Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines 2018-2019
Master 1 Informatique

Algorithmique de Graphes – TD

Version du 13 septembre 2018

Dominique Barth – Dominique.Barth@uvsq.fr
Franck Quessette – Franck.Quessette@uvsq.fr
Sandrine Vial – Sandrine.Vial@uvsq.fr

Table des matières

1 TD 1 – Combinatoire, Énumération, Modélisation

Exercice 1 *Nombre d'applications*

Le but de ces questions est de dénombrer correctement les applications d'un ensemble vers un autre.

— Quel est le nombre d'applications possibles différentes d'un ensemble fini X dans un ensemble fini Y ?

On considère un ensemble de comédiens et d'accessoires. Il y a sept comédiens : Anna, Boris, Charles, Daphnée, Estelle, Franck et Gaëlle et des accessoires : Chapeau, Lunettes, Foulard et Montre. De combien de manières différentes peut s'accessoiriser la troupe dans les cas suivants :

— Il y a autant d'accessoires que l'on veut et chaque comédien peut choisir de prendre ou non un accessoire.

— Il n'existe qu'un exemplaire de chaque accessoire.

— Les quatre accessoires doivent être tous utilisés ; un même comédien peut en porter un nombre quelconque (aucun, un seul, ou plusieurs).

— Il y a maintenant N comédiens et N accessoires(tous différents) et chaque comédien doit avoir exactement un accessoire.

— Comme précédemment mais il y a un nombre quelconque de comédiens et d'accessoires.

Exercice 2 *Coefficients binomiaux*

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de choix de k éléments parmi n ; autrement dit, c'est le nombre de sous-ensembles à k éléments de $\{1, \dots, n\}$.

1. Sans calcul, montrer que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ – ce qui explique le nom de *coefficient binomial*.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Par un argument bijectif, montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (règle de Pascal)
5. Calculer la valeur de $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n \leq 7$.
6. En déduire un algorithme pour calculer $\binom{n}{k}$ avec uniquement des additions (triangle de Pascal).
7. Montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (pour $0 \leq k \leq n$).

Exercice 3 *Loto*

On dispose n boules dans une urne, numérotées de 1 à n. Vous pouvez tirer une boule au hasard et vous gagnez alors la valeur inscrite sur la boule.

1. Quel est votre gain moyen ?
2. Que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i$?

   Indication : faire comme le petit Gauss à 9 ans et placer en ligne les entiers de 1 à n puis en dessous placer les entiers de n à 1.

Exercice 4 *Nombre de cellules d'un arrangement de droites en position générale.*

On dit qu'un ensemble de droites du plan est en position générale si :

— deux droites quelconques s'intersectent en un point et un seul point ;

— trois droites quelconques ont une intersection vide.

Combien n droites du plan en position générale délimitent-elles de regions du plan ?

Exercice 5 *Plutôt deux fois qu'une.*

1. Considérons une classe de n étudiants. Supposons qu'à la fin de chaque cours, 3 étudiants restent pour laver l'amphi. À la fin du cours ils réalisent que chaque paire d'étudiant est restée exactement une fois. Combien de jours a duré le cours ?
2. On veut calculer le nombre de carrés qu'on peut dessiner dans une grille n sur n (en tenant en compte de leur position). Donner une expression pour ce nombre.
3. Comptez le nombre de triplets (x, y, z) tel que z est strictement supérieur à x et y.
4. Comptez de deux manières différentes le nombre de triplets (x, y, z) à valeur dans $[1, \ldots, n]$. En déduire une expression plus simple pour la question précédente.

   Indication : faites des cas selon les positions de z par rapport à x et y. Ne pas hésiter à faire beaucoup de cas pour simplifier les calculs.

Exercice 6 *Principe des tiroirs.*

Si on range n pigeons dans m tiroirs avec $m < n$, un tiroir contient plusieurs pigeons.

1. Sachant qu'une tête normale a au plus 1.000.000 cheveux, montrez qu'il y a au moins deux personnes à Paris qui ont le même nombre de cheveux
2. Montrer que dans un graphe, il existe deux sommets qui ont le même degré.
3. Montrer la généralisation suivante du principe des tiroirs : si un ensemble de $mr+1$ éléments est partitionné en m ensembles, un ensemble contient au moins $r+1$ éléments.

2 TD 2 – Degrés

Tous les graphes considérés dans cette section sont non orientés et simples, c'est-à-dire sans multi-arêtes et sans boucle.

Exercice 7

Montrer que dans une région comportant au moins deux habitants, il existe toujours deux personnes connaissant le même nombre d'habitants de cette région.

