

- Durée : 2h
- Tous documents autorisés
- Téléphones et ordinateurs interdits

1 Programme Linéaire en nombres entiers (10 points)

Soit le problème suivant appelé PLNE:

Maximize $31 x_1 + 22 x_2 + 14 x_3 + 13 x_4 + 4 x_5$

Subject To:

$$10 x_1 + 7 x_2 + 4 x_3 + 5 x_4 + 2 x_5 \leq 30$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_3 \leq 2$$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 entiers

1. Dans un premier temps, on va considérer que les 5 variables sont réelles positives. La dernière contrainte est donc remplacée par:
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ et le programme correspondant est appelé PL.
 - Comment s'appelle cette technique consistant à remplacer les variables entières par des variables réelles ?
 - Cela fournira t'il une borne supérieure ou une borne inférieure de la valeur optimale de PLNE?
 - Donner clairement la solution optimale de PL. Est-ce la solution optimale de PLNE ?
 - Quelles sont les variables de base de la solution optimale de PL ?
 - Ecrire le dual de PL et en donner sa solution optimale.
2. On veut maintenant résoudre le problème initial PLNE par une méthode Branch and Bound.
 - Sur quelle variable effectuez-vous le premier branchement ? Précisez bien les 2 branches que vous créez.
 - Donner l'arborescence complète en effectuant un parcours Meilleur d'abord.
 - Finalement, quelle est la solution optimale de PLNE ?

2 Le problème de la p-médiane (8 points)

Le problème de la p-médiane consiste à trouver exactement P centres parmi N sites ($P < N$) tels que si on rattache chaque site à son centre le plus proche, la somme totale des distances des sites à leur centre est minimale (un centre est rattaché à lui-même et la distance est alors nulle). Pour donner une application, on a N sites où sont installés des supermarchés. On va choisir P sites parmi ceux-là pour installer des entrepôts. Les $(N-P)$ supermarchés restant sont approvisionnés par l'entrepôt le plus proche. Et on cherche à minimiser la distance totale des approvisionnements.

1. Soit l'exemple suivant dans lequel on a 5 sites ($N=5$) (A,B,C,D et E) et on doit placer 2 centres ($P=2$). Les distances entre les 5 sites sont données par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} - & 30 & 15 & 32 & 31 \\ 30 & - & 20 & 24 & 36 \\ 15 & 20 & - & 12 & 42 \\ 32 & 24 & 12 & - & 25 \\ 31 & 36 & 42 & 25 & - \end{pmatrix}$$

- Expliquez pourquoi la solution qui consiste à placer les deux centres sur A et sur B est de valeur 70. Précisez bien comment sont rattachés les 3 autres sites.
 - Que vaut la solution où les deux centres sont placés en B et C ?
 - Question subsidiaire: Quelle est selon vous la meilleure solution de ce petit problème
2. Une modélisation mathématique du problème est donnée ci-dessous. Dans cette modélisation, d_{ij} représente la distance entre les sites i et j , les variables x_{ij} valent 1 si le site i est rattaché au centre j (et 0 sinon) et x_{ii} vaut 1 si i est un centre (donc rattaché à lui-même).

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot x_{ij} \\ \text{S.C.} & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \\ & \sum_{i=1}^n x_{ii} = p \\ & x_{ij} \leq x_{jj} \quad \forall i, j \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j. \end{array}$$

- Expliquez cette modélisation: la signification de chacune des contraintes et de la fonction économique.
 - Pour la premier exemple de la première question (celui où les centres sont en A et B) que valent les variables x_{ij} de la modélisation ?
3. Proposez la trame algorithmique d'une heuristique gloutonne à même de construire une solution réalisable au problème général de la p-médiane (et pas seulement ou pas particulièrement au petit exemple proposé à la première question). Vous pouvez néanmoins utiliser cet exemple pour illustrer le fonctionnement de votre heuristique.
 4. Proposez une structure de voisinage qui pourrait être utilisée dans une (méta)heuristique de recherche locale. Avec cette structure de voisinage, combien de voisins possède une solution réalisable ? Avec cette structure de voisinage, la solution de la première question où B et C sont les centres est-elle un optimum local ?