Compléments de Mathématiques Discrètes: Cours 5 .

Michaël Quisquater (Maître de Conférences)

UVSQ

Théorie des probabilités et notion de variable aléatoire.

Notion de variable aléatoire

Observation : Jusqu'à présent on a traité le cas de probabilités d'évènements, c'est-à-dire que l'on a mesuré des sous-ensembles de Ω (et Ω est supposé être un ensemble fini).

Objectif : On souhaiterait utiliser la puissance des mathématiques et donc utiliser des nombres et non plus des sous-ensembles directement.

Idée : On va associer à chaque élément de l'ensemble Ω un nombre

$\rightarrow$ notion de variable aléatoire.

Notion de variable aléatoire : Exemple 1

Exemple 1 : A chaque carte du tableau en position (i, j) on va associer le nombre $13i + j$

$i \setminus j$	0	1	$\cdots$	11	12
0	roi carreau	as carreau		valet carreau	dame carreau
1	roi coeur	as coeur		valet coeur	dame coeur
2	roi pique	as pique		valet pique	dame pique
3	roi trèfle	as trèfle		valet trèfle	dame trèfle

Notion de variable aléatoire

Cette association définit une application $X : \Omega \to \{0, \cdots, 51\}$ où Ω est l'ensemble des cartes.

Avantage : On peut réexprimer les évènements précédents en terme de nombres et de cette application uniquement.

Exemples

- "être un roi de coeur" $= \{w \in \Omega \mid X(w) = 13\}$
- être un trèfle" $= \{w \in \Omega \mid X(w) \in \{39, \cdots, 51\}\}$
- "être un roi" $= \{w \in \Omega \mid X(w)$ est un multiple de $13\}$

Notion de variable aléatoire : Exemple 2

Exemple 2 : Considérons les différents résultats du lancé de deux dés à 6 faces :

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Notion de variable aléatoire : Exemple 2 (suite)

- On peut s'intéresser à la valeur du premier lancé. Il s'agit alors de considérer la variable aléatoire :

$$X_1 : \Omega \to \{1, \cdots, 6\} : w = (w_1, w_2) \mapsto X_1(w) = w_1 ,$$

- On peut s'intéresser à la valeur du second lancé. Il s'agit alors de considérer la variable aléatoire :

$$X_2 : \Omega \to \{1, \cdots, 6\} : w = (w_1, w_2) \mapsto X_2(w) = w_2 ,$$

- On peut s'intéresser à la somme des deux lancés. Il s'agit alors de considérer la variable aléatoire :

$$Z : \Omega \to \{2, \cdots, 12\} : w \mapsto Z(w) = X_1(w) + X_2(w) ,$$

où Ω est l'ensemble des résultats des deux lancés de dés.

Notion de variable aléatoire

Formalisation :

Définition

Une variable aléatoire (v.a) est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Remarque :

- Comme on a supposé que Ω est un ensemble fini, seul un ensemble fini de points de $\mathbb{R}$ sont touchés.
- On peut définir la probabilité d'évènements de la façon suivante :
  - $P(\text{"être un roi de coeur"}) = P(\{w \in \Omega \mid X(w) = 13\})$
  - $P(\text{"être un trèfle"}) = P(\{w \in \Omega \mid X(w) \in \{39, \cdots, 51\}\})$
  - $P(\text{"être un roi"}) = P(\{w \in \Omega \mid X(w) \text{ est un multiple de } 13\})$
  - $P(\{(1,1), (1,2) \cdots, (1,6)\}) = P(\{w \in \Omega \mid X_1(w) = 1)$
  - $P(\{(1,2), (2,1)\}) = P(\{w \in \Omega \mid Z(w) = 3\})$

Définition loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Dans les cas précédents, on a une expression de la forme : $P(\{w \in \Omega \mid X(w) \in B\})$ pour un certain sous-ensemble $B \subseteq \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Une loi de probabilité d'une variable aléatoire (discrète) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application $\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] : B \mapsto P(\{w \in \Omega \mid X(w) \in B\})$.

