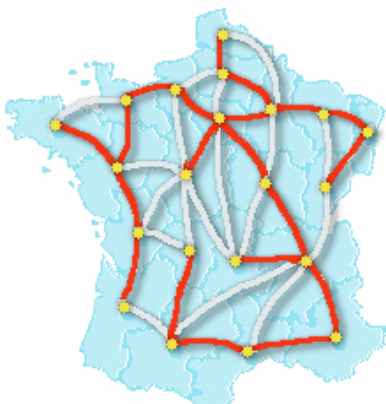
Introduction au cours d'algorithmique de graphes et applications

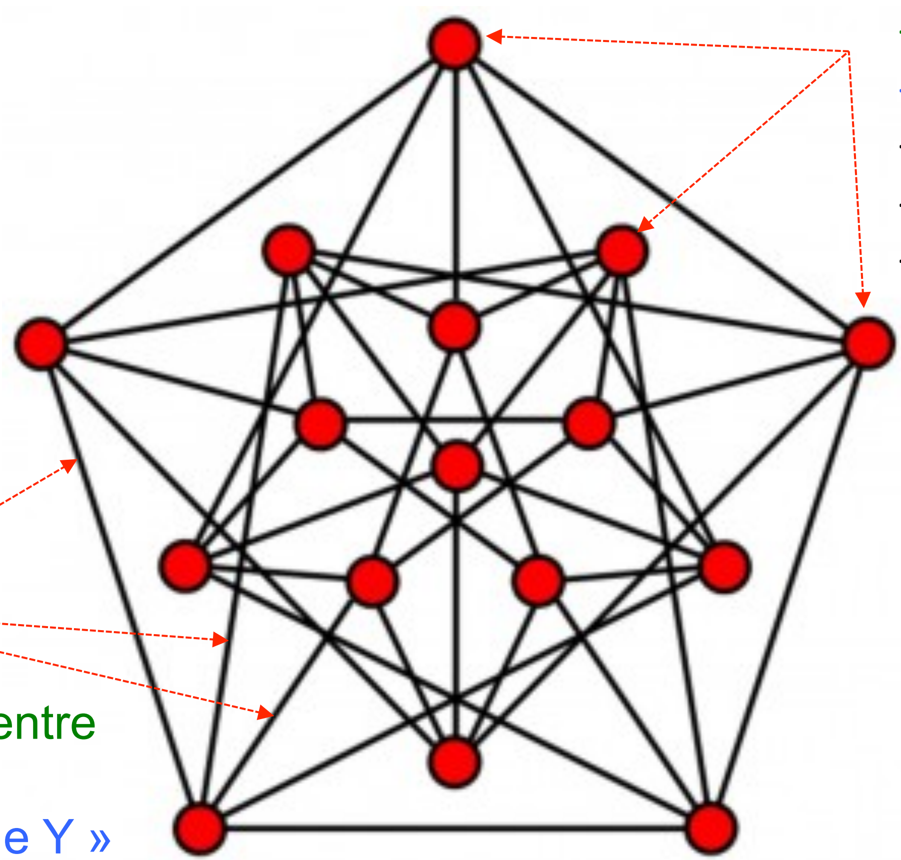
M1 Informatique de Versailles

Dominique Barth, UVSQ

Qu’est ce qu’un graphe :

un objet mathématique et une structure de donnée modélisant des éléments d’un ensemble en relation



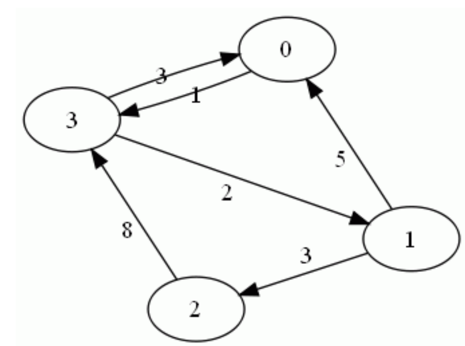


Elements

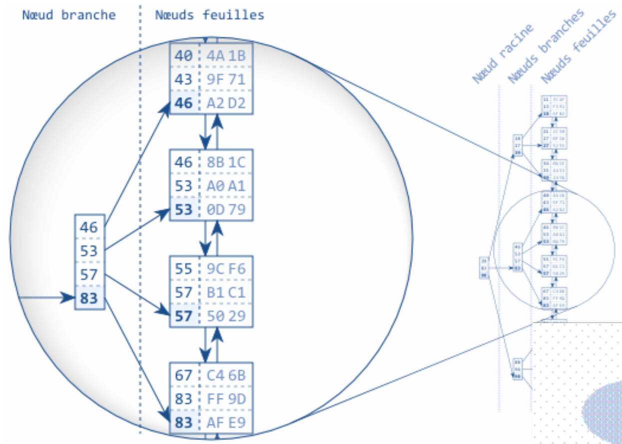
- Lieux
- Données
- Routeurs
- Insructions,
- ..

Relations

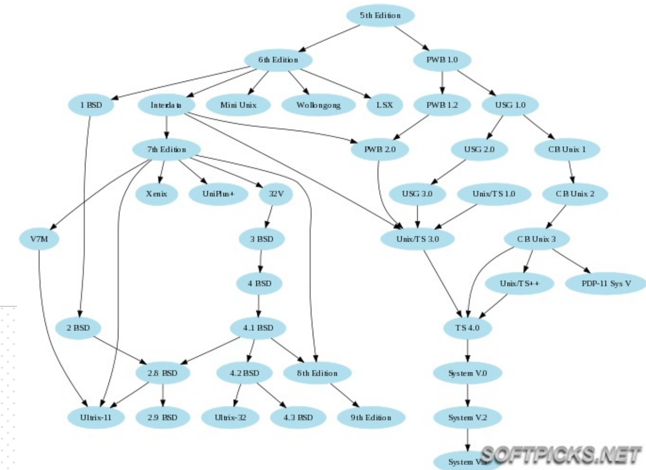
- « Il existe un route entre deux villes »
- « X est plus petit que Y »



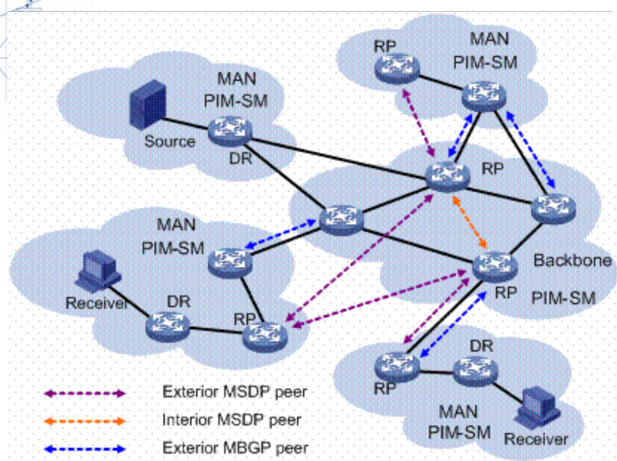
Au coeur de plusieurs disciplines en informatique …



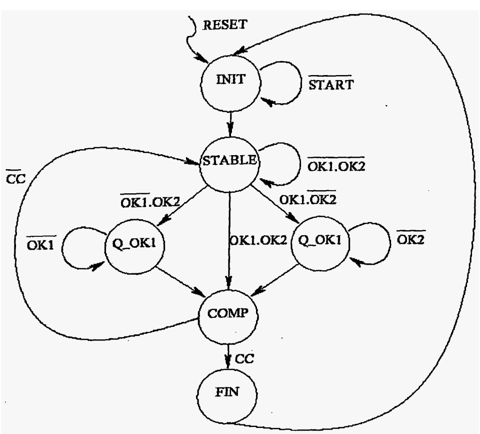
Bases de données



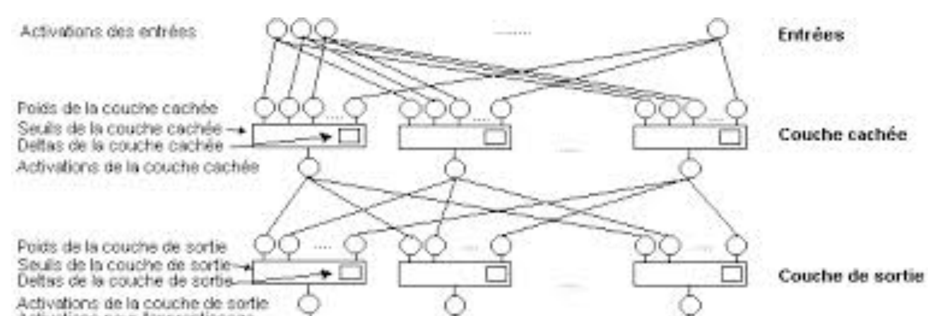
Génie logiciel



Réseaux et télécoms

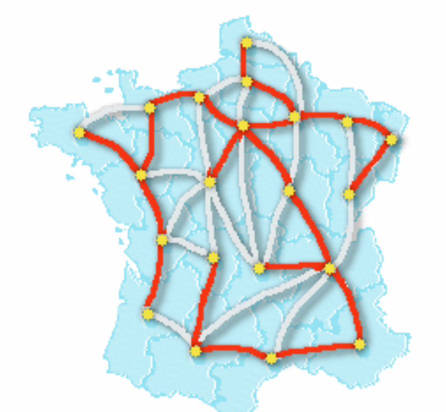


Cryptographie et sécurité

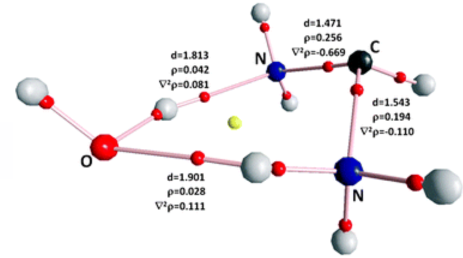


Architecture

.. Et au coeur de plusieurs domaines d'applications …

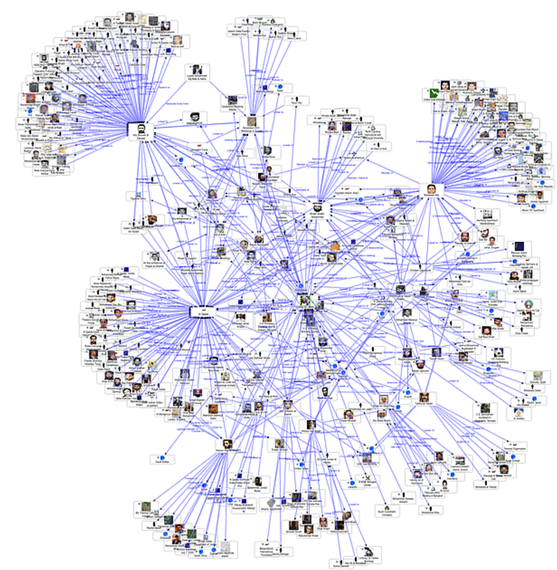


Transport/énergie

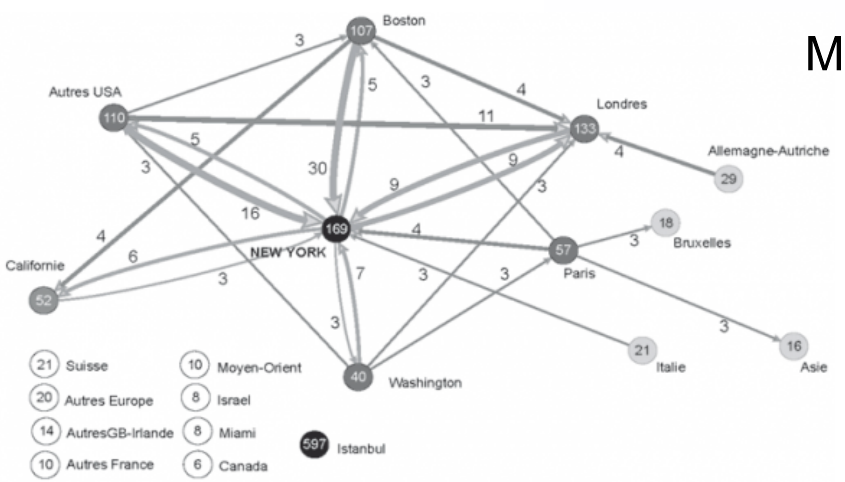


Biologie/Chimie

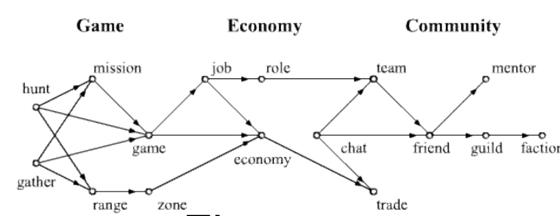
Médecine et santé



Réseaux sociaux



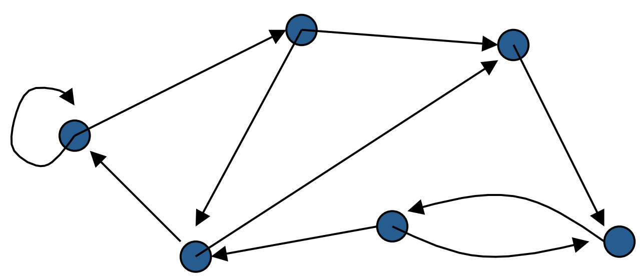
Sciences humaines et sociales



Finance

Définitions – cas orienté

- Un **graphe orienté** G est un couple (V,A) où
  - V est un ensemble d'éléments appelés **sommets** ou **nœuds** (en anglais : *vertex, vertices*)
  - A est une partie de VxV, chaque élément de A est un **arc** (*edge* ou *arc* en anglais).

