3. On dispose des données d'apprentissage suivantes :
- classe ω_1 : 0.1, 0.2, 0.6, 0.7 ;
- classe ω_2 : 0.5, 0.57, 1.5

3a. Estimer numériquement la probabilité d'erreur de Bayes ϵ^*, en utilisant la formule de la question 2 (on a $\phi(0.4) \approx 0.7$ et $\phi(0.9) \approx 0.8$).

1

On estime π_1 par $\hat{\pi}_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{4}{7}$, de même pour $\hat{\pi}_2 = \frac{3}{7}$
On estime μ_1 par $\hat{\mu}_1 = 0,4$ de même pour $\hat{\mu}_2 \simeq 0,86$
On estime s par $\hat{s} \simeq 1,26$.
On estime ϵ^* par $\hat{\epsilon}^* \simeq 0,41$

3b. Estimer la probabilité d'erreur de la règle du plus proche voisin, par la méthode "leave-one-out".

1

exemple	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
valeur	0,1	0,2	0,5	0,57	0,6	0,7	1.5
erreur lorsque l'exemple constitue l'ensemble de test $= a_i$	0	0	0	1	1	0	1

L'estimation $\hat{\epsilon}$ de ϵ est donné par $\hat{\epsilon} = \frac{1}{n}\sum_i a_i$

$\hat{\epsilon} = \frac{3}{7} \simeq 0,43$

3c. Soit $\widehat{\delta}$ la règle de décision obtenue en remplaçant dans l'expression de la règle de Bayes μ_1 et μ_2 par leurs estimations $\widehat{\mu}_1$ et $\widehat{\mu}_2$ et en supposant $\pi_1 = \pi_2$. Estimer la probabilité d'erreur de $\widehat{\delta}$ par la méthode "leave-one-out". (On présentera les calculs intermédiaires dans un tableau).

celle la est limite alors peut parfois être erreur suivant précision calcul

2

exemple	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
classe	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	ω_1	ω_1	ω_2
valeur	0,1	0,2	0,5	0,57	0,6	0,7	1,5
$\hat{\mu}_1$ lorsque l'exemple $\notin$ ensemble d'apprentissage	0,5	0,47	~~0,33~~ 0,4	0,4	0,34	0,3	0,4
$\hat{\mu}_2$	0,86	0,86	1,04	1	0,86	0,86	0,54
$\hat{s}$	0,68	0,67	0,72	0,7	0,6	0,58	0,47
mal classé ?	0	0	1	1	0	1	0

On a donc : $\hat{\epsilon} = \frac{3}{7} \simeq 0,43$

8

Partie II : exercice

Faites d'abord les calculs au brouillon et ne reportez que les grandes lignes du raisonnement et les principaux résultats intermédiaires.

On considère un problème de discrimination à deux classes $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ et une variable $X \in \mathbb{R}$. On suppose que la variable X suit dans une chaque classe une loi normale avec les espérances μ_1 et μ_2, avec $\mu_2 > \mu_1$, et une variance égale à 1. Les probabilités a priori sont notées π_1 et π_2.

1. Montrer que la règle de Bayes avec coûts 0-1 revient à comparer x à un seuil s que l'on précisera.

La règle de Bayes avec coûts 0-1 s'écrit :

$$\delta^*(x) = \begin{cases} a_1 \text{ si } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} > \frac{\pi_2}{\pi_1} \\ a_2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ici :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^2\right)} = \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2 + \frac{1}{2}(x-\mu_2)^2\right)$$
$$= \exp\left(x(\mu_1-\mu_2) + \frac{1}{2}(\mu_2^2-\mu_1^2)\right)$$

d'où $\ln\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) > \ln\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\right) \iff x(\mu_1-\mu_2) + \frac{1}{2}(\mu_2^2-\mu_1^2) > \ln\pi_2 - \ln\pi_1$

$$\iff x \leq \frac{\ln\pi_2 - \ln\pi_1 + \frac{1}{2}(\mu_1^2-\mu_2^2)}{(\mu_1-\mu_2)} = s$$

car $(\mu_1-\mu_2) < 0$

La règle de Bayes revient bien à $\delta(x) = \begin{cases} a_1 \text{ si } x \leq s \\ a_2 \text{ sinon} \end{cases}$

2 -

2. Donner l'expression littérale de la probabilité d'erreur de Bayes ϵ^* (on notera ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite).

L'erreur de Bayes ε^* s'écrit : $\varepsilon^* = \alpha\pi_1 + \beta\pi_2$
$= P(a_1|\omega_2)\pi_2 + P(a_2|\omega_1)\pi_1$

Or $P(a_1|\omega_2) = P(x \leq s | \omega_2)$

$x \sim N(\mu_2, 1)$

d'où $P(a_1|\omega_2) = \phi\left(\frac{s-\mu_2}{1}\right)$

de même pour $P(a_2|\omega_1) = 1 - \phi\left(\frac{s-\mu_1}{1}\right)$

Ainsi $\varepsilon^* = \pi_2\phi(s-\mu_2) + (1-\phi(s-\mu_1))\pi_1$

2