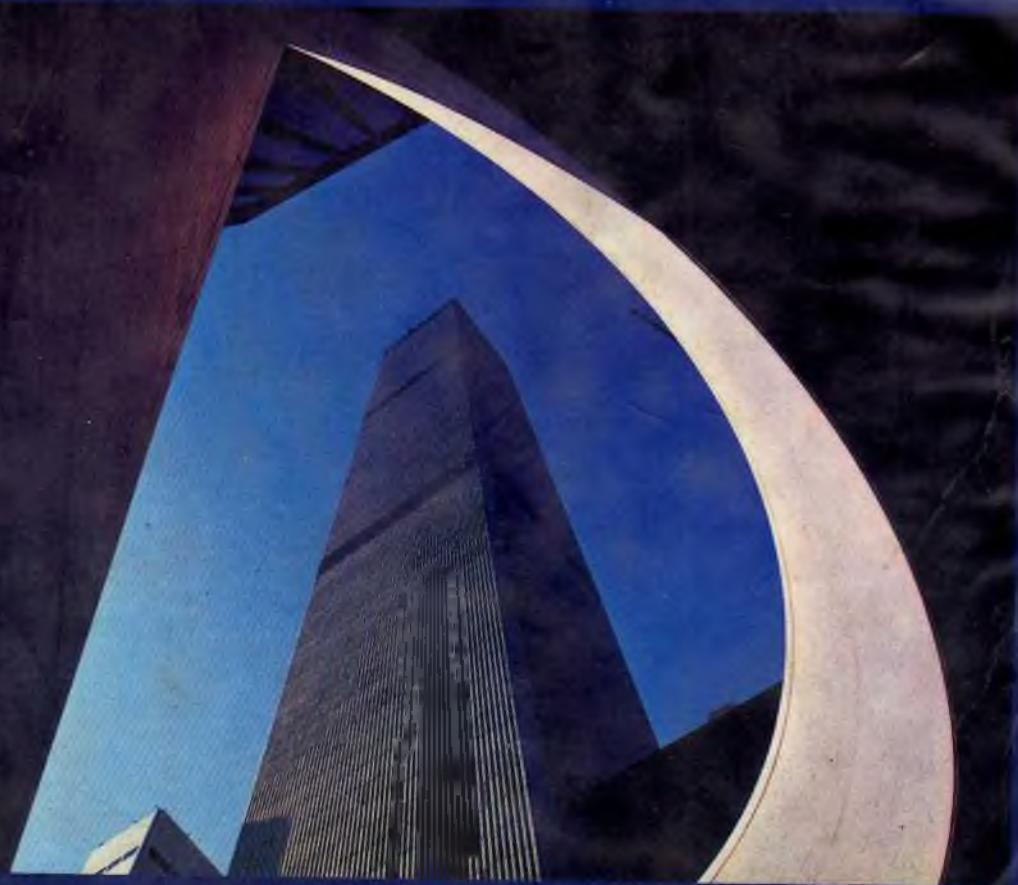


GEOMETRIA

CON APLICACIONES Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CLEMENS/O'DAFFER/COONEY



Addison Wesley Longman



\$ 17.250 - 0

GEOMETRIA

CON APLICACIONES Y SOLUCION DE PROBLEMAS

GEOMETRIA

CON APPLICACIONES Y SOLUCION DE PROBLEMAS

STANLEY R. CLEMENS

PHARES G. O'DAFFER

Illinois State University

THOMAS J. COONEY

University of Georgia

Versión en español de

Addison-Wesley Iberoamericana

Con la colaboración de

Manuel López Mateos

Universidad Nacional Autónoma de México



Addison Wesley Longman



Argentina • Chile • Costa Rica • Colombia • Ecuador • España • Estados Unidos
Mexico • Peru • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Versión en español de la obra titulada *Geometry with Applications and Problem Solving*, de S. R. Clemens, P. G. O'Daffer y T. J. Cooney, publicada originalmente en inglés por Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, E.U.A.
© 1984 por Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Esta edición en español es la única autorizada

Cuarta reimpresión, abril 1998

Créditos de las fotografías

Geometría generada por computador

1. Ramtek Corporation
2. NASA/Jet Propulsion Laboratory
3. National Center for Atmospheric Research/High Altitude Observatory/NCAR SMM/C/T: Solar Maximum Mission (NASA/GSFC) coronagraph/Polarimeter Experiment
4. Ramtek Corporation/NASA/Jet Propulsion Laboratory
5. Brookhaven National Laboratory/New York University Medical Center
6. Lawrence Livermore National Laboratory
7. Matrix Instruments Inc.
8. Matrix Instruments Inc.
9. Matrix Instruments Inc.

Geometría de un chip de silicio

1. Intel Corporation
2. Intel Corporation
3. National Semiconductor Corporation
4. Bell Laboratories
5. National Semiconductor Corporation
6. National Semiconductor Corporation
7. Intel Corporation
8. Intel Corporation
9. Intel Corporation
10. Bell Laboratories

Carreras de computación

1. NCR Corporation
2. Alex Cameron/Tandem Computers, Inc.
3. Alex Cameron/Tandem Computers, Inc.
4. Prime Computer, Inc.
5. Bell Helicopter/Textron

La geometría y computadores en la Industria

1. General Motors Corporation
2. TRW, Inc.
3. California Computer Products, Inc. (CalComp)
4. Anacomp, Inc.
5. Tandy Corporation—TRS-80™. TRS-80 es una marca registrada de Radio Shack Division of Tandy Corporation
6. Sperry-Univac, una división de Sperry Corporation
7. Lawrence Livermore National Laboratory
8. Engineered Systems, Inc., Omaha, Neb.
9. Alex Cameron/Tandem Computers, Inc.
10. National Semiconductor Corporation
11. Alex Cameron/Tandem Computers, Inc.
12. Copyright Peter Menzel
13. Trilog

© 1989 por Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.
Wilmington, Delaware, E.U.A.

© 1998 por Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V.

Boulevard de Las Cataratas núm. 3
Jardines del Pedregal
01900, México, D.F.

Reservados todos los derechos. Ni todo el libro ni parte de él pueden ser reproducidos, archivados o transmitidos en forma alguna o mediante algún sistema electrónico, mecánico de fotorreproducción, memoria o cualquier otro, sin permiso por escrito del editor.

Impreso en México - Printed in Mexico

ISBN 968 444 306 4

4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 - DO - 89 9 0 7 6 5 4 3 2 1 8

516
C591
1988
(mat A)

[v]

140246

Acerca de los autores

Stanley R. Clemens es profesor asociado de matemáticas en la Illinois State University. Se graduó en bachillerato y maestría en el Bluffton College y la Indiana University, respectivamente, y realizó el doctorado en matemáticas en la University of North Carolina. La obra del doctor Clemens sobre geometría comprende varios artículos, además de los libros *Laboratory Investigations in Geometry* y *Geometry: An Investigative Approach*, ambos publicados por Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Phares G. O'Daffer es profesor de matemáticas en la Illinois State University. Se graduó en bachillerato y maestría en esa misma universidad, y realizó el doctorado en enseñanza de las matemáticas en la University of Illinois. Ex profesor de matemáticas de grado preuniversitario, el doctor O'Daffer es autor y coautor de numerosos artículos y libros de texto, incluyendo *Investigations in Geometry* y *Geometry: An Investigative Approach*, publicados por Addison-Wesley Publishing Company, Inc. También ha sido presidente del Illinois Council of Teachers of Mathematics.

Thomas J. Cooney es profesor de enseñanza de las matemáticas en la University of Georgia. Ex profesor de geometría de grado preuniversitario, se graduó en bachillerato y maestría en la University of Toledo, y realizó el doctorado en enseñanza de las matemáticas en la University of Illinois. El doctor Cooney ha escrito varios artículos y libros de texto sobre enseñanza de las matemáticas y fue presidente de la School Science and Mathematics Association.

280075

Prefacio

Geometría con aplicaciones y solución de problemas es un texto que destaca la relación estrecha que existe entre los conceptos geométricos y sus aplicaciones en el mundo que nos rodea. Los autores realizaron esta obra basándose en las siguientes ideas:

La geometría surge a partir de la observación de cosas simples y relaciones comunes. En este libro se tratarán teoremas —conclusiones básicas— motivados por algún problema físico, para después aplicarlos a dicho problema y solucionarlo. La mayoría de las lecciones están estructuradas alrededor de esos teoremas y presentan casos de la relación que se analiza favoreciendo el desarrollo del razonamiento inductivo.

La capacidad de redactar pruebas debe desarrollarse empezando con las situaciones más sencillas. El lector empezará a desarrollar su capacidad de prueba con problemas cortos, sencillos y que contienen un solo concepto. Estos llevan gradualmente al estudiante a pruebas más complejas en los capítulos posteriores.

Los estudiantes de geometría deben desarrollar su capacidad en el marco del pensamiento crítico, el razonamiento lógico y la resolución de problemas. La resolución de problemas es uno de los aspectos fundamentales de esta obra. A cada conjunto de problemas se agregan ejercicios y soluciones. Estas oportunidades para experimentar y aplicar el razonamiento inductivo son importantes para el desarrollo creativo.

El estudio de la geometría no debe aislarse del mundo ni de otras áreas de las matemáticas. El lector encontrará páginas especialmente interesantes sobre los siguientes temas: técnicas para la solución de problemas, repaso de álgebra, la geometría en nuestro mundo (aplicaciones de la geometría en diferentes áreas; gráficas con computadores y pasatiempos), y un primer capítulo en el que se hace una revisión preliminar con ejemplos de la geometría en el mundo, cómo usarla en la solución de problemas y su papel en actividades recreativas.

Con la idea de que este texto resultara práctico para el estudio de la geometría, se incluyeron otras características:

El lenguaje es breve pero preciso. Hay profusión de ilustraciones y fotografías. Los ejercicios se clasificaron en tres niveles denominados A, B y C, y van desde problemas numéricos sencillos hasta pruebas excitantes.

La mayor parte de los problemas impares incluyen su respuesta.

Al final del libro se encuentran una lista de símbolos, un glosario de términos geométricos y listas de teoremas y postulados.

El resumen de cada capítulo prepara al lector para el examen del mismo.

Los teoremas geométricos se cubren en forma total, lo que permite al lector abordar otros temas de matemáticas con cierta confianza.

En *Geometría con aplicaciones y solución de problemas* se orienta al lector para el éxito, pero no sin desafíos. Al concluir este curso, el estudiante verá que el mundo físico resulta más comprensible y que la capacidad que desarrolló en el estudio de la geometría es útil en la solución de problemas.

Stanley R. Clemens
Phares G. O'Daffer
Thomas J. Cooney

Índice general

Uso de la geometría: Revisión preliminar

1

1

Definiciones y construcciones

8

1.1	Punto, recta, plano y espacio	10
1.2	Relaciones entre puntos, rectas y planos	12
1.3	Algunas figuras geométricas básicas	16
1.4	Segmentos y ángulos; congruencia y medición	20
1.5	Bisectrices del segmento y del ángulo	24
1.6	Rectas y planos perpendiculares	28
1.7	Polygones	32
	<i>Conceptos importantes</i> 36 <i>Resumen</i> 37	
	<i>Examen</i> 38	
	Técnicas para la solución de problemas	
	Dibujo de un diagrama	39
	La geometría en nuestro mundo	
	Diseño interior: teselados	40

2

Razonamiento en geometría

42

2.1	El proceso del razonamiento inductivo	44
2.2	Generalizaciones falsas y contraejemplos	48
2.3	Desarrollo de la geometría por medio del razonamiento deductivo	52
2.4	Tipos de proposiciones «Si-Entonces»	56
2.5	Recíproca, inversa y contrarrecíproca	60
2.6	Esquemas de razonamiento	64
2.7	Postulados de geometría	68
2.8	Algunos postulados sobre medición	72
	<i>Conceptos importantes</i> 76 <i>Resumen</i> 77	
	<i>Examen</i> 78	
	Repaso de álgebra	79
	La geometría en nuestro mundo Fotografía: lentes	80

3**Triángulos y congruencia**

82

3.1	Triángulos congruentes	84
3.2	Postulados sobre la congruencia	90
3.3	Pruebas: uso de los postulados sobre la congruencia	96
3.4	Pruebas: uso de definiciones	100
3.5	Pruebas: uso de postulados y definiciones	104
3.6	Prueba de la congruencia de ángulos y segmentos	110
3.7	Pruebas: colape de triángulos	116
3.8	Pruebas: cadenas de congruencias	120
	<i>Conceptos importantes</i> 122 <i>Resumen</i> 123	
	<i>Examen</i> 124	
	<i>Resumen global (Caps. 1 a 3)</i>	125
	<i>La geometría en nuestro mundo</i>	
	<i>Arquitectura: domos geodésicos</i>	

4**Prueba de teoremas mediante propiedades básicas**

128

4.1	Pasos para la prueba de un teorema	130
4.2	Uso de la propiedad de suma y resta de iguales	138
4.3	Prueba de teoremas: uso de suplementos y complementos	144
4.4	Prueba de teoremas: uso de ángulos verticales	150
4.5	Prueba de teoremas: uso de ángulos exteriores	154
4.6	Uso de la prueba indirecta	158
	<i>Conceptos importantes</i> 164 <i>Resumen</i> 165	
	<i>Examen</i> 166	

5**Rectas y planos paralelos**

168

5.1	Definiciones básicas	170
5.2	Teoremas sobre rectas paralelas	174
5.3	El postulado de las rectas paralelas	180
5.4	Más teoremas sobre rectas paralelas	184
	<i>Conceptos importantes</i> 190 <i>Resumen</i> 191	
	<i>Examen</i> 192	
	<i>Repaso de álgebra</i>	193
	<i>La geometría en nuestro mundo</i> <i>Mineralogía: simetría</i>	194

6**Triángulos****196**

6.1	Clasificación de los triángulos	198
6.2	Triángulos isósceles	202
6.3	Medidas de los ángulos de un triángulo	208
6.4	El teorema de la congruencia LAA	212
6.5	El teorema de la congruencia de la hipotenusa y el cateto <i>Conceptos importantes</i> 220 <i>Resumen</i> 221 <i>Examen</i> 222	216
	Técnicas para la solución de problemas Hacer una tabla-II	223

7**Más sobre triángulos****224**

7.1	El teorema de Pitágoras	226
7.2	Triángulos especiales	232
7.3	Teoremas de la concurrencia en triángulos	236
7.4	Desigualdad del triángulo	244
7.5	Desigualdades en un triángulo <i>Conceptos importantes</i> 252 <i>Resumen</i> 253 <i>Examen</i> 254	248
	Resumen global (Caps. 4 a 7)	255
	La geometría en nuestro mundo Gráficas por computador: diseño asistido por computador	256

8**cuadriláteros y polígonos****258**

8.1	Cuadriláteros	260
8.2	Paralelogramos	264
8.3	Cuadriláteros que son paralelogramos	270
8.4	El teorema del segmento medio	276
8.5	Rectángulos, rombos y cuadrados	282
8.6	Trapecios	288
8.7	Los ángulos de un polígono <i>Conceptos importantes</i> 296 <i>Resumen</i> 297 <i>Examen</i> 298	292
	Repaso de álgebra	299
	La geometría en nuestro mundo	
	Arquitectura: el rectángulo áureo	300

9**Semejanza****302**

9.1	Proporciones	304
9.2	Teorema fundamental de la proporcionalidad	308
9.3	Polygones semejantes	312
9.4	El postulado de la semejanza AAA	316
9.5	Triángulos rectángulos y triángulos semejantes	322
9.6	Teoremas de la semejanza LLL y LAL	326
9.7	Razones trigonométricas; una aplicación de los triángulos semejantes	330
9.8	Razones trigonométricas de ángulos especiales	334
	<i>Conceptos importantes</i> 336 <i>Resumen</i> 337	
	<i>Examen</i> 338	
	Técnicas para la solución de problemas	
	Trabajar hacia atrás	
		339

10**Círculos****340**

10.1	Definiciones básicas	342
10.2	La medición en grados de los arcos	346
10.3	Cuerdas y distancias desde el centro	350
10.4	Perpendiculares a las cuerdas	354
10.5	Tangentes a los círculos	360
10.6	Tangentes desde un punto a un círculo	364
10.7	Medidas de ángulos inscritos	368
10.8	Ángulos formados por cuerdas	374
10.9	Ángulos y segmentos formados por tangentes y secantes	378
	<i>Conceptos importantes</i> 386 <i>Resumen</i> 387	
	<i>Examen</i> 388	
	Resumen global (Caps. 8 a 10)	389
	La geometría en nuestro mundo	
	Agrimensura: el teodolito	
		390

11**Área y perímetro****392**

11.1	Postulados del área	394
11.2	Área de paralelogramos	398
11.3	Áreas de triángulos y trapecios	402
11.4	Área de polígonos regulares	408
11.5	Comparación entre perímetros y áreas de polígonos semejantes	412
11.6	La razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo	416
11.7	Área de círculos	420
	Conceptos importantes 426 Resumen 427	
	Examen 428	
	Repaso de álgebra	429
	La geometría en nuestro mundo	
	Gráficas por computador; transformaciones	430

12**Sólidos****432**

12.1	Pirámides y prismas	434
12.2	Área de prismas y pirámides	440
12.3	Volumen de prismas	444
12.4	Volumen de pirámides	448
12.5	Área y volumen de cilindros	452
12.6	Área y volumen de conos	456
12.7	Área y volumen de esferas	460
12.8	Poliedros regulares	464
	Conceptos importantes 468 Resumen 469	
	Examen 470	
	Técnicas para la solución de problemas	
	Hágase un dibujo preciso	471
	La geometría en nuestro mundo Navegación	472

13**Transformaciones y simetría****474**

13.1	Reflexiones sobre rectas	476
13.2	Uso de las reflexiones sobre rectas en la solución de problemas	480
13.3	Traslaciones	484
13.4	Rotaciones	488
13.5	Simetría	494
	<i>Conceptos importantes</i> 498 <i>Resumen</i> 499	
	<i>Examen</i> 500	
	Técnicas para la solución de problemas	
	<i>Examen de casos especiales</i>	501

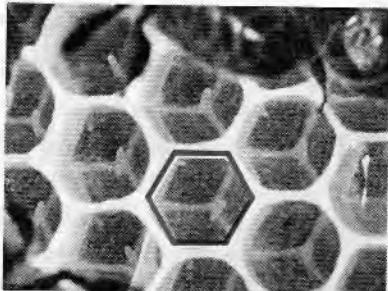
14**Geometría de coordenadas****502**

14.1	Sistema de coordenadas cartesianas	504
14.2	Punto medio de un segmento	508
14.3	La pendiente de una recta	512
14.4	Pendientes de rectas perpendiculares y paralelas	516
14.5	La fórmula de la distancia	520
14.6	La ecuación de la recta	524
14.7	La ecuación del círculo	528
14.8	Uso de las coordenadas en la prueba de teoremas	532
14.9	Transformaciones y geometría de coordenadas	536
	<i>Conceptos importantes</i> 538 <i>Resumen</i> 539	
	<i>Examen</i> 540	
	Resumen global (Caps. 11 a 14)	541
	Símbolos	542
	Tabla de cuadrados y raíces cuadradas	543
	Postulados y teoremas	544
	Glosario	553
	Respuestas seleccionadas	559
	Índice de materias	593
	Recanocimientos	600

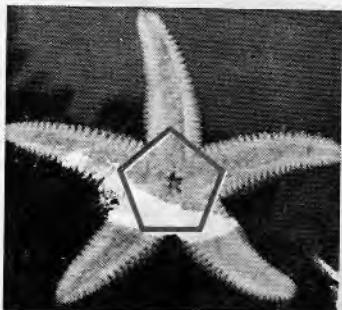
Identificación de figuras geométricas en la naturaleza



A



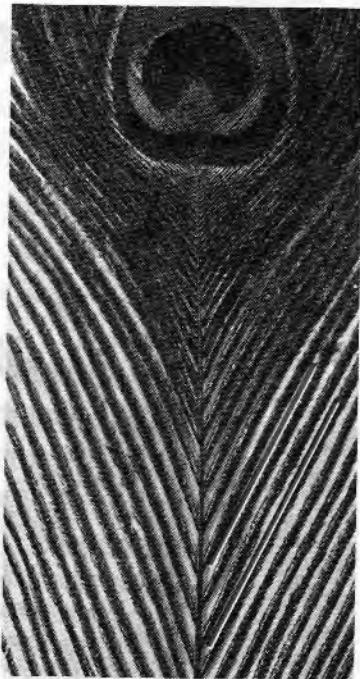
B



C



D



E

Es posible que haya sido la naturaleza la que proporcionó al ser humano las primeras nociones de geometría. Hay muchos ejemplos de formas geométricas en el mundo físico. Con el paso de los siglos, el hombre empezó a clasificar esas formas, les dio nombre y creó definiciones para describirlas.

1. Nómbrase por lo menos una figura geométrica sugerida por las fotografías.
2. Los triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos son ejemplos de las figuras geométricas llamadas polígonos. Escríbase la letra de cada fotografía que sugiera un polígono y dése su nombre.
3. Con frecuencia se busca la relación que existe entre dos o más figuras geométricas. Se dice que tres puntos son colineales (están en la misma recta), que dos rectas son paralelas (nunca se tocan), o que dos ángulos son congruentes (tienen el mismo tamaño). Escríbase la letra de cada fotografía que sugiera una relación y dése su nombre.
4. Describase por lo menos un objeto natural que no aparezca en las fotos y que sugiera una figura geométrica o una relación.

Observación de figuras geométricas en nuestro mundo



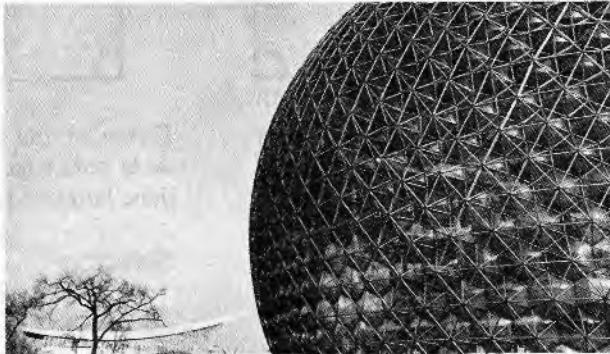
A



B



C



D

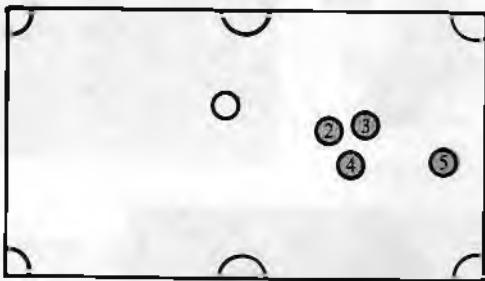
En todas las épocas el hombre ha utilizado las sencillas formas geométricas que sugiere la naturaleza para la creación de objetos útiles e interesantes. Debido a que estamos rodeados de objetos, es comprensible la importancia que tiene poder hablar sobre ellos. Al comunicarnos con otras personas, para describir el medio en que vivimos, necesitamos un lenguaje de geometría.

1. Nómbrase por lo menos una figura geométrica o relación sugerida por cada fotografía.
2. Como ilustra el balón de fútbol, el mundo de los deportes es rico en ejemplos de figuras geométricas. Dízense otros ejemplos de «geometría en los deportes».
3. El domo geodésico es una muestra de que el mundo del diseño y la arquitectura están profundamente imbuidos de figuras geométricas. El lector puede encontrar ejemplos de «geometría en la arquitectura» o de «geometría en el diseño» en su propia comunidad, en revistas o en libros de consulta.
4. Elabórese un álbum de recortes (con fotos o dibujos tomados de revistas) con el título «La geometría en nuestro mundo».

Uso de la geometría en la resolución de problemas

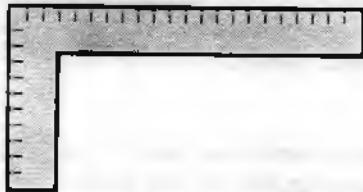
El estudio de la geometría proporciona muchas técnicas útiles para la solución de problemas. Las relaciones entre los conceptos geométricos, llamados teoremas, son la base de estas técnicas. Cada uno de los problemas siguientes se resuelve empleando uno o más de los teoremas que se estudiarán en este libro.

Problema 1



¿Hacia qué punto de la banda debe lanzarse la bola blanca para que rebote y golpee a la roja?

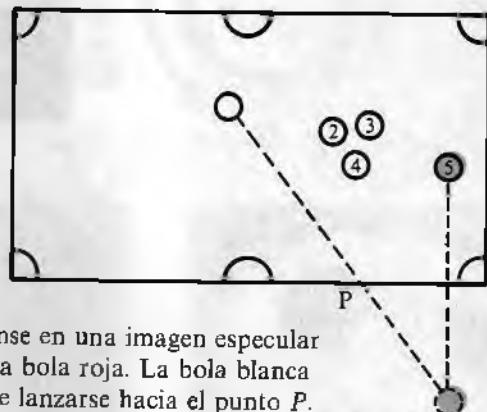
Problema 2



Con una escuadra de carpintero u otro objeto con una «esquina cuadrada», encuéntrese el centro del tablero de una mesa redonda grande, de manera que se pueda construir una base adecuada para ella.

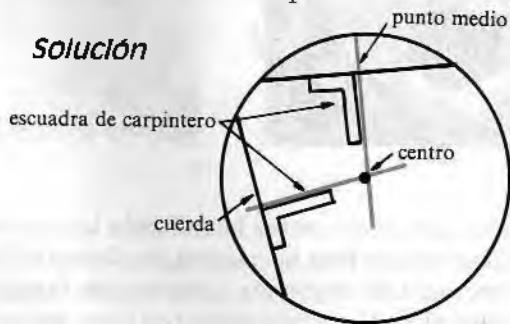
1. Dibújese esta «mesa de billar» y hágase un diagrama exacto que muestre el punto de la banda en el cual debe pegar la bola blanca para que rebote y golpee a la bola roja.
2. Con ayuda de un objeto circular, trácese un círculo en un papel. Ahora, con un método similar al que se usó en el problema 2, encuéntrese el centro del círculo.

Solución

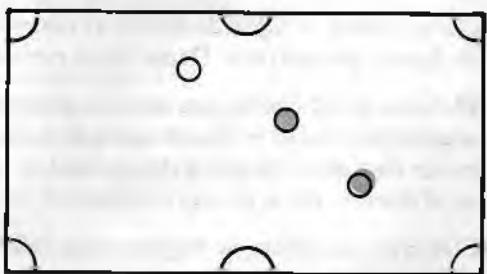


Piense en una imagen especular de la bola roja. La bola blanca debe lanzarse hacia el punto *P*.

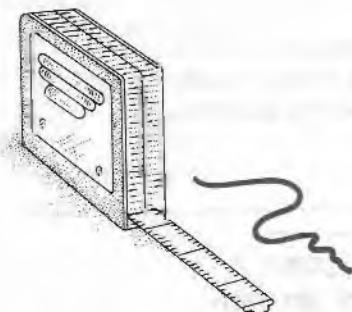
Solución



Las líneas de color cruzan el punto medio de las dos cuerdas del círculo.

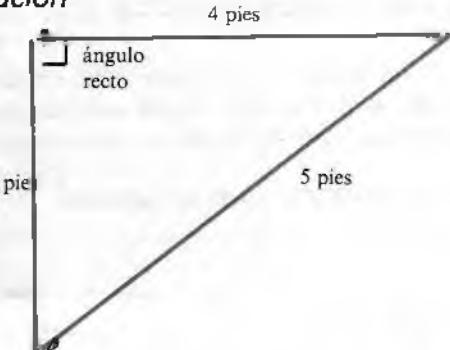


Problema 3



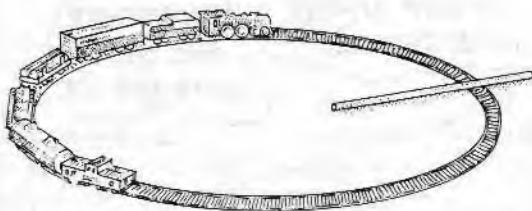
Si sólo se dispone de una cuerda y una cinta de medir, ¿cómo podría marcarse una esquina cuadrada para un campo de juego?

Solución



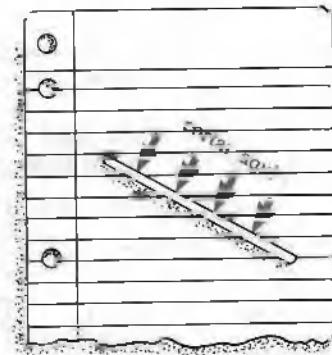
Se hacen 3 nudos en la cuerda a intervalos de 3, 4 y 5 pies y se coloca como se muestra en la figura.

Problema 4



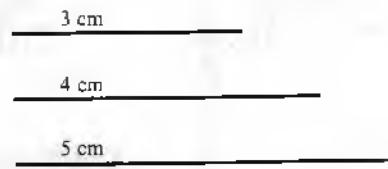
¿Cómo podría dividirse una vara pequeña en 5 trozos de igual longitud, de manera que sirvan como postes para la vía de un tren a escala?

Solución



Se pone la vara en diagonal sobre una hoja de cuaderno rayada y se marcan las líneas como muestra la figura.

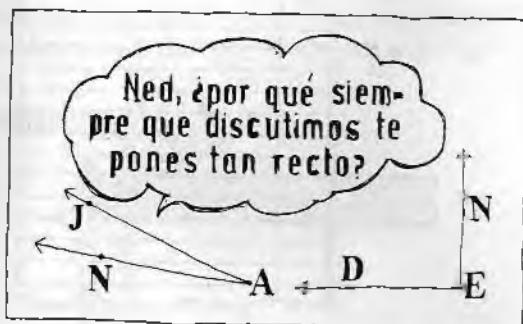
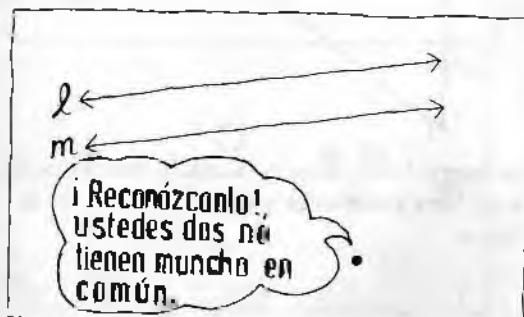
1. Con estos segmentos y un compás constrúyase un ángulo recto.
2. En una cuerda háganse tres nudos separados 3, 4 y 5 dm y utilíicense para formar un ángulo recto.
3. Córtese una tira de cartulina y empléese el método del problema 4 para dividirla en 7 partes de la misma longitud.
4. Búsquese una forma distinta para dividir una tira de cartulina en cinco partes iguales.



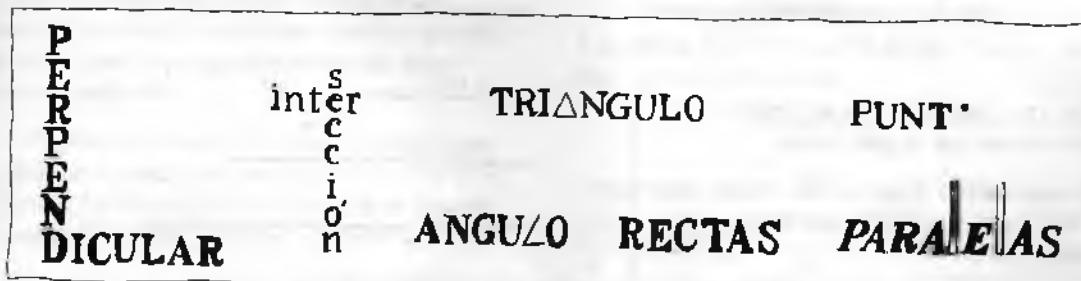
Uso de la geometría como pasatiempo

Muchos conceptos de la geometría pueden dar origen a escenas humorísticas. Los rompecabezas geométricos pueden resultar juegos interesantes que ponen a prueba la inteligencia. Esperamos que el lector encuentre alguna diversión en la geometría.

Obsérvense estas «geocaricaturas».



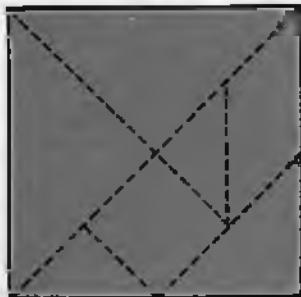
Los «geogarabatos» también son divertidos.



1. Créese una «geocaricatura» propia.
2. Diséñese un «geogarabato» original. Para esto, pueden emplearse palabras como «ángulo recto», «recta», «círculo», «bisecar» o «cuadrado».

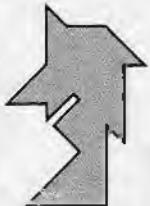
Ahora, inténtese trabajar con el rompecabezas TANGRAM

Dibújese este cuadrado y córtense en 7 piezas como se muestra en la ilustración. Estas piezas son las del famoso rompecabezas chino Tangram, que, según se dice, tiene unos 4000 años de antigüedad.



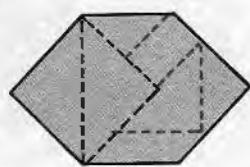
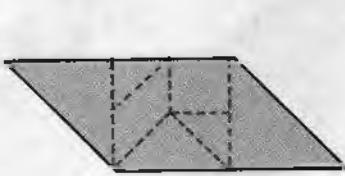
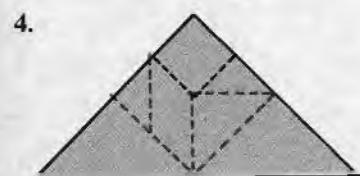
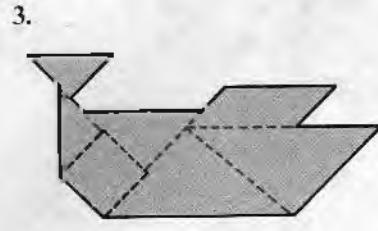
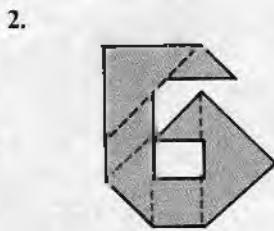
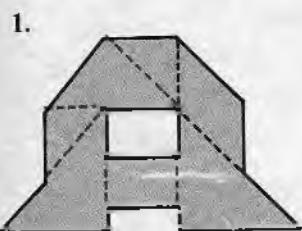
Rompecabezas 1

¿Cómo deben colocarse las 7 piezas del Tangram para formar la figura siguiente?



Solución

¿Cómo deben colocarse las 7 piezas del Tangram para formar las figuras que aparecen abajo? En algunos casos se dan indicaciones con líneas de puntos. Dibújense las soluciones.



7. Hágase una figura con las 7 piezas del Tangram y pásese a algún compañero para que la resuelva.

CAPÍTULO

1

- 1.1 Punto, recta, plano y espacio 10
- 1.2 Relaciones entre puntos, rectas y planos 12
- 1.3 Algunas figuras geométricas básicas 16
- 1.4 Segmentos y ángulos; congruencia
y medición 20
- 1.5 Bisectrices del segmento y del ángulo 24
- 1.6 Rectas y planos perpendiculares 28
- 1.7 Polígonos 32

Conceptos importantes 36 *Resumen* 37 *Examen* 38

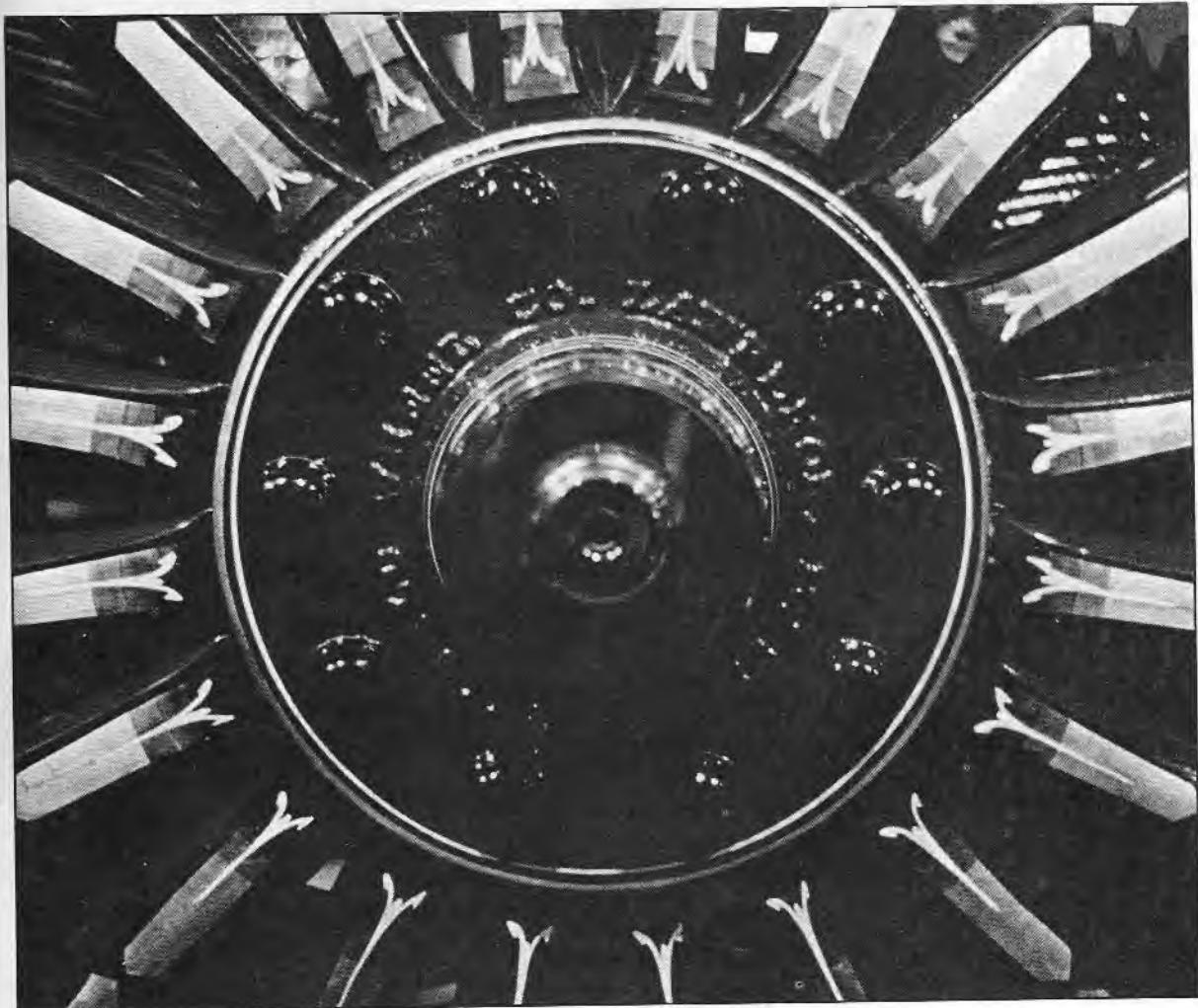
Técnicas para la solución de problemas

Dibujo de un diagrama 39

La geometría en nuestro mundo

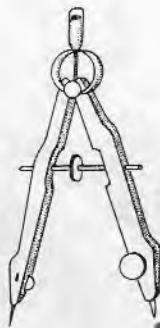
Diseño interior: Teselados 40

Definiciones y construcciones

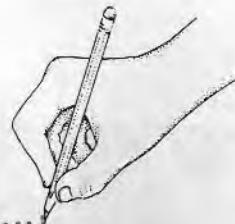


1.1 Punto, recta, plano y espacio

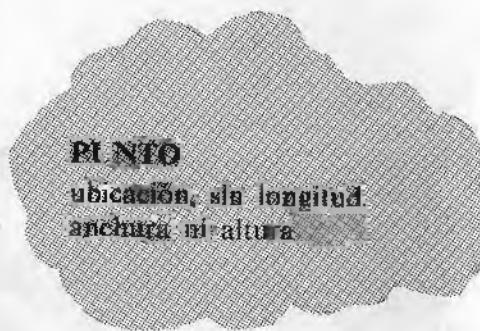
¿Cómo podrían describirse un punto, una recta, un plano y el espacio? Estos cuatro conceptos son muy importantes en el estudio de la geometría. Aquí no se definirán el punto, la recta ni el plano, sino que se observarán objetos que los sugieren.



Un punto como parte de un objeto físico

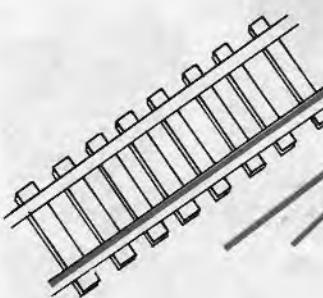


Un punto como la marca más pequeña que se puede dibujar



PUNTO
ubicación, sin longitud, anchura ni altura

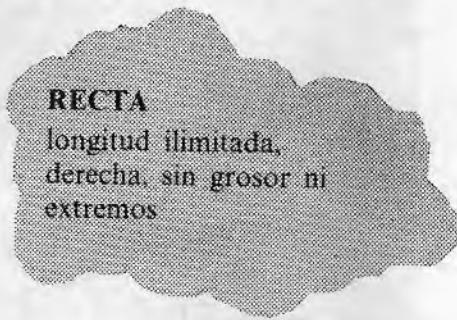
Un punto es una idea o abstracción. Un punto no puede definirse con términos más sencillos, es un término indefinido.



Una recta como parte de una situación física

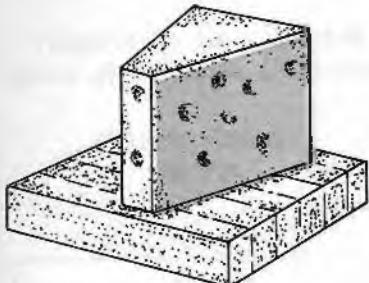


Una recta como la línea más delgada que se puede dibujar

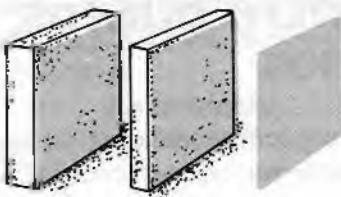


RECTA
longitud ilimitada, derecha, sin grosor ni extremos

Una recta es una idea o abstracción. Como no puede definirse con términos más sencillos, es un término indefinido.

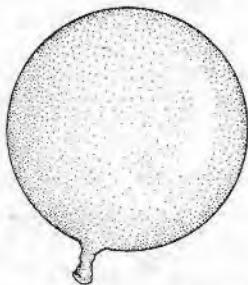


Un plano como parte de un objeto físico

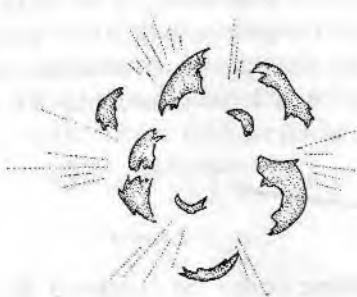


Un plano como el corte más delgado posible

PLANO
ilimitado, continuo en todas direcciones, llano, sin grosor



Hay puntos sobre, dentro y fuera del globo



El espacio como lo que queda al destruir el globo

ESPACIO
ilimitado, sin longitud, anchura ni altura

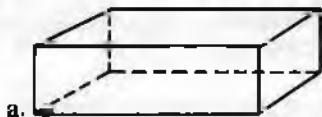
El espacio es una idea o abstracción.

Definición 1.1

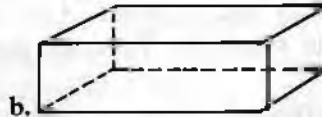
El **espacio** es el conjunto de todos los puntos.

EJERCICIOS

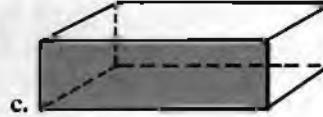
1. Indíquese si la porción en color de cada figura sugiere un punto, una recta, un plano o el espacio.



a.



b.



c.

2. Mencíñense cinco objetos cuya forma sugiera un punto en alguna de sus partes. Identifíquese la parte específica de cada objeto.
3. Mencíñense tres objetos o situaciones físicas que ilustren la idea de recta o de una parte de ella.
4. Mencíñense cinco objetos cuyas formas sugieran un plano en alguna de sus partes.
5. Mencíñense tres objetos, como el globo, que sugieran la idea de espacio.

1.2 Relaciones entre puntos, rectas y planos

Para representar puntos, se dibujan pequeñas marcas en un papel. Las letras mayúsculas al lado de cada punto son sus nombres; así, se llaman *punto A*, *punto B* y *punto C*.



Una recta puede considerarse como un conjunto de puntos. Al dar nombre a un par de ellos, se puede llamar a la recta en función de esos dos puntos. Por ejemplo, los puntos *A* y *B* están en la recta, por lo que se llama *recta AB*; se supone que por los puntos *A* y *B* sólo pasa una recta. Otra manera de decir esto es: *dos puntos determinan una recta*. En ocasiones, se nombra una recta con una letra minúscula. En este caso, la recta *AB* también podría llamarse *recta l*.



Un plano también puede concebirse como un conjunto de puntos. Se designa con una sola letra o dando nombre a tres de sus puntos que no estén en una recta. Así, se le llama *plano N* o *plano ABC*.

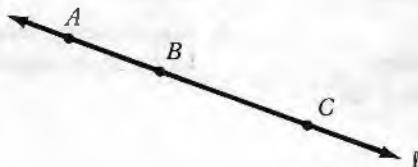


Los puntos *A*, *B* y *C* están en el plano *N*.

Se supone que sólo un plano contiene estos tres puntos. Se dice entonces que tres puntos que no están en una misma recta determinan al plano.

Al considerar la recta *l* como un conjunto de puntos, puede decirse que el punto *A* está en la recta *l*, y que el punto *A* es un elemento de la recta *l* para describir la misma situación. También puede decirse que la recta *l* contiene al punto *A*.

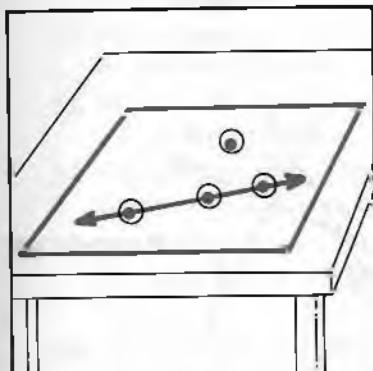
Si *A*, *B* y *C* son puntos de la recta *l*, como se muestra en la figura siguiente, se dice que el punto *B* está entre los puntos *A* y *C*. Si *A*, *B* y *C* no están en la misma recta, no se usa la palabra *entre* para describir su relación.



El punto *B* está entre los puntos *A* y *C*.

Algunas de las relaciones básicas de los puntos y las rectas en un plano se describen a continuación con modelos, símbolos y definiciones.

**Modelo físico,
figura**



**Descripción,
símbolo**

A, B y C son colineales. A, D y C son no colineales. A, B, C y D están en el mismo plano; son puntos coplanares. Los puntos que, como conjunto, no están en el mismo plano, son no coplanares.

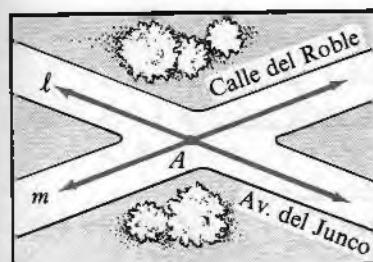
Definición

Definición 1.2

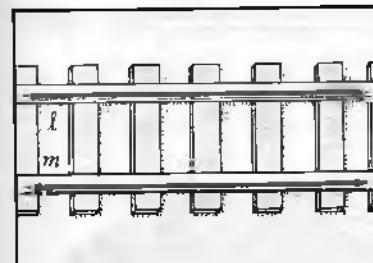
Los **puntos colineales** son puntos que están en la misma recta.

Definición 1.3

Los **puntos coplanares** son puntos que se encuentran en un mismo plano.



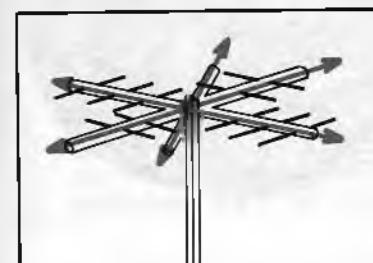
Las rectas ℓ y m se intersecan en el punto A .



Las rectas ℓ y m no tienen un punto en común. ℓ es paralela a m .
Se escribe: $\ell \parallel m$

Definición 1.5

Las **rectas paralelas** son rectas que están en el mismo plano y no se intersecan.



Las rectas p , q y r tienen exactamente un punto en común. Son *rectas concurrentes*.

Definición 1.6

Las **rectas concurrentes** son tres o más rectas coplanares que tienen un punto en común.

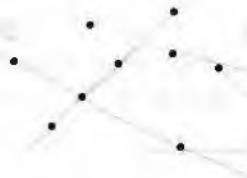
EJERCICIOS

A.

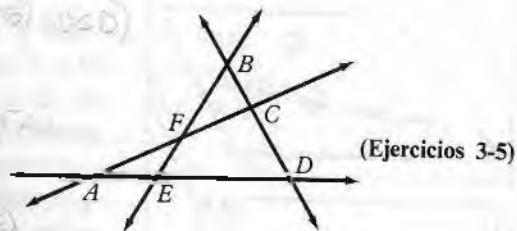
1. Dibújense tres puntos que sean colineales.
2. Trácese el grupo de puntos que se muestra a continuación y, con una regla, dibújese una recta a través de grupos de tres o más puntos colineales.

Los ejercicios 3, 4 y 5 se refieren a la figura de la derecha.

3. Nómbrense conjuntos de tres puntos colineales.
4. Nómbrense conjuntos de tres puntos no colineales.
5. Nómbrense cuatro puntos entre los cuales no haya tres que sean colineales.



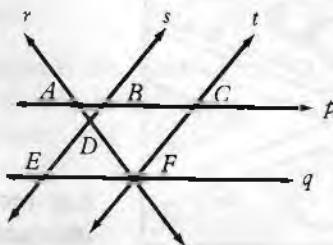
(Ejercicio 2)



(Ejercicios 3-5)

Los ejercicios 6, 7 y 8 se refieren a la figura de la derecha.
(Si las rectas parecen paralelas, puede suponerse que lo son.)

6. Enumérense tres pares de rectas intersecantes.
7. Enumérense tres rectas concurrentes.
8. Enumérense todos los pares de rectas paralelas.
9. Dibújense cuatro rectas concurrentes.

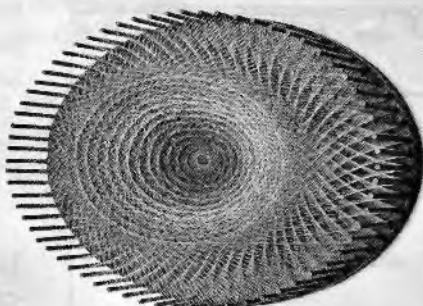
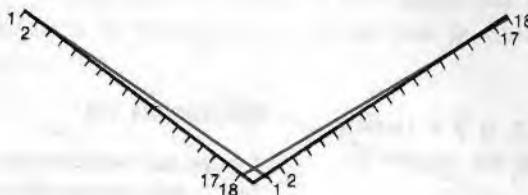


(Ejercicios 6-8)

ACTIVIDADES

Los diseños conocidos como *hiloramas* son creaciones interesantes elaboradas en su totalidad con líneas rectas de hilo o cuerda. Estos diseños pueden ser simples o muy complicados.

Para tener una idea de cómo se hacen los *hiloramas*, se trazará un ángulo y se marcará como se muestra a continuación. Con un bolígrafo de punta fina o un lápiz, se unen los puntos que tienen el mismo número.

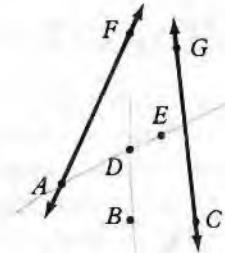


B.

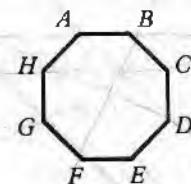
10. Es importante observar que tres puntos pueden ser colineales aunque las rectas no estén marcadas.
Mencíñense grupos de tres puntos colineales de la figura siguiente.
11. Aunque no se haya dibujado, hay una recta que pasa por cada par de puntos. Citense dos de estas rectas en la figura.
12. Enumérense tres rectas que serían paralelas a \overleftrightarrow{BC} si estuvieran dibujadas.
13. Mencíñense tres rectas que serían paralelas a \overleftrightarrow{EF} si estuvieran dibujadas.
14. Enumérense cuatro rectas que unan los puntos marcados con letras y sean concurrentes en el centro de la figura.
15. Los puntos A , B , C y D de este cubo son coplanares.
¿Cuántos conjuntos de cuatro puntos coplanares hay en el cubo?
16. Con frecuencia se usan rectas para describir (o representar) la realidad física; entre las rectas paralelas, las concurrentes y los puntos colineales, ¿cuáles se emplearian para describir cada uno de los casos siguientes?
 a. Iniciar un fuego con una lupa.
 b. La luz procedente de una linterna.
 c. El uso de un telescopio de refracción.



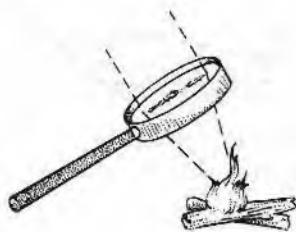
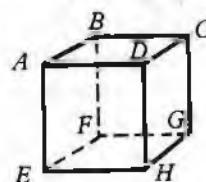
17. ¿Es posible dibujar cuatro rectas que se intersequen en un punto? ¿Es posible dibujar cuatro rectas que se intersequen en dos, tres, cuatro, cinco, seis o más puntos?
Hágase un dibujo que ilustre cada caso.



(Ejercicios 10-11)



(Ejercicios 12-14)

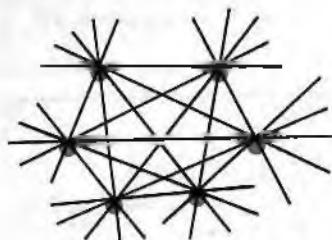


SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cuántas rectas pueden determinar seis puntos, si hay una recta que pasa por cada par de puntos?



Experimentense y compruébese si seis puntos pueden colocarse de tal manera que determinen seis rectas. Colóquense seis puntos para determinar siete, ocho, nueve... catorce rectas.



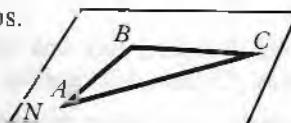
seis puntos, entre los que no hay tres que sean colineales; quince rectas

1.3 Algunas figuras geométricas básicas

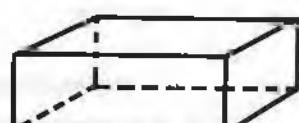
Ya que las rectas, los planos y los espacios se consideran *conjuntos de puntos*, resulta útil definir las figuras geométricas como conjuntos y puntos.

Una *figura plana* es una figura con todos los puntos en un plano, pero no todos en una recta. Una *figura espacial* no tiene todos sus puntos en un solo plano.

Revisemos primero algunas ideas básicas sobre conjuntos.



Un triángulo es una figura plana.



Una caja es una figura espacial

Subconjunto. Si todo elemento de un primer conjunto se encuentra también en un segundo conjunto, el primero es un *subconjunto* del segundo.

Ejemplo



La recta AB es un subconjunto del plano N .

Unión. La *unión* de dos o más conjuntos es un conjunto que contiene todos los elementos de estos conjuntos.

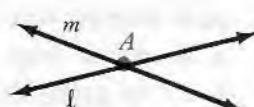
Ejemplo



La *unión* de las rectas ℓ y m contiene todos los puntos de las dos rectas.

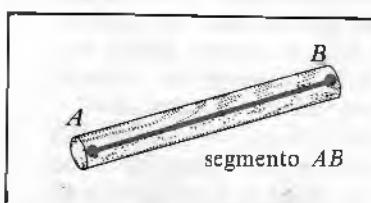
Intersección. La *intersección* de dos conjuntos es el conjunto que contiene aquellos elementos comunes a ambos conjuntos.

Ejemplo

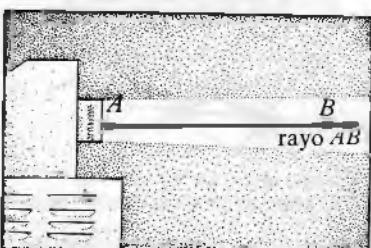


La *intersección* de las rectas ℓ y m es el punto A .

A continuación se describen algunas figuras geométricas básicas con modelos, símbolos y definiciones.



A y B son los extremos.
Se escribe: \overline{AB}



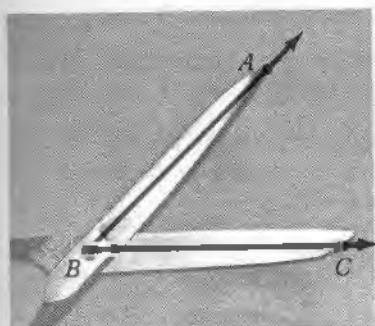
A es el extremo.
Se escribe: \overrightarrow{AB}

Definición 1.7

Un **segmento**, \overline{AB} , es el conjunto de los puntos A y B y de todos los puntos que están entre A y B .

Definición 1.8

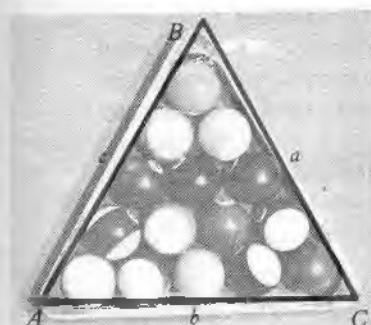
Un **rayo**, \overrightarrow{AB} , es un subconjunto de una recta que contiene un punto A dado y todos los puntos que están en el mismo lado de A , como B .

**Modelo físico,
figura****Descripción,
símbolo****Definición**

B es el vértice. \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} son los lados. El interior de $\angle ABC$ es la intersección de los puntos del lado *A* de \overrightarrow{BC} con los del lado *C* de \overrightarrow{AB} .

Definición 1.9

Un **ángulo** es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo extremo.

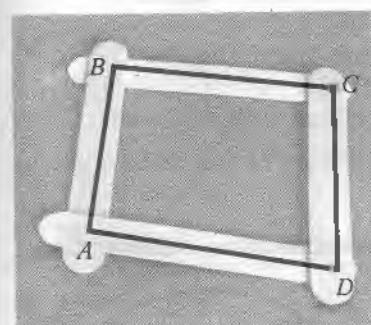


A, *B* y *C* son vértices. \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} son lados.

Se escribe: $\triangle ABC$

Definición 1.10

Un **triángulo** es la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales.



A, *B*, *C* y *D* son vértices. \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{AD} son lados.

Se escribe:
cuadrilátero $ABCD$

Definición 1.11

Un **cuadrilátero** es la unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, entre los cuales no hay tres que sean colineales. Los segmentos se intersecan sólo en sus extremos.



Los puntos *A* y *B* están en el círculo. El punto *O* es el centro del círculo. \overline{AB} es un *diametro* del círculo. \overline{OB} es un *radio* del círculo.

Se dice: círculo *O*

Se escribe: $\odot O$

Definición 1.12

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a una distancia fija de un punto dado del plano.

EJERCICIOS

A.