Une loi de probabilité dépend et de la probabilité définie sur Ω et de la variable aléatoire définie de Ω vers $\mathbb{R}$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète (suite)

Remarques :

- $P(\{w \in \Omega \mid X(w) \in B\})$ s'écrit généralement $P(X \in B)$.
- Si S est l'ensemble de valeurs que prend une variable aléatoire discrète ($S = \{X(w) \mid w \in \Omega\}$),

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B \cap S} P(X = x) \text{ pour tout sous-ensemble } B \subseteq \mathbb{R}$$

Par conséquent, $P(X = x)$ décrit toute la loi de probabilité de X. On appelle l'ensemble des valeurs $P(X = x)$ distribution de probabilité de la variable aléatoire X.

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est la loi de probabilité de cette v.a restreinte aux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de la forme

$$]-\infty, t]$$

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. La fonction de répartition d'un variable aléatoire discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est l'application

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] : t \mapsto F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{\{x \leq t\} \cap S_1} P(X = x)$$

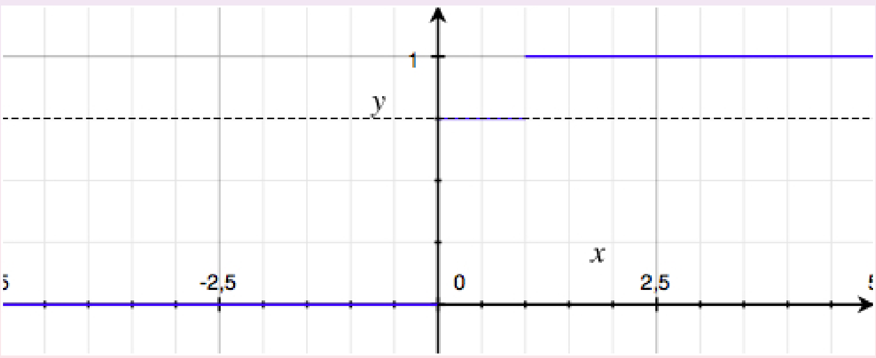
où S_1 est l'ensemble des valeurs prises par la v.a X.

Fonction de répartition

Exemple : Loi de Bernoulli.

Considérons la variable aléatoire X de distribution de probabilité $P(X = 0) = p$ et $P(X = 1) = 1 - p$.

La fonction répartition de X, $F_X(x)$ est donnée par :



Probabilité conditionnelle d'une v.a discrète par rapport à une autre

Reconsidérons les deux lancés de dés. Supposons que les 36 possibilités n'aient pas la même probabilité.

- Soit X la v.a représentant le premier lancé
- Soit Y la v.a représentant le second lancé

Question : si on sait que le second lancé est 2 (c-à-d $Y = 2$), quelle est la loi de probabilité de la valeur du premier lancé (c-à-d la v.a X) ?

Probabilité conditionnelle d'une v.a discrète par rapport à une autre

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé (Ω fini). Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes.
Alors, la loi de probabilité conditionnelle de X par rapport à Y est définie pour tout sous-ensemble $B_1 \subseteq \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $P(Y = y) > 0$ par

$$P(X \in B_1 \mid Y = y) = \frac{P(X \in B_1, Y = y)}{P(Y = y)} \tag{1}$$

Probabilité conditionnelle d'une v.a discrète par rapport à une autre

Remarques : Dénotons par S_1 l'ensemble de valeurs que prend la variable aléatoire discrète, i.e. $S_1 = \{X(w) \mid w \in \Omega\}$. La loi de probabilité conditionnelle définie à la relation (1) est entièment définie par les valeurs

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

où $x \in S_1$. En effet,

$$P(X \in B_1 \mid Y = y) = \sum_{x \in S_1 \cap B_1} P(X = x \mid Y = y)$$

Les différentes valeurs $P(X = x \mid Y = y)$ ($x \in S_1$ et y fixé) sont appelées la distribution de probabilité conditionnelle de la v.a X par rapport à Y.

Formule des probabilités totales

- Dans certains problèmes, il arrive que l'on puisse facilement déterminer la distribution de probabilité conditionnelle une v.a par rapport à une autre v.a ainsi que la distribution de probabilité de cette dernière variable aléatoire.
- Le résultat suivant permet de calculer la distribution de probabilité de la première v.a à partir de ces valeurs.