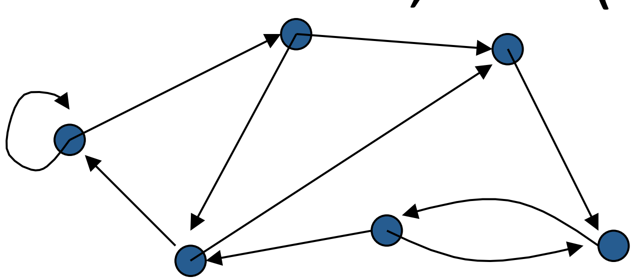


(vrai) graphe orienté

- Degrés
- Distances, diamètre
- Chaine, chemin, cycle, circuits
- Connexité, forte-connexité, k-connexité
- pondération, étiquetage

Définitions – cas orienté

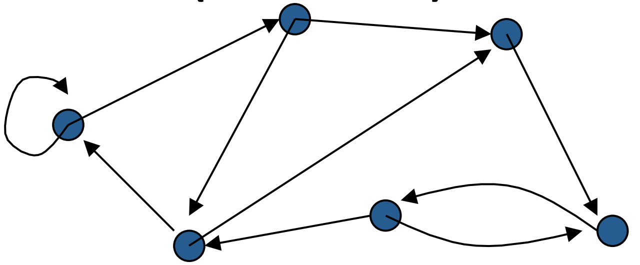
- Pour un arc (v,w) d'un graphe orienté, on dit que w est un **successeur** de v, et que v est un **prédécesseur** de w.
- Deux arcs sont consécutifs si l'extrémité finale de l'un est l'extrémité initiale de l'autre ((u,v),(v,z)).
- Une **boucle** est un arc (u,u)
- Un graphe orienté est **complet** si pour tout couple de sommets u et v, l'arc (u,v) existe ou l'arc (v,u) existe.



(vrai) graphe orienté

Définitions- cas orienté

- Un arc est **entrant (sortant)** d'un sommet si ce sommet est son extrémité initiale (finale).
- Degrés d'un sommet
  - Le **degré sortant** de v, noté $d^+(v)$, est le nombre d'arcs dont v est origine.
  - Le **degré entrant** de v, noté $d^-(v)$, est le nombre d'arcs dont v est extrémité
- Le **degré entrant (sortant) d'un graphe** est le degré entrant(sortant) maximum de ses sommets.



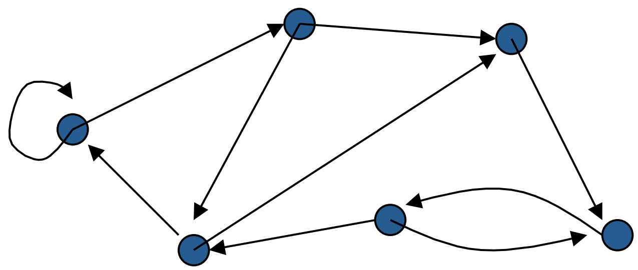
(vrai) graphe orienté

Définitions – cas orienté

- Un **graphe orienté** G est un couple (V,E) où
  - V est un ensemble d'éléments appelés **sommets** ou **nœuds** (en anglais : *vertex, vertices*)
  - A est une partie de VxV, chaque élément de A est un **arc** (*edge* ou *arc* en anglais).
- Un **graphe orienté** G=(V,A) est orienté-symétrique ssi (u,v) est un arc implique que (v,u) est un arc

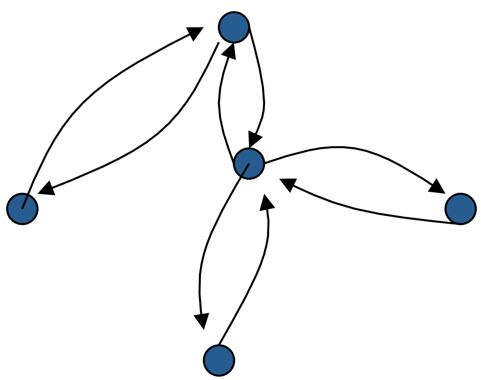
Graphes : relation (application de V*V dans {Vrai,Faux})

Graphe de la relation, matrice d'adjacence, listes par extension

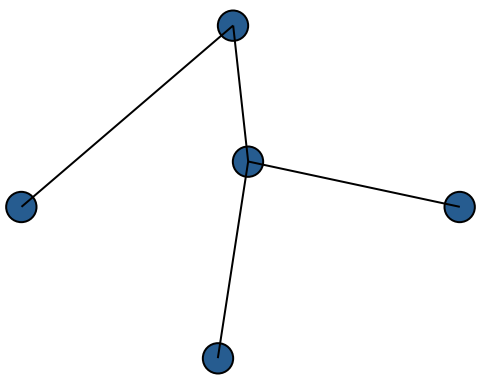


(vrai) graphe orienté

- Degrés
- Distances, diamètre
- Chaine, chemin, cycle, circuits
- Connexité, forte-connexité, k-connexité
- pondération, étiquetage



Graphe orienté symétrique

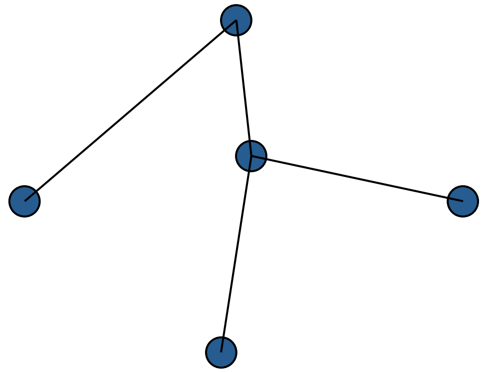


Graphe non-orienté

Définitions – cas non-orienté

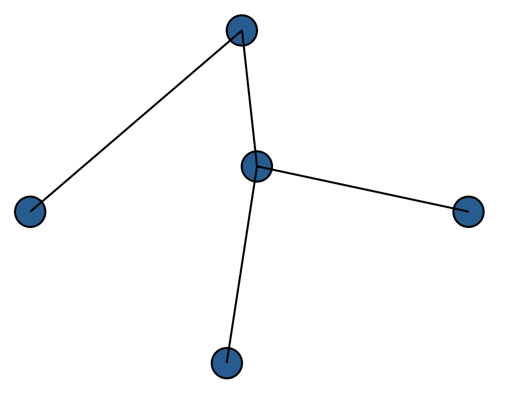
Une vision paresseuse du graphe orienté symétrique…

- Un **graphe non orienté** est un couple (V,E) où
  - V est un ensemble d'éléments appelés **sommets** ou **nœuds** (en anglais : *vertex, vertices*)
  - E est une partie de l'ensemble des paires (non ordonnées) de sommets. Chaque élément de E est une **arête** (*edge* en anglais).



Définitions – cas non-orienté

- Une arête est **incidente** à un sommet si ce sommet est l'une de ses extrémités.
- Le **degré** d'un sommet v, noté d(v), est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.
- Le **degré d'un graphe** est le degré maximum de ses sommets.

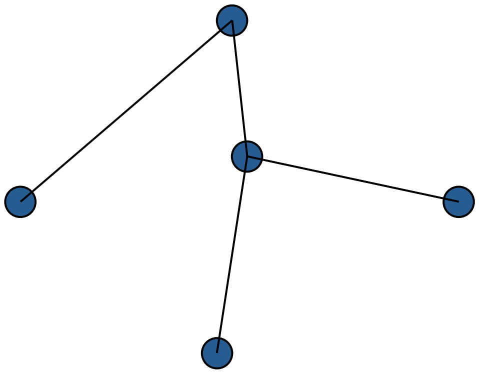


Graphe non-orienté

Arbres et DAGs

Définitions – cas non-orienté

Un **arbre** est un graphe non-orienté connexe sans cycle.



Définitions – cas orienté

- Un **DAG** est un graphe orienté connexe sans circuit
- Un **arbre** est un DAG sans cycle
- Une **arborescence** est un arbre avec un seul sommet de degré entrant nul *(la racine)*
- Une anti-**arborescence** est un arbre avec un seul sommet de degré sortant nul *(la racine)*

Questions :

- *un DAG peut-il être fortement connexe?*
- *Comment reconnaître qu'un graphe orienté connexe est un DAG?*

Chaines, chemins, cycles et circuits

Définitions – cas orienté

- Un **chemin** est une suite de sommets $v_0v_1\ldots v_n$ telle que chaque couple de sommets successifs est un arc. La **longueur** du chemin est n.
- Un **circuit** est un chemin tel que $v_0=v_n$.
- Un graphe orienté est **fortement connexe** si et seulement si pour tout couple de sommets il existe un chemin entre ces deux sommets.
- Un graphe orienté G est **connexe** si et seulement si pour tout couple de sommets il existe une chaîne entre ces deux sommets dans le graphe non orienté obtenu en supprimant l'orientation des arcs de G.

Définitions – cas non-orienté

- Une **chaîne** est une suite de sommets $v_0v_1…v_n$ telle que chaque paire de sommets successifs v_iv_{i+1} est soit un arc (v_iv_{i+1}), soit un arc $(v_{i+1}v_i)$
- La **longueur** de la chaîne est n.
- Un **cycle** est une chaîne telle que $v_0=v_n$.
- Un graphe non orienté est **connexe** si et seulement si pour tout couple de sommets il existe une chaîne entre ces deux sommets.

Pas si simple….

Il y a des chaine et des cycles dans les graphes orientés…

- Un graphe orienté G est **connexe** si et seulement si pour tout couple de sommets il existe une chaîne entre ces deux sommets dans le graphe non orienté obtenu en supprimant l'orientation des arcs de G.

…et il y a des circuits et des chemins dans les graphes non-orientés (graphes orientés symétriques)

Sous-graphes

Définitions

- Un **sous graphe (partiel)** d'un graphe G=(V,E) est un graphe G'=(V',E') tel que
  - V' est inclus dans V,
  - et E' est inclus dans E.
- Soit W un sous-ensemble de V. Le **sous-graphe de G induit par l'ensemble de sommets W** est le sous-graphe (W,E') où E' est l'ensemble des arêtes (ou arcs) de G dont les deux extrémités sont dans W.

Définitions

- Un **sous graphe** G'=(V',E') d'un graphe G=(V,E) est **couvrant** ssi V'=V
  - V' est inclus dans V,
  - et E' est inclus dans E.

Questions :

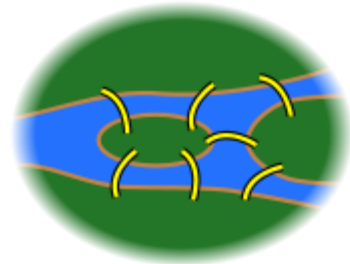
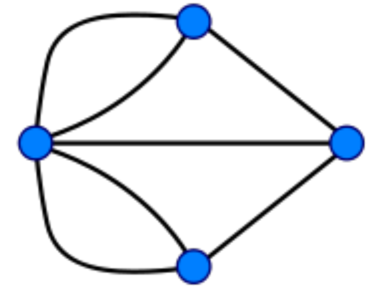
- un sous graphe partiel est-il induit ou un sous-graphe induit est-il partiel?

- que peut on dire d'un sous-graphe couvrant induit de G?

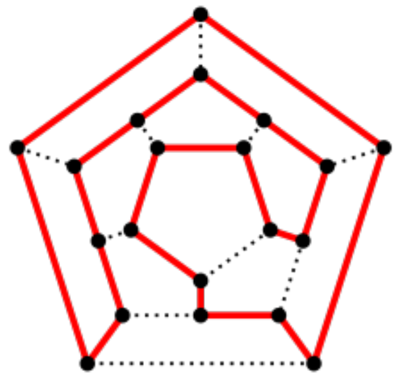
Une veille science en informatique…

L.P. Euler (1707 – 1783)



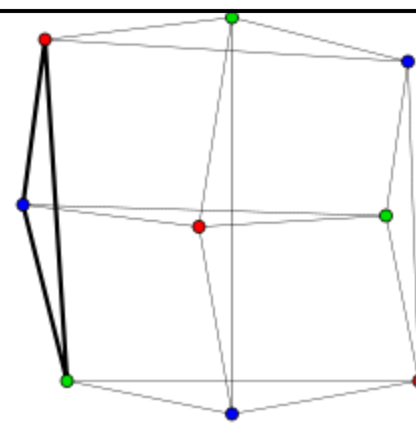



W.R. Hamilton (1805 – 1865)

Claude Berge (1926 – 2002)





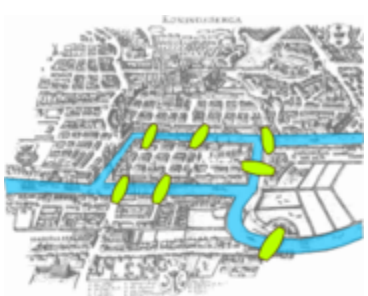
PROBLÈMES DE CHEMINS : LE CHEMIN EULÉRIEN

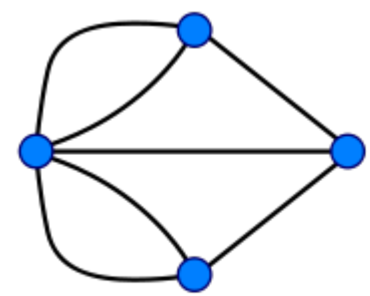
Chemin/chaîne eulérien(ne)

- Un chemin (chaîne) eulérien dans un graphe G est un chemin (chaîne) qui passe une et une seule fois par chaque arc (arête).
- Un graphe est **eulérien** s'il admet un chemin (chaîne) eulérien.
- Un cycle (circuit) eulérien dans un graphe G est un cycle (circuit) qui passe une et une seule fois par chaque arc (arête).

Pourquoi « eulérien ? »

L.P. Euler (1707 – 1783)





Les ponts de Königsberg (1766)

Théorème

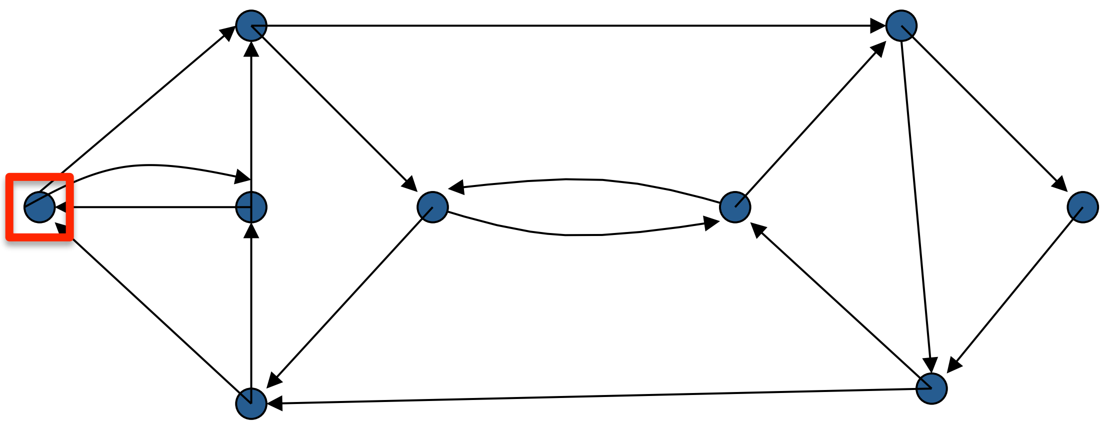
Un graphe non orienté connexe est eulérien si et seulement si le nombre de sommet de degré impair est 0 ou 2.