Dibújese seis veces la recta que se muestra abajo. En cada dibujo resáltese una de las siguientes figuras:

1. \overline{BC} . 2. \overrightarrow{BD} . 3. \overrightarrow{CA} . 4. \overline{AD} . 5. \overrightarrow{BC} . 6. \overrightarrow{DB} .



(Ejercicios 1-6)

Dibújese y dése el nombre de la figura apropiada en cada uno de los ejercicios 7 a 12.

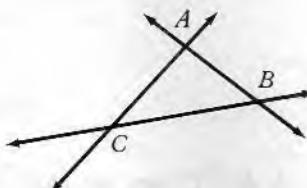
7. $\angle ABC$. 8. $\angle XYZ$. 9. $\triangle DEF$. 10. $\angle A$. 11. \overrightarrow{BA} . 12. \overrightarrow{CD} .

En los ejercicios 13 a 15, elíjanse dos símbolos que se refieran al mismo ángulo.

13. $\angle ABC$, $\angle CAB$, $\angle CBA$.

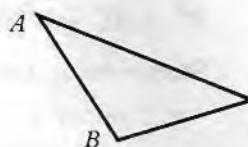
14. $\angle CAB$, $\angle BAC$, $\angle CBA$.

15. $\angle ACB$, $\angle CAB$, $\angle BCA$.



(Ejercicios 13-15)

16. $\triangle ABC$ y $\triangle BAC$ son dos nombres para el triángulo que se muestra a la derecha. A este mismo triángulo se le pueden dar otros cuatro nombres, ¿cuáles son?



(Ejercicio 16)

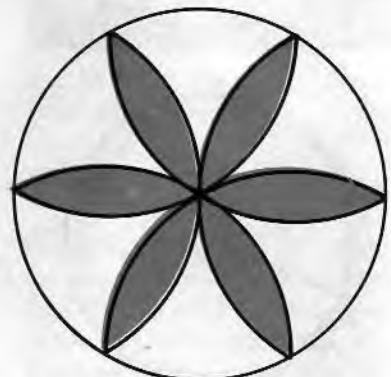
17. Dibújese un círculo con un compás. Márquese su centro, un radio y un diámetro. Por último, esribase el nombre del círculo.

18. Elíjanse cuatro puntos, A , B , C y D , en el círculo y dibújese el cuadrilátero $ABCD$.

ACTIVIDADES

Para elaborar este diseño, dibújese un círculo. Después, con el compás abierto a la longitud del radio y colocado a intervalos iguales a lo largo del círculo, trácense los arcos.

Complétese un diseño como éste. Luego, elabórense y coloreéñse otros diseños usando círculos y segmentos por el procedimiento descrito antes. Pueden hacerse concursos de diseños con regla y compás.

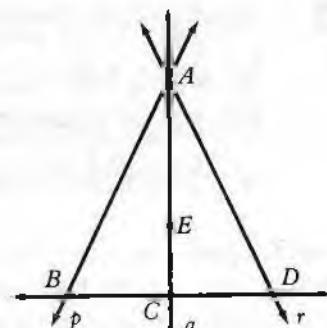


B.

19. Nómbrense con símbolos las cuatro rectas trazadas en esta figura. Nómbrense una recta que no se haya trazado.
20. Nómbrense ocho segmentos trazados. Nómbrense ahora varios que no lo estén.

En los ejercicios 21 a 24, elíjanse los dos símbolos que hacen referencia al mismo conjunto de la figura.

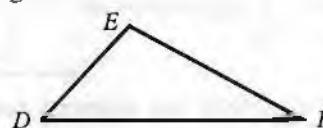
21. \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AB} , p . 22. \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AC} , q .
 23. \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{BD} . 24. \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{DB} .



(Ejercicios 19-25)

25. Nómbrense seis ángulos distintos de la figura.

26. Trácese y recórtense dos triángulos como $\triangle DEF$. Colóquense estos triángulos juntos para formar tantos cuadriláteros como sea posible.



(Ejercicio 26)

27. ¿Es \overrightarrow{CD} el mismo segmento que \overrightarrow{DC} ? ¿Por qué?
 28. ¿Es \overrightarrow{CD} el mismo rayo que \overrightarrow{DC} ? ¿Por qué?

C.

29. Márquense tres puntos como los que se muestran a la derecha. Con ellos, trácese $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$.

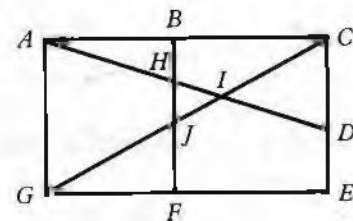
¿Consiste la figura resultante en tres rectas o en tres segmentos? ¿Es un triángulo? ¿Por qué?

 $\bullet B$ $\bullet A$ $\bullet C$

30. Citense por lo menos ocho triángulos en esta figura.

31. Dibújese esta figura y trácese un segmento que añada exactamente otros tres triángulos.

32. Citense por lo menos ocho cuadriláteros en esta figura.



SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cómo podrían unirse seis palillos de manera que se formen cuatro triángulos?

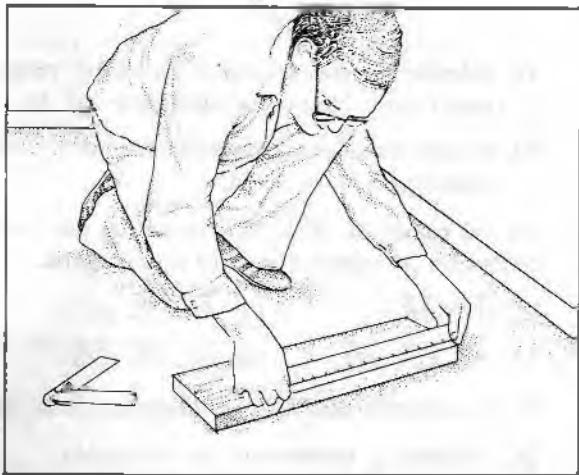
(Sugerencia: con independencia del tamaño de los palillos, se necesitará bastante espacio.)



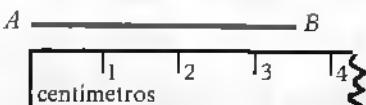
1.4 Segmentos y ángulos; congruencia y medición

El hombre que aparece en el dibujo cortará una tabla para que mida 0.5 m de largo y tenga un borde con ángulo de 45° . Primero, tiene que medir.

Los detalles sobre las propiedades básicas de la medición de ángulos y segmentos se presentarán en la sección 2.8.



La *medición de la longitud* asigna un número real a cada segmento.



La *longitud* de \overline{AB} es 3.5 cm.

Se escribe: $AB = 3.5$.

Hay una manera especial para describir dos segmentos de la misma longitud.



Se dice: \overline{AB} es congruente con \overline{CD} .

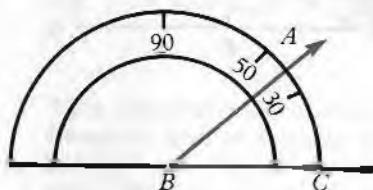
Se escribe: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Algunas veces se marcan los segmentos para mostrar que son congruentes.

Definición 1.13

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.

La *medición de ángulos* asigna a cada ángulo un número real entre 0 y 180.

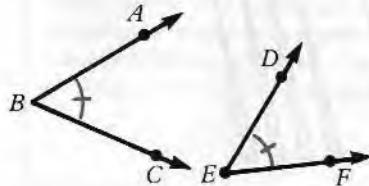


La medida en grados de $\angle ABC$ es 40.

Se escribe: $m\angle ABC = 40$

Algunas veces se escribe que $\angle ABC$ mide 40° .

Hay una manera especial de describir dos ángulos de la misma medida.



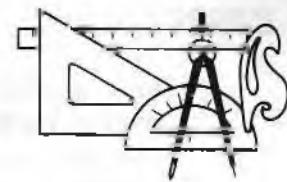
Se dice: $\angle ABC$ es congruente con $\angle DEF$.

Se escribe: $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Definición 1.14

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

Los diseñadores emplean gran variedad de instrumentos y técnicas de dibujo para elaborar planos exactos de proyectos de construcción. En geometría, se debe conocer el uso de dos instrumentos —la regla sin graduar y el compás— para hacer tipos especiales de dibujos llamados *construcciones*. Las dos construcciones que se describen a continuación utilizan el concepto de congruencia definido antes.



Construcción 1. Constrúyase un segmento congruente con un segmento dado. (Cópíese un segmento.)

1. Abrase el compás a la longitud del segmento dado.

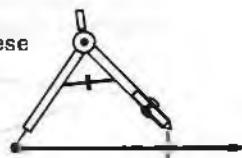


Segmento dado

2. Trácese un rayo que tenga mayor longitud que el segmento dado.

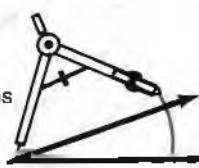


3. Con el mismo compás, cópíese un segmento sobre el rayo.



Construcción 2. Constrúyase un ángulo congruente con un ángulo dado. (Cópíese un ángulo.)

1. Trácese un arco que interseque ambos rayos del ángulo dado.

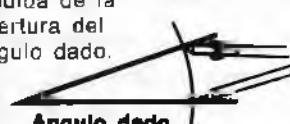


Ángulo dado

2. Trácese un rayo que sirva como un lado del ángulo copia.



4. Abrase el compás a la medida de la abertura del ángulo dado.

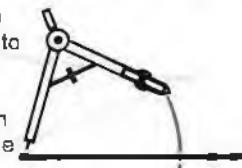


Ángulo dado

5. Con el compás a esa misma abertura trácese un arco.

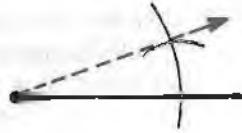


3. Con el mismo compás, abierto como en el primer paso (1), trácese un arco que cruce el rayo.

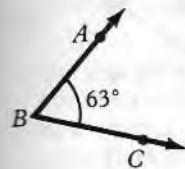


A B

6. Trácese el segundo lado para completar la copia del ángulo dado.

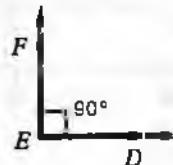


Los tres tipos de ángulos existentes se definen a continuación. Empléese la construcción 2 para trazar tres ángulos congruentes con cada uno de los siguientes:



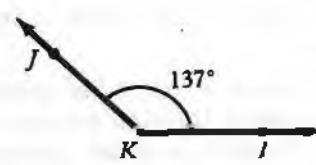
Definición 1.15

Un **ángulo agudo** es un ángulo que mide menos de 90° .



Definición 1.16

Un **ángulo recto** es un ángulo que mide 90° .



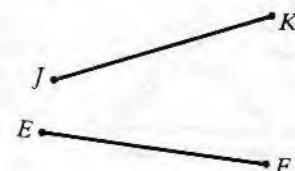
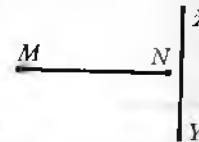
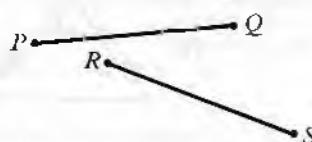
Definición 1.17

Un **ángulo obtuso** es un ángulo que mide más de 90° .

EJERCICIOS

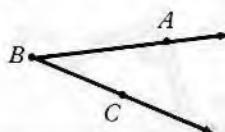
A.

- Con una regla graduada en centímetros, encuéntrese la longitud de este segmento. $AB = ?$
- Trácese segmentos de las longitudes siguientes:
 $CD = 8 \text{ cm}$ $EF = 5.6 \text{ cm}$ $GH = 7.5 \text{ cm}$
 Con la regla sin graduar y el compás, constrúyanse tres segmentos congruentes con cada uno de los dibujados.
- Escríbase una proposición con \cong o con $\not\cong$ («no es congruente con») para cada uno de los tres pares de segmentos siguientes.



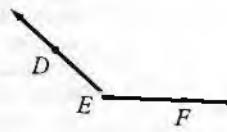
Trácese estos ángulos en un papel. Con un transportador, encuéntrense sus medidas. Si es necesario, pueden prolongarse los lados de cada ángulo.

4.



$$m\angle ABC = ?$$

5.



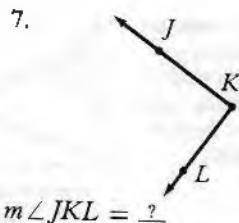
$$m\angle DEF = ?$$

6.



$$m\angle IHJ = ?$$

7.



$$m\angle JKL = ?$$

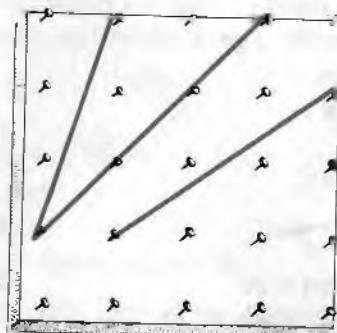
8. Clasifiquense los ángulos de los ejercicios 4 a 7 en agudos, rectos y obtusos.

9. Con una regla sin graduar y un compás, constrúyanse ángulos congruentes con cada uno de los que aparecen en los ejercicios 4 a 7.

ACTIVIDADES

Se necesita una matriz de puntos de 5×5 . Dos puntos son extremos de un segmento. Dos segmentos con un extremo común determinan un ángulo.

- ¿Cuántas longitudes diferentes de segmentos pueden trazarse en una matriz de 5×5 ?
- ¿Cuántas medidas diferentes de ángulos pueden trazarse en una matriz de 5×5 ?



B.

10. Nómbrense cuatro ángulos rectos en esta figura.

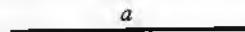
11. Nómbrense cuatro ángulos agudos.

12. Nómbrense cuatro ángulos obtusos.

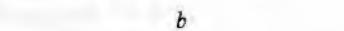
Los segmentos con longitudes a y b se muestran a continuación.



13. Constrúyase un segmento con longitud $2a$.



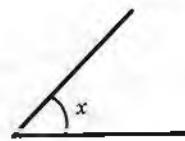
14. Constrúyase un segmento con longitud $a + b$.



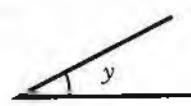
15. Constrúyase un segmento con longitud $b - a$.

Se muestran los ángulos con medidas x e y .

16. Constrúyase un ángulo que mida $x + y$.



17. Constrúyase un ángulo que mida $x - y$.

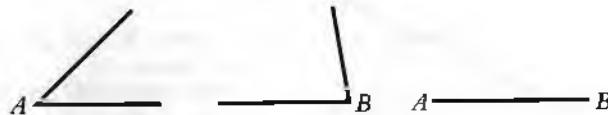


18. Constrúyase un ángulo que mida $3y$.

19. Un avión vuela en dirección sureste. ¿Cuántos grados gira al cambiar su curso hacia el sursuroeste?

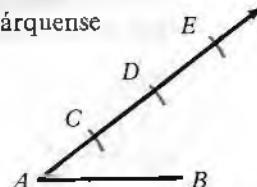
C.

20. Constrúyase $\triangle ABC$ con lado \overline{AB} y ángulos A y B .



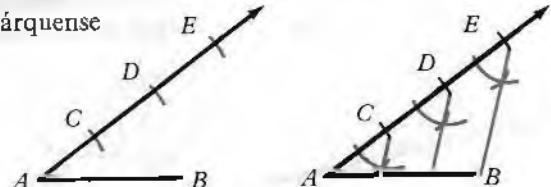
21. Siganse estas instrucciones para dividir el segmento \overline{AB} en tres segmentos congruentes.

- a. Trácese un rayo a partir del punto A y márquense sobre él tres segmentos congruentes.



- b. Trácese \overline{EB} .

- c. Empléese la construcción 2 para copiar $\angle AEB$ en D y después en C .

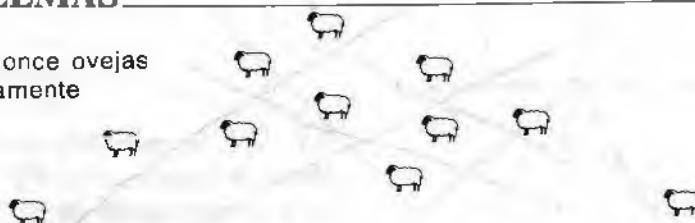


- d. Los lados de los ángulos copiados dividen \overline{AB} en tres segmentos congruentes.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Un granjero quiere separar estas once ovejas construyendo once corrales exactamente con cuatro vallas rectas.

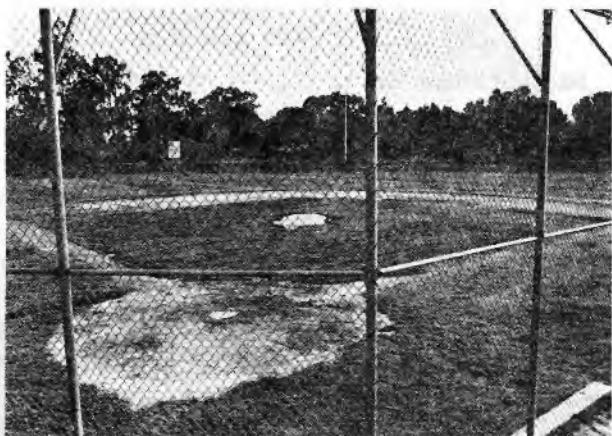
¿Cómo puede hacerlo?
(Las vallas se pueden cruzar.)



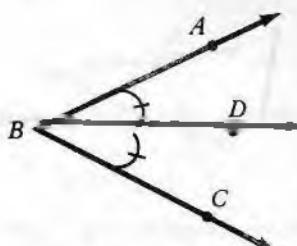
1.5 Bisectrices del segmento y del ángulo

En un diamante de béisbol, la segunda base está a la misma distancia de las dos líneas de *foul*. *Home*, la primera base, la segunda base y la tercera base, están en las esquinas de un cuadrado. ¿Está el montículo del lanzador en el punto medio entre:

- home* y la segunda base?
- la primera base y la tercera?
- ninguna de las anteriores?



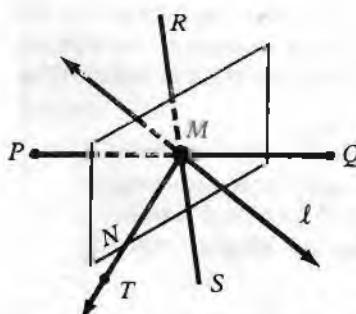
La marcación de un diamante de béisbol incluye los conceptos y los procedimientos de construcción que se explican a continuación.



El rayo \overrightarrow{BD} es la *bisectriz de $\angle ABC$* . Todos los puntos de \overrightarrow{BD} están a la misma distancia de los lados de $\angle ABC$.



El punto C es el *punto medio de \overline{AB}* .



\overleftrightarrow{RS} , \overleftrightarrow{MT} , la recta ℓ y el plano N intersecan a \overline{PQ} en el punto medio M , y son bisectrices de \overline{PQ} .

Definición 1.18

La *bisectriz de un ángulo* ABC es un rayo \overrightarrow{BD} en el interior de $\angle ABC$, de manera que $\angle ABD \cong \angle DBC$.

Definición 1.19

El *punto medio de un segmento* es un punto C entre A y B , de manera que $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

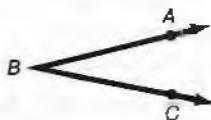
Definición 1.20

La *bisectriz de un segmento* es cualquier punto, segmento, rayo, recta o plano que contenga al punto medio del segmento.

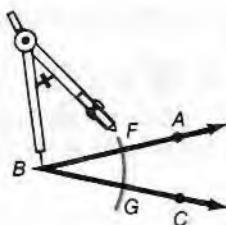
A continuación se describen los métodos para bisectar un ángulo y un segmento.

Construcción 3. Bisectar un ángulo.

- Dado el ángulo ABC ,



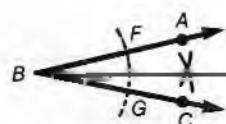
- Con B como centro, trácese un arco que interseque ambos lados del ángulo en F y G .



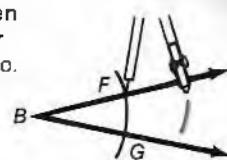
- Con G como centro y la misma abertura de compás que en el tercer paso, trácese un arco que cruce al primero.



- Unanese B y el punto de intersección de los arcos para marcar la bisectriz del ángulo.



- Con F como centro, trácese un arco en el interior del ángulo.

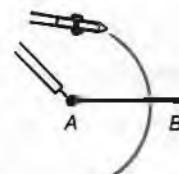


Construcción 4. Bisectar un segmento.

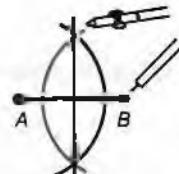
- Dado el segmento de recta AB ,



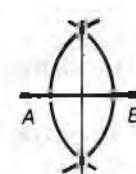
- Con A como centro y el compás con una abertura mayor que la mitad de AB , trácese un arco semicircular.



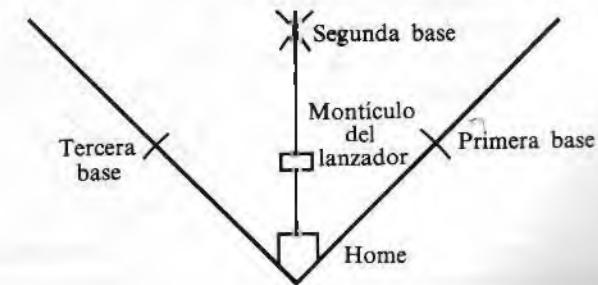
- Con B como centro y el compás con la misma abertura que en 2, trácese un arco semicircular que interseque al primer arco.



- Unanese los dos puntos de intersección para completar la construcción de la bisectriz de AB .



Este diagrama muestra cómo la biseción de un ángulo resulta útil en la marcación de un diamante de béisbol. Obsérvese que el montículo del lanzador está sobre la bisectriz del ángulo, a 60 pies y 6 pulgadas de *home*. No está sobre una recta que vaya de la primera base a la tercera, ni está en el punto medio de la recta que va de *home* a la segunda base.

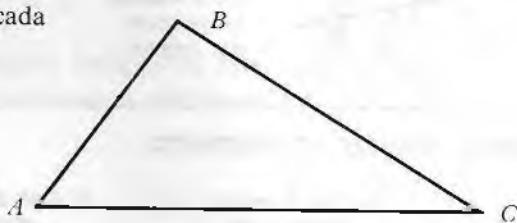


EJERCICIOS

1. Trácese un segmento \overline{AB} . Biséquese \overline{AB} .
2. Trácese un segmento \overline{AB} . Constrúyase un punto N de tal manera que $AN = \frac{1}{4}AB$.
3. ¿Qué otras fracciones de \overline{AB} se pueden construir?
4. Trácese ángulos cuya medida se aproxime a la de los ángulos A , B y C . Constrúyanse las bisectrices de estos ángulos.



5. Trácese este triángulo. Biséquese cada ángulo. ¿Son concurrentes las bisectrices de los ángulos?

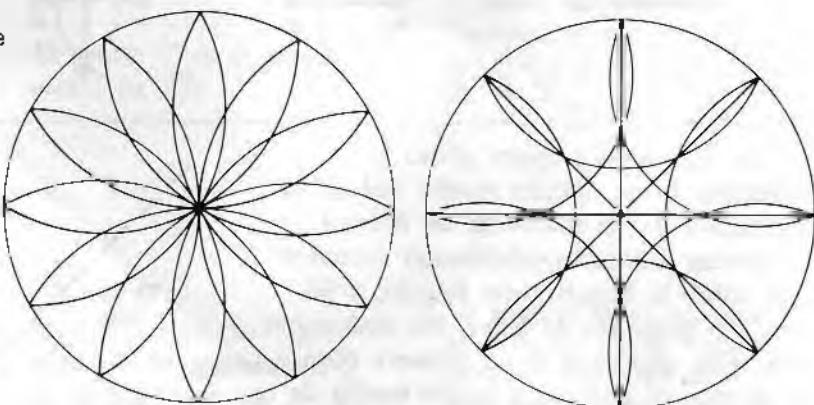


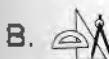
6. La bisectriz de $\angle XYZ$ es \overrightarrow{YT} . Escribanse los nombres de los ángulos congruentes que se forman.

ACTIVIDADES

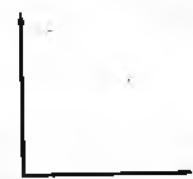
Para construir estos diseños es necesario bisecar ángulos.

1. Constrúyase y coloréese uno de estos diseños.
2. Con un compás y una regla, constrúyase un diseño original que requiera la biseción de ángulos.



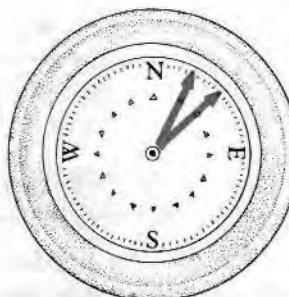


Para realizar los ejercicios 7 a 10, deben usarse las construcciones. Si se desea, puede copiarse el ángulo recto ABC . No debe utilizarse el transportador.

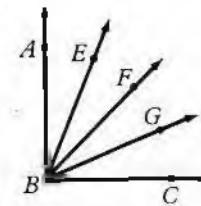


(Ejercicios 7-10)

7. Constrúyase un ángulo de 45° .
8. Constrúyase un ángulo de $22\frac{1}{2}^\circ$.
9. Constrúyase un ángulo de 135° .
10. Constrúyase un ángulo de $67\frac{1}{2}^\circ$.
11. Trácese dos ángulos agudos; llámense $\angle J$ y $\angle K$. Constrúyase un tercer ángulo que mida $\frac{1}{2}(m\angle J + m\angle K)$.
No debe utilizarse el transportador
12. Dibújense las cuatro direcciones señaladas en una brújula. Con una regla y un compás, trácese una recta que apunte hacia el nornoreste.



13. Constrúyase un ángulo de $112\frac{1}{2}^\circ$.
14. Constrúyase un ángulo de $82\frac{1}{2}^\circ$.
15. Constrúyase un ángulo de $157\frac{1}{2}^\circ$.
16. Constrúyase un ángulo de $97\frac{1}{2}^\circ$.
17. En este diagrama, \overrightarrow{BF} biseca a $\angle EBG$, $m\angle ABC = 90$, $m\angle ABE = 20$, $m\angle GBC = 24$. ¿Qué es $m\angle ABF = ?$
18. Constrúyase un segmento de longitud $4CD - \frac{1}{2}AB$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Un compás **oxidado** pierde su movimiento y siempre tiene la misma abertura.

Un compás **plegable**, en cambio, vuelve a cerrarse en cuanto se separa del papel.

1. Biséquese \overline{AB} con:
 - a. un compás plegable
 - b. un compás oxidado con abertura de C a D .

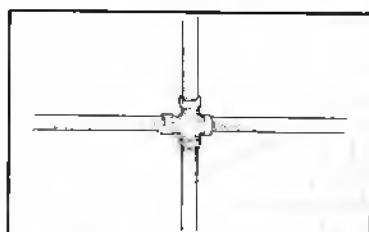


2. Biséquese un ángulo con:
 - a. un compás plegable
 - b. un compás oxidado

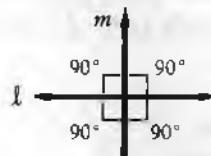
1.6 Rectas y planos perpendiculares

En nuestra vida cotidiana hay muchos ejemplos de rectas y planos perpendiculares. Algunos de estos ejemplos se emplean en las definiciones siguientes.

Modelo físico



Figura, descripción



ℓ es perpendicular a m .
Se escribe: $\ell \perp m$.

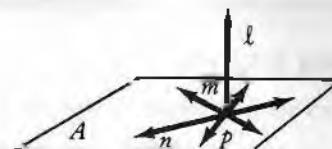
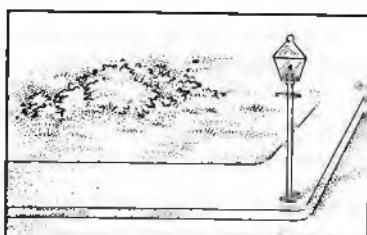
Definición

Definición 1.21

Dos rectas son **perpendiculares** si al intersecarse forman ángulos rectos congruentes.

A partir de proposiciones simples que pueden demostrarse, se interpretará esta definición de *perpendicular* incluyendo los siguientes conceptos:

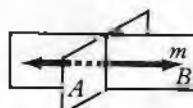
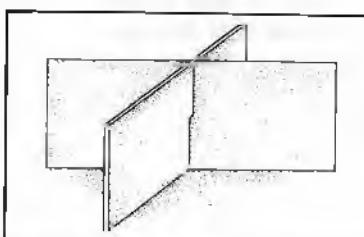
1. Cuando dos rectas son perpendiculares, todos los ángulos que se forman miden 90° (ángulos rectos) y son congruentes.
2. Cuando dos rectas se intersecan para formar uno, dos o tres ángulos de 90° (ángulos rectos), forman cuatro ángulos rectos y son perpendiculares.
3. Cuando dos rectas se intersecan para formar un par de ángulos congruentes con un lado común, las rectas son perpendiculares.



La recta ℓ es perpendicular a las rectas m , n , p , etc.; por tanto, la recta ℓ es perpendicular al plano.

Definición 1.22

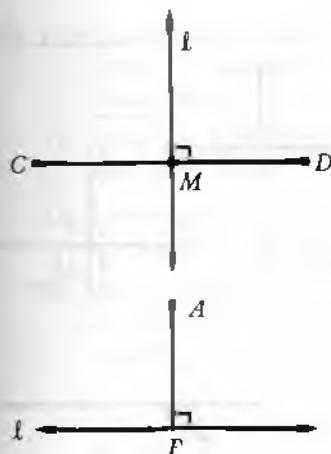
Una recta es **perpendicular a un plano** si es perpendicular a cada una de las rectas del plano que intersecan a la recta.



La recta m del plano B es perpendicular al plano A ; por tanto, el plano B es perpendicular al plano A .

Definición 1.23

Dos planos son **perpendiculares** si en uno de ellos hay una recta que es perpendicular al otro.



ℓ es la bisectriz perpendicular de \overline{CD} .

AB es la distancia del punto A a la recta ℓ .

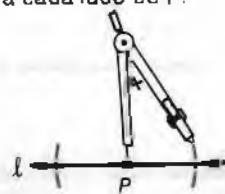
En la construcción 4 se trazó la bisectriz perpendicular de un segmento. Las siguientes son otras dos construcciones importantes que incluyen rectas perpendiculares.

Construcción 5. Constrúyase una perpendicular a una recta que pase por un punto dado de la recta.

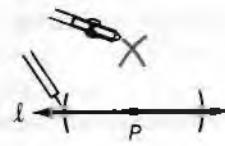
- Dados una recta ℓ y un punto P de ℓ ,



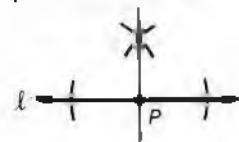
- Trácese un arco a cada lado de P .



- Trácese dos arcos que se crucen arriba de la recta ℓ .



- Trácese la perpendicular a la recta ℓ por P .

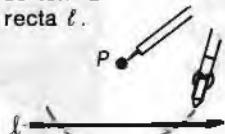


Construcción 6. Constrúyase una perpendicular a una recta que pase por un punto dado fuera de la recta.

- Dados una recta ℓ y un punto P fuera de la recta ℓ ,



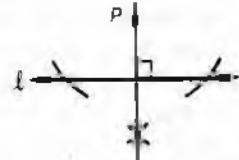
- Trácese dos arcos que corten la recta ℓ .



- Trácese dos arcos que se crucen por debajo de la recta ℓ .



- Trácese la perpendicular a la recta ℓ , por P .



Definición 1.24

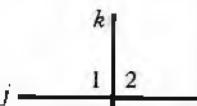
La **bisectriz perpendicular de un segmento** es una recta perpendicular al segmento y contiene su punto medio.

Definición 1.25

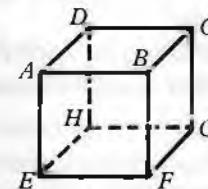
La **distancia entre un punto y una recta** es la longitud del segmento trazado desde el punto perpendicular a la recta.

EJERCICIOS

A.

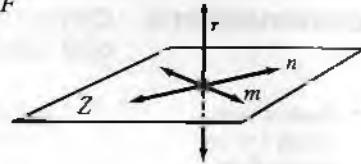
- $\angle 1 \cong \angle 2$. ¿Qué puede concluirse sobre las rectas j y k ? 
- $m\angle 3 = 90^\circ$. ¿Qué puede decirse sobre las rectas m y n y los ángulos $1, 2$ y 4 ?
- Trácese un segmento \overline{PQ} . Constrúyase la bisectriz perpendicular de \overline{PQ} .
- Trácese una recta ℓ . Constrúyase una recta perpendicular a ℓ que contenga al punto A de ℓ .

- Trácese una recta m y un punto P que no esté en m . Constrúyase una recta perpendicular a m que pase por P .
- Cítense cuatro rectas que sean perpendiculares al plano $ABCD$.
- Cítense cuatro pares de planos perpendiculares.



(Ejercicios 6, 7)

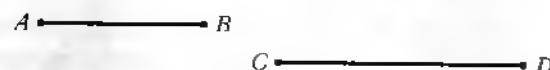
- La recta r es perpendicular al plano Z . ¿Qué puede decirse sobre las rectas r, m y n ?



B.

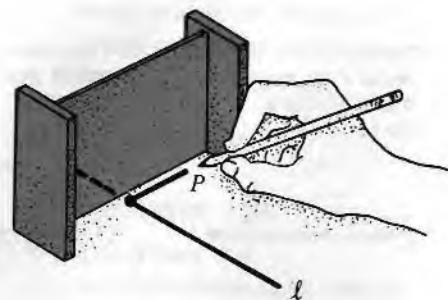


- Constrúyase un rectángulo con lados congruentes con AB y CD .

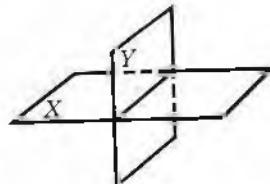
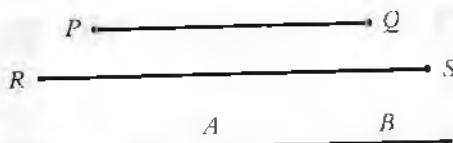
**ACTIVIDADES**

Estas Instrucciones muestran cómo usar una hoja de plástico de color para construir una perpendicular a una recta que pase por un punto que no está en la recta (Construcción 6). Explíquese cómo realizar las construcciones 3, 4 y 5 de este capítulo usando la hoja de plástico.

Colóquese la hoja de plástico perpendicular al plano sobre el que se trabajará (mesa, papel, etc.), con un borde próximo al punto P , de tal manera que la imagen visual de la mitad de la recta ℓ frente a la hoja de plástico, esté exactamente a la mitad de la recta ℓ que está detrás de dicha hoja. Hágase el dibujo junto al borde para producir la perpendicular a la recta ℓ por el punto P .

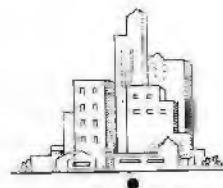


- A**
10. Constrúyase un triángulo con un ángulo de 45° y lados congruentes con los segmentos \overline{PQ} y \overline{RS} . (No se debe utilizar el transportador.)
 11. Apíquese la construcción 5 para hacer un cuadrado con lados AB .
 12. Trácese un triángulo ABC . Apíquese la construcción 6 para trazar un punto D sobre \overline{BC} de manera que \overline{AD} sea perpendicular a \overline{BC} .
 13. ¿Es el plano X perpendicular al plano Y ? De acuerdo con la definición de los planos perpendiculares, ¿qué información se requiere para asegurarse de que los planos son perpendiculares?



- C.**
14. Dos ciudades necesitan un servicio adicional de agua. Se decidió construir una planta purificadora de agua junto a un río cercano y canalizar el agua desde la planta hasta cada ciudad. Cada ciudad pagará a la instalación de las tuberías que irán de la planta a ella. La planta debe ubicarse a la misma distancia de las dos ciudades.
 15. Otro objetivo a cumplir al determinar el punto en que debe ubicarse la planta purificadora de agua del ejercicio 14 es que las ciudades compartan de forma equitativa todos los gastos. Este plan implica que la longitud total de la tubería debe ser la mínima necesaria. ¿Dónde debe colocarse la planta purificadora? Trácese el mapa y búsquese la ubicación idónea de la planta.

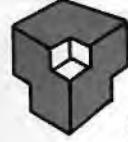
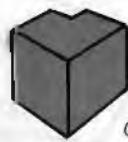
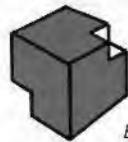
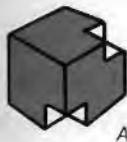
Trácesc el mapa que se muestra a continuación y determiníse mediante una construcción el punto en que debe colocarse la planta para satisfacer estos objetivos.



(Ejercicios 14, 15)

SOLUCION DE PROBLEMAS

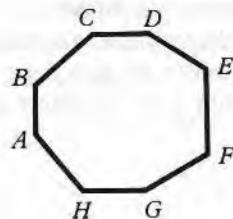
Los siguientes son cuatro cubos idénticos de los que se han extraído una o más porciones cúbicas también de idéntico tamaño.



Compárese cada par de figuras: *A* y *B*, *A* y *C*, *A* y *D*, *B* y *C*, *B* y *D* y *C* y *D*. ¿Cuál de estos pares podría ser el mismo (dependiendo de la esquina posterior que no está a la vista)?

1.7 Polígonos

Las figuras geométricas formadas por líneas rectas son muy comunes en nuestro mundo. Tales figuras reciben el nombre de *polígonos*.



Este polígono tiene ocho lados. Los puntos A , B , C , D , E , F , G y H son sus vértices. A cada segmento de un polígono se le llama *lado*.

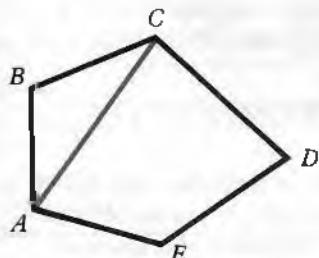
Se escribe:
polígono $ABCDEFGH$.

Definición 1.26

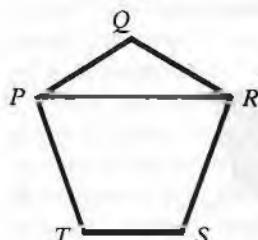
Un **polígono** es la unión de segmentos que se juntan sólo en sus extremos, de tal manera que: (1) como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto, y (2) cada segmento toca exactamente a otros dos.

Los polígonos reciben un nombre particular de acuerdo con el número de lados que tengan. Por ejemplo: triángulo, 3 lados; cuadrilátero, 4 lados; pentágono, 5 lados; hexágono, 6 lados; heptágono, 7 lados; octágono, 8 lados. Un polígono con n lados podría llamarse **n -gono**.

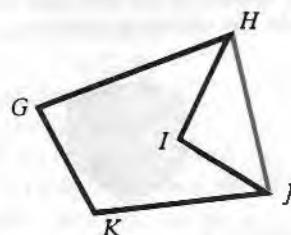
Las definiciones siguientes proporcionan más información sobre los polígonos.



Los extremos de \overline{AC} son vértices no consecutivos del polígono $ABCDE$. \overline{AC} es una de las *diagonales* del polígono.



Cada diagonal de este polígono, como \overline{PR} , está en el interior del polígono. $PQRST$ es un polígono convexo.



Por lo menos una de las diagonales de este polígono no está en su interior. $GHIJK$ no es un polígono convexo.

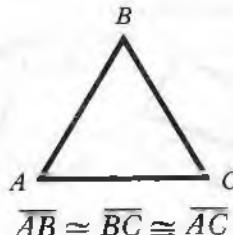
Definición 1.27

Una **diagonal de un polígono** es un segmento que toca dos vértices no consecutivos cualesquiera del polígono.

Definición 1.28

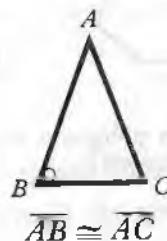
Un **polígono es convexo** si todas sus diagonales están en el interior del polígono.

Los triángulos con lados congruentes tienen nombres especiales.



Definición 1.29

Un **triángulo equilátero** es aquel cuyos lados son todos congruentes entre sí.



$\angle A$ es el *ángulo del vértice*. $\angle B$ y $\angle C$ son los *ángulos de la base*.

Algunos polígonos tienen características que los convierten en *polígonos regulares*.

Todos los lados son de igual longitud. Todos los ángulos miden lo mismo.

Definición 1.30

Un **triángulo isósceles** es un triángulo que tiene dos lados congruentes entre sí.

Definición 1.31

Un **polígono regular** es aquel cuyos lados son congruentes entre sí, y todos sus ángulos también son congruentes entre sí.

$ABCDEFG$ es un polígono regular.



EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 4, selecciónese la figura que no es un polígono regular. Explíquese por qué no lo es.

1.



a.



b.



c.

2.



a.

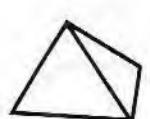


b.



c.

3.



a.



b.



c.

4.



a.



b.



c.

5. ¿Cuáles de las figuras anteriores son polígonos convexos?

Por ejemplo, la figura 1c es un polígono convexo.

6. Trácese un octágono convexo. Trácese una de sus diagonales.

7. Trácese un octágono no convexo.

8. Identifíquese cada triángulo como equilátero, isósceles o ninguno de ellos. Empléese una regla.



9. ¿Cuáles de los siguientes son polígonos regulares?



a.



b.



c.



d.

(Ejercicios 9, 10)

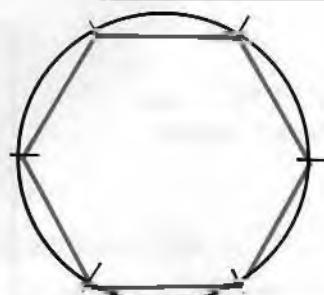
10. Tráncense tantas diagonales como sea posible para cada uno de los polígonos anteriores

ACTIVIDADES

Para construir un hexágono regular puede usarse el método de construcción con regla y compás descrito en las actividades de la sección 1.3.

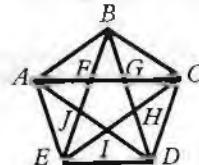
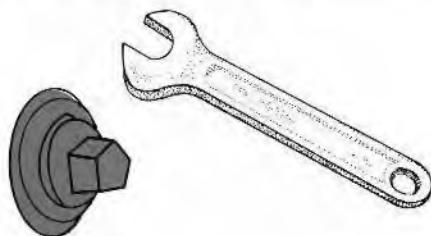
Combínese este método con la biseción de ángulos y la construcción de bisectrices perpendiculares para construir:

- un dodecágono regular
- un octágono regular
- un polígono regular de 16 lados.



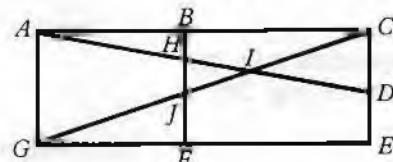
B.

11. $ABCDE$ es un pentágono regular. Nómbrense tantos triángulos isósceles como sea posible. (Si un triángulo parece isósceles, puede suponerse que lo es.)
12. Algunas letras del alfabeto pueden dibujarse con la forma de un polígono, pero otras no. Dibújense con forma de polígonos tantas letras como sea posible.
13. Una llave de tuercas fija tiene lados paralelos. ¿Qué puede suponerse acerca del número de caras de la tuerca a la que corresponde esta llave?
14. El vástago de la válvula de una toma de agua para incendios suele tener forma de pentágono regular, en lugar de la forma usual de hexágono regular. ¿A qué puede ser debido?

se necesitan
dos polígonos

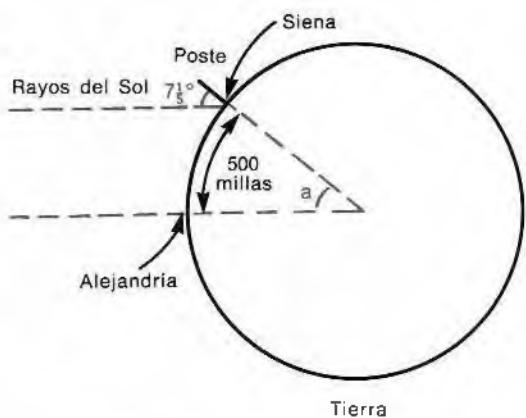
C.

15. La figura que aparece a la derecha contiene ejemplos de diferentes polígonos: desde triángulos hasta decágonos. Encuéntrese y citese cada uno.
16. Con un transportador y una regla, trácese un octágono cuyos lados tengan cinco longitudes diferentes y los ángulos de los vértices midan 135° .



SOLUCION DE PROBLEMAS

Eratóstenes (275 a. de C.) calculó la circunferencia de la Tierra con un método ingenioso. Supuso que los rayos del Sol eran paralelos, y descubrió que cuando el Sol se encontraba exactamente sobre Alejandría, sus rayos formaban un ángulo de $7\frac{1}{5}^\circ$ con un poste vertical situado a 500 millas, en Siena (Asuán). Además, supuso que el ángulo central a también media $7\frac{1}{5}^\circ$. Dedujo que la relación del ángulo central a 500 millas sería igual a la relación del total de grados de un círculo para completar la longitud de la circunferencia de la Tierra. Definase la proporción y hállese la distancia.



Capítulo 1 Conceptos importantes

Términos

Punto (pág. 10)	Angulo agudo (pág. 21)
Recta (pág. 10)	Angulo recto (pág. 21)
Plano (pág. 11)	Angulo obtuso (pág. 21)
Espacio (pág. 11)	Bisectriz de un ángulo (pág. 24)
Puntos colineales (pág. 13)	Punto medio de un segmento (pág. 24)
Puntos coplanares (pág. 13)	Bisectriz de un segmento (pág. 24)
Rectas intersecantes (pág. 13)	Rectas perpendiculares (pág. 28)
Rectas paralelas (pág. 13)	Recta perpendicular a un plano (pág. 28)
Rectas concurrentes (pág. 13)	Planos perpendiculares (pág. 28)
Segmento (pág. 16)	Bisectriz perpendicular (pág. 29)
Rayo (pág. 16)	Distancia de un punto a una recta (pág. 29)
Angulo (pág. 17)	Polígono (pág. 32)
Triángulo (pág. 17)	Diagonal de un polígono (pág. 32)
Cuadrilátero (pág. 17)	Polígono convexo (pág. 32)
Círculo (pág. 17)	Triángulo equilátero (pág. 33)
Segmentos congruentes (pág. 20)	Triángulo isósceles (pág. 33)
Angulos congruentes (pág. 20)	Polígono regular (pág. 33)

Construcciones

Cópíese un segmento (pág. 21)
Cópíese un ángulo (pág. 21)
Biséquese un ángulo (pág. 25)
Biséquese un segmento (pág. 25)

Constrúyase una perpendicular a una recta que pase por un punto dado sobre la recta (pág. 29)
Constrúyase una perpendicular a una recta que pase por un punto dado fuera de la recta (pág. 29)

Capítulo 1 Resumen

1. Citense objetos que ilustren lo siguiente:
 - a. Punto.
 - b. Plano.
 - c. Rectas paralelas.
 - d. Rectas intersecantes.
 - e. Polígono.

2. Indíquese si las afirmaciones siguientes son falsas o verdaderas.
 - a. Un rayo láser es un ejemplo mejor de recta que un rayo.
 - b. MN no es perpendicular a XY , porque sólo se forman dos ángulos rectos.
 - c. El punto C está en \overrightarrow{AB} .
 - d. El punto C está en \overleftrightarrow{AB} .
 - e. Un radio es un rayo.
 - f. Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.

3. ¿Cuántos extremos tienen una recta, un rayo y un segmento?

4. ¿Es lo mismo \overline{AB} que \overline{BA} ? ¿Por qué?

5. Constrúyase un ángulo de 135° .

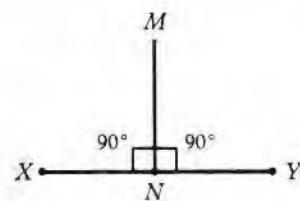
6. Dibújese un ángulo obtuso y trácese su bisectriz. ¿Son los ángulos resultantes agudos, rectos u obtusos?

7. Trácese un triángulo ABC (bastante grande). Márquese el punto medio de cada uno de los lados.

8. Trácese un segmento que sea congruente con \overline{AB} .

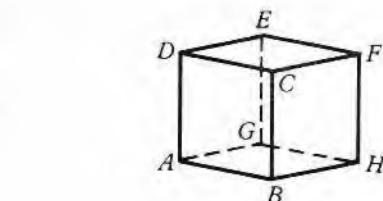
9. Trácese un segmento de longitud $\frac{1}{4}\overline{AB}$.

10. Cópiense \overline{CD} y P en un papel y trácese una recta perpendicular a \overline{CD} que pase por P .



En los ejercicios 11 a 14, empléese la figura del cubo para identificar lo siguiente:

11. Dos planos paralelos.
12. Una recta perpendicular al plano $EFHG$.
13. Una recta paralela al plano $CDEF$ pero que no sea perpendicular al plano $ABCD$.
14. La intersección de los planos $BCEG$ y $BCFH$.

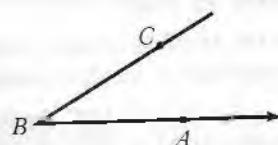


Capítulo 1 Examen

- Citense objetos que ilustren lo siguiente:
 - Recta.
 - Rectas concurrentes.
 - Rectas perpendiculares.
 - Polígono regular.
 - Espacio.
- Indíquese si las afirmaciones siguientes son falsas o verdaderas.
 - Dos puntos siempre son colineales.
 - Si dos ángulos son congruentes, entonces ambos son rectos.
 - El punto D está en \overrightarrow{AB} .
 - El punto D está en \overleftarrow{AC} .
 - Un diámetro de un círculo es una recta.
 - Un triángulo isósceles debe tener tres lados congruentes.



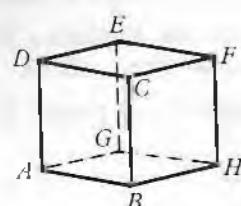
- ¿Es lo mismo \overrightarrow{AB} que \overrightarrow{BA} ? ¿Por qué?
- Si dos rectas son paralelas, ¿cuántos puntos tienen en común?
- Dibújese un cuadrilátero no convexo.
- Dibújese un triángulo ABC. Trácese la bisectriz de cada ángulo.
- Trácese un ángulo que sea congruente con $\angle ABC$.
- Sin usar el transportador, trácese cuatro ángulos rectos con un vértice común.
- Trácese un segmento congruente con \overline{AB} .
- Márquese el punto medio de \overline{AB} .



(Ejercicios 9, 10)

- En los ejercicios 11 a 14, empléese la figura del cubo e identifíquese lo siguiente:

- Una recta paralela al plano $ABIHG$.
- Un plano perpendicular a \overrightarrow{EG} .
- Una recta que no sea paralela ni perpendicular a ninguna cara del cubo.
- La intersección de los planos $ADFH$ y $CDEF$.



Técnicas para la solución de problemas

Dibujo de un diagrama

Puede resultar agradable resolver problemas si se conocen diversas maneras de abordarlos. Hay varias técnicas para resolver problemas de matemáticas; una de ellas es dibujar un diagrama.

Ejemplo

En el rayo \overrightarrow{AB} , $AC = 5$ y $AB = 2$. Encuéntrese BC . Como ayuda para resolver este problema, se dibujará un diagrama.



En el diagrama se observa que $BC = 3$.

PROBLEMAS

Dibújense diagramas y resuélvanse los siguientes problemas.

1. En el rayo \overrightarrow{NP} , $NP = 4$ y $PM = 6$. Encuéntrese NM .
2. En el rayo \overrightarrow{XY} , $XZ = 15$ e $YZ = 6$. Encuéntrese ZX .
3. ¿Cuántos postes se necesitan para cercar un terreno rectangular si entre los postes debe haber 5 pies de distancia y el terreno mide 20 pies por 30 pies?
4. Supóngase que un insecto camina sobre un palo vertical y sube dos pulgadas en dos minutos; después, baja una pulgada en un minuto; de nuevo sube dos pulgadas en dos minutos, y así sucesivamente. Si sigue así, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar una altura de 10 pulgadas?
5. Una escalera tiene diez escalones, cada uno mide un pie de ancho y un pie de altura. Una hormiga empieza desde abajo del primer escalón y sube la escalera en línea recta. ¿Qué distancia habrá recorrido la hormiga al llegar a la parte más alta del último escalón?
6. En una escuela se trazó un circuito para una carrera de fondo en las calles de una ciudad. Desde el punto de salida, los corredores avanzaron 4 calles al este, 6 al norte, 2 al oeste, dos al sur, 5 al oeste, 3 al norte, 2 al oeste, 8 al sur y 5 más hacia el este hasta la meta. Establézcase la dirección y el número de calles que se recorrieron desde la salida hasta la meta.

LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

Diseño interior: Teselados

Un diseñador de interiores encuentra ejemplos de geometría al seleccionar diseños de telas, suelos y papel para paredes. Con frecuencia, en diseño se emplea un concepto geométrico llamado *teselado*. Un teselado es un conjunto de polígonos dispuestos de forma que no se sobreponen unos a otros ni quedan separaciones entre ellos.

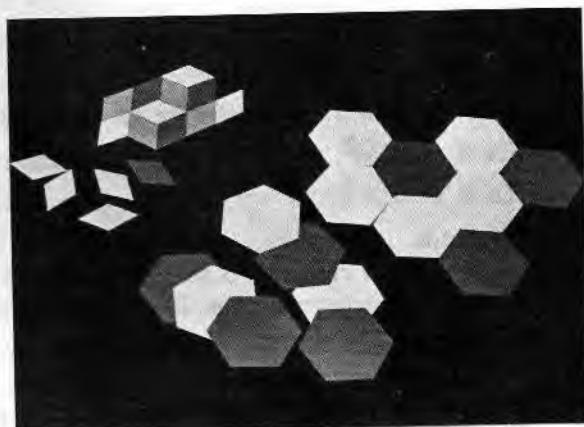
La cocina que aparece en la fotografía tiene un suelo y un recubrimiento de azulejos que son ejemplos de teselados.



1

¿Con qué polígonos es posible hacer un teselado sobre una superficie plana?

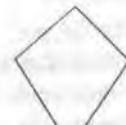
Al colocar un papel sobre un cuadrado y marcarlo varias veces, puede elaborarse un teselado de cuadros. En la fotografía se muestran otros teselados. Trácese en un papel una porción de teselado usando aquellas figuras de las que se muestran a continuación que lo permitan. Entre estas figuras hay dos que *no* pueden usarse en un teselado, ¿cuáles son?



Paralelogramo



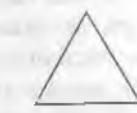
Trapecio



Cometa



Un cuadrilátero cualquiera



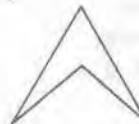
Triángulo equilátero



Triángulo isósceles



Triángulo escaleno



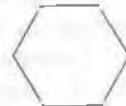
Cuadrilátero no convexo



Heptágono



Pentágono

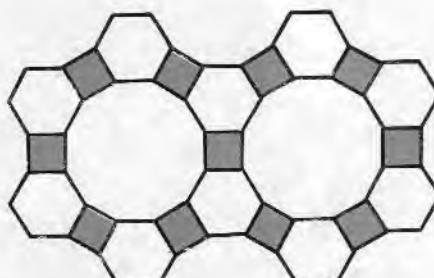


Hexágono

2

¿Con qué combinaciones de polígonos regulares es posible hacer un teselado sobre una superficie plana?

Pueden crearse diseños interesantes para pisos formando teselados que combinen algunos de los polígonos regulares que se muestran a continuación. El modelo que aquí se muestra tiene un cuadrado, un hexágono y un dodecágono rodeando cada punto; se le denomina con los números $(4, 6, 12)$, que señalan el número de lados de cada figura empleada y el orden exacto en que se dispusieron alrededor del punto.



$(4, 6, 12)$

Trácese las figuras siguientes para mostrar una parte de cada uno de los teselados que se sugieren a continuación. Coloréense de manera que resulten diseños interesantes.

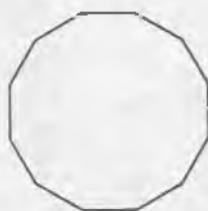
$(4, 8, 8)$

$(3, 4, 6, 4)$

$(3, 6, 3, 6)$

$(3, 3, 3, 4, 4)$

$(3, 12, 12)$



Dodecágono



Hexágono



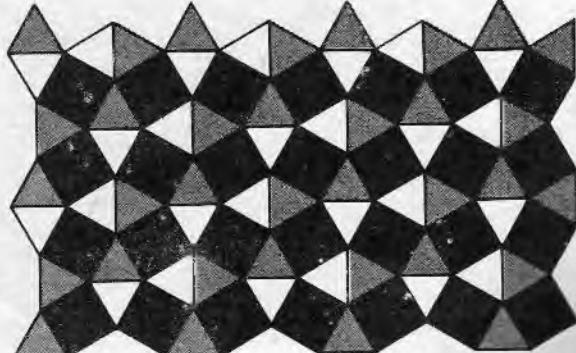
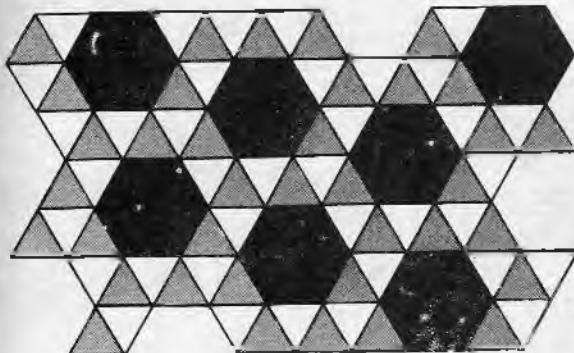
Triángulo



Cuadrado



Octágono



CAPITULO

2

- 2.1 El proceso del razonamiento inductivo** 44
- 2.2 Generalizaciones falsas y contraejemplos** 48
- 2.3 Desarrollo de la geometría por medio
del razonamiento deductivo** 52
- 2.4 Tipos de proposiciones Si - Entonces** 56
- 2.5 Recíproca, inversa y contrarrecíproca** 60
- 2.6 Esquemas de razonamiento** 64
- 2.7 Postulados de geometría** 68
- 2.8 Algunos postulados sobre medición** 72

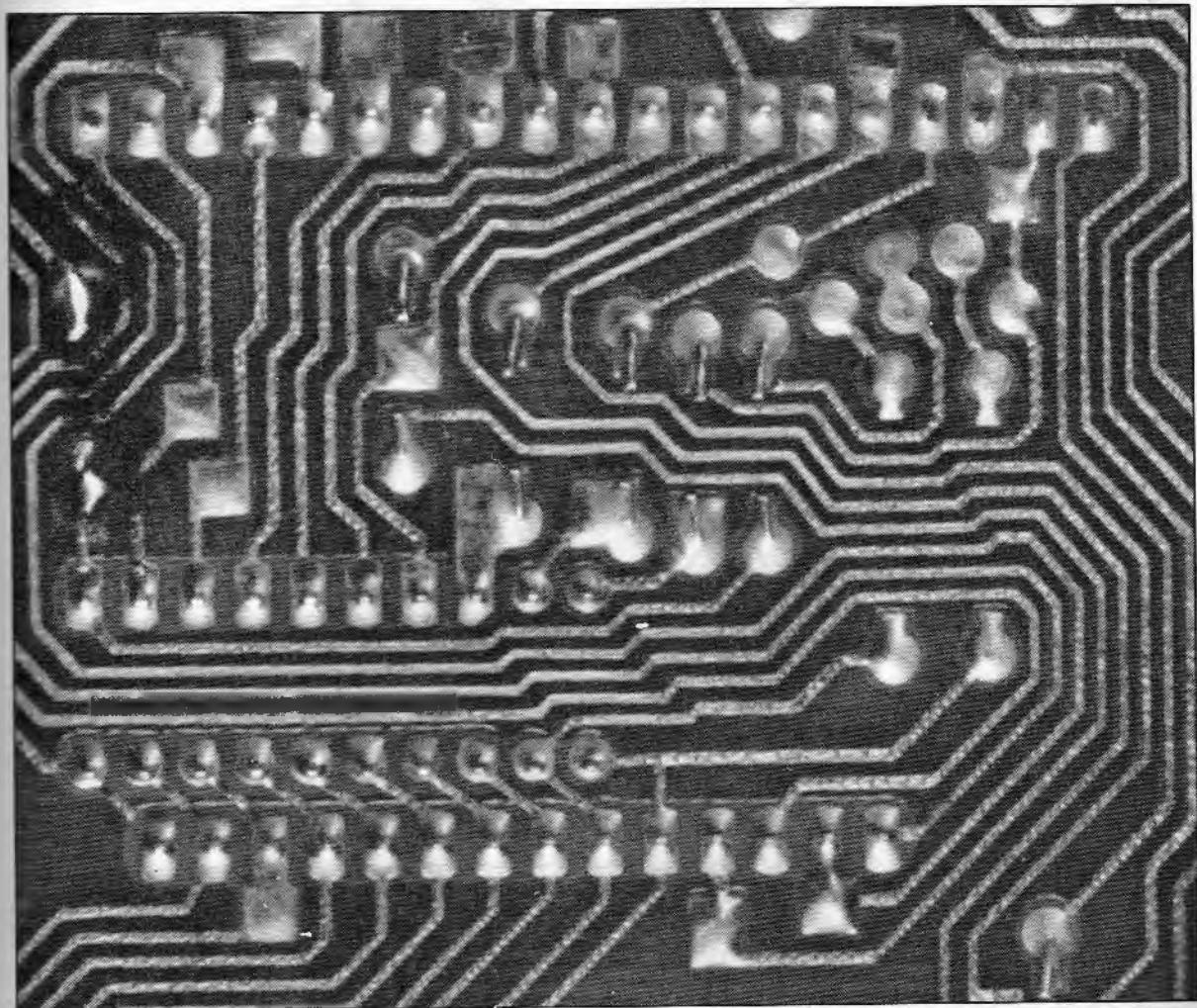
Conceptos importantes 76 *Resumen* 77 *Examen* 78

Repaso de álgebra 79

La geometría en nuestro mundo

Fotografía: lentes 80

Razonamiento en geometría



2.1 El proceso del razonamiento inductivo

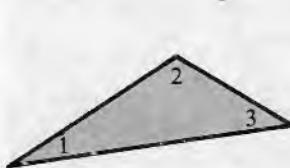


B.C. by permission of Johnny Hart and Field Enterprises, Inc.