Formule des probabilités totales (suite)

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé soit les variables aléatoires discrètes $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Dénotons S_2 l'ensemble des valeurs de Y pour lesquels $P(Y = y) > 0$.
Alors,

$$P(X = x) = \sum_{y \in S_2} \left(P(X = x \mid Y = y) \cdot P(Y = y) \right).$$

Formule des probabilités totales (suite)

Suppons que l'on joue à pile ou face avec une pièce équilibrée pour déterminer dans quelle urne on va ensuite tirer une boule.

- si c'est pile, on tire une boule au hasard dans une urne contenant de boules numérotées de 1 à 10.
- si c'est face, on tire une boule au hasard dans une urne contenant de boules numérotées de 1 à 20.

Quelle est la probabilité de tirer une boule avec un numéro x pour x allant de 1 à 20 ?

Formule des probabilités totales (suite)

Modélisation : soit la v.a X qui vaut 1 si c'est pile et qui vaut 0 si c'est face. Comme la pièce est équilibrée, $P(X = 1) = P(X = 0) = 1/2$.

Soit Y la v.a représentant la valeur de la boule tirée dans l'urne. Comme on tire dans une urne, nous avons :

- $P(Y = y \mid X = 1) = 1/10$ pour tout $y \in \{1, \cdots, 10\}$
- $P(Y = y \mid X = 0) = 1/20$ pour tout $y \in \{1, \cdots, 20\}$

Par la formule des probabilités totales, nous avons :

$$P(Y = y) = P(Y = y \mid X = 1) \cdot P(X = 1) + P(Y = y \mid X = 0) \cdot P(X = 0) .$$

Donc, $P(Y = y) = 1/10 \cdot 1/2 + 1/20 \cdot 1/2$ pour $y \in \{1, \cdots, 10\}$

Aussi, $P(Y = y) = 1/20 \cdot 1/2$ pour $y \in \{11, \cdots, 20\}$

Formule de Bayes

- Dans certains problèmes, il arrive que l'on puisse facilement déterminer la distribution de probabilité conditionnelle d'une v.a Y par rapport à un v.a X ainsi que la distribution de probabilité de cette variable aléatoire.
- Le résultat suivant permet de calculer la distribution de probabilité conditionnelle de la v.a X par rapport à la variable Y.

Formule de Bayes (suite)

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé soit les variables aléatoires discrètes $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Dénotons S_1 et S_2 l'ensemble des valeurs de X pour lesquels $P(X = x) > 0$ et $P(Y = y) > 0$ respectivement. Pour tout $x \in S_1$ et $y \in S_2$,

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(Y = y \mid X = x) \cdot P(X = x)}{\sum_{x \in S_1} (P(Y = y \mid X = x) \cdot P(X = x))}$$

Formule de Bayes (suite)

Supposons que l'on souhaite calculer la probabilité que la boule d'un pile si la boule tirée est 10, i.e.

$$P(X = 1 \mid Y = 10)$$

Par la formule de Bayes, cela revient à calculer

$$\frac{P(Y = 10 \mid X = 1) \cdot P(X = 1)}{P(Y = 10)}$$

ou encore

$$\frac{1/10 \cdot 1/2}{1/10 \cdot 1/2 + 1/20 \cdot 1/2}.$$

Première partie I

Indicateurs sur les variables aléatoires discrètes définies sur un ensemble fini

Définition de l'espérance

L'espérance d'une variable d'une variable aléatoire représente sa "moyenne" (justification asymptotique hors cadre du cours).

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Dénotons pas S l'ensemble des points pris par la variable aléatoire discrète X, i.e. $\{X(w) \mid w \in \Omega\}$. L'espérance de X de la variable aléatoire discrète est définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot P(X = x) .$$

Exemple : Soit X une v.a de Bernoulli de distribution de probabilité $P(X = 0) = p$ et $P(X = 1) = 1 - p$. Alors,

$$E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = 0 \cdot p + 1 \cdot (1 - p) = 1 - p .$$

Définition de l'espérance (suite)

Remarques :

- Notation usuelle : $E(X) = \mu$.
- même si l'espérance d'une v.a représente sa moyenne, il est possible que cette variable aléatoire ne prenne jamais cette valeur, ni même en soit proche ”la plupart du temps”. Exemple : considérons une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est $P(X = 1000) = 1/10$ et $P(X = 0) = 9/10$. Nous avons $E(X) = 1000 \cdot P(X = 1000) + 0 \cdot P(X = 0) = 100 + 0 = 100$.