Exercice 8

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On note $d(v)$ le degré d'un sommet $v \in V$. Montrer que :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Exercice 9

On définit le degré moyen d'un graphe $G = (V, E)$ par $\bar{d} = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$. Dans un graphe non vide (c'est-à-dire comportant au moins un sommet), montrer qu'il existe un sommet de degré au plus $\bar{d}$. Existe-t-il un toujours un sommet de degré au moins $\bar{d}$? Et un sommet de degré $\bar{d}$ exactement ?

Exercice 10 *Ordre des graphes k-réguliers.*

Un graphe est k-régulier si tous ses sommets sont de degré k.

1. Dessiner un graphe 2-régulier à 9 sommets.
2. Dessiner un autre graphe 2-régulier à 9 sommets (non isomorphe au premier).
3. Dessiner un graphe 3-régulier à 8 sommets

La suite de cet exercice consiste à déterminer, pour un entier k donné, tous les entiers n pour lesquels il existe un graphe k-régulier à n sommets.

4. Traiter successivement les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.

On considère maintenant le cas général : soit k un entier quelconque (fixé dans la suite de l'exercice)

5. Montrer que si il existe un graphe k-régulier à n sommets, alors $k < n$.
6. Donner une condition nécessaire sur la parité de n pour qu'il existe un graphe k-régulier à n sommets (on pourra utiliser l'exercice 8).
7. Pour tout entier n vérifiant les deux conditions obtenues aux questions précédentes, construire un graphe k-régulier à n sommets. Conclure.

Exercice 11 *Suites des degrés des sommets d'un graphe.*

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est dite *graphique* si il existe un graphe à n sommets $\{v_1, \ldots, v_n\}$ avec v_i de degré d_i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Donner l'exemple de deux graphes non isomorphes ayant la même suite de degrés. (Ceci montre que cette suite ne caractérise pas le graphe.)
2. Les suites $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$ et $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ sont-elles graphiques ?
3. Montrer que si la suite $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est graphique, alors $\sum_{i=1}^{n} d_i$ est pair.

4. Le but de cette question est de montrer que si la suite $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est graphique, alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}.$$

Soit G un graphe de suite de degrés $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sur les sommets $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ avec $d(v_i) = d_i$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On pose $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$, $C = \{v_i \mid d_i < k\} \setminus A$ et $B = V \setminus (A \cup C)$. Soit $E_{A,A}$ l'ensemble des arêtes de G reliant deux sommets de A entre eux, $E_{A,B}$ les arêtes de G entre A et B, et $E_{A,C}$ les arêtes de G entre A et C.

   (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{k} d_i = 2|E_{A,A}| + |E_{A,B}| + |E_{A,C}|$.
   (b) Montrer que $2|E_{A,A}| \leq k(k-1)$.
   (c) Montrer que $|E_{A,B}| \leq k|B|$.
   (d) Montrer $|E_{A,C}| \leq \sum_{v \in C} d(v)$.
   (e) Conclure.

   Les deux conditions précédentes réunies fournissent une caractérisation des suites graphiques, ce que nous ne montrerons pas. Nous allons à la place établir une caractérisation récursive des suites graphiques.

   Pour une suite décroissante (au sens large) d'entiers $d = (d_1, \ldots, d_n)$ non vide, on définit

$$d' = \text{tri}\left(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n\right).$$

5. Expliquer d'une phrase comment d' est obtenue à partir de d.
6. Montrer que si d est non vide, d est graphique si et seulement si d' est graphique.
7. En déduire un algorithme qui, étant donnée une suite d donnée en entrée, décide si elle est graphique et construit un graphe de suite de degrés d quand c'est possible.

3 TD 3 – Chemin, distance, diamètre

Tous les graphes considérés dans cette section sont simples et non orientés. Les chemins et cycles considérés sont, sauf indication contraire, élémentaires : ils ne passent pas plusieurs fois par le même sommet.

Exercice 12 *Degré minimum, longueur des cycles et chemins.*

On rappelle que le degré minimum du graphe G est défini par $\delta(G) := \min_{v \in V} d(v)$.

1. Montrer que G contient une chaîne de longueur $\delta(G)$.
2. Si $\delta(G) \geq 2$, montrer que G contient un cycle de longueur au moins $\delta(G) + 1$.

Exercice 13 *Rayon, diamètre.*

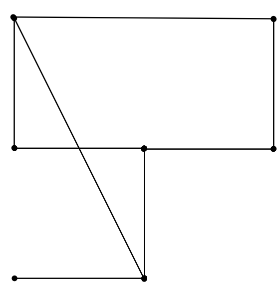
On rappelle que l'excentricité d'un sommet u est défini par $e(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$ où $d(u, v)$ est la distance de u à v (c'est-à-dire la longueur minimale d'un chemin de u à v). Le rayon du graphe G est défini par $r(G) = \min_{v \in V} e(v)$. Le diamètre de G est défini par $d(G) = \max_{u,v \in V} d(u, v)$.

