Exemple de vecteur aléatoire

- Deux notes : math (1, 2 ou 3) et français (1 , 2 , 3 ou 4)
- Chaque réalisation d'une exp. aléatoire (un élève) : couple de nombres
- Modélisation par $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$: vecteur aléatoire de dimension 2
- Loi de probabilité (ou loi jointe) : $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in B)$ où $B \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3\}$
- Probabilité élémentaire

$$p(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) = \sum_{(x_1, x_2) \in B} p(x_1, x_2)$$

	1	2	3	4
1	0.08	0.16	0.08	0.48
2	0.08	0.01	0.01	0.00
3	0.01	0.02	0.01	0.06

Lois marginales

	1	2	3	4	X_1
1	0.08	0.16	0.08	0.48	0.80
2	0.08	0.01	0.01	0.00	0.10
3	0.01	0.02	0.01	0.06	0.10
X_2	0.17	0.19	0.10	0.54	

Lois conditionnelles

	1	2	3	4	X_1
1	0.08	0.16	0.08	0.48	0.80
2	0.08	0.01	0.01	0.00	0.10
3	0.01	0.02	0.01	0.06	0.10
X_2	0.17	0.19	0.10	0.54	

	1	2	3	4
1	0.47	0.85	0.80	0.89
2	0.47	0.05	0.10	0.00
3	0.06	0.10	0.10	0.11

$P(X_1/X_2 = x_2)$

	1	2	3	4
1	0.10	0.20	0.10	0.60
2	0.80	0.10	0.10	0.00
3	0.10	0.20	0.10	0.60

$P(X_2/X_1 = x_1)$

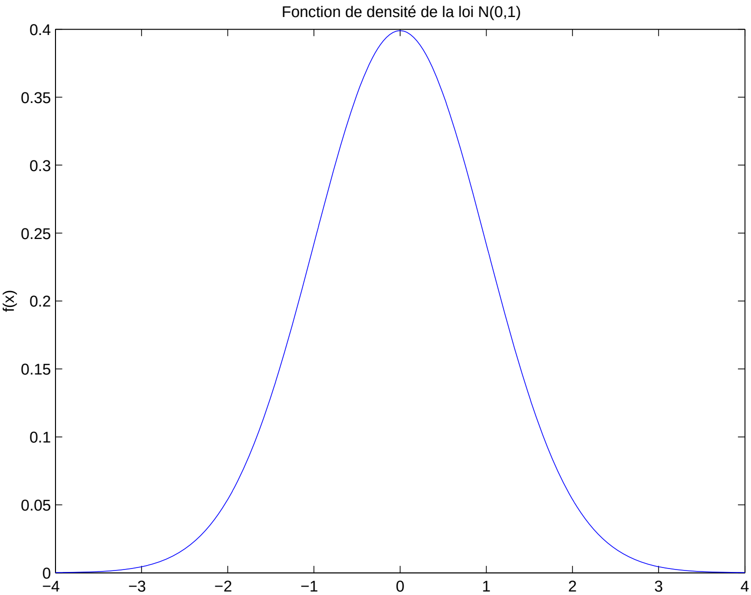
Echantillon d'un vecteur aléatoire

- Tableau de données individus-variables $X = (x_{ij})$
- Réalisation d'un échantillon de taille n du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$
- Exemple

	math	*scie*	*fran*	*lati*	$d-m$
jean	6.0	6.0	5	5.5	8
alin	8.0	8.0	8	8.0	9
anni	6.0	7.0	11	9.5	11
moni	14.5	14.5	16	15.0	8
didi	14.0	14.0	12	12.5	10
andr	11.0	10.0	6	7.0	13
pier	5.5	7.0	14	11.5	10
brig	13.0	12.5	8	9.5	12
evel	9.0	9.5	12	12.0	18

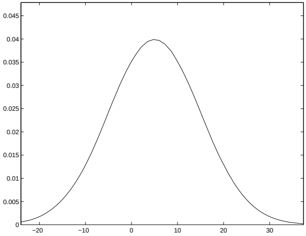
- Vecteur aléatoire de dimension $p = 4$: (math,scie,fran,lati,d-m)
- Echantillon de taille $n = 9$

Loi normale monodimensionnelle

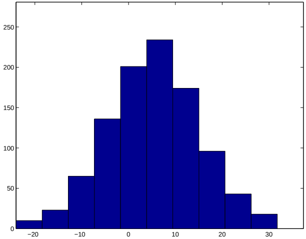


Loi normale univariée : simulation d'un échantillon

- Caractéristiques de la loi
  - $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  - Espérance $\mu = 5$
  - Variance $\sigma^2 = 100$
  - Écart-type $\sigma = 10$



- Données simulées
  - Taille de l'échan. $n = 1000$
  - Moyenne emp. $\overline{x} = 5.32$
  - Variance emp. $s{*}2 = 97.04$
  - Écart-type emp. $s^{*2} = 9.85$



Loi normale bidimensionnelle

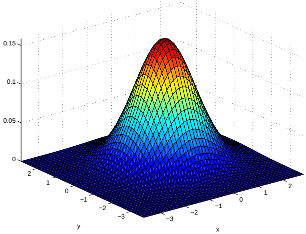
Vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ de densité