Preuve : exercice. Par double implication.

1. Si G est eulérien alors… *facile* !
2. Si le nombre de sommets de G de degré impair est 0 ou 2 alors… *par récurrence sur le nombre d'arêtes de G*.

(*Remarque : si le nombre est 0, alors le graphe contient un circuit eulérien*.)

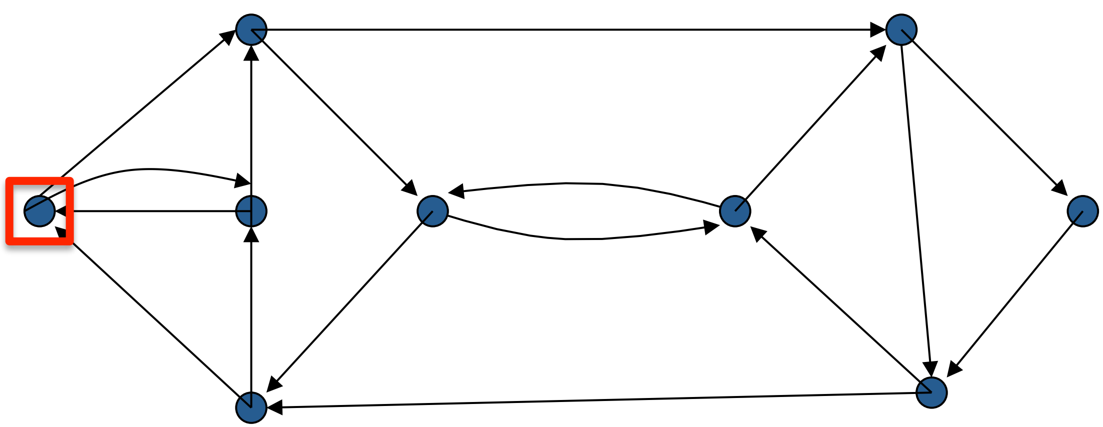
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

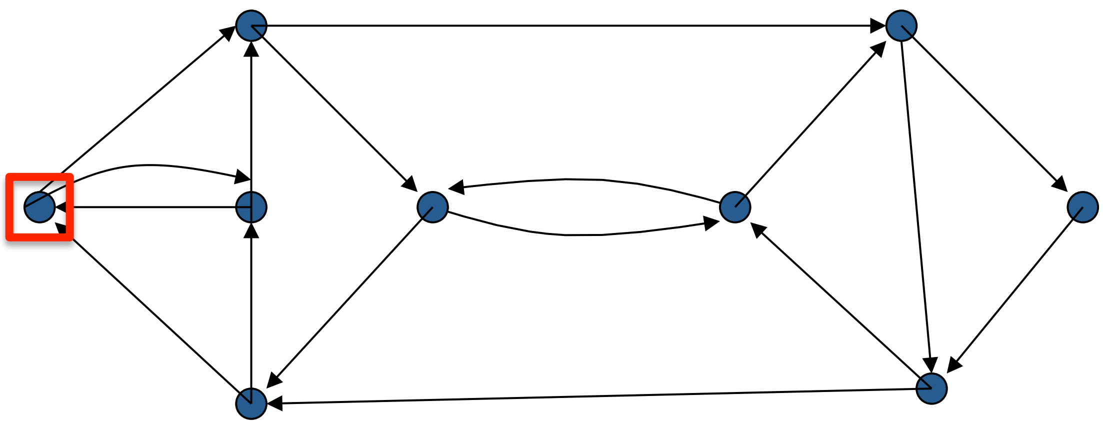
Théorème (Euler, 1786): Un graphe G est eulérien si en chaque sommet il y a autant d'arcs qui arrivent que d'arcs qui partent.



Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

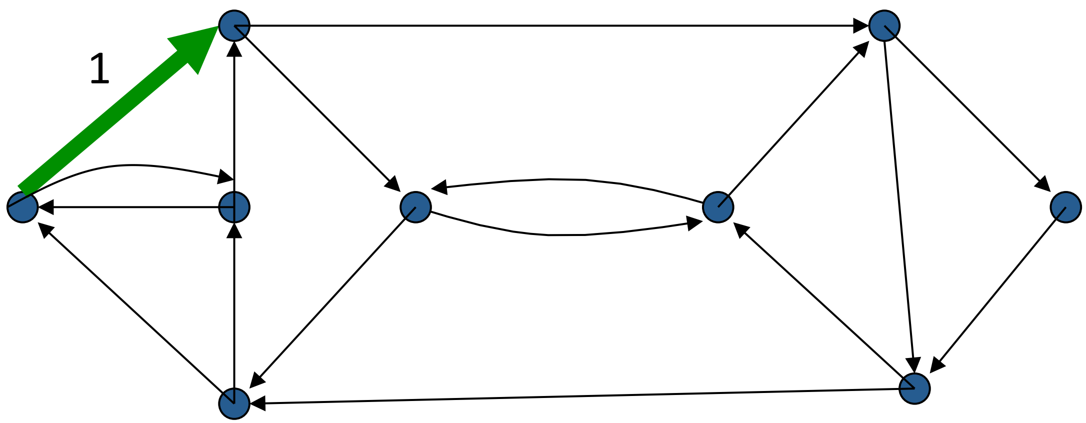
Première idée : se promener au hasard sans reprendre une rue déjà prise auparavant



Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

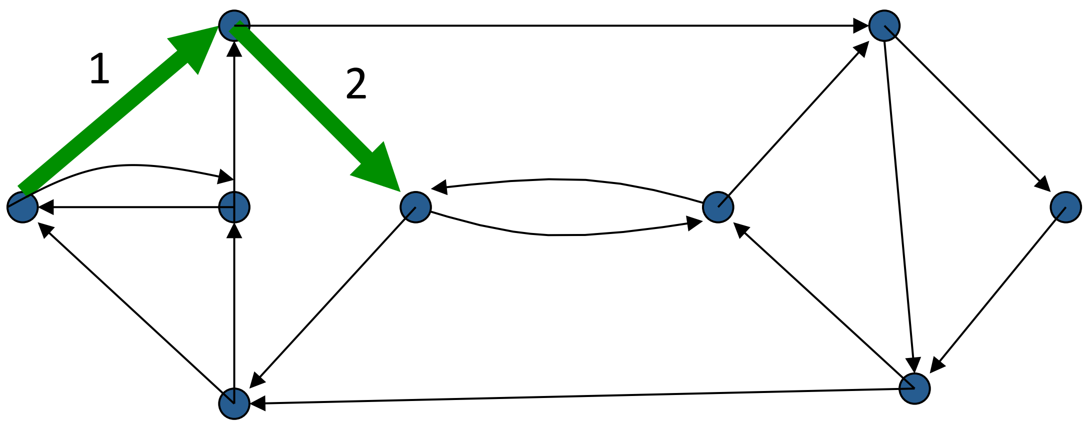
Première idée : se promener au hasard sans reprendre une rue déjà prise auparavant



Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

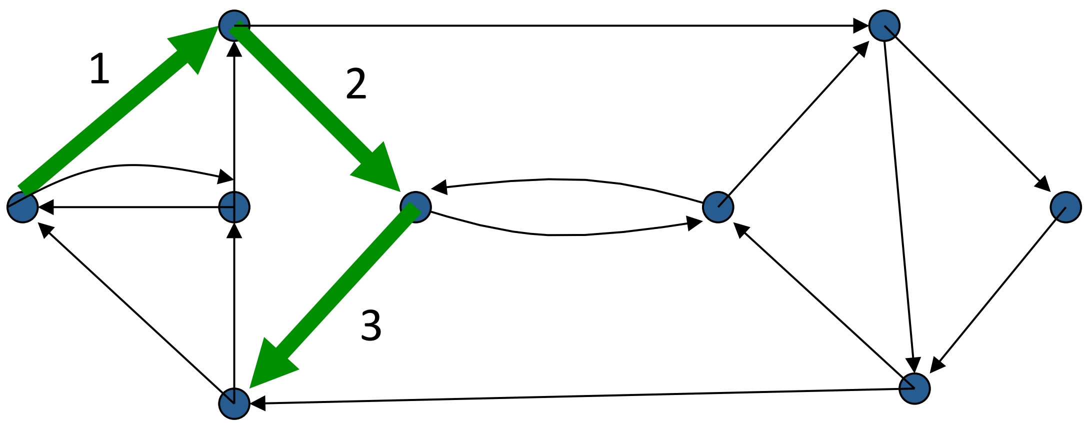
Première idée : se promener au hasard sans reprendre une rue déjà prise auparavant



Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

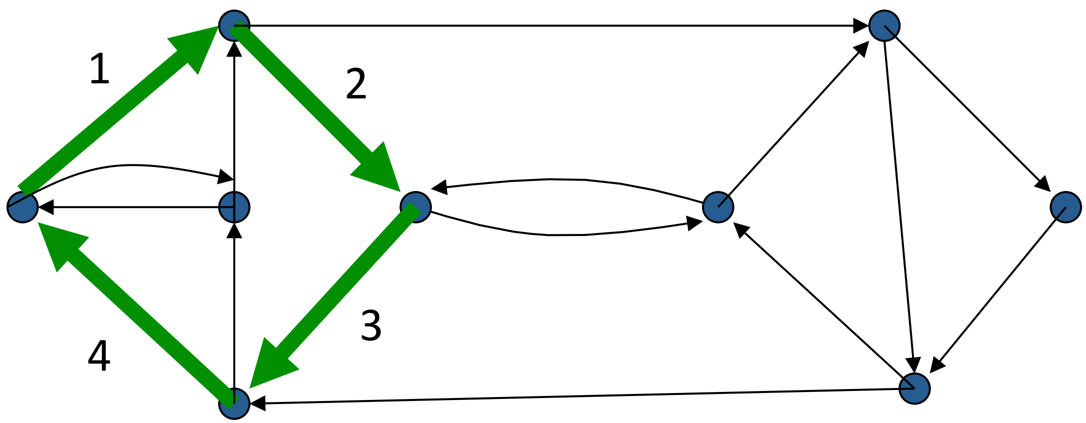
Première idée : se promener au hasard sans reprendre une rue déjà prise auparavant



Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

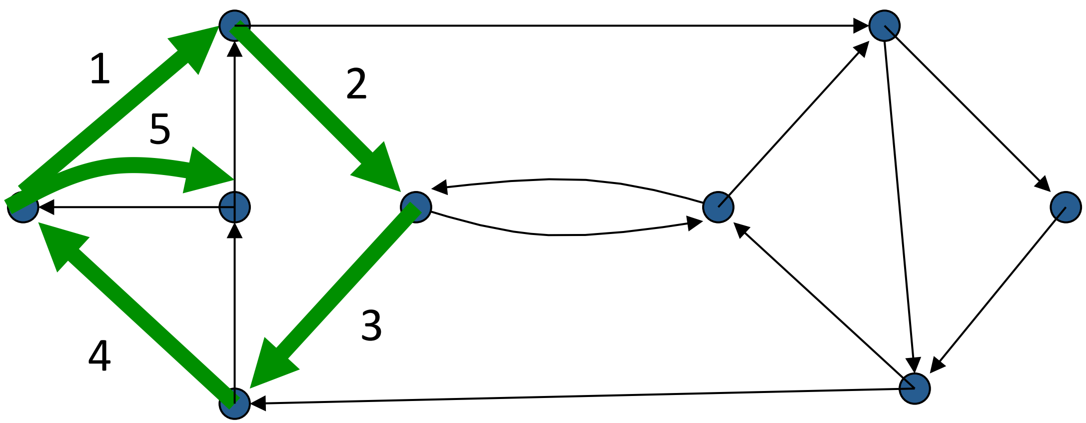
Première idée : se promener au hasard sans reprendre une rue déjà prise auparavant



Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

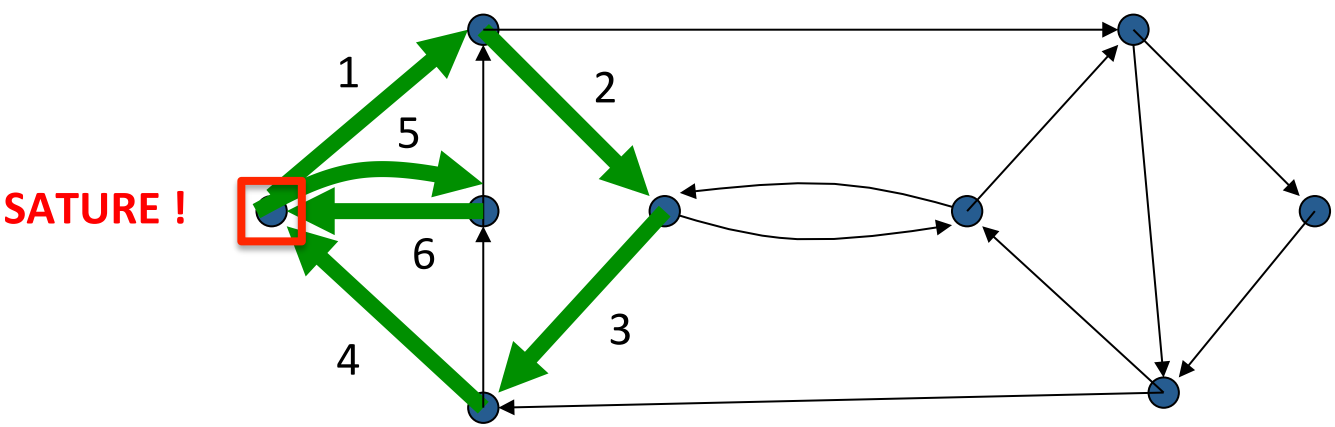
Première idée : se promener au hasard sans reprendre une rue déjà prise auparavant



Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

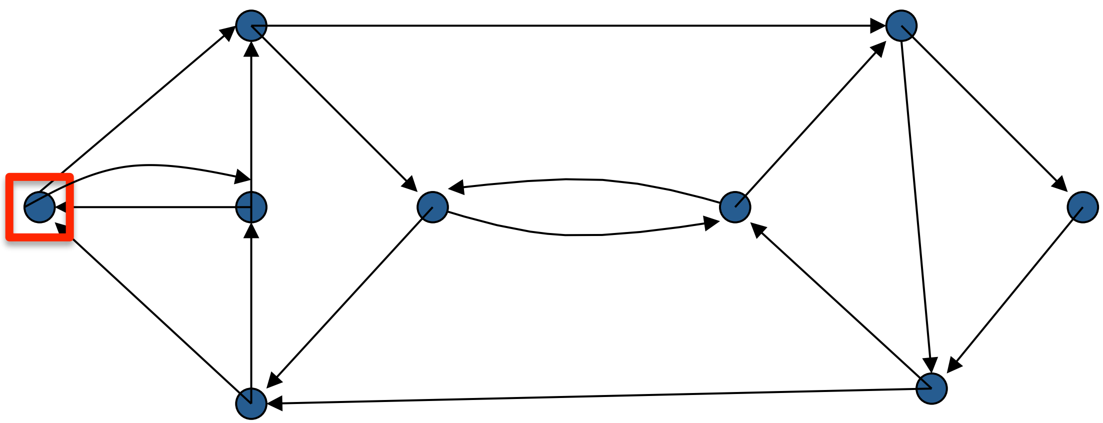
Première idée : se promener au hasard sans reprendre une rue déjà prise auparavant



MAUVAISE IDEE

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

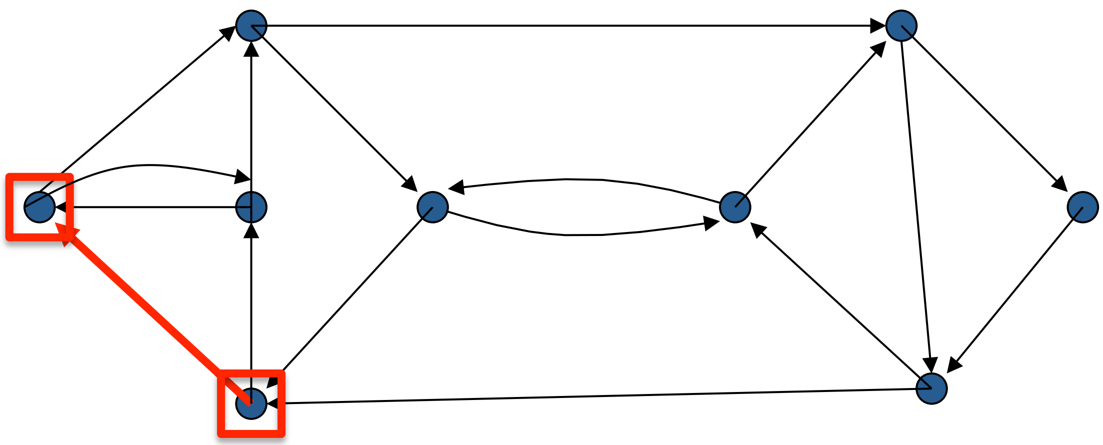
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



- Marquer un sommet « racine »
- Tant qu'il y a un arc d'un sommet non marqué vers un sommet marqué,
- marquer le sommet de départ et l'arc.

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

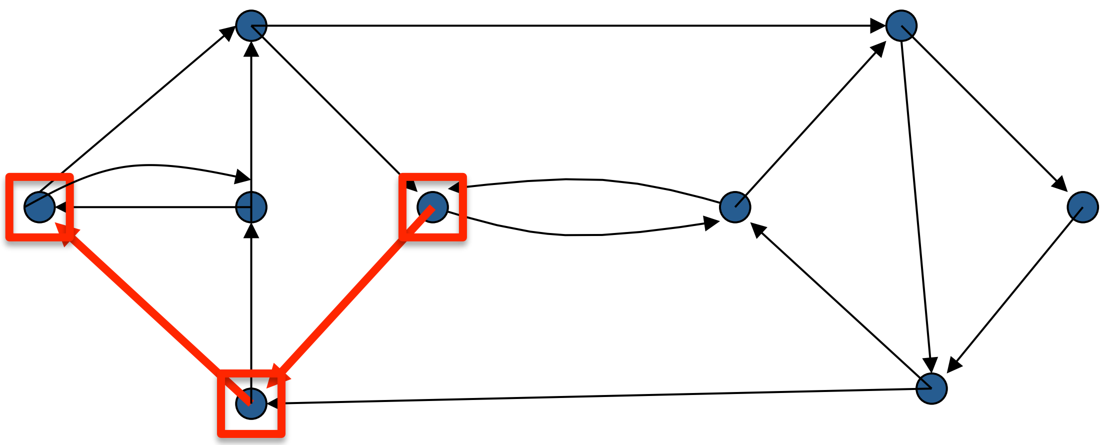
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



- Marquer un sommet « racine »
- Tant qu'il y a un arc d'un sommet non marqué vers un sommet marqué,
- marquer le sommet de départ et l'arc.

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

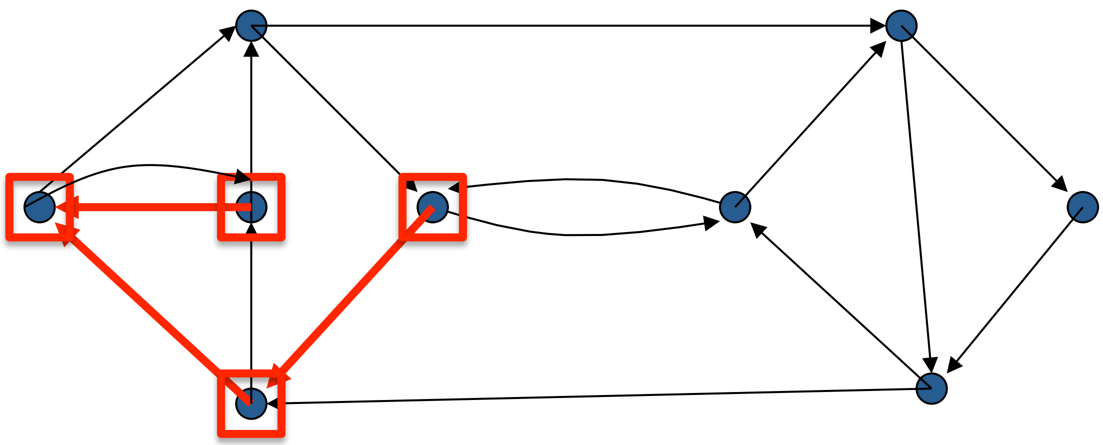
Le problème du postier chinois (existence d’un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



- Marquer un sommet « racine »
- Tant qu’il y a un arc d’un sommet non marqué vers un sommet marqué,
- marquer le sommet de départ et l’arc.

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

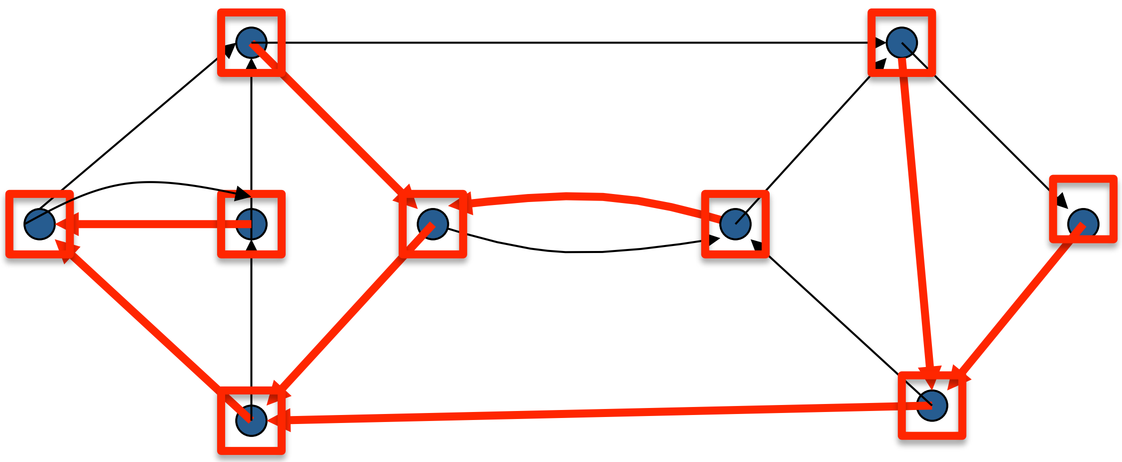
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



- Marquer un sommet « racine »
- Tant qu'il y a un arc d'un sommet non marqué vers un sommet marqué,
- marquer le sommet de départ et l'arc.

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

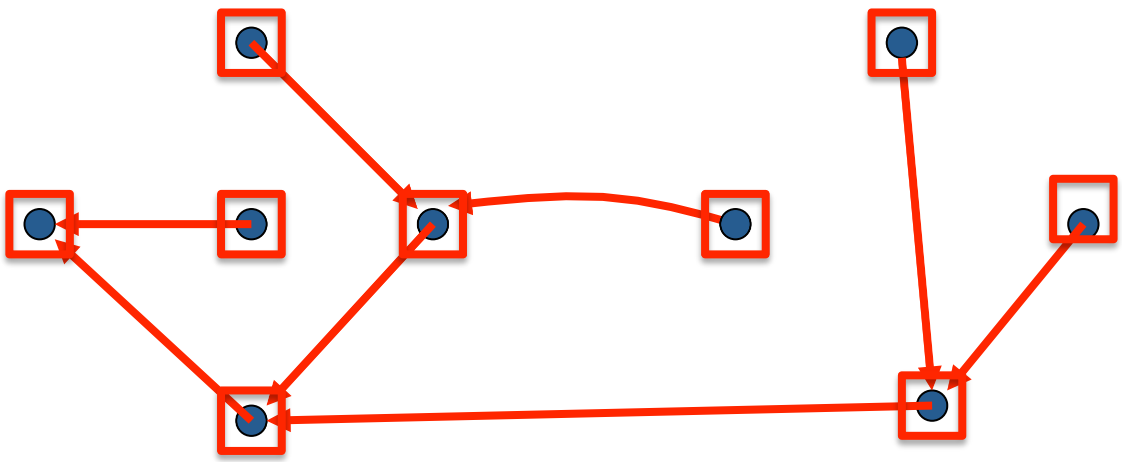


- Marquer un sommet « racine »
- Tant qu'il y a un arc d'un sommet non marqué vers un sommet marqué,
- marquer le sommet de départ et l'arc.

ANTI-ARBORESCENCE COUVRANTE

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

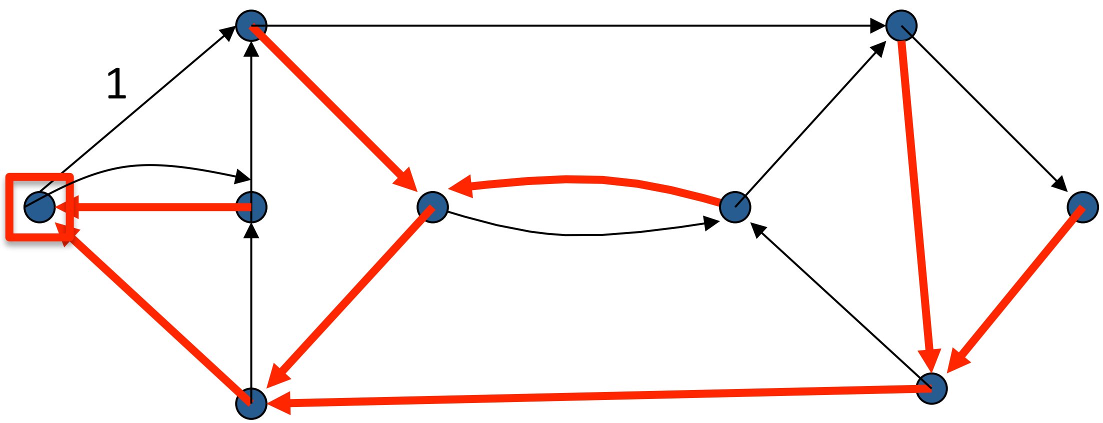


- Marquer un sommet « racine »
- Tant qu'il y a un arc d'un sommet non marqué vers un sommet marqué,
- marquer le sommet de départ et l'arc.