El razonamiento es el proceso mediante el cual se sacan conclusiones a partir de la información. En ocasiones, la gente saca conclusiones basadas en sus propias observaciones. Al observar varias veces que una acción produce el mismo resultado, se concluye, en general, que esa acción tendrá siempre el mismo resultado. A esta clase de razonamiento se le llama *razonamiento inductivo*. Y a la conclusión que se saca del razonamiento inductivo se le llama *generalización*.

Los tres ejemplos siguientes muestran cómo puede aplicarse el razonamiento inductivo en geometría.

Ejemplo 1 Supóngase que alguien cortó, de una hoja de papel, tres triángulos diferentes.



Las esquinas de cada triángulo se cortaron y colocaron juntas tal como se muestra a continuación.

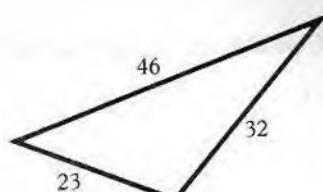
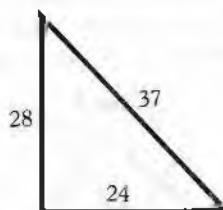
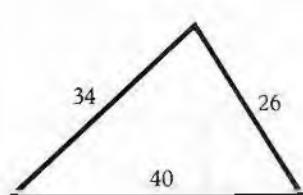


¿Qué se observa acerca de la suma de las medidas de los ángulos? ¿Es eso cierto para todos los triángulos?

Complétense esta generalización:

La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es .

Ejemplo 2 Supóngase que alguien midió todos los lados de tres triángulos diferentes.

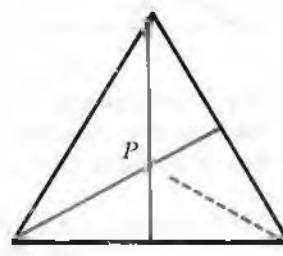
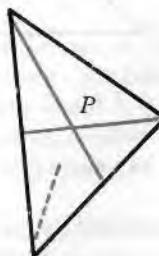
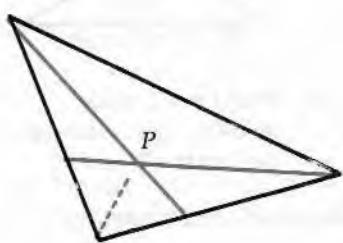


En estos triángulos, la suma de las longitudes de dos lados es mayor que la longitud del tercer lado. ¿Es tal afirmación verdadera para todos los triángulos?

Complétese esta generalización:

La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es que la longitud del tercer lado.

Ejemplo 3 Supóngase que alguien traza las bisectrices de cada ángulo de tres triángulos diferentes.



¿Se encontrarán todas las bisectrices de cada triángulo en el punto P ?

¿Es esa afirmación verdadera para todos los triángulos?

Complétese esta generalización:

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo en un punto (que está fuera, sobre o dentro) del triángulo.

El proceso del razonamiento inductivo puede describirse como se muestra aquí.

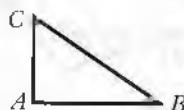
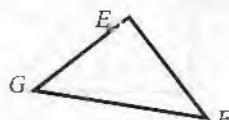
Razonamiento inductivo

Paso 1 Se observa que una propiedad es verdadera para cada caso que se verifica.

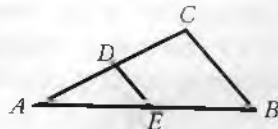
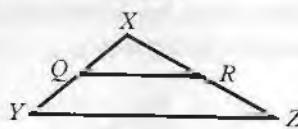
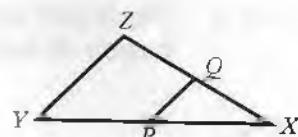
Paso 2 Dado que la propiedad es verdadera en todos los casos verificados, se concluye que es verdadera para todos los demás casos y se establece una generalización.

EJERCICIOS**A.**

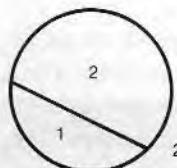
Complétense la generalización de los ejercicios 1 y 2.

1. Caso 1 $\angle A$ es un ángulo recto**Caso 2** $\angle E$ es un ángulo recto**Caso 3** $\angle Y$ es un ángulo recto

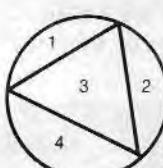
En cada caso, ¿cuál de los tres lados del triángulo es el más largo?

Generalización: En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto es el lado ?.**2. Caso 1**D y E son puntos medios. ¿Qué relación hay entre DE y CB ?**Caso 2**Q y R son puntos medios. ¿Qué relación hay entre QR e YZ ?**Caso 3**P y Q son puntos medios. ¿Qué relación hay entre PQ e YZ ?Generalización: La medida de un segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es ? el tercer lado.**ACTIVIDADES**

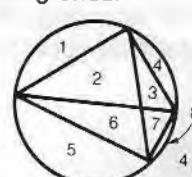
Todas las cuerdas determinadas por un conjunto de puntos en un círculo dividen el interior del círculo en regiones.



2 puntos



3 puntos



4 puntos

1. Estúdiense el modelo de la tabla y predígase el número de regiones para 5, 6 y 7 puntos.
2. Verifíquese la predicción dibujando figuras grandes (círculos de 20 cm de diámetro, por lo menos) que muestren la cantidad máxima de regiones para 5, 6 y 7 puntos.

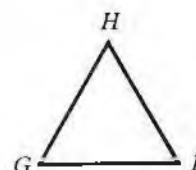
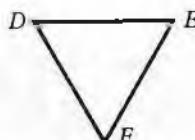
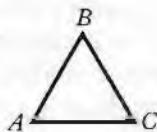
Puntos	Cantidad máxima de regiones
1	0
2	2
3	4
4	8
5	—
6	—
7	—

B.

3. Cada uno de los triángulos siguientes es un triángulo equilátero.

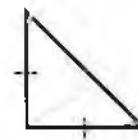
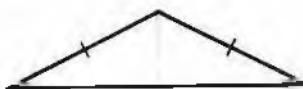
Midanse los ángulos. (Si es necesario, prolónguense los lados.)

Cópiale y complétese la generalización.



Generalización: Si un triángulo es equilátero, entonces tiene ángulos .

4. Cada uno de los triángulos siguientes tiene dos lados congruentes. Trácese los triángulos isósceles y biséquense los ángulos formados por los lados congruentes. Obsérvese la relación que existe entre la bisectriz y el lado opuesto.

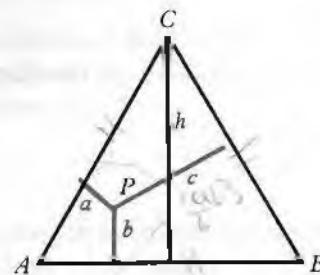


Generalización: En un triángulo con dos lados congruentes, la bisectriz del ángulo formado por éstos es al tercer lado.

C.

5. Trácese $\triangle ABC$ con $AB = BC = AC$.

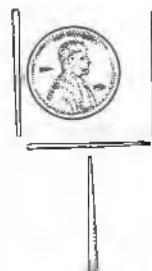
Elijase un punto P en el interior del triángulo y trácese las perpendiculares de P a los lados del triángulo. Midanse h , a , b y c al mm más cercano. Hágase lo mismo, con puntos P diferentes, tantas veces como sea necesario para formular una generalización.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Este diseño de cuatro palillos representa un espejo con una moneda en él.

Muévanse sólo dos palillos para formar un espejo del mismo tamaño que éste, pero dejando la moneda (que no debe moverse) fuera del espejo.



2.2 Generalizaciones falsas y contraejemplos



Copyright, 1980, Universal Press Syndicate. All rights reserved.

Esta caricatura ilustra una situación en la que una generalización, que se consideraba verdadera, resultó ser dolorosamente falsa.

Para demostrar que una generalización es falsa, suele citarse un *contraejemplo*.

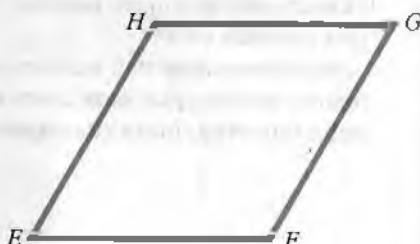
Las situaciones que se presentan a continuación muestran cómo un contraejemplo pone al descubierto la falsedad de una generalización.

Ejemplo 1

Generalización falsa: Si un cuadrilátero tiene cuatro lados congruentes, tiene cuatro ángulos congruentes.

Comentario: Para demostrar que esta generalización es falsa, debe presentarse un cuadrilátero con cuatro lados congruentes que no tenga cuatro ángulos congruentes.

Contraejemplo: La figura $EFGH$ tiene todos sus lados congruentes, pero $\angle E$ no es congruente con $\angle F$.

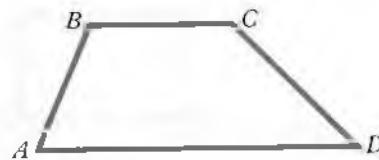


Ejemplo 2

Generalización falsa: Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos, tiene un par de lados congruentes.

Comentario: Para demostrar que la generalización es falsa, debe presentarse un cuadrilátero con un par de lados paralelos que *no* tenga dos lados congruentes.

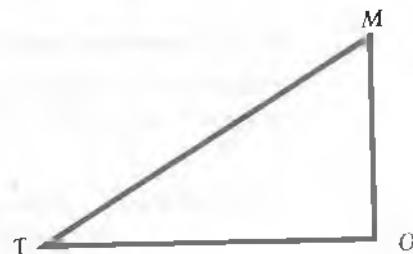
Contraejemplo: La figura $ABCD$ tiene $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, pero no tiene dos lados congruentes.

**Ejemplo 3**

Generalización falsa: Si un triángulo tiene un ángulo recto, tiene dos lados congruentes.

Comentario: Para demostrar que la generalización es falsa, debe presentarse un triángulo con un ángulo recto que *no* tenga dos lados congruentes.

Contraejemplo: La figura TOM tiene un ángulo recto ($\angle O$), pero sus tres lados tienen diferentes longitudes.



Un contraejemplo puede describirse como se hace aquí.

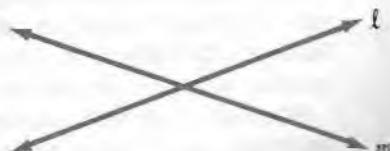
Definición 2.1

Un **contraejemplo** es un solo ejemplo que pone en evidencia la falsedad de una generalización.

Ejemplo 4

Esta figura es un contraejemplo para la generalización falsa siguiente.

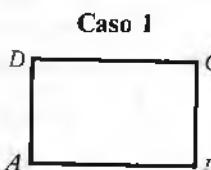
Si dos rectas se intersecan, entonces forman ángulos rectos.



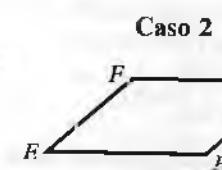
EJERCICIOS**A.**

Para los ejercicios 1 y 2 se da una generalización basada en los casos presentados. Indíquese si las generalizaciones son falsas o verdaderas. Si alguna es falsa, dése un contraejemplo.

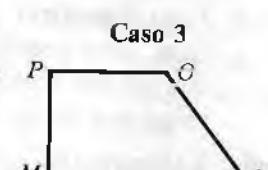
1.



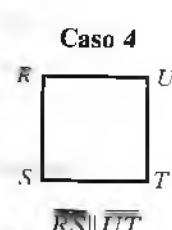
$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$$



$$\overline{EF} \parallel \overline{HG}$$



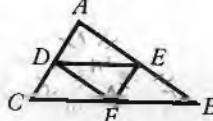
$$\overline{MN} \parallel \overline{PO}$$



$$\overline{RS} \parallel \overline{UT}$$

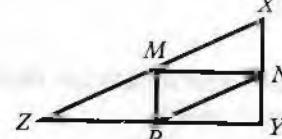
Generalización: Todos los cuadriláteros tienen un par de lados paralelos.

2.



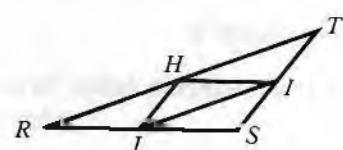
D, E y F son puntos medios

El perímetro de $\triangle ABC$ es el doble del perímetro de $\triangle DEF$.



M, N y P son puntos medios

El perímetro de $\triangle XYZ$ es el doble del perímetro de $\triangle MNP$.



H, I, J son puntos medios

El perímetro de $\triangle RST$ es el doble del perímetro de $\triangle HIJ$.

Generalización: El perímetro de un triángulo es el doble del perímetro del triángulo formado al unir los puntos medios de los lados del primer triángulo.

ACTIVIDADES

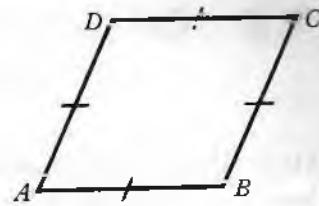
Los contraejemplos tienen un papel importante en la ciencia. Uno de los objetivos de los programas de investigación espacial es confirmar la validez o invalidez de las teorías formuladas por los científicos. Las fotografías tomadas por el Voyager de los anillos de Saturno dieron resultados sorprendentes. Antes de los vuelos espaciales del Voyager, los astrónomos sostienen muy diversas teorías con respecto a los anillos de Saturno. ¿Constituyó alguno de los nuevos hallazgos un contraejemplo de alguna de estas teorías?

Búsquese artículos periodísticos o de revistas científicas que apoyen sus observaciones.



B.

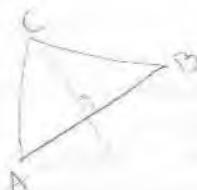
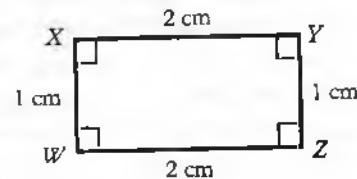
3. ¿Para cuál de las proposiciones siguientes sería un contraejemplo la figura $ABCD$?
- Cuando todos los lados de un cuadrilátero tienen la misma longitud, todos los ángulos miden lo mismo.
 - Cuando todos los ángulos de un cuadrilátero tienen la misma medida, todos los lados son de igual longitud.
 - Cuando un par de lados de un cuadrilátero es congruente, el segundo par de lados también lo es.
4. ¿Para cuál de las proposiciones siguientes sería un contraejemplo el polígono $WXYZ$?
- Un polígono con lados congruentes es un polígono regular.
 - Un polígono con ángulos congruentes es un polígono regular.
 - Un cuadrítero con ángulos congruentes es un cuadrilátero convexo.



C.

En los ejercicios 5 y 6, indíquese si la proposición es falsa o verdadera. Si es falsa, dése un contraejemplo.

5. Dado cualquier $\triangle ABC$, la bisectriz perpendicular de \overline{AB} interseca a la bisectriz perpendicular de \overline{BC} en un punto dentro del triángulo.
6. Dado cualquier $\triangle ABC$, la recta que pasa por A y es perpendicular a \overline{BC} y la recta que pasa por B y es perpendicular a \overline{AC} se intersecan en un punto dentro del triángulo.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Esta disposición de números, conocida como *triángulo de Pascal*, recibe este nombre por el matemático francés Blaise Pascal (1623-1662).

- Obsérvese la relación que existe entre cada número y los más próximos de la fila superior. Cópíese el diseño y complétense por lo menos otras tres filas.
- Encuéntrese la suma de los números de cada fila. Establézcase una generalización sobre esas sumas.
- Encuéntrense los polinomios para $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ y $(a + b)^4$. Escribáse una lista de los coeficientes de los términos de cada polinomio. Enúnciese una generalización de la relación de este esquema con el triángulo de Pascal.

1		1		1
1	1	2	1	1
1	2	1	2	1
1	3	3	3	1
1	4	6	4	1
1	5	10	10	5

2.3 Desarrollo de la geometría por medio del razonamiento deductivo

Hasta ahora se han buscado objetos de nuestro mundo que sugieren conceptos geométricos. Se han elegido los conceptos básicos —punto, recta y plano— y se les ha llamado **términos indefinidos**.

A partir de estos términos, se obtuvieron **definiciones** para describir otras figuras geométricas, como triángulos, segmentos y ángulos. También se definieron relaciones, como la congruencia, el paralelismo y la perpendicularidad.

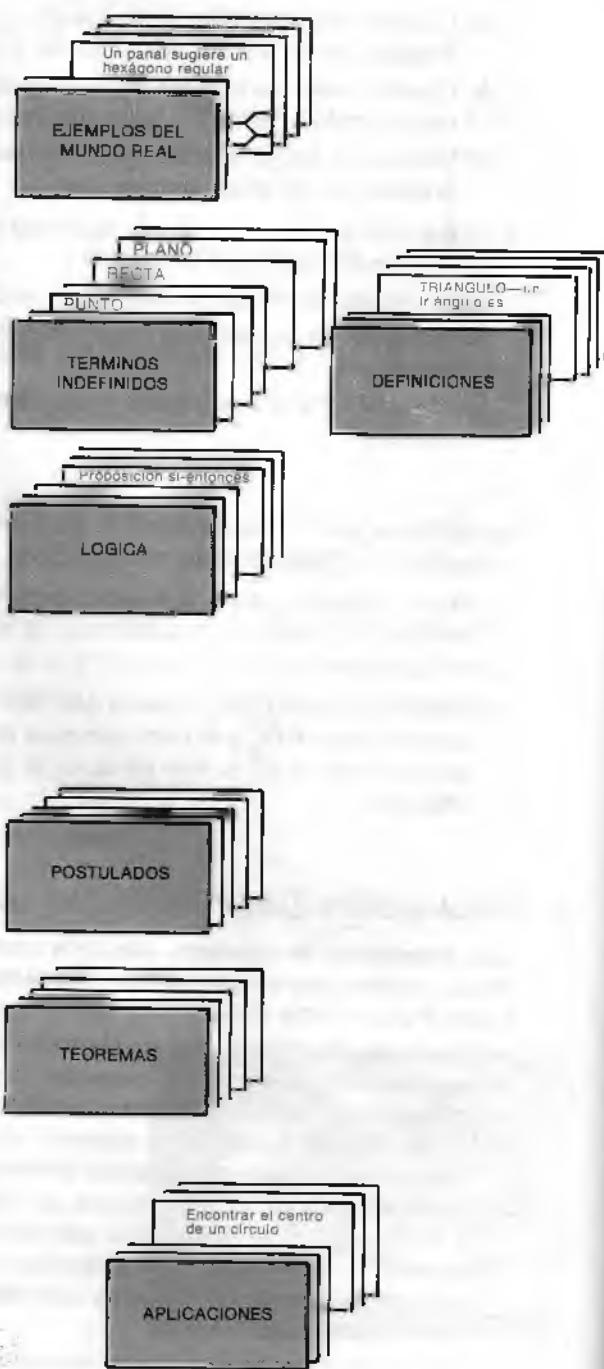
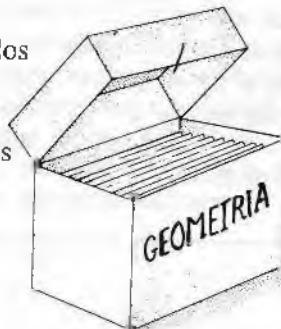
Después, se empleó el **razonamiento inductivo** para descubrir algunas generalizaciones sobre estas figuras. En este proceso de descubrimientos se buscaron contraejemplos que invalidaran las generalizaciones.

Ahora es el momento de dar el siguiente paso. Se requiere un método para comprobar que las generalizaciones descubiertas son verdaderas para todos los casos. El método que se empleará se llama **razonamiento deductivo**. En las secciones siguientes se estudiará este método.

El proceso del razonamiento deductivo requiere la aceptación de unas cuantas generalizaciones básicas sin comprobarlas. Estas generalizaciones se llaman **postulados**.

Todas las demás generalizaciones que pueden probarse como verdaderas con la ayuda de definiciones, postulados y la lógica del razonamiento deductivo, se llaman **teoremas**.

Finalmente, se usan los teoremas ya probados como ayuda para la resolución de problemas de la vida cotidiana.





En las secciones anteriores de este capítulo se usó el razonamiento inductivo para descubrir generalizaciones. Ahora se explorarán el razonamiento lógico y el deductivo, y su función en la demostración de teoremas. El proceso del razonamiento deductivo consta de tres pasos.

En el siguiente teorema se esbozan estos tres pasos:

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los dos ángulos opuestos son congruentes.

Razonamiento deductivo

Paso 1 Empíécese con las condiciones dadas (la hipótesis).

Paso 2 Usese la lógica, definiciones, postulados o teoremas previamente probados para justificar una serie de proposiciones o pasos que den el resultado deseado.

Paso 3 Afírmese el resultado (la conclusión).

Dado: $\triangle ABC$ es un triángulo con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.



Las proposiciones que proporcionan esta conclusión no se incluyen aquí. En este capítulo se presentan algunos esquemas de razonamiento que ayudarán a elegir, ordenar y dar razones para proposiciones adecuadas.

Por tanto, $\angle B$ y $\angle C$ son congruentes.

Después de usar la lógica para obtener las proposiciones correctas del paso 2 del ejemplo probado en las líneas anteriores, se habrá probado este teorema:

*Si dos lados de un triángulo son congruentes,
(hipótesis)*

*entonces los dos ángulos opuestos son congruentes.
(conclusión)*

EJERCICIOS**A.**

- Según el diccionario, un *plano* es una superficie llana o lisa.

Escríbanse tres palabras de la «definición» que también deberían entenderse y para las cuales podría intentarse dar una definición.

- Definase uno de los tres términos del ejercicio 1. Hágase una lista de las palabras de la definición que también puedan necesitar definición.
- ¿Debería considerarse el término *plano* entre los términos indefinidos? Explíquese la respuesta.
- Dése una definición de *espacio* que incluya los términos indefinidos *conjunto* y *punto*.
- Escríbase una proposición que sea un teorema de geometría.

ACTIVIDADES

Uno de los objetivos de los cursos de geometría es proporcionar cierta práctica en el razonamiento lógico aplicado a situaciones de la vida cotidiana. En la vida diaria, algunas veces se sacan conclusiones con poca o ninguna base.

Acéptese esta historia como una representación adecuada de algo que realmente ocurrió:

El pequeño Luis Medina se sentó en un rincón
a comer su pastel de Navidad.

Metió su dedo entre la masa, sacó una pasa
y dijo: «¡Qué buen chico soy!»

¿Cuáles de estas conclusiones pueden aceptarse (quizá de manera inconsciente) al leer la historia?

- | | |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1. Luis comía un pastel de pasas. | 2. Era el día de Navidad. |
| 3. Luis comprendió que era un buen chico porque sacó una pasa | 4. Luis estaba sentando en un rincón porque estaba castigado. |
| 5. Luis era un niño. | |

Ahora, léase de nuevo la historia. ¿Cuáles de estas conclusiones son acertadas basándose únicamente en la información que proporciona la historia?

B.

En los ejercicios 6 a 9, se formulan la información dada y la conclusión basada en el razonamiento deductivo. Las proposiciones que llevan de la hipótesis a la conclusión se omiten. Formúlese el teorema probado.

- 6. Dado:** Las líneas ℓ y m forman un par lineal de ángulos, $\angle 1$ y $\angle 2$. $\angle 1 \cong \angle 2$.

Por tanto, $\ell \perp m$.



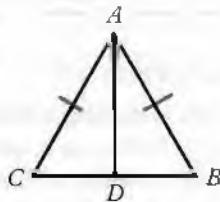
- 7. Dado:** $\angle 1$ y $\angle 3$ son ángulos verticales.

Por tanto, $\angle 1 \cong \angle 3$.



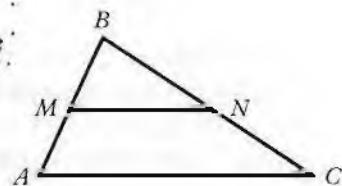
- 8. Dado:** Un $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, donde \overline{AD} bisecta a $\angle A$.

Por tanto, $\overline{CD} \cong \overline{DB}$.



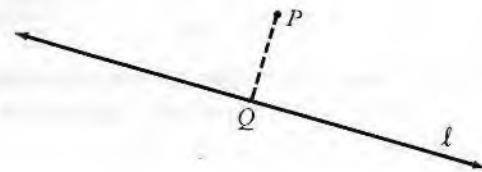
- 9. Dado:** \overleftrightarrow{MN} une los puntos medios de \overline{AB} y \overline{BC} en $\triangle ABC$.

Por tanto, $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$.



C.

- 10. Desarróllese un argumento lógico para convencer a alguien de que la distancia más corta entre el punto P y una recta ℓ es la longitud de \overline{PQ} , donde Q está sobre ℓ y ℓ es perpendicular a \overline{PQ} .**



SOLUCION DE PROBLEMAS

Tres embajadores de diferentes países pagaron 30 dólares por la habitación de un hotel. Cada uno contribuyó con 10 dólares. Más tarde, el administrador del hotel se percató de que sólo debían haber pagado 25 dólares, por lo que llamó al botones y le dio 5 dólares para que los devolviera a los embajadores. El botones pensó que éstos tendrían dificultades para repartirse los 5 dólares por las diferencias lingüísticas y sólo les dio 3, quedándose con los 2 dólares restantes.

Así pues, cada embajador pagó por la habitación 10 dólares menos el dólar devuelto, esto es, 9 dólares. $9 \times 3 = 27$. 27 dólares más los 2 que se quedó el botones suman 29 dólares. Pero la cuenta original era de 30 dólares. ¿Qué pasó con el otro dólar?

$$\begin{array}{r} 30 \\ \leftarrow 10 \\ 10 \\ 10 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 5 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ + 2 \\ \hline 29 \end{array}$$

2.4 Tipos de proposiciones «Si-Entonces»

Esta caricatura ilustra un tipo de proposición importante para el razonamiento deductivo. Los ejemplos siguientes muestran proposiciones de la forma «si-entonces».

Si p , entonces q .

Si nieva hoy, entonces esquiaremos.

Si un triángulo isósceles tiene un ángulo de 60° , entonces es un triángulo equilátero.

Si Lucy no se ríe, entonces Snoopy está triste.



© 1961 United Feature Syndicate, Inc.

La definición 2.2 describe este tipo de proposición. Los ejemplos que siguen presentan algunos aspectos de lo que se requiere para trabajar con las proposiciones si-entonces y comprenderlas.

Definición 2.2

Una proposición **si-entonces** es una proposición de la forma «si p , entonces q », donde p y q son proposiciones simples. A p se le llama **hipótesis**, y q es la **conclusión**. El símbolo $p \rightarrow q$ (léase « p implica q »), se usa para representar una proposición si-entonces.

Ejemplo 1 Dada una proposición si-entonces, formúlense la hipótesis y la conclusión.

Si el informe meteorológico dice que hoy lloverá, entonces no jugaremos al tenis.

Hipótesis (p): El informe meteorológico dice que hoy lloverá.

Conclusión (q): No jugaremos al tenis.

Ejemplo 2 Dadas la hipótesis y la conclusión, formúlese la proposición si-entonces.

Hipótesis (p): La figura $ABCD$ es un cuadrado.

Conclusión (q): Tiene cuatro lados congruentes.

Si-entonces ($p \rightarrow q$): Si la figura $ABCD$ es un cuadrado, entonces tiene cuatro lados congruentes.

Ejemplo 3 Dada una proposición en otra forma formúlese como una proposición si-entonces.

Cuando nieva, la temperatura es inferior a 0° .

Si-entonces ($p \rightarrow q$): Si nieva, entonces la temperatura es inferior a 0° .

Para comprender mejor el proceso de razonamiento deductivo, en primer lugar hay que poder decidir si una proposición si-entonces como la que se muestra en la ilustración es verdadera. (¿Es verdadera? Explíquese.)

Considérese ahora el siguiente ejemplo. Supóngase que un profesor formula la proposición si-entonces que aparece a continuación. ¿En cuál de estos casos puede uno sentir que se le ha tratado injustamente y que el profesor no dijo la verdad? La respuesta a esta pregunta ayudará a observar cuándo una proposición si-entonces es falsa.



Si se obtiene la calificación más alta en todos los exámenes de geometría, entonces se obtendrá la calificación más alta al final del curso.

Caso 1 Se obtiene la calificación más alta en todos los exámenes.
(hipótesis verdadera)

Se obtiene la calificación más alta al final del curso.
(conclusión verdadera)

Caso 2 Se obtiene la calificación más alta en todos los exámenes.
(hipótesis verdadera)

No se obtiene la calificación más alta al final del curso.
(conclusión falsa)

Caso 3 No se obtiene la calificación más alta en todos los exámenes.
(hipótesis falsa)

Se obtiene la calificación más alta al final del curso.
(conclusión verdadera)

Caso 4 No se obtiene la calificación más alta en todos los exámenes.
(hipótesis falsa)

No se obtiene la calificación más alta al final del curso.
(conclusión falsa)

Se recibió un trato injusto sólo en el caso 2.

Los resultados del ejemplo anterior se resumen en las descripciones de las proposiciones si-entonces falsas y verdaderas que se presentan aquí.

Una proposición si-entonces es verdadera si cuando la hipótesis es verdadera, la conclusión también lo es. En otras palabras, una proposición si-entonces es falsa sólo cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa.

EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 8, formulense primero la hipótesis (p) y la conclusión (q) de la proposición si-entonces. Luego, decidase si la proposición es o no verdadera.

1. Si Lisa tiene quince años, entonces Lisa es demasiado joven para votar en las elecciones de Puerto Rico.
2. Si una pelota se lanza hacia arriba, entonces la pelota bajará.
3. Si algunas manzanas son rojas, entonces los caballos tienen cuatro patas.
4. Si Carlos compró una pera, entonces Carlos compró un vegetal.
5. Si dos rectas se intersecan, entonces esas dos rectas no son paralelas.
6. Si tres rectas son concurrentes, entonces las rectas son paralelas.
7. Si el $\triangle ABC$ es isósceles, entonces el $\triangle ABC$ es equilátero.
8. Si el $\triangle ABC$ es equilátero, entonces el $\triangle ABC$ es isósceles.

En los ejercicios 9 a 14, escribanse proposiciones si-entonces ($p \rightarrow q$) con la hipótesis (p) y la conclusión (q) dadas.

9. Hipótesis (p): Un hombre vive en San Juan.
Conclusión (q): Vive en Puerto Rico.
10. Hipótesis (p): Dos rectas se intersecan para formar ángulos rectos.
Conclusión (q): Las rectas son perpendiculares.
11. Hipótesis (p): Dos rectas son perpendiculares.
Conclusión (q): Se intersecan para formar ángulos congruentes.
12. Hipótesis (p): Un número es primo.
Conclusión (q): El número tiene exactamente dos divisores.
13. p : Dos rectas son paralelas.
 q : No se intersecan.
14. p : Dos ángulos son congruentes.
 q : Tienen la misma medida.

ACTIVIDADES

Encuéntrense planteamientos en revistas o periódicos que incluyan proposiciones si-entonces o proposiciones que puedan formularse en la forma si-entonces sin cambiar el significado. Analícese cada proposición y la lógica que la respalda.

B.

En los ejercicios 15 a 24, identifiquense la hipótesis y la conclusión, y formúlese la proposición en la forma si-entonces sin cambiar el significado.

15. Un número es par si termina en 2.
16. Dos rectas son perpendiculares si se cruzan en ángulo recto.
17. Un triángulo equiángulo debe ser equilátero.
18. Un número es impar siempre que termine en 5.
19. «Sigue mis consejos y te harás rico.»
20. Mejorarás si trabajas duro.
21. Un triángulo es isósceles siempre que dos de sus ángulos sean congruentes.
22. Una recta que biseca a un segmento contiene el punto medio del segmento.
23. B es el punto medio de \overline{AC} si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.
24. Todos los triángulos son polígonos.

C.

25. Formúlense todas las proposiciones si-entonces cuyo significado sea el mismo que las proposiciones contenidas en este anuncio de la «Compañía Nowork».

Venga a la Compañía Nowork y haga dinero rápidamente. Trabaje para Nowork y ascenderá en poco tiempo. Sólo contratamos gente inteligente que sea lo suficientemente tonta como para saber que es inteligente. Nowork le garantiza una capacitación gratuita excelente. A usted le gustará trabajar en la Compañía Nowork. Contratamos a cualquier ser humano. Despedimos a cualquier ser humano.

26. Formúlese una proposición si-entonces verdadera (si a entonces b), y formúlese de nuevo en las formas siguientes: b si a ; a sólo si b ; a es todo lo que se necesita para aseverar b ; b debe ser verdad para que a sea verdad. ¿Cuáles de estas proposiciones pueden considerarse verdaderas?

SOLUCION DE PROBLEMAS

$$4A + 2N$$

Cuatro adultos y dos niños deben cruzar un río en una canoa en la que solo cabe un adulto o dos niños a la vez. No caben un adulto y un niño juntos. Explíquese cómo pueden cruzar las seis personas. ¿Cuál es el número mínimo de veces que debe cruzar la canoa?

$$A = 2N$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - 9$$

$$\text{CANTIDAD} : A = 2N$$

2.5 Recíproca, inversa y contrarrecíproca

Si se empieza con una proposición si-entonces verdadera es posible formar tres tipos de proposiciones relacionadas llamadas *recíproca*, *inversa* y *contrarrecíproca* de la proposición original. A continuación, se describen los tipos y se comparan con la proposición si-entonces original.

$\sim p$
significa «no p .»

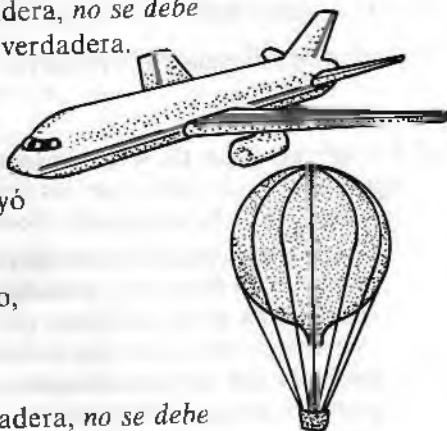
Proposición: Si una bandera es la bandera de P.R.
 $p \rightarrow q$ entonces tiene estrellas.



Recíproca de la proposición: Si una bandera tiene estrellas, entonces es la bandera de P.R.
 $q \rightarrow p$

Cuando una proposición si-entonces ($p \rightarrow q$) es verdadera, *no se debe suponer* que su reciproca ($q \rightarrow p$) sea necesariamente verdadera.

Proposición: Si un vehículo es un aeroplano,
 $p \rightarrow q$ entonces el vehículo se construyó para volar.



Inversa de la proposición: Si un vehículo no es un aeroplano,
 $\sim p \rightarrow \sim q$ entonces el vehículo no se construyó para volar.

Cuando una proposición si-entonces ($p \rightarrow q$) es verdadera, *no se debe suponer* que su inversa ($\sim p \rightarrow \sim q$) sea necesariamente verdadera.

Proposición: Si se vive en Chicago,
 $p \rightarrow q$ entonces se vive en Illinois.



Contrarrecíproca de la proposición: Si no se vive en Illinois, entonces
 $\sim q \rightarrow \sim p$ no se vive en Chicago.



Cuando una proposición si-entonces ($p \rightarrow q$) es verdadera, *se puede suponer* que su contrarrecíproca ($\sim q \rightarrow \sim p$) también es verdadera.

Estos resultados se resumen como sigue:

$p \rightarrow q$	proposición dada	Si p , entonces q	verdad (se supone)
$q \rightarrow p$	recíproca	Si q , entonces p	no necesariamente verdadera
$\sim p \rightarrow \sim q$	inversa	Si no p , entonces no q	no necesariamente verdadera
$\sim q \rightarrow \sim p$	contrarrecíproca	Si no q , entonces no p	siempre verdadera

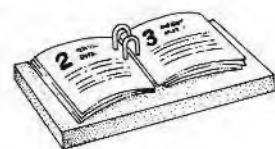
Cuando una proposición dada y su recíproca son verdaderas, pueden combinarse y formar una sola proposición con la frase *si, y sólo si*.

Proposición:

$p \rightarrow q$ Si hoy es martes, entonces mañana es miércoles.

Recíproca de la proposición:

$q \rightarrow p$ Si mañana es miércoles, entonces hoy es martes.



Proposición
si, y sólo si:

$p \leftrightarrow q$ Hoy es martes si, y sólo si, mañana es miércoles.

Toda definición puede formularse como una proposición *si, y sólo si*. Como ejemplo, considérese la siguiente definición.

Un triángulo equilátero es un triángulo cuyos lados son congruentes entre sí.

Esto puede reformularse como sigue:

Una figura es un triángulo equilátero si, y sólo si, es un triángulo con todos sus lados congruentes entre sí.

En realidad, la nueva proposición combina dos proposiciones verdaderas:

1. Si un triángulo es equilátero, entonces tiene todos sus lados congruentes.
2. Si un triángulo tiene todos sus lados congruentes, entonces es equilátero.

Esta idea puede resumirse de la siguiente manera:

p si, y sólo si, q significa lo mismo que *si p, entonces q* y *si q, entonces p*. Cuando esta proposición es verdadera, se dice que *p* y *q* son *proporciones equivalentes*.

EJERCICIOS**A.**

Formúlense las *recíprocas* de las proposiciones de los ejercicios 1 a

4. Si es necesario, formúlense de nuevo en la forma si-entonces.

¿En qué ejercicio son verdaderas la proposición y la reciproca?

1. Si una persona está nadando, entonces esa persona está mojada.
2. Si dos rectas son perpendiculares, entonces se intersecan.
3. Si una persona es pobre, entonces esa persona no tiene mucho dinero.
4. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

En los ejercicios 5 a 8, formúlese la *inversa* de cada proposición.

5. Si una persona roba, entonces es una persona deshonesta.
6. Si una figura es un triángulo, entonces es un polígono.
7. Cualquier equipo que gane cuatro juegos de la Serie Mundial, gana la serie.
8. Dos planos son paralelos si no se intersecan.

Formúlense las *contrarrecíprocas* de las proposiciones de los ejercicios 9 a 12.

9. Si una persona conduce legalmente un automóvil, entonces esa persona tiene 16 años o más.
10. Todos los ángulos rectos son congruentes.
11. Se ganará el campeonato si se gana el partido de esta noche.
12. Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.

ACTIVIDADES

Análisis de un anuncio comercial

Analicemos un anuncio



(1) Si quiere sentirse en plena forma, tome una tableta ABC al día. (2) La gente que toma vitaminas ABC se preocupa por su salud. Usted se debe a quienes están cerca de usted. Cuídese. Empiece hoy a tomar ABC.

Al escuchar proposiciones como (1), suele suponerse equivocadamente la *recíproca* «si toma una tableta de ABC todos los días, entonces se sentirá en plena forma». Al escuchar proposiciones como (2), suele suponerse equivocadamente la *inversa* «si yo no tomo vitaminas ABC, entonces no me preocupo por mi salud».

Cópese un anuncio comercial de una revista o de la televisión y búsquense posibles errores de interpretación.

B.

En los ejercicios 13 a 18, formúlense dos proposiciones simples que sean equivalentes.

13. Un triángulo es equilátero si, y sólo si, es equiángulo.
14. Un ángulo es un ángulo recto si, y sólo si, su medida es 90° .
15. Dos rectas de un plano son paralelas si, y sólo si, no tienen puntos en común.
16. Un cuadrilátero es un rectángulo si, y sólo si, tiene cuatro ángulos rectos.
17. Un cuadrilátero es un paralelogramo si, y sólo si, tiene dos pares de lados paralelos.
18. Dos ángulos son complementarios si, y sólo si, la suma de sus medidas es 90° .

C.

19. Formúlense la recíproca, la inversa y la contrarrecíproca de estas frases de la forma $p \rightarrow q$.

Elabórese una tarjeta como la que se muestra a continuación y máquese en el lugar correspondiente si la proposición es falsa o verdadera

	Proposición	Recíproca	Inversa	Contrarrecíproca
Si se vive en Río Piedras, se vive en el área metropolitana.	V	F		
Si un número es positivo, entonces es mayor que 6.	F	V		
Si dos segmentos tienen la misma longitud, entonces son congruentes.	V	V		
Si una figura es un polígono regular, entonces todos sus lados son congruentes.	V	V		



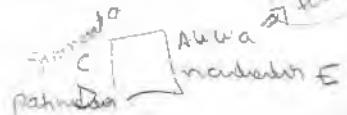
SOLUCION DE PROBLEMAS

Dos mujeres, Alicia y Carolina, y dos hombres, Enrique y David, son atletas. Una de estas personas practica la natación, otra el patinaje, otra la gimnasia y otra el tenis. Un día se reunieron y se sentaron alrededor de una mesa cuadrada:

1. El nadador estaba a la izquierda de Alicia.
2. El gimnasta estaba frente a Enrique.
3. Carolina y David se sentaron juntos.
4. Una mujer se sentó al lado del patinador.

¿Cuál de estas personas es el tenista?

Alicia



2.6 Esquemas de razonamiento

Ahora se estudiarán diversos esquemas de razonamiento que se usarán en la prueba de teoremas. Estúdiese la caricatura siguiente y el análisis posterior.



© 1961 United Feature Syndicate, Inc.

El primer esquema de razonamiento que se estudiará empieza con una proposición verdadera de tipo si-entonces. La hipótesis se da por verdadera, por lo que la conclusión también se toma como verdadera.

$p \rightarrow q$ es verdadera.

Se da p .

Se concluye que q es verdad.

El ejemplo anterior ilustra un esquema de razonamiento llamado *afirmación de la hipótesis*. Está basado en la aseveración de que la hipótesis de una proposición si-entonces verdadera también es verdadera. También se expresa con la locución latina *modus ponens*.

Si alguien dice «una perdiz en un peral», entonces Lucy gritará.

Charlie dice «una perdiz en un peral».

Por tanto, Lucy grita.

Definición 2.3

La **afirmación de la hipótesis** es un esquema de razonamiento que se representa como sigue: Siempre que $p \rightarrow q$ sea verdad y p sea verdad, puede concluirse que q es verdad.

El segundo esquema de razonamiento es la base de la prueba indirecta que se empleará en capítulos posteriores. En la ilustración, el esquema es:

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\text{ es verdad.} \\ \sim q &(\text{no se da } q). \end{aligned}$$

Se concluye que $\sim p$ es verdadero (p es falso).

«Si en realidad me amaras, dejarías de tocar el piano.»

Schroeder no dejó de tocar el piano.

Por tanto, Schroeder no ama a Lucy.

Este esquema de razonamiento se llama **negación de la conclusión**. También se expresa con la locución latina *modus tollens*.

La siguiente ilustración sugiere un tercer esquema de razonamiento que se emplea en la formulación de demostraciones. Este esquema une una sucesión de proposiciones en la demostración de un teorema. El esquema es:

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\text{ es verdad.} \\ q \rightarrow r &\text{ es verdad.} \end{aligned}$$

Se concluye que $p \rightarrow r$ es verdad.

«Cadena de razonamiento» de Charlie Brown:

Si se tiene el corazón roto, entonces sus bordes astillados se clavan en el costado.
Si los bordes astillados se clavan en el costado, entonces no se puede dormir.

Por tanto, si se tiene el corazón roto, no se puede dormir.

Este ejemplo ilustra un esquema de razonamiento llamado *regla de la cadena*. Este esquema permite «encadenar» proposiciones si-entonces al formular demostraciones.



© 1971 United Feature Syndicate, Inc.

Definición 2.4

La **negación de la conclusión** es un esquema de razonamiento que se representa como sigue:

Siempre que $p \rightarrow q$ sea verdad y $\sim q$ (q es falso).

Se concluye: $\sim p$ (p es falso).



© 1971 United Feature Syndicate, Inc.

Definición 2.5

La **regla de la cadena** es un esquema de razonamiento que se representa como sigue:

Siempre que $p \rightarrow q$ es verdad y $q \rightarrow r$ es verdad.

Se concluye que $p \rightarrow r$ es verdad.

EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 6, formúlese la conclusión correcta.

1. $p \rightarrow q$: Si Julia vota hoy, votará por Armando Amigable.

p : Julia votó hoy.

Por tanto, q : ?

2. $p \rightarrow q$: Si $\triangle ABC$ es isósceles, entonces tiene dos ángulos congruentes.

p : $\triangle ABC$ es isósceles.

Por tanto, q : ?

3. $p \rightarrow q$: Si nieva, la temperatura será inferior a 0°C .

$\sim q$: La temperatura es 0°C o superior.

Por tanto $\sim p$: ?

4. $p \rightarrow q$: Si una figura es un triángulo equilátero, entonces todos sus lados y ángulos son congruentes.

$q \rightarrow r$: Si una figura tiene todos sus ángulos y lados congruentes, entonces es un polígono regular.

Por tanto, $p \rightarrow r$: ?

5. $p \rightarrow q$: Si dos rectas son paralelas, no tienen puntos en común.

$\sim q$: Las rectas m y n tienen un punto en común.

Por tanto, $\sim p$: ?

6. $p \rightarrow q$: Dos rectas perpendiculares se intersecan.

$q \rightarrow r$: Las rectas no son paralelas si se intersecan.

Por tanto, $p \rightarrow r$: ?

ACTIVIDADES

Considérense los siguientes ejemplos de razonamiento que suelen encontrarse en anuncios comerciales. Decídase si las compañías que los publicaron emplearon esquemas de razonamiento correctos o incorrectos.

1. «Envie su dinero antes del 1 de octubre y compre a mitad de precio.» Paula Joseph envió su pedido el 10 de octubre. La compañía canceló su pedido. ¿Mintió la compañía?
2. «Envie su dinero antes del 1 de diciembre y compre a mitad de precio.» Angelo Silva envió su dinero el 24 de noviembre, pero la compañía rechazó su pedido. ¿Mintió la compañía?
3. «Esta oferta es válida para personas que viven en ciudades de Estados Unidos que estén en el continente americano.» Namoonie Nakak vive en el Ártico. La compañía rechazó su pedido. ¿Hubo justificación para esto?
4. «Usted será más atractivo si usa Neato.» Jason no usa Neato pero es muy atractivo. ¿Está equivocada la compañía?
5. Búsqense e identifiquense ejemplos de esquemas de razonamiento correctos e incorrectos en anuncios comerciales.

B.

En los ejercicios 7 a 9, inclúyase la información omitida para formular un esquema de razonamiento correcto.

7. (Acéptese) Un punto de la bisectriz perpendicular de un segmento equidista de los extremos del segmento.

(Dado) ?

(Conclusión) El punto C equidista de los extremos de \overline{AB} .

8. (Acéptese) Todas las rectas horizontales son paralelas.

(Dado) ?

(Conclusión) \overleftrightarrow{EF} y \overleftrightarrow{GH} no son rectas horizontales.

9. (Acéptese) ?

(Dado) $\angle ABC$ mide más de 90° .

(Conclusión) $\angle ABC$ es un ángulo obtuso.

C.

Formúlese la proposición omitida en los ejercicios 10 y 11. (Aunque no se conozca el significado de todos los términos empleados, se deben poder realizar estos ejercicios.)

10. **Teorema:** Si $ABCD$ es un cuadrado, entonces $ABCD$ no es una cometa.

Pruebas: 1. Si $ABCD$ es un cuadrado, entonces $ABCD$ es un rombo.

2. (proposición omitida)

3. Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces $ABCD$ no es una cometa.

Por tanto, si $ABCD$ es un cuadrado, $ABCD$ no es una cometa.

11. **Teorema:** Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $\angle C$ como ángulo recto, entonces $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.

Pruebas: 1. (proposición omitida)

2. Si $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ y
 $m\angle C = 90$, entonces $m\angle A + m\angle B = 90$.

3. (proposición omitida)

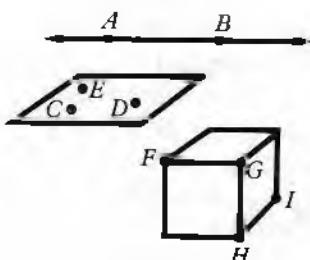
Por tanto, si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $\angle C$ como ángulo recto, entonces $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.

SOLUCION DE PROBLEMAS

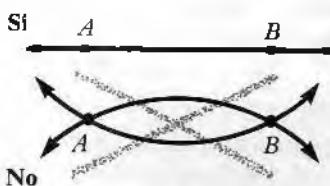
Tres personas, León, Martínez y Nieves, ocupan los puestos de administrador, cajero y encargado en un departamento de una tienda. Si Nieves es la cajera, Martínez es el encargado. Si Nieves es la encargada, Martínez es el administrador. Si Martínez no es el cajero, León es el encargado. Si León es el administrador, Nieves es la encargada. ¿Qué puesto ocupa cada uno?

2.7 Postulados de geometría

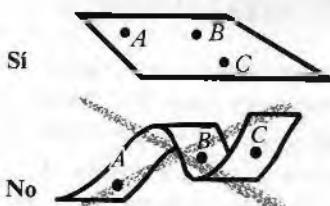
Los postulados de geometría son muy importantes en el proceso del razonamiento deductivo. Pueden compararse con las reglas de un juego. En el «juego de la geometría» se aceptan los postulados como verdad y se usan como ayuda en la demostración de teoremas.



Para afirmar que los puntos existen, se acepta este postulado. El postulado también da información sobre rectas y planos.



Para afirmar que una línea es *recta*, se requiere una, y sólo una, línea que contenga dos puntos cualesquiera. También puede decirse que *dos puntos determinan una recta*.



Para afirmar que un plano no se tuerce y da vueltas en el espacio, se requiere que uno, y sólo un, plano contenga tres puntos no colineales cualesquiera. También puede decirse que *tres puntos no colineales determinan un plano*.



Para afirmar que un plano es *recto*, se requiere que dos planos se intersequen sólo en una recta, no en dos.



Postulado de la existencia de los puntos

El espacio existe y contiene, por lo menos, cuatro puntos no coplanares. Un plano contiene, por lo menos, tres puntos no lineales. Una recta contiene, por lo menos, dos puntos.

Postulado del punto y la recta

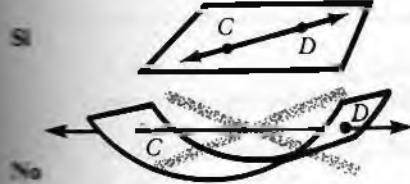
Dos puntos están contenidos en una, y sólo una, recta.

Postulado del punto y el plano

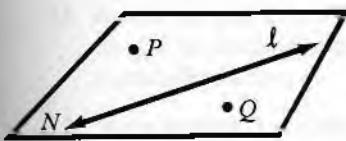
Tres puntos no colineales están contenidos en uno, y sólo un plano.

Postulado de la intersección de planos

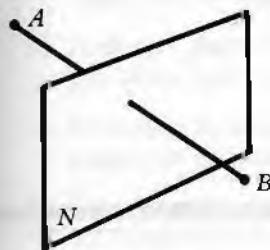
Si dos planos se intersecan, se intersecan exactamente en una recta.



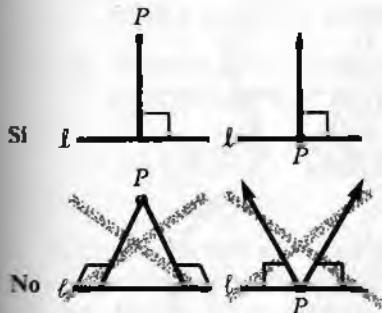
Para afirmar que un plano es «plano», se requiere un plano que contenga todos los puntos de una recta, si se sabe que contiene dos puntos de la recta.



Se requiere una recta que divida a un plano en dos semiplanos. Puede usarse este postulado para determinar si ambos puntos están en el mismo lado de la recta o en lados opuestos de ella.



Se requiere un plano que separe al espacio en dos semiespacios. Puede usarse este postulado para decidir si los dos puntos están en el mismo lado de un plano o en lados opuestos del mismo.



Se requiere sólo una recta que pase por un punto dado y sea perpendicular a una recta o un plano dados.

Postulado de los dos puntos, la recta y el plano

Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene está en el plano.

Postulado de la separación de planos

Sea N un plano y ℓ una recta en N . Los puntos del plano que no estén en ℓ forman dos semiplanos de manera que:

- cada semiplano es un conjunto convexo;
- si P está en un semiplano y Q está en el otro, entonces \overline{PQ} interseca a ℓ .

Postulado de la separación del espacio

Sea N un plano en el espacio. Los puntos del espacio que no estén sobre N forman dos semiespacios de manera que:

- cada semiespacio es un conjunto convexo;
- si un punto A está en un semiespacio y B está en el otro, \overline{AB} interseca a N .

Postulado de las perpendiculares

Dados un punto y una recta en un plano, hay exactamente una recta que pasa por el punto y es perpendicular a la recta dada. Dado un plano en el espacio y un punto que no está en ese plano, hay exactamente una recta que pasa por el punto y es perpendicular al plano dado.

Estos son algunos de los postulados aceptados en geometría. En la siguiente sección y en capítulos posteriores se presentarán otros postulados importantes.

EJERCICIOS**A.**

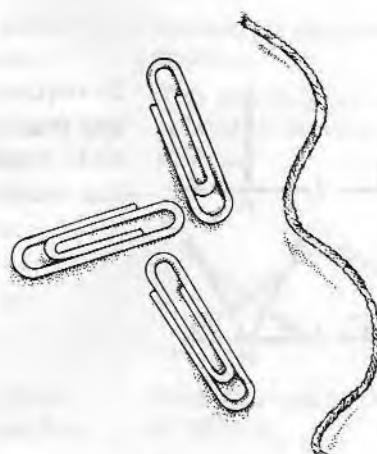
En los ejercicios 1 a 8, complétense los enunciados con las palabras *punto*, *recta*, *plano* y *espacio*. Dígase qué postulado sugiere la proposición completa.

1. Si los dos puntos están en un *plano*, entonces la ? que los contiene está en el *plano*.
2. Un ? contiene por lo menos tres puntos no colineales.
3. Dos puntos están contenidos en una, y sólo una, ?.
4. Si dos *planos* se intersecan, se intersecan exactamente en una ?.
5. Hay exactamente una ? que pasa por un punto dado y es perpendicular a un *plano* dado.
6. Un *plano* separa un ? en dos semiespacios.
7. En un *plano*, hay exactamente una ? que pasa por un punto dado y es perpendicular a una *recta* dada.
8. Una *recta* separa un ? en dos semiplanos.

ACTIVIDADES

Con una cuerda y unos clips, constrúyase un modelo para estos «postulados». ¿Cuál es el número mínimo necesario de trozos de cuerda y clips para satisfacer todos los requisitos de los postulados?

1. Hay por lo menos un trozo de cuerda.
2. Hay exactamente tres clips en cada trozo de cuerda.
3. No todos los clips están en el mismo trozo de cuerda.
4. Hay exactamente una cuerda a través de dos clips cualesquiera.
5. Dos cuerdas cualesquiera tienen por lo menos un clip en común.



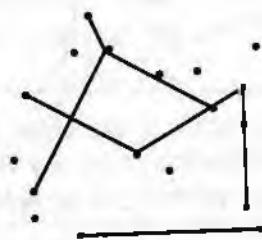
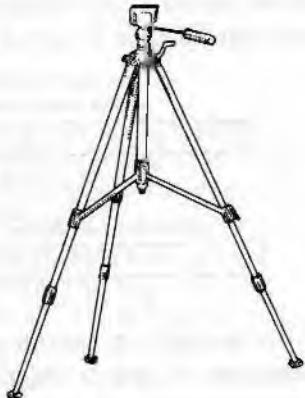
En los ejercicios 9 a 16, formúlense un postulado que permita llegar a la conclusión de que la proposición es verdadera.

9. Dos planos distintos, M y N , no pueden contener dos rectas distintas ℓ y m .
10. Dos rectas distintas, ℓ y m , no pueden contener dos puntos distintos A y B .
11. Dados un punto P y una recta ℓ en un plano, no puede haber un par de rectas distintas que pasen por P y sean perpendiculares a ℓ .
12. Si los puntos J y K están en diferentes semiplanos determinados por una recta ℓ , \overleftrightarrow{JK} interseca a ℓ .
13. Tres puntos no colineales, A , B y C , no pueden estar en dos planos distintos N y M .
14. Si A y B son puntos del plano M , entonces \overleftrightarrow{AB} no tiene ningún punto fuera del plano M .
15. Dados un punto P y un plano M , no puede haber dos rectas que pasen por P y sean perpendiculares al plano M .
16. El espacio puede contener más, pero no menos de cuatro puntos no colineales y no coplanares.
17. Los fotógrafos y los ingenieros emplean trípodes para montar sus cámaras y otros instrumentos. Explíquese por qué se utilizan tres pies y no cuatro. ¿Qué postulado es aplicable a esta situación?
18. ¿Cuántas rectas pueden trazarse a través de cuatro, cinco, seis y n puntos no colineales en un plano?
19. ¿Cuántos planos pueden determinarse con cuatro puntos entre los cuales no hay tres que sean colineales?