1. Calculer le nombre maximum de sommets d'un graphe de degré au plus Δ et de rayon au plus k.
2. Montrer que $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$.
3. Exhiber des graphes arbitrairement grands vérifiant $d(G) = r(G)$ et $d(G) = 2r(G)$.

Exercice 14 *Centre*

On veut trouver un serveur dans un réseau qui soit le plus proche possible de tous les autres noeuds du réseau. Cette position s'appelle le centre dans un graphe (le sommet qui minimise le maximum des distances aux autres sommets). C'est le sommet d'exentricité minimale.

1. La distance entre deux sommets est le plus court chemin entre ces deux sommets. Proposer un algorithme qui trouve le plus court chemin d'un sommet à un autre. Il peut être plus facile de calculer simultanément le plus court chemin d'un sommet à tous les autres.
2. Donner le centre et les deux sommets les plus distants du graphe suivant.



3. Donner le centre d'une grille de taille n fois n (justifier).
4. En utilisant l'algorithme de plus court chemin, donner un algorithme qui calcule le centre de n'importe quel graphe.

Exercice 15 *Intersection des chemins de longueur maximale dans un graphe.*

1. Dans un graphe connexe, montrer que deux chemins de longueur maximale ont un sommet en commun.
2. Est-ce vrai dans un graphe non connexe ?

Exercice 16 *Tours de Hanoï.*

On dispose de trois piquets A,B,C, ainsi que de n disques de diamètres distincts. Une position est légale si tous les disques sont sur les piquets, et si aucun des disques ne repose sur un disque de diamètre inférieur. Un coup consiste à déplacer le disque se trouvant au sommet d'un piquet pour le placer au sommet d'un autre (la position obtenue doit être légale). On définit le graphe simple non orienté $G_n = (V_n, E_n)$ associé à ce jeu de la manière suivante :

— V_n est l'ensemble des positions légales ;

— $[u, v] \in E_n$ si on peut passer de u à v en un coup.

Enfin, on définit deux positions particulières : la position *initiale* où tous les disques sont sur A, et la position *finale* où tous les disques sont sur B. On note d_n le nombre de coups nécessaires pour atteindre la position finale à partir de la position initiale ($d_n = +\infty$ si c'est impossible).

1. On commence par regarder le cas $n = 2$.
   — Dessiner G_2.
   — Calculer la distance de chaque position à la position initiale. Combien de coups sont nécessaires pour passer de la position initiale à la position finale dans G_2 ?
   — Choisir un sommet correspondant à une position où les deux disques ne sont pas sur le même piquet. Calculer la distance de cette position à chacune des autres.
   — Par symétrie, en déduire le diamètre de G_2. Comparer à d_2.

   On s'intéresse maintenant au cas général du jeu à n disques. Pour chacune des questions, on commencera par reformuler la question en utilisant la terminologie des graphes.
2. Calculer le nombre de positions légales.
3. Quels sont les nombres minimaux et maximaux de coups possibles pour une position ?
4. Montrer qu'une suite de coups permet de passer de n'importe quelle position à n'importe quelle autre.
5. Combien de coups sont nécessaires pour passer de la position finale à la position initiale ? D'autres couples de positions réalisent-elles cette distance ?
6. Donner un algorithme qui résoud les tours de Hanoï. Quel est sa complexité ?

4 TD 4 – Connexité

Exercice 17

Calculer $\lambda(G)$ (cf. definition 18) pour les graphes non orientés suivants :

— Un arbre ;

— Chaîne de longueur $n \geq 1$;

— Cycle de longueur $n \geq 3$;

— Graphe complet à $n \geq 2$ sommets ;

— Graphe complet biparti $K_{\ell,m}$ avec $\ell \geq 1$ et $m \geq 1$.

Exercice 18

Exhiber un graphe non orienté 1-connexe sans sommet de degré 1. Sans sommet de degré k ?

Exercice 19 *Forte connexité.*

1. Montrer que si un graphe orienté G est fortement connexe, alors chaque arc de G appartient à un circuit.
2. Montrer qu'un graphe G est fortement connexe si et seulement si chaque sommet de G est la racine d'une arborescence et d'une anti-arborescence de G.
3. Un graphe orienté G est dit *fortement cyclique* si pour chaque paire de sommets x, y de G, il y a une séquence de circuits $C_1, \ldots, C_k$ tels que x est dans C_1, y est dans C_k, et C_i et C_{i+1} ont au moins un sommet commun. Montrer que G est fortement connexe si et seulement si G est fortement cyclique.
4. Proposer un algorithme pour décider si un graphe est fortement connexe et un autre pour trouver un cycle.

