Rattrapage d'algorithmique de Graphes

M1 Informatique 2017–2018

Examen – Durée : 2h00

Durée 2h00.

Aucun livre ni appareil électronique autorisé.

Les réponses aux questions sont à donner **exclusivement** sur la **page de réponse** jointe à la fin de ce sujet.

<u>IMPORTANT LIRE CES INDICATIONS AVANT DE REPONDRE :</u> à chaque question est associée un nombre X de points par réponses (indiqué en gras dans l'intitulé de la question). Les questions sont de deux types

— **Les questions à choix unique :** une seule réponse est valide, donc une seule case est à cocher. Un bon choix de case apporte X points, un mauvais choix enlève X points ; aucune case cochée n'ajoute ni n'enlève aucun point.

— **Les questions à choix multiples :** une ou plusieurs réponses peuvent être correctes. La bonne réponse à chaque propriété (c'est à dire case cochée si la propriété est VRAIE, case non cochée si la propriété est FAUSSE) ramène X points, chaque mauvaise réponse retire X points (sur la note globale de l'examen). La note minimum (négative) pouvant attribuée à chacune de ces questions est $-(2 \times X)$.

Question 1 ♣

(**Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété**). Indiquer parmi les propriétés ci-dessous celles qui sont vraies concernant la forte-connexité des graphes **orientés** :

[A] Tout graphe orienté contenant un circuit eulérien est fortement-connexe.

[B] Un graphe est fortement connexe ne contient pas forcément une arborescence couvrante et une anti-arborescence couvrante.

[C] Tout graphe contenant une anti-arborescence couvrante dont la racine est de degré sortant non nul est fortement connexe.

[D] Tout graphe fortement-connexe contient au moins une arborescence couvrante.

[E] Si un graphe est fortement connexe alors il existe un unique sommet racine d'une arborescence couvrante et d'une anti-arborescence couvrante.

[F] Tout DAG contenant un cycle hamiltonien est fortement connexe.

Question 2 ♣

(**Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété**). Indiquer parmi les propriétés ci-dessous celles qui sont vraies concernant l'existence de cycles hamiltoniens ou eulériens des graphes **non-orientés connexes** :

[A] Tout graphe hamiltonien est eulérien.

[B] Tout graphe dont l'ensemble des arêtes peut être couvert par un nombre pair de cycles hamiltoniens deux à deux disjoints est eulérien.

[C] Tout graphe dont l'ensemble des arêtes peut être couvert par un ensemble de cycles hamiltoniens deux à deux disjoints est eulérien.

[D] Tout graphe complet est eulérien.

[E] Tout graphe dont l'ensemble des arêtes peut être couvert par un ensemble de cycles deux à deux disjoints est hamiltonien.

[F] Tout graphe hamiltonien contenant deux arbres couvrants deux à deux arête-disjoints est eulérien.

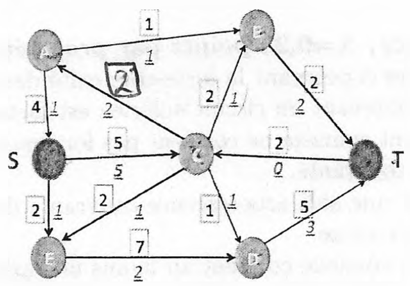
Question 3
*(***Question à choix multiples ; X=0,5 points par propriété***).* Indiquer les propriétés toujours vraies, quelque soit $G = (V, A, cap)$ un réseau de flots, avec s la source et t le puits :

- [A] S'il existe plusieurs coupes minimales entre s et t dans G, alors il existe plusieurs valeurs de flot maximum entre s et t.
- [B] Chaque coupe maximale entre s et t dans G est saturée par tout flot maximum entre s et t.
- [C] L'algorithme de Ford et Fulkerson ne fonctionne que si G est fortement connexe.
- [D] Chaque coupe minimale entre s et t dans G est saturée par tout flot maximum entre s et t.
- [E] S'il existe deux coupes minimales entre s et t dans G, elles sont de valeurs différentes.

Question 4
*(***Question à choix unique ; X=0,5 points***).* Quelle est le nombre minimum et maximum d'arêtes d'un graphe non-orienté de n sommets contenant deux arbres couvrant arête-disjoints :

- [A] $2n-2$ et $n(n-1)/2-(2n-2)$
- [B] $2n-2$ et $2n$
- [C] $2n-2$ et $n(n-1)/2$
- [D] $2n-1$ et $n(n-1)/2$

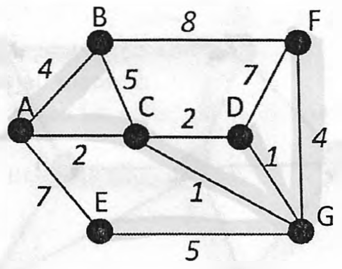
Question 5 ♣
*(***Question à choix multiples ; X=0,5 points par propriété***).* Considérons le réseau de flot suivant, dans lequel les capacités des liens sont encadrées et les valeurs de flot soulignées.



Quelles ont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes :

- [A] $sEDCt$ est une chaine alternée augmentante.
- [B] $sACEDt$ est une chaine alternée augmentante.
- [C] La valeur du flot maximum est 6.
- [D] Le flot indiqué est maximum.
- [E] $sECBt$ est une chaine alternée augmentante.
- [F] Le réseau n'admet pas de chaine alternée augmentante.
- [G] $\{s, A, C, D, E\}$ est une coupe minimum.
- [H] La valeur du flot indiqué est 5.
- [I] La valeur du flot maximum est 7.

