Algorithmique de Graphes

M1 Informatique 2018–2019

Examen – Durée : 2h00

Durée 2h00.

Aucun livre ni appareil électronique autorisé.

Les réponses aux questions sont à donner **exclusivement** sur la **page de réponse** jointe à la fin de ce sujet.

<u>IMPORTANT LIRE CES INDICATIONS AVANT DE REPONDRE :</u> à chaque question est associée un nombre X de points par réponses (indiqué en gras dans l'intitulé de la question). Les questions sont de deux types

— **Les questions à choix unique :** une seule réponse est valide, donc une seule case est à cocher. Un bon choix de case apporte X points, un mauvais choix enlève X points ; aucune case cochée n'ajoute ni n'enlève aucun point.

— **Les questions à choix multiples :** une ou plusieurs réponses peuvent être correctes. La bonne réponse à chaque propriété (c'est à dire case cochée si la propriété est VRAIE, case non cochée si la propriété est FAUSSE) ramène X points, chaque mauvaise réponse retire X points (sur la note globale de l'examen). La note minimum (négative) pouvant attribuée à chacune de ces questions est $-X$.

Question 1 ♣

(**Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété**). Indiquer parmi les propriétés ci-dessous celles qui sont vraies concernant la forte-connexité des graphes **orientés** :

F [A] Tout DAG contenant un cycle hamiltonien est fortement connexe.

V [B] Si un graphe est fortement connexe alors il contient une arborescence couvrante et une anti-arborescence couvrante.

F [C] Tout graphe contenant une anti-arborescence couvrante dont la racine est de degré sortant non nul est fortement connexe.

F [D] Tout graphe contenant au moins une arborescence couvrante enracinée en chaque sommet est fortement-connexe.

F [E] Tout graphe orienté contenant une chaine hamiltonienne est fortement-connexe.

F [F] Si un graphe est connexe alors il contient une arborescence couvrante et une anti-arborescence couvrante de même racine.

Question 2 ♣

(**Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété**). Indiquer parmi les propriétés ci-dessous celles qui sont vraies concernant l'existence de cycles hamiltoniens (c'est à dire un cycle passant une et une seule foispar chaque sommet) ou eulériens des graphes **non-orientés connexes** :

F [A] Tout graphe hamiltonien contenant deux arbres couvrants deux à deux arête-disjoints est eulérien.

V [B] Tout graphe dont l'ensemble des arêtes peut être couvert par un ensemble de cycles hamiltoniens deux à deux disjoints est eulérien.

V [C] Tout graphe régulier de degré 2 est hamiltonien.

V [D] Tout graphe dont l'ensemble des arêtes peut être couvert par un ensemble de cycles deux à deux disjoints est eulérien.

F [E] Tout graphe hamiltonien est eulérien.

V [F] Tout graphe dont l'ensemble des arêtes peut être couvert par un nombre pair de cycles hamiltoniens deux à deux disjoints est eulérien.

Question 3 ♣ X à verifier

*(***Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété***)*. Soit G un graphe non orienté connexe. Un isthme dans G est une arête e telle que $G - \{e\}$ (c'est-à-dire le graphe où on supprime l'arête e sans supprimer ses extrémités) ne soit pas connexe.Indiquer parmi les propriétés ci-dessous celles qui sont vraies concernant l'existence de cycles hamiltoniens ou eulériens des graphes **non-orientés connexes** :

? ☐ A Si l'arête e est un isthme, il existe au moins une paire de sommets u et v telle que e est sur toute chaine entre u et v.

F ☐ B Si un graphe contient plus de deux isthme, c'est un arbre.

? ☐ C Si l'arête e est un isthme, elle apparait dans au moins une chaine élémentaire entre toute paire de sommets du graphe.

~ V ☐ D L'arête e est un isthme si et seulement si elle n'apparaît dans aucun cycle élémentaire.

~ V ☐ E Si u et v sont deux sommets contenu par un cycle de G, aucuns chaine entre u et v ne contient un isthme.

F ☐ F Tout graphe dont l'ensemble des arêtes peut être couvert par un ensemble de cycles deux à deux disjoints ne contient pas d'isthme.

V ☐ G Un graphe contenant une chaine hamiltonienne peut contenir un isthme.

Question 4 ♣ V à verifier

*(***Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété***)*. Soit G un graphe à n sommets. Soit DM la moyenne des degrés des sommets de G, c'est-à-dire la somme des degrés des sommets divisés par n. Indiquer les propriétés toujours vraies.

F ☐ A Si G est connexe alors $DM > 2$.

F ☐ B Si $DM = n - 1$ alors G contient une chaine hamiltonienne.

F ☐ C Si $DM = n - 1$ et que G est connexe, alors G contient au moins deux cycles.