Exercice 20

Soit G un graphe non orienté connexe et a une arête de G. Montrer que $\lambda(G) - 1 \leq \lambda(G - a) \leq \lambda(G)$. Ceci est-il vrai dans le cas orienté ?

Exercice 21

Soit G un graphe orienté k-fortement connexe avec $k \geq 2$. Soit G' un graphe obtenu en ajoutant un nouveau sommet x à G ainsi que les arcs suivants :

— k arcs sortants de x vers k sommets distincts de G ;

— k arcs entrants en x à partir de k sommets distincts de G.

Montrer que G' est k-fortement connexe.

Exercice 22

Soit $n \geq 2$. Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe non orienté G à n sommets vérifiant $\lambda(G) = 1$?

Exercice 23

Montrer que si un graphe non orienté G contient deux arbres couvrants arête-disjoints, alors $\lambda(G) \geq 2$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 24

Étant donné deux entiers $1 < k < n$, on note $m(k, n)$ le nombre minimum d'arêtes d'un graphe non orienté k-connexe à n sommets.

1. Montrer que $m(k,n) \geq kn/2$.
2. On suppose dans cette question que k et n sont pairs. On définit le graphe $G_{k,n}$ sur les sommets $\{0,\ldots,n-1\}$ par : $[i,j] \in E$ si et seulement si $i-j \in \{-k/2,\ldots,k/2\} \setminus \{0\}$ (l'addition est prise modulo n). Montrer que $G_{k,n}$ est k-connexe. En déduire la valeur de $m(k,n)$ pour k et n pairs (vérifiant $1 < k < n$).
3. Adapter la construction de la question précédente aux couples d'entiers quelconques vérifiant $1 < k < n$. En déduire la valeur de $m(k,n)$ pour tous ces couples d'entiers.
4. Montrer que $\lambda(G_{k,n}) = k$.
5. Dessiner deux graphes 5-connexe à 9 sommets non isomorphes.

5 TD 5 – Algorithmes : Parcours, Arbres couvrants, Plus courts chemins et Flots

Exercice 25
Une entreprise d'informatique souhaite lancer la construction d'un nouvel ordinateur. La conception d'un tel ordinateur implique son passage successif sur différentes machines $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$, avec un passage unique sur chaque machine.

Afin de planifier cette construction, on considère un graphe orienté G dans lequel :

— les sommets sont les machines,

— un arc (m, m') dans G signifie que l'ordinateur doit impérativement être traité par la machine m avant d'être traité par la machine m'.

1. Quelle propriété de G indiquerait que la construction est logiquement impossible ? Concevez un algorithme, utilisant un parcours en largeur, qui dit si cette propriété est ou non vérifiée pour G.
2. On considère à présent que la construction est possible. On désire indiquer un ordre de passge de l'ordinateur sur les machines. Pour ce faire, une machine m est numérotée i si elle est la i^{eme} machine utilisée. Quelle propriété doit vérifier une telle numérotation des sommets de G ? Concevez un algorithme, utilisant un parcours en profondeur, qui donne une numérotation possible des sommets de G. Pourquoi peut-on parler ici de “Tri topologique” ?

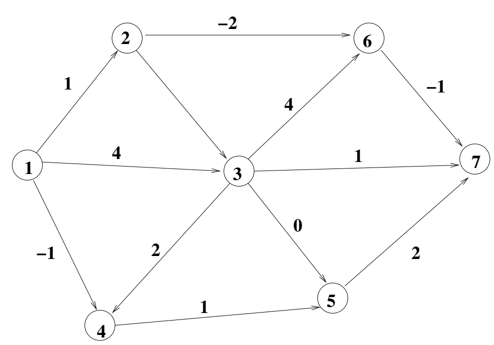
Exercice 26 *Arbres de recouvrements minimum*
Examiner l'arbre T obtenu dans la construction suivante et dites si c'est un arbre de recouvrement minimum de G ; si oui, expliquer pourquoi, sinon construire un contre-exemple.

Soit $G = (V, E, W)$, un graphe non orienté connexe valué. Initialement T est vide. Soit s un sommet quelconque. On choisit une arête v incidente à s, de coût minimum qu'on ajoute à T. Soit x l'autre extrémité de l'arête. On recommence avec ce sommet x : on cherche une arête incidente à x, de coût minimum qui n'est pas dans T et on l'ajoute à T, et ainsi de suite. On s'arrête lorsque T a $n - 1$ arêtes.