SOLUCION DE PROBLEMAS

Estos 19 puntos son las esquinas de cuatro figuras (un cuadrado, un sobre con solapa, una caja y un triángulo equilátero). En el dibujo aparecen algunas aristas. Ningún punto es la esquina de más de una figura, pero algunos puntos están sobre la arista de otra figura.

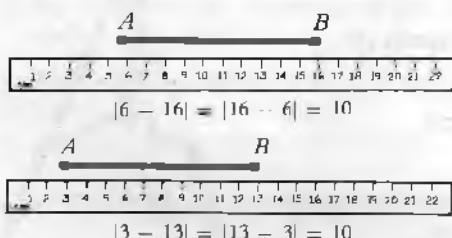
Trácense estos puntos y dibújense las cuatro figuras.



2.8 Algunos postulados sobre medición

En lenguaje CB, el «diez-veinte» (ubicación) del primer dibujo corresponde a la señal del kilómetro 62. En el segundo dibujo, la ubicación corresponde a la señal del kilómetro 97. ¿Qué distancia recorrió el motociclista?

En el capítulo anterior (véase Sec. 1.4), se introdujo de manera intuitiva el concepto de medición de la longitud y se usó libremente para formular definiciones y sacar conclusiones. En esta sección, se dará un breve repaso al postulado en el cual se basa este concepto de longitud.



Estos ejemplos muestran que no importa dónde se coloque la regla, la longitud del segmento es el valor absoluto de la diferencia entre los dos números que coinciden con los extremos.

El postulado de la regla incluye este concepto.

Ejemplo 1 Encuéntrense AB , BC y AC .

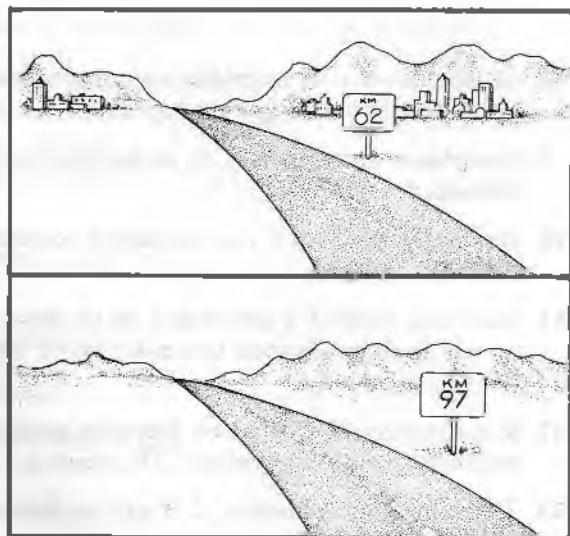
$$AB = |3 - (-2)| = 5$$

$$BC = |18 - 3| = 15$$

$$AC = |-2 - 18| = 20$$

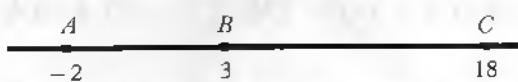
En el ejemplo, B está entre A y C . Obsérvese que la distancia entre A y B junto con la distancia entre B y C es la misma que la existente entre A y C .

Se formula una definición.



El postulado de la regla

- A cada par de puntos corresponde un número positivo único denominado **distancia** entre los puntos.
- Los puntos de una recta pueden hacerse coincidir biunívocamente con los números reales de modo que la distancia entre dos puntos cualesquiera sea el valor absoluto de la diferencia entre sus números asociados.



Definición 2.6

El punto B está **entre** A y C si, y sólo si, A , B y C son colineales y $AB + BC = AC$.

Un piloto verificó el rumbo de un avión (las líneas de color de la Fig. 1 señalan el rumbo del avión, que es el ángulo entre la dirección norte y la trayectoria del avión). Después cambió el rumbo como muestra la figura 2. ¿En cuántos grados cambió el rumbo?

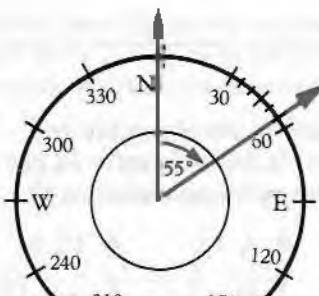


Figura 1

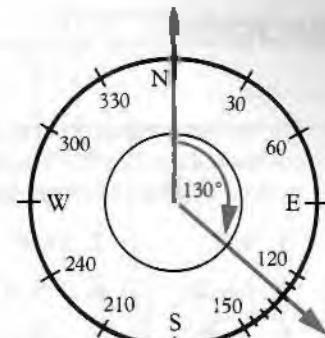
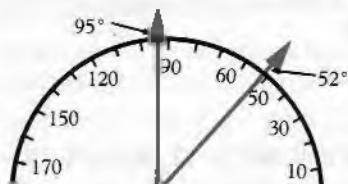


Figura 2

En el primer capítulo (Sec. 1.4), se introdujo de manera intuitiva el concepto de medición de ángulos y se usó libremente para formular definiciones y sacar conclusiones. Ahora, se dará un breve repaso al postulado en el cual se basa este concepto.



$$|95 - 52| = |52 - 95| = 43$$

Si se gira el transportador de modo que los rayos se correspondan con diferentes números, el valor absoluto de la diferencia entre dos números, sería el mismo. El postulado incluye este concepto.

Postulado del transportador

- A cada ángulo le corresponde un número real único entre 0 y 180, llamado medida del ángulo.
- Sea P un punto en la arista de un semiplano H . Cada rayo del semiplano o su arista con un vértice P puede hacerse coincidir biunívocamente con los números reales n , $0 < n < 180$, de manera que la medida de un ángulo formado por un par de rayos no colineales con vértice P sea el valor absoluto de la diferencia entre sus números asociados.

Ejemplo 2 Encuéntrense $m\angle ABC$, $m\angle CBD$ y $m\angle ABD$.

$$m\angle ABC = |42 - 20| = 22$$

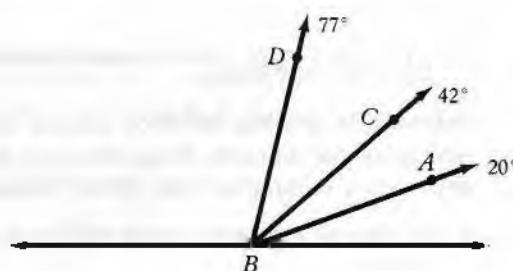
$$m\angle CBD = |77 - 42| = 35$$

$$m\angle ABD = |77 - 20| = 57$$

En el ejemplo, \vec{BC} está entre \vec{BA} y \vec{BD} .

Obsérvese que las medidas de $\angle ABC$ y $\angle CBD$ juntas miden lo mismo que $\angle ABD$.

Se formula una definición.



Definición 2.7

\vec{BC} está entre \vec{BA} y \vec{BD} si, y sólo si, \vec{BC} , \vec{BA} y \vec{BD} son coplanares y $m\angle ABC + m\angle CBD = m\angle ABD$.

EJERCICIOS**A.**

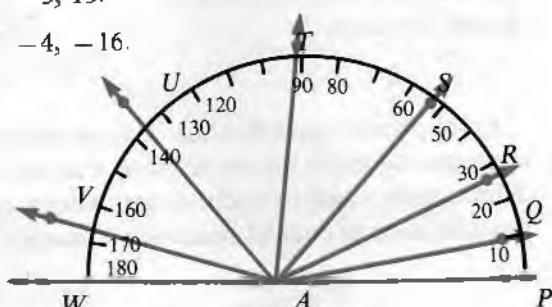
Un número asociado con un punto recibe el nombre de *coordenada del punto*. Encuéntrese la distancia entre un par de puntos con las coordenadas dadas en los ejercicios 1 a 12.

- | | | | |
|------------|-------------|------------|--------------|
| 1. 5, 2. | 2. 14, 8. | 3. 3, 12. | 4. 17, 0. |
| 5. 13, 21. | 6. -5, 13. | 7. 9, -2. | 8. -3, 15. |
| 9. -12, 7. | 10. -3, -7. | 11. 0, -8. | 12. -4, -16. |

Encuéntrese la medida de los ángulos dados en los ejercicios 13 a 18.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 13. $\angle QAS$. | 14. $\angle UAR$. |
| 15. $\angle QAV$. | 16. $\angle WAQ$. |
| 17. $\angle SAU$. | 18. $\angle VAR$. |

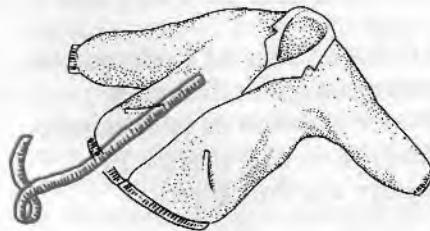
(Ejercicios 13-18)

**B.**

Los puntos A , B y C son colineales. Se dan las longitudes de ciertos segmentos. ¿Qué punto está entre los otros dos?

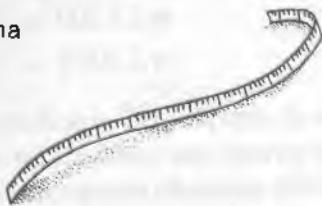
- | | |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 19. $AC = 4$, $CB = 8$, $AB = 12$. | 20. $BA = 9$, $BC = 12$, $AC = 3$. |
| 21. $CA = 20$, $BA = 11.6$, $CB = 8.4$. | 22. $AC = 9.3$, $CB = 6.5$, $AB = 15.8$. |

23. A una chaqueta se le van a hacer tres ojales con una separación de 4 pulgadas entre sí. Se coloca sobre la prenda una cinta de medir. Los ojales se marcan en los números 7, 11 y 15. ¿Qué postulado o definición se empleó?

**ACTIVIDADES**

Estímese la longitud de estos objetos aproximando a la unidad métrica más próxima indicada. Encuéntrese la suma de las diferencias entre lo estimado y la longitud real. Quien tenga la suma menor será el ganador.

- La medida alrededor de la cintura en centímetros (utilícese una cuerda).
- El ancho de una moneda en milímetros.
- La longitud de una habitación en metros.
- La longitud de un paso normal en centímetros.
- La altura de una puerta en metros.



24. Dos lados de un marco se encolan para formar una esquina. Cada lado se corta a un ángulo de 45° . ¿Cuál es la medida de la esquina exterior? ¿Qué postulado o definición se empleó?

C.

En los ejercicios 25 a 29, A , B y C son puntos colineales con coordenadas a , b y c .

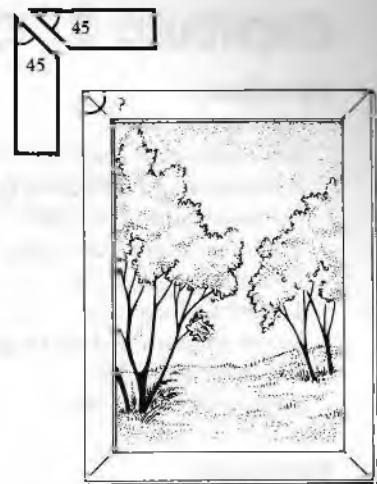
25. Si $a < b < c$, $c = 54$, $AC = 26$ y $BC = 19$, encuéntrense los valores de a y b .

26. Si $b = -7$, $c = 13$ y A es el punto medio de \overline{BC} , encuéntrese a .

27. Si $b = -10$, $c = 4$ y $BA = 28$, encuéntrense BC y CA . Dense dos respuestas posibles.

28. Si C está entre A y B , $BC = 8$ y $CA = 36$, encuéntrense a , b y c . Dense dos respuestas posibles. ¿Cuántas respuestas posibles hay?

29. Si C es el punto medio de \overline{AB} , $c = 14$ y $CB = 10$, dense dos posibles coordenadas para A .



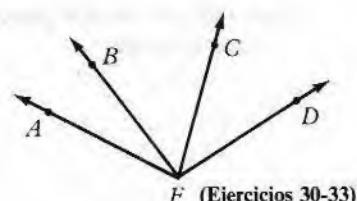
Los ejercicios 30 a 33 se refieren a una disposición de rayos en el mismo orden que los de la figura.

30. Si $m\angle AFD = 120$ y $m\angle AFC = 2 \cdot m\angle CFD$, encuéntrense $m\angle AFC$ y $m\angle CFD$.

31. Si $m\angle AFC = 3 \cdot m\angle AFB$, \vec{FC} biseca a $\angle AFD$ y $m\angle AFB = 16$, encuéntrese $m\angle AFD$.

32. Si $m\angle AFB = 2 \cdot m\angle CFD$, $m\angle AFB = \frac{1}{2}m\angle CFD$, y $m\angle AFD = 112$, encuéntrense $m\angle AFB$, $m\angle BFC$ y $m\angle CFD$.

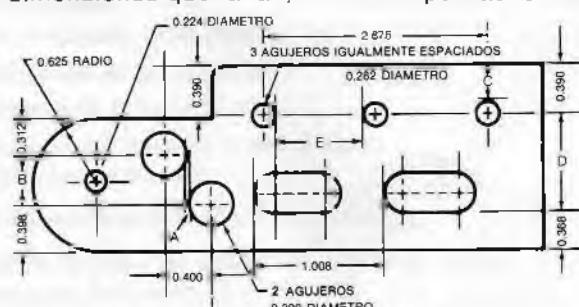
33. Si $m\angle BFC = 3 \cdot m\angle AFB$, $m\angle CFD = 4 \cdot m\angle AFB$, y $m\angle AFD = (m\angle AFB)^2 - 240$, encuéntrese la medida de $m\angle AFB$.



F (Ejercicios 30-33)

SOLUCION DE PROBLEMAS

Un mecánico va a construir una placa metálica como la que se ilustra. El primer paso es encontrar las dimensiones que faltan, indicadas por las letras A, B, C, D y E. Encuéntrense.



A =

$$B =$$

$$C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$D = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$E = \underline{\hspace{2cm}}$$

Capítulo 2 Conceptos Importantes

Términos

Generalización (pág. 44)
 Razonamiento inductivo (pág. 45)
 Contraejemplo (pág. 49)
 Términos indefinidos (pág. 52)
 Postulados (pág. 52)
 Teoremas (pág. 52)
 Razonamiento deductivo (pág. 53)
 Hipótesis (pág. 56)
 Conclusión (pág. 56)

Proposiciones si-entonces (pág. 56)
 Recíproca (pág. 60)
 Inversa (pág. 60)
 Contrarrecíproca (pág. 60)
 Afirmación de la hipótesis (pág. 64)
 Negación de la conclusión (pág. 65)
 Regla de la cadena (pág. 65)
 Entre puntos (pág. 72)
 Entre rayos (pág. 73)

Postulados

Postulado de la exigencia de los puntos
 (pág. 68).
 Postulado del punto y la recta (pág. 68)
 Postulado del plano y el punto (pág. 68)
 Postulado de la intersección de planos
 (pág. 68).
 Postulado de los dos puntos, la recta y el
 plano (pág. 69)

Postulado de la separación de planos
 (pág. 69)
 Postulado de la separación del espacio
 (pág. 69)
 Postulado de las perpendiculares (pág. 69)
 Postulado de la regla (pág. 72)
 Postulado del transportador (pág. 73)

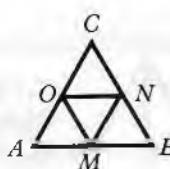
Capítulo 2 Resumen

1. Complétense la generalización siguiente:

$\triangle ABC$ es equilátero.

M, N, O son puntos medios.

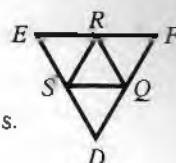
$\triangle MNO$ es equilátero.



$\triangle EFD$ es equilátero.

R, Q, S son puntos medios.

$\triangle RQS$ es equilátero.



Generalización: Los puntos medios de un ?

forman los vértices de un ?.

2. Escribanse contraejemplos para las siguientes generalizaciones falsas.

a. Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, el cuadrilátero es un cuadrado.

b. Si un cuadrilátero tiene cuatro ángulos congruentes, tiene cuatro lados congruentes.

3. ¿Cuál es la diferencia entre teorema y postulado?

4. Dígase si es falso o verdadero.

a. Tres puntos determinan un plano.

b. Dados una recta ℓ y un punto P que no está en la recta, hay sólo una recta que contiene a P y es perpendicular a ℓ .

c. La intersección de un plano y una recta puede contener exactamente dos puntos.

d. Si A, B y C son colineales, $AB = 10$ y $BC = 4$, entonces B está entre A y C .

5. Si S está entre R y T , $ST = 6$, y $RS = 10$, encuéntrese RT .

6. Si $\angle WXY \cong ZXV$, $m\angle WXY = 20$ y $m\angle YXV = 50$, encuéntrese $m\angle ZXV$.

7. Identifiquense la hipótesis y la conclusión de:

a. Dos rectas son paralelas si no se intersecan.

b. Todos los cuadrados son rectángulos.

8. Considérese la proposición:

Si una figura es un cuadrado, tiene cuatro ángulos rectos.

a. Formúlese la recíproca de la proposición.

b. Formúlese la inversa de la proposición.

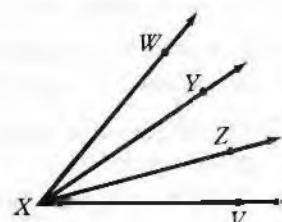
c. Formúlese la contrarrecíproca de la proposición.

d. Dense contraejemplos para a y b.

En los ejercicios 9 y 10, formúlese una conclusión correcta.

9. Si una figura es un rectángulo, las diagonales son congruentes.
 $ABCD$ es un rectángulo. Por tanto, ?

10. Si dos rectas no están en el mismo plano, no son paralelas.
 $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Por tanto, ?



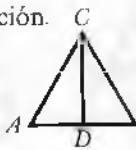
Capítulo 2. Examen

1. Complétense la siguiente generalización.

$\triangle ABC$ es isósceles y \overline{CD}

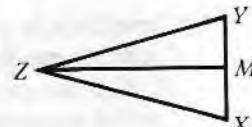
biseca a $\angle C$.

¿Cuál es la relación entre \overline{CD} y \overline{AB} ?



$\triangle XYZ$ es isósceles y \overline{MZ} biseca al ángulo Z .

¿Cuál es la relación entre \overline{MZ} y \overline{XY} ?



Generalización: La bisectriz de los vértices de un triángulo

isósceles es la base.

2. Dése un contraejemplo para la siguiente generalización falsa.

Sólo hay una recta perpendicular a una recta dada en un punto de esa recta.

3. ¿Cuál es el objeto de contar con términos indefinidos?

4. Digase si es falso o verdadero.

a. Dos puntos determinan una recta.

b. Una recta divide al espacio en dos semiespacios.

c. Si dos planos se intersecan, la intersección es un punto.

d. Si X , Y y Z son colineales y $XZ + ZY = XY$, entonces Z está entre X e Y .

5. Si B está entre A y C , $AC = 10$ y $AB = 4$, encuéntrese BC .

6. Complétense lo siguiente:

$m\angle ABD + \underline{\quad} = m\angle ABC$.

7. Identifiquense la hipótesis y la conclusión de las siguientes proposiciones:

a. Un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes.

b. Todos los triángulos equiláteros tienen tres ángulos congruentes.

8. Considérese la proposición:

Si dos ángulos son rectos, son congruentes.

a. Formúlese la recíproca de la proposición.

b. Formúlese la inversa de la proposición.

c. Formúlese la contrarrecíproca de la proposición.

d. Dense contraejemplos para mostrar que a y b son falsas.

En los ejercicios 9 y 10, enúnciese una conclusión correcta.

9. Si un triángulo tiene tres ángulos congruentes, es equilátero.

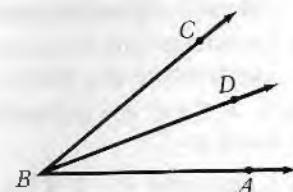
$\triangle ABC$ tiene tres ángulos congruentes.

Por tanto, .

10. Si dos ángulos son rectos (90°), son congruentes.

$\angle A$ no es congruente con $\angle B$.

Por tanto, .



Repaso de álgebra

Para cada problema, dése la propiedad algebraica ilustrada.

- A. Ley asociativa (suma y multiplicación)
- B. Ley conmutativa (suma y multiplicación)
- C. Ley distributiva (multiplicación sobre suma)
- D. Propiedad inversa (suma y multiplicación)
- E. Propiedad de identidad (suma y multiplicación)
- F. Suma y resta de iguales
- G. Multiplicación y división de iguales

- | | |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1. $3 \cdot (7 \cdot 9) = (3 \cdot 7) \cdot 9$. | 2. Si $x = 3$, entonces $7x = 21$. |
| 3. $7 + (-7) = 0$. | 4. Si $x - 2 = 1$, entonces $x = 3$. |
| 5. $x \cdot (a + y) = xa + xy$. | 6. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. |
| 7. $a + 0 = a$. | 8. $a \cdot b = b \cdot a$. |

Despejese x en las ecuaciones.

- | | | |
|-------------------------|------------------------------|----------------------|
| 9. $x + 3 = 35$. | 10. $3x = 35$. | 11. $x - 7 = 19$. |
| 12. $\frac{x}{6} = 8$. | 13. $2x + 9 = 11$. | 14. $-4x = 8$. |
| 15. $10 - x = 42$. | 16. $\frac{x}{2} + 9 = -5$. | 17. $3x - 19 = 17$. |

Resuélvanse y grafíquense en una recta numérica.

- | | | |
|------------------------|--------------------------|-----------------------|
| 18. $x > 3$. | 19. $7 < x$. | 20. $3x < 15$. |
| 21. $x + 1 \geq -17$. | 22. $x < \frac{4}{3}$. | 23. $x + 2 \geq 24$. |
| 24. $9 - x > 3$. | 25. $\frac{x}{2} > 10$. | 26. $3(x + 6) > 12$. |

Resuélvanse las ecuaciones.

- | | | |
|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| 27. $ x = 9$. | 28. $3 x = 21$. | 29. $ x + 1 = 4$. |
| 30. $ 3x = 21$. | 31. $ x - 2 = 35$. | 32. $ 3x + 2 = 17$. |
| 33. $ 2x + 1 = 13$. | 34. $ x - 9 = 25$. | 35. $3 - x = -5$. |

Calcúlese.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------|--------------------------------|
| 36. $\sqrt{25}$. | 37. $\sqrt{121}$. | 38. $\sqrt{100 + 69}$. |
| 39. $\sqrt{121} + \sqrt{81}$. | 40. $\sqrt{4^3}$. | 41. $8\sqrt{9} - 6\sqrt{36}$. |

LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

Fotografía: lentes

Los fotógrafos suelen emplear diversas lentes, desde la gran angular hasta el teleobjetivo, para obtener las fotografías que desean.

Las tres fotografías siguientes se tomaron desde la misma posición y con la misma cámara, pero con lentes distintas.



Gran angular



Normal

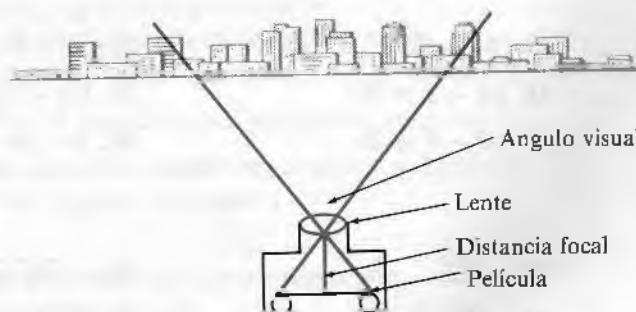


Teleobjetivo

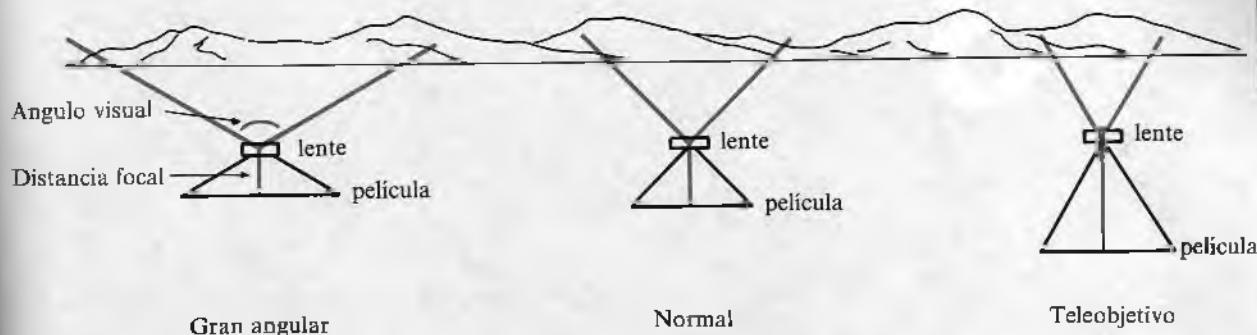
Con la lente «normal» se toman fotografías cercanas a lo que el fotógrafo ve. Con la lente gran angular se toman fotos con una mayor amplitud de la escena. Las lentes de teleobjetivo amplian los objetos.

Los fotógrafos deben comprender la «geometría de la fotografía», para saber qué lente es la mejor en cada caso. Se investigarán dos conceptos: la *distancia focal* y el *ángulo visual*.

La distancia focal es la distancia entre la lente y la película de la cámara cuando la lente está enfocando un objeto distante. El ángulo visual es el ángulo formado por líneas imaginarias que van de los extremos de la escena a la lente de la cámara.



El diagrama siguiente ilustra la relación entre la distancia focal y el ángulo visual. La lente de la cámara está en la misma posición en todos los dibujos.



El diagrama muestra que la distancia focal más corta corresponde al ángulo visual más grande. Las lentes gran angulares tienen distancias focales menores y abarcan una amplitud mayor que las lentes normales.

Con el siguiente dibujo se puede determinar el ángulo visual aproximado de una distancia focal dada.

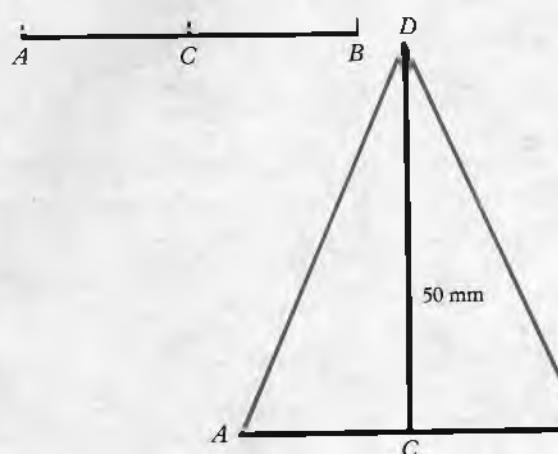
Paso 1 Trácese un segmento \overline{AB} de 43 mm de longitud. Esta es la longitud de la diagonal del negativo de la fotografía de una película común de una cámara corriente.



Paso 2 Biséquese \overline{AB} . Llámese C al punto medio.



Paso 3 Constrúyase $\overline{DC} \perp \overline{AB}$ de manera que \overline{DC} tenga una longitud igual a la distancia focal de la lente. (Por ejemplo, 50 mm.)



Paso 4 Trácense \overline{DA} y \overline{DB} .

Paso 5 Mídase $\angle ADB$ con el transportador para buscar el ángulo visual aproximado. (Para una distancia focal de 50 mm.)

Complétense la construcción anterior para cada una de las siguientes distancias focales:

1. 21 mm.
2. 50 mm.
3. 200 mm.

Para cada distancia focal, tómense medidas para buscar el ángulo visual. Una lente con distancia focal de 50 mm tiene un ángulo visual similar al que tiene el ojo humano. Esta es una lente normal. ¿Cuál es la distancia focal de una lente gran angular y la de un teleobjetivo?

CAPÍTULO

3

3.1	Triángulos congruentes	84
3.2	Postulados sobre la congruencia	90
3.3	Pruebas: uso de los postulados sobre la congruencia	96
3.4	Pruebas: uso de definiciones	100
3.5	Pruebas: uso de postulados y definiciones	104
3.6	Prueba de la congruencia de ángulos y segmentos	110
3.7	Pruebas: Solape de triángulos	116
3.8	Pruebas: cadenas de congruencias	120
<i>Conceptos importantes</i>		122
<i>Resumen</i>		123
<i>Examen</i>		124
Resumen global (Caps. 1 a 3) 125		
La geometría en nuestro mundo		
Arquitectura: domos geodésicos		126

Triángulos y congruencia



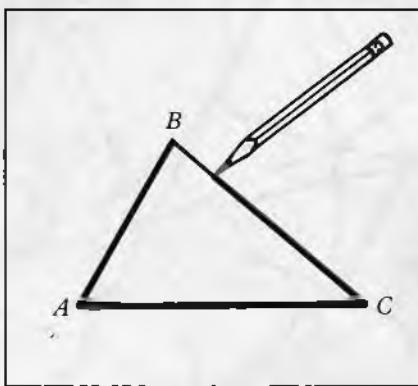
3.1 Triángulos congruentes



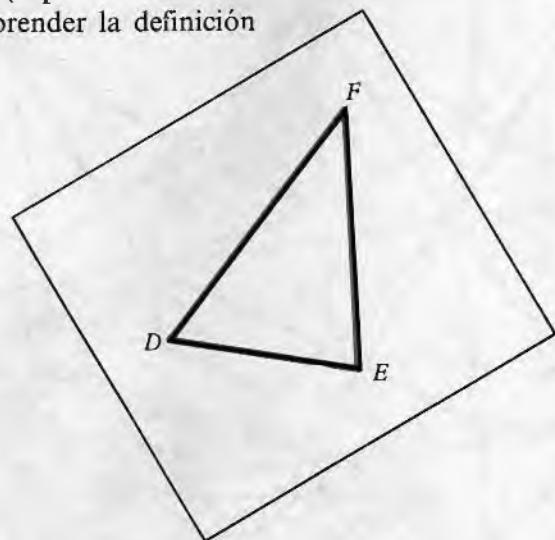
Los automóviles se fabrican utilizando la producción en cadena. Los componentes producidos deben ser de idéntico tamaño y forma para poderlos emplear en cualquier automóvil de la línea de montaje. Los repuestos también deben ser idénticos. En geometría, a las figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma se les llama *congruentes*.

En geometría, se requiere una definición apropiada para decidir cuándo dos figuras, como $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, son congruentes.

Puede hacerse una prueba con papel vegetal para mostrar que $\triangle ABC$ probablemente es congruente con $\triangle DEF$ (a partir de las ilustraciones). Esta prueba puede ayudar a comprender la definición usual de congruencia.

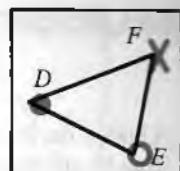
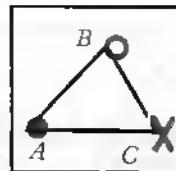


Dibújese $\triangle ABC$.



Si puede mover el papel para que el triángulo trazado coincida con $\triangle DEF$, los triángulos probablemente sean congruentes.

Considérese de nuevo la prueba del dibujo. Si se marca cada vértice con un símbolo especial, se observa que los vértices de los dos triángulos se corresponden como se muestra en la figura. También se determina la correspondencia de ángulos.



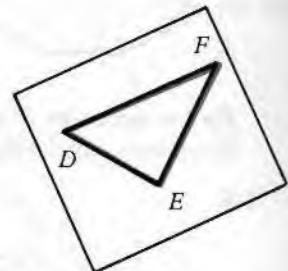
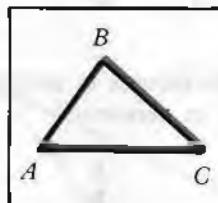
$$\begin{array}{l} A \leftrightarrow D \\ B \leftrightarrow E \\ C \leftrightarrow F \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \angle A \leftrightarrow \angle D \\ \angle B \leftrightarrow \angle E \\ \angle C \leftrightarrow \angle F \end{array}$$

correspondencia entre vértices

correspondencia entre ángulos

Si se marca cada lado con un signo especial, se observa que los lados se corresponden como se muestra en la figura.



En esta prueba de dibujo, se observa que:

$$\begin{array}{ll} \overline{AB} \cong \overline{DE} & \angle A \cong \angle D \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} & \angle B \cong \angle E \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} & \angle C \cong \angle F \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE} \\ \overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF} \\ \overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF} \end{array}$$

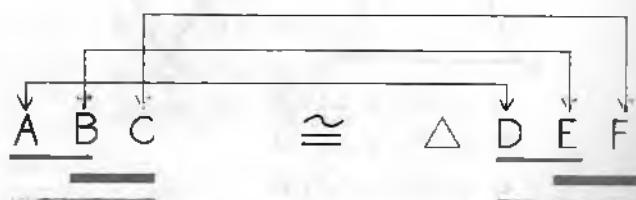
correspondencia entre lados

Definición 3.1

Dos triángulos son congruentes si hay una correspondencia entre sus vértices de manera que cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes. Obsérvese que la congruencia se puede definir de manera similar para otras figuras.

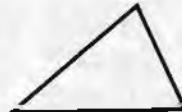
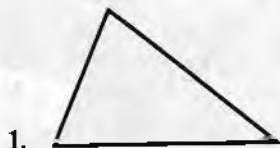
Siempre que pueda hacerse coincidir un triángulo con otro de manera que las partes comparadas sean *congruentes*, se da una clase especial de correspondencia llamada *congruencia*. Para indicar esta congruencia, se escribe: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

El diagrama muestra cómo esta proposición sobre los triángulos congruentes proporciona información específica sobre las partes que se corresponden (ángulos y lados).



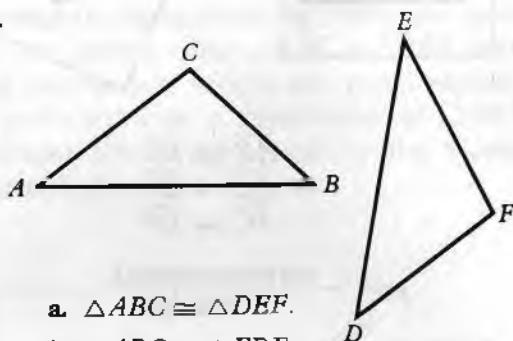
EJERCICIOS**A.**

¿Cuáles de los siguientes pares de figuras son congruentes?
(Puede emplearse papel vegetal.)



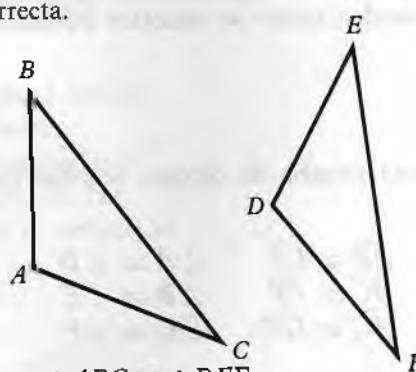
En los ejercicios 5 a 8, selecciónese la proposición correcta.
(Empléese papel vegetal si es necesario.)

5.



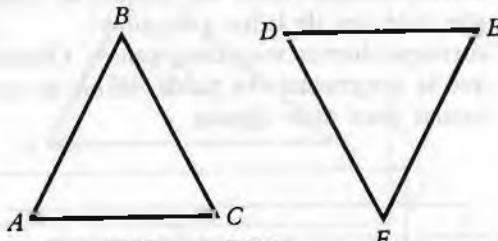
- a. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
- b. $\triangle ABC \cong \triangle EDF$.
- c. $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.

6.



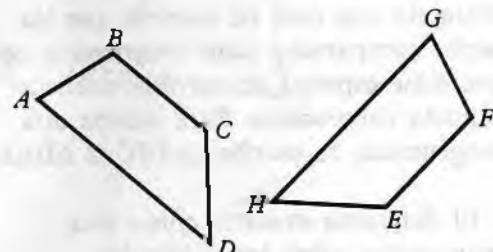
- a. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
- b. $\triangle ABC \cong \triangle DFE$.
- c. $\triangle ABC \cong \triangle FED$.

7.



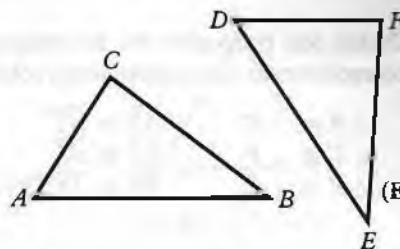
- a. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
- b. $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.
- c. $\triangle ABC \cong \triangle FDE$.

8.



- a. $ABCD \cong EFGH$.
- b. $ABCD \cong FGHE$.
- c. $ABCD \cong GHEF$.
- d. $ABCD \cong GFEH$.

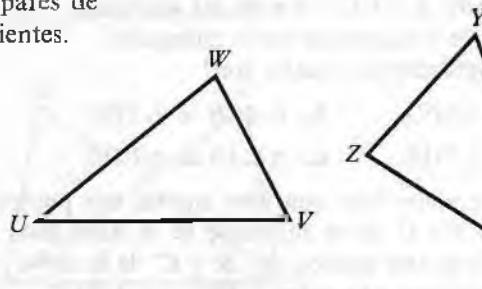
9. Dado que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, selecciónese la proposición falsa en cada parte.
- $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{DE}$, $\angle C \cong \angle F$.
 - $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.
 - $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{FE}$, $\angle C \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.



(Ejercicio 9)

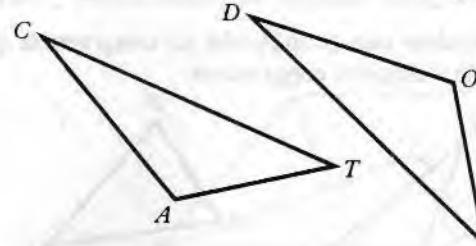
10. Dado que $\triangle UVW \cong \triangle XYZ$, complétense las congruencias para los seis pares de partes congruentes correspondientes.

- $\angle U \cong ?$
- $\angle V \cong ?$
- $\angle W \cong ?$
- $\overline{UV} \cong ?$
- $\overline{UW} \cong ?$
- $\overline{VW} \cong ?$



(Ejercicio 10)

11. Dado que $\triangle CAT \cong \triangle DOG$, formúlense las congruencias para los seis pares de partes congruentes correspondientes.

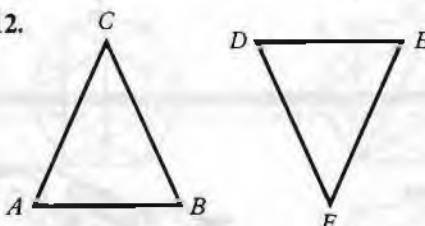


(Ejercicio 11)

B.

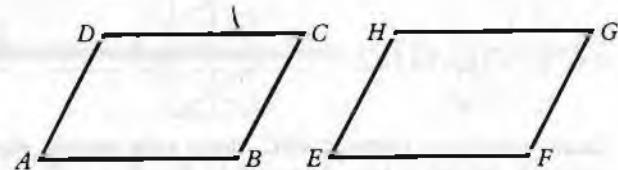
En los ejercicios 12 y 13 hay dos proposiciones de congruencia correctas. Encuéntrense estas proposiciones.

12.



- $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
- $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.
- $\triangle ABC \cong \triangle FDE$.
- $\triangle ABC \cong \triangle EDF$.

13.



- $ABCD \cong EFGH$.
- $ABCD \cong FGHE$.
- $ABCD \cong GHEF$.
- $ABCD \cong FEHG$.

14. Dado que $\triangle PRS \cong \triangle JKL$, formúlense tres proposiciones de congruencia sobre los ángulos y otras tres sobre los lados de los triángulos.

15. Dadas seis proposiciones de congruencia, complétense correctamente las proposiciones sobre los triángulos congruentes.

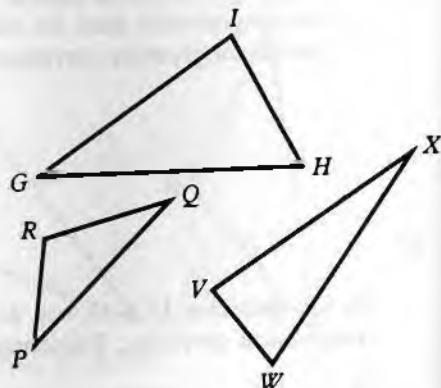
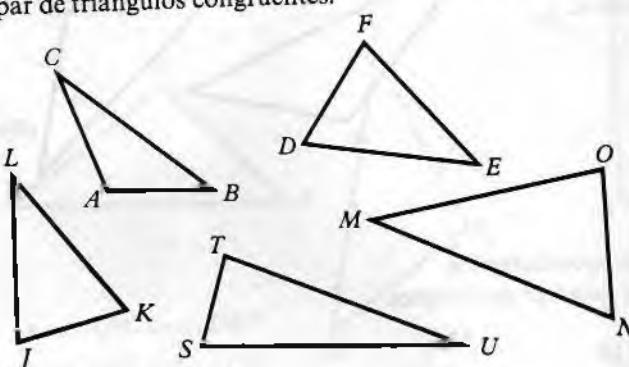
$$\begin{array}{ll} \angle A \cong \angle B & \overline{AP} \cong \overline{BT} \\ \angle T \cong \angle P & \overline{AR} \cong \overline{BJ} \\ \angle R \cong \angle J & \overline{PR} \cong \overline{TJ} \\ \triangle ? ? ? \cong \triangle ? ? ? \end{array}$$

16. Dado que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, dos de las siguientes proposiciones de congruencia entre triángulos también son verdaderas. ¿Cuáles son?

- a. $\triangle BCA \cong \triangle EFD$. b. $\triangle ACB \cong \triangle EFD$.
c. $\triangle CBA \cong \triangle FDE$. d. $\triangle CAB \cong \triangle FDE$.

17. Cuando un cerrajero hace una llave nueva, tres puntos arbitrarios, A , B y C , de la superficie de la llave dada se corresponden con tres puntos, A' , B' y C' de la llave nueva. ¿Qué relación hay entre $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$?

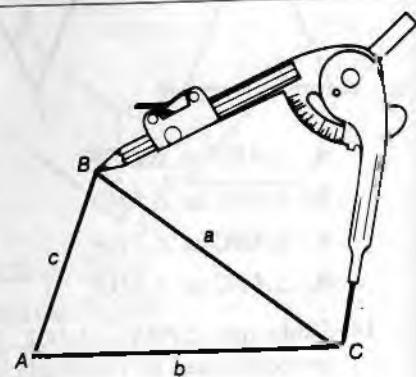
18. Formúlese una proposición de congruencia para cada par de triángulos congruentes.



ACTIVIDADES

Cada triángulo, como $\triangle ABC$, tiene seis partes. Hay tres lados (a , b y c) y tres ángulos ($\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$).

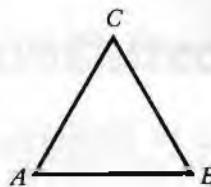
1. Supóngase que sólo se permite abrir el compás a las longitudes de los tres lados cuando es necesario. Constrúyase un triángulo congruente con $\triangle ABC$.
2. Supóngase que sólo se permite abrir el compás a la longitud del lado c , a la del lado b , y para copiar $\angle A$. Dibújese un triángulo congruente con $\triangle ABC$.
3. ¿Qué otras combinaciones de tres de seis partes permiten dibujar un triángulo congruente con $\triangle ABC$?



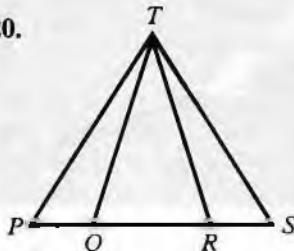
19. Si $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero, puede escribirse $\triangle ABC \cong \triangle BCA$. Además de ésta, hay otras cinco proposiciones de congruencia. Formúlense.

C.

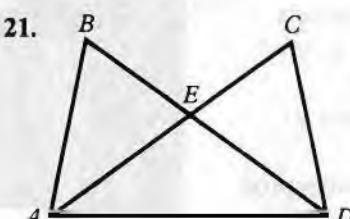
Cada una de las figuras siguientes contiene uno o más pares de triángulos congruentes. En ocasiones, los triángulos se «solapan» unos a otros. Formúlense una proposición correcta de congruencia para cada par que se encuentre en una figura.



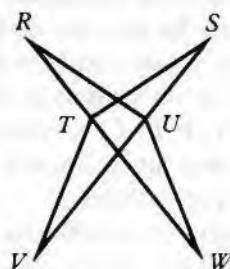
20.



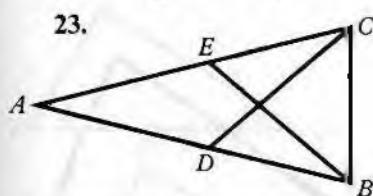
21.



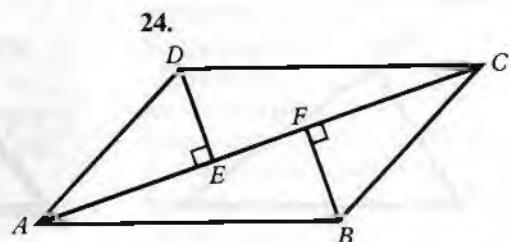
22.



23.

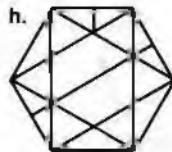
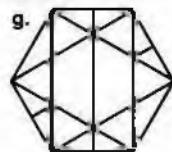
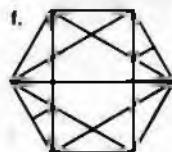
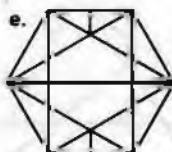
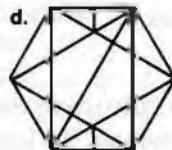
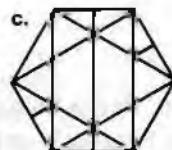
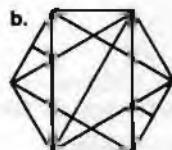
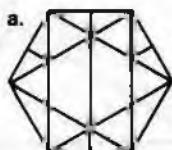


24.



SOLUCION DE PROBLEMAS

1. ¿Qué pares de figuras idénticas hay aquí?

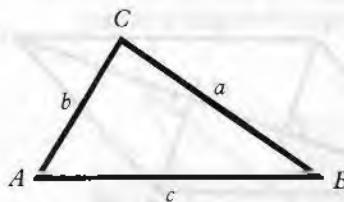


2. Dibújese la figura a y márquense los puntos donde se intersecan los segmentos. Encuéntrense seis pares de triángulos congruentes (cada uno de ellos con triángulos de diferentes tamaños y formas) y formúlense las proposiciones de congruencia correctas.

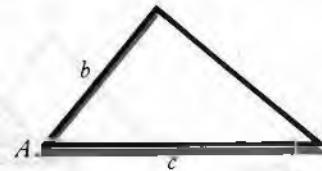
3.2 Postulados sobre la congruencia

Supóngase que un alfombrista necesita reparar una alfombra con un retazo triangular. No es probable que se midan los tres lados y los tres ángulos para cortar la pieza. Sólo se necesitan algunas de esas medidas. En esta sección se analizarán cuántas y qué combinaciones de las seis partes de un triángulo (lados a , b , c y ángulos A , B , C) se necesitan para determinar un triángulo con tamaño y forma particulares.

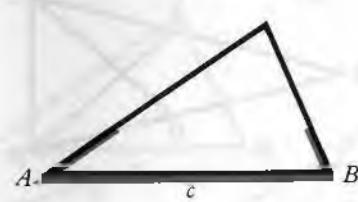
Primero se establecen algunos conceptos útiles para trabajar con triángulos congruentes.



Un **ángulo** y el lado opuesto a éste se marcan con la misma letra; el **ángulo** con letra mayúscula, y el **ángulo**, con minúscula.
lado

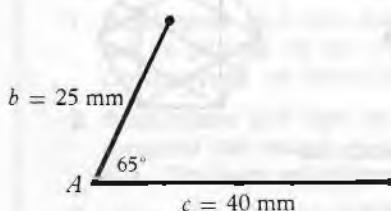


Dos lados comprenden un **ángulo** si el vértice del **ángulo** es un extremo de ambos lados.

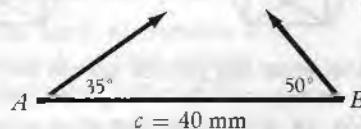


Dos **ángulos** comprenden un lado si los extremos del lado son vértices de los dos **ángulos**.

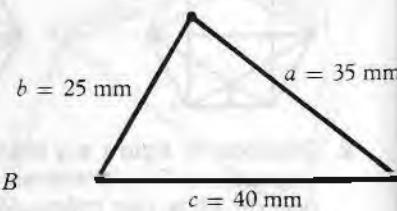
Si se construye un triángulo, dadas tres de las seis partes, se encuentra que el tamaño y la forma del triángulo están completamente determinados dada la información siguiente:



1. Dos lados y el **ángulo comprendido**.

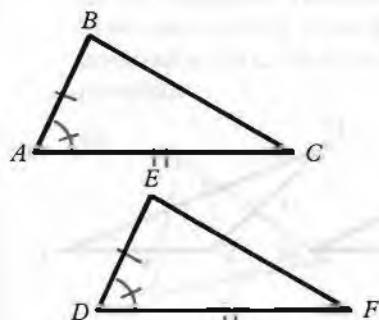


2. Dos **ángulos** y el **lado comprendido**.



3. Tres lados.

De lo anterior se obtienen los tres postulados siguientes sobre congruencia.

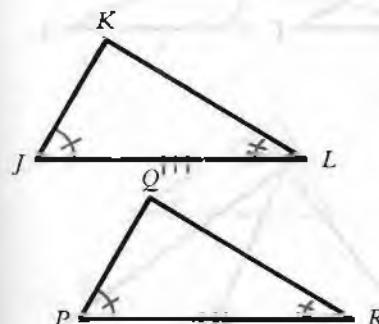


Las marcas sobre el triángulo muestran cuáles son los ángulos y lados congruentes.

Se considera que sólo puede resultar un triángulo si se dan dos lados y el ángulo comprendido, así que se acepta este postulado.

Postulado de la congruencia LAL

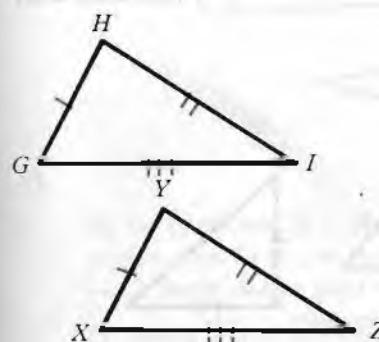
Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



Se cree que sólo puede resultar un triángulo si están dados dos ángulos y el lado comprendido, así que se acepta este postulado.

Postulado de la congruencia ALA

Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



Se cree que sólo puede resultar un triángulo si se dan tres lados, así que se acepta este postulado.

Postulado de la congruencia LLL

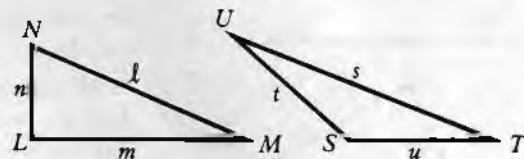
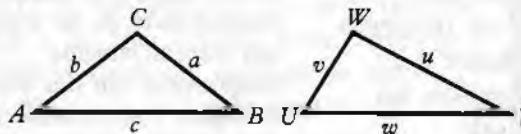
Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

La definición de triángulos congruentes muestra que deben coincidir seis pares de partes. Pero estos tres postulados sugieren que en ocasiones sólo es necesario verificar tres de estos pares para estar seguros de que hay congruencia. Estos postulados se emplearán para demostrar otros teoremas sobre triángulos.

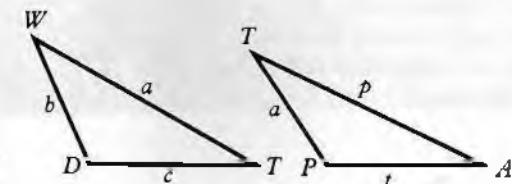
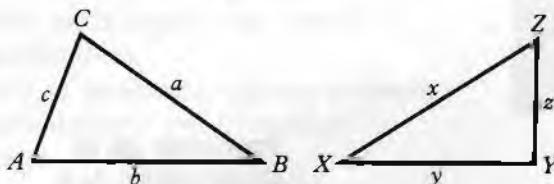
EJERCICIOS

A.

1. ¿Cuál de estos triángulos no se denominó en forma correcta?



2. ¿Cuál de estos triángulos se denominó en forma correcta?



3. Dibújese un triángulo y máquense sus ángulos y lados de acuerdo con el método estándar.

Establézcase el ángulo (o lado) comprendido en cada par de lados (o ángulos).

4. \overline{AB} y \overline{AD} .

5. \overline{BD} y \overline{BC} .

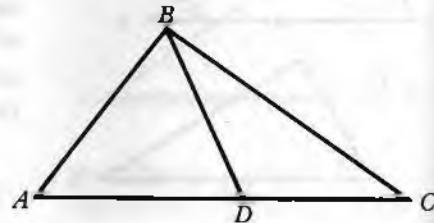
6. $\angle A$ y $\angle C$.

7. $\angle ABD$ y $\angle ADB$.

8. \overline{AD} y \overline{BD} .

9. \overline{BD} y \overline{CD} .

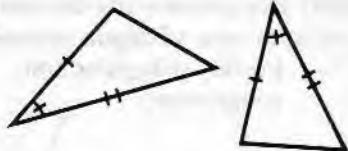
10. $\angle ABC$ y $\angle C$.



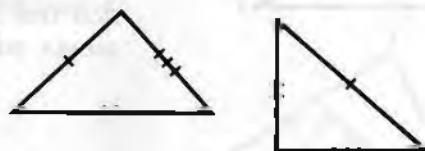
(Ejercicios 4-10)

¿Por cuál de los tres postulados de la congruencia (LAL, ALA, LLL) son congruentes estos tres pares de triángulos? (Acéptese que la congruencia está indicada por las marcas, aunque es posible que los triángulos no parezcan congruentes.)

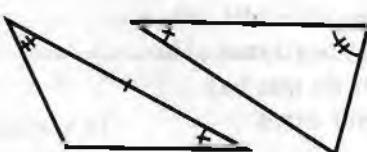
11.



12.



13.

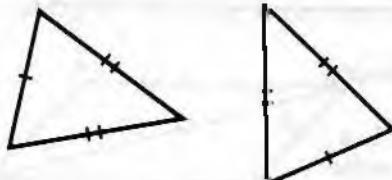


14.

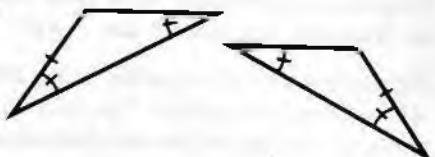


En los ejercicios 15 a 22, se marcaron las partes congruentes de los triángulos. Determinese si hay suficiente información como para decidir si los triángulos son congruentes por los postulados LAL, ALA o LLL. Si son congruentes, formúlese el postulado.

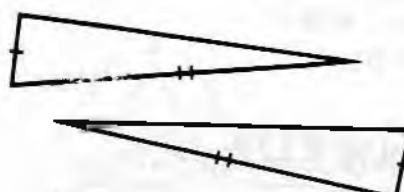
15.



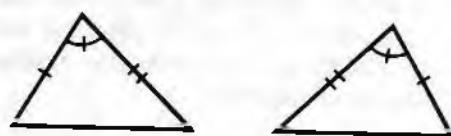
16.



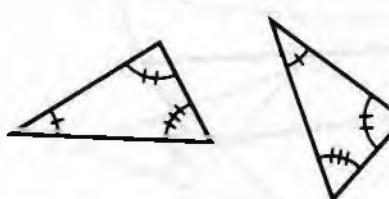
17.



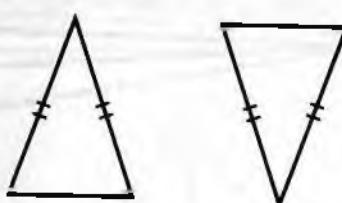
18.



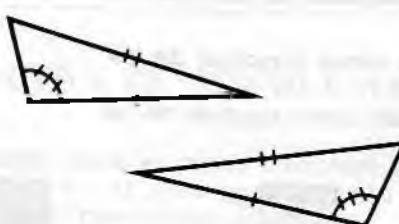
19.



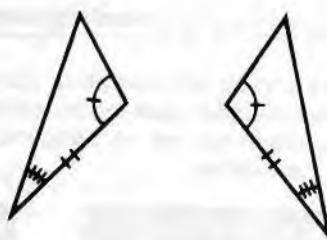
20.



21.



22.



B.

En los ejercicios 23 a 27, determinese si los triángulos son congruentes. Si lo son, indíquese qué postulado (LAL, ALA, LLL) puede usarse para verificarlo.

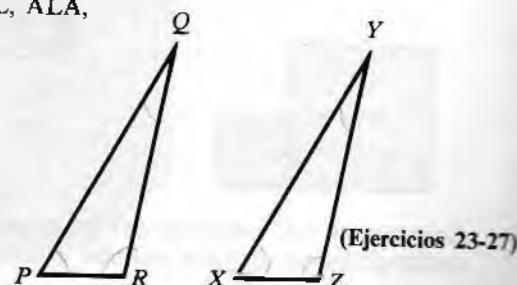
23. Dado: $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$, $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$, $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$.

24. Dado: $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$, $\overline{RQ} \cong \overline{ZY}$, $\angle R \cong \angle Z$.

25. Dado: $\angle P \cong \angle X$, $\angle R \cong \angle Z$, $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$.

26. Dado: $\angle Q \cong \angle Y$, $\angle R \cong \angle Z$, $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$.

27. Dado: $\angle P \cong \angle X$, $\angle Q \cong \angle Y$, $\angle R \cong \angle Z$.





28. Empléese el postulado LLL para construir un triángulo congruente con $\triangle ABC$.

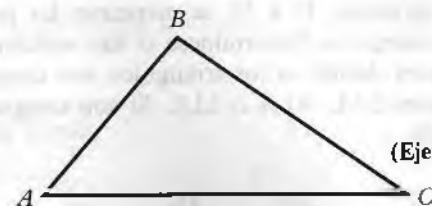


29. Empléese el postulado LAL para construir un triángulo congruente con $\triangle ABC$.

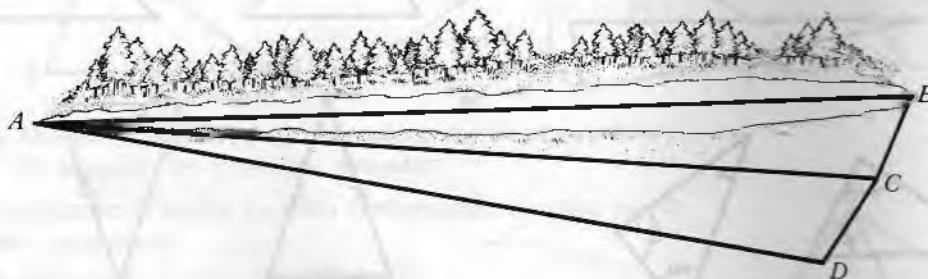


30. Empléese el postulado ALA para construir un triángulo congruente con $\triangle ABC$.

31. Un equipo de agrimensores desea encontrar la distancia AB a través de un lago. Un método requiere la construcción de un par de triángulos congruentes. Los agrimensores seleccionan un punto cualquiera C , miden $\angle ACB$ y ubican un punto D de manera que $\angle ACD \cong \angle ACB$ y $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. ¿Por qué son congruentes $\angle ACD$ y $\angle ACB$? ¿Cómo puede esto ayudar a encontrar la distancia requerida?



