Université de Versailles–Saint-Quentin-en-Yvelines
Cours & TD : I. Tseveendorj

2018-2019
Master 1 - Informatique

Recherche Opérationnelle

Programmation linéaire - Résolutions simples - résolution graphique

TD4

Exercice 1

Un atelier peut fabriquer trois types d'articles :
- l'article A_1 à la cadence de 35 objets à l'heure.
- l'article A_2 à la cadence de 45 objets à l'heure.
- l'article A_3 à la cadence de 20 objets à l'heure.

Cette fabrication utilise une machine-outil unique, disponible 200 heures par mois.

Le bénéfice unitaire pour l'article A_1 est de 60 euros par objet, pour A_2 de 40 euros, pour A_3 de 80 euros. Ces objets sont vendus en totalité à des grossistes ; on a observé qu'on ne pouvait écouler, par mois, plus de 4900 objets du type A_1, ni plus de 5400 objets du type A_2, ni plus de 2000 objets du type A_3.

D'autre part, chaque objet doit être vérifié avant sa commercialisation : une équipe de trois techniciens est chargée de cette mission ; chaque technicien travaille 170 heures par mois. La vérification d'un objet du type A_1 prend quatre minutes, du type A_2, trois minutes, du type A_3, deux minutes.

Question : Montrer qu'une contrainte est redondante (c'est-à-dire qu'elle est impliquée par une ou plusieurs autres). Interpréter géométriquement cette redondance.

Question : Classer alors les produits par bénéfice horaire décroissants et faire une résolution économique de ce problème.

Exercice 2

Considérons le domaine suivant (de forme standard) :

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_4 + 3x_5 & = 2 \\ 2x_2 + 4x_4 & = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_5 & = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{array}\right.$$

1. En prenant les variables x_1, x_2, x_3 pour une base, trouver un sommet du domaine associé à cette base.
2. En énumérant des bases, donner des solutions de base et des solutions de base réalisables.

Exercice 3

Considérons un programme linéaire suivant (forme canonique) :

$$\left\{\begin{array}{lrcrl} \max & 2x_1 & + & x_2 & \\ s.c. & & & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq 6 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}\right.$$

1. Enumérer tous les sommets du domaine ;
2. Donner la résolution en calculant la valeur de la fonction objectif aux sommets du domaine.

Exercice 4

Faire une résolution graphique

$$\begin{cases} \max & x_1 & + & 3x_2 & \\ s.c. & x_1 & + & x_2 & \leq 14 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq 12 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq 12 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 5

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits brut :

- Orge,
- arachide,
- sésame.

L'aliment ainsi conditionné devra comporter (pour se conformer aux exigences de la clientèle) au moins

- 22% de protéines,
- 3.6% de graisses.

On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenues, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

produit brut	orge	arachides	sésame	pourcentage requis
pourcentages de protéines	12%	52%	42%	22%
pourcentages de graisses	2%	2%	10%	3.6%
coût par tonne	25	41	39	

Questions :

1. On notera $x_j = (j = 1, 2, 3)$ la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème algébriquement.
2. Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème. Le résoudre graphiquement.

Exercice 6

Faire une résolution graphique

$$\begin{cases} \min & x_2 & - & 3x_1 & \\ s.c. & 2x_1 & - & x_2 & \geq -2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq 5 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$