Exercice 27 *Calcul des plus longs chemins*
Cet exercice consiste à adapter l'algorithme de Bellman-Ford pour calculer les plus longs chemins dans un graphe orienté sans circuit.

Les données du problème sont $G = (S, A, V)$, un graphe orienté valué sans circuit possédant un sommet source $s \in S$. Nous notons $\Lambda(x)$ la longueur d'un plus long chemin d'origine s et d'extrémité x.

1. Montrer qu'il existe un plus long chemin de s à x.
2. Adapter l'algorithme de Bellman pour calculer les plus longs chemins d'origine s.
3. Appliquer l'algorithme au graphe suivant.



4. Montrer que cet algorithme calcule les plus longs chemins.

Exercice 28 *Diamètre*
Le **diamètre** d'un arbre $T = (S, A)$ est donné par :

$$\max_{u,v \in S} \delta(u, v)$$

autrement dit, le diamètre est la plus grande de toutes les distances des plus courts chemins dans l'arbre. Donner un algorithme efficace permettant de calculer le diamètre d'un arbre, et analyser son temps d'exécution.

6 TD 6 – Coloration

Exercice 29 *Exemples introductifs.*

1. Quel est le nombre chromatique de la chaine à n sommets P_n ?
2. Quel est le nombre chromatique du graphe complet K_n ?
3. Quel est le nombre chromatique du cycle C_n ?

Exercice 30 *Graphes bipartis.*

1. Rappeler ce qu'est un graphe biparti. Donner un exemple.
2. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il est 2-coloriable ($\chi(G) \leq 2$).
3. Montrer qu'un graphe est 2-coloriable si et seulement si il ne possède pas de cycles de taille impaire.
4. Donner un algorithme efficace pour décider si un graphe est biparti (et calculer une partition des sommets témoignant de la bipartition dans le cas où la réponse est positive).

Exercice 31 *Nombre chromatique et nombre d'arêtes.*

Montrer qu'un graphe simple non orienté G à m arêtes vérifie

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Exercice 32 *Coloration effective*

Donner un algorithme qui donne une coloration propre, mais pas nécessairement minimale, d'un graphe. Quelle est sa complexité ?

Exercice 33 *Une propriété des colorations optimales*

Montrer que dans une coloration optimale d'un graphe G (c'est-à-dire une coloration avec $\chi(G)$ couleurs), il existe un sommet de chaque couleur qui "voit" toutes les autres couleurs.

Exercice 34 *Graphes k-chromatiques sans triangle*

Le but de cet exercice est de construire des graphes sans clique de taille 3 (sans triangle) de nombre chromatique arbitrairement grand.

Étant donné un graphe non orienté à $n \geq 1$ sommets $G = (\{u_1, \ldots, u_n\}, E)$, on définit le graphe à $2n+1$ sommets

$$G' = (\{u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_n, v\}, E \cup \{[u'_i, u_j] \mid [u_i, u_j] \in E\} \cup \{[u'_i, v] \mid 1 \leq i \leq n\}).$$

1. Si G est sans triangle, montrer que G' est sans triangle.
2. Montrer que $\chi(G') = \chi(G) + 1$. *Indication :* utiliser l'exercice 33.
3. En déduire que pour tout $k \geq 1$, il existe un graphe sans triangle vérifiant $\chi(G) = k$.

Exercice 35 *Nombre chromatique de la somme cartésienne de deux graphes.*

La *somme cartésienne* de deux graphes non orientés $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ est le graphe $G \square H = (V, E)$ défini par :

— $V = V_G \times V_H$;

— $[(u, x), (v, y)] \in E$ si et seulement si $u = v$ et $[x, y] \in E_H$, ou $[u, v] \in E_G$ et $x = y$.

1. Dessiner la somme cartésienne de deux graphes G et H de votre choix.
2. On suppose que G et H sont deux graphes non vides. Montrer que

$$\max(\chi(G), \chi(H)) \leq \chi(G \square H) \leqslant \chi(G) \cdot \chi(H).$$

3. Montrer que si G est une chaîne à au moins deux sommets et H non vide, alors

$$\chi(G \square H) = \max(2, \chi(H)).$$

4. Généraliser ce dernier résultat au cas où G est un graphe biparti quelconque.
5. Cas général : montrer que si G et H sont deux graphes non vides, $\chi(G \square H) = \max(\chi(G), \chi(H))$.