F ☐ D Si $DM = \frac{(n-1)^2}{n}$ alors G est connexe.

V ☐ E Si G est un arbre, alors $DM = \frac{2(n-1)}{n}$.

Question 5 ♣ X à verifier

*(***Question à choix multiples ; X=0,3 points par propriété***)*. Soit $G = (V, E, \omega)$ un graphe connexe pondéré sur les arêtes par des entiers positifs. On indique par $m\_\omega(x, y)$ le plus petit poids d'une chaine entre x et y. Soient u, v, w trois sommets. Indiquer les propriétés toujours vraies.

V ☐ A On peut déterminer en temps polynomial un sommet x t.q. $Max(m\_\omega(x, u), m\_\omega(x, v), m\_\omega(x, z)$ est minimal en s'inspirant de Dijkstra.

☐ B On peut déterminer en temps polynomial un sommet x t.q. $Max(m\_\omega(x, u), m\_\omega(x, v), m\_\omega(x, z)$ est minimal en s'inspirant de Kruskall.

☐ C Un sommet x t.q. $Max(m\_\omega(x, u), m\_\omega(x, v), m\_\omega(x, z)$ est d'excentricité minimale dans G.

F ☐ D G peut contenir un cycle absorbant.

Question 6 ♣ V

*(***Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété***)*. Indiquer les propriétés toujours vraies, quelque soit $G = (V, A, cap)$ un réseau de flots, avec s la source et t le puits :

F ☐ A L'algorithme de Ford et Fulkerson ne fonctionne que si G est fortement connexe.

F ☐ B Il n'existe qu'une seule coupe minimale entre s et t dans G.

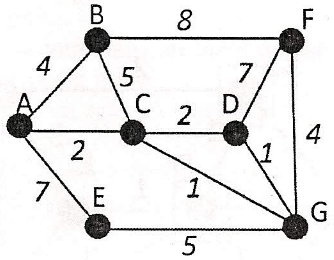
F ☐ C S'il existe plusieurs coupes minimales entre s et t dans G, alors il existe plusieurs valeurs de flot maximum entre s et t.

F ☐ D Chaque coupe maximale entre s et t dans G est saturée par tout flot maximum entre s et t.

V ☐ E Chaque coupe minimale entre s et t dans G est saturée par tout flot maximum entre s et t.

Question 7 V à verifier

*(***Question à choix unique ; X=1 point***)*. Considérons le graphe non-orienté pondéré suivant sur lequel on exécute l'algorithme de Kruskall.

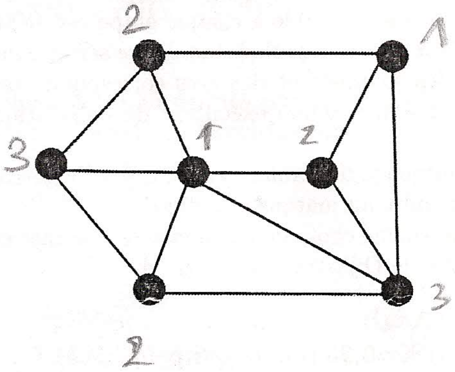


Combien d'arêtes sont possibles lors du 4^{eme} choix d'arête lors d'une exécution possible de l'algorithme :

F [A] Cela dépend des 3 premiers choix.
~ F [B] 3
V [C] 2

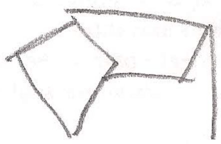
Question 8 ♣ V à verifier

*(***Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété***)*. Considérons le graphe non-orienté suivant :



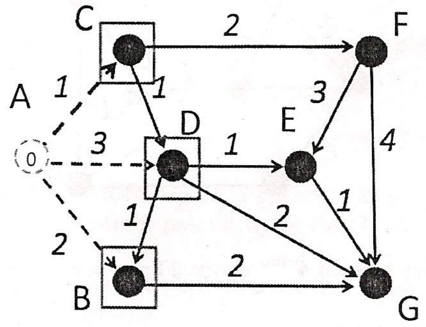
Quelles sont les propriétés vraies concernant ce graphe :

F [A] Il est 2-coloriable.
V [B] Il est connexe.
F [C] Il contient une clique maximale de taille au moins 4.
V [D] Il contient un sous graphe couvrant 2-coloriable de 9 arêtes.
V [E] Il est 3-connexe.
V [F] Il contient un sous graphe couvrant 2-coloriable de 8 arêtes.



Question 9 ♣ V à vérifier

*(***Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété***)*. Considérons le graphe orienté pondéré suivant dans lequel certains sommets sont marqués (encadrés) ainsi que certains arcs (pointillés). Le sommet A est considéré initialement marqué.



