semplice tra α e β della funzione di z che si ottiene come risultato dell'integrazione doppia effettuata al punto precedente.

Omettiamo la dimostrazione del Teorema 18, limitandoci ad un'interpretazione della formula (1.15) in termini del significato fisico dell'integrale triplo, che ricordiamo: se $f(x, y, z)$ è la funzione di densità di una grandezza distribuita su A , ad esempio la massa, l'integrale $\int_A f(x, y, z) dx dy dz$ fornisce la massa totale di A . Osserviamo che nell'integrale doppio più interno della formula (1.15), cioè

$$\varphi(z) := \int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \quad \text{con } z \in [\alpha, \beta] \text{ generico (momentaneamente fissato)}$$

i punti (x, y, z) su cui viene valutata la funzione f sono solo i punti della sezione A_z di A col piano orizzontale a quota z . Allora, in quest'ottica, la formula (1.12) afferma che la massa totale di A è ottenuta integrando la funzione $\varphi(z)$ tra α e β , come se l'integrale che definisce $\varphi(z)$ avesse "raccolto" la massa dello "strato" A_z e la successiva integrazione su $[\alpha, \beta]$ fornisse la massa totale di A "raccolgendo" a sua volta le masse di tutti gli "strati" (o "fette") A_z in cui A risulta ripartito al variare di $z \in [\alpha, \beta]$.

Osservazione 19 Il Teorema 18 ammette chiaramente due analoghe versioni di integrazione per strati paralleli ai piani yz o xz , fornendo rispettivamente le formule

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx \quad (1.16)$$

(con $[\alpha, \beta]$ proiezione di A sull'asse x) e

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{D_y} f(x, y, z) dx dz \right) dy \quad (1.17)$$

(con $[\alpha, \beta]$ proiezione di A sull'asse y). ■

Casi particolari (importanti) delle formule di riduzione

Il caso più elementare insieme semplice è il parallelepipedo, che è semplice rispetto a tutti gli assi coordinati. Allora, se f è una funzione continua su $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, tutte le formule (1.12)-(1.17) possono essere applicate e, usando anche la (1.11), si ottiene ad esempio

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy dx$$

(per fili paralleli all'asse z) oppure

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) dy dz \right) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz dy \right) dx$$

(per strati ortogonali all'asse x). Si evince allora che, integrando su un parallelepipedo, l'ordine di riduzione è in generale irrilevante e pertanto si usa scrivere brevemente

$$\int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz dy dx,$$

avendo cura di ordinare integrali e differenziali in modo da conservare la corrispondenza tra il simbolo di differenziale e l'intervallo di variazione della relativa variabile.

Se in particolare $f(x, y, z) = \alpha(x, y) \beta(z)$ con $\alpha : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, allora, integrando indifferentemente per fili o per fette, si ottiene

$$\int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) dx dy dz = \left(\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \alpha(x, y) dy dx \right) \left(\int_{a_3}^{b_3} \beta(z) dz \right).$$

Analogamente se $f(x, y, z) = \alpha(x, z) \beta(y)$ oppure $f(x, y, z) = \alpha(y, z) \beta(x)$.

Ancora più in particolare, se $f(x, y, z) = \alpha_1(x) \alpha_2(y) \alpha_3(z)$ con $\alpha_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, allora risulta

$$\int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) dx dy dz = \left(\int_{a_1}^{b_1} \alpha_1(x) dx \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} \alpha_2(y) dy \right) \left(\int_{a_3}^{b_3} \alpha_3(z) dz \right).$$

1.7 Integrazione per cambiamento di coordinate

In questa sezione presentiamo un risultato che consente di trasformare un integrale multiplo in un altro, al quale può risultare più facile applicare le formule di riduzione, sia per l'espressione più semplice della funzione integranda, sia per la forma più adatta del nuovo dominio di integrazione. Tale trasformazione avviene tramite la nozione di *cambiamento di coordinate* (o di *variabili*), che introduciamo nella definizione seguente.

Definizione 20 Chiamiamo **cambiamento di coordinate su un insieme** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ogni funzione $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : A' \rightarrow A$ definita su un altro insieme $A' \subseteq \mathbb{R}^n$ e tale che

- ϕ è biettiva tra A' ed A ;
- $\phi \in C^1(A')$;

- $\det J_\phi(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ per ogni $(u_1, \dots, u_n) \in A'$.