7 TD 7 – Couplages

Exercice 36 *Exemples introductifs*

1. Montrer que si $G = (V, E)$ contient un couplage parfait, alors $|V|$ est pair.
2. Déterminer les entiers n tels que P_n (chaîne à $n+1$ sommets) contient un couplage parfait.
3. Donner le nombre minimum d'arêtes d'un graphe à $2p$ sommets contenant un couplage parfait.
4. Montrer que si un graphe ayant un nombre pair de sommets contient un cycle hamiltonien (un cycle passant exactement une fois par chaque sommet) alors il contient deux couplages parfaits disjoints. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 37 *Couplages dans les arbres binaires, aspects algorithmiques.*

On considère dans cet exercice des arbres binaires enracinés planaires. Enraciné signifie qu'un sommet unique est *marqué*, c'est la racine. Planaire signifie qu'on distingue le fils gauche et le fils droit. Les arbres considérés peuvent avoir des noeuds possédant un seul fils (contrairement à d'autres types d'arbres binaires où chaque noeud possède 0 ou 2 fils).

1. Donner deux exemples d'arbres binaires à 10 sommets et de hauteur 3, l'un contenant un couplage parfait, et l'autre non.

   Dans les questions suivantes, on s'intéresse aux aspects algorithmiques.
2. Donner une définition récursive des arbres binaires. En déduire une structure de données que vous utiliserez dans la suite du problème.
3. Écrire un algorithme récursif décidant en temps linéaire si un arbre binaire fourni en entrée contient un couplage parfait.

Exercice 38 *Stratégie*

Vous engagez un combat de vos unités contre celles de l'adversaire dans un jeu de stratégie. On représente la situation par un graphe G avec deux ensembles disjoints de sommets V_1 et V_2 qui représentent respectivement vos unités et les siennes. Une arête entre un sommet u de V_1 et v de V_2 est étiquetée par un nombre entier qui correspond aux dégâts qu'inflige l'unité u à v. Bien sûr l'unité u n'inflige pas nécessairement les mêmes dégâts aux unités v et w. On veut donc choisir pour chacune des unités de V_1, l'unité de V_2 qu'elle va combattre afin de maximiser la somme des dégâts.

1. Quelle est la nature du graphe décrit ?
2. Donner un exemple avec $|V_1| = |V2| = 4$.
3. Soit E un ensemble d'arêtes qui est un couplage de G, c'est à dire que chaque sommet de G est incident à au plus une arête. Donner un ensemble E qui est un couplage dans votre exemple.
4. Soit C un cycle alternant, c'est à dire que ses arêtes sont alternativement dans E et hors de E. On note $C \triangle E$ l'ensemble des arêtes qui sont dans E ou dans C mais pas dans les deux.
5. Donner un cycle alternant C dans votre exemple et vérifier que $C \triangle E$ est un couplage.
6. Montrer en général que $C \triangle E$ est un couplage.
7. La valeur d'un cycle alternant C est la somme des étiquettes des arêtes qui le constituent, comptées positivement quand elles ne sont pas dans E et négativement sinon. Montrer que quand la valeur de C est positive, $C \triangle E$ a une plus grande valeur que E.

Exercice 39 *Couplage dans les graphes bipartis*

Soit $G = ((A \cup B), E)$ un graphe biparti avec A, et B les deux ensembles de sommets tels que chaque arête de G a une extrémité dans A et une autre dans B.

1. Proposer un algorithme pour trouver un couplage maximum, c'est à dire qui n'est inclus dans aucun autre couplage. Votre algorithme fonctionne-t-il sur un graphe quelconque ? Quelle est sa sa complexité ?

2. Sur un exemple, transformer G en un graphe de flot G_f en ajoutant un sommet source s et un sommet puits p de telle façon qu'il y a correspondance entre un couplage maximal de G et un flot maximal de G_f.
3. Généraliser cette transformation. Montrer que l'ensemble des arêtes entre A et B traversées par le flot maximal forment un couplage maximal.

8 TD 8 – Graphes planaires

Exercice 40 *Relation d'Euler*

Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire non vide *connexe*. Notons $n = |V|$, $a = |E|$. Considérons un dessin de G dans le plan (sans que les arêtes ne se croisent). Soit f le nombre de régions du plan délimitées par les arêtes de G.

1. Montrer la relation d'Euler $n - a + f = 2$.
2. On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que $2a \geqslant 3f$. En déduire que $a \leqslant 3n - 6$.
3. Montrer que le degré moyen des sommets $\bar{d} := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ vérifie $\bar{d} < 6$. En déduire qu'il existe un sommet de degré au plus 5 dans G.

