

SY09 - TP03

Discrimination, théorie bayésienne de la décision

Félix Flores - Cristian Garrido

28 mai 2015

1 Classifieur euclidien, K plus proches voisins

Pour chacun des jeux de données, on a estimé les paramètres μ_k et \sum_k des distributions conditionnelles, ainsi que les proportions π_k des classes. On a alors obtenu les résultats suivants :

1. Pour le jeu de données *Synth1-40* :

$$\pi_1 = 0.55, \pi_2 = 0.45 \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} -1.904681 \\ 0.698841 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 0.8808594 \\ 0.8587835 \end{pmatrix}$$
$$\sum_1 = \begin{pmatrix} 0.7701334 & 0.2566214 \\ 0.2566214 & 1.0798685 \end{pmatrix}, \sum_2 = \begin{pmatrix} 1.41546550 & -0.01011499 \\ -0.01011499 & 1.22191696 \end{pmatrix}$$

2. Pour le jeu de données *Synth1-100* :

$$\pi_1 = 0.53, \pi_2 = 0.47 \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} -1.808233 \\ 1.057774 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 0.9831412 \\ 1.1610775 \end{pmatrix}$$
$$\sum_1 = \begin{pmatrix} 1.50880197 & 0.07097749 \\ 0.07097749 & 0.95833356 \end{pmatrix}, \sum_2 = \begin{pmatrix} 0.84677155 & 0.04545945 \\ 0.04545945 & 0.71631862 \end{pmatrix}$$

3. Pour le jeu de données *Synth1-500* :

$$\pi_1 = 0.48, \pi_2 = 0.52 \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} -1.9101695 \\ 0.9359349 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 0.9979001 \\ 0.9843533 \end{pmatrix}$$
$$\sum_1 = \begin{pmatrix} 1.16050554 & 0.03149239 \\ 0.03149239 & 0.87727376 \end{pmatrix}, \sum_2 = \begin{pmatrix} 0.91978725 & -0.03484383 \\ -0.03484383 & 0.95416768 \end{pmatrix}$$

4. Pour le jeu de données *Synth1-1000* :

$$\pi_1 = 0.49, \pi_2 = 0.51 \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} -1.998992 \\ 1.008186 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 1.0908900 \\ 0.9837324 \end{pmatrix}$$
$$\sum_1 = \begin{pmatrix} 1.03969441 & -0.07115634 \\ -0.07115634 & 0.97107695 \end{pmatrix}, \sum_2 = \begin{pmatrix} 1.00246869 & -0.02488749 \\ -0.02488749 & 1.02228782 \end{pmatrix}$$

On peut donc bien remarquer en tant que la taille de l'échantillon augmente les paramètres plus s'approchent à les valeurs suivantes :

$$\pi_1 \approx \pi_2 \approx 0.5, \mu_1 \approx \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_2 \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \sum_1 \approx \sum_2 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estimation du taux d'erreur

En ayant $E = \frac{1}{m} \sum 1_{z_i \neq \hat{z}_i}$ alors on peut remarquer que $T_i = \begin{cases} 1 & z_i \neq \hat{z}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ suit une loi de Bernouilli, donc $T_i \sim \beta(\varepsilon)$ où ε représente le taux d'erreur et

$$P(T_i = 1) = E(E) = E\left(\frac{1}{m} \sum_i^m T_i\right) = \frac{1}{m} E\left(\sum_i^m T_i\right) = m \sum_i^m E(T_i) = \frac{m\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Puis on peut déduire que mE suit aussi une loi binomiale. Maintenant on peut approcher par une loi normale en supposant que m est assez grand. on a alors $mE \sim \mathcal{N}(m\varepsilon, m\varepsilon(1-\varepsilon))$. et grâce à cela on a $E \sim \mathcal{N}(\varepsilon, m^{-1}\varepsilon(1-\varepsilon))$ Pour connaître la variance, mais on sait que on a une loi de student $E : \frac{\bar{E}-\mu}{S^*/\sqrt{N}} \sim \tau_{N-1}$. On assume les taux d'erreur E_j sont indépendants. Alors On peut calculer l'intervalle de confiance pour l'espérance de E , en trouvant μ , $P(\frac{\bar{E}-\mu}{S^*/\sqrt{N}}) < 1-\alpha$ Finalement on obtient l'intervalle de confiance bilatérale suivante :

$$IC = [\bar{E} - t_{N-1;1-\alpha/2} \frac{S^*}{\sqrt{N}}, \bar{E} + t_{N-1;1-\alpha/2} \frac{S^*}{\sqrt{N}}]$$