Essendo un campo vettoriale, la funzione $(x_1, \dots, x_n) = \phi(u_1, \dots, u_n)$ si rappresenta mediante n equazioni

$$\phi : \begin{cases} x_1 = \phi_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases} \quad (1.18)$$

che sono dette **equazioni del cambiamento di coordinate** e che legano le coordinate $(u_1, \dots, u_n) \in A'$ alle coordinate $(x_1, \dots, x_n) \in A$ di uno stesso punto P . Tipicamente le (x_1, \dots, x_n) rappresentano le coordinate cartesiane in \mathbb{R}^n e la biiettività di ϕ assicura allora che ogni punto $P \in A$ sia “etichettato” in modo biunivoco dalle “nuove” coordinate $(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$.

La altre condizioni richieste dalla Definizione 20 sono funzionali al loro utilizzo nella dimostrazione del Teorema 22, che omettiamo. Ricordiamo solo che $\phi \in C^1(A')$ significa che tutte le funzioni componenti ϕ_1, \dots, ϕ_n di ϕ sono di classe C^1 su un qualche aperto contenente A' (A' stesso, qualora fosse aperto) e che $J_\phi(u_1, \dots, u_n)$ è la matrice jacobiana di ϕ calcolata nel punto (u_1, \dots, u_n) . Facciamo inoltre notare che, tramite un importante teorema dell'Analisi matematica che qui non presentiamo (il Teorema di inversione locale), il complesso delle condizioni richieste dalla Definizione 20 assicura che l'inversa $\phi^{-1} : A \rightarrow A'$ è ancora un cambio di coordinate e che vale la seguente formula (spesso utile nelle applicazioni):

$$\det J_\phi(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\det J_{\phi^{-1}}(\phi(u_1, \dots, u_n))} \quad \text{per ogni } (u_1, \dots, u_n) \in A'. \quad (1.19)$$

Esempio 21 (cambi di coordinate lineari) Una qualsiasi matrice invertibile $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ definisce un cambio di coordinate lineare $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo $\phi(u_1, \dots, u_n) = M(u_1, \dots, u_n)^T$, cioè

$$\phi(u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Infatti ϕ è invertibile perché M è invertibile e $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ con $\det J_\phi \neq 0$ ovunque perché la matrice jacobiana di ϕ è data in ogni punto da M . Se (x_1, \dots, x_n) sono le coordinate rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n , allora le equazioni $(x_1, \dots, x_n)^T = M(u_1, \dots, u_n)^T$ di ϕ , cioè

$$\phi : \begin{cases} x_1 = m_{11}u_1 + m_{12}u_2 + \dots + m_{1n}u_n & (= \phi_1(u_1, \dots, u_n)) \\ \vdots \\ x_n = m_{n1}u_1 + m_{n2}u_2 + \dots + m_{nn}u_n & (= \phi_n(u_1, \dots, u_n)) \end{cases},$$

non sono altro che le equazioni del cambiamento di base di matrice M , il quale fa passare dalle coordinate cartesiane (x_1, \dots, x_n) alle coordinate (u_1, \dots, u_n) rispetto alla base i cui vettori sono le colonne di M . ■

Teorema 22 (di integrazione per cambiamento di coordinate) Supponiamo che:

- $A, A' \subset \mathbb{R}^n$ siano misurabili e $\phi : A' \rightarrow A$ sia un cambio di coordinate su A tale che la funzione $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \det J_\phi(u_1, \dots, u_n)$ sia limitata su A' ;
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e limitata.

Allora

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{A'} f(\phi(u_1, \dots, u_n)) |\det J_\phi(u_1, \dots, u_n)| du_1 \dots du_n. \quad (1.20)$$

Osserviamo che, formalmente, l'integrando a secondo membro si ottiene operando le sostituzioni

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases} \quad \text{e} \quad dx_1 \dots dx_n = |\det J_\phi(u_1, \dots, u_n)| du_1 \dots du_n.$$

Nei prossimi paragrafi riportiamo alcuni cambi di coordinate standard, che si rivelano spesso utili perché trasformano in rettangoli o parallelepipedi molti degli insiemi di integrazione che sono frequenti nelle applicazioni.

