

Examen MS1 INFO 105 – Simulation

Recommandations :

Les exercices sont indépendants.

Lire complètement l'énoncé avant de commencer.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction (commentaires, explications).

Tous documents autorisés.

Durée 2 heures.

Exercice 1 Variable aléatoire

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0, A]$ par :

$$f(x) = \alpha(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

1. On pose $A = 2$, pour quelle valeur de α , f est une fonction de densité ?
2. On pose $A = 1$, pour quelle valeur de α , f est une fonction de densité ?
 Donner une méthode pour générer une variable aléatoire ayant cette fonction pour densité.
3. Pour quelle valeur de α et de A , f est une fonction de répartition sur l'intervalle $[0, A]$?
 Donner une méthode pour générer une variable aléatoire ayant cette fonction pour répartition.

Exercice 2 Chaîne de Markov

Soit une chaîne de Markov en temps discret à trois états de matrice de transition P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 & 0.0 \end{pmatrix}$$

1. Cette chaîne est-elle ergodique, si oui pourquoi, si non pourquoi ?
2. Donner sa mesure invariante.
3. Cette chaîne a-t-elle une distribution stationnaire, si oui laquelle, si non pourquoi ?

4. On considère la matrice P_2 définie par :

$$P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Donner les valeurs de a , b et c telles que P_2 est une matrice de transition de même mesure invariante que P .

Exercice 3 File d'attente

On considère une file d'attente de capacité infinie. Cette file possède une infinité de serveurs numérotés de 0 à l'infini. Le $i^{\text{ème}}$ serveur ne peut servir des clients que quand le nombre de clients dans la file est supérieur ou égal à $2i$.

Partie I : Simulation

1. Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de ces files.
2. Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.
3. Donner le code nécessaire pour mesurer le pourcentage de temps pendant lequel le serveur numéro 0 est en service.

Partie II : Chaîne de Markov

On veut modéliser cette file avec une chaîne de Markov.

1. Quelles informations doit on avoir dans les états pour qu'ils forment une chaîne de Markov ?
2. Définir l'espace d'états de la chaîne de Markov exprimant le comportement du modèle.
3. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov correspondant au modèle.
4. Donner les transitions de la chaîne de Markov.
5. Expliquer comment calculer la distribution stationnaire.
6. Que pouvez-vous dire de la condition de stabilité.