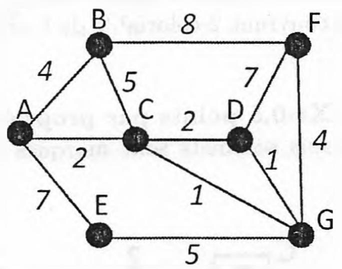
Question 6
*(***Question à choix unique ; X=1 point***)*. Considérons le graphe non-orienté pondéré suivant sur lequel on exécute l'algorithme de Kruskall.



Combien d'arêtes sont possibles lors du 3^{eme} choix d'arête lors d'une exécution possible de l'algorithme :

- [A] 3
- [B] Cela dépend des 2 premiers choix.
- [C] 2

Question 7
*(***Question à choix unique ; X=0,5 points***)*.



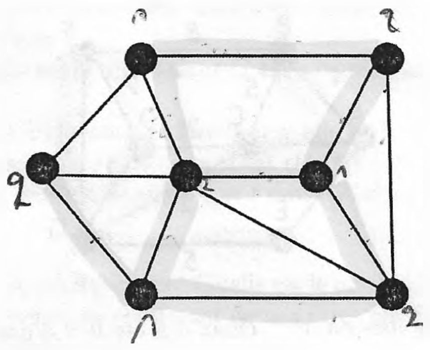
Dans ce graphe, quel est le poids de l'arbre calculé par l'algorithme :

- [A] 17
- [B] Cela dépend des choix faits lors des différentes étapes.
- [C] 16

Question 8 ♣
*(***Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété***)*. On considère un graphe G connexe, 3-régulier contenant un cycle hamiltonien. Dans un tel graphe, on considère l'algorithme suivant. Tant que le graphe est au moins 1-connexe et qu'il existe une arête entre deux sommets de degré 3, on supprime cette arête entre ces sommets. On considère le graphe G' couvrant de G obtenu à la fin de l'exécution de cet algorithme.
Quelles sont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes.

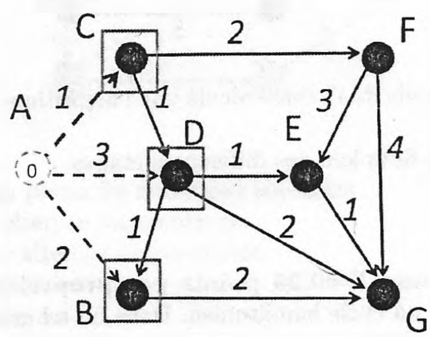
- [A] Dans certains cas, G' peut être un arbre couvrant de G.
- [B] Tout sommet de G' a au moins un voisin.
- [C] G' est toujours au moins 2-connexe.
- [D] G' est toujours une chaine hamiltonienne ou un cycle hamiltonien.
- [E] G' n'est pas toujours connexe.

Question 9 ♣
*(***Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété***).* Considérons le graphe non-orienté suivant :



Quelles sont les propriétés vraies concernant ce graphe :
- [A] Il contient une clique maximale de taille maximale 3.
- [B] Il est 3-connexe.
- [C] Il est 2-coloriable.
- [D] Il est fortement connexe.
- [E] Il est 2-connexe si on supprime n'importe quelle arête entre deux sommets.
- [F] Il contient un sous graphe couvrant 2-coloriable de 8 arêtes.

Question 10
*(***Question à choix multiples ; X=0,5 points par propriété***).* Considérons le graphe orienté pondéré suivant dans lequel certains sommets sont marqués (encadrés) ainsi que certains arcs (pointillés).



Quelles ont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes :
- [A] Il existe un plus court chemin de A à G qui ne peut être identifié par aucune exécution de l'algorithme de Dijkstra à partir de A.
- [B] Il n'existe qu'un seul troisième choix de marquage de sommet et d'arc possible, pour toute exécution de l'algorithme de Dijkstra à partir de A.
- [C] La troisième étape de marquage de sommet et d'arc par l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A ne peut pas correspondre au marquage indiqué.
- [D] Quelle que soit une exécution correcte de l'algorithme de Dijkstra à partir de A, au plus deux plus courts chemin de A à G peuvent être identifiés.
- [E] La seconde étape de marquage de sommet et d'arc par l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A ne peut pas correspondre au marquage indiqué.
- [F] Le marquage indiqué correspond aux trois premières étapes de marquage de sommet et d'arcs d'une exécution de l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A.

Question 11 ♣

(**Question à choix multiples ; X=0,5 points par propriété**). Considérons un graphe connexe $G = (V, E)$ contenant deux arbres couvrants arête-disjoints, dont l'un est une chaine hamiltonienne. Quelles ont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes :

- [A] Si un graphe contient $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2$ arêtes, avec $n \geq 4$ son nombre de sommets, alors il contient deux tels arbres couvrants.
- [B] Le degré minimum de G est au moins 2.
- [C] La suppression dans E de toutes les arêtes de la chaine hamiltonienne peut dans certains cas déconnecter le graphe.
- [D] Le graphe G peut contenir un cycle hamiltonien.