In altri casi, cambi di variabili non standard possono essere suggeriti in modo naturale dalla geometria specifica del problema o dall'espressione particolare della funzione integranda, le quali conducono a definire nuove variabili (u_1, \dots, u_n) che ne semplifichino la struttura. Ad esempio, l'integrale

$$\int_A \frac{x+y}{x-y} dx dy \quad \text{con} \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 1, 1 \leq x-y \leq 2\}$$

si semplifica notevolmente con il cambio lineare $(u, v) = (x+y, x-y)$, tramite il quale si ottiene

$$\int_A \frac{x+y}{x-y} dx dy = \frac{1}{2} \int_{[0,1] \times [1,2]} \frac{u}{v} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 u du \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \frac{1}{4} \log 2$$

(lasciamo al lettore la verifica di questi passaggi). Facciamo però notare che, in tali casi, si è in genere portati ad introdurre il cambio di coordinate inverso rispetto a quello da utilizzare nella formula (1.20), cioè $(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ invece di $(x_1, \dots, x_n) = \phi(u_1, \dots, u_n)$ (nell'esempio: $(u, v) = (x+y, x-y) = \phi^{-1}(x, y)$), e che quindi può essere necessario invertire tale cambio prima di applicare la formula stessa (nell'esempio: risolvendo $(u, v) = (x+y, x-y)$ rispetto a x, y si trova $(x, y) = \frac{1}{2}(u+v, u-v) = \phi(u, v)$). Tale inversione può comunque essere evitata nel calcolo di $\det J_\phi(u_1, \dots, u_n)$, in quanto vale la formula (1.19) (nell'esempio: $\det J_{\phi^{-1}}(x, y) = -2$ per ogni (x, y) e quindi $\det J_\phi(u, v) = -\frac{1}{2}$ per ogni (u, v)).

Osservazione 23 Il termine $|\det J_\phi(u_1, \dots, u_n)|$ della formula (1.20) è un fattore di natura geometrica, che tiene conto di come il cambio di coordinate ϕ espande o comprime le misure degli insiemi. Infatti, ricordando che $A = \phi(A')$ (ϕ è biiettiva) ed applicando la (1.20) alla funzione indenticamente uguale ad 1, si ottiene

$$|\phi(A')| = \int_{\phi(A')} dx_1 \dots dx_n = \int_{A'} |\det J_\phi(u_1, \dots, u_n)| du_1 \dots du_n,$$

che, in generale, è diverso da $|A'| = \int_{A'} du_1 \dots du_n$. ■

Osservazione 24 Ricordando la formula di integrazione per sostituzione negli integrali semplici, ossia

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \quad \text{con} \quad \varphi \in C^1([a, b]), \quad (1.21)$$

è chiaro che il determinante jacobiano generalizza a dimensione qualsiasi il ruolo giocato dalla derivata prima in dimensione 1. Potrebbe però stupire la presenza del valore assoluto nella (1.20). In effetti, l'assenza del valore assoluto nella (1.21) è dovuta al fatto che gli integrali semplici sono orientati (cioè vale la convenzione che scambiando gli estremi l'integrale cambia segno), mentre quelli multipli no. Infatti, se $\varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, $\varphi \in C^1([a, b])$, è un cambio di coordinate unidimensionale nel senso della Definizione 20, allora φ' non si annulla mai in (a, b) , essendo perciò sempre positiva o sempre negativa.

Nel primo caso, φ è strettamente crescente (da cui $\varphi(a) = \alpha$ e $\varphi(b) = \beta$) e quindi, tramite la (1.21), risulta

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx \stackrel{(1.21)}{=} \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_a^b f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du.$$

Nel secondo caso, invece, φ è strettamente decrescente (da cui $\varphi(a) = \beta$ e $\varphi(b) = \alpha$) e perciò risulta

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x) dx = - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx \stackrel{(1.21)}{=} - \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_a^b f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du.$$

Dunque si ha in ogni caso

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du,$$

cioè, integrando sugli intervalli tra cui lavora φ e senza tener conto dell'orientabilità dell'integrale semplice, anche nella formula del cambio di variabili in dimensione 1 deve apparire il termine $|\varphi'(u)|$. ■

1.7.1 Coordinate polari centrate in (x_0, y_0)

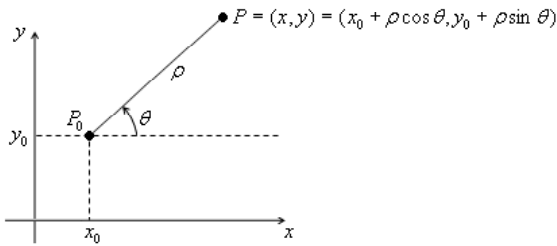
Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi. La funzione $(x, y) = \phi(\rho, \theta)$ definita da

$$\phi : \begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}, \quad (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$$

è un cambiamento di coordinate su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ e su ogni suo sottoinsieme A . Risulta che

$$\det J_{\phi}(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho > 0, \quad \forall (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi).$$

La funzione ϕ lega tra loro le coordinate cartesiane (x, y) di un qualunque punto P del piano cartesiano privato del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e le **coordinate polari** (ρ, θ) dello stesso punto P , le quali hanno il significato geometrico espresso in figura.