Exercice 41 *Exemples de graphes planaires et de graphes non planaires.*

1. Le graphe complet à 4 sommets K_4 est-il planaire ?
2. Essayer de dessiner K_5 dans le plan – ou tout au moins de dessiner le maximum d'arêtes sans qu'elles ne se croisent. Quel est le nombre d'arêtes maximum que vous arrivez à placer ? Que pouvez-vous en déduire pour l'instant ?
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que K_5 n'est pas planaire (indication : utiliser l'exercice 40).
4. Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ est-il planaire ?
   On rappelle qu'un *mineur* de G est un graphe obtenu à partir de G en supprimant des arêtes, des sommets, et en contractant des arêtes.
5. Expliquer pourquoi tout mineur d'un graphe planaire l'est aussi.
6. En déduire que si G contient $K_{3,3}$ ou K_5 comme mineur, il n'est pas planaire. (La réciproque est vraie : c'est le théorème de Kuratowski (1930).)
7. Peut-on construire un graphe 5 régulier planaire ?

Exercice 42 *Coloration des graphes planaires avec* 6 *couleurs.*

1. Montrer que tout graphe planaire G vérifie $\chi(G) \leqslant 6$.
2. En déduire un algorithme de 6-coloration des graphes planaires en temps polynomial.

Exercice 43 *Dessiner c'est gagner.*

On va dessiner des graphes planaires de manière planaire (c'est ce qu'on appelle un plongement dans le plan).

1. Dessiner le graphe K_5 avec une arête en moins de manière planaire.
2. Soit G un graphe planaire qui a un cycle hamiltonien. Donner un algorithme pour dessiner le graphe. **Indication :** commencer par dessiner le cycle hamiltonien, puis décider une arête après l'autre comment la placer.
3. Quelle est la complexité de votre algorithme ? Peut on trouver un algorithme général pour trouver un plongement quand le graphe n'a pas de cycle hamiltonien ?

A Définitions

A.1 Définitions générales

Graphe orienté

Définition 1. Graphe Orienté

$G = (V, A)$ où V est un ensemble fini de sommets et où $A \subseteq V \times V$ est un ensemble de paires *ordonnées* de sommets appelées *arcs*.

— On note (u, v) l'arc entre les sommets u et v de G.
— Pour un arc $(u, v) \in A$, v est un *successeur* de u et u est un *prédecesseur* de v.
— L'arc (u, v) est un *arc sortant* du sommet u et un *arc entrant* du sommet v.

Définition 2. Adjacence

Deux arcs sont adjacents s'ils ont une extrémité commune. Deux sommets sont adjacents s'il existe un arc dont les extrémités sont ces deux sommets.

Graphe non orienté

Définition 3. Graphe Non Orienté

$G = (V, E)$ où V est un ensemble fini de sommets et où $E \subseteq V \times V$ est un ensemble de paires non ordonnées de sommets appelées *arêtes*.

— On note $[u, v]$ l'arête entre les sommets u et v de G.
— Pour une arête $[u, v] \in E$, v est un *voisin* de u et u est un *voisin* de v.

Définition 4. Adjacence

Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune. Deux sommets sont adjacents s'il existe une arête dont les extrémités sont ces deux sommets.

A.2 Degré

Graphe orienté

Définition 5. Degré entrant

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Le degré entrant d'un sommet $u \in V$, noté $d^+(u)$ est le nombre d'arcs entrants dans le sommet u.

Définition 6. Degré sortant

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Le degré sortant d'un sommet $u \in V$, noté $d^-(u)$ est le nombre d'arcs sortants du sommet u.

Graphe non orienté

Définition 7. Degré d'un sommet

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré d'un sommet $u \in V$ dans un graphe non orienté, noté $d(u)$, est le nombre de voisins de u.

Définition 8. Degré minimum d'un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré minimum de G, noté $\delta(G)$, est

$$\delta(G) = \min\{d(u), u \in V\}$$

Définition 9. Degré maximum d'un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré maximum de G, noté $\Delta(G)$, est

$$\Delta(G) = \max\{d(u), u \in V\}$$

A.3 Chemin, chaine, cycle, circuit

Graphe orienté

Définition 10. Chemin dans un graphe orienté

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Un chemin dans G est une suite de sommets $v_0 v_1 \ldots v_n$ telle que chaque couple de sommets successifs (v_{i-1}, v_i), $i \in 1..n$ est un arc de A. La longueur du chemin est le nombre d'arcs du chemin.

Définition 11. Circuit dans un graphe orienté

Un circuit dans un graphe orienté est un chemin tel que $v_0 = v_n$.

Graphe non orienté

Définition 12. Chaîne dans un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Une chaîne dans G est une suite de sommets $v_0 v_1 \ldots v_n$ telle que chaque couple de sommets successifs $[v_{i-1}, v_i]$, $i \in 1..n$ est une arête de E. La longueur de la chaine est le nombre d'arêtes de la chaîne.

Définition 13. Cycle dans un graphe non orienté

Un cycle dans un graphe non orienté est une chaîne telle que $v_0 = v_n$.

