UNIVERSITE de VERSAILLES - Master 1 Info.

Module **Recherche opérationnelle et algorithmes probabilistes**
Session2 - Juin 2018

Durée : 2h. Tous documents autorisés, Téléphones et ordinateurs interdits

1 Programme Linéaire (8 points)

Soit le PL suivant:

Minimize Obj = $10\ x_1 + 12\ x_2 + 20\ x_3$

Subject To:
c1: $x_1 \geq 1000$
c2: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 4000$
c3: $4\ x_1 + 8\ x_2 + 10\ x_3 \geq 20000$
c4: $2\ x_1 + 5\ x_2 + 10\ x_3 \geq 14000$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

1. Expliquer pourquoi ce PL ne serait pas facile à résoudre par la méthode du simplexe sous cette forme. Que conviendrait-il de faire pour construire le tableau de départ si on voulait résoudre directement ce PL ?
2. Ecrire le dual de ce Programme Linéaire.
3. Pour résoudre le dual par la méthode du simplexe, donner le tableau de départ et indiquer les variables entrante et sortante sur ce tableau de départ.
4. La solution optimale du programme dual est donnée ci-dessous:

Optimal Solution :
Problem Name : Ma grand mere fait du judo
Problem Direction : MAX
Objective function value : 44000

Activities :

Num	Name		Level	Shadow Cost	Lower Obj	Objective	Upper Obj
1	y1	Z	0	-1000	-INFINITY	1000	2000
2	y2	A	8.6666	0	3400	4000	7000
3	y3	Z	0	-4000	-INFINITY	20000	24000
4	y4	A	0.6666	0	11000	14000	17000

Constraints :

Num	Name		Slack	Shadow Price	Lower Lim	Limit	Upper Lim
1	c1	L	0	-2000	7.2	10	12
2	c2	L	0	-2000	10	12	13.75
3	c3	L	4.6666	0	15.3333	20	INFINITY

Précisez clairement la solution optimale, la valeur de chacune des variables, celle de la fonction économique, les variables de base, les contraintes saturées et la marge restante sur celles qui ne le sont pas.

5. En déduire la solution optimale (valeur économique et valeur des variables) du PL initial.
6. Que pouvez-vous dire sur les solutions optimales du primal et du dual si la valeur économique de la variable x_2 passait à 13 (à la place de 12) ?
7. Que pouvez-vous dire sur les solutions optimales du primal et du dual si le second terme de la deuxième contrainte passait à 5000 (à la place de 4000) ?

2 Coloration (9 points)

Soit un graphe $G = (V, E)$ avec V l'ensemble des sommets et E l'ensemble des aretes. Une coloration du graphe consiste à affecter une couleur à chaque sommet de telle sorte que 2 sommets reliés par une arete n'aient pas la même couleur. Le problème d'optimisation associé consiste à minimiser le nombre de couleurs utilisées.

1. Soit la modélisation suivante du problème:

   $MIN\ (MAX_{i \in V}\ C_i)$ avec:

   - $\forall (i,j) \in E,\ C_i \neq C_j$
   - $\forall i \in V,\ C_i \in \mathbb{N}^+$.

   (a) Pouvez-vous expliquer cette modélisation ? Que représentent les variables C_i ? A quoi correspond la fonction économique ? Que signifie la première contrainte ?

   (b) A-t-on affaire à un problème de maximisation ou de minimisation ?

   (c) Pourquoi n'est-ce pas un Programme Linéaire?

   (d) Pour quelle raison n'est-il guère possible de modéliser le problème de coloration sous forme de Programme Linéaire (qu'il serait alors possible de résoudre par la méthode du Simplexe ou à l'aide d'un solveur) ?

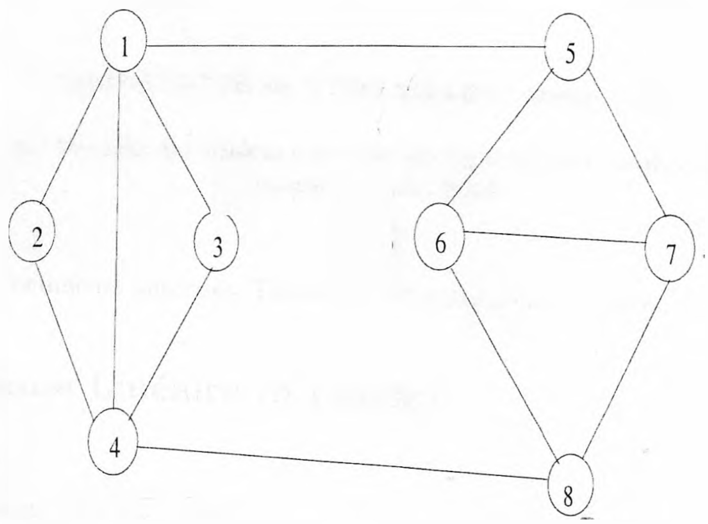
2. Dans l'exemple qui suit (graphe donné ci-dessous), le nombre de couleurs minimal est de 3. Trouvez une solution correspondante en indiquant clairement quelle couleur vous donnez à chaque sommet.
3. L'une des heuristiques les plus connues et les plus employées pour le problème de coloration est la méthode de Welsh-Powell qui a la forme suivante:

   Trier initialement les sommets par

   - Degré décroissant
   - En cas d'égalité par numéro croissant

   - col = 0
   - Tant que tous les sommets ne sont pas colorés faire:
     - col++ (nouvelle couleur)
     - Prendre les sommets dans l'ordre du tri et leur affecter la couleur col si c'est possible (s'ils ne sont pas déjà colorés et s'ils ne sont pas reliés à un sommet de couleur col)

   Appliquer cette heuristique sur l'exemple précédent. L'heuristique fournit-elle la solution optimale ?



4. *Les (meta)heuristiques à base de voisinage (Descente, Tabou, Recuit Simulé) ne fonctionnent pas bien sur le problème de coloration car la plupart des solutions réalisables sont des optima locaux.*

   Expliquez et justifiez cette phrase de la façon la plus claire possible. Vous pouvez bien entendu illustrer votre propos par des exemples.

5. Pour finir, proposez un opérateur de cross-over qui pourrait être utilisé dans un algorithme génétique pour ce problème de coloration.

3 Algorithme probabiliste (3 points)

L'ARN est constitué de 4 nucléotides (ou bases nucléiques) différents : A, C, G et U.
Une chaine ARN est représentée dans un tableau T (de très grande taille, $N = 500000$), chaque élément du tableau correspondant à une base nucléique (donc un A, un C, un G ou un U). On considère que chaque base nucléique est équiprobable.
On cherche à trouver une Adénine (un A).

1. Donner l'algorithme déterministe (évident). Quelle est sa complexité dans le pire des cas ?
2. Proposer un algorithme de Monte-Carlo. Rappeler pourquoi c'est un algorithme de Monte-Carlo. Quelle est sa probabilité d'erreur ?
   Combien faut-il faire d'itérations pour que la probabilité d'erreur devienne inférieure à 5% ?