

## Examen MS1 INFO 105 – Simulation

### Recommandations :

Les exercices sont indépendants.

Lire complètement l'énoncé avant de commencer.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction (commentaires, explications).

Tous documents autorisés.

Durée 2 heures.

### **Exercice 1** *Variable aléatoire*

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle réel  $[0, A]$  avec  $A$  entier strictement positif par :

$$\forall n \in 1..A, \forall x \in [n-1, n], f(x) = \frac{1}{2^n} \alpha$$

1. Pour  $A = 1$ , pour quelle valeur de  $\alpha$ ,  $f$  est une fonction de densité, quelle loi est définie par cette fonction de densité ?
2. Pour  $A$  quelconque, calculer la valeur de  $\alpha$  (en fonction de  $A$ ) pour que  $f$  soit une fonction de densité.
3. Pour  $A$  quelconque, donner une méthode pour générer une variable aléatoire de densité  $f$ .

### **Exercice 2** *Chaîne de Markov*

Soit une chaîne de Markov ergodique en temps discret à  $N$  états de matrice de transition  $P$ . Soit  $I$  la matrice identité de taille  $N$ . Soit la matrice de  $P'$  définie par :

$$P' = \alpha I + (1 - \alpha)P$$

1. Pour quelles valeurs de  $\alpha$   $P'$ , est une matrice de transition.
2. Pour quelles valeurs de  $\alpha$   $P'$ , est une matrice de transition d'une chaîne ergodique.
3. Montrer que la si chaîne de Markov définie par  $P'$  est ergodique alors sa distribution stationnaire est la même que celle de  $P$ .

### **Exercice 3** *File d'attente*

On considère une file de capacité infinie. Les durées inter-arrivées suivent une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Chaque client est servi deux fois dans la file de la façon suivante :

- quand un client a fini son premier service et qu'il y a d'autres clients dans la file, il est remis en deuxième dans la file et le premier commence son service.
- quand un client a fini son premier service et qu'il n'y a pas d'autres clients dans la file, il commence aussitôt son second service.
- quand un client a fini son second service il sort de la file.

Les services (premier et second) sont de durées exponentielles de paramètres  $\mu$ .

#### **3.1 Simulation**

1. Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de ces files.
2. Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.
3. Donner le code nécessaire pour mesurer le temps moyen d'attente pour le second service.

#### **3.2 Chaîne de Markov**

4. Quelles informations doit on avoir dans les états pour qu'ils forment une chaîne de Markov ?
5. Définir l'espace d'états de la chaîne de Markov exprimant le comportement du modèle.
6. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov correspondant au modèle.
7. Donner les transitions de la chaîne de Markov.
8. Expliquer comment calculer la distribution stationnaire.
9. Que pouvez-vous dire de la condition de stabilité ?