En suite on a calculé les intervalles de confiance pour chaque jeu de données. En utilisant un taux d'erreur obtenu lors de vingt exécutions et avec un niveau de confiance de $1-\alpha = 0,95$:

1. Pour le jeu de données *Synth1-40* :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.124074$ et $IC = [0.123785, 0.124363]$
 - Ensemble de test : $\varepsilon = 0.111539$ et $IC = [0.111250, 0.111827]$
2. Pour le jeu de données *Synth1-100* :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.143939$ et $IC = [0.143753, 0.144126]$
 - Ensemble de test : $\varepsilon = 0.179419$ et $IC = [0.179225, 0.179598]$
3. Pour le jeu de données *Synth1-500* :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.122372$ et $IC = [0.122337, 0.122407]$
 - Ensemble de test : $\varepsilon = 0.118862$ et $IC = [0.118827, 0.118897]$
4. Pour le jeu de données *Synth1-1000* :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.104880$ et $IC = [0.104870, 0.104889]$
 - Ensemble de test : $\varepsilon = 0.1121257$ et $IC = [0.112116, 0.112135]$

On peut observer qu'en tant que la taille de l'échantillon augmente, l'estimation du taux d'erreur deviens au même temps plus faible. Particulièrement, dans le cas quand on a 100 individus, on a obtenu une taux d'erreur proche au dix et once percent pour l'ensemble d'apprentissage et l'ensemble de test respectivement. On peut remarquer que le taux d'erreur de l'ensemble de apprentissage et du ensemble de test est toujours approché.

Nombre optimal de voisins

Pour obtenir le nombre optimal de voisins, on a utilisé le jeu de données *Synth1-1000*, on a effectué une séparation aléatoire de l'ensemble de données en un ensemble d'apprentissage et ensemble de test ; et on a comme nombre de classes candidates les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5. Puis on a fait le test 100 fois et on a obtenu 48 fois le nombre $K = 2$, 20 fois $K = 5$, 14 fois $K = 3$, 12 fois $K = 4$ et 6 fois $K = 1$. Alors on a une forte tendance au nombre de classes $K = 2$. Cette instabilité du résultat est du à l'aléatoire. Car en dépendant les centres choisis pour l'algorithme *kmeans* la classe à qui appartient ce centre peut varier et ceci fait changer aussi la classe à qui les points de validations appartient. Par conséquent, on peut bien choisir comme nombre de classe optimal $K = 2$.

Maintenant, comme dans l'exercice précédent. on a calculé pour chaque jeu de données, l'estimation des taux d'erreurs et les intervalles de confiance pour l'ensemble d'apprentissage et l'ensemble de test avec un niveau de confiance de $1-\alpha = 0,95$:

1. Pour le jeu de données *Synth1-40* :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.082$ et $IC = [0.07826, 0.081774]$

- Ensemble de test : $\varepsilon = 0.132$ et $IC = [0.128227, 0.131776]$
- 2. Pour le jeu de données *Synth1-100* :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.081$ et $IC = [0.080616, 0.0813836]$
 - Ensemble de test : $\varepsilon = 0.11$ et $IC = [0.109616, 0.110384]$
- 3. Pour le jeu de données *Synth1-500* :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.0694$ et $IC = [0.069330, 0.069460]$
 - Ensemble de test : $\varepsilon = 0.0844$ et $IC = [0.084339, 0.084461]$
- 4. Pour le jeu de données *Synth1-1000* :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.0557$ et $IC = [0.055672, 0.055728]$
 - Ensemble de test : $\varepsilon = 0.0736$ et $IC = [0.073572, 0.073628]$

On peut encore remarquer, comme dans l'exercice précédent, que en tant que la taille de l'échantillon est plus grand la différence entre le taux d'erreur pour l'ensemble d'apprentissage et celle de l'ensemble est à chaque fois plus faible.