Propriétés de l'espérance

Théorème

Soit X est une variable aléatoire discrète.
Alors,

- $E(g(X)) = \sum_{x \in S} g(x) \cdot P(X = x)$ *où S est l'ensemble des valeurs prises par la v.a X et* $g : S \to \mathbb{R}$ *est une application.*
- $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$

Variance et écart type

La variance représente dans quelle mesure une variable aléatoire est dispersée autour de sa moyenne.

Définition

Dénotons par S l'ensemble pris par la variable aléatoire discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, i.e. $S = \{X(w) \mid w \in \Omega\}$. La variance de la variable aléatoire discrète X est définie par

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{x \in S} (x - E(X))^2 \cdot P(X = x) \,.$$

Espérance, variance et écart type
Espérance
Variance et écart type

Variance et écart type

Remarques :

- la variance est généralement notée par $\sigma^2 = var(X)$
- Si l'on souhaite avoir une mesure de la dipersion d'une v.a qui préserve les "unités", on considère plutôt l'ecart type qui est défini par $\sigma = \sqrt{var(X)}$.

Propriétés de la variance

Théorème

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète.

- $var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Exemple : Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli dont la distribution de probabilité est $P(X = 0) = p$ et $P(X = 1) = 1 - p$. Alors,

$$\begin{array}{rcc} var(X) & = & E(X^2) - E(X)^2 \\ & = & E(X) - E(X)^2 \\ & = & 1 - p - (1 - p)^2 \\ & = & (1 - p) \cdot (1 - (1 - p)) \\ & = & p \cdot (1 - p) \end{array}$$

Deuxième partie II

Variable aléatoire discrète ”dénombrable”

Variable aléatoire discrète "dénombrable"

Jusqu'à présent nous avons considéré uniquement des variables aléatoires discrètes prenant un nombre fini de valeurs.

Il arrive fréquemment qu'une variable aléatoire prenne ses valeurs dans $\mathbb{N}$ par exemple. Dans ce cas, on parle de variable discrète prenant un nombre dénombrable de valeurs (on peut les compter "0,1,2, $\cdots$").

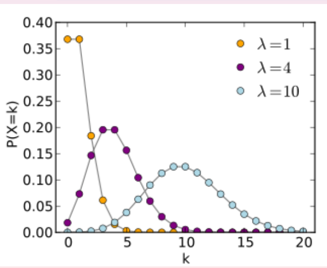
Toutes les formules que l'on a vues jusqu'à présent restent valides dans le cas dénombrable, il suffit juste d'interpréter les sommes, non plus comme des sommes finies mais infinies (séries). Il faut évidemment que toutes ces séries convergent pour que cela ait un sens.

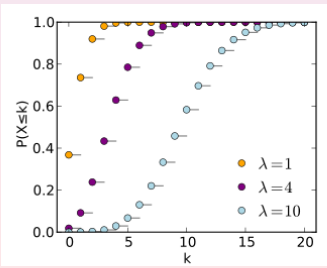
Variable aléatoire discrète "dénombrable" : loi de Poisson

Considérons la variable aléatoire discrète X prenant un nombre dénombrable de valeurs et de distribution de probabilité donnée pour tout $x \in \mathbb{N}$ par :

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Il s'agit de la loi de Poisson de paramètre λ. On note $X \sim Po(\lambda)$.





Variable aléatoire discrète ”dénombrable” de Poisson

Il s’agit bien d’une distribution de probabilité (voir TD), i.e.

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = 1 \,.$$

L’espérance est (voir TD)

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X = x) = \lambda \,.$$

La variance est (voir TD)

$$var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda \,.$$

Conclusion

- Notion de variable aléatoire,
- Loi de probabilité (complètement spécifiée par distribution de probabilité),
- Loi de probabilité restreinte à certains ensembles : fonction de répartition,
- Loi de probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales, formule de Bayes,
- Espérance, variance et écart-type.
- Notion de variable aléatoire dénombrable et transposition de la théorie.