ANTI-ARBORESCENCE COUVRANTE

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

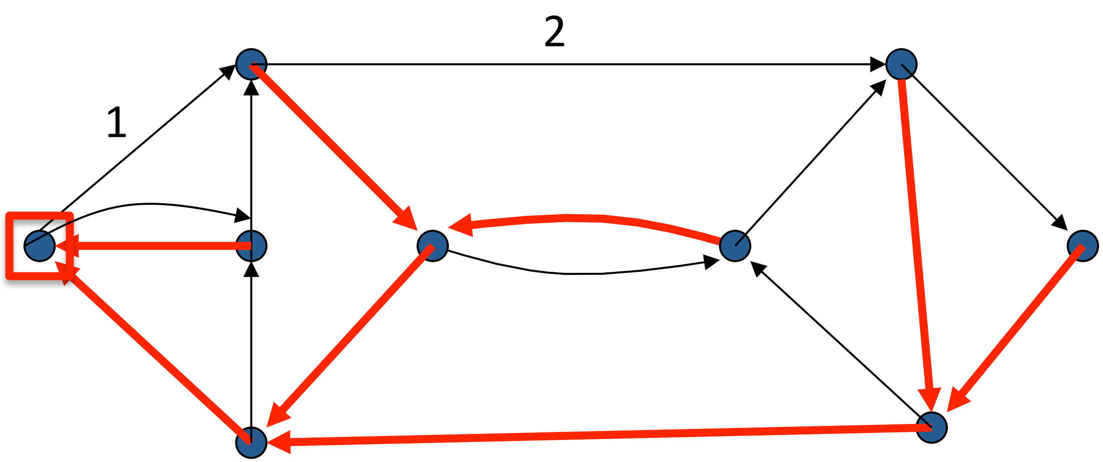
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

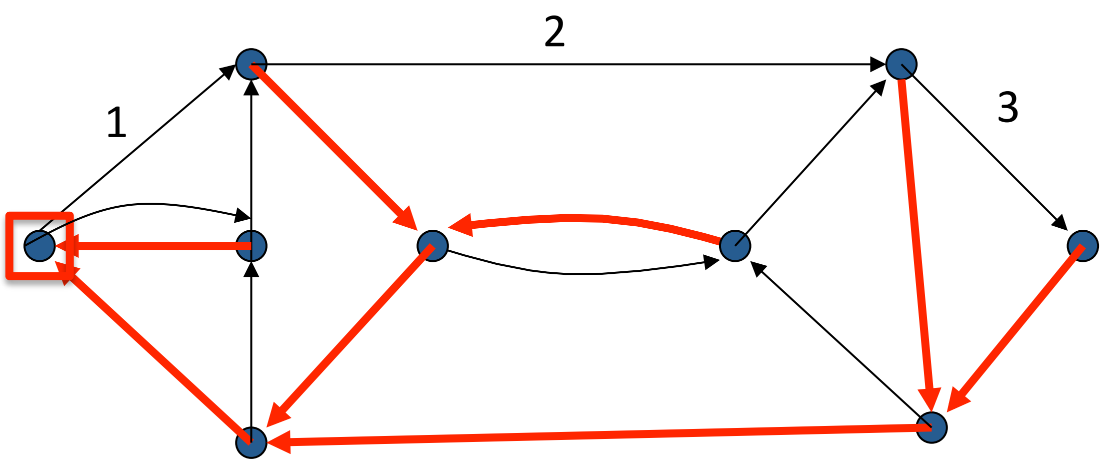
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« *ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix* »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

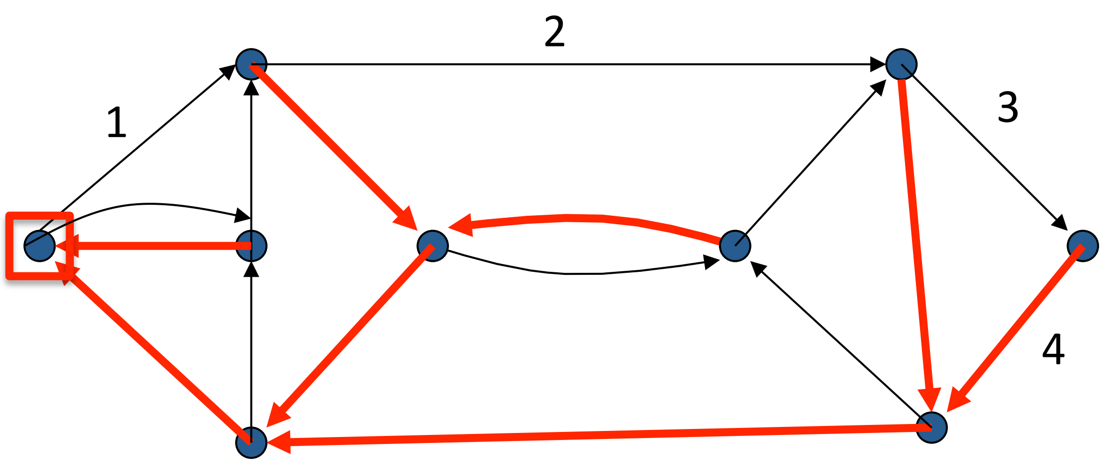
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

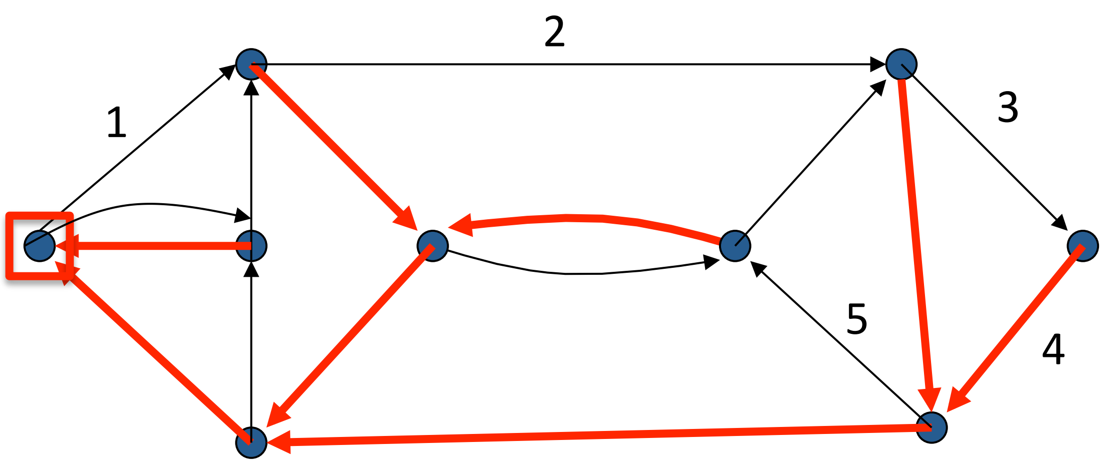
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

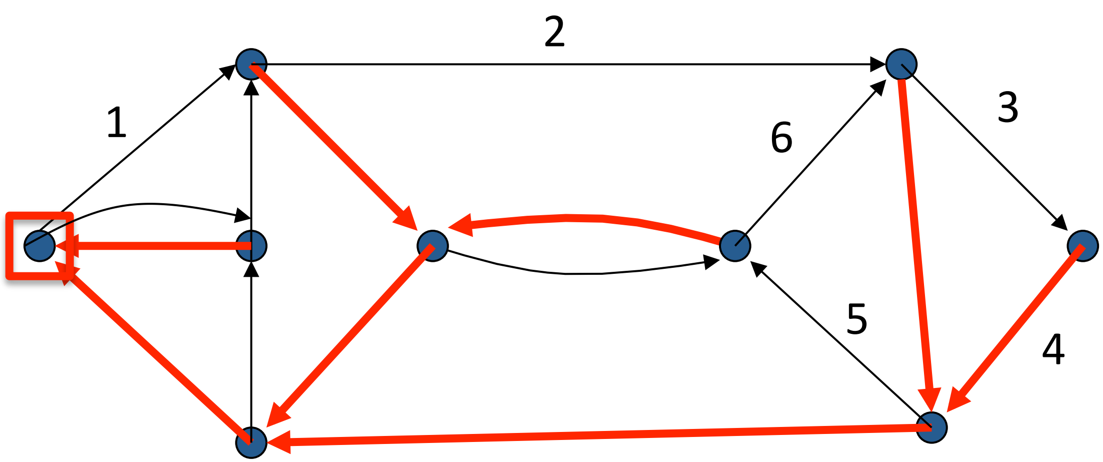
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

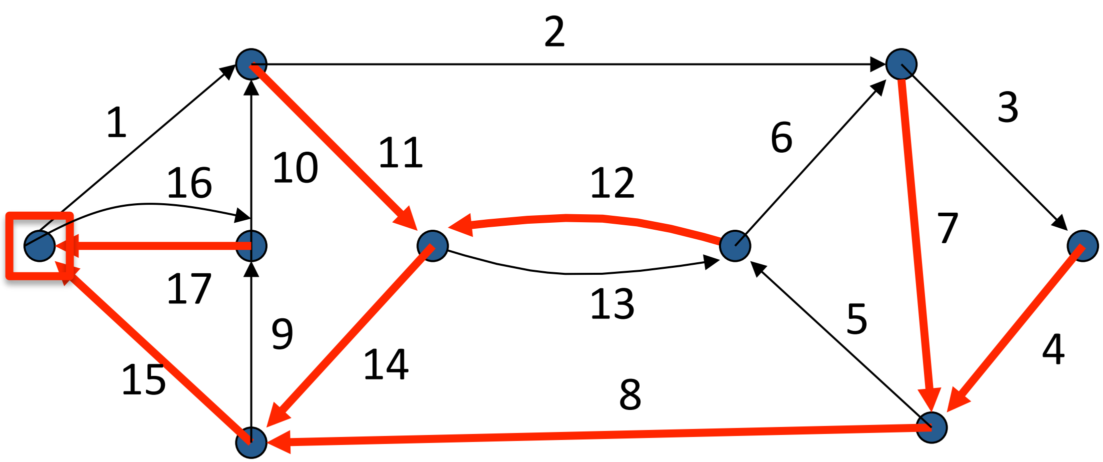
Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« *ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix* »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

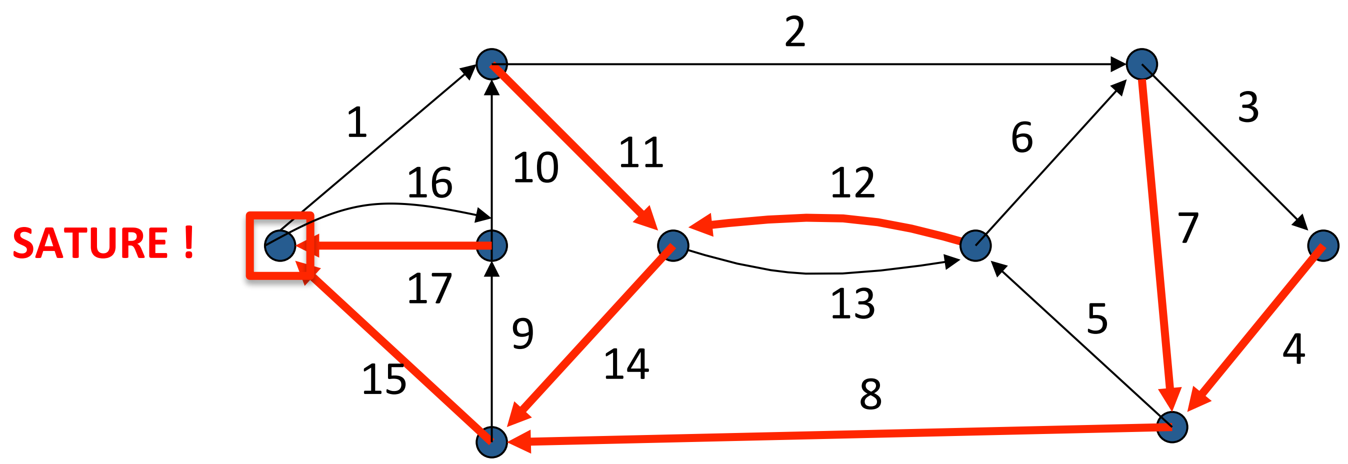


Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« *ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix* »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

Hauteur = 0



Pourquoi est-ce un circuit eulérien?

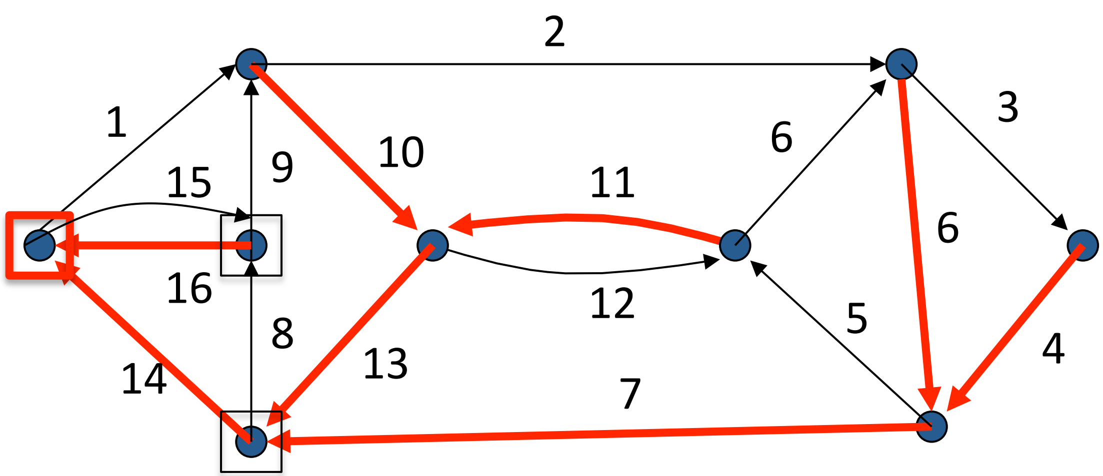
Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« *ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix* »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

Hauteur = 0

SATURE !



Pourquoi est-ce un circuit eulérien?

Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« *ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix* »

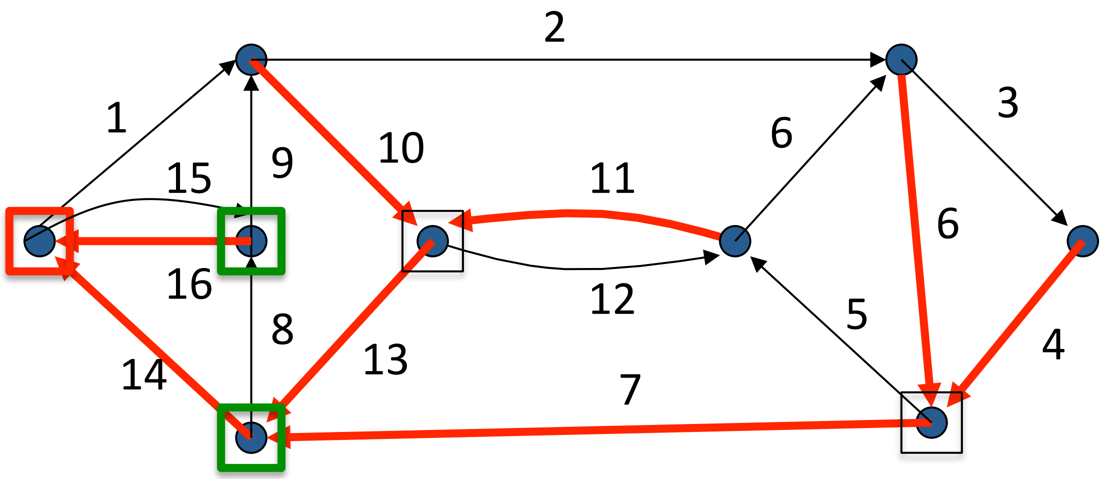
Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

Hauteur = 0

Hauteur = 1

SATURE !