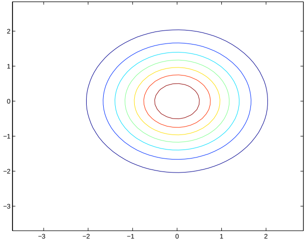
$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot$$
$$\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right]$$

où $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ et $\rho \in [-1, 1]$

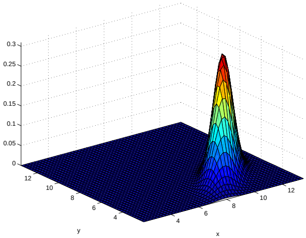
Loi normale bivariée : exemples

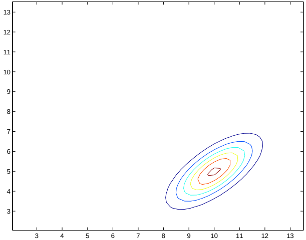
- $\mu_1 = \mu_2 = 0,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 1,\ \rho = 0$





- $\mu_1 = 10,\ \mu_2 = 5,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 1,\ \rho = 0.7$

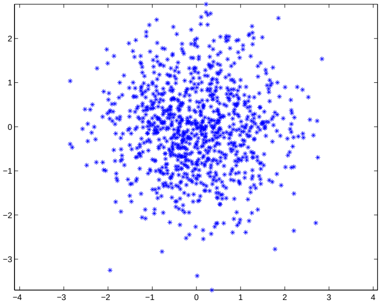


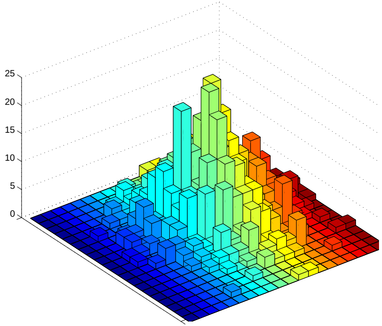


Simulation d'un échantillon gaussien bivarié : exemple 1

- $\mu_1 = \mu_1 = 0$,
  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0$,
  $n = 1000$
- $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $(\overline{x^1}, \overline{x^2}) = (-0.0048, -0.0304)$
- $S = \begin{pmatrix} 1.06 & -0.01 \\ -0.01 & 1.03 \end{pmatrix}$

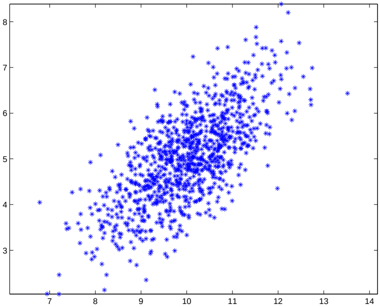


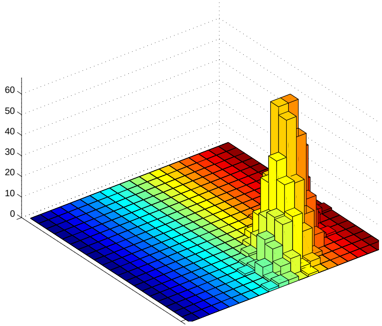


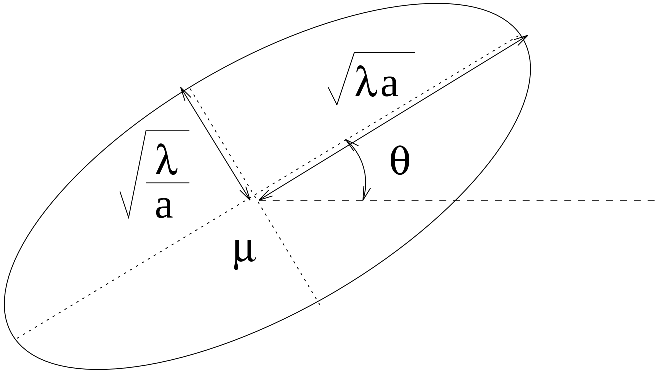
Simulation d'un échantillon gaussien bivarié : exemple 2

- $\mu_1 = 10,\ \mu_2 = 5,$
  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1,\ \rho = 0.7,$
  $n = 1000$
- $\Sigma = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.7 \\ 0.7 & 1.0 \end{pmatrix}$

- $(\overline{x^1}, \overline{x^2}) = (10.01, 5.01)$
- $S = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.68 \\ 0.68 & 0.98 \end{pmatrix}$







$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Simulation d'un échantillon gaussien en R

- Plusieurs fonctions : rbinom, rnorm, rt, rpois, et runif par exemple
- Simulation d'un échantillon de taille n, de moyenne μ et de variance σ^2 :

  ```
  x<-rnorm(n,mu,sigma2)
  ```

- Simulation d'un échantillon de taille 100 de $\mathcal{N}(0, I)$ de $\mathbb{R}^2$

  ```
  matrix(rnorm(2*n,0,1),n,2)
  ```

- Simulation d'un échantillon de taille n de $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ de $\mathbb{R}^2$ où $\Sigma = \lambda DAD'$:

  ```
  mu<-matrix(c(mu1,mu2),2,1)
  D<-matrix(c(cos(theta),sin(theta),-sin(theta),cos(theta)),2,2)
  T<-sqrt(lambda)*D%*%diag(c(sqrt(a),1/sqrt(a)))%*%t(D)
  X<-matrix(rnorm(2*n,0,1),n,2)%*%t(T) + matrix(1,n,1)%*% t(mu)
  ```