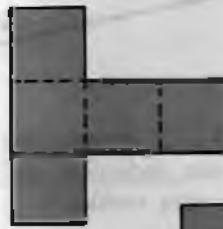
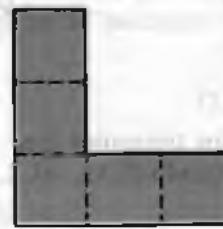
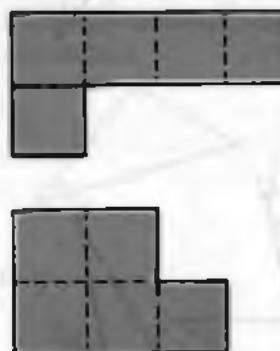
(Ejercicios 28-30)



ACTIVIDADES

Háganse copias con cartulina (por lo menos tres veces mayores) de los seis «pentaminós» que se muestran.

Un «pentaminó» es un polígono que coincide con cinco cuadros de un tablero de ajedrez.



Colóquense los «pentaminós» de manera que se forme un par de rectángulos de idéntico tamaño y forma.

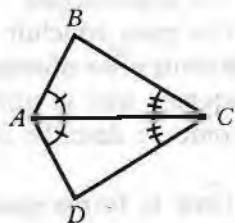
C.

En los ejercicios 32 a 37, formúlese un postulado de congruencia para cada par de triángulos congruentes. Dígase, además, si los triángulos son congruentes por ALA, LAL o LLL. (Nota: empleese el concepto de que tanto un segmento como un ángulo son congruentes consigo mismos.)

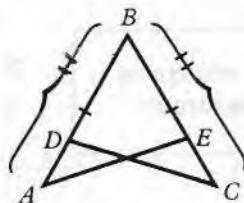
32.



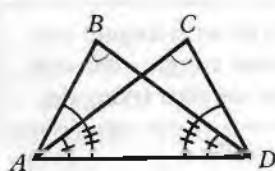
33.



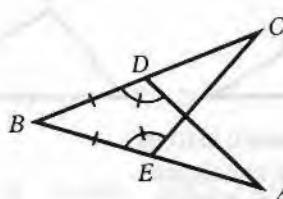
34.



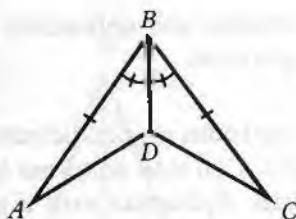
35.



36.

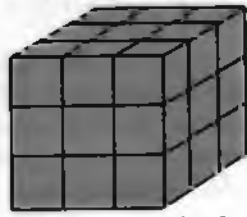


37.



SOLUCION DE PROBLEMAS

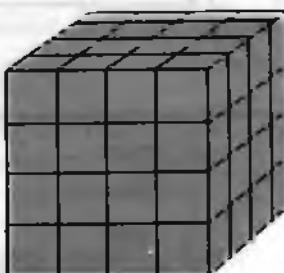
¿De cuántas maneras puede colocarse un cubo de $3 \times 3 \times 3$ en un cubo de $4 \times 4 \times 4$? ¿Cuántas posiciones de $2 \times 2 \times 2$ o de $1 \times 1 \times 1$ son posibles? Complétese la tabla.



cubo de $1 \times 1 \times 1$



cubo de $2 \times 2 \times 2$



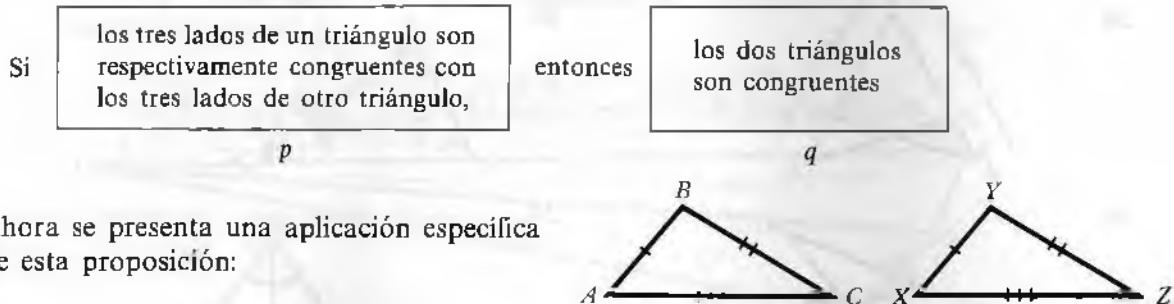
índice del cubo	número de posiciones en un cubo de $4 \times 4 \times 4$
1	8
2	24
3	16
4	3
5	1

número de posiciones en un cubo de $4 \times 4 \times 4$

3.3 Pruebas: uso de los postulados sobre la congruencia

Para probar que dos triángulos son congruentes, se empieza con la información dada y se emplean los *esquemas de razonamiento deductivo* para concluir que son realmente congruentes. La afirmación de la hipótesis es el esquema que se utiliza con mayor frecuencia, como se describe a continuación.

El postulado LLL tiene la forma general:



Ahora se presenta una aplicación específica de esta proposición:

Se observa que todas las condiciones establecidas en *p* se satisfacen; esto es, *p* es verdadero. Con esto se *afirma la hipótesis*. Por tanto, puede concluirse: *q* es verdadero. Aplicando esto a este caso específico, $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

Resulta útil organizar el pensamiento al formular la *prueba* anterior en dos columnas. La columna izquierda se usa para las proposiciones que llevan a la conclusión deseada. La columna de la derecha da las razones por las cuales las proposiciones son verdaderas.

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{XY}$
 $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$
 $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.



Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{XY}$.	1. Dado.
2. $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$.	2. Dado.
3. $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$.	3. Dado.
4. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.	4. Postulado de la congruencia LLL.

REPASO: La afirmación de la hipótesis es un esquema de razonamiento que se representa como sigue:

Siempre que $p \rightarrow q$ sea verdad
y se afirme que *p* es verdad,

puede concluirse que *q* es verdad.

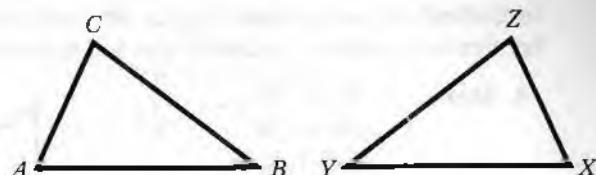
Ahora se presentan otros dos ejemplos de pruebas sencillas sobre la congruencia de dos triángulos. Obsérvese que se emplea la afirmación de la hipótesis.

Ejemplo 1 Dado: $\overline{AB} \cong \overline{XY}$

$$\angle A \cong \angle X$$

$$\angle B \cong \angle Y$$

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.



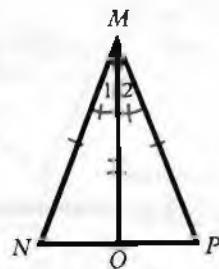
Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{XY}$.	1. Dado.
2. $\angle A \cong \angle X$.	2. Dado.
3. $\angle B \cong \angle Y$.	3. Dado.
4. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.	4. Postulado de la congruencia ALA.

Ejemplo 2 Dado: $\overline{MN} \cong \overline{MP}$

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

Pruébese: $\triangle MNQ \cong \triangle MPQ$.



Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{MN} \cong \overline{MP}$.	1. Dado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$.	2. Dado.
3. $\overline{MQ} \cong \overline{MQ}$.	3. Un segmento es congruente consigo mismo.
4. $\triangle MNQ \cong \triangle MPQ$.	4. Postulado de la congruencia LAL.

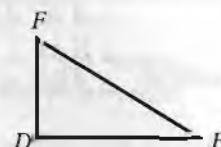
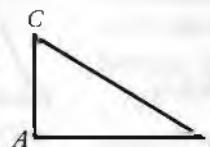
(Nota: Algunas veces, como en el tercer paso, hay un lado común a dos triángulos. El concepto de que «un segmento es congruente consigo mismo» puede usarse para obtener un segundo par de lados congruentes necesario para afirmar la hipótesis del postulado de la congruencia LAL. Este concepto se analizará más a fondo en el Cap. 4.)

EJERCICIOS

- A. Pruébese la congruencia de los siguientes triángulos formulándose una demostración a dos columnas. Elabórense las demostraciones de acuerdo con los ejemplos recién vistos.

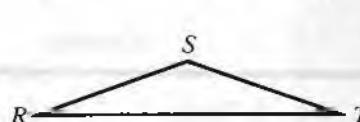
1. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
 $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
 $\angle A \cong \angle D$.

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



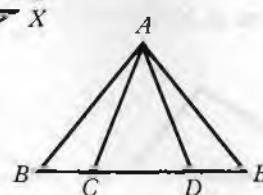
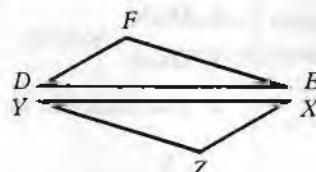
2. Dado: $\overline{RS} \cong \overline{KL}$
 $\overline{ST} \cong \overline{JK}$
 $\overline{RT} \cong \overline{JL}$.

Pruébese: $\triangle RST \cong \triangle LKJ$.



3. Dado: $\angle D \cong \angle X$
 $\angle F \cong \angle Z$
 $\overline{DF} \cong \overline{XZ}$.

Pruébese: $\triangle DEF \cong \triangle XYZ$.

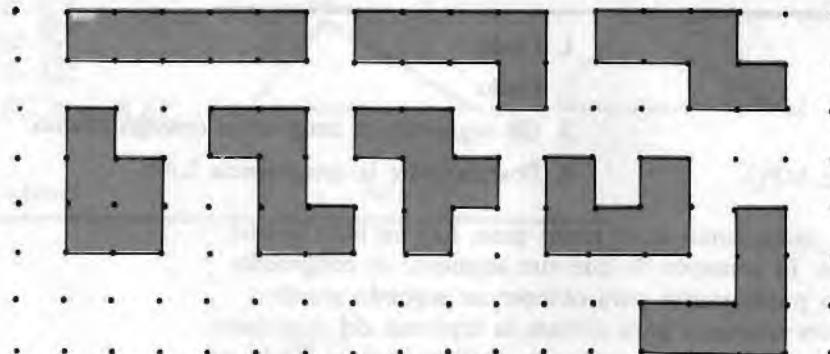


4. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
 $\overline{AB} \cong \overline{AE}$
 $\overline{BC} \cong \overline{DE}$.

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle AED$.

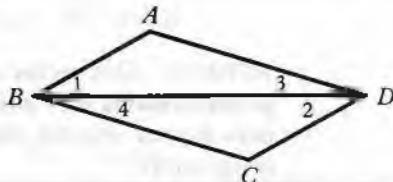
**ACTIVIDADES**

Háganse copias grandes de estos «pentaminós» (figuras de cinco cuadrados) y colóquense de manera que formen un par de rectángulos de idéntica forma y tamaño.



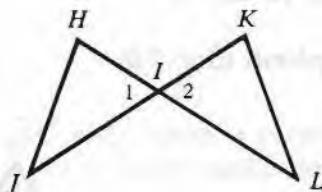
5. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 3 \cong \angle 4.$

Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle CDB.$



7. Dado: $\overline{HI} \cong \overline{KL}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\overline{JI} \cong \overline{IL}.$

Pruébese: $\triangle HIJ \cong \triangle KIL.$

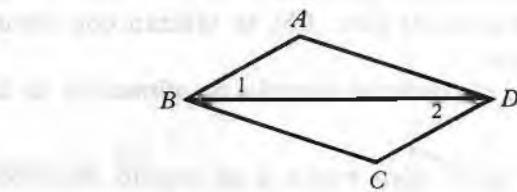


9. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
 $\angle A \cong \angle D$
 $\angle ACE \cong \angle DBF.$

Pruébese: $\triangle ACE \cong \triangle DBF.$

10. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{BD}, \overline{AE} \cong \overline{DF}$
 $\angle A \cong \angle D.$

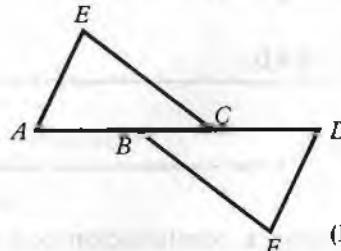
Pruébese: $\triangle CAE \cong \triangle BDF.$



(Ejercicios 9, 10)

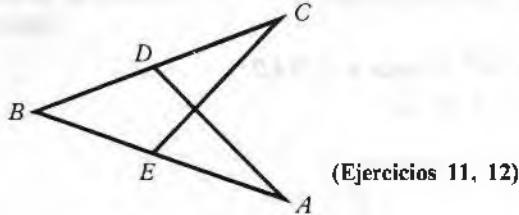
11. Dado: $\angle A \cong \angle C, \overline{AB} \cong \overline{BC}$

Pruébese: $\triangle CBE \cong \triangle ABD.$



12. Dado: $\angle BDA \cong \angle BEC$
 $\overline{BD} \cong \overline{BE}.$

Pruébese: $\triangle BDA \cong \triangle BEC.$

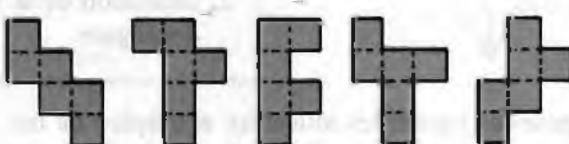


(Ejercicios 11, 12)

SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cuáles de los siguientes modelos pueden plegarse de manera que formen un cubo doblando y pegando los bordes?

¿Cuántos modelos más de seis cuadros se pueden dibujar que al plegarlos formen un cubo?



3.4 Pruebas: uso de definiciones

REPASO: Dos rectas son **perpendiculares** si se intersecan para formar ángulos rectos congruentes.

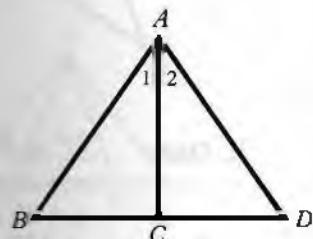
La anterior definición de las rectas perpendiculares y las definiciones de bisectriz del ángulo, punto medio, bisectriz del segmento (Sec. 1.5) y bisectriz perpendicular (Sec. 1.6), se utilizan con frecuencia en las demostraciones.

Considérese el siguiente ejemplo de *afirmación de la hipótesis* (Sec. 2.6).

$p \rightarrow q$: Si un rayo biseca a un ángulo, entonces los dos ángulos que se forman son congruentes.

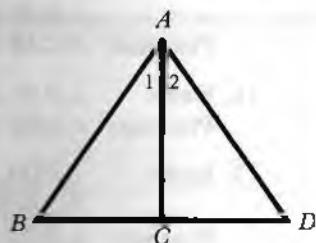
p : \overrightarrow{AC} biseca a $\angle BAD$.

Por tanto,
se concluye que q : $\angle 1 \cong \angle 2$.



Esta demostración se muestra a continuación con un diseño de dos columnas.

Dado: \overrightarrow{AC} biseca a $\angle BAD$.
Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.



Prueba

Afirmaciones	Razones
1. \overrightarrow{AC} biseca a $\angle BAD$.	1. Dado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$.	2. Definición de la bisectriz del ángulo.

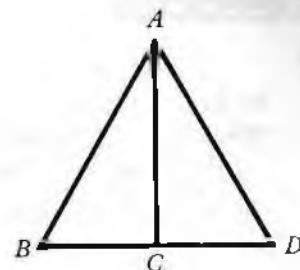
Las pruebas siguientes muestran el empleo de las definiciones del punto medio, la bisectriz y las rectas perpendiculares. Estúdiese cada prueba.

Ejemplo 1

Dado: C es el punto medio de \overline{BD} .
 Pruébese: $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.

Prueba

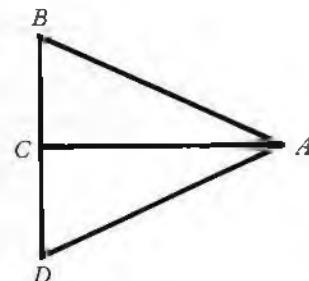
Afirmaciones	Razones
1. C es el punto medio de \overline{BD} .	1. Dado.
2. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.	2. Definición del punto medio.

**Ejemplo 2**

Dado: \overline{AC} es la bisectriz perpendicular de \overline{BD} .
 Pruébese: C es el punto medio de \overline{BD} .

Prueba

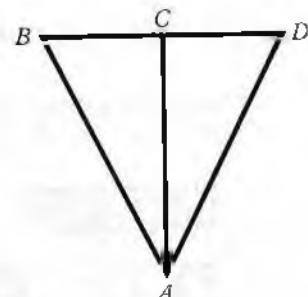
Afirmaciones	Razones
1. \overline{AC} es la bisectriz perpendicular de \overline{BD} .	1. Dado.
2. C es el punto medio de \overline{BD} .	2. Definición de la bisectriz perpendicular.

**Ejemplo 3**

Dado: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
 Pruébese: $\angle ACD \cong \angle ACB$.

Prueba

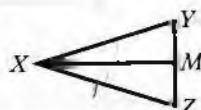
Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.	1. Dado.
2. $\angle ACD \cong \angle ACB$.	2. Definición de las rectas perpendiculares.



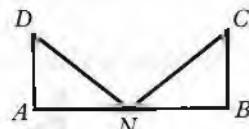
EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 8, empléese alguna de las definiciones presentadas en esta sección para sacar una conclusión de los datos dados.

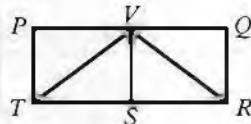
- 1. Dado:** \overline{XM} biseca a $\angle ZXY$.



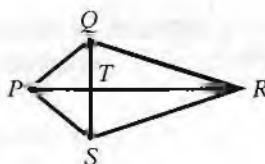
- 3. Dado:** N es el punto medio de \overline{AB} .



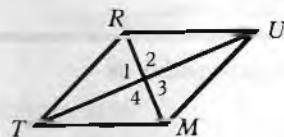
- 5. Dado:** \overline{SV} es la bisectriz perpendicular de \overline{PQ} .



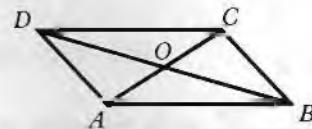
- 7. Dado:** T es el punto medio de \overline{QS} .



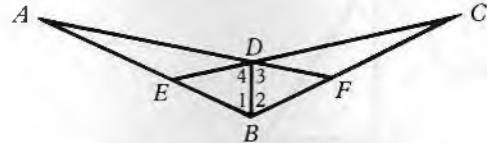
- 2. Dado:** $\overline{RM} \perp \overline{TU}$.



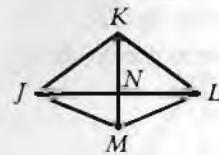
- 4. Dado:** \overline{AC} y \overline{BD} se bisecan entre sí.



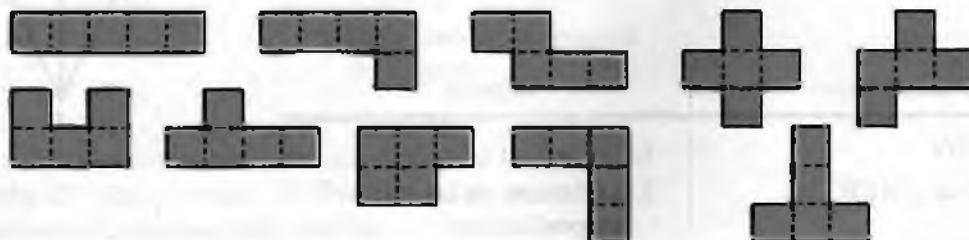
- 6. Dado:** \overline{DB} biseca a $\angle EDF$.



- 8. Dado:** \overline{KM} es la bisectriz perpendicular de \overline{JL} .

**ACTIVIDADES**

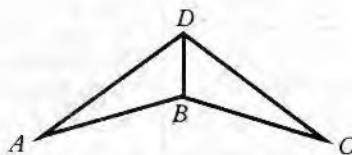
Cópiense en grande estos diez «pentaminós» y júntense para formar un par de cuadrados de idéntica forma y tamaño.



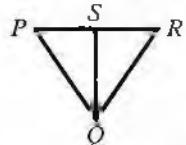
B.

Formúlese una demostración a dos columnas para los ejercicios 9 a 14.

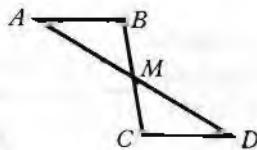
- 9. Dado:** \overline{BD} biseca a $\angle ADC$.
Pruébese: $\angle ADB \cong \angle BDC$.



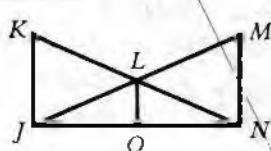
- 10. Dado:** \overline{QS} es la bisectriz perpendicular de \overline{PR} .
Pruébese: S es el punto medio de \overline{PR} .



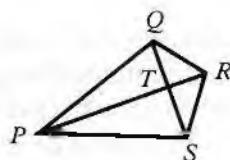
- 11. Dado:** M es el punto medio de \overline{AD} .
Pruébese: $\overline{AM} \cong \overline{MD}$.



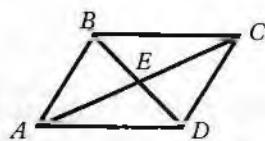
- 13. Dado:** \overline{LQ} es la bisectriz perpendicular de \overline{JN} .
Pruébese: $\overline{JQ} \cong \overline{QN}$.



- 12. Dado:** $\overline{PR} \perp \overline{QS}$.
Pruébese: $\angle PTQ \cong \angle PTS$.



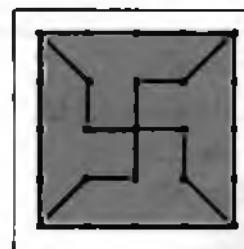
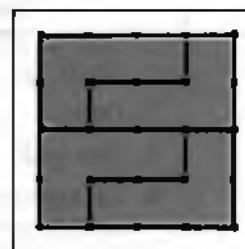
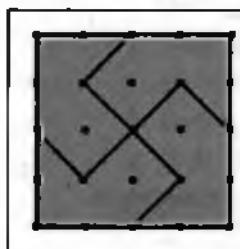
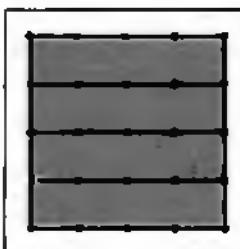
- 14. Dado:** \overline{BD} biseca a \overline{AC} .
Pruébese: $\overline{AE} \cong \overline{EC}$.



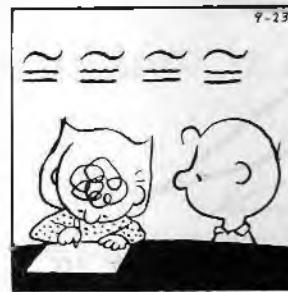
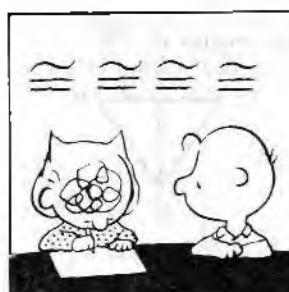
SOLUCION DE PROBLEMAS

En estos dibujos se muestran cuatro formas diferentes de dividir un cuadro en cuatro partes idénticas.

¿Qué otras formas se pueden encontrar? Muéstrense por lo menos otras cinco en un papel punteado.



3.5 Pruebas: uso de postulados y definiciones



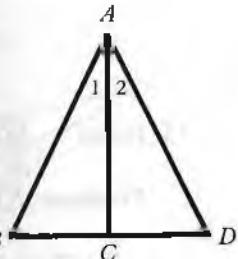
© 1980 United Feature Syndicate, Inc.

Las definiciones de bisectriz del ángulo, bisectriz del segmento, bisectriz perpendicular y punto medio pueden usarse, junto con los postulados sobre la congruencia, para probar que dos triángulos son congruentes.

Para deducir la prueba de que dos triángulos son congruentes, suele ser útil analizar la situación empezando por lo que se va a probar y hacer el desarrollo hacia atrás. Estúdiese el siguiente ejemplo.

Problema:

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$
 \overline{AC} biseca $\angle BAD$. B



Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

Análisis (cómo se podría deducir la forma de resolver el problema): «Se quiere probar que $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. Podría hacerse por medio de los postulados de la congruencia LLL, LAL o ALA, pero ¿cuál de ellos? Por la información dada se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$. Si pudiera probarse que $\angle 1 \cong \angle 2$ y que $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, podría emplearse el postulado LAL. Pero \overline{AC} biseca a $\angle BAD$, así que $\angle 1 \cong \angle 2$. Además, un segmento es congruente consigo mismo. Sí, puede hacerse.»

Prueba

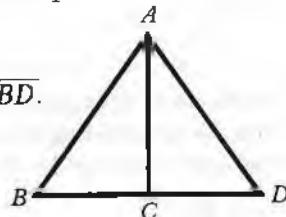
Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.	1. Dado.
2. \overline{AC} biseca a $\angle BAD$.	2. Dado.
3. $\angle 1 \cong \angle 2$.	3. ¿Por qué?
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$.	4. Un segmento es congruente consigo mismo.
5. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.	5. Postulado de la congruencia LAL.

Estúdiese el análisis de las pruebas siguientes y complétense.

Ejemplo 1 Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.

C es el punto medio de \overline{BD} .

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.



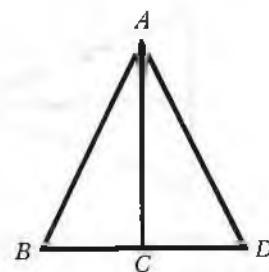
Análisis: «¿Cuál de los postulados de congruencia se puede utilizar para esto, ALA, LAL o LLL? Se puede probar que $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, si se puede demostrar que tres lados de $\triangle ABC$ son respectivamente congruentes con los tres lados de $\triangle ADC$. Por los datos, se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, porque un segmento es congruente consigo mismo. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ si C es el punto medio de \overline{BD} . Al serlo (por los datos), ya se puede formular la prueba.»

Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.	1. Dado.
2. C es el punto medio de \overline{BD} .	2. Dado.
3. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.	3. ¿Por qué?
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$.	4. Un segmento es congruente consigo mismo.
5. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.	5. ¿Por qué?

Ejemplo 2 Dado: \overline{AC} es la bisectriz perpendicular de \overline{BD} .

Pruébese: $\triangle ACB \cong \triangle ACD$



Análisis: «Se puede probar que $\triangle ACB \cong \triangle ACD$ con uno de los postulados de la congruencia. Se intenta con el LAL. Se sabe que $\overline{AC} \cong \overline{AC}$. Como \overline{AC} es la bisectriz perpendicular de \overline{BD} , $\angle ACB \cong \angle ACD$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. Ahora ya se puede formular la prueba.»

Prueba

Afirmaciones	Razones
1. \overline{AC} biseca a \overline{BD} .	1. Dado.
2. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.	2. Definición de la bisectriz de un segmento.
3. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.	3. Dado.
4. $\angle ACB \cong \angle ACD$.	4. ¿Por qué?
5. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$.	5. ¿Por qué?
6. $\triangle ACB \cong \triangle ACD$.	6. Postulado de la congruencia LAL.

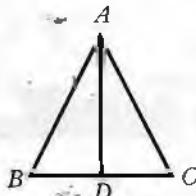
EJERCICIOS

A.

En los ejercicios 1 a 4, analícese la situación e indíquese cuál de los tres postulados sobre la congruencia (LLL, LAL oALA) podría usarse para probar que los triángulos son congruentes.

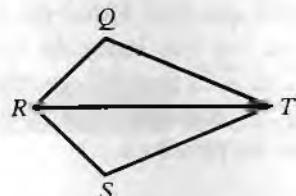
- 1. Dado:** \overline{AD} biseca a \overline{BC}
 $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.



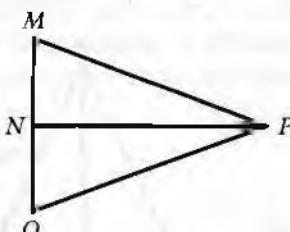
- 2. Dado:** \overline{RT} biseca a $\angle QRS$
 \overline{RT} biseca $\angle QTS$.

Pruébese: $\triangle RTQ \cong \triangle RTS$.



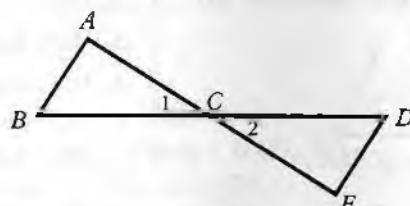
- 3. Dado:** $\overline{NP} \perp \overline{MO}$
 \overline{NP} biseca $\angle MPO$.

Pruébese: $\triangle MNP \cong \triangle ONP$.



- 4. Dado:** \overline{AE} y \overline{BD} se bisecan
 $\angle 1 \cong \angle 2$.

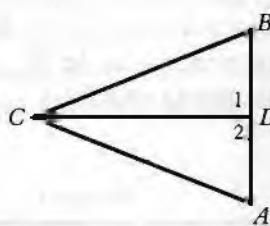
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.



En los ejercicios 5 a 7, formúlense las razones o proposiciones que faltan.

- 5. Dado:** $\overline{AD} \cong \overline{DB}$
 $\overline{AB} \perp \overline{DC}$.

Pruébese: $\triangle DAC \cong \triangle DBC$.



Afirmaciones

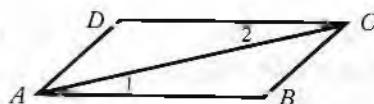
Razones

1. $\overline{AD} \cong \overline{DB}$.
2. $\overline{AB} \perp \overline{DC}$.
3. $\angle 1 \cong \angle 2$.
4. ? $\stackrel{\circ}{\angle} \stackrel{\circ}{\cong} \stackrel{\circ}{\angle}$
5. $\triangle DAC \cong \triangle DBC$.

1. Dado.
2. ? "
3. ? ~~Da una razón~~
4. Un segmento es congruente consigo mismo.
5. ?

- 6. Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
 $\angle 1 \cong \angle 2.$

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle CDA.$



Afirmaciones

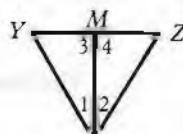
Razones

1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}.$
2. $\angle 1 \cong \angle 2.$
3. ?
4. $\triangle ABC \cong \triangle CDA.$

1. Dado.
2. Dado.
3. Un segmento es congruente consigo mismo.
4. ?

- 7. Dado:** $\overline{XM} \perp \overline{YZ}$
 \overline{XM} biseca a $\angle YXZ.$

Pruébese: $\triangle XYM \cong \triangle XZM.$



Afirmaciones

Razones

1. $\overline{XM} \perp \overline{YZ}.$
2. ?
3. \overline{XM} biseca a $\angle YXZ.$
4. $\angle 1 \cong \angle 2.$
5. $\overline{XM} \cong \overline{XM}.$
6. $\triangle XYM \cong \triangle XZM.$

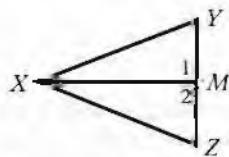
1. Dado.
2. Definición de las rectas perpendiculares.
3. ?
4. ?
5. ?
6. ?

B.

En los ejercicios 8 a 17 pruébese que los triángulos son congruentes.

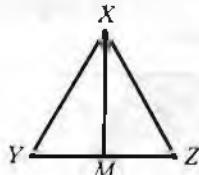
- 8. Dado:** \overline{XM} biseca a $\angle YXZ$
 $\angle 1 \cong \angle 2.$

Pruébese: $\triangle XMY \cong \triangle XMZ.$



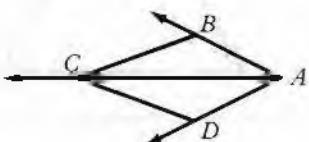
- 9. Dado:** $\overline{XM} \perp \overline{YZ}$
 $\overline{YM} \cong \overline{MZ}.$

Pruébese: $\triangle XYM \cong \triangle XZM.$



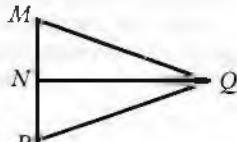
- 10. Dado:** \overline{AC} es la bisectriz de $\angle BAD$
 $\overline{AB} \cong \overline{AD}.$

Pruébese: $\triangle BAC \cong \triangle DAC.$

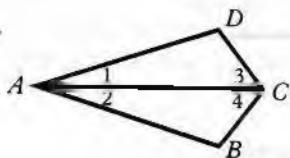


- 11. Dado:** $\overline{QM} \cong \overline{QP}$
 \overline{QN} biseca a $\overline{MP}.$

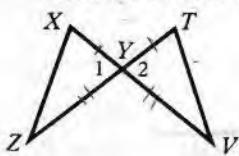
Pruébese: $\triangle QNM \cong \triangle QNP.$



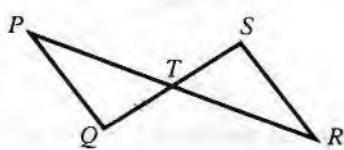
12. Dado: \overline{AC} biseca a $\angle DAB$
 \overline{AC} biseca a $\angle DCB$.
 Pruébese: $\triangle ACD \cong \triangle ACB$.



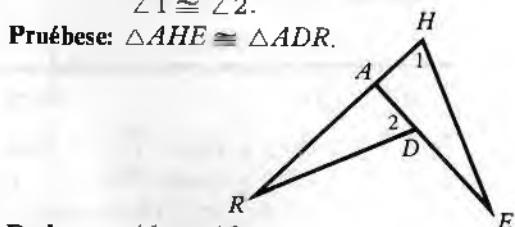
14. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
 $XY \cong TY$
 $ZY \cong VY$.
 Pruébese: $\triangle XYZ \cong \triangle TYV$.



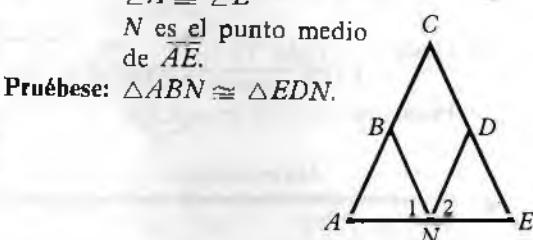
16. Dado: $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$
 \overline{PR} biseca a \overline{SQ}
 \overline{SQ} biseca a \overline{PR} .
 Pruébese: $\triangle PQT \cong \triangle RST$.



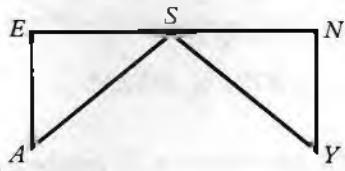
13. Dado: $\overline{HR} \perp \overline{AE}$
 $\overline{AH} \cong \overline{AD}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$.
 Pruébese: $\triangle AHE \cong \triangle ADR$.



15. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle A \cong \angle E$
 N es el punto medio de \overline{AE} .
 Pruébese: $\triangle ABN \cong \triangle EDN$.

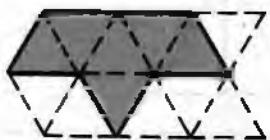


17. Dado: $\angle E \cong \angle N$
 S biseca a \overline{EN}
 $\overline{EA} \cong \overline{NY}$.
 Pruébese: $\triangle EAS \cong \triangle NYS$.



ACTIVIDADES

Un «hexadiamante» es un polígono formado con seis triángulos equiláteros.

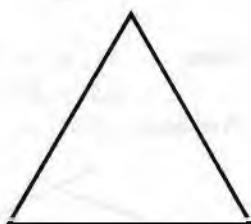


Este es un «hexadiamante»



Este no es un «hexadiamante»

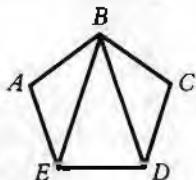
Dibújense y córtense seis copias de este triángulo equilátero en un trozo de cartulina. Experímentese con estos seis triángulos para descubrir doce «hexadiamantes» de formas diferentes. Dibújense los doce polígonos.



C.

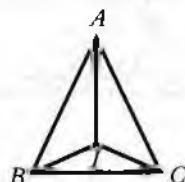
- 18. Dado:** $ABCDE$ es un pentágono regular.

Pruébese: $\triangle AEB \cong \triangle CDB$.



- 20. Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
 \overline{AI} biseca a $\angle BAC$.

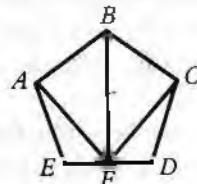
Pruébese: $\triangle AIB \cong \triangle AIC$.



- 22. El poste \overline{YZ} de una tienda de campaña es perpendicular al suelo.
 ¿Qué otras condiciones han de cumplirse para asegurar que los lados \overline{YW} e \overline{YX} son de igual longitud?**

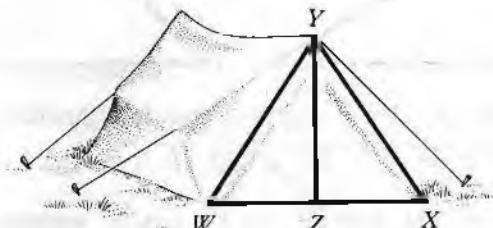
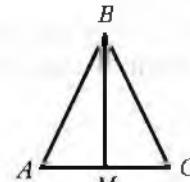
- 19. Dado:** \overline{BF} biseca a $\angle ABC$
 $ABCDE$ es un pentágono regular.

Pruébese: $\triangle ABF \cong \triangle CBF$.



- 21. Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
 M es el punto medio de \overline{AC} .

Pruébese: $\angle A \cong \angle C$.

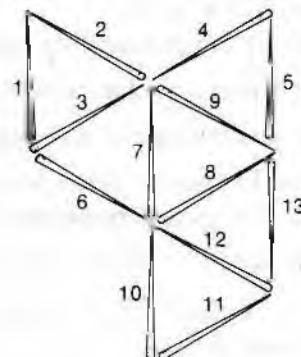


SOLUCION DE PROBLEMAS

Este dibujo muestra 13 palillos dispuestos para formar seis triángulos. ¿Qué tres palillos pueden quitarse para que queden tres triángulos?

Invéntese un problema con palillos similar a éste.

3.6

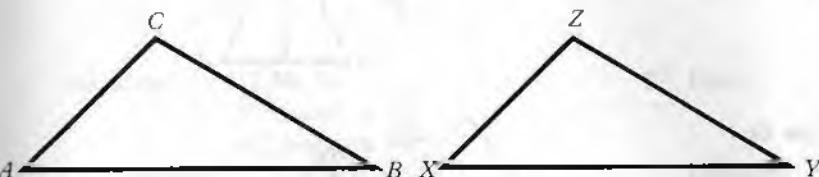
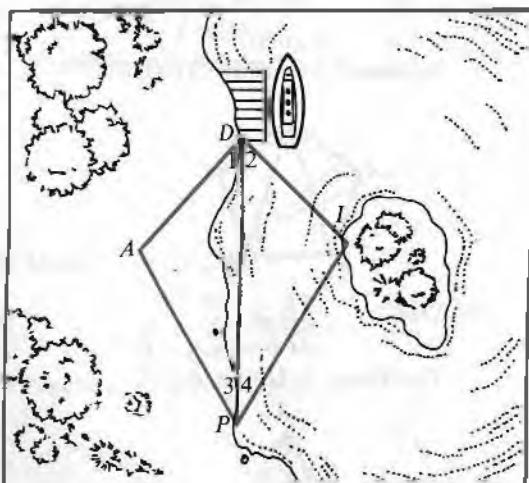


3.6 Prueba de la congruencia de ángulos y segmentos

Un ingenioso estudiante de geometría (que era un buen nadador, pero no demasiado bueno), usó este método para encontrar la distancia entre el muelle y la isla:

Elijase un punto P en la orilla del río. Constrúyase $\angle 1 \cong \angle 2$ y hágase también que $\angle 3 \cong \angle 4$. Localícese visualmente el punto de intersección A de los lados de los ángulos 1 y 3. ¿Por qué la distancia del muelle a la isla (DA) es la misma que DP ?

Para responder a esta pregunta, recuérdese la definición de triángulos congruentes (Sec. 3.1).



$\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ significa que lo siguiente es verdadero:
 $\overline{AB} \cong \overline{XY}$ $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$ $\angle A \cong \angle X$ $\angle B \cong \angle Y$ $\angle C \cong \angle Z$.

Con frecuencia se prueba que un par de segmentos o ángulos son congruentes probando antes que un par de triángulos son congruentes. Luego se puede usar la definición de triángulos congruentes para concluir que las partes de los triángulos que se corresponden son congruentes.

En el problema del muelle y la isla, $\triangle DAP \cong \triangle DIP$ por el postulado de la congruencia *ALA*. Dado que \overline{DA} y \overline{DI} son partes correspondientes de estos triángulos, $\overline{DA} \cong \overline{DI}$.

Para probar la congruencia de ángulos o segmentos, a veces se puede:

1. seleccionar triángulos que contengan estos segmentos (o ángulos);
2. probar que los triángulos son congruentes;
3. concluir que las partes correspondientes deseadas de estos triángulos son congruentes.

Al formular pruebas, se da la siguiente razón para el tercer paso.

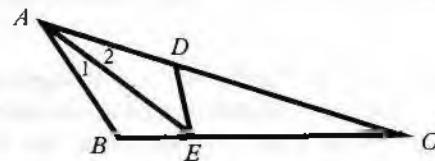
Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

Abreviado, esto es:

Partes correspondientes de $\triangle \cong$ son \cong , o **PCTCC**.

Este procedimiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 1 Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$.
 Pruébese: $\overline{BE} \cong \overline{DE}$.



Ánalisis: «Se puede probar que $\overline{BE} \cong \overline{DE}$ si es posible encontrar un par de triángulos congruentes que contengan estos segmentos. $\triangle ABE$ y $\triangle ADE$ parecen contenerlos. ¿Qué postulado de congruencia se puede usar para probar que son congruentes? Inténtese con LAL. Como se sabe que $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y que $\overline{AE} \cong \overline{AE}$, puede probarse que los triángulos son congruentes y concluir que $\overline{BE} \cong \overline{DE}$.»

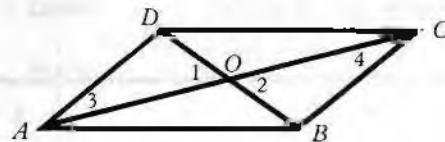
Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.	1. Dado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$.	2. Dado.
3. $\overline{AE} \cong \overline{AE}$.	3. ¿Por qué?
4. $\triangle ABE \cong \triangle ADE$.	4. Postulado LAL.
5. $\overline{BE} \cong \overline{DE}$.	5. Partes correspondientes de $\triangle \cong$ son \cong .

Ejemplo 2 Dado: \overline{AC} y \overline{BD} se bisecan

$$\angle 1 \cong \angle 2.$$

Pruébese: $\angle 3 \cong \angle 4$.



Ánalisis: « $\angle 3$ y $\angle 4$ están en $\triangle AOD$ y $\triangle COB$, respectivamente, y en $\triangle ADC$ y $\triangle ABC$, respectivamente. Por la información dada, parece que se debe probar que $\triangle AOD$ es congruente con $\triangle COB$. (¿Por qué?) Entonces, puede concluirse que $\angle 3$ es congruente con $\angle 4$.»

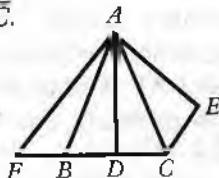
Prueba

Afirmaciones	Razones
1. \overline{AC} y \overline{BD} se bisecan.	1. Dado.
2. $\overline{AO} \cong \overline{CO}$; $\overline{OB} \cong \overline{OD}$.	2. Definición de la bisectriz del segmento.
3. $\angle 1 \cong \angle 2$.	3. Dado.
4. $\triangle AOD \cong \triangle COB$.	4. Postulado LAL.
5. $\angle 3 \cong \angle 4$.	5. PCTCC.

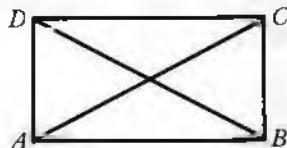
EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 5, indíquese qué triángulos puede demostrarse que son congruentes para establecer el hecho indicado. (En algunos casos puede haber más de un par de triángulos correctos.)

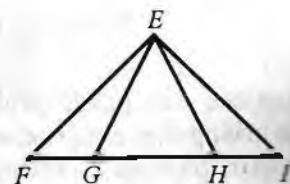
1. Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.



4. Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



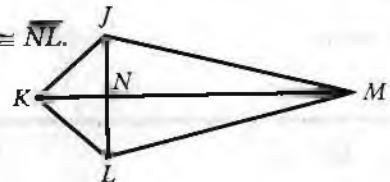
2. Pruébese: $\angle F \cong \angle I$.



(Ejercicios 2,3)

3. Pruébese: $\overline{EG} \cong \overline{EH}$.

5. Pruébese: $\overline{JN} \cong \overline{NL}$.



En los ejercicios 6 a 8, formúlense las proposiciones y razones que faltan.

6. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 3 \cong \angle 4$.

Pruébese: $\angle A \cong \angle C$.

Afirmaciones

Razones

1. $\angle 1 \cong \angle 2$.

1. ?

2. ?

2. Dado.

3. $\overline{DB} \cong \overline{DB}$.

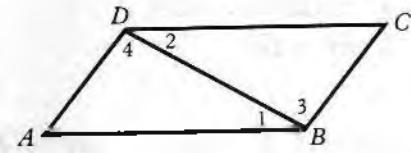
3. Un segmento es congruente consigo mismo.

4. $\triangle ADB \cong \triangle CBD$.

4. ?

5. $\angle A \cong \angle C$.

5. ?



7. Dado: $\overline{MN} \cong \overline{MP}$
 $\overline{NO} \cong \overline{OP}$.

Pruébese: \overline{MO} biseca $\angle NMP$.

Afirmaciones

Razones

1. $\overline{MN} \cong \overline{MP}; \overline{NO} \cong \overline{OP}$.

1. ?

2. ?

2. ?

3. $\triangle MNO \cong \triangle MPO$.

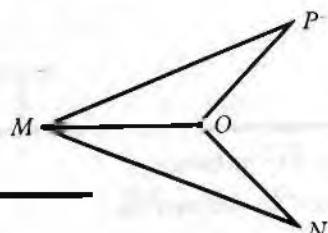
3. ?

4. ?

4. PCTCC.

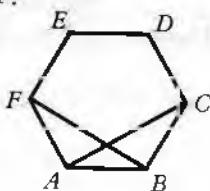
5. \overline{MO} biseca a $\angle NMP$.

5. ?



8. Dado: $ABCDEF$ es un hexágono regular.

Pruébese: $\overline{AC} \cong \overline{BF}$.



Afirmaciones

1. $ABCDEF$ es un hexágono regular.
2. $\overline{AF} \cong \overline{BC}$
3. ?
4. $\angle FAB \cong \angle ABC$.
5. $\triangle FAB \cong \triangle CBA$.
6. ?

Razones

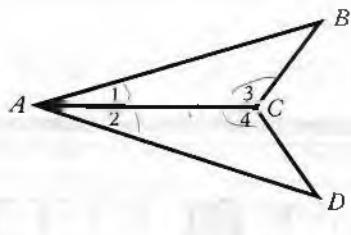
1. Dado.
2. ? $\triangle ABC$ son hexágonos regulares
3. Un segmento es congruente consigo mismo.
4. ? hexágonos
5. ?
6. PCTCC.

B.

En los ejercicios restantes, formúlense pruebas a dos columnas.

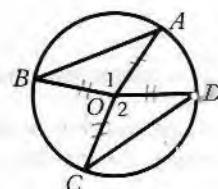
9. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 3 \cong \angle 4$.

Pruébese: $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.



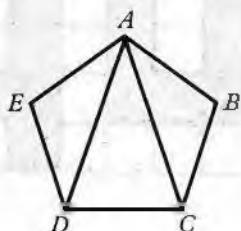
10. Dado: $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ son congruentes
 $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



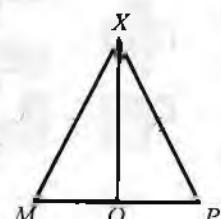
11. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular.

Pruébese: $\triangle ADC$ es isósceles.



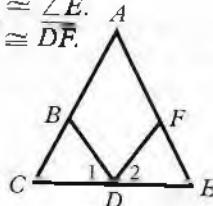
12. Dado: XO es la bisectriz perpendicular de \overline{MP} .

Pruébese: $\triangle XMP$ es isósceles.

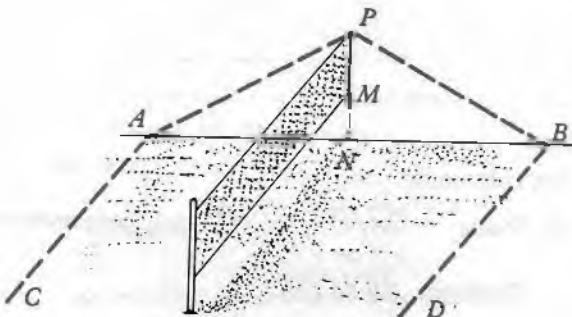


- 13. Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$
 D biseca a \overline{CE}
 $\angle C \cong \angle E$.

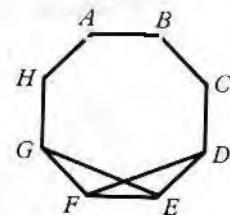
Pruébese: $\overline{BD} \cong \overline{DF}$.



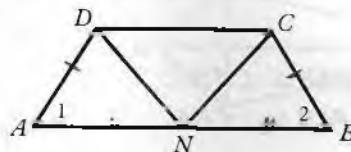
- 15.** En un gimnasio, el extremo de una red de voleibol está sujeto a la pared con dos argollas en los puntos P y M . Cada punto del plano de la red está a una distancia igual de las dos líneas de base \overline{AC} y \overline{BD} . ¿Por qué es \overline{PM} perpendicular a \overline{AB} ?



- 14. Dado:** $ABCDEFGH$ es un octágono regular.
Pruébese: $\overline{DF} \cong \overline{GE}$



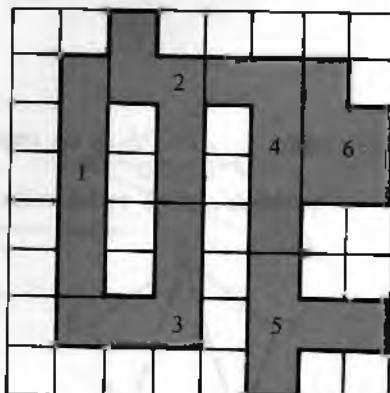
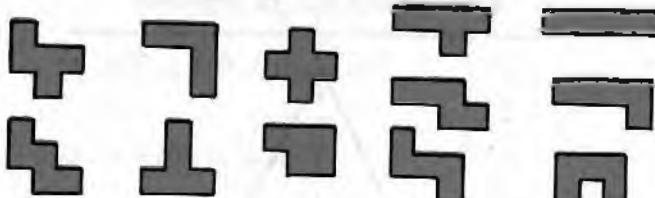
- 16. Dado:** $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$
 N es el punto medio de \overline{AB} .
Pruébese: $\triangle CND$ es isósceles.



ACTIVIDADES

Háganse estos 12 «pentaminós» con cuadrados del tamaño de los de un tablero de ajedrez.

En esta figura, se dispusieron seis «pentaminós» de forma que ninguna de las piezas restantes se puede adaptar al tablero sin solape. Inténtese esto mismo con diferentes juegos de seis piezas.



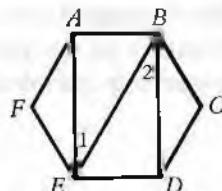
C.

En los ejercicios 17 a 20, puede ser necesario probar que hay más de un par de triángulos congruentes.

- 17. Dado:** $ABCDEF$ es un hexágono regular.

Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.

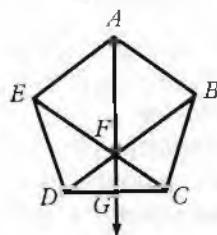
(Sugerencia: Pruébese primero que $\overline{AE} \cong \overline{BD}$.)



- 19. Dado:** $ABCDE$ es un pentágono regular

\overline{AG} biseca a $\angle EAB$ y es la bisectriz perpendicular de \overline{DC} .

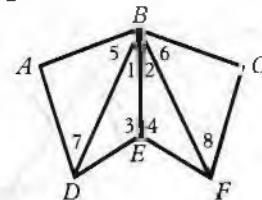
Pruébese: $\triangle BCF \cong \triangle EDF$.



- 18. Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$

$\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$.

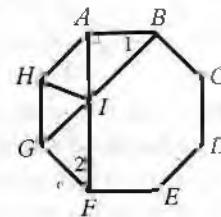
Pruébese: $\angle A \cong \angle C$.



- 20. Dado:** $ABCDEFGH$ es un octágono regular $\overline{AF} \perp \overline{AB}$; $\overline{BG} \perp \overline{GF}$

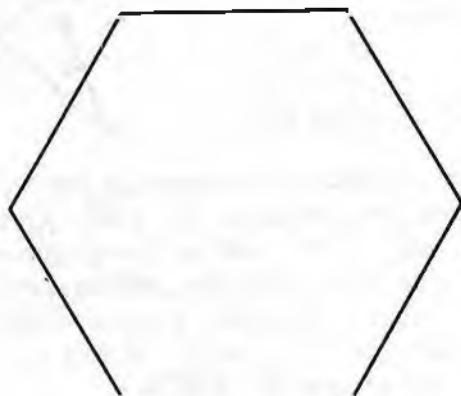
$\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\triangle AHI \cong \triangle GHI$.

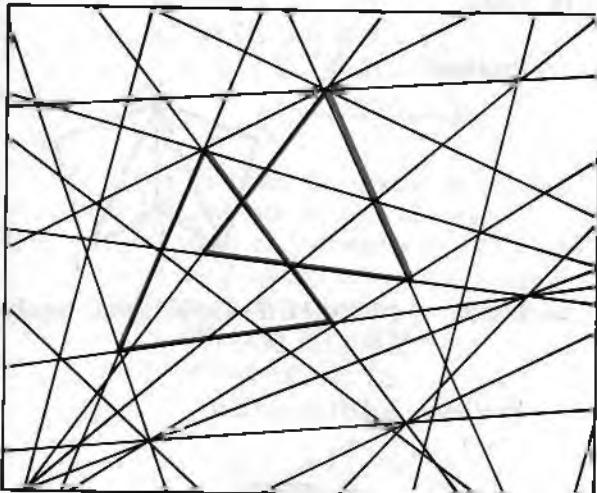


SOLUCION DE PROBLEMAS

Muéstrese cómo cortar un hexágono regular en 18 cometas congruentes. Una cometa es un cuadrilátero con exactamente dos pares de lados adyacentes congruentes. (Sugerencia: Trácense todas las diagonales del hexágono y después trácense otros seis segmentos cortos colocados estratégicamente.)



3.7 Pruebas: Solape de triángulos



Un «rompecabezas» muy popular consiste en hallar un par de triángulos equiláteros congruentes en esta figura y en dibujarlos en un papel aparte. Resuélvase este problema.

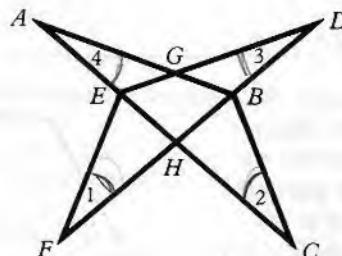
En las pruebas, sucede con frecuencia que varios triángulos se solapan, lo cual hace difícil identificar a primera vista los triángulos que podrían ser más útiles para probar la congruencia. En ocasiones, es útil separar los triángulos mentalmente o dibujándolos, para ayudar a analizar la prueba, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1

Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

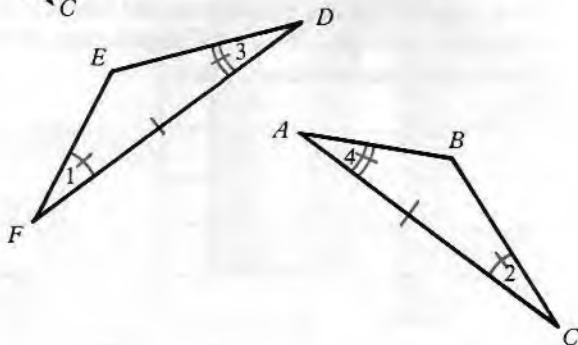
$\angle 3 \cong \angle 4$.

Pruébese: $\overline{EF} \cong \overline{BC}$.



Análisis: «Es necesario escoger un par de triángulos que contengan \overline{EF} y \overline{BC} . ¿Qué sucede con $\triangle EHF$ y $\triangle BCH$? No se puede probar que son congruentes. Inténtese con $\triangle EFD$ y $\triangle BCA$. Estos dos triángulos son congruentes por el postulado ALA, y se puede concluir que $\overline{EF} \cong \overline{BC}$.»

En los ejercicios se pedirá completar esta prueba.



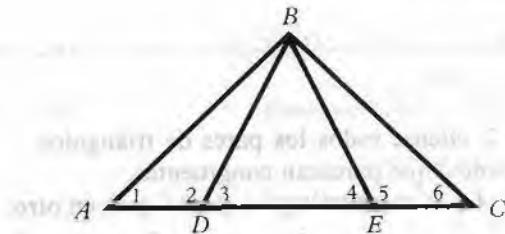
Ejemplo 2

Dado: $\angle 1 \cong \angle 6$.

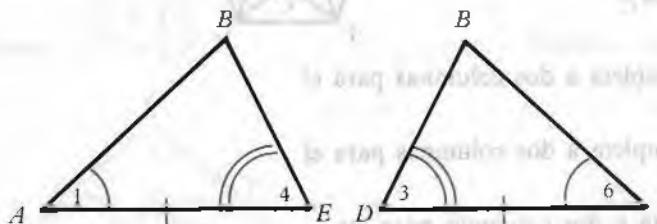
$\angle 3 \cong \angle 4$.

$\overline{AE} \cong \overline{CD}$.

Pruébese: $\angle ABE \cong \angle CBD$.



Análisis: «Los triángulos solapados $\triangle ABE$ y $\triangle CBD$ contienen dos pares de ángulos congruentes. Los lados incluidos también son congruentes. Se puede usar el postulado ALA para probarlo.»



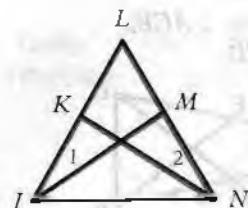
A veces es útil emplear lápices de colores para marcar los triángulos solapados. Estúdiese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Dado: $\triangle LKN$ es isósceles con $\overline{JL} \cong \overline{LN}$

$\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\overline{LK} \cong \overline{LM}$.



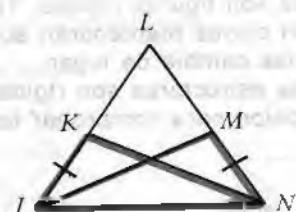
Análisis: «Se puede probar que $\overline{LK} \cong \overline{LM}$ si estos segmentos son partes correspondientes de los triángulos congruentes. Se intenta con $\triangle LKN$ y $\triangle LMN$. Se sabe que $\angle 1 \cong \angle 2$ y que $\angle JLN$ es congruente consigo mismo. Se sabe que $\triangle JLN$ es isósceles. Así, los triángulos son congruentes por el postulado ALA. Puede probarse.»

