Date : 11 décembre 2018
Nom : CAUMES
Prénoms : Clément
Numéro Carte D'étudiant :

18,95

Contrôle Continue d'Algorithmiques de Graphes.

Durée : 1h00. Tout document est autorisé SAUF LIVRES.

Exercice 1

2

Soit G un arbre de n sommets. Montrer que le nombre d'arêtes est $n-1$.

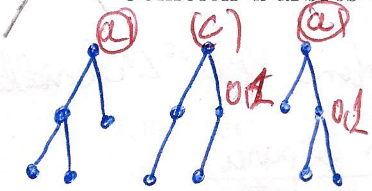
Un arbre à n sommets possède pour chaque sommet 2 fils.
Donc pour 1 arbre à 3 sommets (1 père + 2 fils) il y a 2 arêtes (n-1)
Pour un arbre à 7 sommets (1 père + 2 fils + 4 fils) il y a 6 arêtes (n-1).

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang n.
On cherche pour n+1. On ajoute 1 sommet en fils. Il est connecté donc on rajoute 1 arête, il y a donc n arêtes. → n+1 sommets
Donc ~~la propriété est vraie~~ → n arêtes
que le nombre d'arêtes est n-1 pour un arbre à n sommets

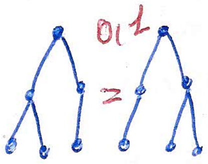
Exercice 2

1,2

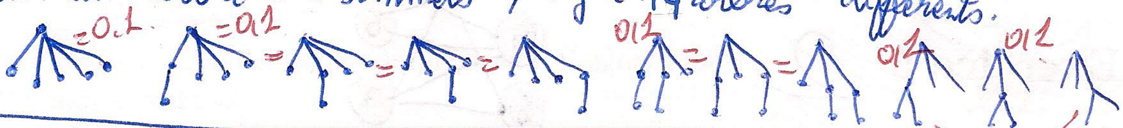
Combien d'arbres différents existe-t-il avec 5 sommets ? avec 6 sommets? avec 7 sommets ?



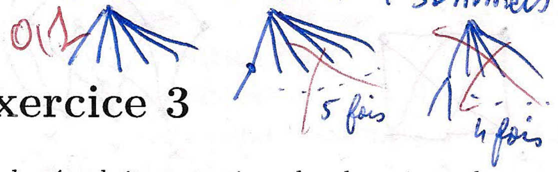
Pour un arbre à 5 sommets, il y a 6 arbres différents

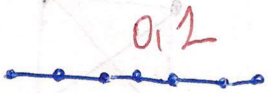


Pour un arbre à 6 sommets, il y a 14 arbres différents.



Pour un arbre à 7 sommets, il y a arbres differents.





1,75

Exercice 3

Un lycée doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et enfin 6 et 7.

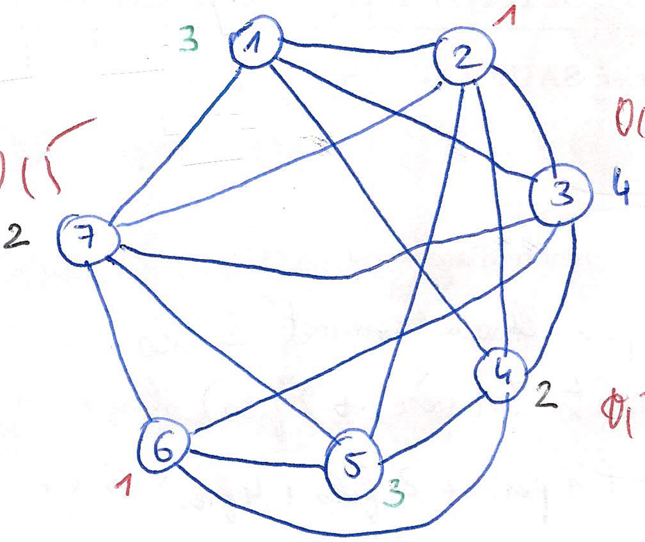
- Représenter le graphe G.

- Déterminer le nombre chromatique de ce graphe. On a une clique de 3 $\chi(G) \geq$ Clique(G)

  $\boxed{\chi(G)=4}$ 0,5

- Identifier le nombre de stables de G.
- Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale.

4 {3}



0,5

Il y a 3 stables : (1-5), (4,7), (2-6)

0,25 En effet (1) et (5) ne sont pas connectés entre eux puisque ils ont la même couleur. Idem pour (4),(7) et (2),(6).

