Université de Versailles SQY
Master 1 Informatique

Novembre 2018

Contrôle d'algorithmique de graphes

Durée : 1h00. Tout document autorisé SAUF LIVRES.

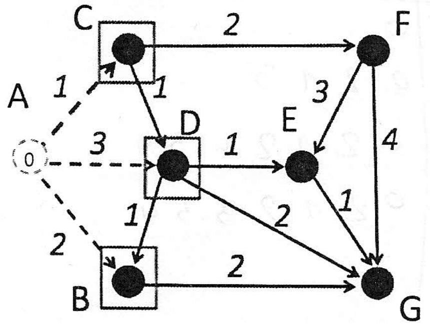
Exercice I :

On considère un graphe orienté représenté par sa matrice d'adjacence. Un sommet v est un puits si et seulement si pour tout sommet u différent de v, (u,v) est un arc et (v,u) n'est pas un arc. Les réponses aux questions suivantes devront être justifiées.

1. Un graphe contenant un puits peut-il être fortement connexe ? Peut-il être connexe ?
2. Un DAG peut-il contenir un puits ?
3. Un graphe peut-il contenir plusieurs puits ?
4. Donner le nombre minimum et maximum d'arcs d'un graphe de n>0 sommets contenant un puits.
5. Donner le degré entrant et le degré sortant, minimum et maximum, d'un puits dans un graphe de $n > 0$ sommets.
6. Donner les grandes lignes d'un algorithme déterminant si un graphe contient un puits.
7. Etant donné un graphe orienté connexe sans boucle, indiquer comment calculer le nombre minimum de liens à ajouter et à supprimer pour obtenir un graphe contenant un puits.

Exercice II :

Considérons le graphe orienté pondéré suivant dans lequel certains sommets sont marqués (encadrés) ainsi que certains arcs (pointillés).



Quelles ont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes (donner une courte justification à chacune de vos réponses) :

1. Le marquage indiqué correspond aux trois premières étapes de marquage de sommet et d'arcs d'une exécution de l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A.
2. La seconde étape de marquage de sommet et d'arc par l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A ne peut pas correspondre au marquage indiqué.

3. La troisième étape de marquage de sommet et d'arc par l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A ne peut pas correspondre au marquage indiqué.
4. Quelle que soit une exécution correcte de l'algorithme de Dijkstra à partir de A, un seul plus court chemin de A à G peut être identifié.
5. Il existe un plus court chemin de A à G qui ne peut être identifié par aucune exécution de l'algorithme de Dijkstra à partir de A.
6. Il n'existe qu'un seul troisième choix de marquage de sommet et d'arc possible, pour toute exécution de l'algorithme de Dijkstra à partir de A.

Exercice III :

On souhaite convertir de l'argent d'une devise dans une autre. Le problème est que toutes les conversions ne sont pas possibles : pour deux monnaies A et B, on peut parfois convertir de l'argent de A en B, parfois non. Si c'est possible, il y a un taux de change noté $c(A, B)$ de la conversion (c'est-à-dire qu'une somme S en monnaie A deviendrait $S.c(A, B)$ en monnaie B).

1. Etant donné un ensemble de n monnaies, pour lesquelles on connait les conversions possibles et les coûts de conversion, indiquer comment représenter les possibilités de conversion par un graphe.
2. Quelle propriétés doivent être vérifiées par ce graphe pour que toute conversion soit possible, avec éventuellement des conversions intermédiaires ?
3. Comment déterminer algorithmiquement le taux de change maximal d'une conversion d'une monnaie A en une monnaie B (tenant compte des conversions intermédiaires) ? (N.B. : vous inspirer des algorithmes vus en cours.)
4. Quelle condition dans le graphe permettrait de devenir infiniment riche ? Comment vérifier algorithmiquement que cela n'est pas possible ?