UNIVERSITE de VERSAILLES - Master 1 Info.

Module **Recherche opérationnelle et algorithmes probabilistes**
Janvier 2019

- Durée : 2h
- Tous documents autorisés
- Téléphones et ordinateurs interdits

1 Des qualités différentes (5 points)

Un tableau T de taille 60000 comporte des enregistrements dont un champ (nommé qualité) contient des valeurs numériques comprises entre 1 et 6. Ces valeurs sont équitablement réparties et il y a donc 10.000 fois chaque valeur mais le tableau n'est pas trié et elle peuvent se trouver dans n'importe quel ordre. On veut récupérer deux enregistrements de qualité sensiblement différentes, c'est à dire dont les valeurs ont une différence strictement supérieure à 2 (par exemple 1 et 4 ou 6 et 2, ...).

1. Proposer un algorithme déterministe qui permette d'obtenir le résultat escompté. Combien d'éléments du tableau votre algorithme va t'il consulter dans le pire des cas ? 30001
2. Proposer un algorithme de Monte Carlo pour ce problème. Au bout de 10 tirages, quelle est la probabilité d'échec ?

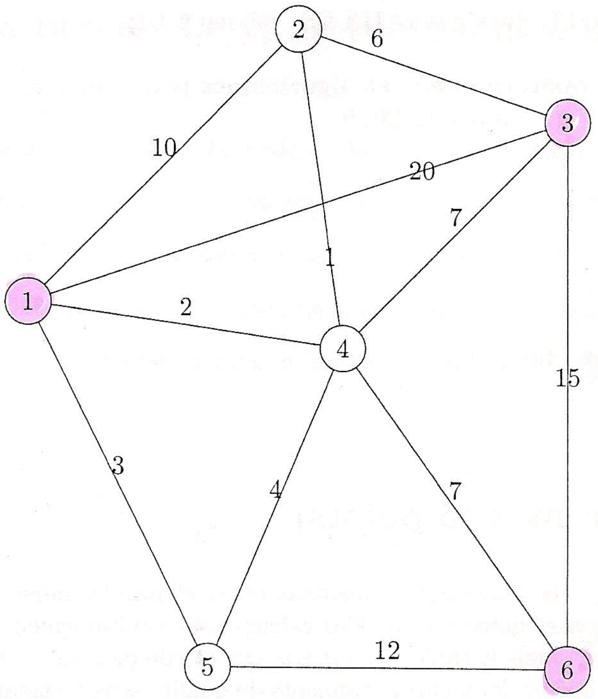
2 Coupe maximale (7 points)

Dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ avec V les sommets (n sommets et n pair) et E les arêtes, une valeur v_{ij} positive est associée à chaque arête (i, j). Le problème de la coupe maximale équilibrée consiste à partitionner les sommets en deux sous ensembles de même cardinalité $\frac{n}{2}$ de telle sorte que la somme des poids des arêtes reliant ces deux sous-ensembles soit la plus grande possible. Si on appelle V_1 l'un de ces deux sous-ensembles de sommets ($Card(V_1) = \frac{n}{2}$), la valeur de la coupe est :

$C(V_1) = \sum_{i \in V_1, j \notin V_1} v_{ij}$.

Ce problème qui possède de nombreuses applications a été prouvé comme étant NP-complet.

On prend comme exemple pour ce problème le graphe figurant en haut de la page suivante:



1. Expliquez pourquoi la valeur de la coupe associée au sous-ensemble $V_1 = \{1,2,3\}$ sur l'exemple de la figure ci-dessus vaut 28.

2. En prenant une variable de décision x_i pour chaque sommet i avec:
   $x_i = 1$ si $i \in V_1$, $x_i = 0$ sinon,
   Expliquer et justifier la modélisation mathématique du problème suivante:
   $Max \sum_{(i,j)\in E} v_{ij}.(x_i.(1-x_j) + (1-x_i).x_j)$
   $\sum_{i\in V} x_i = \frac{n}{2}$
   $\forall i \in V, x_i \in \{0,1\}$

3. Donner les 2 raisons pour lesquelles la modélisation précédente ne constitue pas un Programme Linéaire.

4. Proposer une heuristique gloutonne pour ce problème.

5. Partant d'une solution V_1, on définit un mouvement élémentaire comme le fait de remplacer un des sommets de V_1 par un sommet n'y appartenant pas.
   Quelle est la taille du voisinage d'une solution associé à ce mouvement?

6. Sur l'exemple de la figure ci-dessus, donnez l'ensemble des voisins de $V_1 = \{1,2,3\}$ avec la valeur de chacun. La solution $V_1 = \{1,2,3\}$ est-elle localement optimale? Globalement optimale ? Si vous pensez que la solution n'est pas localement optimale, appliquez une méthode de descente pour obtenir un optimum local.

3 Programmation Linéaire en Nombres Entiers (8 points)

Soit le Programme Linéaire en Nombres Entiers (P) suivant:

$$\text{Maximize Obj} = 10\ x_1 + 8\ x_2$$
$$\text{Subject To:}$$
$$\text{c1: } x_1 + 2\ x_2 \leq 90$$
$$\text{c2: } -x_1 + x_2 \leq 36$$
$$\text{c3: } 3\ x_1 + x_2 \leq 78$$
$$x_1 \text{ et } x_2 \text{ entiers positifs}$$

1. On considère tout d'abord le problème RP identique à P à l'exception de la dernière ligne (x_1 et x_2 entiers positifs) remplaçée par: $x_1, x_2 \geq 0$.
   Comment s'appelle cette technique ? Que va fournir la solution optimale de RP par rapport au problème P ?

2. La solution optimale de RP, obtenue par un solveur, est fournie ci-dessous. Donnez la précisément: la valeur économique optimale, la valeur des variables, les contraintes saturées et la marge restante sur les autres contraintes. Indiquez également quelles sont les variables de base pour la solution optimale.

   Optimal Solution :
   Problem Name : RP
   Problem Direction : MAX
   Objective function value : 439.2
   Number of iterations : 2

   Activities :

Num	Name		Level	Shadow Cost	Lower Obj	Objective	Upper Obj
1	x1	A	13.2	0.00	4.00	10.00	24.00
2	x2	A	38.4	0.00	3.33	8.00	20.00

   Constraints :

Num	Name		Slack	Shadow Price	Lower Lim	Limit	Upper Lim
1	C1	L	0.00	-2.80	26.00	90.00	103.50
2	C2	L	10.8	0.00	25.20	36.00	+INFINITY
3	C3	L	0.00	-2.40	60.00	28.00	270.00

3. Si le coefficient économique de la première variable x_1 devient 8 (à la place du 10 actuel), peut-on dire des choses sur l'évolution de la solution optimale de RP sans relancer la résolution d'un nouveau simplexe ?

4. Si le second terme de la première contrainte (c1) devient 100 (à la place du 90 actuel), peut-on dire des choses sur l'évolution de la solution optimale de RP sans relancer la résolution d'un nouveau simplexe ?

5. On veut maintenant résoudre le problème initial P à l'aide d'une méthode Branch and Bound et en branchant classiquement sur la première variable non entière. Pour ceci, vous pouvez vous appuyer sur une résolution graphique du problème.