Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines
Master 1 Informatique
12 juin 2013.

MS1 INFO 105 – Simulation

Recommandations
Les exercices sont indépendants. Lire complètement l'énoncé avant de commencer. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction (commentaires, explications). Tous documents autorisés. Durée 2 heures.

Exercice 1 *Variable aléatoire*

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-A, A]$ avec A réel strictement positif par :

$$\forall x \in [-A, A], f(x) = \alpha x^2$$

1. *Calculer la valeur de* α *(en fonction de* A*) pour que* f *soit une fonction de densité.*
2. *Donner deux méthodes pour générer une variable aléatoire de densité* f.

Exercice 2 *Chaîne de Markov*

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique sur l'ensemble d'états E.

1. *Montrer que si il existe une distribution* π *sur* E *telle que :*

$$\forall i, j \in E, \quad \pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$$

alors π *est la distribution stationnaire de la chaîne de Markov. Ce résultat peut être utile et admis pour la suite.*

Soit G un graphe non orienté connexe et E l'ensemble des sommets du graphe. Le degré d'un nœud i, noté δ_i est le nombre de ses voisins dans le graphe. On définit une matrice M telle que $M_{i,j} = \frac{1}{\delta_i}$ si j est voisin de i, et 0 sinon.

2. *Montrer que* M *est une matrice de transition.*

On suppose que M est ergodique et en pose : $\pi_i = \delta_i / (\sum_{j \in E} \delta_j)$

3. *Montrer que* π *est la distribution stationnaire de* M *(vous pouvez utiliser le résultat de la question 1.).*

On modifie la chaîne précédente en introduisant une probabilité $a_{i,j} = 1 - \max(1, \delta_i/\delta_j)$ de bloquer la transition de i vers j. On obtient une nouvelle matrice de transition P' :

$$\begin{cases} \forall i \neq j, & P'_{i,j} = M_{i,j}(1 - a_{i,j}) \\ \forall i, & P'_{i,i} = 1 - \sum_{j \neq i} P'_{i,j} \end{cases}$$

4. *Montrer que la distribution uniforme $\pi'_i = 1/|E|$ est la distribution stationnaire de P'.*

Exercice 3 *File d'attente*

On considère une file de capacité infinie avec un seul serveur. Les durées inter-arrivées suivent des distributions exponentielles. S'il y a n clients, le processus d'inter-arrivées suit une loi $exp((n+1)\lambda)$. Les services suivent une loi exponentielle dépendant du nombre de clients. S'il y a n clients dans la file, le service est $exp(n\mu)$.

3.1 Simulation

1. *Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de cette file.*
2. *Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.*
3. *Donner le code nécessaire pour mesurer la probabilité que la file soit vide.*

3.2 Chaîne de Markov

4. *Quelles informations doit on avoir dans les états pour qu'ils forment une chaîne de Markov ?*
5. *Définir l'espace d'états de la chaîne de Markov exprimant le comportement du modèle.*
6. *Dessiner le graphe de la chaîne de Markov correspondant au modèle.*
7. *Donner les transitions de la chaîne de Markov.*
8. *Expliquer comment calculer la distribution stationnaire.*
9. *Que pouvez-vous dire de la condition de stabilité ?*