

# M1 Informatique - Simulation

Youssef Ait El Mahjoub

[Franck.Quessette@uvsq.fr](mailto:Franck.Quessette@uvsq.fr)

Janvier 2017

## Table des matières

## Plan du Cours

- Mardi 19 mars 2019 **Cours 1** (FQ)  
Rappels sur les lois de proba discrètes (masse, distrib, moyenne)  
Lois de proba continues : exp, Poisson, propriété sans mémoire  
Présentation de la  $M/M/1$  résultats  
Bases de la SED  $M/M/1$  : Échéancier, variables, événements, durée de la simulation
- Mardi 25 mars 2019 **Cours 2** (FQ)  
Définition distribution.  
Définition DTMC, principe ergodicité, caractérisation, théorème ergodique.  
Distributions transitoires
- Mardi 01 avril 2019 **Cours 3** (FQ)  
DTMC : Calcul de la distribution stationnaire  
DTMC : simulation : tirage avec transformation inverse, calculs de statistiques à la volée.
- Mardi 08 avril 2019 **Cours 4** (JMF)  
Génération aléatoire (LCG, ...).  
Distributions générales (Transfo inverse, rejet, ...).
- Mardi 15 avril 2019 **Cours 5** (JMF)  
SED : échéancier, condition d'arrêt, collecte de stats.  
Lien avec la simulation de la DTMC
- Mardi 22 avril 2019 **Cours 6** (JMF)  
Logiciel de stat [R Project](#)

# 1 TD 1 – Introduction

## Exercice 1 Générateur aléatoire

Écrire un programme en C qui appelle 10 fois la fonction : `long int random()`.

Utiliser le man pour voir quelle librairie inclure.

1. Que constatez-vous si vous appelez plusieurs fois votre programme.
2. À quoi sert la fonction `void srand(unsigned int seed)` ?
3. Utiliser la fonction `pid_t getpid()` pour initialiser le générateur.
4. Comment générer des valeurs aléatoires uniforme dans l'intervalle  $[0..99]$  ?
5. Comment générer la valeur 0 avec une proba de 0.7 et la valeur 1 ?
6. Écrire une fonction `int Bernoulli (float p)` qui renvoie 1 avec une proba  $p$  et qui renvoie 0 avec une proba  $1 - p$ .
7. Écrire une fonction `int nb_arrivees (float p0, float p2)` qui renvoie 0 avec une proba  $p_0$ , qui renvoie 1 avec une proba  $(1 - p_0 - p_2)$  et qui renvoie 2 avec une proba  $p_2$ .

## Exercice 2 Première file d'attente

On considère une file de capacité infinie un serveur et en temps discret.

À chaque top un client est servi et il y a 0, 1 ou 2 arrivées avec les probabilités respectives  $p_0$ ,  $p_1$  et  $p_2$  avec  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ .

Le but est de mesurer le nombre moyen de clients dans la file ainsi que la probabilité que la file soit vide.

1. De quelles variables a-t-on besoin pour simuler cette file ?
2. Quels sont les événements ?
3. Écrire le code pour simuler cette file avec  $p_0 = 0.4$  et  $p_2 = 0.35$ . Arrêter la simulation quand  $10^6$  clients sont sortis de la file.
4. Quel code doit-on rajouter pour calculer la probabilité que la file soit vide ?
5. Quel code doit-on rajouter pour calculer le nombre moyen de clients ?
6. Écrire dans un fichier le nombre moyen de clients à chaque top. Que constatez-vous sur l'évolution du nombre moyen de clients ?
7. Simuler avec les valeurs  $p_0 = 0.8$  et  $p_2 = 0.1$ , comment évolue le nombre moyen de clients.
8. Simuler avec les valeurs  $p_0 = 0.35$  et  $p_2 = 0.6$ , comment évolue le nombre moyen de clients.

## Exercice 3 Arrêt de la simulation par intervalle de confiance

En reprenant le code de l'exercice précédent, proposer une solution pour arrêter la simulation quand le nombre moyen de clients s'est stabilisé.

Est-il possible que ce nombre ne se stabilise jamais ? Modifier le code pour tenir compte de la réponse à cette question.

Proposer un plan d'expérience pour calculer la limite de la stabilité de la file.

## Exercice 4 $M/M/1$

On considère une file de capacité infinie en temps continu.

Les arrivées suivent une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et les services suivent une loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

1. Quelle différence y a-t-il entre des arrivées poissonniennes et des inter-arrivées exponentielles ?
2. Simuler la  $M/M/1$  pour trouver la limite de stabilité.
3. Donner une courbe du nombre moyen de client en fonction du ration  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ .

## 2 TD 2 – Files compliquées

### Exercice 5 *File d'attente*

On considère une file de capacité finie  $B$  avec deux serveurs qui se suivent. Les durées inter-arrivées suivent une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Quand un client arrive et que la file est pleine, il est rejeté. Le service se fait en deux étapes : un client qui commence son service passe dans le premier serveur, puis dans le second, puis sort de la file. Le premier client en attente commence son service au moment où le client précédent passe du premier au second serveur ou bien s'il est tout seul dans la file. Les durées des services dans les deux serveurs suivent une loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

1. Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de cette file.
2. Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.
3. Donner le code nécessaire pour mesurer la probabilité qu'un client soit rejeté.

### Exercice 6 *File d'attente*

On considère une file de capacité infinie. Les durées inter-arrivées suivent une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

La file comporte deux serveurs. Les clients sont servis en ordre FIFO et chaque client est servi par le premier serveur puis par le second. Les services (premier et second) sont de durées exponentielles de paramètres  $\mu$ .

- quand un client a fini son premier service et que le deuxième serveur est libre, il commence aussitôt son service sur le deuxième serveur.
  - quand un client a fini son premier service et que le deuxième serveur est occupé, il reste bloqué dans le premier serveur (et aucun autre client ne peut utiliser ce serveur) et dès que le second serveur se libère il commence son service dans le second serveur et libère le premier.
  - quand un client termine son service sur le second serveur, il sort du système.
  - le premier client en attente commence son service dès que le premier serveur se libère.
  - un client qui arrive dans la file avec le premier serveur libre commence aussitôt son service sur le premier serveur.
1. Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de cette file.
  2. Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.
  3. Donner le code nécessaire pour mesurer la probabilité que le premier serveur soit inactif alors qu'il y a des clients en attente.

### Exercice 7 *File d'attente*

On considère une file de capacité infinie avec un seul serveur. Les durées inter-arrivées suivent des distributions exponentielles. S'il y a  $n$  clients, le processus d'inter-arrivées suit une loi  $\exp((n+1)\lambda)$ . Les services suivent une loi exponentielle dépendant du nombre de clients. S'il y a  $n$  clients dans la file, le service est  $\exp(n\mu)$ .

1. Donnez les événements, les variables nécessaires à la simulation de cette file.
2. Pour chaque événement donner le code modifiant l'échéancier et les variables.
3. Donner le code nécessaire pour mesurer la probabilité que la file soit vide.

### 3 TD 3 – Probabilités et Générateurs

#### Exercice 8 Variable aléatoire

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[-A, +A]$  avec  $A$  réel strictement positif par :

$$\forall x \in [-A, +A], f(x) = \alpha x^2$$

1. Calculer la ou les valeurs de  $\alpha$  (en fonction de  $A$ ) pour que  $f$  soit une fonction de densité.
2. Calculer la ou les valeurs de  $\alpha$  (en fonction de  $A$ ) pour que  $f$  soit une fonction de répartition.
3. Donner une méthode pour générer une variable aléatoire de densité  $f$ .

#### Exercice 9 Variable aléatoire

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0, A]$  avec  $A$  réel strictement positif par :

$$\forall x \in [0, A], f(x) = \alpha x(A - x)$$

1. Calculer la ou les valeurs de  $\alpha$  (en fonction de  $A$ ) pour que  $f$  soit une fonction de densité.
2. Calculer la ou les valeurs de  $\alpha$  (en fonction de  $A$ ) pour que  $f$  soit une fonction de répartition.
3. Donner une méthode pour générer une variable aléatoire de densité  $f$ .

#### Exercice 10 LCG

On considère le LCG suivant :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = (7 \times x_n + 3) \bmod 10 \end{cases}$$

1. Calculer la période du générateur (valeur minimale de  $n$  telle que  $x_n = x_0$ ).
2. Donner les périodes pour toutes les valeurs de la graine  $x_0$  de 0 à 9.

#### Exercice 11 Génération de v.a. de loi exponentielle

Dans cet exercice on utilise la fonction `random()` de la librairie standard du `C`

1. Utiliser la méthode de transformation inverse pour générer 100 valeurs de loi exponentielle de paramètre 1.
2. Afficher la fonction de répartition de ces valeurs.
3. Afficher par dessus la fonction de répartition théorique de la loi exponentielle.
4. Recommencer avec  $10^3$  puis  $10^6$  valeurs au lieu de 100.