

MS1 INFO 105 – Simulation

Recommandations

Les exercices sont indépendants. Lire complètement l'énoncé avant de commencer. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction (commentaires, explications). Tous documents autorisés. Durée 2 heures.

Exercice 1 *Variable aléatoire*

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0, A]$ avec A réel strictement positif par :

$$\forall x \in [0, A], f(x) = \alpha x(A - x)$$

1. Calculer la ou les valeurs de α (en fonction de A) pour que f soit une fonction de densité.
2. Calculer la ou les valeurs de α (en fonction de A) pour que f soit une fonction de répartition.
3. Donner une méthode pour générer une variable aléatoire de densité f .

Exercice 2 *Chaîne de Markov*

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov de taille N :

$$\begin{cases} P_{1,N} = \frac{1}{2} \\ \forall i \in 2..N, P_{i,i-1} = \frac{1}{2} \\ P_{N,1} = \frac{1}{2} \\ \forall i \in 1..N-1, P_{i,i+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov pour $N = 2$, $N = 3$ et $N = 4$.
2. Pour quel ensemble de valeurs de N la chaîne de Markov est ergodique ?
3. Soit $P' = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}P$. Si la chaîne de Markov de P est ergodique, la chaîne de Markov de P' est elle ergodique ?
4. Pour $N = 3$, calculer la distribution stationnaire de la chaîne de P .
5. Calculer la distribution stationnaire pour N quelconque de la chaîne de P .

Exercice 3 *File d'attente*

On considère une file de capacité finie B avec deux serveurs qui se suivent. Les durées inter-arrivées suivent une distribution exponentielle de paramètre λ . Quand un client arrive et que la file est pleine, il est rejeté. Le service se fait en deux étapes : un client qui commence son service passe dans le premier serveur, puis dans le second, puis sort de la file. Le premier client en attente commence son service au moment où le client précédent passe du premier au second serveur ou bien s'il est tout seul dans la file. Les durées des services dans les deux serveurs suivent une loi exponentielle de paramètre μ .

3.1 Simulation

1. *Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de cette file.*
2. *Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.*
3. *Donner le code nécessaire pour mesurer la probabilité qu'un client soit rejeté.*

3.2 Chaîne de Markov

4. *Quelles informations doit on avoir dans les états pour qu'ils forment une chaîne de Markov ?*
5. *Définir l'espace d'états, les transitions et le graphe de la chaîne de Markov modélisant le comportement du système.*
6. *Quelles différences entre cette file et une $M/M/2$?*
7. *Expliquer comment calculer la distribution stationnaire.*
8. *Que pouvez-vous dire de la condition de stabilité ?*