Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines
Master 1 Informatique
11 janvier 2012.

Examen MS1 INFO 105 – Simulation

<u>Recommandations</u> :
Les exercices sont indépendants.
Lire complètement l'énoncé avant de commencer.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction (commentaires, explications).
Tous documents autorisés.
Durée 2 heures.

Exercice 1 *Variable aléatoire*

Soit f une fonction définie sur l'intervalle réel $[0, A]$ avec A entier strictement positif par :

$$\forall n \in 1..A, \forall x \in [n-1, n], f(x) = \frac{1}{2^n}\alpha$$

1. *Pour $A = 1$, pour quelle valeur de α, f est une fonction de densité, quelle loi est définie par cette fonction de densité ?*
2. *Pour A quelconque, calculer la valeur de α (en fonction de A) pour que f soit une fonction de densité.*
3. *Pour A quelconque, donner une méthode pour générer une variable aléatoire de densité f.*

Exercice 2 *Chaîne de Markov*

Soit une chaîne de Markov en temps discret à N états de matrice de transition P. On suppose la chaîne ergodique. Sa distribution stationnaire est notée $\overline{\pi}$.

On construit une matrice de transition P' de taille $N+1$ de la façon suivante :

$$P' = \left(\begin{array}{cccccc|c} P_{1,1} & P_{1,2} & ... & P_{1,N-1} & 0.5 \times P_{1,N} & & 0.5 \times P_{1,N} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & ... & P_{2,N-1} & 0.5 \times P_{2,N} & & 0.5 \times P_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N,1} & P_{N,2} & ... & P_{N,N-1} & 0.5 \times P_{N,N} & & 0.5 \times P_{N,N} \\ \hline 0 & 0 & ... & 0 & 1 & & 0 \end{array} \right)$$

1. *Montrer que P' est une matrice de transition.*
2. *Montrer que la chaîne de Markov définie par P' est ergodique.*
3. *Exprimer $\overline{\pi}'$, la distribution stationnaire de P' en fonction de $\overline{\pi}$.*

Exercice 3 *File d'attente*

On considère une file de capacité infinie. Les durées inter-arrivées suivent une distribution exponentielle de paramètre λ.

Chaque client est servi deux fois dans la file de la façon suivante : quand un client a fini son premier service dans la file, il retourne dans la file.

Les clients en attente du premier service sont servis en ordre FIFO entre eux. Les clients en attente du deuxième service sont servis en ordre FIFO entre eux. Les clients qui attendent pour leur premier service sont prioritaires sur ceux qui attendent pour leur deuxième service. Le service n'est pas préemptif : un client qui a commencé son service, le termine quelles que soient les arrivées durant son service.

Quand un client a fini son deuxième service, il quitte la file.

Les services (premier et deuxième) sont de durée exponentielle(μ).

3.1 Simulation

1. *Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de ces files.*
2. *Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.*
3. *Donner le code nécessaire pour mesurer le pourcentage de temps pendant lequel des clients de deuxième service sont bloqués par ceux de premier service.*

3.2 Chaîne de Markov

4. *Quelles informations doit on avoir dans les états pour qu'ils forment une chaîne de Markov ?*
5. *Définir l'espace d'états de la chaîne de Markov exprimant le comportement du modèle.*
6. *Dessiner le graphe de la chaîne de Markov correspondant au modèle.*
7. *Donner les transitions de la chaîne de Markov.*
8. *Expliquer comment calculer la distribution stationnaire.*
9. *Que pouvez-vous dire de la condition de stabilité ?*