Notiamo esplicitamente che:

- ρ è la distanza euclidea tra P e P_0 ,
ossia $\rho = d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$;
- θ è la misura in radianti dell'angolo orientato (positivo se spazzato in senso antiorario, negativo altrimenti) di cui deve ruotare la semiretta $y = y_0, x \geq x_0$ per sovrapporsi alla semiretta P_0P .

Osservazione 25 Ragionando sul significato geometrico appena illustrato, si intuisce facilmente che il passaggio a coordinate polari trasforma cerchi, corone circolari e loro settori in rettangoli. ■

1.7.2 Coordinate polari ellittiche centrate in (x_0, y_0)

Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $a, b > 0$ qualsiasi. La funzione $(x, y) = \phi(t, \theta)$ definita da

$$\phi : \begin{cases} x = x_0 + a t \cos \theta \\ y = y_0 + b t \sin \theta \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}, \quad (t, \theta) \in (0, +\infty) \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$$

è un cambiamento di coordinate su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ e su ogni suo sottoinsieme A . Risulta che

$$\det J_\phi(t, \theta) = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -at \sin \theta \\ b \sin \theta & bt \cos \theta \end{vmatrix} = abt > 0, \quad \forall (t, \theta) \in (0, +\infty) \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi).$$

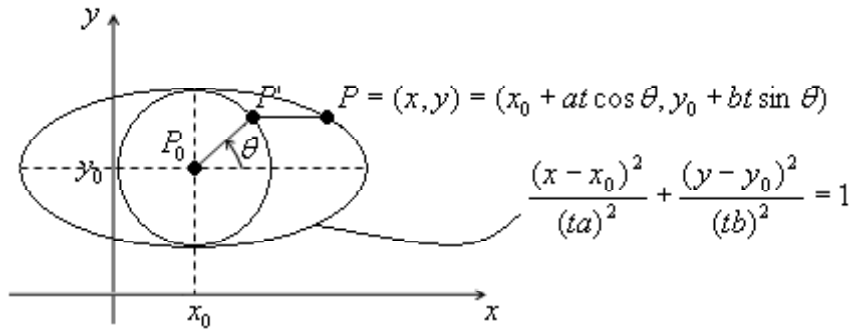
La funzione ϕ lega tra loro le coordinate cartesiane (x, y) di un qualunque punto P del piano cartesiano privato del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e le **coordinate polari ellittiche** (o brevemente **ellittiche**) (t, θ) dello stesso punto P , le quali dipendono dai parametri a e b fissati ed hanno il significato geometrico (non immediato) descritto di seguito ed espresso nella figura sottostante:

- tra tutte le ellissi del tipo

$$\frac{(x - x_0)^2}{(ta)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{(tb)^2} = 1$$

(ellissi con centro in P_0 e semiassi proporzionali ad a e b), ne esiste una ed una sola che passa per il punto P : il valore del parametro $t > 0$ che individua tale ellisse è la coordinata t del punto P ;

- detta \mathcal{E} l'ellisse passante per P trovata al punto precedente, la coordinata θ di P è l'angolo delle coordinate polari centrate in P_0 del punto P' ottenuto proiettando P parallelamente al semiasse maggiore di \mathcal{E} sulla circonferenza di centro P_0 ed inscritta in \mathcal{E} (la quale ha raggio pari al semiasse minore di \mathcal{E}).



Osserviamo anche che:

- per $t = 1$ fissato e θ variabile, le equazioni di ϕ descrivono i punti dell'ellisse di centro P_0 e semiassi a e b ; i punti "interni" a tale ellisse si ottengono per $0 < t < 1$ e quelli "esterni" per $t > 1$;
- $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ fissato e t variabile, le equazioni di ϕ descrivono rispettivamente i punti delle semirette

$$\begin{cases} x > x_0 \\ y = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y > y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x < x_0 \\ y = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y < y_0 \end{cases}$$

(che sono i semiassi cartesiani se (x_0, y_0) è l'origine). I punti di tali semirette sono anche gli unici per i quali la coordinata ellittica θ coincide con l'omonima coordinata polare.

