

## Examen MS1 INFO 105 – Simulation

### Recommandations :

Les exercices sont indépendants.

Lire complètement l'énoncé avant de commencer.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction (commentaires, explications).

Tous documents autorisés.

Durée 2 heures.

### Exercice 1 Variable aléatoire

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0, A]$  par :

$$f(x) = \alpha(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

1. On pose  $A = 2$ , pour quelle valeur de  $\alpha$ ,  $f$  est une fonction de densité ?
2. On pose  $A = 1$ , pour quelle valeur de  $\alpha$ ,  $f$  est une fonction de densité ?  
 Donner une méthode pour générer une variable aléatoire ayant cette fonction pour densité.
3. Pour quelle valeur de  $\alpha$  et de  $A$ ,  $f$  est une fonction de répartition sur l'intervalle  $[0, A]$  ?  
 Donner une méthode pour générer une variable aléatoire ayant cette fonction pour répartition.

### Exercice 2 Chaîne de Markov

Soit une chaîne de Markov en temps discret à  $N$  états de matrice de transition

$P$ . On suppose la chaîne ergodique. La distribution stationnaire est notée  $\bar{\pi}$ .

1. Montrer que  $P^2$  est une matrice de transition.
2. Montrer que  $\bar{\pi}$  est une mesure invariante de  $P^2$ .
3. Quelle(s) condition(s) doit satisfaire  $\alpha \in \mathbb{R}$  pour que  $\alpha I + (1 - \alpha)P$  soit une matrice de transition ?
4. Que vaut sa mesure invariante ?

### Exercice 3 File d'attente

On considère deux files  $F_A$  et  $F_B$  de capacité infinie en parallèle. Les durées inter-arrivées dans chacune de ces files suivent une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Les services dans chacune de ces deux files ont une durée exponentielle de paramètre  $\mu$ .

On note  $n_A(t)$  et  $n_B(t)$  le nombre de clients dans chacune des files à la date  $t$ .  $\delta$  un entier positif ou nul. Quand un service se termine dans  $F_A$  (resp.  $F_B$ ) à la date  $t$ , si  $n_A(t) < n_B(t) - \delta$  (resp.  $n_B(t) < n_A(t) - \delta$ ) alors la file  $F_A$  (resp.  $F_B$ ) se met à servir le premier client en attente de la file  $F_B$  (resp.  $F_A$ ) sinon elle sert le premier client en attente dans sa propre file (s'il y en a un). Si la file  $F_B$  (resp.  $F_A$ ) est vide, la file  $F_A$  (resp.  $F_B$ ) sert le premier client de sa file.

Partie I : Simulation

1. Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de ces files.
2. Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.
3. Donner le code nécessaire pour mesurer le pourcentage de temps pendant lequel un des deux serveurs est inactif alors qu'il y a des clients dans l'autre file.

Partie II : Chaîne de Markov

4. Si  $\delta = 0$  quelle différence y a-t-il avec une file  $M/M/2$  ?
5. Que pouvez vous dire si  $\delta = +\infty$  ?

Dans toute la suite on pose  $\delta = 1$ .

6. Quelles informations doit on avoir dans les états pour qu'ils forment une chaîne de Markov ?
7. Définir l'espace d'états de la chaîne de Markov exprimant le comportement du modèle.
8. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov correspondant au modèle.
9. Donner les transitions de la chaîne de Markov.
10. Expliquer comment calculer la distribution stationnaire.
11. Que pouvez-vous dire de la condition de stabilité.