SATURES !

<u>Pourquoi est-ce un circuit eulérien?</u>

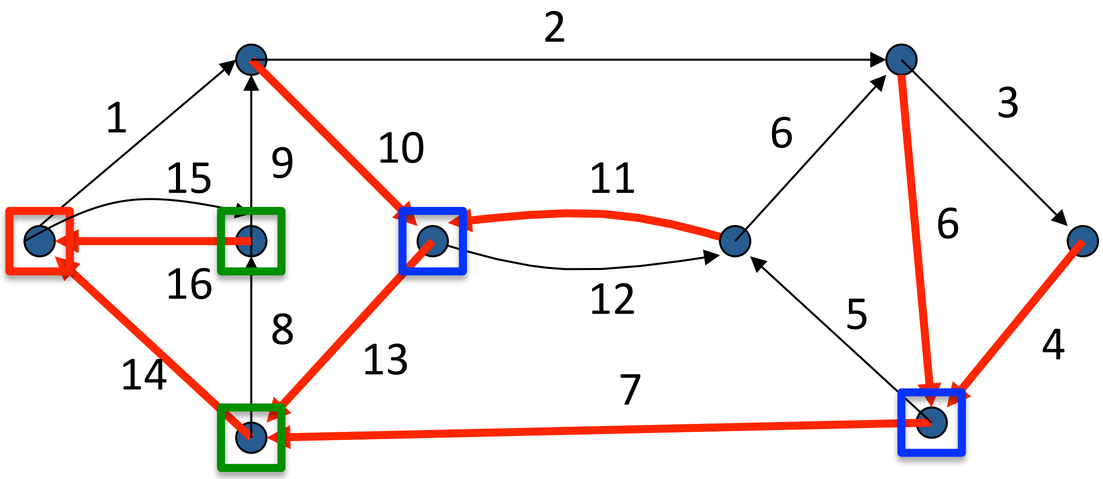
Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« *ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix* »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)

Hauteur = 0
Hauteur = 1
Hauteur = 2

SATURE !



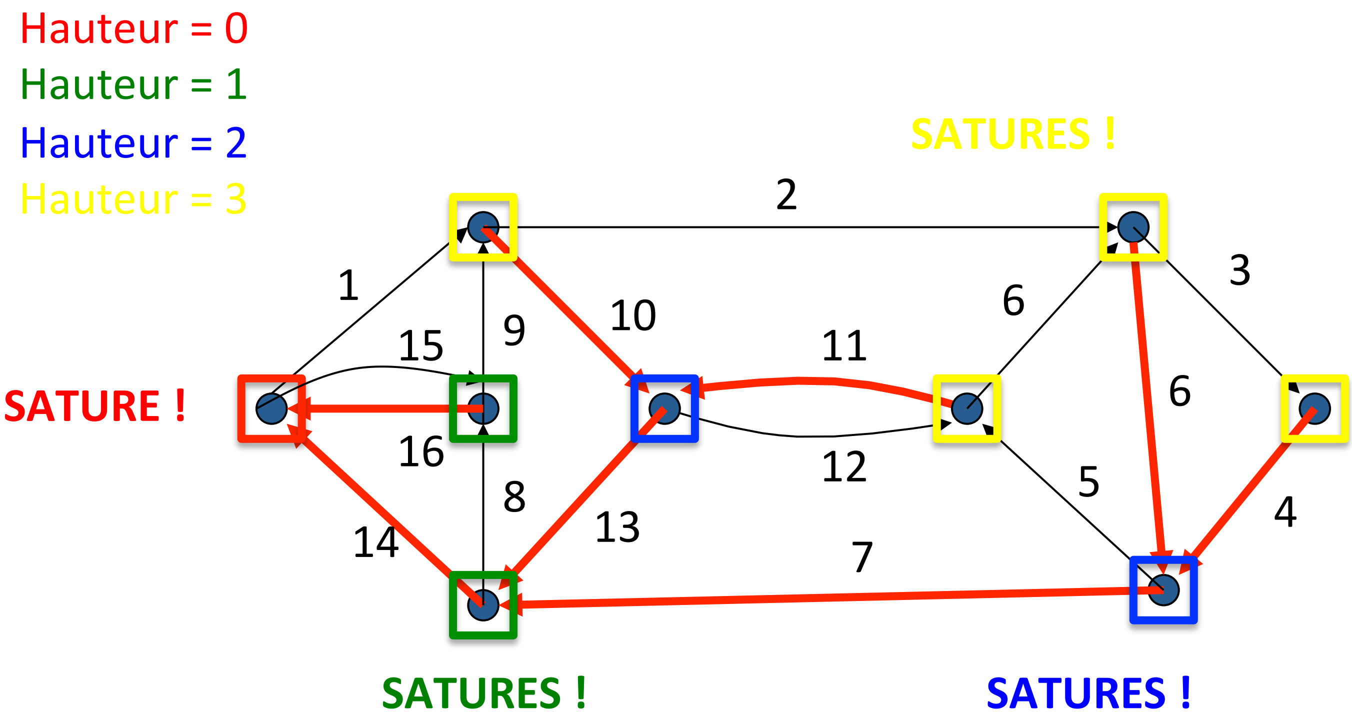
SATURES ! **SATURES !**

<u>Pourquoi est-ce un circuit eulérien?</u>

Se déplacer aléatoirement à partir de la racine en respectant la règle suivante :
« *ne prendre un lien rouge que s'il n'y a pas d'autre choix* »

Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Le problème du postier chinois (existence d'un circuit eulérien = passer une et une seule fois par chaque arc)



Tous les sommets sont saturés => circuit eulérien.

SI en chaque sommet

le nombre de liens entrant = le nombre de liens sortants

ALORS circuit eulérien

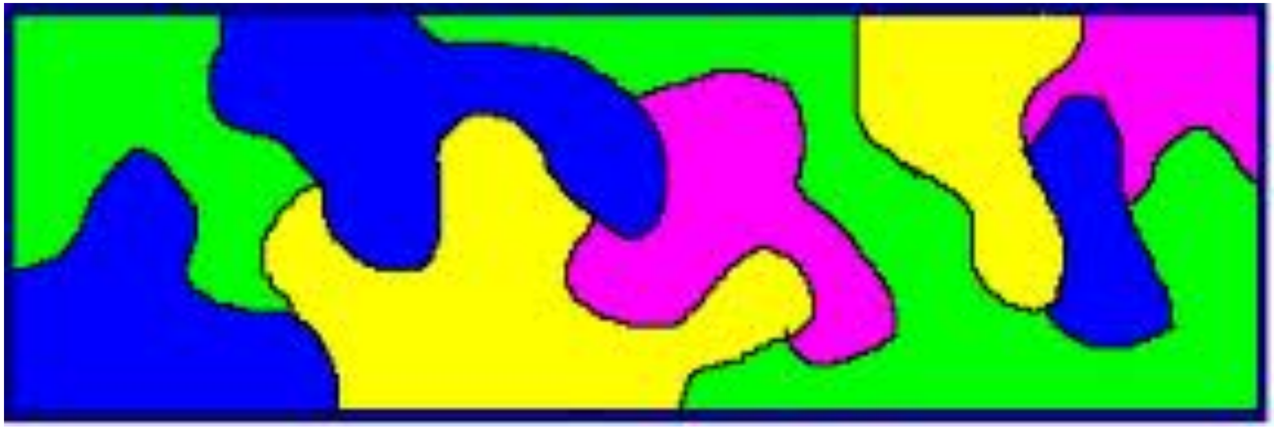
Propriété : en chaque sommet; autant de liens qui arrivent que de liens qui partent

Coloration de graphes

Comment allouer des ressources de facon optimale en évitant les conflits d’utilisation?

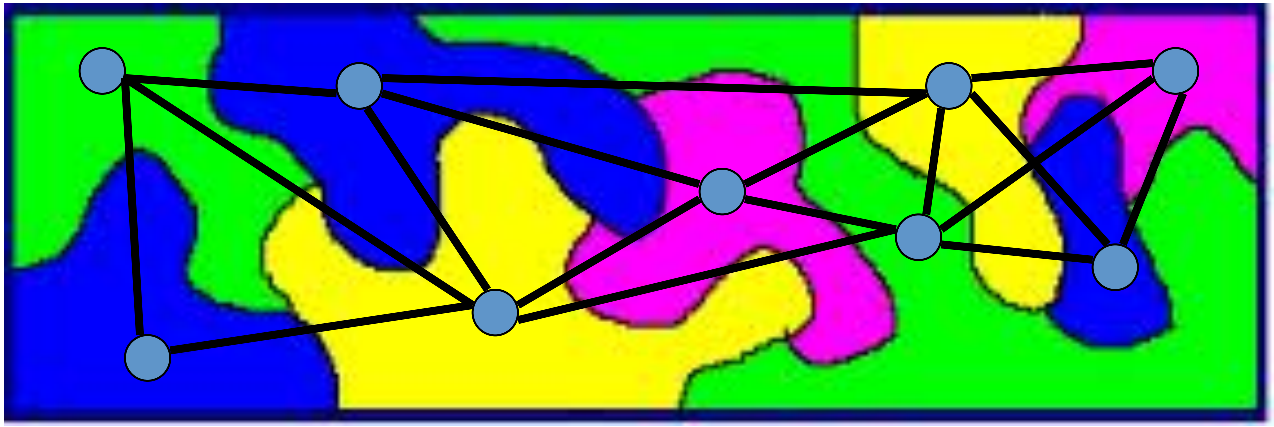
Francis Guthrie (1831-1899)

Un problème de géographe



Un problème de géographe

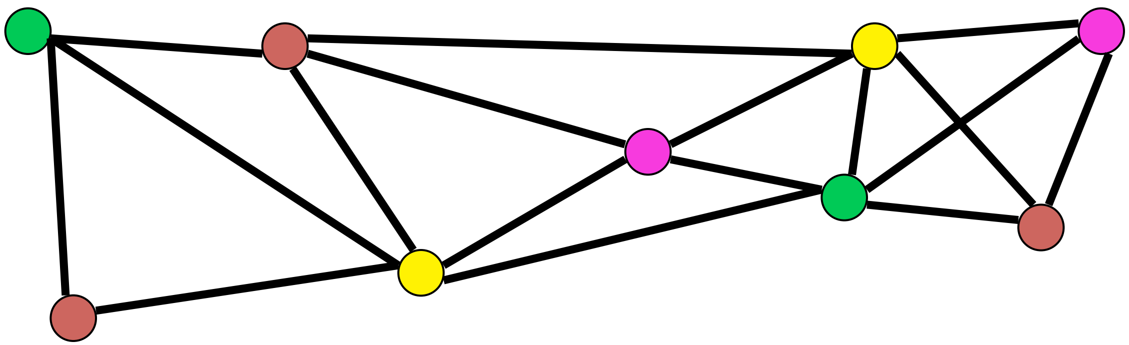
Francis Guthrie (1831-1899)

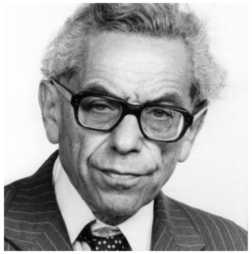


Francis Guthrie (1831-1899)

Un problème de géographe

Conjecture : 4 couleurs suffisent pour chaque carte géographique

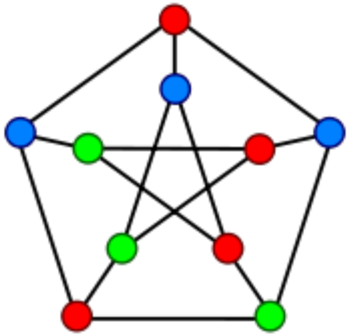




Paul erdos (1913-1996)

G=(V,E), graphe non-orienté

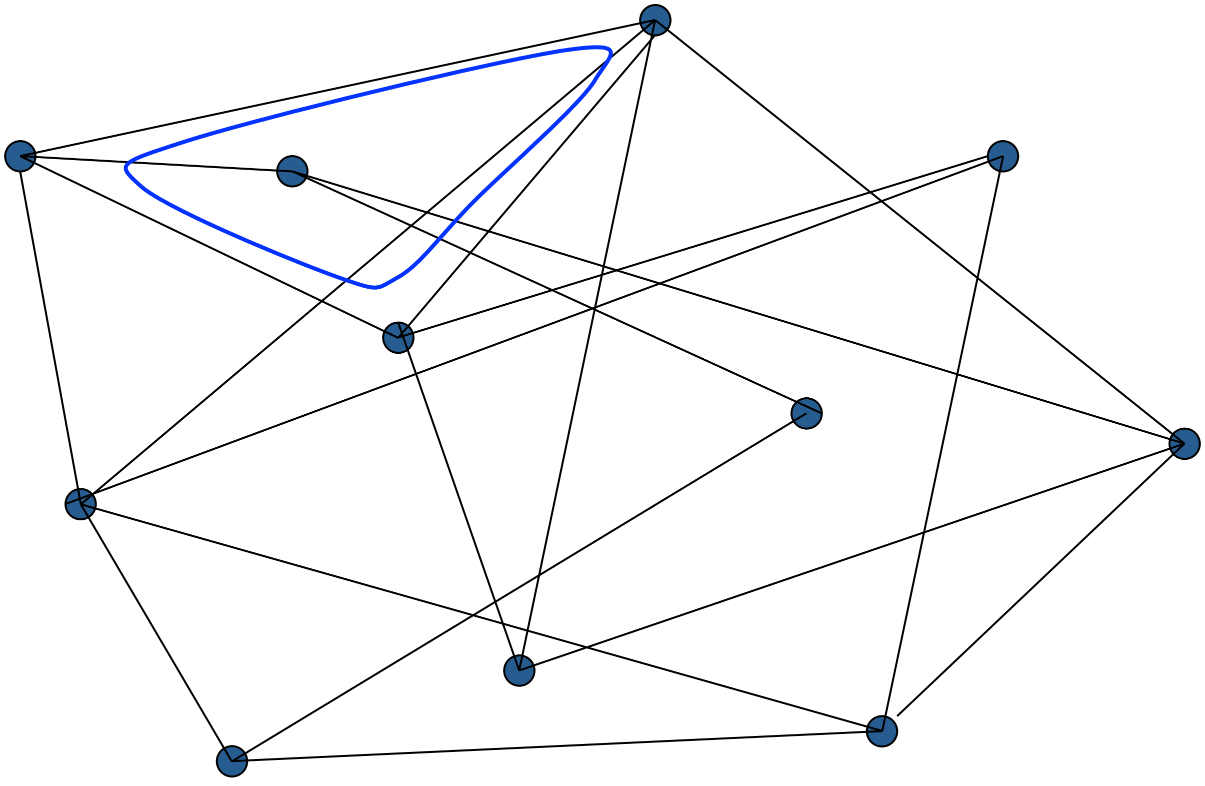
Coloration de G: application f de V dans un ensemble de couleurs
Coloration propre : (u,v) une arête de E implique f(u) différent de f(v)
Taille d'une coloration(propre) : cardinal de f(V)
Nombre chromatique de G : taille minimum d'une coloration propre de G