A.4 Connexité

Graphe orienté

Définition 14. Forte Connexité

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. G est *fortement connexe*, si pour toute paire ordonnée de sommets distincts $u \in V$ et $v \in V$, il existe un chemin de u à v dans G.

Définition 15. Connexité au sens des arcs

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté tel que $|V| > 1$. $F \subseteq A$ est un ensemble d'arcs déconnectant G si $(V, A \setminus F)$ n'est pas fortement connexe.

$\lambda(G)$ est le cardinal du plus petit ensemble d'arcs déconnectant G.

Définition 16. k-fortement connexe

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté tel que $|V| > 1$. G est *k-fortement connexe* si $\lambda(G) \geq k$.

Graphe non orienté

Définition 17. Connexité

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est *connexe*, si pour toute paire de sommets distincts $u \in V$ et $v \in V$, il existe une chaîne de u à v dans G.

Définition 18. Connexité au sens des arêtes

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté tel que $|V| > 1$. $F \subseteq E$ est un ensemble d'arêtes déconnectant G si $(V, E \setminus F)$ n'est pas connexe.

$\lambda(G)$ est le cardinal du plus petit ensemble d'arêtes déconnectant G.

Définition 19. k-connexe

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté tel que $|V| > 1$. G est *k-connexe* si $\lambda(G) \geq k$.

A.5 Eulérien et hamiltonien

Graphe orienté

Définition 20. Chemin eulérien

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Un chemin eulérien dans G est un chemin qui passe une et une seule fois par chaque arc de A.

Définition 21. Circuit eulérien

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Un circuit eulérien dans G est un circuit qui passe une et une seule fois par chaque arc de A.

Définition 22. Graphe eulérien

Un graphe orienté est eulérien s'il admet un chemin eulérien.

Définition 23. Chemin hamiltonien

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Un chemin hamiltonien dans G est un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet de V.

Définition 24. Circuit hamiltonien

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Un circuit hamiltonien dans G est un circuit qui passe une et une seule fois par chaque sommet de V.

Définition 25. Graphe hamiltonien

Un graphe orienté est hamiltonien s'il admet un chemin hamiltonien.

Graphe non orienté

Définition 26. Chaîne eulérienne

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Une chaîne eulérienne dans G est une chaîne qui passe une et une seule fois par chaque arête de E.

Définition 27. Cycle eulérien

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Un cycle eulérien dans G est un cycle qui passe une et une seule fois par chaque arête de E.

Définition 28. Graphe eulérien

Un graphe non orienté est eulérien s'il admet une chaîne eulérienne.

Définition 29. Chaîne hamiltonienne

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Une chaîne hamiltonienne dans G est une chaîne qui passe une et une seule fois par chaque sommet de V.

Définition 30. Cycle hamiltonien

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Un cycle hamiltonien dans G est un cycle qui passe une et une seule fois par chaque sommet de V.

Définition 31. Graphe hamiltonien

Un graphe non orienté est hamiltonien s'il admet une chaîne hamiltonienne.

A.6 Sous-graphes

Graphe orienté et non orienté

Définition 32. Sous-graphe partiel

Soit $G = (V, X)$ un graphe orienté ou non orienté. Un sous-graphe partiel de G est un graphe $G' = (V', X')$ tel que :

— $V' \subseteq V$

— $X' \subseteq X$

Définition 33. Sous-graphe induit par un ensemble de sommets

Soit $G = (V, X)$ un graphe orienté ou non orienté. Soit W un sous-ensemble de V. Le sous-graphe de G induit par W est le graphe $G' = (W, X')$ où X' est l'ensemble des éléments de X dont les 2 extrémités sont dans W.

Définition 34. Sous-graphe couvrant

Soit $G = (V, X)$ un graphe orienté ou non orienté. Un sous-graphe couvrant de G est un graphe $G' = (V', X)$ tel que :

— $V' = V$

— $X' \subset X$

A.7 Couplage

Graphe non orienté

Définition 35. Couplage

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un *couplage* de G est un sous-ensemble d'arêtes $C \subset E$ tel que chaque sommet de V est l'extrémité d'au plus une arête de C.

Définition 36. Couplage parfait

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un couplage C est parfait si chaque sommet de V est l'extrémité d'exactement une arête de C.

A.8 Planarité

Graphe orienté et non orienté

Définition 37. Graphe planaire

Soit $G = (V, X)$ un graphe orienté ou non orienté. G est un graphe *planaire* si on peut le dessiner sur une sphère sans que les arcs ou les arêtes ne se croisent.

A.9 Graphes bipartis

Graphe non orienté

Définition 38. Graphe biparti

Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe non orienté. G est biparti si toutes les arêtes de E ont une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2.