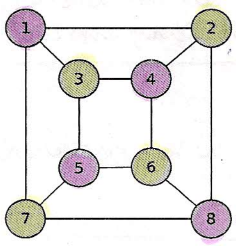
Donc les cours 1 et 5 peuvent se faire en même temps. Les cours 2 et 6 peuvent se faire en même temps. Les cours 4 et 7 peuvent se faire en même temps.

0,5

Exercice 4

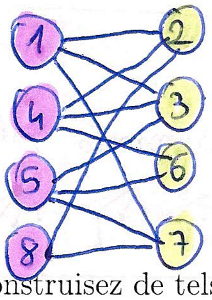
2

Montrer que le graphe ci-dessous est biparti.



Pour montrer qu'il est biparti il faut montrer qu'il est 2 coloriable.

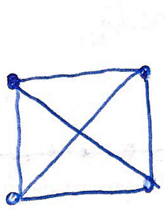
Donc d'après la coloration $\chi(G) = 2$ donc il est 2 coloriable et il peut se dessiner donc il est bien biparti



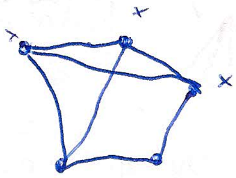
Exercice 5

2

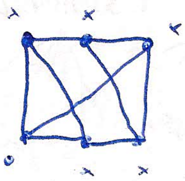
On s'intéresse aux graphes 3-réguliers. Construisez de tels graphes ayant 4, 5, 6, puis 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ? Prouvez-le !



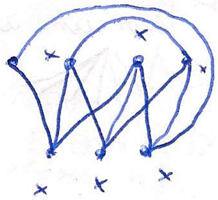
(4)



(5) impossible



(6)

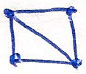


(7) impossible.

On en déduit que les graphes avec un nombre impair de sommets ne peuvent pas être 3-régulier. En effet $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$. Or il y a $2k+1$ sommets pour impair or $3 \times (2k+1) = 6k+3$ ce qui est impair. Or $2|E|$ est forcément pair donc par l'absurde PREUVE

Exercice 6 4

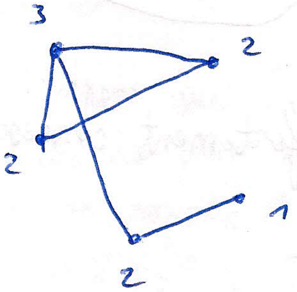
Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est graphique s'il existe un graphe simple dont les degrés des sommets correspondent à cette suite. Par exemple, un triangle correspond à la suite (2, 2, 2). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

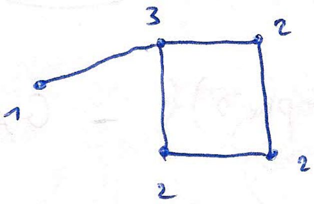
- ✓ (3, 3, 2, 1, 1) graphique → 
- × (3, 3, 1, 1) non graphique car il y a 2 sommets connectés à tous les autres. Donc il devrait y avoir au moins 2 sommets à 2 arêtes également
- ✓ (3, 3, 2, 2) graphique → 
- ✓ (4, 2, 1, 1, 1, 1) graphique → 
- × (5, 3, 2, 1, 1, 1) non graphique car Σd_i doit être pair et $\Sigma d_i = 13$. (cf TD2 exo 11)
- × (5, 4, 3, 1, 1, 1, 1) non graphique car il y a 2 sommets connectés connectés à presque tous les sommets. or il y a 4 sommets à 1 seule arête

0,5×6

Trouvez deux graphes correspondant à la suite (3, 2, 2, 2, 1).

0,5×2

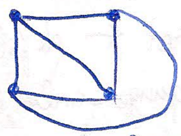




Exercice 7 2

Quels sont les graphes de diamètre 1 ? représenter un tel graphe de $n = 4$ sommets.

Les graphes de diametre 1 sont les graphes complets car à partir de n'importe quel sommet on accède à n'importe quel autre



graphe à 4 sommets

Exercice 8 1

Que fait l'algorithme 1? Quelle est la complexité de l'algorithme 1?