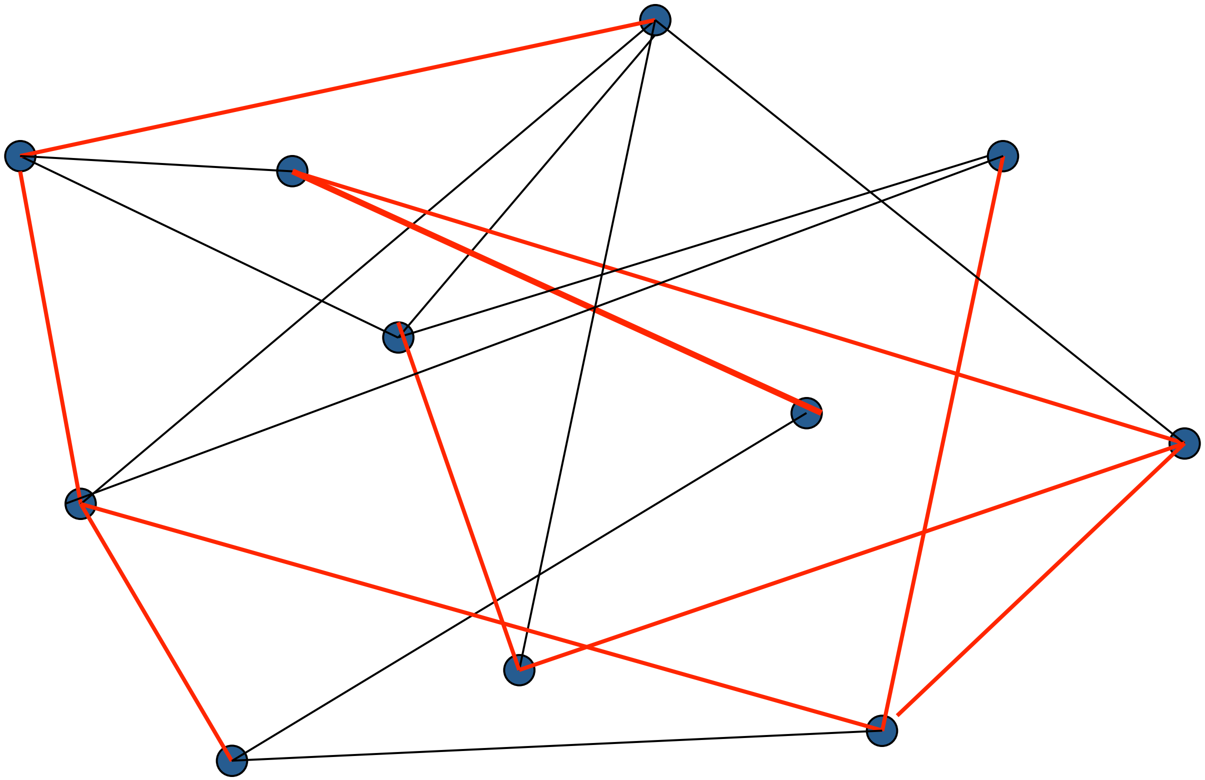


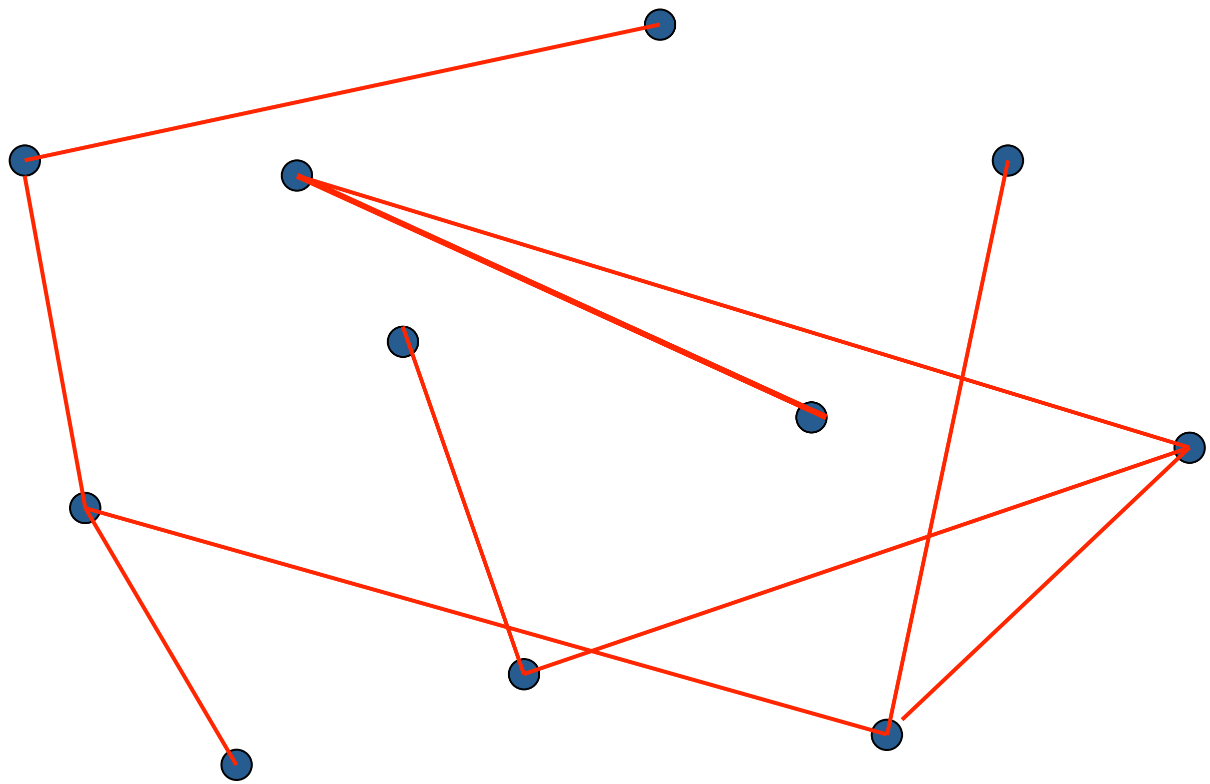
Une coloration du graphe de Petersen avec 3 couleurs.

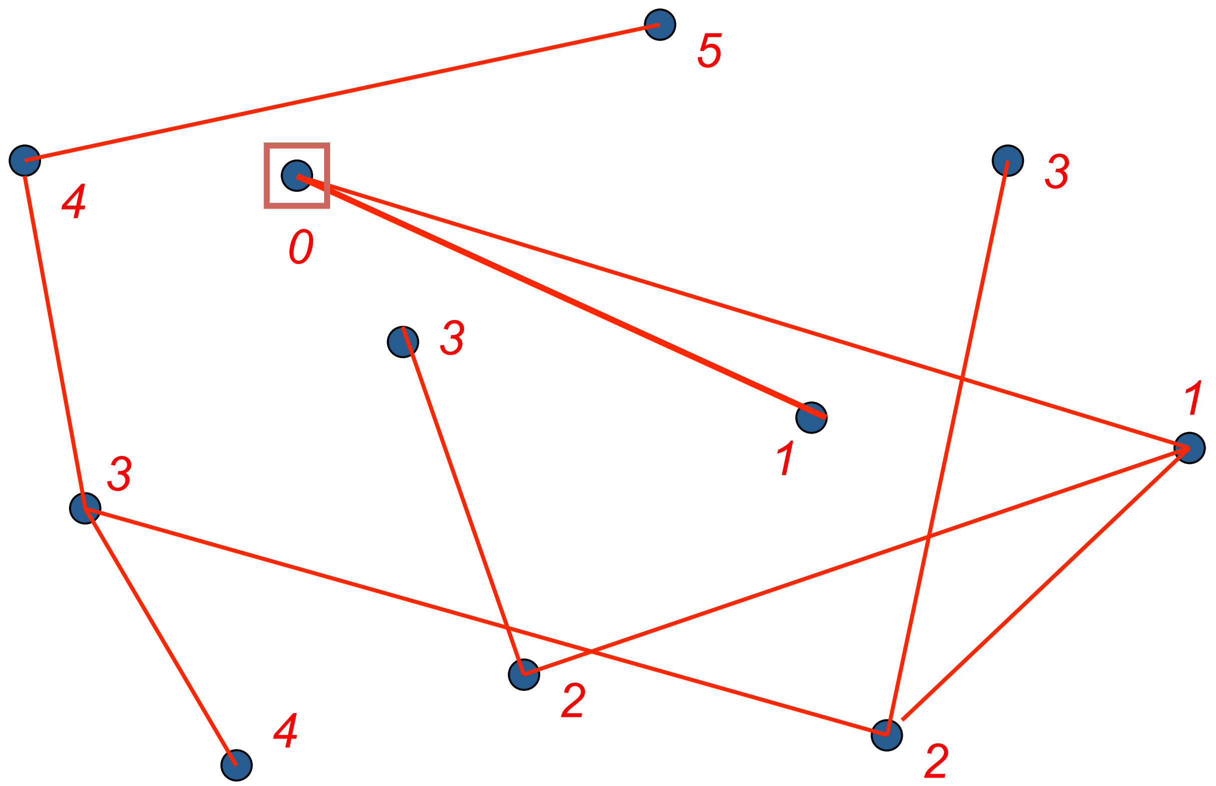
Problème historique des 4 couleurs

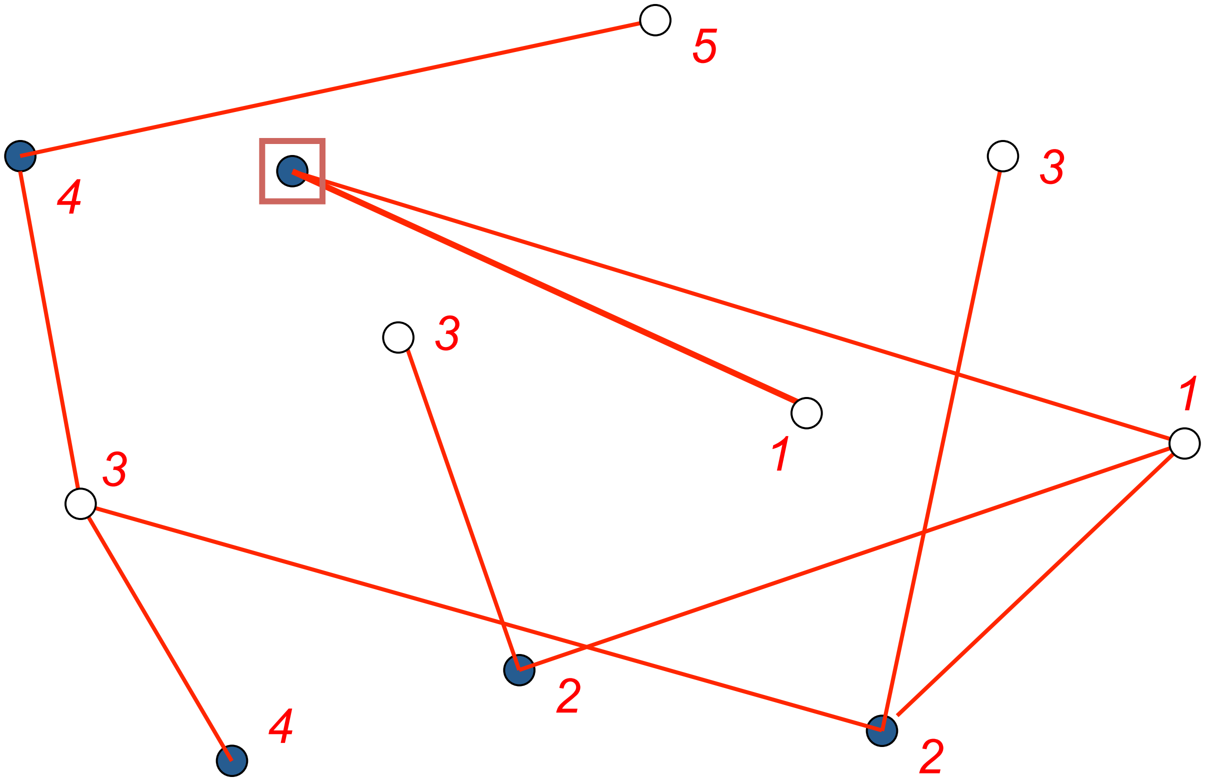
Théorème : Un graphe est 2-coloriable ssi il ne contient pas de cycles de longueur impaire.