Jeu de données Synth2-1000

Comme l'exercice précédent, on utilise l'estimation du maximum vraisemblance pour estimer les paramètres μ_k et \sum_k , ainsi que les proportions π_k des classes. On a alors obtenu les résultats suivants :

$$\pi_1 = 0.488, \pi_2 = 0.512 \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} -4.055942 \\ 1.011496 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 4.028957 \\ 1.067821 \end{pmatrix}$$

$$\sum_1 = \begin{pmatrix} 1.014560 & 0.018451 \\ 0.018451 & 0.939754 \end{pmatrix}, \sum_2 = \begin{pmatrix} 4.953398 & 0.107909 \\ 0.107909 & 5.022125 \end{pmatrix}$$

En approximant ces valeurs on peut les estimer comme :

$$\pi_1 \approx \pi_2 \approx 0.5, \mu_1 \approx \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_2 \approx \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \sum_1 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sum_2 \approx \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule l'estimation des taux d'erreur avec les deux classificateurs.

1. Avec classificateur de distance euclidienne :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.0063063$ et $IC = [0.006305, 0.006308]$
 - Ensemble de test : $\varepsilon = 0.006587$ et $IC = [0.006585, 0.006588]$
2. Avec classificateur de plus proche voisin :
 - Ensemble d'apprentissage : $\varepsilon = 0.0047$ et $IC = [0.004697, 0.004703]$
 - Ensemble de test : $\varepsilon = 0.0066$ et $IC = [0.006597, 0.006603]$

Après ce calcul, on peut noter que les estimations obtenus sont beaucoup plus fiables. Cela principalement du à la grande quantité de données et surtout parce que les variances entre les classes sont beaucoup plus distantes par rapport aux jeux de données précédents. Ce fait alors avoir des centres plus éloignés et donc par les deux classificateurs un tirage plus fort par les classes.

Règle de Bayes

1.1 Distributions marginales des variables X_1 et X_2 dans chaque classe

Car les matrices de covariance (Σ_1 et Σ_2) sont diagonales, on peut déduire que les variables X_1 et X_2 sont indépendants. Par ailleurs, les données qui appartiennent à chaque classe ω_1 et ω_2 suivent une loi normal bivariée. Aussi, les vecteurs aléatoires suivent aussi une loi normal, de coup on peut encore remarquer que les composants de X_1 et X_2 suivent une loi normal.

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, 1)$$

$$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, 1)$$

1.2 Courbes d'iso-densité.

Si on analyse l'équation de la courbe d'iso-densité de la classe 1 et la classe 2, on a : $(x - \mu_1)^t \Sigma_1^{-1} (x - \mu_1) = c_1$ (pour la classe 1) et $(x - \mu_2)^t \Sigma_2^{-1} (x - \mu_2) = c_2$ (pour la classe 2), où c_1 et c_2 sont constants. En plus, on sait que Σ_1 et Σ_2 sont matrices identité. Donc, les courbes d'iso-densité ont l'équation suivante :

$$(x - \mu_1)^t (x - \mu_1) = c_1, (x - \mu_2)^t (x - \mu_2) = c_2$$

En fin, on peut conclure que les centres des cercles sont μ_1 et μ_2 et ses rayons sont donnés par $\sqrt{c_1}$ et $\sqrt{c_2}$.