Osservazione 26 In base al significato geometrico illustrato, è facile intuire che il passaggio a coordinate ellittiche (di parametri a, b opportuni) muta ellissi piene e settori ellittici in rettangoli. ■

1.7.3 Coordinate cilindriche di centro $(x_0, y_0, 0)$ e asse parallelo all'asse z

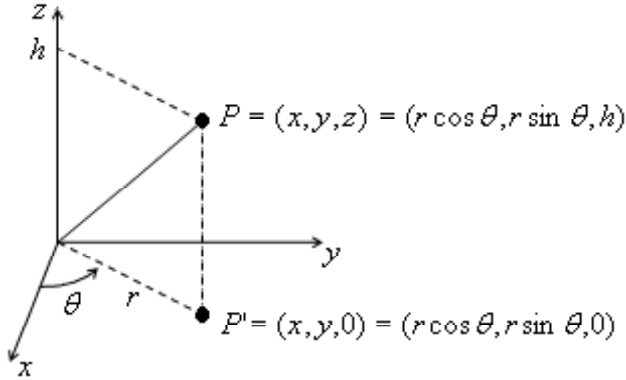
Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi. La funzione $(x, y, z) = \phi(r, \theta, h)$ definita da

$$\phi : \begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \\ z = h \end{cases}, \quad \begin{aligned} &(r, \theta, h) \in (0, +\infty) \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \times \mathbb{R}, \\ &(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x = x_0, y = y_0\} \end{aligned}$$

è un cambiamento di coordinate su $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = x_0, y = y_0\}$ e su ogni suo sottoinsieme. Risulta inoltre

$$\det J_\phi(r, \theta, h) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0, \quad \forall (r, \theta, h) \in (0, +\infty) \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

La funzione ϕ lega tra loro le coordinate cartesiane (x, y, z) di un qualunque punto P dello spazio cartesiano privato della retta $x = x_0, y = y_0$ e le **coordinate cilindriche** (r, θ, h) dello stesso punto P , le quali hanno il significato geometrico espresso in figura, dove si è preso $(x_0, y_0) = (0, 0)$ per semplicità.



Notiamo esplicitamente che:

- h coincide con la quota z di P ;
- (r, θ) sono le coordinate polari nel piano $z = z_0$ della proiezione ortogonale P' di P su tale piano.

Osservazione 27 Grazie al significato geometrico appena illustrato, è facile intuire che il passaggio a coordinate cilindriche trasforma cilindri, gusci cilindrici e loro settori in parallelepipedi. ■

1.7.4 Coordinate sferiche di centro (x_0, y_0, z_0) e asse parallelo all'asse z

Siano $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi. La funzione $(x, y, z) = \phi(\rho, \theta, \varphi)$ definita da

$$\phi : \begin{cases} x = x_0 + \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = z_0 + \rho \cos \varphi \end{cases}, \quad \begin{aligned} &(\rho, \theta, \varphi) \in (0, +\infty) \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \times (0, \pi), \\ &(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x = x_0, y = y_0\} \end{aligned}$$

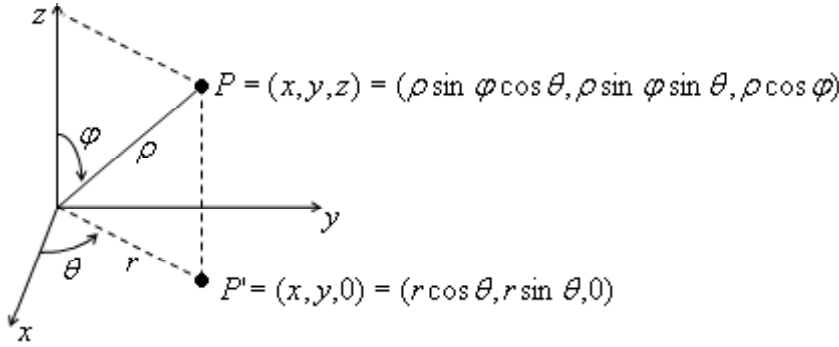
è un cambiamento di coordinate su $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = x_0, y = y_0\}$ e su ogni suo sottoinsieme. Risulta inoltre

$$\det J_\phi(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi > 0$$

per ogni $(\rho, \theta, \varphi) \in (0, +\infty) \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \times (0, \pi)$.

La funzione ϕ lega tra loro le coordinate cartesiane (x, y, z) di un qualunque punto P dello spazio

cartesiano privato dell'asse $x - x_0 = y - y_0 = 0$ e le **coordinate sferiche** (ρ, θ, φ) dello stesso punto P , le quali sono dette rispettivamente *raggio*, *longitudine*, *colatitudine* ed hanno il significato geometrico espresso in figura, dove si è preso $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ per semplicità.



Osserviamo che, per le note relazioni tra lati e angoli di un triangolo rettangolo, il raggio r delle coordinate polari nel piano $z = z_0$ della proiezione ortogonale P' di P su tale piano e la distanza $d(P, P')$ di P dallo stesso piano sono dati da $r = \rho \sin \varphi$ e $d(P, P') = \rho \cos \varphi$.

