Compléments de Mathématiques Discrètes: Cours 4 .

Michaël Quisquater (Maître de Conférences, UVSQ)

Introduction à la théorie des probabilités sur un ensemble fini

Pourquoi une théorie des probabilités ?

Il arrive fréquemment en physique et en sciences technologiques (ex. théorie des réseaux) que l'on n'ait pas une connaissance parfaite d'un phénomène. Cependant, il se peut que l'on ait une connaissance partielle. La théorie des probabilités permet de modéliser cette situation intermédiaire. Cette théorie est particulièrement intéressante lorsqu'elle fait apparaître des ”paradoxes”, c'est-à-dire des résultats corrects mais inattendus dûs à des reflexes mentaux erronés.

Introduction

Exemple : tirage de cartes dans un jeu.

Hypothèse : jeu de 52 cartes (13 coeurs, 13 carreaux, 13 trèfles, 13 piques)

Observation : si toutes les cartes ont la même chance d'être tirées, chaque carte à une chance sur 52 d'être tirée.

Objectif : Développer une théorie qui permet de modéliser la notion de ”chance”.

$\rightarrow$ **Théorie des probabilités** : modélisation de l'incertain.

Notion de probabilité

Démarche : On considère un ensemble d'évènements possibles et on associe une "chance" d'arriver à chacun d'eux.

Exemples d'évènements :

- "être un roi rouge" $\rightarrow$ chance=$\frac{\# \text{ rois rouges}}{\# \text{ cartes}} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$
- "être un trèfle" $\rightarrow$ chance=$\frac{\# \text{ trèfles}}{\# \text{ cartes}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- "être un roi" $\rightarrow$ chance=$\frac{\# \text{ rois}}{\# \text{ cartes}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Questions :

- Est-ce qu'il y a un lien entre les "chances" de ces évènements ?
- Comment formaliser cette notion de chance ?

Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble

Une probabilité est une application qui établit un lien entre tout évènement (sous-ensemble d'un ensemble) et sa chance d'arriver.

Définition

Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties Ω. Une loi de probabilité sur Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ tq :

- $P(\Omega) = 1$
- *Si $(A_i)_{i \in I}$ (I ensemble fini) et $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$ disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) alors $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$*

Remarques :

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé espace probabilisé.
- Cette définition se généralise aux ensembles non finis mais cela sort du cadre du cours (cas utile dans le cas dénombrable).

Propriétés d'une probabilité

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé. Alors, pour tout* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A) = 1 - P(A^c)$ *où* A *est le complémentaire de* A $(= \Omega \setminus A)$.

Propriétés d'une probabilité : exemple

Exemple : $P(''\textit{piques}'' \cup ''\textit{rois}'')$?

- $P(''\textit{piques}'') = \frac{1}{4}$,
- $P(''\textit{rois}'') = \frac{1}{13}$,
- $P(''\textit{rois}'' \cap ''\textit{piques}'') = P(''\textit{rois de pique}'') = \frac{1}{52}$.

Donc, $P(''\textit{piques}'' \cup ''\textit{rois}'')$ (avoir un pique ou un roi) est

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{13+4-1}{52} = \frac{4}{13}.$$

Définition de probabilité conditionnelle

Parfois, on dispose d'une information préalable et on souhaite reconsidérer la probabilité qu'un évènement se produise sachant qu'un autre évènement s'est produit.

Définition de probabilité conditionnelle

Exemple : Considérons à présent un jeu de carte de 52 cartes et deux jokers (sans couleur).
La probabilité d'être un roi est

$$P(\text{ "être un roi" }) = 4/54 = 2/27\,.$$

La probabilité d'avoir un roi si la carte est rouge

$$\frac{\#\text{rois rouges}}{\#\text{cartes rouges}} = \frac{2}{26} = 1/13\,.$$

On aurait pu calculer cette probabilité en terme de probabilités

$$\frac{(\#\text{ rois rouges})/(\#\text{ cartes })}{(\#\text{ cartes rouges })/(\#\text{ cartes})} = \frac{P(\text{"être roi" et "être rouge"})}{P(\text{"être rouge"})}$$

$\Rightarrow$ Savoir que la carte était rouge nous a donné de l'information sur le fait d'avoir un roi.

Définition d'une probabilité conditionnelle

Formalisons la notion de probabilité conditionnelle.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Remarque : dans l'exemple précédent, A="être un roi" et B="être rouge".

Propriété d'une probabilité conditionnelle

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $P(A), P(B)$ non-nuls

$$P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A) .$$

Remarque : si on connaît $P(A \mid B)$ on peut calculer $P(B \mid A)$ et inversément.

Exemple : P("être roi" | "être rouge") · P("être rouge") $=$ P("être rouge" | "être roi") · P("être roi")
ou encore

$$\frac{1}{13} \cdot \frac{26}{54} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{54} .$$

Préliminaires : indépendance stochastique

Lorsque le jeu est composé de 52 cartes + deux jokers, on a :

$$P(\text{"être roi"}) = \frac{2}{27} \text{ et } P(\text{"être roi"} \mid \text{"être rouge"}) = \frac{1}{13}$$

Ces deux probabilités sont différentes.