Ejemplo 4

Dado: $\overline{JK} \cong \overline{NM}$

$\angle KJN \cong \angle MNJ$.

Pruébese: $\overline{KN} \cong \overline{MJ}$.



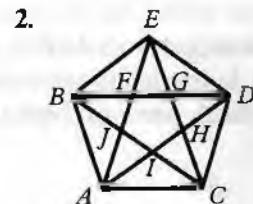
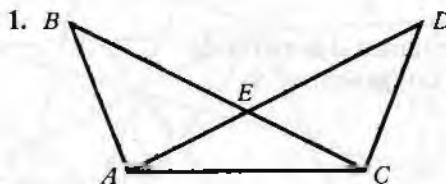
Análisis: « \overline{KN} y \overline{MJ} son partes correspondientes de $\triangle LKN$ y $\triangle LMN$, como en el ejemplo anterior. Pero la información dada es parte de $\triangle KJN$ y de $\triangle MNJ$. Como \overline{JN} es congruente consigo mismo, puede probarse por LAL que $\triangle KJN \cong \triangle MNJ$.»

EJERCICIOS

A.

En los ejercicios 1 y 2, citense todos los pares de triángulos (solapados y no solapados) que parezcan congruentes.

Empléense los vértices A y B en un triángulo, y los C y D , en otro.



B.

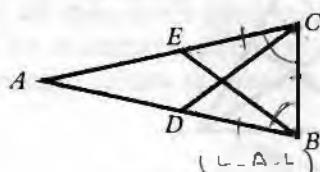
3. Formúlese una prueba completa a dos columnas para el ejemplo 1.

4. Formúlese una prueba completa a dos columnas para el ejemplo 3.

Formúlese una prueba completa a dos columnas para los ejercicios 5 a 10.

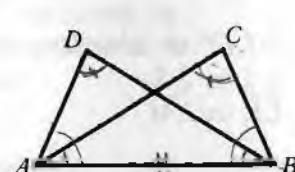
5. Dado: $\overline{BD} \cong \overline{CE}$
 $\angle ABC \cong \angle ACB$.

Pruébese: $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.



6. Dado: $\angle DAB \cong \angle CBA$
 $\angle DBA \cong \angle CAB$.

Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

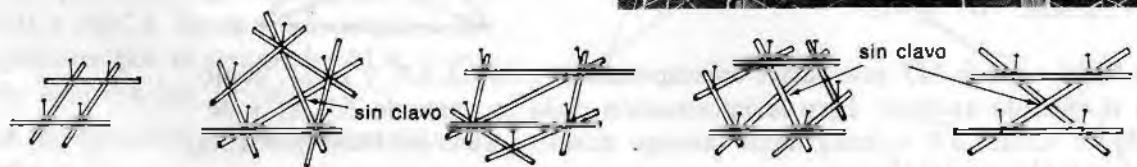


(A . L A)

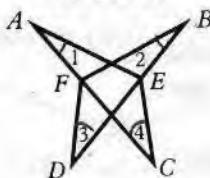
ACTIVIDADES

Los triángulos se utilizan mucho en los andamiajes porque son figuras rígidas. Tres varillas unidas con clavos mantendrán su forma aunque se las cambie de lugar.

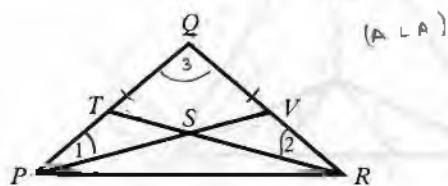
¿Cuáles de estas estructuras son rígidas? Constrúyanse modelos para comprobar las respuestas.



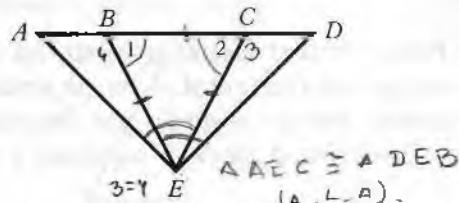
- 7. Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$
 $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
Pruébese: $\overline{AE} \cong \overline{BF}$. ($A \sim L \sim A$)



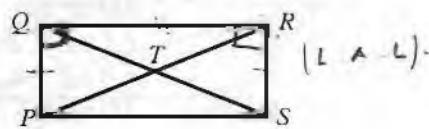
- 9. Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$
 $\overline{PV} \cong \overline{TR}$.
Pruébese: $\overline{QT} \cong \overline{QV}$. ($A \sim L \sim A$)



- 8. Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{BE} \cong \overline{EC}$
 $\angle AEC \cong \angle BED$.
Pruébese: $\overline{AE} \cong \overline{DE}$.

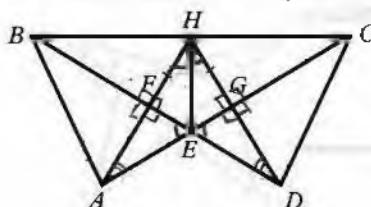


- 10. Dado:** $PQRS$ con $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\angle RQP$ y $\angle QRS$ son ángulos rectos.
Pruébese: $\overline{QS} \cong \overline{RP}$ (es decir, las diagonales son congruentes).

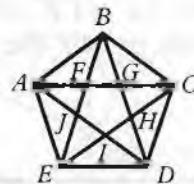


C.

- 11. Dado:** $\overline{HF} \perp \overline{BD}$, $\overline{HG} \perp \overline{AC}$
 $\overline{HF} \cong \overline{HG}$.
Pruébese: $\overline{AG} \cong \overline{DF}$. ($A \sim L \sim A$)

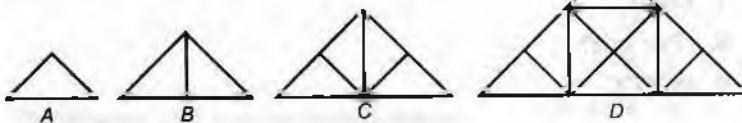


- 12. Dado:** $ABCDE$ es un pentágono regular.
Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{EB}$.

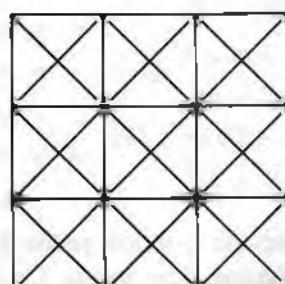


SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cuántos triángulos diferentes hay en esta figura que sean congruentes con los que tienen nombre de letra?



Si se observan otros tipos de triángulos en la figura, dibújense.



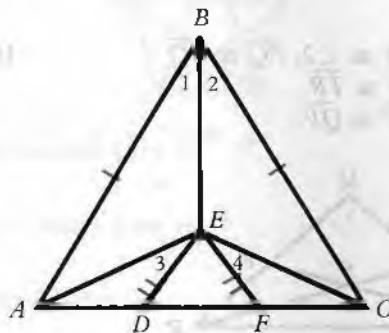
3.8 Pruebas: cadenas de congruencias

Para formular ciertas pruebas, ha de probarse antes la congruencia de un par de triángulos, a fin de obtener la información necesaria para probar que un segundo par de triángulos es congruente.

Estúdiese el ejemplo siguiente y expónganse los pasos omitidos.

Ejemplo Dado: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$
 $\overline{ED} \cong \overline{EF}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 3 \cong \angle 4$.

Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{CF}$.



Análisis: «Podría probarse que $\overline{AD} \cong \overline{CF}$ si fuera posible probar que $\triangle AED \cong \triangle CEF$, pero no hay suficiente información para eso. Si se supiera que $\overline{AE} \cong \overline{CE}$, podría probarse que los triángulos son congruentes por LAL. Pero \overline{AE} y \overline{CE} son partes correspondientes de $\triangle ABE$ y $\triangle CBE$, así que se puede probar que los triángulos son congruentes.»

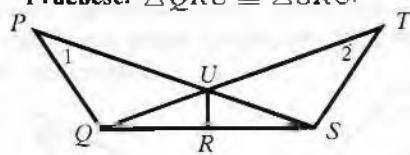
Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.	1. Dado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$.	2. ¿Por qué?
3. $\overline{BE} \cong \overline{BE}$.	3. ¿Por qué?
4. $\triangle ABE \cong \triangle CBE$.	4. Postulado LAL.
5. $\overline{AE} \cong \overline{CE}$.	5. ¿Por qué?
6. $\angle 3 \cong \angle 4$.	6. Dado.
7. $\overline{DE} \cong \overline{FE}$.	7. Dado.
8. $\triangle AED \cong \triangle CEF$.	8. ¿Por qué?
9. $\overline{AD} \cong \overline{CF}$.	9. PCTCC.

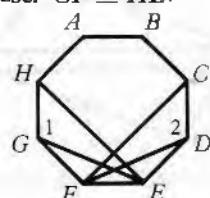
Obsérvese que los pasos 1 a 4 prueban la congruencia de un par de triángulos. Los pasos 5 a 8 emplean la primera congruencia para probar la de un segundo par de triángulos.

EJERCICIOS

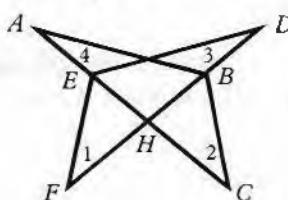
- 1. Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$, \overline{UR} biseca \overline{QS}
 $\overline{PU} \cong \overline{TU}$, $\angle PUQ \cong \angle TUS$



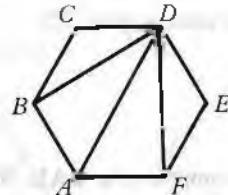
- 3. Dado:** $ABCDEFGH$ es un octágono regular.
Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.
 $\overline{GF} \cong \overline{HE}$.



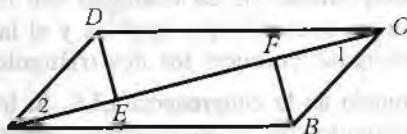
- 5. Dado:** $\overline{EH} \cong \overline{BH}$
 $\overline{AH} \cong \overline{DH}$
 $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
 $\angle 1 \cong \angle 2.$



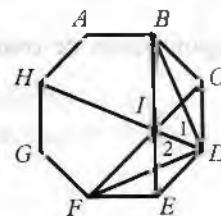
- 2. Dado:** $ABCDEF$ es un hexágono regular.
Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle AFD$.



- 4. Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle AED \cong \angle CFB$
 $\overline{AE} \cong \overline{CF}$



- 6. Dado:** $ABCDEFGH$ es un octágono regular. \overline{DH} biseca a $\angle CDE$.
Pruébese: $\triangle BCI \cong \triangle FEI$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

En el diseño que se muestra a continuación, ¿cuántas veces puede leerse la palabra «Geometría»? Se indican tres formas.

(Sugerencia: ¿De cuántas formas pueden leerse palabras de dos, tres y cuatro letras en un diseño similar? Búsquese un esquema.)



Capítulo 3 Conceptos importantes

Términos

Triángulos congruentes (pág. 85)

Postulados

Postulado de la congruencia LAL. Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Postulado de la congruencia ALA. Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

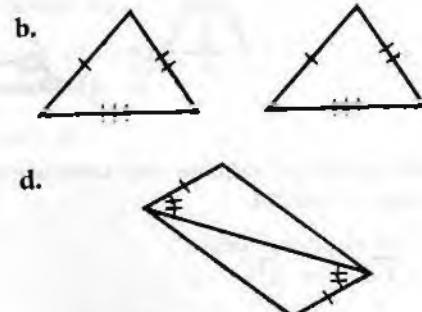
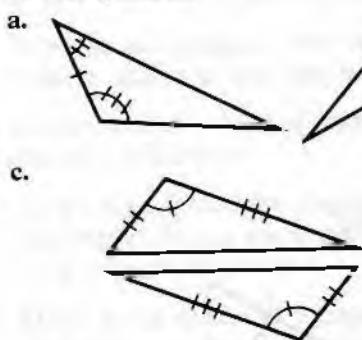
Postulado de la congruencia LLL. Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Proposiciones

Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

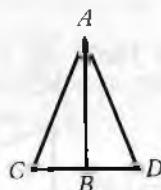
Capítulo 3 Resumen

- Dado $\triangle BAC \cong \triangle QRP$, identifiquense los lados y ángulos correspondientes.
- En los siguientes casos, digase qué postulado sobre la congruencia puede emplearse para demostrar que los triángulos son congruentes.

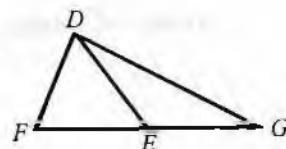


- En cada uno de los casos siguientes, saquese una conclusión basada en los datos proporcionados.

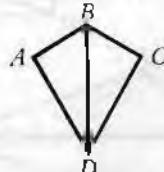
a. Dado: \overline{AB} es perpendicular a \overline{CD} .



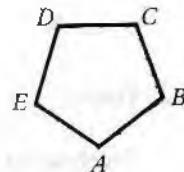
b. Dado: E es el punto medio de \overline{FG} .



c. Dado: \overline{BD} biseca tanto $\angle B$ como a $\angle D$.

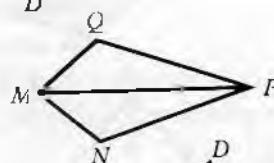


d. Dado: ABCDE es un pentágono regular.



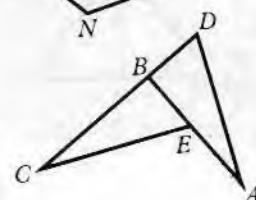
4. Dado: \overline{MP} biseca a $\angle QMN$
 \overline{MP} biseca a $\angle QPN$.

Pruébese: a. $\triangle MQP \cong \triangle MNP$.
b. $\angle Q \cong \angle N$.



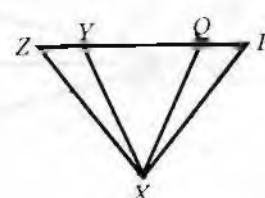
5. Dado: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$
 $\overline{BE} \cong \overline{BD}$
 $\overline{BC} \cong \overline{BA}$.

Pruébese: $\overline{CE} \cong \overline{AD}$.



6. Dado: $\overline{ZQ} \cong \overline{PY}$
 $\angle Z \cong \angle P$
 $\overline{ZX} \cong \overline{PX}$.

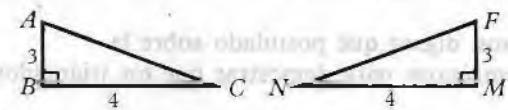
Pruébese: $\overline{XY} \cong \overline{XQ}$.



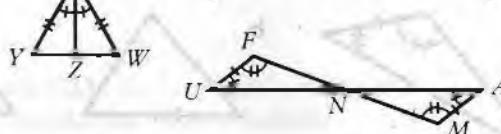
Capítulo 3 Examen

1. Utilicense las figuras para completar las proposiciones.

a. $\triangle ABC \cong \underline{\hspace{1cm}}$



b. $\triangle XYZ \cong \underline{\hspace{1cm}}$



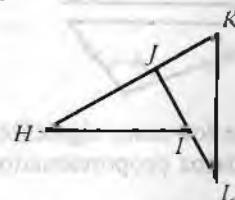
c. $\triangle FUN \cong \underline{\hspace{1cm}}$

2. En los casos siguientes, saquese una conclusión basada en los datos proporcionados.

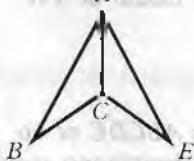
a. Dado: W es el punto medio de \overline{YZ} y de \overline{XV} .



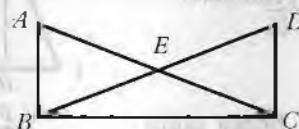
b. Dado: $\overline{JI} \perp \overline{HK}$.



c. Dado: \overline{AC} biseca a $\angle BAE$.

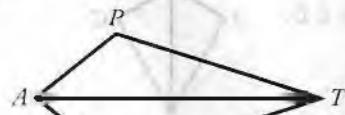


d. Dado: \overline{AC} biseca a \overline{BD}
 \overline{BD} biseca a \overline{AC} .



3. Dado: $\overline{PA} \cong \overline{SA}$
 $\overline{PT} \cong \overline{TS}$.

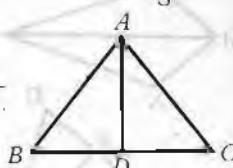
Pruébese: a. $\triangle PAT \cong \triangle SAT$,
b. $\angle P \cong \angle S$.



4. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

D es el punto medio de \overline{BC} .

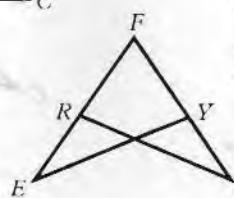
Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.



5. Dado: $\overline{FE} \cong \overline{FD}$

$\angle E \cong \angle D$.

Pruébese: $\overline{EY} \cong \overline{DR}$.



Resumen global (Caps. 1 a 3)

- Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.
 - Los postulados son proposiciones que deben demostrarse.
 - Un rayo puede contener una recta.
 - Los teoremas se prueban por razonamiento deductivo.
- Dibújese un triángulo ABC de manera que $\angle B$ sea obtuso.
Trácese una recta que pase por B y sea perpendicular a \overline{AC} .

En los ejercicios 3 y 4, clasifíquense los razonamientos en inductivos o deductivos.

- $\angle 1$ y $\angle 2$ se denominan ángulos rectos.
Los ángulos rectos son congruentes.
 $\angle 1$ y $\angle 2$ son congruentes.
- $ABCD$ es un cuadrado y tiene diagonales perpendiculares.
 $EFGH$ es un cuadrado y tiene diagonales perpendiculares.
Todos los cuadrados tienen diagonales perpendiculares.

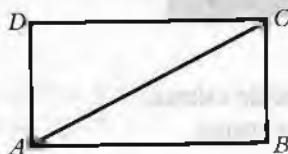
En los ejercicios 5 y 6, formúlese la conclusión correcta o escríbase «no hay conclusión posible».

- Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, entonces \overline{AB} y \overline{CD} determinan un plano.
 \overline{AB} y \overline{CD} determinan un plano.
Por tanto,

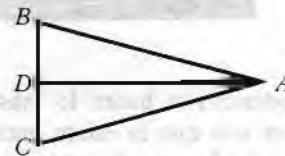
- Si $ABCD$ es un cuadrado, entonces $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
 $ABCD$ es un cuadrado.
Por tanto,

- Considérese la proposición:
Si dos rectas son paralelas, entonces no son perpendiculares.
 - Formúlese la recíproca de la proposición.
 - Formúlese la inversa de la proposición.
 - Formúlese la contrarrecíproca de la proposición.
 - Dense contraejemplos para las proposiciones que no son verdaderas.

- Dado: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$; $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.



- Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; \overline{AD} biseca a $\angle BAC$.
Pruébese: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.



Arquitectura: domos geodésicos

Los domos geodésicos fueron introducidos por R. Buckminster Fuller. Sus planos para una clase de domo, llamado *domo solar*, pueden encontrarse en la revista *Popular Science* de mayo de 1966.

Se han construido domos de diferentes tamaños y formas con muy diversos materiales. Se utilizan domos como invernaderos, cubiertas de piscinas e, incluso, viviendas. En las fotografías se muestra una vivienda domo de Colorado, y un domo que puede habilitarse como tienda de campaña.



Los domos geodésicos se hacen lo más parecidos posible a porciones de esferas. Dos de las razones son que la esfera encierra el mayor volumen con la menor superficie, y que es la figura más resistente.

Un tipo estándar de domo se basa en un sólido llamado *icosaedro*. Elabórese un modelo de icosaedro con cartulina o con palillos e hilo y un patrón de 20 triángulos equiláteros.

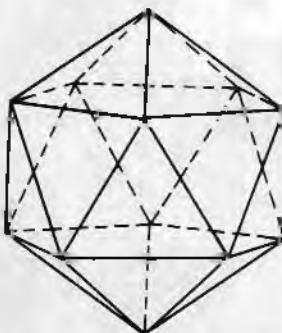
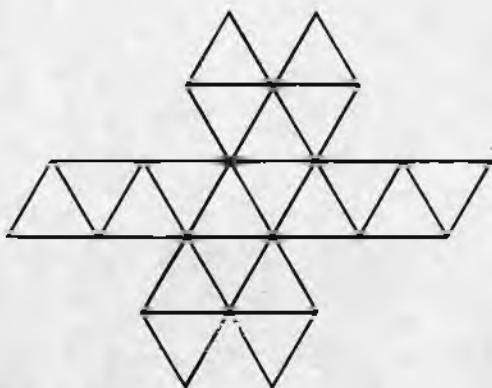


Fig. 1 Patrón para un icosaedro

Si se quitan los cinco triángulos de la base, resulta una estructura de domo.

En una estructura de domo real, cada uno de los triángulos equiláteros de la figura 2 se divide en triángulos más pequeños, como se muestra en la figura 3. Para que la forma del domo sea más parecida a una esfera, las piezas utilizadas para formar los triángulos se hacen de diferentes longitudes. Las piezas del tipo C son ligeramente más largas que las del tipo B, y éstas son un poco más largas que las del tipo A.

Figura 2

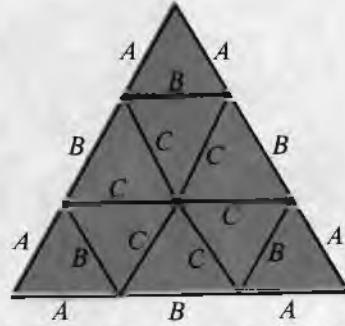


Fig. 3 Cara de un icosaedro dividida en 9 triángulos.

1. ¿Cuántas piezas de los tipos A, B y C se necesitan para completar el domo de la figura 2?
2. ¿Cuántos triángulos de lados A, A, B y B, C, C hay en este domo?

CAPÍTULO

4



- 4.1 Pasos para la prueba de un teorema 130
- 4.2 Uso de la propiedad de suma y resta de iguales 138
- 4.3 Prueba de teoremas: uso de suplementos
y complementos 144
- 4.4 Prueba de teoremas: uso de ángulos verticales 150
- 4.5 Prueba de teoremas: uso de ángulos exteriores 154
- 4.6 Uso de la prueba indirecta 158

Conceptos importantes 164 *Resumen* 165 *Examen* 166

Técnicas para la solución de problemas

Hacer una tabla-I 167

Prueba de teoremas mediante propiedades básicas



4.1 Pasos para la prueba de un teorema



© 1958 United Feature Syndicate, Inc.

En el capítulo 2, se dijo que un teorema es una generalización que puede probarse con definiciones, postulados y la lógica del razonamiento deductivo.

En el capítulo 3, se usó el razonamiento deductivo para formular pruebas sobre triángulos congruentes.

En esta sección, se empezará usando este proceso de razonamiento para probar teoremas.

El proceso de seis pasos para probar un teorema se ilustrará en esta sección con diversos ejemplos. El primer teorema está basado en las propiedades de los números resumidas antes.

Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva también son válidas para

congruencias entre segmentos y ángulos, como se resume en la tabla siguiente.

Obsérvese la semejanza entre la propiedad reflexiva y la proposición «los perros son perros».

REPASO: Algunas propiedades de los números. Para cualquier número, a , b y c :

1. $a = a$ (propiedad reflexiva).
2. Si $a = b$, entonces $b = a$ (propiedad simétrica).
3. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$ (propiedad transitiva).

Pasos para la prueba de un teorema

Paso 1 Si el teorema no tiene la forma si-entonces, debe ponerse en esta forma.

Paso 2 Dibújese y rotúlese un diagrama para mostrar las condiciones del teorema.

Paso 3 Escríbase lo dado a partir de la hipótesis (parte «si») de la proposición si-entonces.

Paso 4 Escríbase la prueba a partir de la conclusión (parte «entonces») de la proposición.

Paso 5 Analícese lo que se va a probar e idéese un plan.

Paso 6 Formúlese la prueba dando como razones definiciones, postulados o teoremas ya probados.

	Reflexiva	Simétrica	Transitiva
Congruencia entre ángulos	$\angle A \cong \angle A$	Si $\angle A \cong \angle B$, entonces $\angle B \cong \angle A$.	Si $\angle A \cong \angle B$, y $\angle B \cong \angle C$, entonces $\angle A \cong \angle C$.
Congruencia entre segmentos	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$	Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.	Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

En realidad, esta tabla resume seis generalizaciones. Una de ellas se propone y prueba a continuación. Obsérvense los seis pasos para la prueba de un teorema.

Cuando $\angle A$ es congruente con $\angle B$ y $\angle B$ es congruente con $\angle C$, también es verdadero que $\angle A$ es congruente con $\angle C$.

PRUEBA

Paso 1 Si $\angle A$ es congruente con $\angle B$ y $\angle B$ es congruente con $\angle C$, entonces $\angle A$ es congruente con $\angle C$.

Paso 3 Dado: $\angle A \cong \angle B$.
 $\angle B \cong \angle C$.

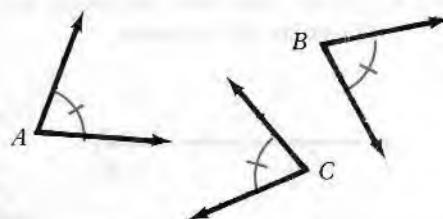
Paso 4 Pruébese: $\angle A \cong \angle C$.

Paso 5 Idéese un plan.

Si se consideran los datos como proposiciones sobre medición de ángulos, entonces se puede usar la propiedad transitiva de los números. Y por la definición de los ángulos congruentes se sabe que éstos tienen igual medida.

Paso 6

Paso 2



Afirmaciones

1. $\angle A \cong \angle B$.
2. $m\angle A = m\angle B$.
3. $\angle B \cong \angle C$.
4. $m\angle B = m\angle C$.
5. $m\angle A = m\angle C$.
6. $\angle A \cong \angle C$.

Razones

1. Dado.
2. Definición de ángulos congruentes.
3. Dado.
4. ¿Por qué?
5. Propiedad transitiva de los números.
6. ¿Por qué?

Podría formularse una prueba similar para las otras cinco proposiciones resumidas en la tabla. Combinando todas estas proposiciones, se establece el teorema siguiente.

Teorema 4.1 Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva son aplicables a la congruencia de ángulos y segmentos.

Los dos teoremas siguientes complementan la ilustración del proceso de seis pasos para la prueba de un teorema.

Teorema: Si los puntos A , B , C y D están sobre una recta de manera que B es el punto medio de \overline{AC} y C es el punto medio de \overline{BD} , entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

PRUEBA

Paso 1 El primer paso está contenido en la proposición del teorema.

Paso 2



Paso 3 Dado: B es el punto medio de \overline{AC} .
C es el punto medio de \overline{BD} .

Paso 4 Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Paso 5 Idéese un plan.

Se interpretará cada una de las proposiciones de los datos como una proposición sobre la congruencia de segmentos. Luego se utilizará el hecho de que la congruencia de segmentos satisface la propiedad transitiva.

Paso 6

Afirmaciones	Razones
1. B es el punto medio de \overline{AC} .	1. Dado.
2. C es el punto medio de \overline{BD} .	2. ¿Por qué?
3. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.	3. Definición de punto medio.
4. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.	4. ¿Por qué?
5. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	5. Propiedad transitiva (Teorema 4.1).



En el paso 5, la razón es un teorema ya demostrado. Hasta aquí, se utilizaron los postulados, definiciones y datos como razones en las pruebas. La prueba anterior muestra que los teoremas ya probados también son una parte importante en el proceso del razonamiento deductivo.

Cuando se diseña un plan para una prueba, han de revisarse las definiciones, postulados y teoremas ya probados.

Teorema 4.2

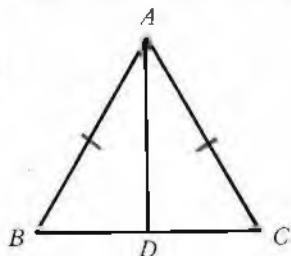
En un triángulo isósceles, el segmento que va del vértice al punto medio del lado opuesto forma un par de triángulos congruentes.

La proposición de este teorema es compleja suficiente como para ilustrar la importancia de los pasos 1 y 2 de este proceso de seis pasos.

PRUEBA

Paso 1 Si $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, y si D es el punto medio de \overline{BC} , entonces $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

Paso 2



Paso 3 Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
 D es el punto medio de \overline{BC} .

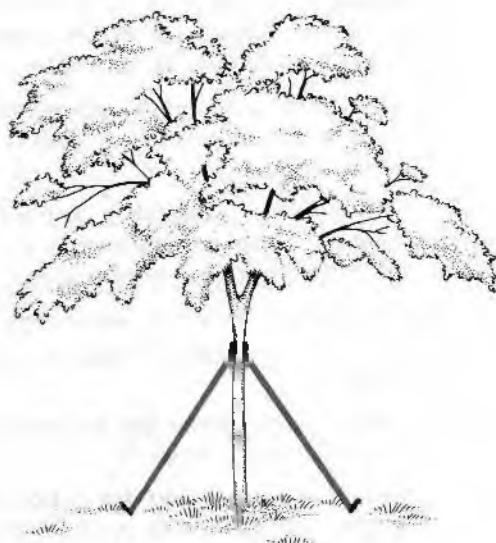
Paso 4 Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

Paso 5 Idéese un plan.

Se usará la información proporcionada, la definición de punto medio y la propiedad reflexiva de la congruencia de un segmento junto con el postulado de la congruencia LLL.

Paso 6

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.	1. Dado.
2. D es el punto medio de \overline{BC} .	2. Dado.
3. $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.	3. Definición de punto medio.
4. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$.	4. Propiedad reflexiva de la congruencia de un segmento (Teorema 4.1).
5. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.	5. Postulado de la congruencia LLL.



EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 3, se presenta un teorema de la forma si-entonces. Hágase un dibujo y establezcanse los datos y la prueba usando el dibujo y sus nombres. *No se probará ningún teorema.*

1. Teorema. Si $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles, entonces $\triangle ABC$ tiene un par de ángulos congruentes.
2. Teorema. Si los puntos X , Y y Z son puntos medios de los lados de un triángulo $\triangle ABC$, entonces los segmentos \overline{XY} , \overline{XZ} e \overline{YZ} dividen $\triangle ABC$ en cuatro triángulos congruentes.
3. Teorema. Si X e Y son los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces XY es igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

En los ejercicios 4 a 7, formúlese de nuevo el teorema en la forma si-entonces, dibújese un diagrama y establezcanse los datos y la prueba. *No se intentará probar los teoremas.*

4. Un triángulo equilátero es un triángulo isósceles.
5. Dos rectas intersecantes forman dos pares de ángulos congruentes.
6. Dos rectas intersecantes que no sean perpendiculares forman un par de ángulos obtusos.
7. La bisectriz de un ángulo del vértice de un triángulo equilátero es una bisectriz perpendicular de un lado.

Indíquese la propiedad de la congruencia entre ángulos o segmentos (reflexiva, simétrica o transitiva) ilustrada por cada una de las siguientes proposiciones.

8. Si dos segmentos son congruentes, la proposición de congruencia puede escribirse empezando por cualquiera de los dos segmentos.
9. Todo segmento es congruente consigo mismo.
10. Si un primer ángulo es congruente con otro y éste es congruente con un tercero, entonces el primer ángulo es congruente con el tercero.

En los ejercicios 11 a 14, empléense los datos y la prueba para hacer un dibujo. Luego formúlese un teorema general. *No se probará ninguno de estos teoremas.*

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11. Dado: $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
Pruébese: $\angle B \cong \angle C$. | 12. Dado: $\triangle ABC$ con $\angle B \cong \angle C$.
Pruébese: $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

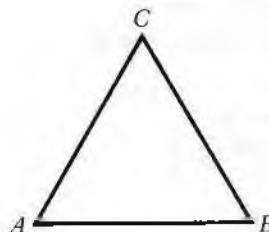
- 13. Dado:** $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero.
Pruébese: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$.

B.

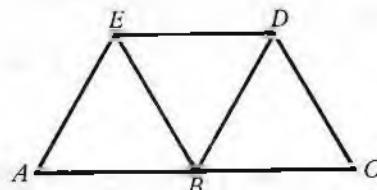
- 15.** Si $\angle 1 \cong \angle 2$, y $\angle 2 \cong \angle 3$, ¿por qué $\angle 1 \cong \angle 3$?



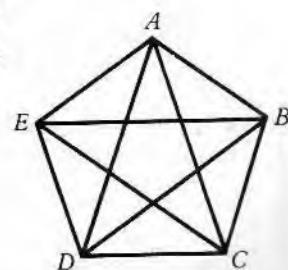
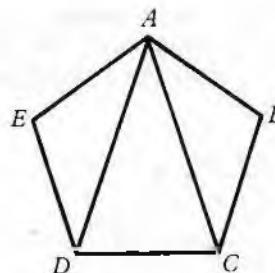
- 17. Si** $AB = BC$ y $BC = AC$, ¿por qué se sabe que $\triangle ABC$ es equilátero?



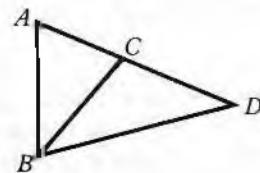
- 18. Si** $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ y $\overline{ED} \cong \overline{BC}$, ¿por qué se sabe que B es el punto medio de \overline{AC} ?



- 19. En** un pentágono regular, dos diagonales del mismo vértice son congruentes. Por ejemplo, $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ en la primera figura. Empléese este hecho con una propiedad transitiva para explicar por qué \overline{AC} y \overline{BE} son congruentes en la segunda figura.



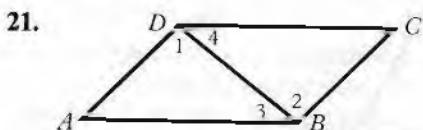
- 14. Dado:** $\triangle ABC$ con $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$.
Pruébese: $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero.



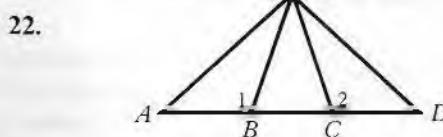
20. Un plomero está midiendo la longitud de \overline{AB} para cortar un trozo de tubo de la longitud correcta. El tubo cortado se llama \overline{CD} . ¿Cómo demuestra la propiedad transitiva que el tubo \overline{CD} se ajustará al espacio \overline{AB} ? (Sugerencia: la medida es una parte importante del razonamiento.)

C.

Formúlese una prueba completa a dos columnas para los ejercicios 21 y 22. Cada prueba requiere el uso de alguna de las propiedades de congruencia entre segmentos o ángulos especificadas en el teorema 4.1.



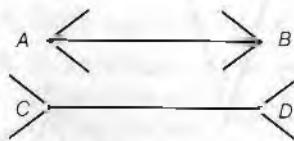
- Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 3 \cong \angle 4$.
- Pruébese:** $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



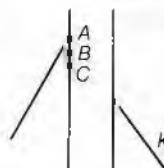
- Dado:** $\overline{BE} \cong \overline{CE}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$
 B es el punto medio de \overline{AC}
 C es el punto medio de \overline{BD} .
- Pruébese:** $\triangle ABE \cong \triangle DCE$.

ACTIVIDADES

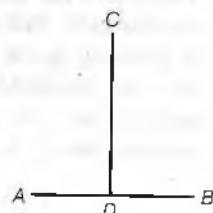
Estas «ilusiones ópticas» muestran por qué es más fiable el razonamiento lógico que la información visual. Respóndase a las preguntas y después compruébese midiendo.



- a. ¿Qué distancia es más larga, A a B o C a D ?



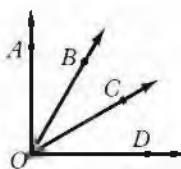
- b. Si se prolonga la recta k , ¿llegará al punto A , al B , al C o a ninguno de ellos?



- c. ¿Qué segmento tiene mayor longitud, \overline{AB} o \overline{CD} ?

Créese una ilusión óptica propia.

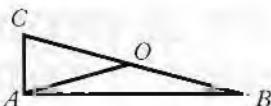
23.



Dado: \overrightarrow{OB} biseca a $\angle AOC$
 \overrightarrow{OC} biseca a $\angle BOD$.

Pruébese: $\angle AOB \cong \angle COD$.

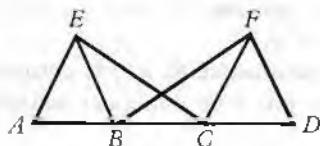
24.



Dado: O es el punto medio de \overline{BC}
 $\triangle AOB$ es isósceles con
 $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.

Pruébese: $\triangle AOC$ es isósceles.

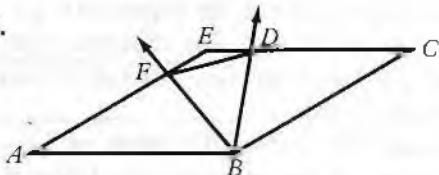
25.



Dado: $\triangle ACE \cong \triangle DBF$
 B es el punto medio de \overline{AC}
 C es el punto medio de \overline{BD} .

Pruébese: $\triangle ABE \cong \triangle DCF$.

26.



Dado: $ABCE$ tiene $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
 $\triangle BDF$ es isósceles con
 $\overline{BF} \cong \overline{BD}$
 \overline{BF} biseca a $\angle ABD$ y
 \overline{BD} biseca a $\angle CBF$.

Pruébese: $\triangle ABF \cong \triangle CBD$.

27. Pruébese: que la congruencia de triángulos satisface la propiedad transitiva.

28. Pruébese: que todos los ángulos rectos son congruentes.

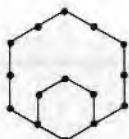
SOLUCION DE PROBLEMAS

•

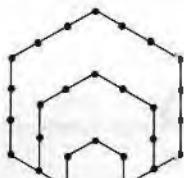
1



6



15



28

• • •

Las figuras muestran los cuatro primeros números hexagonales.

- Dense los 2 números hexagonales siguientes. Muéstrense los patrones de puntos.
- ¿Proporciona la fórmula $n(2n-1)$ el n -ésimo hexagonal?

4.2 Uso de la propiedad de suma y resta de iguales

Las propiedades de los números que se muestran a la derecha, son un repaso de álgebra.

Estas propiedades se usan en pruebas que contienen longitudes de segmentos y medidas de ángulos. Los dos teoremas que se presentan en esta sección ilustran el uso de estas propiedades.

En pruebas posteriores del libro, se usarán a menudo los teoremas, en lugar de las propiedades de los números.

REPASO: Algunas propiedades de los números.

Suma de iguales: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

Resta de iguales: Si $a = b$, $c = d$, y $a > c$, entonces $a - c = b - d$.

Multiplicación de iguales: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \cdot c = b \cdot d$.

Principio de la sustitución: Si $a = b$, entonces a puede sustituirse por b en cualquier ecuación o desigualdad.

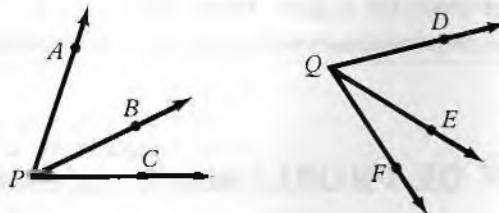
Teorema 4.3 Suma de ángulos iguales. Si $m\angle APB = m\angle DQE$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, \overrightarrow{PB} está entre \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PC} , y \overrightarrow{QE} está entre \overrightarrow{QB} y \overrightarrow{QF} , entonces $m\angle APC = m\angle DQF$.

PRUEBA

Dado: $m\angle APB = m\angle DQE$

$m\angle BPC = m\angle EQF$.

Pruébese: $m\angle APC = m\angle DQF$.



Afirmaciones	Razones
1. $m\angle APB = m\angle DQE$	1. Dado.
2. $m\angle BPC = m\angle EQF$.	2. Dado.
3. $m\angle APB + m\angle BPC = m\angle DQE + m\angle EQF$.	3. Propiedad de la suma de iguales.
4. $m\angle APB + m\angle BPC = m\angle APC$.	4. Definición de «entre» para rayos.
5. $m\angle DQE + m\angle EQF = m\angle DQF$.	5. ¿Por qué?
6. $m\angle APC = m\angle DQF$.	6. Principio de la sustitución.

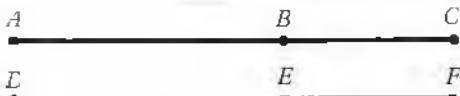
Por lo general, la información sobre qué rayos están entre otros, no se presenta en los datos; puede tomarse de las figuras. Esto mismo también es verdad para los puntos, como ilustra el siguiente teorema.

Teorema 4.4

Resta de segmentos iguales. Si $AC = DF$, $BC = EF$, B está entre A y C , y E está entre D y F , entonces $AB = DE$.

Dado: $AC = DF$
 $BC = EF$

Pruébese: $AB = DE$.



Afirmaciones	Razones
1. $AC = DF$.	1. Dado.
2. $BC = EF$.	2. Dado.
3. $AC = AB + BC$.	3. Definición de «entre» para puntos.
4. $DF = DE + EF$.	4. ¿Por qué?
5. $AB + BC = DE + EF$.	5. Principio de la sustitución.
6. $AB + BC - BC =$ $= DE + EF - EF$.	6. Propiedad de resta de iguales.
7. $AB + BC - BC = AB$.	7. Propiedades de álgebra.
8. $DE + EF - EF = DE$.	8. ¿Por qué?
9. $AB = DE$.	9. Principio de la sustitución.

Los dos teoremas siguientes se formulan sin demostración.

Teorema 4.5

Suma de segmentos iguales. Si $AB = DE$, $BC = EF$, B está entre A y C , y E está entre D y F , entonces $AC = DF$.

Teorema 4.6

Resta de ángulos iguales. Si $m\angle APC = m\angle DQF$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, \overrightarrow{PB} está entre \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PC} , y \overrightarrow{QE} está entre \overrightarrow{QD} y \overrightarrow{QF} , entonces $m\angle APB = m\angle DQE$.

EJERCICIOS**A.**

Indíquese si las conclusiones de los ejercicios 1 a 6 están justificadas por la propiedad transitiva de la igualdad, el teorema de la suma de ángulos iguales o el teorema de la resta de ángulos iguales.

1. Si $m\angle 1 = m\angle 2$, y $m\angle 2 = m\angle 3$, entonces $m\angle 1 = m\angle 3$.
2. Si $m\angle COD = m\angle EOF$, entonces $m\angle COE = m\angle DOF$.
3. Si $m\angle BOD = m\angle COE$, entonces $m\angle BOC = m\angle DOE$.
4. Si $m\angle AOC = m\angle DOF$ y $m\angle 1 = m\angle 3$, entonces $m\angle BOC = m\angle DOE$.
5. Si $m\angle AOC = m\angle BOD$ y $m\angle BOD = m\angle DOE$, entonces $m\angle AOC = m\angle DOE$.
6. Si $m\angle AOD = m\angle FOC$ y $m\angle BOD = m\angle EOC$, entonces $m\angle AOB = m\angle FOE$.

En los ejercicios 7 a 10, formúlese una propiedad, un teorema o una combinación de ambos que justifique las proposiciones dadas.

7. Si $BD = CE$, entonces $BC = DE$.
8. Si $AC = DF$, entonces $AD = CF$.
9. Si $BE = DF$, y $DF = AC$, entonces $CE = AB$.
10. Si $AB = EF$ y $BC = DE$, entonces $AD = CF$.

En los ejercicios 11 a 14, proporcionéntase todas las razones que faltan en las demostraciones.

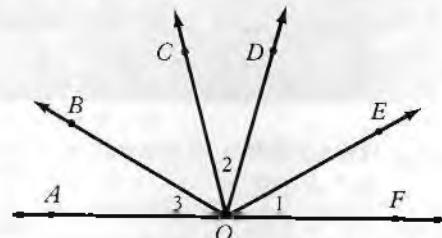
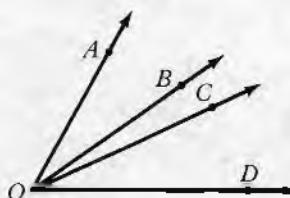
11. Dado: $AB = CD$.

Pruébese: $AC = BD$.



12. Dado: $m\angle AOC = m\angle BOD$.

Pruébese: $m\angle AOB = m\angle COD$.



(Ejercicios 1-6)



(Ejercicios 7-10)

Afirmaciones	Razones
1. $AB = CD$.	1. Dado.
2. $BC = BC$.	2. ?
3. $AC = BD$.	3. ?

Afirmaciones	Razones
1. $m\angle AOC = m\angle BOD$.	1. Dado.
2. $m\angle BOC = m\angle BOC$.	2. ?
3. $m\angle AOB = m\angle COD$.	3. ?

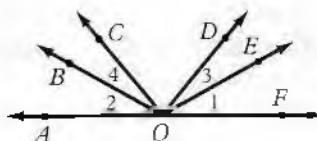
- 13. Dado:** $AB = CD$
 $BD = DE$.

Pruébese: $AC = DE$.



- 14. Dado:** $m\angle AOD = m\angle FOC$
 $m\angle 3 = m\angle 4$.

Pruébese: $m\angle 1 = m\angle 2$.



Afirmaciones	Razones
1. $AB = CD$.	1. Dado.
2. $BD = DE$.	2. Dado.
3. $BC = BC$.	3. ?
4. $AC = BD$.	4. ?
5. $AC = DE$.	5. ?

Afirmaciones	Razones
1. $m\angle AOD = m\angle FOC$.	1. ?
2. $m\angle COD = m\angle COD$.	2. ?
3. $m\angle AOC = m\angle FOD$.	3. ?
4. $m\angle 3 = m\angle 4$.	4. ?
5. $m\angle 2 = m\angle 1$.	5. ?

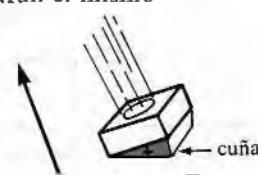
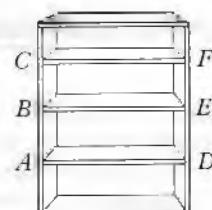
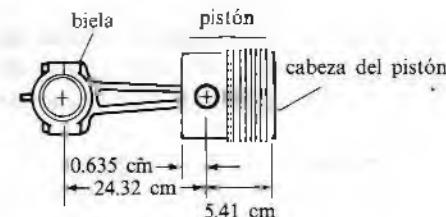
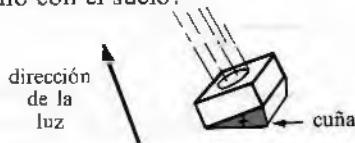
B.

15. Considérese el diagrama que aparece abajo.

- a. ¿Cuál es la distancia entre el centro de la biela y la cabeza del pistón?
- b. ¿Cuál es la longitud del pistón?
- c. ¿Qué teoremas o postulados apoyan sus respuestas?

16. En una librería se quieren montar soportes de estantes. Si se colocan de manera que $AB = DE$ y $BC = EF$, ¿qué teorema se usará para llegar a la conclusión de que el primero y tercer estantes están a la misma distancia de ambos extremos?

17. Dos focos para exterior idénticos se colocan dentro de una caja. Debajo de las cajas se colocan dos cuñas idénticas. ¿Qué teorema asegura que los dos haces de luz formarán el mismo ángulo con el suelo?



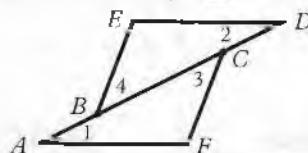
En los ejercicios 18 a 27, formúlese una demostración completa a dos columnas.

18. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

$$\angle 3 \cong \angle 4.$$

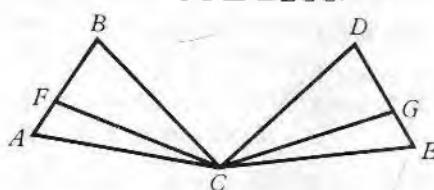
Pruébese: $\triangle ACF \cong \triangle DBE$.



20. Dado: $\triangle BFC \cong \triangle DGC$

$\triangle ABC \cong \triangle EDC$.

Pruébese: $\triangle AFC \cong \triangle EGC$.



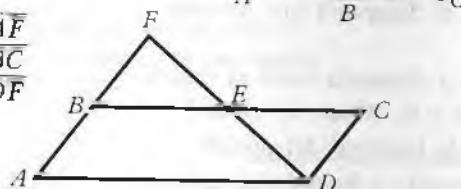
22. Dado: B es el punto medio de \overline{AF}

E es el punto medio de \overline{BC}

E es el punto medio de \overline{DF}

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Pruébese: $\triangle BEF \cong \triangle CED$.

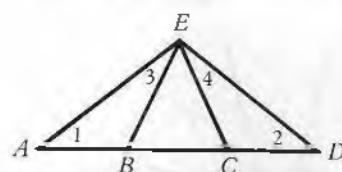


19. Dado: $\overline{AE} \cong \overline{DE}$

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

$$\angle 3 \cong \angle 4.$$

Pruébese: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



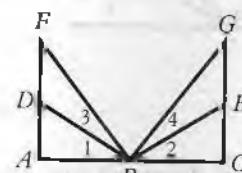
21. Dado: B es el punto medio de \overline{AC}

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

$$\angle 3 \cong \angle 4$$

$$\overline{FB} \cong \overline{GB}$$

Pruébese: $\overline{FD} \cong \overline{GE}$.



ACTIVIDADES

Un conjunto de puntos que satisface una sola condición dada se llama lugar geométrico, **locus**. El locus de puntos equidistantes de los extremos de una recta de segmento es la **bisectriz perpendicular** del segmento.

Se puede demostrar que esto es cierto observando la figura trazada por un «punto móvil». Constrúyase un juego especial de 20 tarjetas (8 cm x 13 cm), únanse con un clip y recórranse con un dedo para ver el «punto móvil». Para ver la bisectriz perpendicular puede usarse un juego de tarjetas como el que se muestra a continuación.



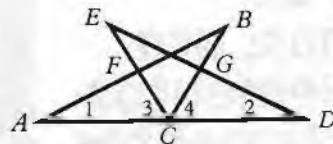
C.

23. Dado: C es el punto medio de \overline{AD}

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

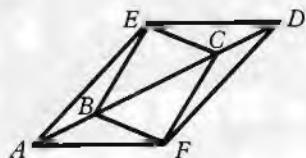
$$\angle 3 \cong \angle 4.$$

Pruébese: $\triangle ECG \cong \triangle BCE$.



24. Dado: $\triangle AEC \cong \triangle DFB$.

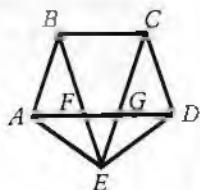
Pruébese: $\triangle ABF \cong \triangle DCE$.



26. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular

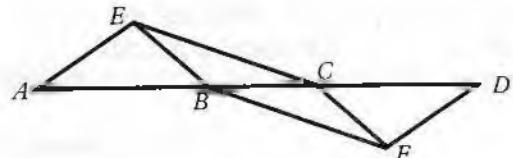
$$\overline{FE} \cong \overline{GE}$$

Pruébese: $\triangle ABF \cong \triangle DCG$.



25. Dado: $\triangle AEC \cong \triangle DFB$.

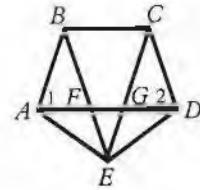
Pruébese: $\triangle ABE \cong \triangle DCF$.



27. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular

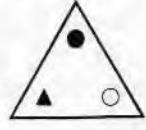
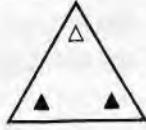
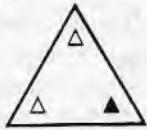
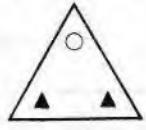
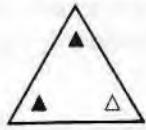
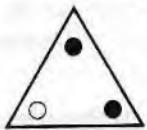
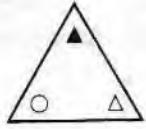
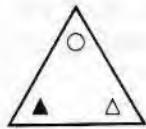
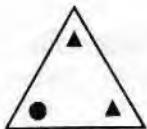
$$\angle 1 \cong \angle 2$$

Pruébese: $\triangle FGE$ es isósceles.



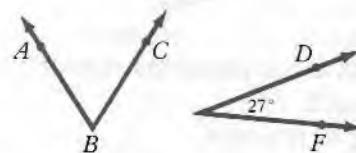
SOLUCION DE PROBLEMAS

Coloquense estos nueve triángulos para formar uno solo, de manera que los vértices que se toquen tengan el mismo símbolo.



4.3 Prueba de teoremas: uso de suplementos y complementos

Con frecuencia, en el mundo físico, los ángulos se presentan en parejas cuya suma de medidas es de 180° o 90° . Este tipo de parejas se estudian en esta sección.

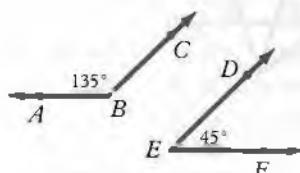


La suma de las medidas de $\angle ABC$ y $\angle DEF$ es 90° .

- $\angle ABC$ es complementario de $\angle DEF$.
- $\angle DEF$ es complementario de $\angle ABC$.

Definición 4.1

Ángulos complementarios son dos ángulos cuyas medidas suman 90° .



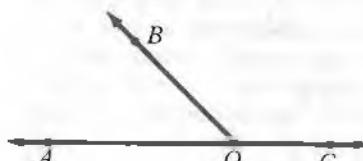
La suma de las medidas de $\angle ABC$ y $\angle DEF$ es 180° .

- $\angle ABC$ es suplementario de $\angle DEF$.
- $\angle DEF$ es suplementario de $\angle ABC$.

Definición 4.2

Ángulos suplementarios son dos ángulos cuyas medidas suman 180° .

Algunos pares de ángulos que suman 180° tienen un vértice común, un lado común y ningún punto interior común, y se denominan *par lineal*. Búsquese un par lineal de ángulos en la fotografía.



$\angle AOB$ y $\angle BOC$ tienen un lado común, \overrightarrow{OB} . La unión de los otros dos lados, \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OC} , es una recta.

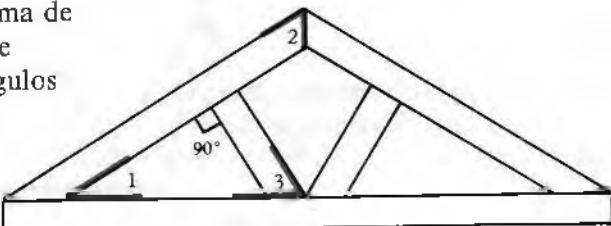
- $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son un par lineal de ángulos.

Definición 4.3

Un **par lineal de ángulos** es un par de ángulos con un lado común tal que la unión de los otros dos lados es una recta.

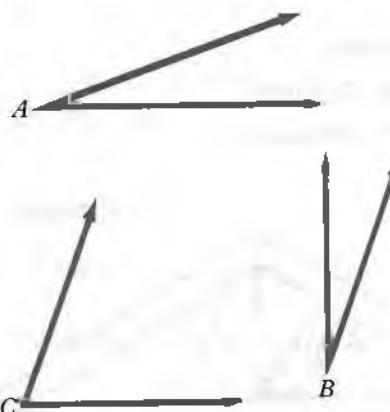


La estructura que sostiene el tejado de una casa con frecuencia se ensambla por separado. Esta estructura se llama sistema de tijerillas de tejados. Una de las tareas de un ingeniero es identificar todos los ángulos de la misma medida en este sistema de tijerillas, para poder cortar al mismo tiempo todas las estructuras con ángulos congruentes.

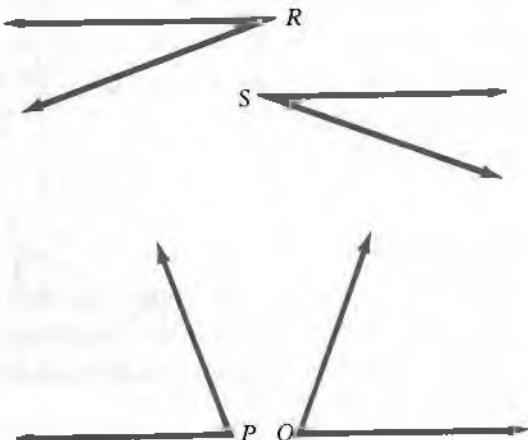


El teorema que se presenta en esta sección proporciona información útil para determinar el tamaño de los ángulos.

Empléese un transportador para responder a las preguntas sobre los complementos.



- ¿Es $\angle A$ complementario de $\angle C$?
- ¿Es $\angle B$ complementario de $\angle C$?
- ¿Qué comparación existe entre $m\angle A$ y $m\angle B$?



- ¿Es $\angle P$ complementario de $\angle R$?
- ¿Es $\angle Q$ complementario de $\angle S$?
- ¿Qué comparación existe entre $m\angle P$ y $m\angle Q$?

Se podía haber dicho que $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes, y que $\angle P$ y $\angle Q$ son congruentes. El teorema 4.7 resume las dos situaciones analizadas.

Teorema 4.7 Teorema de los complementos congruentes. Dos ángulos que son complementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes), son congruentes.

Se probará la primera parte del teorema de complementos congruentes. La segunda parte, se completará como ejercicio.

PRUEBA

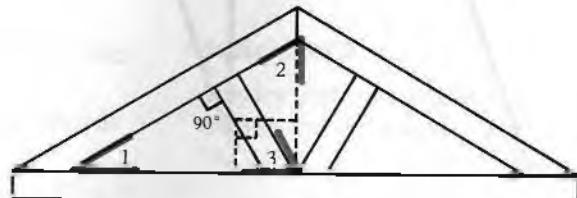
Dado: $\angle A$ es complementario de $\angle C$.
L $\angle B$ es complementario de $\angle C$.
Pruébese: $\angle A \cong \angle B$.



Afirmaciones	Razones
1. $\angle A$ es complementario de $\angle C$.	1. Dado.
2. $m\angle A + m\angle C = 90^\circ$.	2. Definición de ángulos complementarios.
3. $\angle B$ es complementario de $\angle C$.	3. ¿Por qué?
4. $m\angle B + m\angle C = 90^\circ$.	4. ¿Por qué?
5. $m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle C$.	5. Principio de la sustitución.
6. $m\angle A = m\angle B$.	6. Propiedad de la resta de iguales.
7. $\angle A \cong \angle B$.	7. Definición de ángulos congruentes.

APLICACION

En un triángulo con un ángulo de 90° , la suma de los otros dos ángulos también es 90° . En consecuencia, en este sistema de tijerillas de tejado, $\angle 2$ y $\angle 3$ son complementos de $\angle 1$. Por el teorema 4.7, puede concluirse que $\angle 2$ y $\angle 3$ tienen la misma medida.



Teorema 4.8 Teorema de los suplementos congruentes. Dos ángulos que son suplementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes), son congruentes.

Parece razonable que dos ángulos que forman un par lineal deban ser suplementarios. Este hecho se acepta como verdad y se denomina «postulado del par lineal».

Postulado del par lineal

Si dos ángulos forman un par lineal, los ángulos son suplementarios.

Estúdiense cada paso de las pruebas siguientes y formulense las razones omitidas.

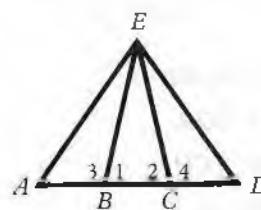
Ejemplo 1

Dado: $\angle A \cong \angle D$

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Pruébese: $\overline{BE} \cong \overline{CE}$.