Notiamo esplicitamente che:

- ρ è la distanza euclidea tra P e P_0 , ossia $\rho = d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$;
- θ è l'angolo polare nel piano $z = z_0$ della proiezione ortogonale P' di P su tale piano;
- φ è l'angolo tra il versore \mathbf{k} dell'asse z ed il vettore $\overrightarrow{P_0P}$.

Osservazione 28 Ragionando sul significato geometrico appena illustrato, non è difficile intuire che il passaggio a coordinate sferiche trasforma sfere, gusci sferici e loro settori in parallelepipedi. ■

1.8 Baricentro e momenti d'inerzia

In accordo con il significato dell'integrale multiplo discusso nel Paragrafo 1.5.3, presentiamo, a titolo di esempio, due grandezze fisiche che sono definite tramite integrali.

Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^n$ sia un insieme misurabile su cui sia definita una densità di massa $\mu : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

Definizione 29 Si chiama **baricentro di A** il punto $G = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ di coordinate

$$\bar{x}_i := \frac{\int_A x_i \mu(P) dA}{\int_A \mu(P) dA}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.22)$$

(si osservi che il denominatore non è altro che la massa totale di A).

In altri termini, in stretta analogia con la definizione di baricentro di un sistema finito di punti materiali, il baricentro G è il punto di \mathbb{R}^n (non necessariamente di A) le cui coordinate sono la media integrale pesata da μ delle coordinate dei punti di A .

Se μ è costante (cioè A rappresenta un corpo omogeneo), allora le (1.22) diventano

$$\bar{x}_i = \frac{1}{|A|} \int_A x_i dA, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.23)$$

ed il baricentro G assume un significato puramente geometrico, non dipendendo più dalla densità μ , ma solo dalla forma di A . Per tale ragione, alcuni autori distinguono i punti di coordinate (1.22) e (1.23), chiamando **centroide** il secondo (il quale coincide con il baricentro per densità costanti).

Per il calcolo del centroide nelle applicazioni, può essere utile tener presente il seguente risultato: se A è simmetrico rispetto ad una retta o un piano, allora il centroide di A appartiene a tale retta o piano (lo stesso non vale in generale se μ non è costante, in quanto G dipende anche dalla forma di μ).

Definizione 30 Si chiama **momento di inerzia di A rispetto all'origine O** il numero

$$I_O := \int_A (x_1^2 + \dots + x_n^2) \mu(x_1, \dots, x_n) dA = \int_A [d(P, O)]^2 \mu(P) dA.$$

Se a è una retta di \mathbb{R}^n , si chiama **momento di inerzia di A rispetto all'asse a** il numero

$$I_a := \int_A [d(P, a)]^2 \mu(P) dA,$$

dove $d(P, a)$ indica la distanza del generico punto $P \in A$ dalla retta a .

In particolare, se a è un asse coordinato, allora per $n = 2$ si ottiene

$$I_x = \int_A y^2 \mu(x, y) dA, \quad I_y = \int_A x^2 \mu(x, y) dA, \quad I_O = \int_A (x^2 + y^2) \mu(x, y) dA = I_x + I_y,$$

mentre per $n = 3$ si ha

$$I_x = \int_A (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dA, \quad I_y = \int_A (x^2 + z^2) \mu(x, y, z) dA, \quad I_z = \int_A (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dA,$$

$$I_O = \int_A (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dA = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z).$$

1.9 Primo teorema di Guldino

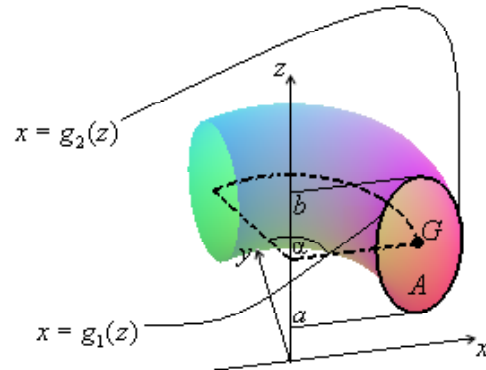
Il primo teorema di Guldino è un risultato significativo e semplice da usare per il calcolo del volume di un solido di rotazione. Segnaliamo che esiste anche un secondo teorema di Guldino (che non vedremo), il quale fornisce in modo analogo l'area di una superficie di rotazione.

Teorema 31 Sia A un insieme x -semplice contenuto nel semipiano $x \geq 0$ del piano xz e sia $E \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse z di un angolo α (radianti). Allora

$$\text{vol}(E) = \alpha \bar{x} \text{area}(A)$$

dove \bar{x} è l'ascissa del centroide $G = (\bar{x}, \bar{z})$ di A .