Règle de Bayes

$$\text{Règle de Bayes : } \delta^*(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} > \frac{\pi_2}{\pi_1} \\ a_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Après des simplifications, on peut écrire la règle de Bayes comme l'expression suivante :

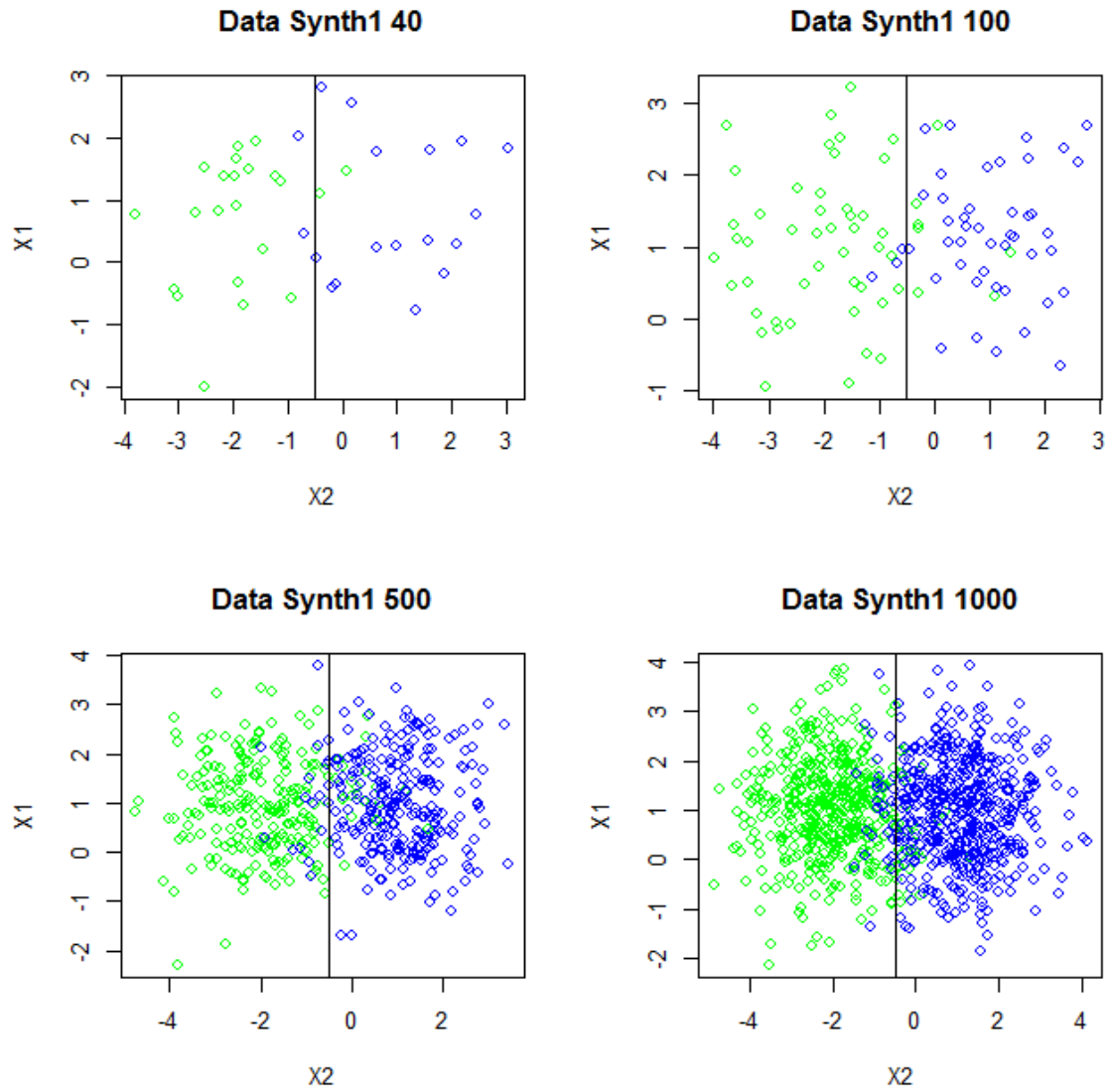
$$\delta^*(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x_1 < \frac{\ln(\pi_1) - \ln(\pi_2)}{3} - \frac{1}{2} \\ a_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on considère que $\pi_1 = 0.5$ donc $\pi_2 = 0.5$ pour les jeux de données *Synth1-40*, *Synth1-100*, *Synth1-500* et *Synth1-1000*, et en remplaçant ces valeurs dans l'équation au dessus, on obtient finalement l'équation suivante :

$$\delta^*(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x_1 < -\frac{1}{2} \\ a_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Frontières de décision