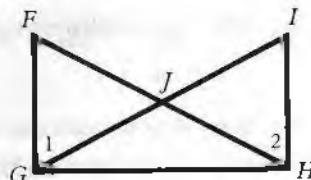
Afirmaciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle D$.	1. Dado.
2. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	2. ¿Por qué?
3. $\angle 1 \cong \angle 2$.	3. ¿Por qué?
4. $\angle 1$ y $\angle 3$ son suplementarios.	4. Postulado del par lineal.
5. $\angle 2$ y $\angle 4$ son suplementarios.	5. ¿Por qué?
6. $\angle 3 \cong \angle 4$.	6. Teorema de los suplementos congruentes.
7. $\triangle ABE \cong \triangle DCE$.	7. ¿Por qué?
8. $\overline{BE} \cong \overline{CE}$.	8. PCTCC.

Ejemplo 2

Dado: $\angle FGH$ y $\angle IHG$ son ángulos rectos

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

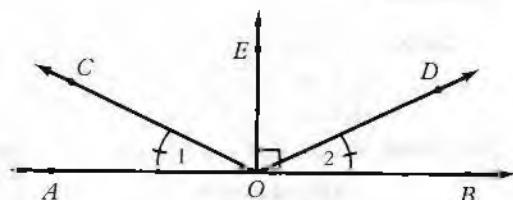
Pruébese: $\triangle IHG \cong \triangle FGH$.



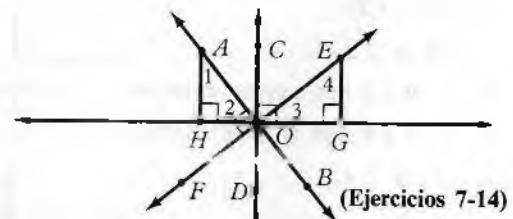
Afirmaciones	Razones
1. $\angle FGH$ y $\angle IHG$ son ángulos rectos.	1. Dado.
2. $\angle FGH \cong \angle IHG$.	2. Todos los ángulos rectos son congruentes.
3. $m\angle FGH = m\angle IHG = 90^\circ$.	3. ¿Por qué?
4. $\angle 1 \cong \angle 2$.	4. Dado.
5. $\angle 1$ y $\angle IGH$ son complementarios.	5. Definición de complementos.
6. $\angle 2$ y $\angle FGH$ son complementarios.	6. ¿Por qué?
7. $\angle IGH \cong \angle FHG$.	7. Teorema de los complementos congruentes.
8. $\overline{GH} \cong \overline{HG}$.	8. Propiedad reflexiva (segmentos).
9. $\triangle IHG \cong \triangle FGH$.	9. ¿Por qué?

EJERCICIOS**A.**

1. Cítense un suplemento de $\angle 1$.
2. Cítense un suplemento de $\angle COB$.
3. Cítense un complemento de $\angle COE$.
4. Cítense un complemento de $\angle 2$.
5. ¿Por qué $\angle COE$ y $\angle DOE$ son congruentes?
6. ¿Por qué $\angle COB$ y $\angle AOD$ son congruentes?
7. Cítense dos ángulos que sean suplementos de $\angle COE$.
8. Cítense dos ángulos que sean complementos de $\angle 3$.
9. Cítense dos ángulos que sean complementos de $\angle HOF$.
10. ¿Por qué $\angle COE$ y $\angle BOG$ son congruentes?
11. ¿Por qué $\angle AOH$ y $\angle COE$ son congruentes?
12. ¿Por qué $\angle AOG$ y $\angle EOD$ son congruentes?
13. ¿Por qué $\angle 3$ y $\angle AOC$ son congruentes?
14. ¿Por qué $\angle 3$ y $\angle AOD$ son suplementos?



$\overline{AB} \perp \overline{OE}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$ (Ejercicios 1-6)



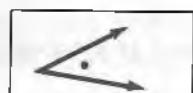
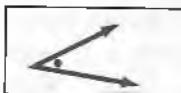
$\overline{AB} \perp \overline{EF}$, $\overline{CD} \perp \overline{HG}$
 $\overline{AH} \perp \overline{HG}$, $\overline{EG} \perp \overline{HG}$ (Ejercicios 7-14)

B.

15. Si $m\angle A = x$, entonces el complemento de $\angle A$ mide .
16. Si $m\angle B = x$, entonces el suplemento de $\angle B$ mide .
17. Dos ángulos son suplementarios. La medida de uno de ellos es cuatro veces la medida del otro. Encuéntrense las medidas de los dos ángulos.
18. Dos ángulos son suplementarios. La medida de uno es 20° menos que tres veces la medida del otro. Encuéntrense las medidas de los dos ángulos.

ACTIVIDADES

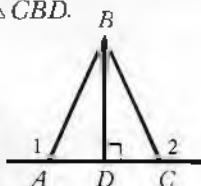
Elabórese un juego de 20 tarjetas como las que se muestran a continuación, únanse con un clip y recórranse con un dedo para mostrar que el lugar geométrico de puntos equidistantes de los dos lados de un ángulo es la bisectriz del ángulo.



Empléense los teoremas 4.7 y 4.8 en los ejercicios 19 a 22.

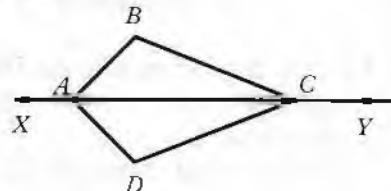
- 19. Dado:** $\overline{AD} \cong \overline{CD}$
 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



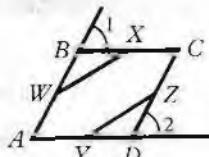
- 20. Dado:** $\angle BAX \cong \angle DAX$
 $\angle BCY \cong \angle DCY$.

Pruébese: $\overline{BC} \cong \overline{DC}$.



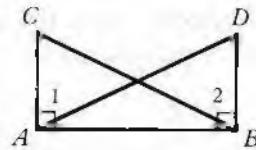
- 21. Dado:** $ABCD$ es un cuadrilátero con todos los lados de la misma longitud
 $\angle 1 \cong \angle 2$
 W, X, Y, Z son puntos medios de los lados.

Pruébese: $\triangle BWX \cong \triangle DZY$.



- 22. Dado:** $\overline{AC} \perp \overline{AB}, \overline{BD} \perp \overline{AB}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$.

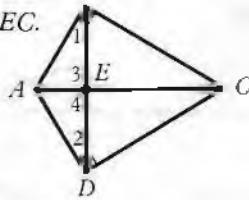
Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



C.

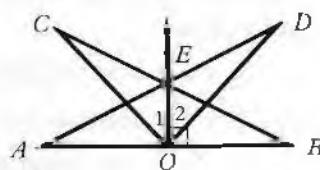
- 23. Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 3 \cong \angle 4$
 $\overline{BE} \cong \overline{DE}$
 $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{AD} \perp \overline{CD}$.

Pruébese: $\triangle BEC \cong \triangle DEC$.



- 24. Dado:** $\overline{AB} \perp \overline{OE}$, O es el punto medio de \overline{AB}
 $\angle A \cong \angle B$
 $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.



- 25. Pruébese:** la segunda parte del teorema 4.7. **26. Pruébese:** el teorema 4.8.

SOLUCION DE PROBLEMAS

1. Con una calculadora y el método de «conjetura y prueba», encuéntrense dos decimales « x » e « y » tales que $x - y = 1$ y $x \cdot y = 1$.

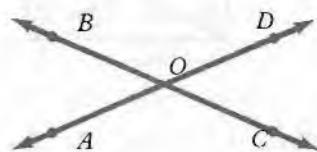
2. Si $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, esta línea se divide en una proporción especial llamada «sección áurea». Muéstrese que AB es igual al número x del primer problema.



4.4 Prueba de teoremas: uso de ángulos verticales

En esta sección se estudiarán pares de ángulos formados por un par de rectas que se intersecan.

El molino de viento de la fotografía proporciona muchos ejemplos de ángulos formados por rectas intersecantes. Además de varios pares lineales de ángulos, hay varios pares de ángulos que se entrecruzan. Los teoremas de esta sección tratan de las relaciones entre los ángulos formados por rectas intersecantes.



$\angle AOB$ y $\angle COD$ son ángulos verticales.
 \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{AD} se intersecan en O . $\angle ABC$ y $\angle ACD$ son pares lineales de ángulos.

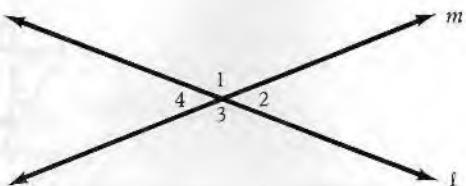
¿Es posible convencer a alguien de que estas cinco proposiciones sobre los ángulos formados por las rectas ℓ y m son verdaderas?

1. $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.
2. $\angle 3$ y $\angle 2$ son suplementarios.
3. $\angle 1$ y $\angle 3$ son congruentes.
4. $\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios.
5. $\angle 2$ y $\angle 4$ son congruentes.

Estas cinco proposiciones conducen al siguiente teorema.

Definición 4.4

Los **ángulos verticales** son dos ángulos formados por dos rectas que se intersecan, pero que no son un par lineal de ángulos.

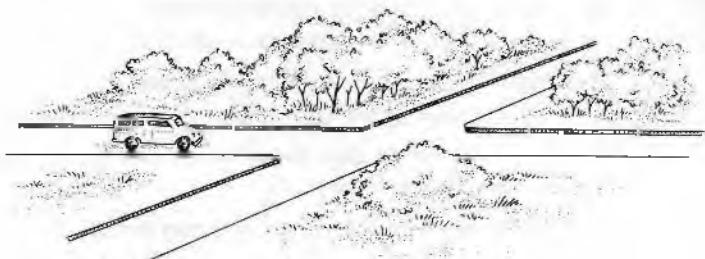
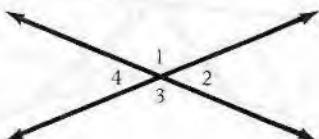


Teorema 4.9 Teorema de los ángulos verticales. Si dos rectas se intersecan, los ángulos verticales son congruentes.

PRUEBA

Paso 1 Este paso se incluye en la proposición del teorema.

Paso 2



Paso 3 Dado: Dos pares de ángulos verticales,
 $\angle 1$ y $\angle 3$
 $\angle 2$ y $\angle 4$.

Paso 4 Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 3$, y
 $\angle 2 \cong \angle 4$.

Paso 5 «Se probará que $\angle 1 \cong \angle 3$, utilizando el hecho de que $\angle 1$ y $\angle 2$ forman un par lineal, y de que $\angle 2$ y $\angle 3$ forman un par lineal. Entonces se usará el postulado del par lineal y el teorema de los suplementos congruentes.

La prueba de que $\angle 2 \cong \angle 4$ será idéntica, por lo que no se repetirá.»

Paso 6

Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1$ y $\angle 3$ son ángulos verticales.	1. Dado.
2. $\angle 1$ y $\angle 2$ forman un par lineal.	2. Definición del par lineal.
3. $\angle 1$ es suplementario de $\angle 2$.	3. Postulado del par lineal.
4. $\angle 3$ y $\angle 2$ forman un par lineal.	4. ¿Por qué?
5. $\angle 3$ es suplementario de $\angle 2$.	5. ¿Por qué?
6. $\angle 1 \cong \angle 3$.	6. Teorema de los suplementos congruentes.

El siguiente teorema también se refiere a los pares lineales de ángulos.

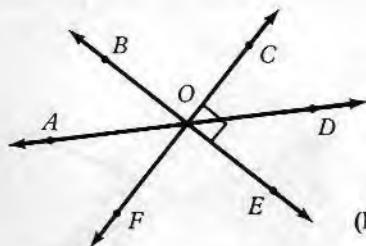
Teorema 4.10 Si un ángulo de un par lineal es un ángulo recto, entonces el otro también es un ángulo recto.

EJERCICIOS**A.**

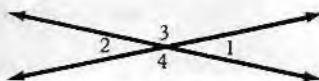
- Cítense dos pares de ángulos rectos que sean ángulos verticales.
- Cítese un par de ángulos agudos que sean ángulos verticales.
- Cítese un par de ángulos obtusos que sean ángulos verticales.
- Cítense seis pares de ángulos congruentes.

Si $m\angle 2 = 35$, encuéntrense las medidas de los ángulos de los ejercicios 5 a 8.

- $m\angle 3 = ?$
- $m\angle 1 = ?$
- $m\angle 4 = ?$
- $m\angle 1 + m\angle 4 = ?$



(Ejercicios 1-4)

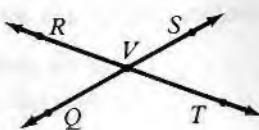


(Ejercicios 5-8)

Con la información de los ejercicios 9 a 11, encuéntrense las medidas de los ángulos.

- $m\angle RVQ = 4x$
- $m\angle QVT = 5x$
- $m\angle SVT = 2x + 20$
- $m\angle RVS = 8x - 45$
- $m\angle RVQ = ?$
- $m\angle RVS = ?$

- $m\angle RVQ = 2x + 30$
- $m\angle SVT = 3x + 20$
- $m\angle SVT = ?$



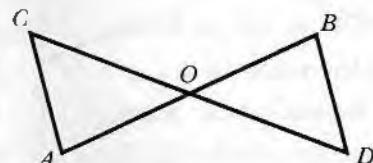
(Ejercicios 9-11)

B.

Para los ejercicios siguientes, formúlense demostraciones a dos columnas. Con frecuencia podrá utilizarse el teorema 4.9.

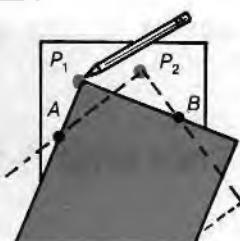
12. **Dado:** \overline{AB} y \overline{CD} se intersecan en O
 $\overline{AO} \cong \overline{OB}$
 $\angle A \cong \angle B$.

Pruébese: $\triangle AOC \cong \triangle BOD$.

**ACTIVIDADES**

Márquense dos puntos A y B en un papel y colóquese encima otra hoja de papel, como se muestra en la figura, de manera que un lado de la hoja esté sobre A , y el otro, sobre B .

Márquese un punto rojo P_1 . Repítase esto con el papel en otra posición y márquese P_2 . Prosígase hasta marcar 20 puntos diferentes. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, etcétera?



13. Dado: \overline{AB} y \overline{CD} se intersecan en O

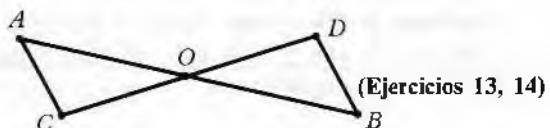
\overline{AB} biseca a \overline{CD}

$\angle C \cong \angle D$.

Pruébese: $\triangle AOC \cong \triangle BOD$.

14. Dado: \overline{AB} y \overline{CD} se intersecan en sus puntos medios.

Pruébese: $AC \cong BD$.

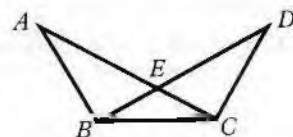


(Ejercicios 13, 14)

15. Dado: $\overline{AE} \cong \overline{DE}$

$\overline{BE} \cong \overline{CE}$

Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

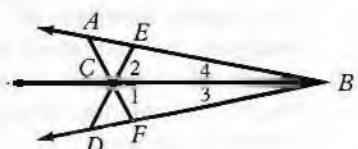


C.

16. Dado: \overrightarrow{BC} biseca a $\angle ABD$

$\angle 1 \cong \angle 2$.

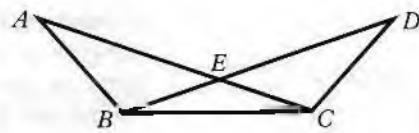
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DBC$.



17. Dado: $\overline{AE} \cong \overline{DE}$

$\overline{BE} \cong \overline{CE}$

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

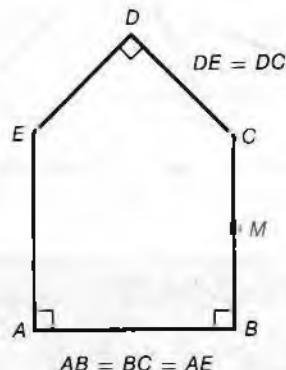


18. Pruébese: Si dos ángulos de un par lineal son congruentes, entonces son ángulos rectos.

19. Pruébese: Si un ángulo es congruente con su suplemento, entonces el ángulo es un ángulo recto.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Supóngase una tabla con la misma forma que se muestra en la figura. Se desea cortarla en tres partes que puedan colocarse para formar un cuadrado. ¿Cómo puede hacerse esto con dos cortes? (Sugerencia: emplee el punto medio M de BC .)



4.5 Prueba de teoremas; uso de ángulos exteriores

REPASO: Algunas propiedades de la desigualdad de números reales

Definición de «mayor que»: $a > b$ significa que $a = b + c$ y c es un número positivo.

Propiedad transitiva: Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Propiedad aditiva: Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

Propiedad de multiplicación: Si $a > b$ y $c > 0$, $ac > bc$. Si $a > b$ y $c < 0$, $ac < bc$.

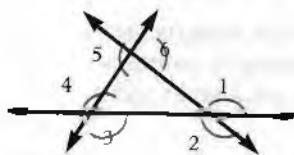
Propiedad de tricotomía: Para los números reales a y b , una, y sólo una, de las siguientes relaciones es verdadera: $a = b$, $a > b$, o $a < b$.

Las propiedades de los números que se acaban de definir, se usarán para probar el teorema de esta sección. Primero, se necesitan dos definiciones.



Definición 4.5

El **ángulo exterior** de un triángulo es el ángulo que forma un par lineal con uno de los ángulos del triángulo.



Obsérvese que cada triángulo tiene seis ángulos exteriores, como se ilustra en la figura.

Trácese el ángulo exterior 1 y compárese con los ángulos interiores no contiguos de los triángulos siguientes.



Las comparaciones conducen al siguiente teorema:

Teorema 4.11

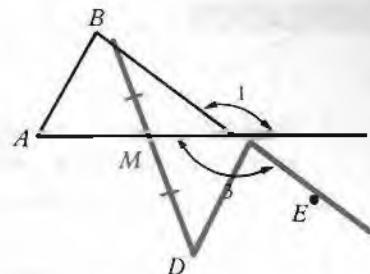
Teorema del ángulo exterior. La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores no contiguos.

PRUEBA

Dado $\triangle ABC$ con ángulo exterior, $\angle 1$.

Pruébese $m\angle 1 > m\angle 2$.

Plan: En esta etapa del estudio de la geometría, no se espera que el estudiante plane una prueba de este tipo.

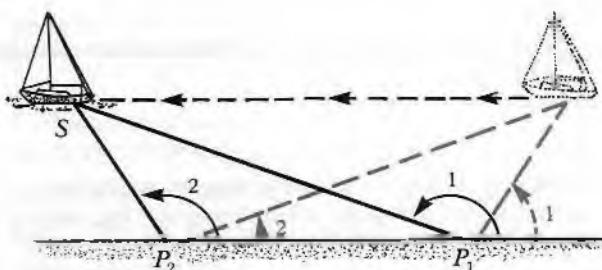


Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1$ es un ángulo exterior de $\triangle ABC$.	1. Dado.
2. Sea M el punto medio de \overline{AC} .	2. Elección de M .
3. Sobre \overline{BM} , elíjase un punto D tal que $BD \cong MD$.	3. Postulado del punto y la recta, elección de D .
4. $\overline{AM} \cong \overline{MC}$.	4. Definición del punto medio.
5. $\angle BMA \cong \angle DMC$.	5. ¿Por qué?
6. $\triangle AMB \cong \triangle CMD$.	6. ¿Por qué?
7. $\angle MCD \simeq \angle 2$.	7. PCTCC.
8. $m\angle MCD = m\angle 2$.	8. Definición de la congruencia de ángulos.
9. $m\angle MCD + m\angle DCE = m\angle 3$.	9. Definición de «entre» para los rayos.
10. $m\angle 2 + m\angle DEC = m\angle 3$.	10. Sustitución.
11. $m\angle 3 > m\angle 2$.	11. Definición de «mayor que».
12. $m\angle 1 = m\angle 3$.	12. ¿Por qué?
13. $m\angle 1 > m\angle 2$.	13. Sustitución.

APLICACION

Dos observadores, en los puntos P_1 y P_2 , ven pasar un velero. Los ángulos que se producen entre su vista y la orilla del mar ($\angle 1$, $\angle 2$) están en constante cambio. $m\angle 1$ parece mayor que $m\angle 2$ en ambas posiciones del velero. ¿Será $m\angle 1$ siempre mayor que $m\angle 2$, mientras el velero se aleja por la línea de la costa?

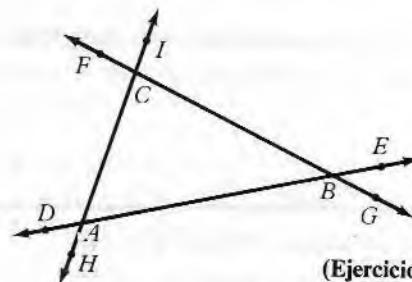
Respuesta. Por el teorema del ángulo exterior se sabe que $m\angle 1 > m\angle 2$, con independencia de la situación del barco. Por lo que, el ángulo que forman las líneas visuales de los observadores con la orilla, será siempre mayor para el observador del punto P_1 .



EJERCICIOS

A.

1. Citense los ángulos exteriores. ¿Cuántos ángulos exteriores en total tiene un triángulo?
2. Citense los ángulos interiores no contiguos de $\angle DAC$.
3. Citense los ángulos interiores no contiguos de $\angle HAB$.
4. $\angle ABC$ es el ángulo interior no contiguo de los ángulos exteriores y .
5. ¿Es $\angle DAH$ un ángulo exterior? ¿Por qué?
6. ¿Cuál es la relación entre $\angle ICB$ y $\angle CBA$?
7. ¿Cuál es la relación entre $\angle ACB$ y $\angle FCI$?
8. ¿Cuál es la relación entre $\angle ABG$ y $\angle ABC$?

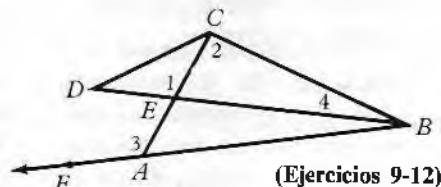


(Ejercicios 1-8)

B.

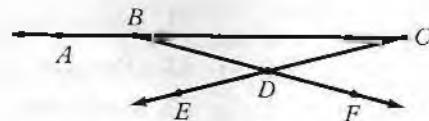
Explíquese por qué son verdaderas las proposiciones de los ejercicios 9 a 12.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 9. $m\angle 1 > m\angle 2$. | 10. $m\angle 3 > m\angle 1$. |
| 11. $m\angle 3 > m\angle 4$. | 12. $m\angle 3 > m\angle 2$. |

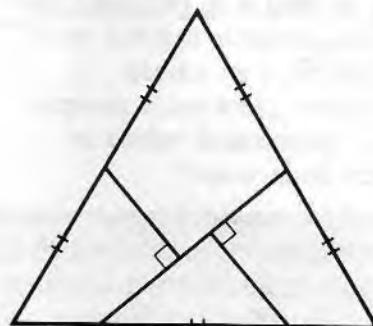


(Ejercicios 9-12)

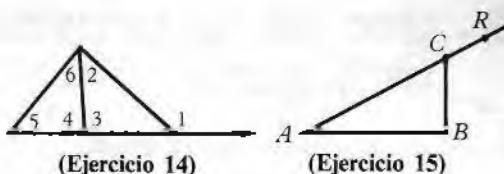
13. Usese la figura para probar que $m\angle ABD > m\angle EDF$.

**ACTIVIDADES**

Dibújese y recórtense un triángulo equilátero como el de la figura y dispónganse las piezas para formar un cuadrado.



14. Usese la figura para probar que $m\angle 1 > m\angle 6$.
15. **Dado:** $\triangle ABC$ es un triángulo con un ángulo recto $\angle B$.
Pruébese: $\angle RCB$ es un ángulo obtuso.

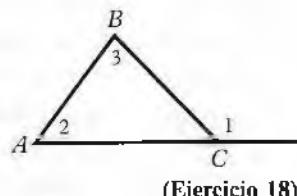


(Ejercicio 15)

C.

Con el teorema del ángulo exterior, pruébense los teoremas de los ejercicios 16 y 17.

16. Un triángulo con un ángulo recto tiene dos ángulos agudos.
17. Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, entonces los otros dos ángulos son agudos.
18. Al principio de la sección 4.5 se proporciona una prueba de que $m\angle 1 > m\angle 2$. Empléese un método similar para probar que $m\angle 1 > m\angle 3$. (*Sugerencia:* emplee el punto medio de BC .)
19. Pruébese que un triángulo no puede tener un ángulo recto y uno obtuso.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Algunas veces se usan *líneas auxiliares* para ayudar a la solución de un problema. Pero hay que tener la seguridad de que las líneas empleadas existen. Considérese la siguiente prueba.

«Teorema»: Todo triángulo es isósceles.

Dado: $\triangle ABC$.

Pruébese: $\triangle ABC$ es isósceles.



Afirmaciones	Razones
1. Trácese una recta a través de A y D , el punto medio de BC , que sea perpendicular a BC .	1. Construcción de AD .
2. $AD \cong AD$.	2. Propiedad reflexiva de la congruencia.
3. $BD \cong DC$.	3. Definición de punto medio.
4. $\angle ADB \cong \angle ADC$.	4. Definición de las perpendiculares.
5. $\triangle ADB \cong \triangle ADC$.	5. Postulado LAL.
6. $AB \cong AC$.	6. Partes correspondientes.
7. $\triangle ABC$ es isósceles.	7. Definición de isósceles.

Explíquese cuál es el error de la prueba. Dibújese un contraejemplo para mostrar que la afirmación 1 describe una recta que no siempre existe.

4.6 Uso de la prueba indirecta

El método de la prueba directa usado hasta este momento, implica empezar con las condiciones dadas y con la deducción de que la conclusión es verdadera. La prueba indirecta se ilustra con lo que podría suceder en esta caricatura —si B.C. cooperase—. Supóngase que B.C. come la fruta pero no muere. Una prueba indirecta de que la fruta no es venenosa podría ser la siguiente:

Supóngase que la fruta es venenosa.
Si B.C. la come, morirá.
B.C. la comió, pero no murió.
Por tanto, la fruta no es venenosa.

Este método de prueba implica aceptar la negación de lo que se quiere probar. Por medio del razonamiento, se demuestra que esta aceptación conduce a una contradicción. Así, la proposición que se va a probar debe ser verdadera.



B.C. by permission of Johnny Hart and Field Enterprises, Inc

A continuación se resumen los pasos para la prueba indirecta.

Pasos para probar un teorema mediante la prueba indirecta

Paso 1 Formúlense los datos y la prueba a partir de la hipótesis y la conclusión de una posición si-entonces.

Paso 2 Supóngase la negación de la proposición contenida en la prueba. (Suposición de la prueba indirecta.)

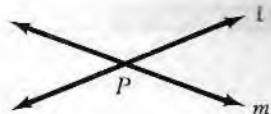
Paso 3 Formúlense los pasos de la prueba para mostrar que la suposición lleva a la contradicción de un hecho conocido (teorema, definición, información proporcionada, etc.).

Paso 4 Conclúyase que la suposición es falsa y que la proposición de la PRUEBA es verdadera.

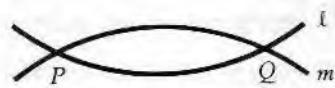
Se ilustra la prueba indirecta probando dos teoremas.

Teorema: Si dos rectas se intersecan, la intersección es un punto.

Dado: Las rectas ℓ y m se intersecan en el punto P . } Paso 1
Pruébese: P es el único punto de intersección.



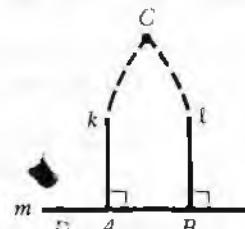
Análisis: El paso 2 de una prueba indirecta es suponer la negación de la proposición de la prueba. La negación de « P es el único punto de intersección» es « P no es el punto de intersección». Esto significa que hay un segundo punto de intersección. Entonces, se muestra que tener estos dos puntos conduce a una contradicción del postulado.



	Afirmaciones	Razones
Paso 2	1. Supóngase que P no es el único punto de intersección de las rectas ℓ y m .	1. Suposición de la prueba indirecta.
	2. Sea Q el segundo punto de intersección.	2. Replanteamiento de 1.
Paso 3	3. ℓ contiene a P y a Q . m contiene a P y a Q .	3. Afirmaciones 1 y 2.
	4. P y Q están en dos rectas (contradicción del postulado del punto y la recta).	4. Replanteamiento de 3.
Paso 4	5. Por tanto, P es el único punto de intersección de ℓ y m .	5. Lógica de la prueba indirecta.

Si dos rectas son perpendiculares a la misma recta, las dos rectas son paralelas.

Dado: $k \perp m$, $\ell \perp m$. } Paso 1
Pruébese: $k \parallel \ell$.



	Afirmaciones	Razones
Paso 2	1. Supóngase que $k \nparallel \ell$ (k no es paralela a ℓ).	1. Suposición de la prueba indirecta.
	2. k y ℓ se intersecan en el punto C .	2. Replanteamiento de 1.
Paso 3	3. Se forma $\triangle ABC$.	3. Definición de triángulo.
	4. $m\angle DAC > m\angle ABC$.	4. Teorema del ángulo externo.
	5. $k \perp m$, $\ell \perp m$.	5. Dado.
	6. $\angle DAC$ y $\angle ABC$ son ángulos rectos.	6. Definición de las perpendiculares.
	7. $m\angle DAC = m\angle ABC$ (contradicción de $m\angle DAC > m\angle ABC$).	7. Todos los ángulos rectos tienen la misma medida.
Paso 4	8. Por tanto, $k \parallel \ell$.	8. Lógica de la prueba indirecta.

EJERCICIOS

A.

Para las proposiciones de prueba de los ejercicios 1 a 10, formúlese la suposición de la prueba indirecta que se usaría para iniciar la prueba, junto con la segunda proposición que interpreta la suposición de la prueba indirecta.

Ejemplo: **Pruébese:** $\ell \parallel m$.

Suposición de la prueba indirecta: $\ell \nparallel m$.

Segunda proposición: Entonces, ℓ interseca a m .

1. **Pruébese:** $\ell \perp m$.
2. **Pruébese:** $\angle A$ es suplementario de $\angle B$.
3. **Pruébese:** Los lados adyacentes no son paralelos.
4. **Pruébese:** $\angle A$ no es un ángulo recto.
5. **Pruébese:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
6. **Pruébese:** $\angle A$ y $\angle B$ no son ángulos verticales.
7. **Pruébese:** $\angle A$ es un ángulo agudo.
8. **Pruébese:** Sólo hay una recta a través de P y paralela a m .
9. **Pruébese:** $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.
10. **Pruébese:** $\triangle ABC$ no es un triángulo equilátero.

¿Qué pares de proposiciones de los ejercicios 11 a 16 permitirán llegar a una contradicción en una prueba indirecta?

Ejemplos: \overline{AB} es más largo que \overline{CD} , y \overline{CD} es más largo que \overline{AB} . $\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \text{ es equilátero y} \\ \overline{ABC} \text{ es isósceles.} \end{array} \right\}$ no forma una contradicción

$\left. \begin{array}{l} \overline{ABC} \text{ es equilátero y} \\ \overline{ABC} \text{ es isósceles.} \end{array} \right\}$ no forma una contradicción

11. Las rectas p y q son paralelas y las rectas p y q no se intersecan.
12. $\angle A \cong \angle B$ y $m\angle A > m\angle B$.
13. $\ell \perp m$ y $\ell \not\perp m$ (nota: $\not\perp$ significa «no es perpendicular a»).
14. $\angle A$ y $\angle B$ forman un par lineal. $m\angle A < 90$ y $m\angle B < 90$.
15. $\angle A$ es un ángulo recto.
 $\angle A$ es un ángulo obtuso.
16. $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes.
 $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios.

En los ejercicios 17 y 18, selecciónese la proposición que está en contradicción con la proposición dada.

17. $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios.

- a. $m\angle A + m\angle B = 180$.
- c. $\angle A$ y $\angle B$ son agudos.

18. Las rectas p y q no son paralelas.

- a. Las rectas p y q no tienen puntos en común.
- c. Las rectas p y q son la misma recta.

b. $\angle A$ y $\angle B$ forman un par lineal.

d. $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos verticales.

Escríbase una proposición que contradiga las proposiciones de los ejercicios 19 a 23.

19. $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.

20. Las rectas p y q se intersecan.

21. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

22. $ABCDE$ es un pentágono regular.

23. $m\angle A = 117$.

En los ejercicios 24 a 27, formúlese la suposición que se usaría en una prueba indirecta del teorema dado.

24. Si dos rectas no se intersecan, entonces no son perpendiculares.

25. Si $AB \neq CD$, entonces $AB + EF \neq CD + EF$.

26. Si una figura es un triángulo, entonces la figura no puede contener dos ángulos rectos.

27. Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

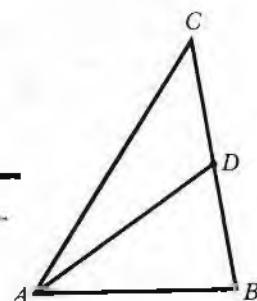
B.

En los ejercicios 28 a 30 se inicia una prueba indirecta. Proporcionense las razones que faltan y continúese la prueba para llegar a una contradicción.

28. Dado: En $\triangle ABC$, $\overline{AC} \not\cong \overline{AB}$
 D es el punto medio de \overline{BC} .

Pruébese: \overline{AD} no puede ser perpendicular a \overline{BC} .

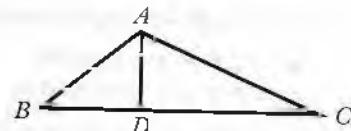
Afirmaciones	Razones
1. Supóngase que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.	1. Suposición de la prueba indirecta.
2. $\angle ADC \cong \angle ADB$.	2. ?
3. D es el punto medio de \overline{BC} .	3. Dado.
4. $\overline{CD} \cong \overline{BD}$.	4. ?
5. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$.	5. ?
6. $\triangle ADC \cong \triangle ADB$.	6. Postulado LAL.
7. $\overline{AC} \cong \overline{AB}$.	7. PCTCC.
8. ?	8. ?
9. ?	9. ?



29. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$$\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$$

Pruébese: $\overline{BD} \not\cong \overline{DC}$.



Afirmaciones

Razones

1. Supóngase $\overline{BD} \cong \overline{DC}$.

1. ?

2. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

2. ?

3. $\angle BDA \cong \angle ADC$.

3. Definición de las perpendiculares.

4. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$.

4. ?

5. $\triangle ADB \cong \triangle ADC$.

5. ?

6. ?

6. ?

7. ?

7. ?

8. ?

8. ?

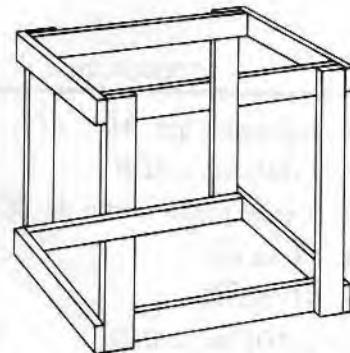
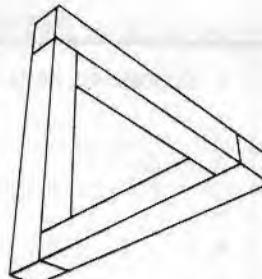
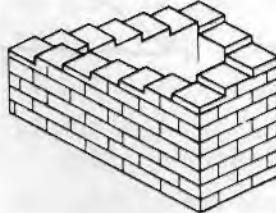
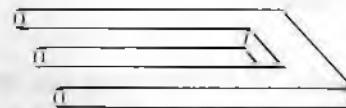
ACTIVIDADES

El objeto que se muestra a la derecha puede existir o no en el mundo real.

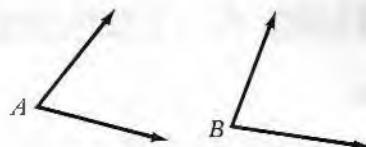
Supóngase que puede (?).

Continúese el argumento anterior con las otras figuras que se muestran a continuación y véase si se puede llegar a una contradicción de los hechos de la vida real.

Búsquense otras fotografías o dibujos de objetos, que como éstos, son contradictorios.



- 30. Dado:** $\angle A$ y $\angle B$ son agudos.
Pruébese: $\angle A$ y $\angle B$ no son suplementarios.



Afirmaciones	Razones
1. Supóngase que $\angle A$ es suplementario de $\angle B$.	1. ?
2. $m\angle A + m\angle B = 180$.	2. Definición de suplementarios.
3. $m\angle A < 90$, $m\angle B < 90$.	3. Dado, definición de ángulo agudo.
4. ?	4. Propiedad aditiva de las desigualdades.
5. ?	5. ?

- 31. ¿Cómo puede usar un abogado la prueba indirecta?**
Dése un ejemplo.

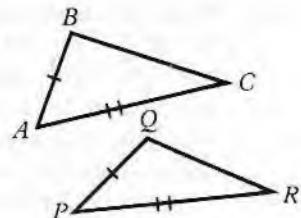
Formúlese una prueba indirecta para los teoremas de los ejercicios 32 a 35.

- 32.** Si $AB \neq CD$, entonces $AB + EF \neq CD + EF$.
33. Si $\angle A$ no es congruente con $\angle B$, entonces $\angle A$ y $\angle B$ no son ángulos verticales.

- 34. Dado:**
 $\angle 1$ y $\angle 4$ no son suplementarios.
Pruébese:
 $\angle 2$ y $\angle 3$ no son suplementarios.



- 35. Dado:**
 $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$
 $\overline{AC} \cong \overline{PR}$
 $\angle A \not\cong \angle P$.
Pruébese:
 $\overline{BC} \not\cong \overline{QR}$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Cuando un anuncio sobre una radio barata en venta decía «Es un robo», la propietaria de la tienda no sabía lo cierto que era. Estaba segura de que Ana, Leo, Isa o Iye habían robado la radio. Cada persona, en su momento, hizo una declaración, pero sólo una de las cuatro declaraciones era verdadera.

Ana dijo: «Yo no robé la radio.»

Leo dijo: «Ana miente.»

Isa dijo: «Leo miente.»

Iye dijo: «La robó Leo.»

¿Quién dijo la verdad? ¿Quién robó la radio?

Capítulo 4 Conceptos importantes

Términos

Ángulos complementarios (pág. 144)

Ángulos suplementarios (pág. 144)

Par lineal de ángulos (pág. 144)

Ángulos verticales (pág. 150)

Ángulo exterior de un triángulo (pág. 154)

Ángulo interior no contiguo (pág. 154)

Postulado

Postulado del par lineal. Si dos ángulos forman un par lineal, los ángulos son suplementarios.

Teoremas

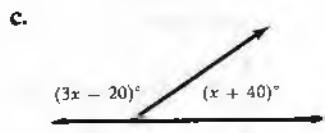
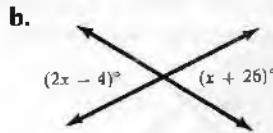
- 4.1 **Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva valen para la congruencia de ángulos y segmentos.**
- 4.2 En un triángulo isósceles, el segmento que va del ángulo del vértice al punto medio del lado opuesto forma un par de triángulos congruentes.
- 4.3 **Suma de ángulos iguales.** Si $m\angle APB = m\angle DQE$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, \overrightarrow{PB} está entre \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PC} , y \overrightarrow{QE} está entre \overrightarrow{QD} y \overrightarrow{QF} , entonces $m\angle APC = m\angle DQF$.
- 4.4 **Resta de segmentos iguales.** Si $AC = DF$, $BC = EF$, B está entre A y C , y E está entre D y F , entonces $AB = DE$.
- 4.5 **Suma de segmentos iguales.** Si $AB = DE$, $BC = EF$, B está entre A y C , y E está entre D y F , entonces $AC = DF$.
- 4.6 **Resta de ángulos iguales.** Si $m\angle APC = m\angle DQF$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, \overrightarrow{PB} está entre \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PC} , y \overrightarrow{QE} está entre \overrightarrow{QD} y \overrightarrow{QF} , entonces $m\angle APB = m\angle DQE$.
- 4.7 **Teorema de los complementos congruentes.** Dos ángulos que son complementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes) son congruentes.
- 4.8 **Teorema de los suplementos congruentes.** Dos ángulos que son suplementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes) son congruentes.
- 4.9 **Teorema de los ángulos verticales.** Si dos rectas se intersecan, los ángulos verticales son congruentes.
- 4.10 Si un ángulo de un par lineal es un ángulo recto, entonces el otro ángulo también lo es.
- 4.11 **Teorema del ángulo exterior.** La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores no contiguos.

Capítulo 4 Resumen

- Indíquese si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas.
 - Si dos ángulos son suplementarios de ángulos congruentes, entonces son congruentes.
 - La propiedad transitiva de congruencia entre segmentos establece que $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.
 - La suma de dos ángulos complementarios es 90° .

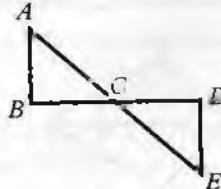
En los ejercicios 2 y 3 se proporciona un teorema de la forma si-entonces. Hágase un dibujo y formúlense los datos y la prueba usando la figura y sus nombres.

- Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.
- Si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces todas son paralelas.
- Despójese x y calcúlese la medida de los ángulos.



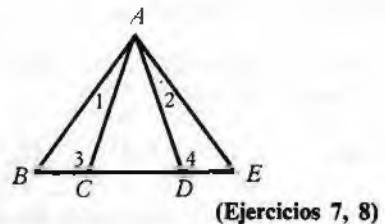
- ¿Cuál es la medida de un ángulo que es congruente con su complemento?

6. Dado: $\overline{AB} \perp \overline{BD}$, $\overline{DE} \perp \overline{BD}$,
 $BC = CD$.
 Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.



7. Dado: $m\angle 1 = m\angle 2$.
 Pruébese: $m\angle BAD = m\angle CAE$.

8. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AE}$, $\angle E \cong \angle B$, y $\angle 1 \cong \angle 2$.
 Pruébese: $\angle ACD \cong \angle ADC$.



9. Para las siguientes proposiciones de la prueba expóngase la suposición de una prueba indirecta que se usaría para empezar la demostración.

- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
- $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios.

(Ejercicios 7, 8)

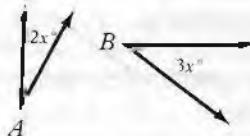
Capítulo 4 Examen

1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
- La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquier ángulo del triángulo.
 - Si dos ángulos son suplementarios y congruentes, entonces ambos son ángulos rectos.
 - Si dos ángulos son suplementarios, entonces forman un par lineal.

En los ejercicios 2 y 3, se proporciona un teorema en la forma si-entonces. Hágase un dibujo y establezcanse los datos y la prueba usando la figura y sus nombres.

- Si un triángulo es equilátero, entonces la medida de cada ángulo es 60° .
- Si un segmento de recta une los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces el segmento es paralelo al tercer lado.
- Despejese x y encuéntrese la medida de los ángulos.

a. $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.



b.



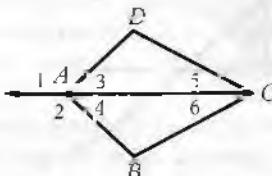
c.



- La medida de un ángulo es la mitad de la de su suplementario, ¿cuánto mide el ángulo?

6. Dado: $m\angle 1 = m\angle 2$
 $m\angle 5 = m\angle 6$.

Pruébese: $AD = AB$.



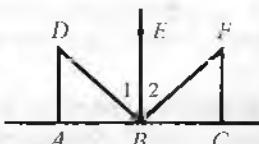
7. Dado: $AB = CD$, $BD = CE$.

Pruébese: $AC = CE$.



8. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{DA} \perp \overline{AC}$,
 $\overline{EB} \perp \overline{AC}$ y $\overline{FC} \perp \overline{AC}$.
 B es punto medio de \overline{AC} .

Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{CF}$.



9. Para las siguientes proposiciones de la prueba, expóngase la suposición de la prueba indirecta que se usaría para iniciar la demostración.

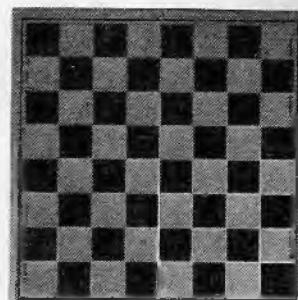
a. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

b. $\angle DEF$ no es un ángulo recto.

Técnicas para la solución de problemas

Hacer una tabla-I

Una técnica útil para la solución de problemas es hacer una tabla para ver si puede encontrarse un esquema. Estúdiense el siguiente ejemplo.



¿Cuántos cuadrados pueden encontrarse en este tablero?

Ejemplo

¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez de 8×8 ?

Considérese la tabla de la derecha. El número de cuadrados de 1×1 , 2×2 , 3×3 y 4×4 se da en la tabla. ¿Puede verse un esquema y resolver el problema?

Solución. El número de cuadrados de 1×1 es 8^2 . El número de cuadrados de 2×2 es 7^2 . El esquema parece ser de cuadrados perfectos decrecientes. Así, se complementaría la tabla con 16, 9, 4 y 1. Para obtener el total se suma y resultan 204 cuadrados.

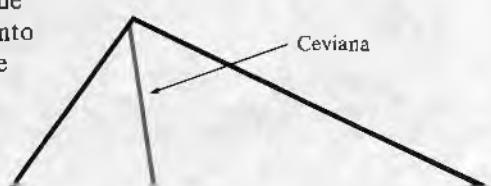
Tamaño del cuadrado	Número de cuadrados
1×1	64
2×2	49
3×3	36
4×4	25
5×5	?
6×6	?
7×7	?
8×8	?

PROBLEMAS

Para cada problema, hágase una tabla, obsérvese el esquema y resuélvase el problema.

1. ¿Cuántos cubos hay en un cubo de $8 \times 8 \times 8$? (Sugerencia: Hágase una tabla similar a la anterior. En la primera columna se relacionan los tamaños de los cubos: $1 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, etc. En la segunda columna se presenta el número de cuadrados de cada tamaño.)
2. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de diez lados? (Sugerencia: Hágase una tabla como la de la derecha.)
3. Una *ceviana* es un segmento de recta que une un vértice de un triángulo a un punto del lado opuesto. ¿Cuántos triángulos se forman si se trazan 8 *cevianas* desde un vértice de un triángulo?

Lados	Diagonales
3	0
4	2
5	?
6	?
:	:



(Nota: Esta ceviana forma 3 triángulos)

CAPITULO

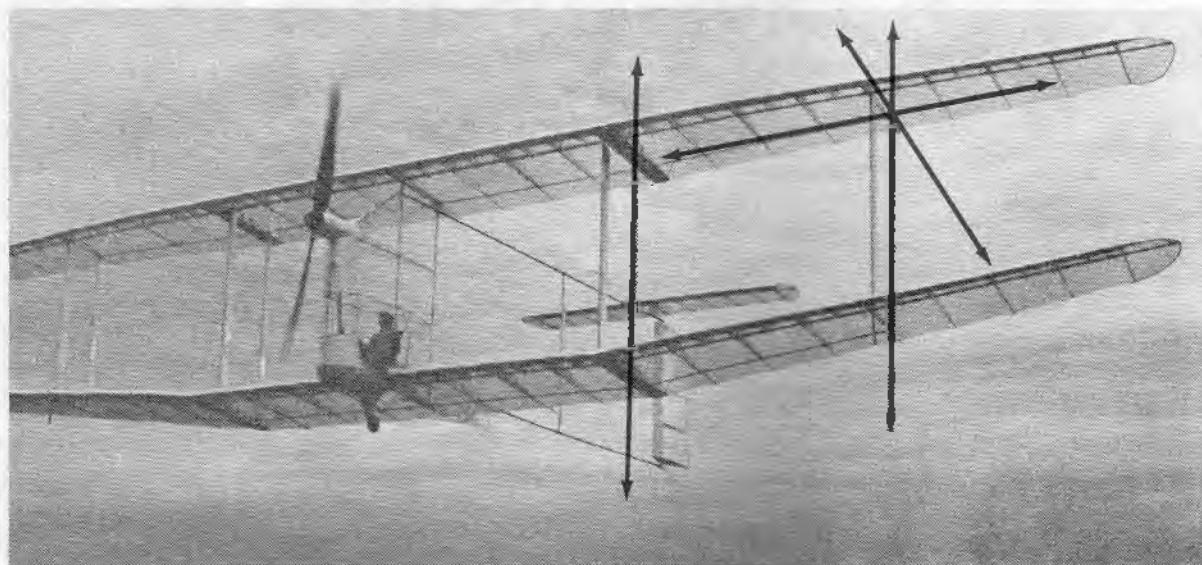
5

5.1	Definiciones básicas	170
5.2	Teoremas sobre rectas paralelas	174
5.3	El postulado de las rectas paralelas	180
5.4	Más teoremas sobre rectas paralelas	184
<i>Conceptos importantes</i>		190
<i>Resumen</i>		191
<i>Examen</i>		192
Repaso de álgebra 193		
La geometría en nuestro mundo		
Mineralogía: simetría 194		

Rectas y planos paralelos

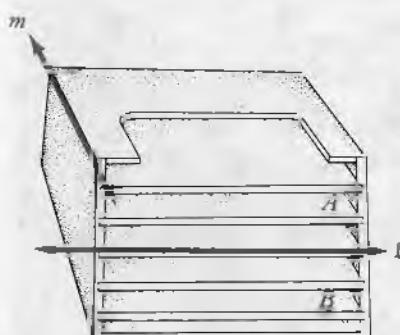


5.1 Definiciones básicas

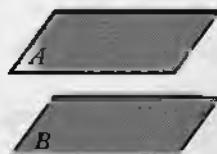


Unos estudiantes universitarios construyeron este biplano y lo llamaron «Chrysalis». Es accionado por pedales, como una bicicleta. Durante el verano de 1979, el avión realizó 320 vuelos.

Este biplano utiliza varios conceptos que se estudiarán en esta sección, como las rectas paralelas, rectas paralelas a un plano, planos paralelos y rectas no paralelas que no se intersecan.



Las rectas ℓ y m no están en el mismo plano y no se intersecan. Se denominan *rectas alabeadas*. La recta ℓ es paralela al plano A .



Los planos A y B no tienen puntos en común. Son *planos paralelos*.

Definición 5.1

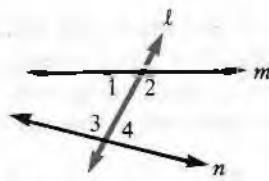
Las **rectas alabeadas** son dos rectas que no se intersecan y no están en mismo plano.

Definición 5.2

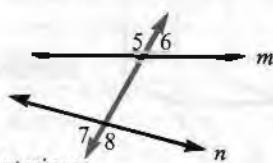
Una recta y un plano son **paralelos** si no tienen puntos en común.

Definición 5.3

Los **planos paralelos** son planos que no tienen puntos en común.



Ángulos interiores



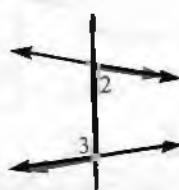
Ángulos exteriores

La recta ℓ interseca a las rectas m y n en dos puntos diferentes y forma **ángulos interiores y exteriores**. A ℓ se le llama *transversal*.

Definición 5.4

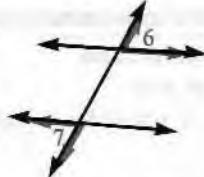
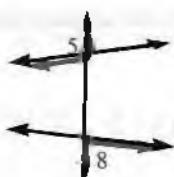
Una **transversal** es una recta que interseca a dos rectas coplanares en dos puntos diferentes.

Dos rectas cortadas por una transversal forman ángulos importantes para el estudio de las rectas paralelas.



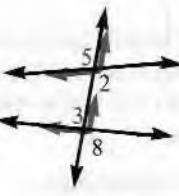
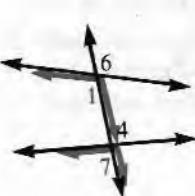
$\angle 1$ y $\angle 4$ son **ángulos alternos interiores**.
 $\angle 2$ y $\angle 3$ son **ángulos alternos interiores**.

Los **ángulos alternos interiores** son dos ángulos interiores con diferentes vértices en lados opuestos de la transversal.



$\angle 5$ y $\angle 8$ son **ángulos alternos exteriores**.
 $\angle 6$ y $\angle 7$ son **ángulos alternos exteriores**.

Los **ángulos alternos exteriores** son dos ángulos exteriores con diferentes vértices en lados opuestos de la transversal.



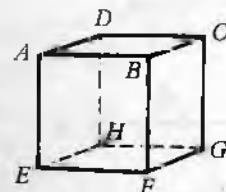
Hay cuatro pares de **ángulos correspondientes**: $\angle 1$ y $\angle 7$; $\angle 6$ y $\angle 4$; $\angle 5$ y $\angle 3$; $\angle 2$ y $\angle 8$.

Los **ángulos correspondientes** están en el mismo lado de la transversal. Uno de los ángulos es un ángulo exterior, el otro es un ángulo interior.

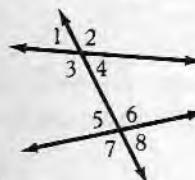
EJERCICIOS

- A. Los ejercicios 1 a 3 se refieren al cubo de la derecha. Un modelo de un cubo o una caja de zapatos puede ayudar a visualizar el cubo.

1. Citense cuatro rectas que sean alabeadas con \overleftrightarrow{AB} .
2. Citense seis rectas que sean paralelas al plano $ABCD$.
3. Citense tres pares de planos paralelos.
4. Citense dos pares de ángulos alternos interiores.
5. Citense dos pares de ángulos alternos exteriores.
6. Cítense el ángulo correspondiente con $\angle 1$.



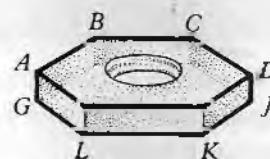
(Ejercicios 1-3)



(Ejercicios 4-6)

B.

7. Esta figura muestra una tuerca hexagonal. Citense tres pares de planos paralelos.
8. Varias rectas que contienen los extremos de esta figura son alabeadas con \overleftrightarrow{AB} . ¿Cuántas son?

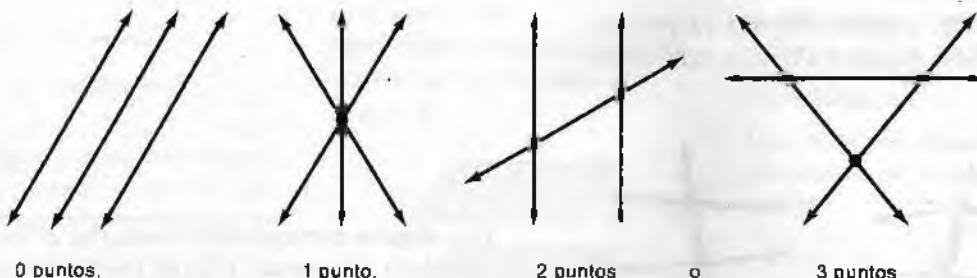


(Ejercicios 7, 8)

ACTIVIDADES

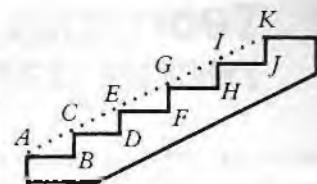
¿Cuántos puntos de intersección se forman con un número dado de rectas? Depende de sus posiciones en relación unas con otras.

Ejemplo: Tres rectas pueden formar:

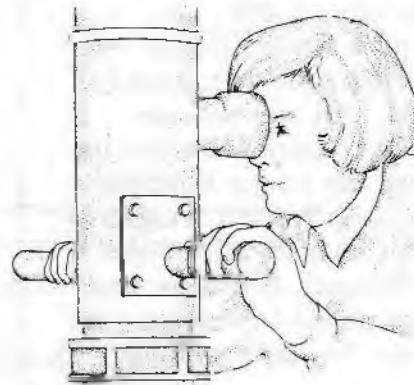
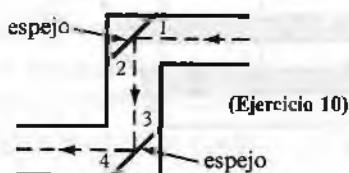


Experimento: Obsérvese si pueden disponerse cuatro rectas para formar un punto, dos puntos, tres puntos..., más de seis puntos de intersección. ¿Y cinco rectas?

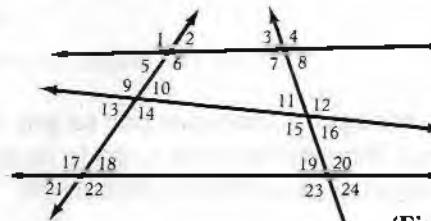
9. Un carpintero construyó una escalera cortando triángulos como $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ de un trozo de madera. ¿Con qué par de ángulos y con qué transversal son $\angle DCE$ y $\angle FEG$ ángulos correspondientes?



10. En un periscopio se coloca un par de espejos paralelos entre sí según muestra la figura. La trayectoria de la luz forma una transversal. ¿Qué par de ángulos son alternos interiores, $\angle 1$ y $\angle 3$, $\angle 1$ y $\angle 4$, $\angle 2$ y $\angle 3$, o $\angle 2$ y $\angle 4$?



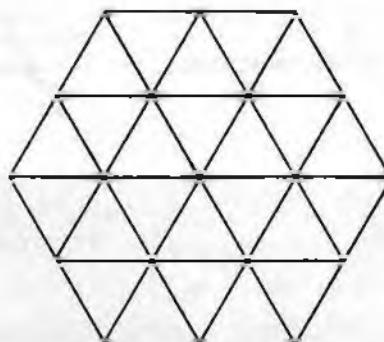
11. Citense dos pares de ángulos alternos interiores que incluyan al $\angle 14$.
 12. Citense tres pares de ángulos alternos exteriores que incluyan $\angle 21$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

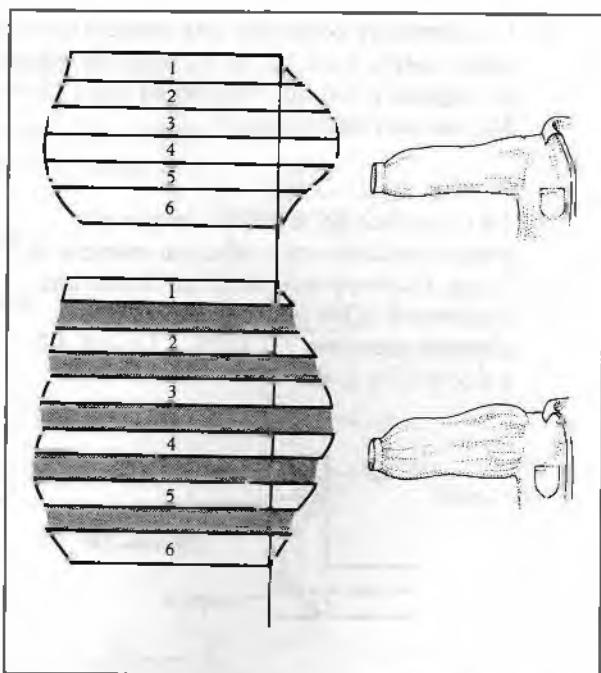
Elabórese una rejilla de rectas paralelas como la de la figura.

1. Colóquense cinco fichas rojas sobre cinco intersecciones de manera que no haya dos en la misma recta.
2. Despues, colóquense cinco fichas azules sobre cinco intersecciones de manera que no haya dos fichas sobre la misma recta.