Algorithme1(sommet, valeur)

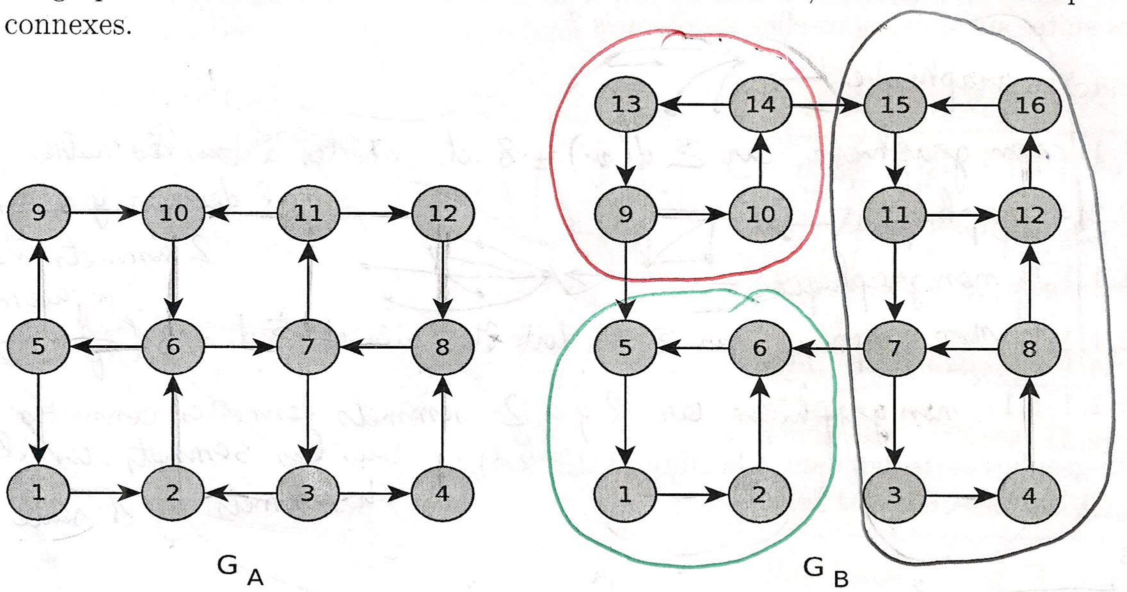
```
sommet.valeur = valeur
Pour tout voisin de sommet
    Si voisin.valeur == sommet.valeur
        retourne Faux
    Si voisin.valeur == null
        Algorithme1(sommet, (valeur+1)%2)
retourne Vrai
```

Cet algorithme détermine si un graphe est biparti ou non. Il renvoie vrai si c'est le cas et faux sinon.

Sa complexité est de $O(n)$ avec n le nombre de sommets du graphe.

Exercice 9 3

Proposer un algorithme qui détermine si un graphe est fortement connexe ou non.
les graphes ci-dessous sont-il fortement connexes ? Si non, donnez leurs composantes fortement connexes.

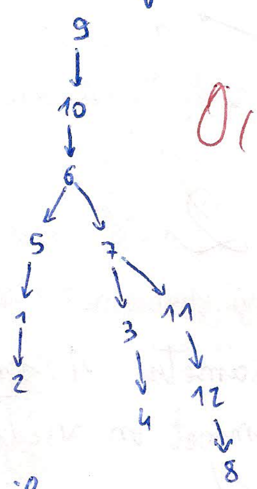



```
boolean teste_fortement_connexe (graphe G){
  bool teste_arbo = FAUX;
  bool teste_anti_arbo = FAUX;
  Marquage_arborescence et Marquage_anti_arbo
  non fait pour chaque sommet.
  2 files (File_arbo, File_anti_arbo);
  Enfiler (sommet i (aléatoire), File_arbo);
  Enfiler (Sommet i, File_anti_arbo);
  Tant que (File_arbo non vide){
    sommet ← defiler File_arbo
    marquage_arbo (sommet)
    Mettre successeurs sommets non marqués dans
      Marquage_arborescence;
  }
  Tant que (File_anti_arbo non vide){
    sommet ← defiler File_anti_arbo
    marquage_anti_arbo (sommet)
    Mettre predecesseurs sommets non marqués
    dans Marquage_anti_arborescence
  }
  si Marquage_arborescence pour chaque sommet
    teste_arbo = VRAi
  si Marquage_antiarbo pour chaque sommet
    teste_anti_arbo = VRAi
  retourne test_arbo & teste_anti_arbo;
```

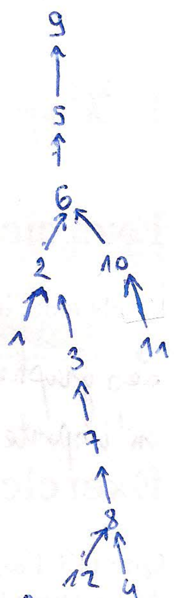
2.

– G_A est fortement connexe car

0,5



il y a une arborescence courante



il y a une anti arborescence courante

– G_B n'est pas fortement connexe. car il n'y a pas de chemin entre 1 et 16 par exemple.

0,5

(voici les composantes fortement connexes il y en a 3)