

Examen MS1 INFO 105 – Simulation

Recommandations :

Les exercices sont indépendants.

Lire complètement l'énoncé avant de commencer.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction (commentaires, explications).

Tous documents autorisés.

Durée 2 heures.

Exercice 1 *Variable aléatoire*

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0, a]$ avec a réel strictement positif par :

$$\forall x \in [0, a], f(x) = \alpha x(x - a)$$

1. Pour a quelconque, calculer la valeur de α (en fonction de a) pour que f soit une fonction de densité.
2. Pour a quelconque, donner deux méthodes pour générer une variable aléatoire de densité f .

Exercice 2 *Chaîne de Markov*

Soit une chaîne de Markov en temps discret à 3 états numérotés de 0 à 2. Les transitions sont de $i \in \{0, 1\}$ vers $i + 1$ avec probabilité 0.5, de $i \in \{1, 2\}$ vers $i - 1$ avec probabilité 0.5, de 0 vers 2 avec probabilité 0.5 et de 2 vers 0 avec probabilité 0.5.

1. Dessiner le graphe de transition de la chaîne de Markov.
2. Donner P la matrice de transition de la chaîne de Markov.
3. Prouver que la chaîne est ergodique.
4. Calculer sa distribution stationnaire π .

On souhaite modifier cette chaîne de Markov en utilisant l'algorithme de Metropolis afin que la probabilité stationnaire des états soit une fonction croissante de leur numéro. Pour cela on choisit la distribution

$$\pi'(i) = \frac{e^i}{e^0 + e^1 + e^2}$$

5. Donner la matrice de transition P' , de distribution stationnaire π' , obtenue en appliquant l'algorithme de Metropolis.

Exercice 3 *File d'attente*

On considère une file de capacité infinie. Les durées inter-arrivées suivent une distribution exponentielle de paramètre λ .

La file comporte deux serveurs. Les clients sont servis en ordre FIFO et chaque client est servi par le premier serveur puis par le second. Les services (premier et second) sont de durées exponentielles de paramètres μ .

- quand un client a fini son premier service et que le deuxième serveur est libre, il commence aussitôt son service sur le deuxième serveur.
- quand un client a fini son premier service et que le deuxième serveur est occupé, il reste bloqué dans le premier serveur (et aucun autre client ne peut utiliser ce serveur) et dès que le second serveur se libère il commence son service dans le second serveur et libère le premier.
- quand un client termine son service sur le second serveur, il sort du système.
- le premier client en attente commence son service dès que le premier serveur se libère.
- un client qui arrive dans la file avec le premier serveur libre commence aussitôt son service sur le premier serveur.

3.1 Simulation

1. Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de cette file.
2. Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.
3. Donner le code nécessaire pour mesurer la probabilité que le premier serveur soit inactif alors qu'il y a des clients en attente.

3.2 Chaîne de Markov

4. Quelles informations doit on avoir dans les états pour qu'ils forment une chaîne de Markov ?
5. Définir l'espace d'états de la chaîne de Markov exprimant le comportement du modèle.
6. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov correspondant au modèle.
7. Donner les transitions de la chaîne de Markov.
8. Expliquer comment calculer la distribution stationnaire.
9. Que pouvez-vous dire de la condition de stabilité ?