Si noti che $\alpha \bar{x}$ è la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto da G nella rotazione.



È evidente che il teorema vale analogamente se A è z -semplice e ruota attorno all'asse x , oppure facendo ruotare insiem di altri semipiani coordinati attorno ad altri assi coordinati.

Dimostrazione Proviamo l'uguaglianza $\text{vol}(E) = \alpha \bar{x} \text{area}(A)$ calcolando separatamente i due membri e verificando che coincidono.

- Da un lato, sostituendo la definizione $\bar{x} = \frac{1}{\text{area}(A)} \int_A x \, dA$ di \bar{x} ed usando il fatto che A può essere scritto nella forma

$$A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a, b], g_1(z) \leq x \leq g_2(z)\}$$

(A è x -semplice per ipotesi), si ottiene

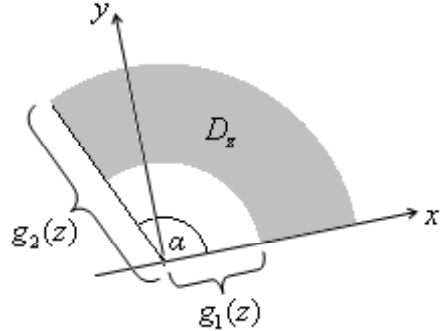
$$\begin{aligned} \alpha \bar{x} \text{area}(A) &= \alpha \int_A x \, dA = \alpha \int_a^b \left(\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} x \, dx \right) dz = \alpha \int_a^b \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=g_1(z)}^{x=g_2(z)} dz \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_a^b \left([g_2(z)]^2 - [g_1(z)]^2 \right) dz. \end{aligned}$$

- D'altra parte, integrando per strati si trova

$$\text{vol}(E) = \int_E dE = \int_a^b \left(\int_{D_z} dx dy \right) dz = \int_a^b \text{area}(D_z) dz$$

dove

D_z è la proiezione sul piano xy della sezione E_z di E con il piano orizzontale a quota fissata z , cioè il segmento di corona circolare del piano xy di ampiezza α e raggi $r = g_1(z)$ (interno) ed $R = g_2(z)$ (esterno).



Allora, ricordando la formula classica per l'area di un segmento di corona circolare, si trova

$$\text{area}(D_z) = \frac{\alpha}{2} (R^2 - r^2) = \frac{\alpha}{2} \left([g_2(z)]^2 - [g_1(z)]^2 \right)$$

e dunque

$$\text{vol}(E) = \frac{\alpha}{2} \int_a^b \left([g_2(z)]^2 - [g_1(z)]^2 \right) dz.$$

I secondi membri delle due uguaglianze trovate coincidono e quindi coincidono anche i primi. ■

1.10 Integrali impropri di funzioni non negative

Vogliamo estendere la nozione di integrale multiplo a (1) funzioni non limitate, (2) domini di integrazione non limitati. Ci limiteremo a considerare *funzioni non negative* e, nel primo caso, *funzioni non limitate nell'intorno di un solo punto*.

1 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile (quindi limitato) e sia $x_0 \in A$. Sia $f : A \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ non negativa e integrabile (in senso proprio) su ogni insieme non vuoto del tipo $A \setminus B_r(x_0)$ con $r > 0$ (che è misurabile, in quanto differenza di insiemi misurabili). Allora si pone

$$\boxed{\int_A f := \lim_{r \rightarrow 0} \int_{A \setminus B_r(x_0)} f} \quad (1.24)$$

Data la monotonia rispetto al dominio (si ricordi che è $f \geq 0$), l'integrale sotto il segno di limite definisce una funzione crescente della variabile r , per cui il limite a secondo membro esiste in ogni caso, finito o positivamente infinito. Se f è integrabile (in senso proprio) su A , allora ritroviamo l'integrale di f su A . Altrimenti, l'integrale (1.24) si dice **improprio**, *convergente* o *divergente* a seconda che sia finito o infinito; nel primo caso si dice che f è **integrabile in senso improprio su A** .

