Université de Versailles –St Quentin-en-Yvelines

Examen de mise à niveau en mathématique discrètes - M1 informatique Paris Saclay (UVSQ)

Michaël Quisquater

Remarques :

- Pour chacune des questions, on demande de justifier les étapes en mentionnant notamment les algorithmes utilisés.
- Aucun document ni aucune calculatrice ne sont admis.
- La durée de l'examen est de deux heures.

## Partie I : Théorie

1. Expliquez ce que représente la fonction totient d'Euler et donnez sa définition. Expliquez comment on l'évalue et énoncez le théorème sur lequel vous vous basez. Prouvez ce qui a été vu au cours concernant ce résultat. Enoncez et prouvez le théorème d'Euler.
2. Définir la notion de variable aléatoire, de loi de probabilité d'une variable aléatoire, de distribution de probabilité et de fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète. Définir la notion d'espérance et de variance d'une variable aléatoire et donnez quelques propriétés. Que représentent ces indicateurs ? Pourquoi a-t-on introduit la notion d'écart-type ?

## Partie II : Exercices

**Exercice 1 :** Montrez que le produit de deux classes de congruence défini pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ par

$$[a + n\mathbb{Z}] \cdot [b + n\mathbb{Z}] \overset{def}{=} [(a \cdot b) + n\mathbb{Z}]$$

ne dépend pas des représentants choisis.

**Exercice 2 :** Déterminez deux éléments $a \in \mathbb{Z}$ tels que $[19 + 217\mathbb{Z}] \cdot [a + 217\mathbb{Z}] = [1 + 217\mathbb{Z}]$ ou montrez que de tels éléments n'existent pas.

**Exercice 3 :**

1. Montrez que le reste de la division par 8 du carré de tout nombre naturel impair vaut 1.
2. En utilisant une propriété du pgcd, déterminez $pgcd(3 \cdot n + 2, 2 \cdot n + 1)$ pour chacune des valeurs $n \in \mathbb{Z}$.

…iable aléatoire :

**Exercice 4 :** Considérons $\Omega = \{0, 1, \cdots, 11\}$ et une loi de probabilité telle que $P(\{w\}) = 1/12$ pour tout $w \in \Omega$. Définissons les v.a.'s

$$X : \Omega \to \mathbb{R} : w \mapsto X(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \text{ est un multiple de } 3 \\ 2 & \text{si } (w-1) \text{ est un multiple de } 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$Y : \Omega \to \mathbb{R} : w \mapsto Y(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \text{ est un multiple de } 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Questions :**

1. Déterminez la distribution de probabilité des v.a.'s $X$ et $Y$,
2. Montrez que les v.a.'s $X$ et $Y$ sont stochastiquement indépendantes,
3. Calculez l'espérance de $X$ et de $Y$,
4. Calculez la variance de $X$ et de $Y$,
5. Calculez l'écart-type de $X$ et de $Y$,
6. Calculez les fonctions génératrices des probabilités de $X$ et $Y$. Déduisez-en la distribution de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$.

**Exercice 5 :** Dans la salle des professeurs 60 pourcents sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes. Quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?