Si le jeu possède uniquement les 52 cartes, on a :

$$P(\text{"être roi"}) = \frac{1}{13} \text{ et } P(\text{"être roi"} \mid \text{"être rouge"}) = \frac{1}{13}$$

Ces deux probabillités sont égales et donc le fait de savoir que la carte est rouge n'a pas changé la probabilité d'avoir un roi. Dans ce cas on dit que les évènements "être un roi" et "être rouge" sont stochastiquement indépendants.

Préliminaires : indépendance stochastique

On dit que l'évènement A est stochastiquement indépendant de l'évènement B si le fait de connaître B ne change rien sur l'information probabiliste que l'on a de l'évènement A.

Plus formellement, si $P(B) \neq 0$ on dit que l'évènement A est indépendant de B si et seulement si $P(A \mid B) = P(A)$. De même, si $P(A) \neq 0$ c'est équivalent à dire que $P(B \mid A) = P(B)$.

Définition : indépendance stochastique

Pour éviter ces questions de probabilités non-nulles, on préfère utiliser la définition ci-dessous.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé. Deux évènements* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *sont indépendants si et seulement si*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Formule des probabilités totales

Supposons que nous ayons deux jeux de cartes ; l'un contient les 52 cartes classiques (jeu A) et l'autre les 52 cartes+ 2 jokers (jeu B).

Supposons que l'on joue à pile ou face pour savoir dans quel jeu on tire et ensuite que l'on tire une carte au hasard dans le jeu considéré.

Question : Quelle est la probabilité d'avoir une carte rouge, i.e. P('' être rouge'') ?

Remarque : Dans ce cas Ω est constitué de 106 éléments (les 52 cartes du jeu A et les 54 cartes du jeu B)

Formule des probabilités totales (suite)

Notons que ”être rouge” est l’union des évènements

”être rouge et du jeu A” et ”être rouge et du jeu B”.

Ces deux évènements sont disjoints et donc :

$$P(\text{"être rouge"}) = P(\text{"être rouge"} \cap \text{"jeu A"}) + P(\text{"être rouge"} \cap \text{"jeu B"})$$

Par définition

$$P(\text{"être rouge"} \cap \text{"jeu A"}) = P(\text{"être rouge"} \mid \text{"jeu A"}) \cdot P(\text{"jeu A"})$$

De même,

$$P(\text{"être rouge"} \cap \text{"jeu B"}) = P(\text{"être rouge"} \mid \text{"jeu B"}) \cdot P(\text{"jeu B"})$$

Formule des probabilités totales (suite)

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(\text{"être rouge"}) &= P(\text{"être rouge"} \mid \text{"jeu A"}) \cdot P(\text{"jeu A"}) \\ &\quad + P(\text{"être rouge"} \mid \text{"jeu B"}) \cdot P(\text{"jeu B"}) \end{aligned}$$

Notons que

$$P(\text{"être rouge"} \mid \text{"jeu A"}) = 1/2\,.$$

Aussi,

$$P(\text{"être rouge"} \mid \text{"jeu B"}) = 26/54 = 13/27\,.$$

Finalement,

$$P(\text{"jeu A"}) = P(\text{"jeu B"}) = 1/2\,.$$

On en déduit : $P(\text{"être rouge"}) = 1/2 * 1/2 + 13/27 * 1/2$

Formule des probabilités totale

Théorème (Formule des probabilités totales)

Soit $(B_i)_{i\in I}$ une partition de Ω telle que $P(B_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$ alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) \,.$$

Remarque :

- une partition $(B_i)_{i\in I}$ de Ω est un ensemble d'ensembles B_i disjoints deux à deux et tel que l'union de ces ensembles est Ω.
- il est souvent plus facile de décomposer le problème en évaluant $P(A \mid B_i)$ que de tout de suite évaluer $P(A)$.

Formule de Bayes

Calcul de $P(\text{"jeu A"} \mid \text{"être rouge"})$?

On sait que $P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$

Donc,

$$P(\text{"jeu A"} \mid \text{"être rouge"})$$

peut être évalué par :

$$\frac{P(\text{"être rouge"} \mid \text{"jeu A"}) \cdot P(\text{"jeu A"})}{P(\text{"être rouge"})}$$

Or $P(\text{"être rouge"})$ a déjà été évalué par la formule des probabilités totales.

On a : $P(\text{"jeu A"} \mid \text{"être rouge"}) =$

$$(1/2 * 1/2)/(1/2 * 1/2 + 13/27 * 1/2) \,.$$

Formule de Bayes

Théorème (Formule de Bayes)

Soit $(B_i)_{i \in I}$ une partition de Ω telle que $P(B_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$ alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{i \in I} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)} .$$

Preuve : Par les probabilités conditionnelles,

$$P(B_i \mid A) \cdot P(A) = P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) .$$

Il suffit ensuite d'exprimer $P(A)$ au moyen de la formule des probabilités totales.

Conclusion

- Théorie des probabilités=mesurer des ensembles,
- Notion de probabilité conditionnelle,
- Indépendance stochastique,
- Formule probabilité totale et Bayes.