Osserviamo che la scelta degli intorni sferici $B_r(x_0)$ per isolare il punto x_0 non è l'unica possibile e si può dimostrare ad esempio che, se $I_r(x_0) = [x_0 - r, x_0 + r]^n$ (intervallo n -dimensionale centrato in x_0), allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{A \setminus B_r(x_0)} f = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{A \setminus I_r(x_0)} f.$$

Esempio 32 Si vuole calcolare l'integrale

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy.$$

L'insieme di integrazione $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è misurabile e la funzione $f : A \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha/2}$ è integrabile (in quanto limitata e continua) su ogni corona circolare $A \setminus B_r(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ con $0 < r < 1$. Allora, per definizione si ha

$$\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{r^2 \leq x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_r^1 \frac{\rho}{\rho^\alpha} d\rho d\theta = 2\pi \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^1 \rho^{1-\alpha} d\rho$$

dove si è passati a coordinate polari. Risulta

$$\int_r^1 \rho^{1-\alpha} d\rho = \begin{cases} \frac{1-r^{2-\alpha}}{2-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 2 \\ -\log r & \text{se } \alpha = 2 \end{cases}$$

e quindi, passando al limite,

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} & \text{se } \alpha < 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 2 \end{cases}.$$

In particolare, l'integrale converge se e solo se $\alpha < 2$.

Analogamente (ma servono le coordinate polari di \mathbb{R}^n), si verifica che in dimensione $n \geq 1$ qualsiasi

risulta

$$\int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^\alpha} dx_1 \dots dx_n \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < n \\ = +\infty & \text{se } \alpha \geq n \end{cases}.$$

■

2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme illimitato tale che ogni insieme non vuoto $A \cap B_r(\mathbf{0})$ con $r > 0$ (che è ovviamente limitato) sia misurabile. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ non negativa e integrabile (in senso proprio) su ogni $A \cap B_r(\mathbf{0})$. Allora si pone

$$\int_A f := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{A \cap B_r(\mathbf{0})} f.$$

Data la monotonia rispetto al dominio (si ricordi che è $f \geq 0$), l'integrale sotto il segno di limite definisce una funzione crescente della variabile r , per cui il limite a secondo membro esiste in ogni caso, finito o positivamente infinito. Tale integrale si dice **improprio**, *convergente* o *divergente* a seconda che sia finito o infinito; nel primo caso si dice che f è **integrabile in senso improprio su A** .

Osserviamo che la scelta degli intorni sferici $B_r(\mathbf{0})$ per invadere il dominio illimitato A con insiemi limitati non è l'unica possibile e si può dimostrare ad esempio che, se $I_r(\mathbf{0}) = [-r, r]^n$ (intervallo n -dimensionale centrato nell'origine), allora

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{A \cap B_r(\mathbf{0})} f = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{A \cap I_r(\mathbf{0})} f.$$

Esempio 33 Si vuole calcolare l'integrale

$$\int_{x^2+y^2>1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy.$$

L'insieme di integrazione $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ e la funzione integranda $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha/2}$ sono tali che ogni corona circolare $A \cap B_r(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < r^2\}$ con $r > 1$ è misurabile ed f è integrabile su $A \cap B_r(\mathbf{0})$ (in quanto limitata e continua). Allora, per definizione si ha

$$\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{1 < x^2+y^2 < r^2} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy = 2\pi \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_1^r \rho^{1-\alpha} d\rho$$

dove si è passati a coordinate polari. Risulta

$$\int_1^r \rho^{1-\alpha} d\rho = \begin{cases} \frac{r^{2-\alpha} - 1}{2-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 2 \\ \log r & \text{se } \alpha = 2 \end{cases}$$

e quindi, passando al limite,

$$\int_{x^2+y^2>1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy = \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha-2} & \text{se } \alpha > 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 2 \end{cases}.$$

In particolare, l'integrale converge se e solo se $\alpha > 2$.

Analogamente (ma servono le coordinate polari di \mathbb{R}^n), si verifica che in dimensione $n \geq 1$ qualsiasi

risulta

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^\alpha} dx_1 \dots dx_n \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > n \\ = +\infty & \text{se } \alpha \leq n \end{cases}.$$

■

Esempio 34 Si vuole calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Poiché siamo nelle condizioni della definizione di integrale improprio, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{x^2+y^2 < r^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Passando a coordinate polari, risulta

$$\int_{x^2+y^2 < r^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=r} = \pi (1 - e^{-r^2})$$

e quindi, passando al limite,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi. \quad (1.25)$$

Osserviamo che questo risultato consente di calcolare anche il valore dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$, che riveste notevole importanza in molte applicazioni e non è calcolabile elementarmente. Infatti, usando intervalli bidimensionali invece che intorni sferici, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[-r,r]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

dove, riducendo a integrazioni successive, risulta

$$\int_{[-r,r]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-r}^r \int_{-r}^r e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \left(\int_{-r}^r e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-r}^r e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-r}^r e^{-t^2} dt \right)^2.$$

Dunque, ricordando il risultato (1.25), si ottiene

$$\pi = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{-r}^r e^{-t^2} dt \right)^2 = \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-t^2} dt \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

■