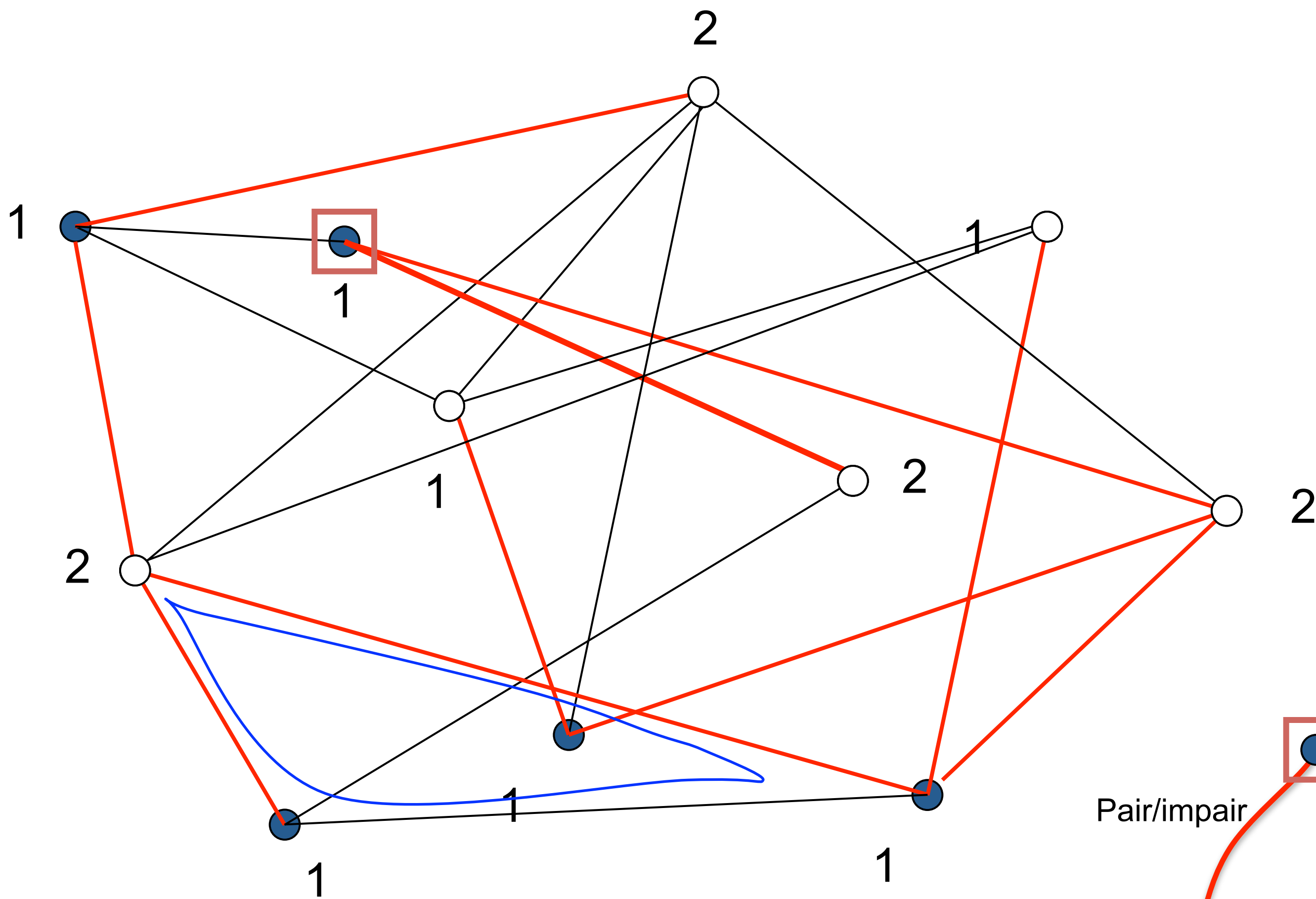


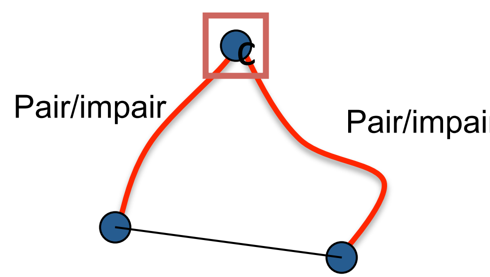





5
4
0
3
3
1
1
3
2
4
2


5
4
3
3
1
1
3
2
4
2


2
1
1
1
1
2
2
2
1
1
1

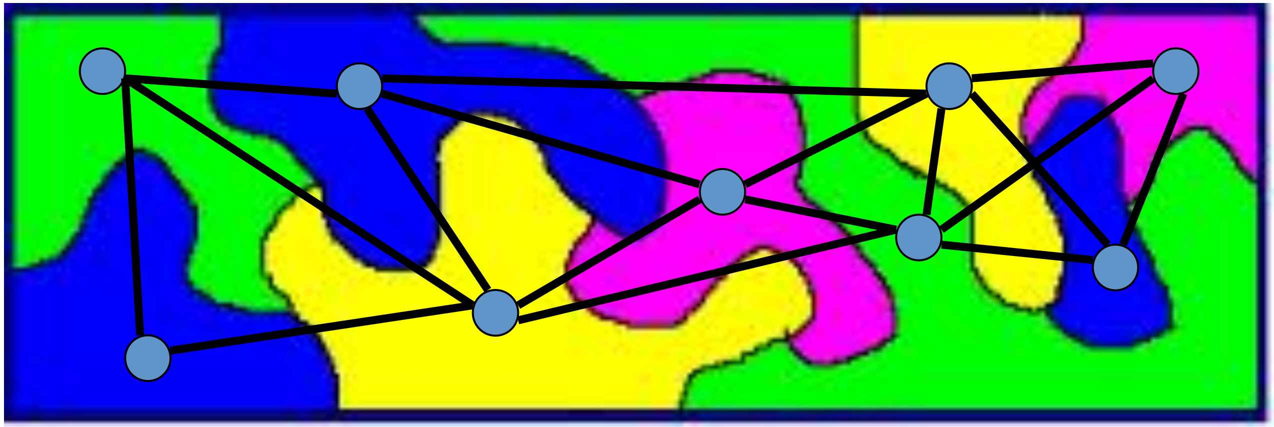

c
Pair/impair
Pair/impair

Planarité

Un graphe est planaire si et seulement si il existe une facon de le dessiner sur une sphère sans que deux arête ne se croisent

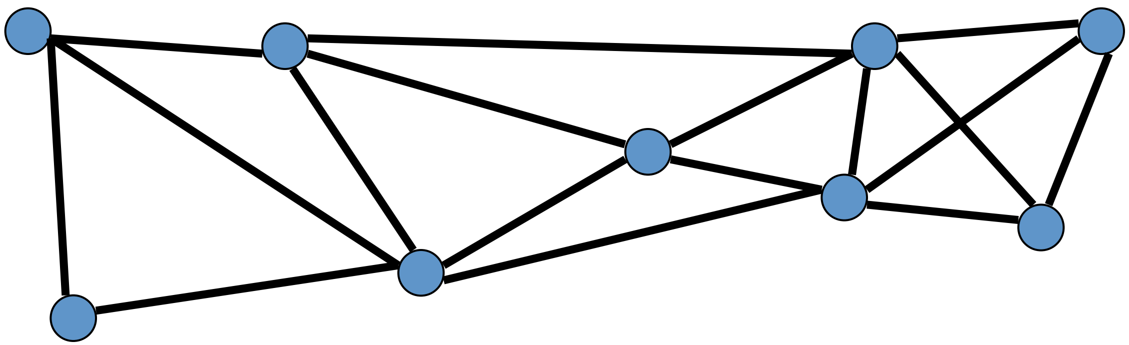
Francis Guthrie (1831-1899)

La terre est ronde

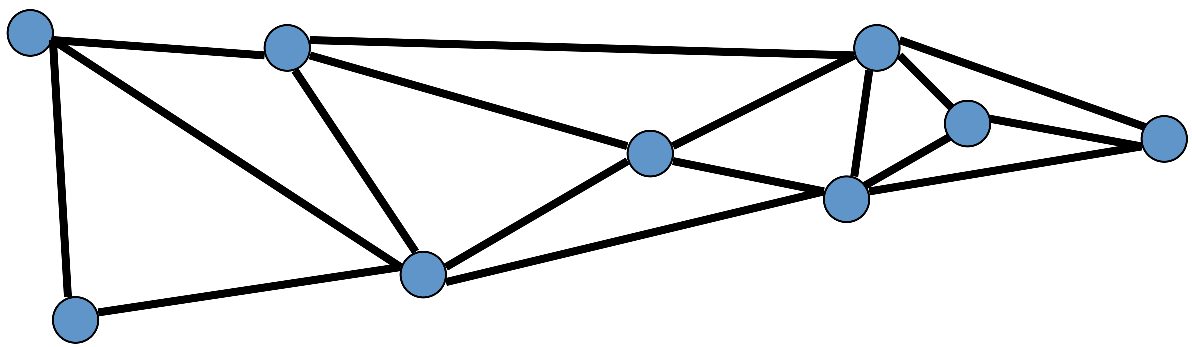


Francis Guthrie (1831-1899)

La terre est ronde

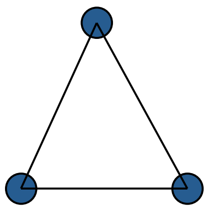


Conjecture : 4 couleurs suffisent pour chaque ~~carte géographique~~
graphe planaire

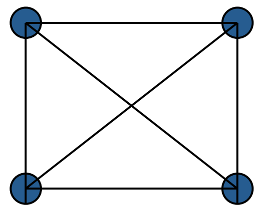


Comment décider qu'un graphe est ou non planaire sans disposer de plusieurs siècles?

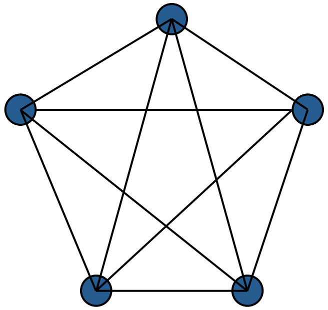
Graphe planaire : graphe que l'on peut dessiner sur un plan (une sphère)
Sans que deux arêtes ne se croisent



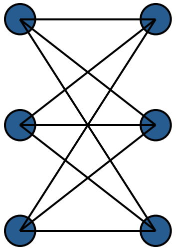
K3 oui



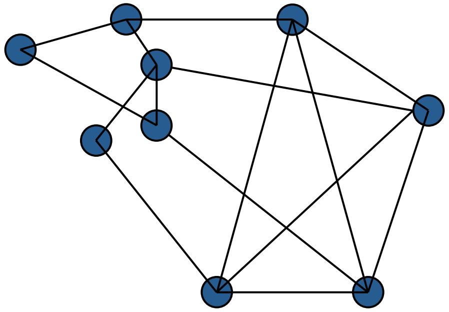
K4 oui



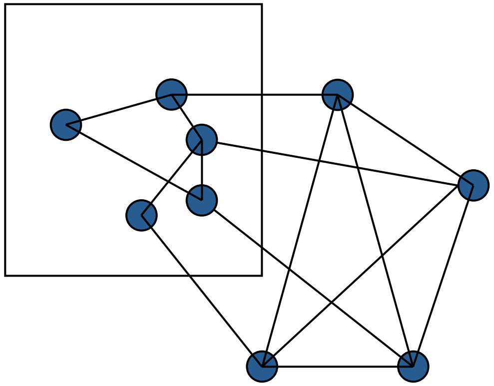
K5 non



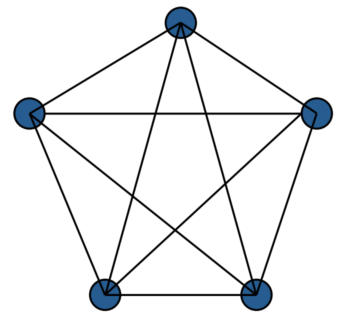
K3,3 non



?



Graphe homéomorphe à

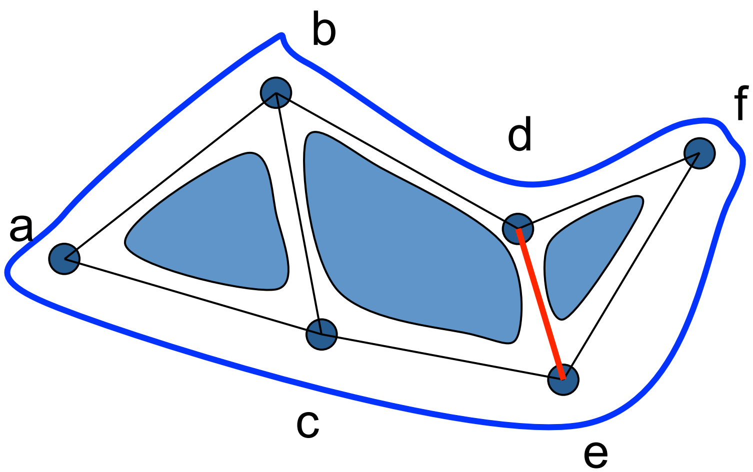


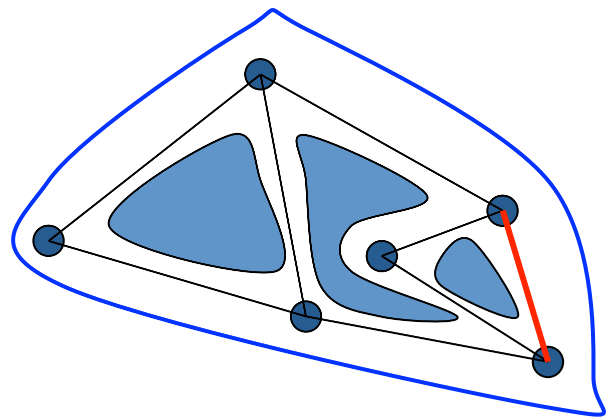
Théorème (Kuratowski) : Un graphe est planaire ssi il n’est homéomorphe ni à K5, ni à K3,3

Décider si un graphe est planaire est dans P.

Kutlaw Kuratowski (1896-1980)

Carte planaire : dessin planaire d'un graphe planaire





(abdfec),(abc),(bdec),(dfe)

(abdec),(abc),(bdfec),(def)

= caractérisation par un graphe + parcours des arêtes décrivant les faces

Question : un graphe est-il « rond » ou « long »?

1. Existe-t-il un critère mesurable pour cette question? Est-il « facile » à calculer?

2. Si non, utilisation de critères croisés :
   - Excentricité moyenne (calcul polynomial)
   - Taille de séparateur (NP-complet, critère négatif)
   - Heuristique de largeur de bande