Ci-dessous, on montre les graphiques correspondantes aux jeux de données *Synth1-40*, *Synth1-100*, *Synth1-500* et *Synth1-1000*, pour le problème de discrimination des classes ω_1 et ω_2 :



On peut remarquer dans la graphique de *Synth1* – 40 et *Synth1* – 100 que est difficile de faire une distinction de classes donné le cas dont n'existe pas la troisième colonne (colonne de classe). Néanmoins, pour les jeux de données *Synth1* – 500 et *Synth1* – 1000 (spécialement pour *Synth1* – 1000) on peut déjà noter un centre plus consistant et une nuage de données plus concentrée autour de chaque classe.

Erreur de Bayes

Pour obtenir une perspective mathématique de l'erreur de Bayes appliqué aux jeux de données *Synth1* – 40, *Synth1* – 100, *Synth1* – 500 et *Synth1* – 1000, on doit calculer ses estimateurs (Estimateur α et β). Les fonctions de ces estimateurs sont ajoutés dans l'annexe de ce rapport.

	α	β
Synth1-40	0.09090909	0.09090909
Synth1-100	0.1320755	0.05660377
Synth1-500	0.08333333	0.07083333
Synth1-1000	0.07786885	0.05737705

ANNEXES

```
ceuc.val <- function(mu, Xtst){
  ntst = dim(Xtst)[1];
  ptst = dim(Xtst)[2];
  Ztst = NULL;

  h.x <- rowSums(Xtst^2)
  h.y <- rowSums(mu^2)
  ones.n <- rep(1,ntst)
  ones.m <- rep(1,dim(mu)[1])
  D2 <- h.x\%*\%t(ones.m) - 2*as.matrix(Xtst) \%*\% t(mu)
    + ones.n\%*\%t(h.y)
  for(k in 1:ntst){
    pproche = min(D2[k,]);
    Ztst = c(Ztst,as.numeric(rownames(mu)[which(ppersche == D2[k,])]))
  }
  Ztst;
}
```

```
ceuc.app <- function(Xapp, zapp){
  g <- max(zapp)
  muk = NULL;
  for(k in 1:g){
    indk = which(zapp==k);
    rw = t(as.matrix(apply(Xapp[indk,],2,sum)/dim(Xapp[indk,])[1]));
    rownames(rw) = k;
    muk = rbind(muk,rw);
  }
  muk;
}
```

```
kppv.val <- function(Xapp, zapp, K, Xtst)
{
  centers = cbind(kmeans(Xapp,K)$centers,rep(Inf,K));
  X = cbind(Xapp,zapp);
  for(i in 1:nrow(centers)){
    centers[i,3] <- getClass(X,centers[i,1:2])
  }
  print("Centers:")
  print(centers)
  Ztst = NULL;
  for(i in 1:nrow(Xtst)){
    Ztst = rbind(Ztst,getClass(centers,Xtst[i,]))
  }
  Ztst;
}

getClass <- function(X,p){
  d = Inf;
  cl = NULL;
  for(i in 1:nrow(X)){
    disPto = dist(rbind(X[i,1:2],p));
    if(d > disPto){
      d = disPto;
    }
  }
}
```

```

        cl = X[i,3];
    }
}
cl;
}

```

```

kppv.app <- function(Xapp, zapp, Xval, zval, nppv)
{
  Kideel = NULL
  max = 0;
  for(K in nppv){
    zppv = as.vector(kppv.val(Xapp,zapp,K,Xval))
    print(sum(zppv == zval))
    if(sum(zppv == zval) > max){
      Kideel = K
      max = sum(zppv == zval);
    }
  }
  Kideel
}

```

```

estimateurAlpha <- function(data){
  f<-function(row) {
    if(row[3] == 1 && row[1] > -0.5){
      return(1)
    }
    return(0)
  }
  sum(apply(data, 1,f )) / sum(data[,3] == 1)
}

estimateurBeta <- function(data){
  f <- function(row) {
    if(row[3] == 2 && row[1] < -0.5){
      return(1)
    }
    return(0)
  }
  sum(apply(data, 1, f)) / sum(data[,3] == 1)
}

```