Quelles ont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes :

F [A] Quelle que soit une exécution correcte de l'algorithme de Dijkstra à partir de A, un seul plus court chemin de A à G peut être identifié.

F [B] La troisième étape de marquage de sommet et d'arc par l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A peut correspondre au marquage indiqué.

~ ? [C] Si le choix de chaque sommet possible à chaque étape est aléatoire uniforme, chaque plus court chemins de A à G a la même probabilité d'être sélectionné par l'algorithme.

F [D] Le marquage indiqué des sommets et des arcs correspond aux trois premières étapes de marquage de sommet et d'arcs d'une exécution de l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A.

F [E] La seconde étape de marquage de sommet et d'arc par l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A peut correspondre au marquage indiqué.

V [F] Il n'existe qu'un seul troisième choix de marquage de sommet et d'arc possible, pour toute exécution de l'algorithme de Dijkstra à partir de A.

X **Question 10** ♣ à vérifier

*(***Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété***)*. Considérons un graphe connexe $G = (V, E)$ contenant deux arbres couvrants arête-disjoints, dont l'un est une chaine hamiltonienne. Quelles sont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes :

⚠ ~ V [A] Le graphe G contient toujours un cycle hamiltonien.

V [B] Le degré minimum de G est au moins 2.

F [C] Si un graphe contient $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ arêtes, avec n son nombre de sommets, alors il contient deux tels arbres couvrants.

F [D] La suppression dans E de toutes les arêtes de la chaine hamiltonienne peut dans certains cas déconnecter le graphe.

X **Question 11** ♣ à vérifier

*(***Question à choix multiples ; X=0,75 points par propriété***)*. Un isthme dans un graphe non orienté connexe $G = (V, E)$ est une arête $e \in E$ telle que $G(V, E - \{e\})$ n'est pas connexe. Quelles ont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes :

F [A] Si tous les sommets de G connexe sont de degré pair, G ne contient pas d'isthme.

[B] Un graphe connexe de n sommets contenant un et un seul isthme peut contenir jusqu'à $\frac{n\times(n-1)}{2} - (n-1)$ arêtes.

[C] Un graphe contenant deux isthmes ne peut pas contenir de chaine hamiltonienne.

V [D] Il existe une infinité de graphes connexes dont chaque arête est un isthme.

Question 12 ♣

*(**Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété**).* On considère un graphe orienté sans boucle. Un sommet v est un puits si et seulement si pour tout sommet u différent de v, (u, v) est un arc et (v, u) n'est pas un arc. Quelles ont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes :

F [A] Un DAG peut contenir un puits.
F [B] Un graphe de $n > 0$ sommets contenant un puits contient au moins n arcs.
F [C] Un graphe peut contenir plusieurs puits.
V [D] Le degré entrant minimum d'un graphe contenant un puits est 1 et son degrés sortant mimim est 0.
F [E] Un graphe contenant un puits peut être fortement connexe.
V [F] Un graphe contenant un puits est connexe.

Question 13 ♣

*(**Question à choix multiples ; X=0,2 points par propriété**).* Soient G et H deux graphes non orientés connexes. La composition de G par H est le graphe noté $G@H$ obtenu en remplaçant chaque sommet u de G par une copie de H notée Hu, en ajoutant toutes les arêtes possibles entre les sommets de Hu et Hv ssi $[u, v]$ est un arête de G. Quelles ont les propriétés vraies parmi les assertions suivantes :

[A] Cette opération "@" est symétrique.
[B] On rappelle que $K(n)$ est le graphe complet à n sommets. Soit G un graphe de connexité k. La connexité de $G@K(n)$, avec $n > 1$, est k.
[C] Si G et H sont bipartis alors $G@H$ est biparti.
[D] Le diamètre de $G@H$ est la somme des diamètres de G et de H.
[E] Si $\chi(G) = 3$ alors $\chi(G@H) = \chi(H)$.

Question 14 ♣

*(**Question à choix multiples ; X=0,25 points par propriété**).* Soit $G = (V, E, w)$ un graphe non orienté connexe pondéré. On considère l'algorithme suivant.

Donnée : un graphe $G = (V, E, w)$
Résultat : Un graphe F
DEBUT
$F = (V, E' = E)$;
Trier les arêtes par poids décroissants ;
Pour chaque arête a prises dans cet ordre faire
Si $F = (V, E' - \{a\})$ est connexe alors $E' \leftarrow E' - \{a\}$;
FIN

F [A] Le graphe F est un ensemble d'arbres.
F [B] Le graphe F est un arbre couvrant de G de poids minimum.
V [C] Le graphe F obtenu ne dépend de pondération ω de G.
[D] Le graphe F ne peut jamais contenir une chaine hamiltonienne.