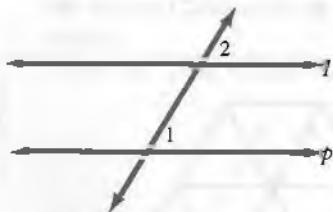


5.2 Teoremas sobre rectas paralelas

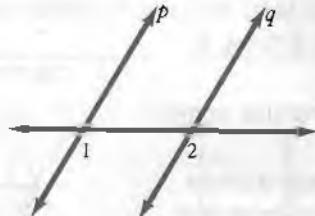
Las rectas paralelas se usan a diario de diversas formas. Los herreros colocan barras de acero paralelas entre sí. Los agrimensores, con frecuencia, marcan divisiones de propiedades paralelas entre sí. Los diseñadores de ropa también usan rectas paralelas. En la figura se muestra un patrón básico para una manga de camisa. Para elaborar un patrón de una manga más ancha, el diseñador traza rectas paralelas sobre el patrón. Entonces, las franjas formadas por estas paralelas se cortan y se separan para formar un nuevo patrón.



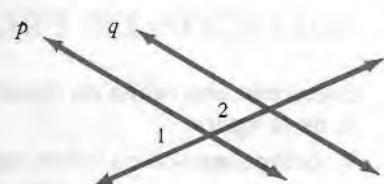
Los pares de ángulos formados por un par de rectas y una transversal son importantes en el trazado de rectas paralelas. Estas tres figuras sugieren una relación importante.



Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$.
Obsérvese que $p \parallel q$.



Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$.
Obsérvese que $p \parallel q$.



Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$.
Obsérvese que $p \parallel q$.

Teorema 5.1

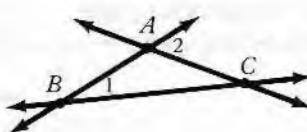
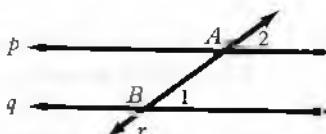
Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

PRUEBA

Dado: Las rectas p , q y r con $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $p \parallel q$.

Plan: Se supone $p \not\parallel q$. (Nota: $\not\parallel$ significa «no es paralela a».) Entonces, se considera el triángulo que se formaría y se encuentra una contradicción.



Afirmaciones	Razones
1. Supóngase que $p \not\parallel q$.	1. Suposición de la prueba indirecta.
2. Entonces, p y q se intersecan en un punto, sea C , y se forma $\triangle ABC$.	2. Replanteamiento de 1.
3. $\angle 2$ es un ángulo exterior de $\triangle ABC$.	3. Definición de ángulo exterior.
4. $\angle 1$ es un ángulo interior no contiguo con $\angle 2$.	4. Definición de ángulo interior no contiguo.
5. $m\angle 2 > m\angle 1$.	5. Teorema del ángulo exterior.
6. $m\angle 1 = m\angle 2$ (contradicción de $m\angle 2 > m\angle 1$).	6. Dado.
7. Por tanto, $p \parallel q$.	7. Lógica de la prueba indirecta.

Hay otros tres teoremas relacionados. ¿A qué teorema corresponde cada figura?

**Teorema 5.2**

Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos alternos interiores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Teorema 5.3

Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos alternos exteriores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Teorema 5.4

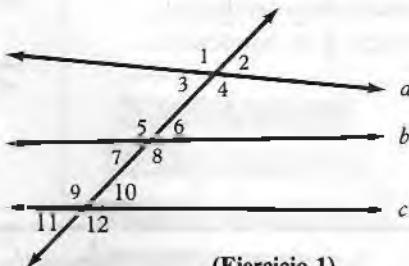
Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son suplementarios, entonces las rectas son paralelas.

EJERCICIOS

A.

1. En los siguientes casos, ¿qué rectas podría concluirse que son paralelas y qué teorema justifica la respuesta?

- $\angle 1 \cong \angle 9$.
- $\angle 3 \cong \angle 6$.
- $m\angle 8 + m\angle 10 = 180$.
- $\angle 4 \cong \angle 9$.
- $\angle 8 \cong \angle 12$.
- $\angle 1 \cong \angle 8$.



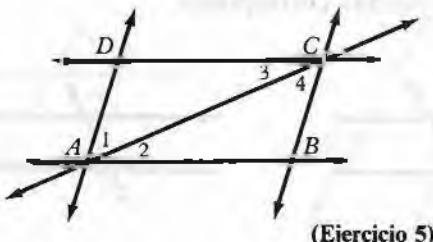
(Ejercicio 1)

2. Hágase una lista de todos los datos contradictorios que aparecen en la figura siguiente.

3. Cítense cuatro formas de probar que dos rectas son paralelas.

4. Estúdiense la fotografía de la página 170. Indiquense ejemplos de segmentos paralelos y una transversal.

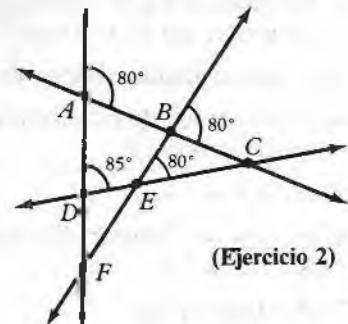
5. ¿Qué ángulos de esta figura se podría probar que son congruentes de manera que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$?



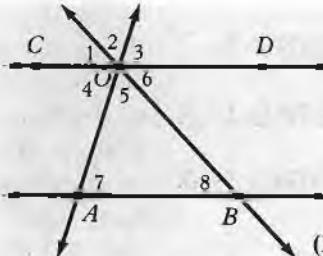
(Ejercicio 5)

6. ¿Qué pares de ángulos de esta figura se podría probar que son congruentes para mostrar que $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$?

7. ¿Qué pares de ángulos de esta figura se podría probar que son suplementarios para concluir que $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$?



(Ejercicio 2)



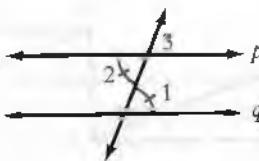
(Ejercicios 6, 7)

B.

8. Complétese la siguiente prueba a dos columnas para el teorema 5.2.

Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $p \parallel q$.



Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1 \cong \angle 2$.	1. ?
2. $\angle 2 \cong \angle 3$.	2. ?
3. $\angle 1 \cong \angle 3$.	3. Propiedad transitiva de la congruencia.
4. $p \parallel q$.	4. ?

En los ejercicios 9 a 12, formúlese una prueba completa a dos columnas.

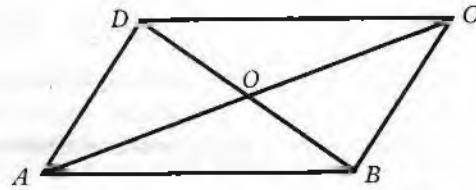
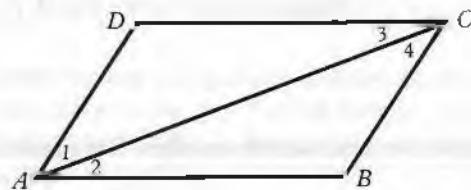
9. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
 $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

10. Dado: $\overline{DO} \cong \overline{OE}$
 $\overline{AO} \cong \overline{OC}$.

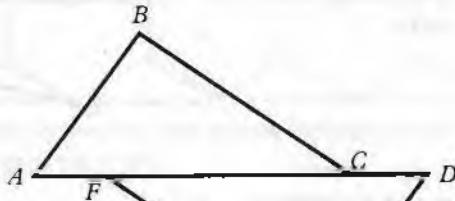
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

(Sugerencia: Primero demuéstrese que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.)



11. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
 $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
 $\overline{AF} \cong \overline{CD}$.

Pruébese: $\overline{BC} \parallel \overline{FE}$.



12. Dado: $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
 $\angle BCA \cong \angle EFD$
 $\overline{AF} \cong \overline{CD}$.

Pruébese: $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$.

(Ejercicios 11, 12)

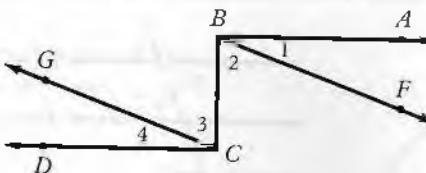
13. Pruébese que si dos rectas en un plano son perpendiculares a una recta, son paralelas.

14. Pruébese el teorema 5.3.

15. Pruébese el teorema 5.4.

C.

- 16. Dado:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}$
 $\overline{DC} \perp \overline{BC}$
 $\angle 1 \cong \angle 4$.

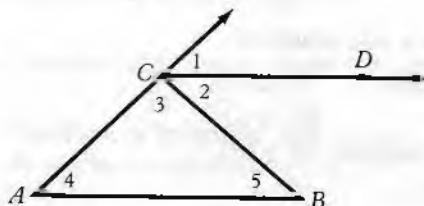
Pruébese: $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{GC}$.

(Ejercicios 16-18)

- 17. Dado:** $\angle ABC \cong \angle BCD$

 \overleftrightarrow{BF} biseca $\angle ABC$ \overleftrightarrow{CG} biseca $\angle BCD$.**Pruébese:** $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CG}$.

- 19. Dado:** $m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 5 = 180$
 $\angle 4 \cong \angle 5$.

Pruébese: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

- 18. Dado:** $\angle 2 \cong \angle 3$

 $\angle 1 \cong \angle 4$.**Pruébese:** $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

- 20.** Un diseñador usa una regla T para trazar un par de rectas paralelas en una hoja de papel. ¿Cómo se puede tener la seguridad de que las rectas son paralelas?

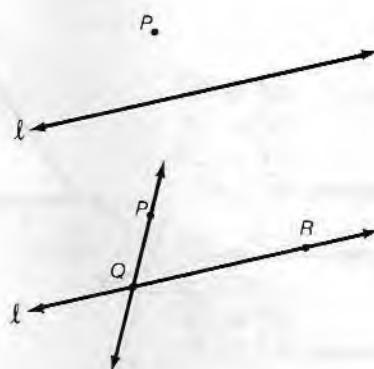


ACTIVIDADES



Trácese una recta ℓ y un punto P que no esté en esa recta.

Sólo con un compás y una regla trácese una recta a través de P que sea paralela a ℓ . (Sugerencia: Iniciese la construcción trazando una recta que pase por P y que interseque a la recta ℓ .)



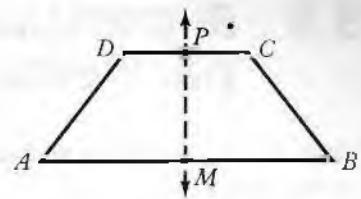
21. Dado: \overleftrightarrow{PM} es la bisectriz perpendicular de \overline{AB}

$$\angle A \cong \angle B$$

$$\overrightarrow{AD} \cong \overrightarrow{BC}$$

Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

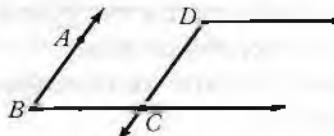
(Sugerencia: Trácese algunas rectas auxiliares. Una recta auxiliar es una recta que se añade a la figura para ayudar a probar un teorema o a solucionar un problema.)



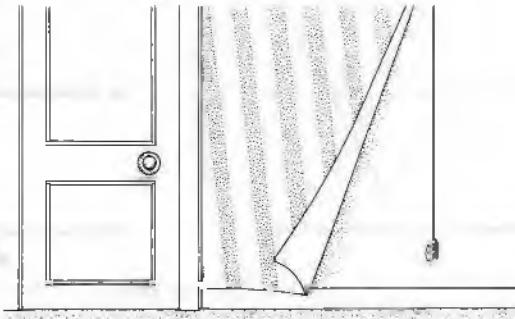
22. Dado: $\angle BCD \cong \angle D$

$$m\angle B + m\angle D = 180^\circ$$

Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.



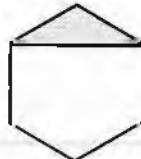
23. Una plomada (un peso suspendido de un cordel) sirve para marcar con yeso una recta sobre una pared. Si la primera hoja de papel tapiz se coloca a lo largo de la línea de yeso, ¿por qué asegura esto que el borde del papel es paralelo a las puertas, ventanas y esquinas del cuarto?



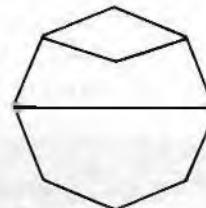
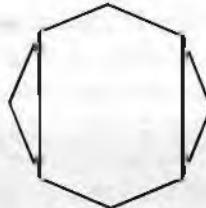
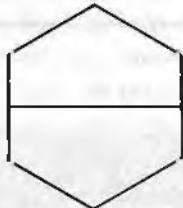
SOLUCION DE PROBLEMAS

Algunas formas poligonales pueden cortarse en piezas que se pueden colocar para conseguir nuevas formas poligonales. Las piezas recortadas cubren por completo la franja entre un par de rectas paralelas.

Ejemplo:



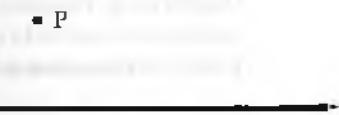
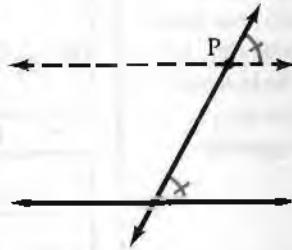
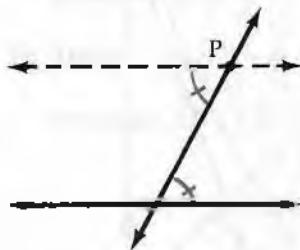
Muéstrese que las formas poligonales con los cortes indicados pueden colocarse para cubrir dicha franja paralela.



5.3 El postulado de las rectas paralelas

En la última actividad se trazó un par de rectas paralelas.

En realidad, hay tres métodos relacionados que podrían resumirse con estas tres figuras. Para establecer la corrección de estas construcciones podrían usarse los teoremas de la sección anterior.



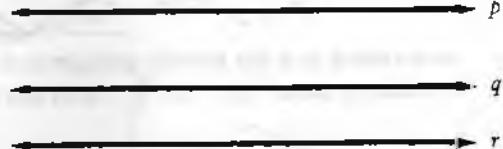
REPASO: Trácese una recta a través de P que sea paralela a ℓ .

Parece natural suponer, como se hizo en el postulado de las paralelas, que sólo hay una recta que pase por P y sea paralela a ℓ . Pero, ¿por qué es cierto esto? Esta pregunta es históricamente significativa (véase más adelante).

La prueba del teorema siguiente ilustra el uso del postulado de las paralelas.

Postulado de las paralelas

Dados una recta ℓ y un punto P que no está en la recta ℓ , existe sólo una recta a través de P que sea paralela a ℓ .



Teorema 5.5

Dadas las rectas p , q y r , si $p \parallel q$ y $q \parallel r$, entonces $p \parallel r$.

PRUEBA

Dado: Las rectas p , q y r son tres rectas distintas, $p \parallel q$, $q \parallel r$.

Pruébese: $p \parallel r$.



Afirmaciones	Razones
1. Supóngase que $p \parallel r$.	1. Suposición de la prueba indirecta.
2. p y r tienen un punto en común. Llámesele A .	2. Replanteamiento de 1.
3. $p \parallel q$.	3. Dado.
4. $r \parallel q$.	4. Dado.
5. Las rectas p y r son dos rectas distintas que pasan por A y son paralelas a q . (Contradicción del postulado de las paralelas que afirma que hay sólo una recta que pase por A y sea paralela a q .)	5. Afirmaciones 3 y 4.
6. Por tanto, $p \parallel r$.	6. Lógica de la prueba indirecta.



Karl Friedrich Gauss

IMPORTANCIA HISTORICA DEL POSTULADO DE LAS PARALELAS

Durante siglos, los matemáticos intentaron demostrar que el postulado de las paralelas era un teorema. Tales intentos fallaron una y otra vez. A principios del siglo XIX, tres matemáticos, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) y Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856), trabajando independientemente, intentaron separar el postulado de las paralelas del sistema euclidiano de postulados y probar que era un teorema. Utilizaron un método indirecto, pero en lugar de llegar a una contradicción, encontraron que esta suposición representaba un conjunto totalmente nuevo de teoremas, una geometría totalmente nueva. Este importante descubrimiento matemático dio lugar a lo que hoy se conoce como geometría no euclíadiana.

EJERCICIOS

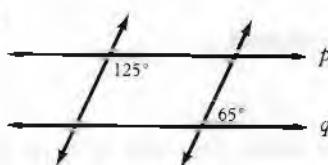
A.

1. Dése una expresión propia al postulado de las paralelas.
2. ¿Cuáles son las dos palabras más importantes del postulado de las paralelas?
3. Clasifiquense las siguientes afirmaciones en falsas o verdaderas.
 - a. Hay una recta que pasa por A y es paralela a ℓ .
 - b. Podría probarse que hay una recta que pasa por A y es paralela a ℓ aun sin usar el postulado de las paralelas.
 - c. El postulado de las paralelas dice que hay sólo una recta que pasa por A y es paralela a ℓ .
 - d. Si p es una recta que pasa por A y es perpendicular a ℓ , y q es una recta que pasa por A y es perpendicular a p , entonces $q \parallel \ell$.

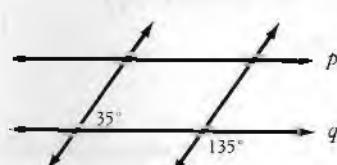
 A 

En los ejercicios 4 y 5, determíñese si se puede probar que las rectas p y q son paralelas.

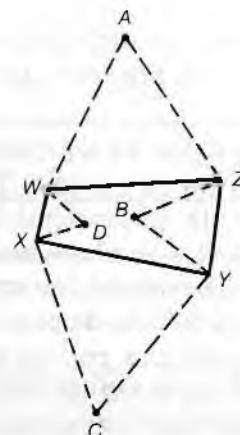
4.



5.

**ACTIVIDADES**

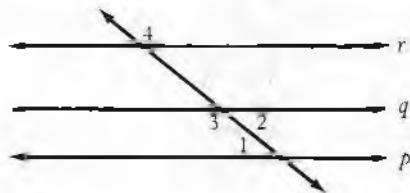
1. Con una regla, dibújese un cuadrilátero cualquiera $WXYZ$.
2. Dibújense triángulos equiláteros a cada lado del cuadrilátero, alternándolos en el interior y el exterior del cuadrilátero y llámese a los nuevos vértices A , B , C y D .
3. ¿Qué relación resulta verdadera para \overrightarrow{AD} y \overrightarrow{BC} , y para \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} ?
4. Enúnciese una generalización.



B.

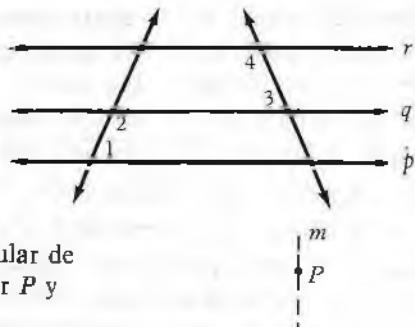
6. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 3 \cong \angle 4$.

Pruébese: $p \parallel r$.



7. Dado: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$
 $m\angle 3 + m\angle 4 = 180$.

Pruébese: $p \parallel r$.



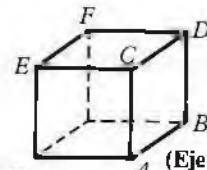
8. Dados una recta ℓ y un punto P , trácese la perpendicular de P a ℓ y llámese m . Trácese la recta \perp a m que pase por P y llámese r . ¿Cuál es la relación entre r y ℓ y por qué?

9. Muéstrese que la actividad de la página 178 da por resultado ℓ _____ un par de rectas paralelas.

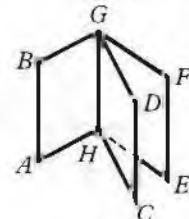
C.

Para los siguientes ejercicios puede suponerse que el teorema 5.5 es verdadero para rectas en el espacio, además de serlo para las rectas en un plano.

10. Si \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{EF} son las aristas de un cubo como muestra la figura, demuéstrese que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$.



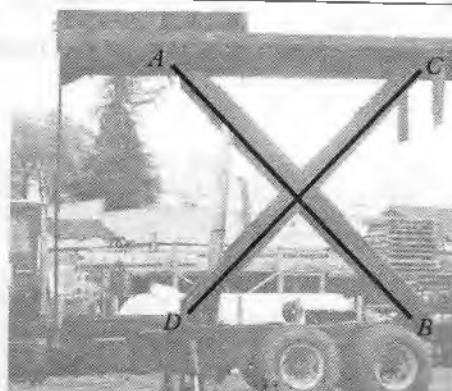
11. Si \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{EF} son los bordes de tres páginas de un libro (supóngase que se trata de páginas rectangulares), pruébese que \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{EF} son paralelos entre sí.



SOLUCION DE PROBLEMAS

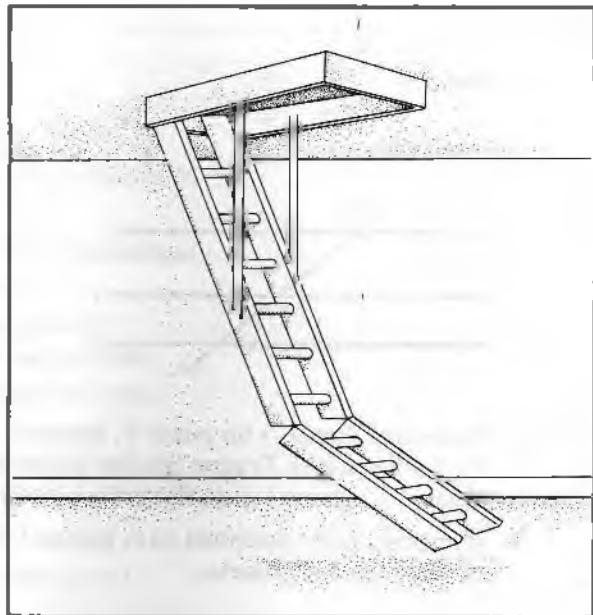
Esta fotografía muestra las «tijeras» de una plataforma de camión abiertas, alzando la plataforma a su altura máxima. Los soportes, designados como \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} , se bisecan.

Explíquese por qué estas condiciones significan que la plataforma del camión está paralela a la estructura base del camión.

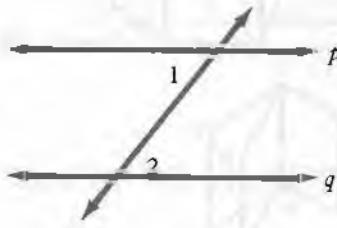


5.4 Más teoremas sobre rectas paralelas

Muchos aficionados a las reparaciones caseras compran escaleras plegables para instalar en el techo de la casa o del garaje. Estas escaleras se fabrican siempre de la misma longitud. La persona que la instala debe determinar cómo cortar la parte inferior de manera que la escalera se apoye firmemente sobre el piso, para lo cual se deben tener en cuenta la longitud y el ángulo. El hecho de que el piso y el techo son paralelos es muy importante para resolver este problema.

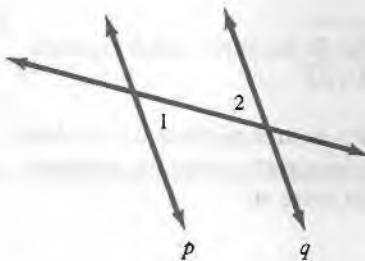


En estas figuras, ¿cuál es la relación entre $\angle 1$ y $\angle 2$?



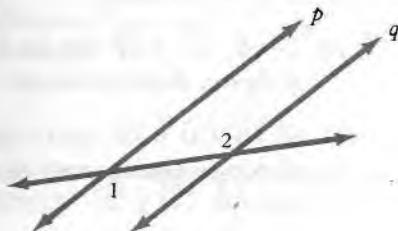
Dado: $p \parallel q$.

Obsérvese que $\angle 1 \cong \angle 2$.



Dado: $p \parallel q$.

Obsérvese que $\angle 1 \cong \angle 2$.



Dado: $p \parallel q$.

Obsérvese que $\angle 1 \cong \angle 2$.

Las figuras anteriores sugieren el siguiente teorema.

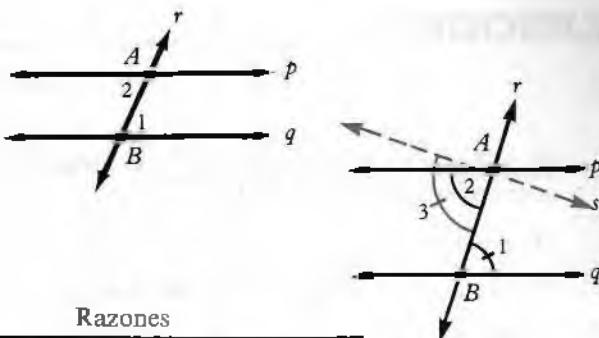
Teorema 5.6 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos interiores son congruentes.

PRUEBA

Dado: Las rectas $p \parallel q$ se cortan por la transversal r . $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos alternos interiores.

Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.

Plan: Supóngase que $\angle 1$ no es congruente con $\angle 2$ y encuéntrese una contradicción.



Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1$ no es congruente con $\angle 2$.	1. Suposición de la prueba indirecta.
2. Trácese una recta que pase por A para que $\angle 1 \cong \angle 3$ y $\angle 1$ y $\angle 3$ sean ángulos alternos interiores.	2. Construcción.
3. $q \parallel s$, A está en s .	3. Si los ángulos alternos interiores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
4. $p \parallel q$, A está en p .	4. Dado.
5. Hay dos rectas que pasan por A y son paralelas a q . (Contradicción del postulado de las paralelas.)	5. Afirmaciones 3 y 4.
6. $\angle 1 \cong \angle 2$.	6. Lógica de la prueba indirecta.

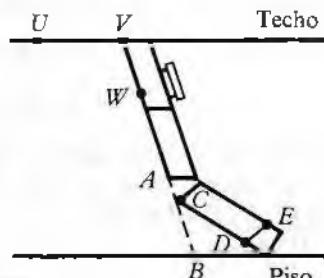
APLICACION

El teorema 5.6 puede usarse para resolver el problema planteado al principio de esta sección. ¿Cómo debe cortarse la parte inferior de la escalera?

Sígase este procedimiento.

1. Mídase AB y localícese un punto D de manera que $AB = CD$.
2. Mídase $\angle UVW$ y localícese un punto E de manera que $m\angle UVW = m\angle CDE$.

Hay varios teoremas adicionales que se desprenden de esto:



Teorema 5.7 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos exteriores son congruentes.

Teorema 5.8 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

Teorema 5.9 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios.

EJERCICIOS

A.

En la figura de los ejercicios 1 a 7, las rectas p y q son paralelas y $m\angle 3 = 55$.

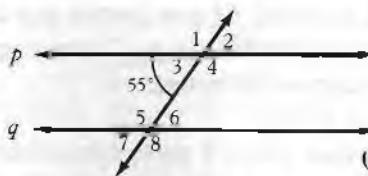
1. $m\angle 1 = ?$

2. $m\angle 2 = ?$

5. $m\angle 6 = ?$

3. $m\angle 4 = ?$

6. $m\angle 7 = ?$



(Ejercicios 1-7)

4. $m\angle 5 = ?$

7. $m\angle 8 = ?$

En la figura de los ejercicios 8 a 12, las rectas p y q son paralelas, y $m\angle 1 = 125$ y $m\angle 4 = 143$.

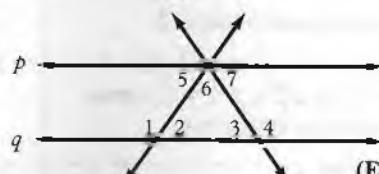
8. $m\angle 2 = ?$

9. $m\angle 3 = ?$

10. $m\angle 5 = ?$

11. $m\angle 7 = ?$

12. $m\angle 6 = ?$



(Ejercicios 8-12)

En la figura de los ejercicios 13 a 22, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$. Además, $m\angle ADC = 110$ y $m\angle ACD = 28$.

13. $m\angle 1 = ?$

14. $m\angle 10 = ?$

15. $m\angle 3 = ?$

16. $m\angle 4 = ?$

17. $m\angle 5 = ?$

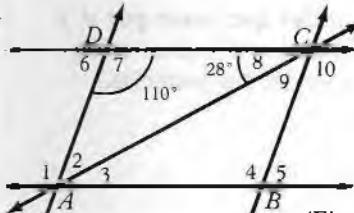
18. $m\angle 6 = ?$

19. $m\angle BCD = ?$

20. $m\angle 9 = ?$

21. $m\angle 2 = ?$

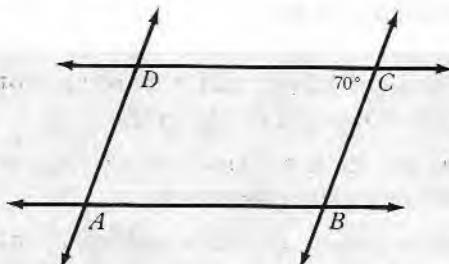
22. $m\angle RAD = ?$



(Ejercicios 13-22)

23. Supóngase que en la figura $m\angle BCD = 70$.

¿Cuáles deben ser las medidas de $\angle ABC$, $\angle CDA$ y $\angle DAB$ si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$?



B.

Para los ejercicios 24 y 25, supóngase que las rectas p y q son paralelas.

24. Si $m\angle 1 = 2x + 3$ y $m\angle 4 = 7x - 12$, encuéntrense $m\angle 1$ y $m\angle 2$.
25. Si $m\angle 1 = 2x + 4$, $m\angle 5 = 3y + 6$ y $m\angle 2 = 4y + 6$, encuéntrense las medidas de $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 5$.

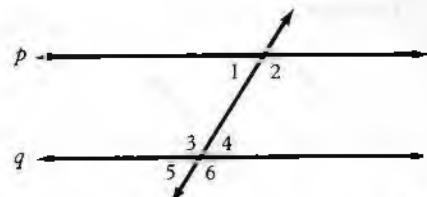
26. Pruébese el teorema 5.8.

27. Pruébese el teorema 5.9.

28. Pruébese el teorema 5.7.

29. Dado: $s \parallel t$
 $r \perp s$.

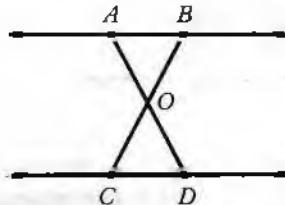
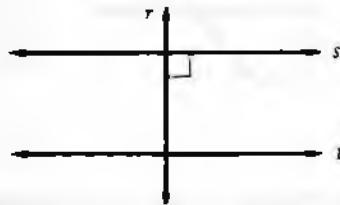
Pruébese: $r \perp t$.



(Ejercicios 24, 25)

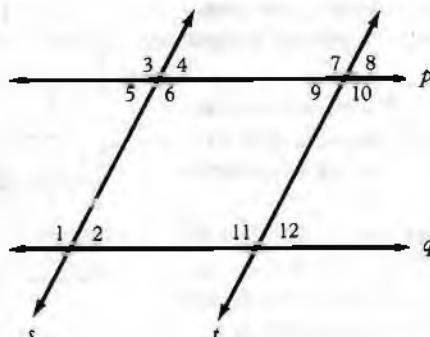
30. Dado: $\overline{AO} \cong \overline{OD}$
 $\overline{BO} \cong \overline{OC}$

Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



31. Dado: $p \parallel q$
 $s \parallel t$.

Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 7$
 $\angle 2 \cong \angle 9$.



(Ejercicios 31-33)

32. Dado: $p \parallel q$
 $\angle 3 \cong \angle 11$.

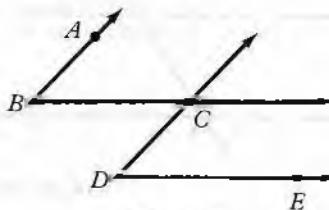
Pruébese: $s \parallel t$.

33. Dado: $s \parallel t$
 $\angle 9$ y $\angle 1$ son supplementarios
Pruébese: $p \parallel q$.

C.

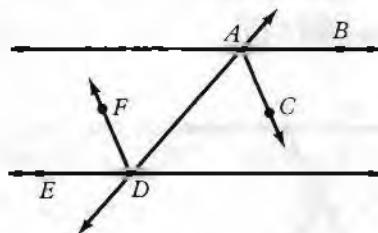
34. Dado: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$
 $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DE}$.

Pruébese: $\angle B \cong \angle D$.



36. Dado: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$
 \overrightarrow{AC} biseca $\angle BAD$
 \overrightarrow{DF} biseca $\angle ADE$.

Pruébese: $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FD}$.



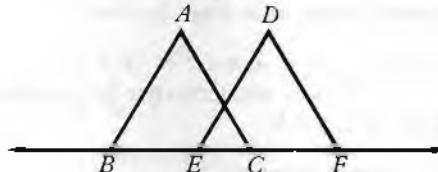
$\angle BAD \cong \angle EDA$; $m\angle BAD = \frac{1}{2}m\angle EDA$; use Theorem 5-2.

ACTIVIDADES

- Empiécese por un polígono que se pueda cortar en piezas y ser reordenado en una franja formando un patrón repetitivo (como en la página 179).
- Denominense los puntos A y B de manera que sean dos puntos cualesquiera que se correspondan entre si en piezas adyacentes de la franja.
- Trácese un par de rectas paralelas \overleftrightarrow{AD} y \overleftrightarrow{BC} como se muestra en la figura. Trácese $AE \perp BC$. Las piezas 1 a 5 obtenidas de esta forma pueden colocarse para formar el polígono original o un rectángulo.
- Repítase este procedimiento de tres pasos para los polígonos de la solución de problemas de la página 179. En cada caso colóquense las piezas cortadas para formar un rectángulo.

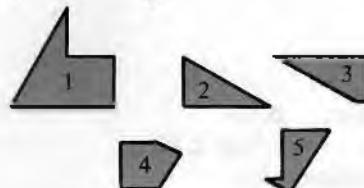
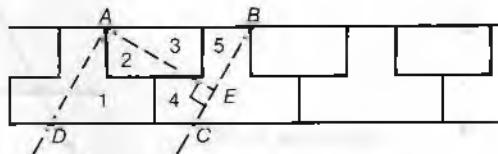
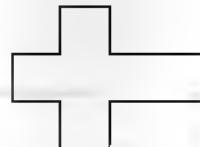
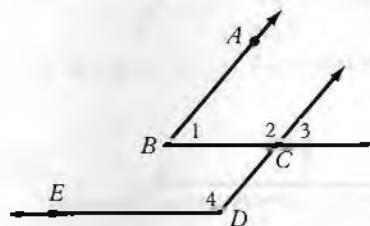
35. Dado: $\angle A \cong \angle D$
 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$
 $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{DE}$.

Pruébese: $\overrightarrow{BC} \cong \overrightarrow{EF}$.

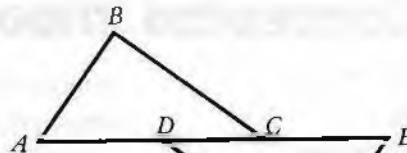


37. Dado: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$
 $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DE}$.

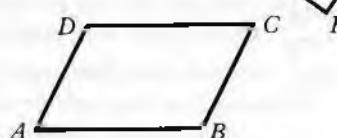
Pruébese: $m\angle 1 + m\angle 4 = 180$.



38. Dado: $\overline{AD} \cong \overline{EC}$
 $\overline{BC} \cong \overline{FD}$
 $\overline{BC} \parallel \overline{FD}$.
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$.

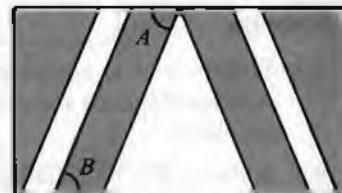


39. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, pruébese que $\angle B \cong \angle D$.



40. Pruébese: Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, entonces, los otros dos lados opuestos son congruentes y paralelos.

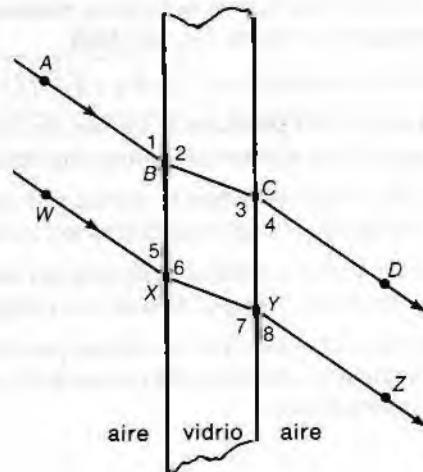
41. Un decorador de interiores está pegando tiras de papel tapiz en una pared para hacer un diseño de franjas inclinadas. Al cortar el papel, ¿cómo sabe el decorador que $\angle A$ y $\angle B$ deben ser congruentes?



SOLUCION DE PROBLEMAS

Los rayos de luz se inclinan al pasar a través de un vidrio. Supóngase que un rayo de luz sufre la misma inclinación al entrar que al salir del vidrio. Explíquense dos cosas:

1. ¿Por qué el rayo sale en dirección paralela a la de entrada? Esto es, ¿por qué \overline{AB} es paralela a \overline{CD} ?
2. ¿Por qué los rayos que son paralelos al entrar son paralelos también al salir? Esto es, ¿por qué $\overline{AB} \parallel \overline{WX}$ implica $\overline{CD} \parallel \overline{YZ}$?



Capítulo 5 Conceptos importantes

Términos

- Rectas alabeadas (pág. 170)
- Rectas y planos paralelos (pág. 170)
- Planos paralelos (pág. 170)
- Transversal (pág. 171)
- Ángulos alternos interiores (pág. 171)
- Ángulos alternos exteriores (pág. 171)
- Ángulos correspondientes (pág. 171)

Postulado

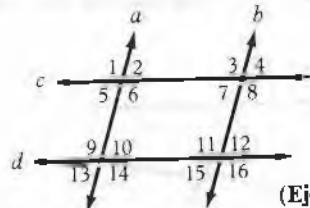
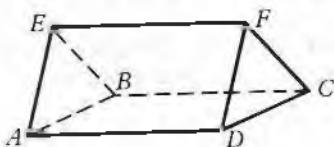
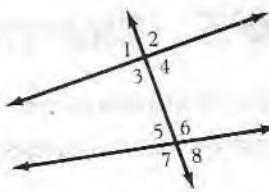
Postulado de las paralelas: Dadas una recta ℓ y un punto P que no está en ℓ , existe sólo una recta que pasa por P y es paralela a ℓ .

Teoremas

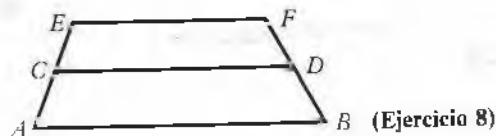
- 5.1 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
- 5.2 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos alternos interiores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
- 5.3 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos alternos exteriores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
- 5.4 Si dos rectas se cortan por una transversal, y un par de ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios, entonces las rectas son paralelas.
- 5.5 Dadas las rectas p , q y r , si $p \parallel q$ y $q \parallel r$, entonces $p \parallel r$.
- 5.6 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos interiores son congruentes.
- 5.7 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos exteriores son congruentes.
- 5.8 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
- 5.9 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios.

Capítulo 5 Resumen

1. a. Cítense pares de ángulos alternos interiores.
b. Cítense pares de ángulos alternos exteriores.
c. Cítense pares de ángulos correspondientes.
2. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
 - a. Si dos rectas son paralelas y se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
 - b. Si dos rectas se cortan por una transversal para formar ángulos alternos interiores, entonces las rectas son paralelas.
 - c. Si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces las dos rectas son paralelas.
3. a. Cítese un par de planos paralelos.
b. Cítese un par de rectas alabeadas.
4. Si $m\angle 6 = 120$ y $m\angle 12 = 60$, ¿puede probarse que $a \parallel b$?
5. Si $m\angle 13 = 55$, $a \parallel b$, y $c \parallel d$, encuéntrese $m\angle 4$.
6. Dado: $a \parallel b$, $c \parallel d$, $m\angle 1 = 8x - 2$, $m\angle 11 = 7x + 11$. Despéjese x y encuéntrese $m\angle 10$.
7. Dado: $c \parallel d$
 $\angle 8$ y $\angle 10$ son suplementarios.
Pruébese: $a \parallel b$.
8. Dado: $\angle ECD \cong \angle EAB$.
Pruébese: $\angle FDC \cong \angle FBA$.



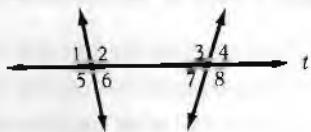
(Ejercicios 4-7)



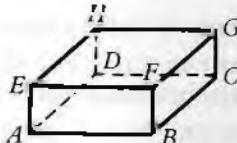
(Ejercicio 8)

Capítulo 5 Examen

1. a. Cítense un par de ángulos alternos interiores que incluyan $\angle 2$.
 b. Cítense un par de ángulos correspondientes que incluyan $\angle 2$.



2. a. Cítense un par de planos paralelos.
 b. Cítense un par de rectas alabeadas.

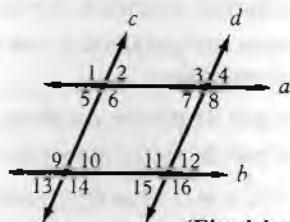


3. Si $a \parallel b$, $m\angle 10 = 70$ y $m\angle 7 = 70$, ¿puede decirse que $c \parallel d$?

4. Si $m\angle 6 = 115$, $m\angle 7 = 65$ y $m\angle 15 = 65$, encuéntrese $m\angle 13$.

5. **Dado:** $a \parallel b$, $c \parallel d$, $m\angle 11 = 7x$ y $m\angle 8 = 5x + 32$.
 Despójese x y encuéntrese $m\angle 6$.

6. Si a interseca a b , ¿puede ser que $m\angle 1 = m\angle 2$? Explíquese.



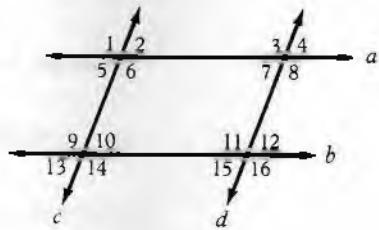
(Ejercicios 3-5)



7. **Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 2$ y $\angle 3$ son suplementarios.
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$.



8. **Dado:** $c \parallel d$, $\angle 8 \cong \angle 14$.
Pruébese: $a \parallel b$.



Repaso de álgebra

Despejese x en las ecuaciones siguientes:

1. $3x + 5 = 21 - x.$

4. $5 + 2(x - 4) = 19.$

7. $4(x - 2) = 4 - (x + 2).$

2. $10 - 6x = 4 + 2(1 - x).$

5. $\frac{1}{2}(2x - 6) = 2x + 5.$

8. $\frac{1}{2}x + 2(x - 4) = 17.$

3. $5 - x = -3x.$

6. $\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = 1.$

9. $2(x + 4) = 3(4 - x).$

Despejese x en las desigualdades siguientes:

10. $-x > 9.$

13. $3(x - 2) < 8.$

16. $3x + 7 > 2x - 4.$

11. $x + 2 < 7.$

14. $15 - 2x < x.$

17. $2|x| < 10.$

12. $2x + 6 > 17.$

15. $\frac{2x}{3} > 24.$

18. $|x + 2| > 14.$

Evalúese. Exprésense fracciones en términos menores:

19. $\sqrt{8}.$

22. $8(8 - 6\sqrt{16}).$

25. $\frac{7\sqrt{196}}{14\sqrt{64}}.$

20. $\sqrt{640}.$

23. $\sqrt{75} - \sqrt{12}.$

26. $\sqrt{\frac{4}{9}}.$

21. $\sqrt{27} + \sqrt{3}.$

24. $\sqrt{108} + 3\sqrt{3}.$

27. $\sqrt{18} - \frac{\sqrt{8}}{8}.$

Despejense x e y en los sistemas de ecuaciones siguientes:

28. $x = 2$

$x + y = 5.$

29. $2x + y = 14$

$3x + y = 4.$

30. $x = 2y + 1$

$y = 2x - 20.$

31. $x - y = 2$

$x + y = 6.$

32. $3x + 4y = 14$

$x - 3y = -17.$

33. $x + y = 10$

$x - y = 18.$

34. $3x + 4y = 18$

$6x - 4y = 0.$

35. $y = 2x$

$x + 3y = 49.$

36. $2x + y = 6$

$-3x + 2y = 8\frac{1}{2}.$

Resuélvase

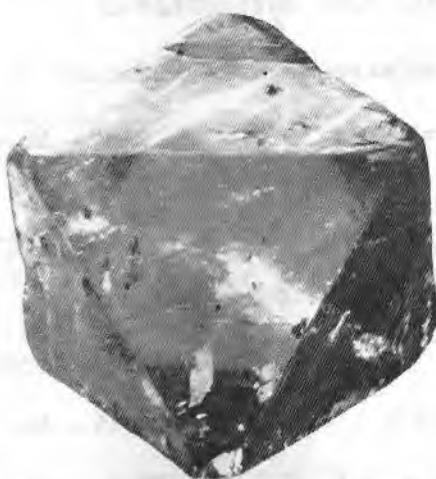
37. El ancho de un rectángulo es tres veces su longitud. Encuéntrense la longitud y la anchura del rectángulo si su perímetro es 24.

38. Un par lineal de ángulos mide $x + 20$ y $x + 30$. Encuéntrese la medida de cada ángulo.

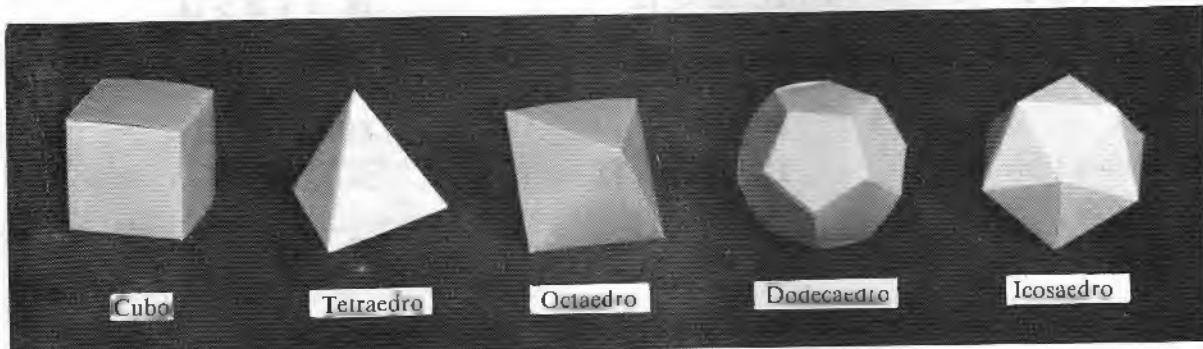
LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

Mineralogía: simetría

En general, los minerales presentan disposiciones regulares de átomos que tienen cierta simetría geométrica. Aunque los cristales no siempre muestran una simetría perfecta, algunos tienen formas parecidas a la de alguno de los cinco poliedros que se muestran a continuación. Tales cristales tienen ejes de simetría de revolución y planos de simetría de reflexión.

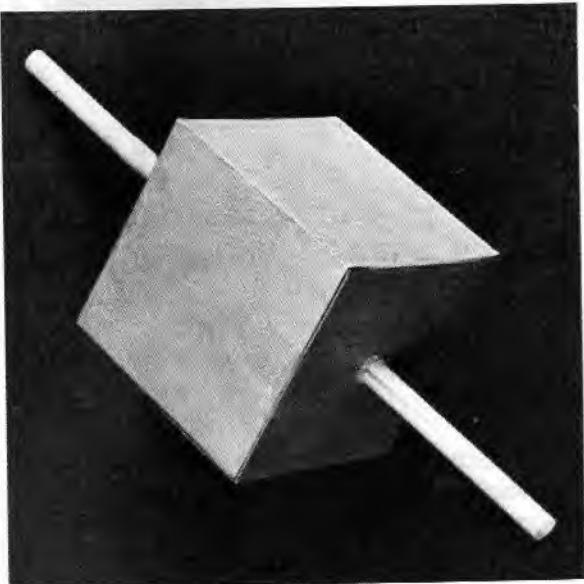
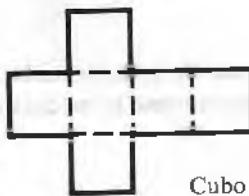


Fluorita

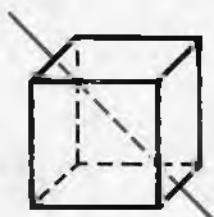


- 1 Encuéntrense ejes de simetría de revolución para un sólido.

Puede plegarse un patrón como el que se muestra aquí y construir un cubo. Háganse dos orificios pequeños e introduzcase un sorbete a través del cubo como ilustra la fotografía. Si se hace girar el cubo 90° cuatro veces sobre el eje, el sorbete, volverá a su posición original. Dado que esto es verdadero, se dice que el sorbete representa un *eje de simetría de revolución de cuarto orden*.

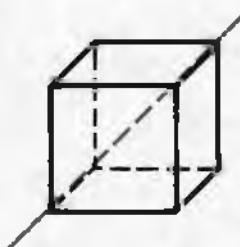


A continuación se muestran los tres ejes de simetría para un cubo.



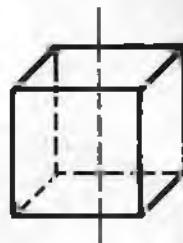
Segundo orden

Una recta que pasa por los puntos medios de aristas opuestas.



Tercer orden

Una recta que pasa por un par de vértices opuestos.



Cuarto orden

Una recta que pasa por el centro de caras opuestas.

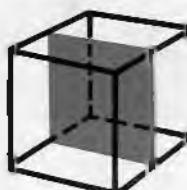
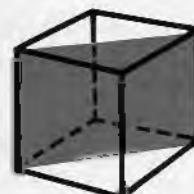
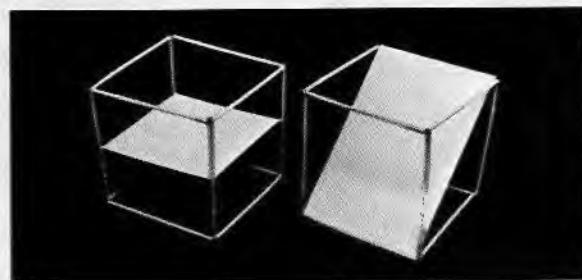
- ¿Cuántos ejes de simetría de segundo orden puede tener un cubo?
- ¿Cuántos ejes de simetría de tercer orden puede tener un cubo?
- ¿Cuántos ejes de simetría de cuarto orden puede tener un cubo?

2

Encuéntrense planos de simetría de reflexión para un sólido

Puede construirse un modelo de un cubo con 12 sorbetos unidos con servilletas congruentes de papel como se ilustra en la fotografía. Cúrtense «planos» de cartulina y úsense para visualizar los planos de simetría como se muestra en los dibujos.

- Un plano que pasa por aristas opuestas de un cubo, como en el primer dibujo, es un plano de simetría para el cubo. ¿Cuántos planos de simetría de este tipo tiene un cubo?
- Un plano situado en el centro de un par de caras opuestas de un cubo es un plano de simetría para el cubo. ¿Cuántos planos de simetría de este tipo tiene un cubo?



CAPITULO

6

- 6.1 Clasificación de los triángulos** 198
- 6.2 Triángulos isósceles** 202
- 6.3 Medidas de los ángulos de un triángulo** 208
- 6.4 El teorema de la congruencia LAA** 212
- 6.5 El teorema de la congruencia de la hipotenusa y el cateto** 216

Conceptos importantes 220 *Resumen* 221 *Examen* 222

Técnicas para la solución de problemas

Hacer una tabla-II 223

collagemixx sei ab sofort ein 3D-Druck

Triángulos



6.1 Clasificación de los triángulos



Las velas del barco de la fotografía ilustran diferentes formas de triángulos. Los triángulos pueden clasificarse según la longitud de sus lados o según la medida de sus ángulos.

REPASO: Un **triángulo equilátero** es un triángulo con los tres lados congruentes.

REPASO: Un **triángulo isósceles** es un triángulo que tiene al menos dos lados congruentes.



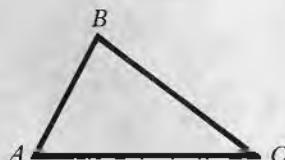
Ningún lado tiene la misma longitud.

$\triangle GHI$ es un *triángulo escaleno*.

Definición 6.1

Un **triángulo escaleno** es un triángulo que no tiene lados congruentes.

Los triángulos también se clasifican según la medida de sus ángulos.

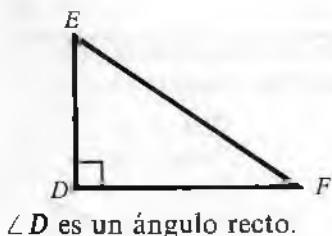


Todos los ángulos son agudos.

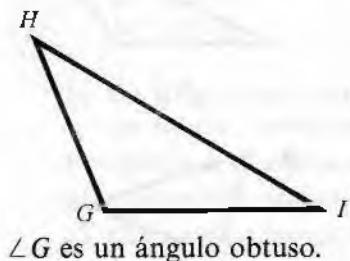
$\triangle ABC$ es un *triángulo acutángulo*.

Definición 6.2

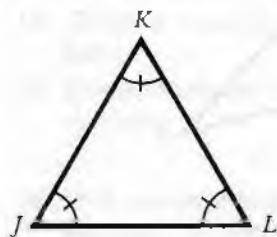
Un **triángulo acutángulo** es un triángulo con tres ángulos agudos.



$\triangle DEF$ es un *triángulo rectángulo*. El lado \overline{EF} es la *hipotenusa*. \overline{DE} y \overline{DF} son los *catetos*.

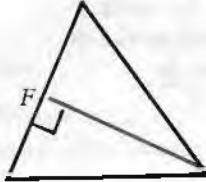
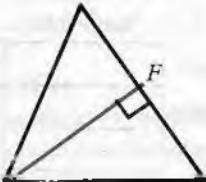
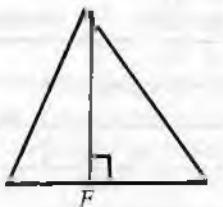


$\triangle GHI$ es un *triángulo obtusángulo*.



$\triangle JKL$ es un *triángulo equiángulo*.

Para cualquier triángulo hay tres segmentos denominados *alturas*.



Definición 6.3

Un **triángulo rectángulo** es un triángulo que tiene un ángulo recto.

Definición 6.4

Un **triángulo obtusángulo** es un triángulo que tiene un ángulo obtuso.

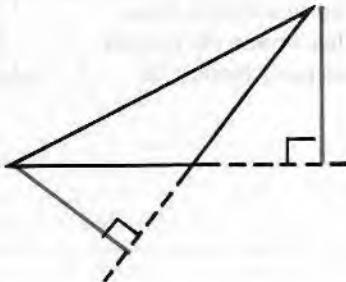
Definición 6.5

Un **triángulo equiángulo** es un triángulo que tiene tres ángulos congruentes.

Definición 6.6

Una **altura** de un triángulo es un segmento que va de un vértice a un punto F en el lado opuesto (quizá extendido) y es perpendicular a ese lado opuesto.

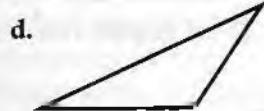
Obsérvese que en un triángulo rectángulo dos de las alturas coinciden con los lados del triángulo. En un triángulo obtusángulo, dos alturas tienen catetos en las extensiones de los lados.



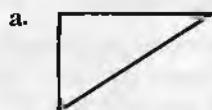
EJERCICIOS

A.

1. Clasifíquense estos triángulos en escaleno, isósceles o equilátero.

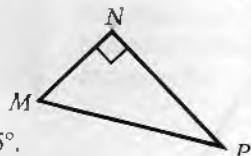


2. Clasifíquense estos triángulos en acutángulo, obtusángulo o rectángulo.



3. Denominíense estas partes del triángulo rectángulo MNP .

- a. Ángulo recto. b. Catetos.
c. Hipotenusa. d. Alturas.



4. Dibújese un triángulo isósceles que tenga un ángulo de 45° .



5. Dibújese un triángulo rectángulo escaleno.



6. Dibújese un triángulo obtusángulo que tenga un ángulo de 30° .



7. Dibújese un triángulo equilátero y trácese una altura.



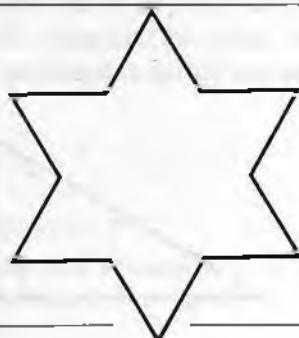
8. Dibújese un triángulo obtusángulo y trácense todas sus alturas.

9. Dibújese y dense nombres a una tabla como la de la derecha. En cada casilla de la tabla, si es posible, dibújese un triángulo que satisfaga las dos condiciones.

	equilátero	isosceles	escaleno
acutángulo			
rectángulo			
obtusángulo			

ACTIVIDADES

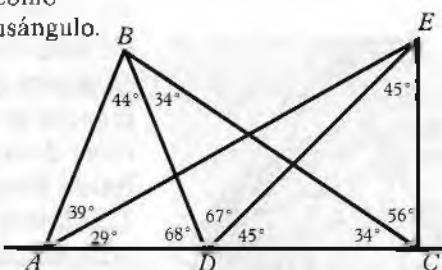
Dibújense tres copias de la estrella más pequeña. Córtese por las líneas de puntos y colóquense las piezas para formar la estrella grande.



B.

10. Identifiquense los triángulos como acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

- $\triangle ABD$.
- $\triangle ABC$.
- $\triangle ADE$.
- $\triangle BDC$.
- $\triangle ACE$.
- $\triangle DCE$.



11. En la figura de la derecha, identifiquense las alturas y sus triángulos respectivos.

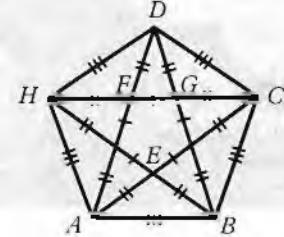
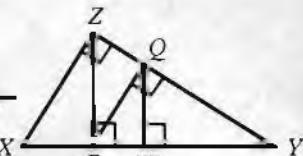
Los ejercicios 12 a 14 se refieren al pentágono $ABCDH$.

12. Citense dos triángulos isósceles que tenga \overline{AB} como lado desigual.

13. Citense dos triángulos isósceles que tenga \overline{AB} como uno de los lados iguales.

14. Citese un triángulo isósceles que tenga \overline{FG} como uno de los lados.

15. Citense todos los triángulos equiláteros y escalenos de la figura siguiente.



C

16. ¿Por qué un triángulo equilátero también es isósceles? Explíquese haciendo referencia a la definición de «triángulo isósceles».

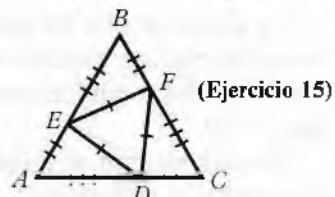
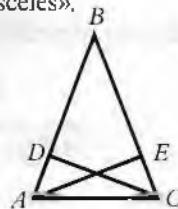
17. **Dado:** Un triángulo isósceles ABC con B como ángulo del vértice.

\overline{AE} es la altura de A a \overline{BC} .

\overline{CD} es la altura de C a \overline{AB} .

$\overline{AD} \cong \overline{CE}$.

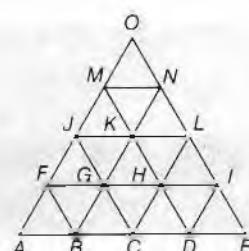
Pruébese: $\angle BAE \cong \angle BCD$.



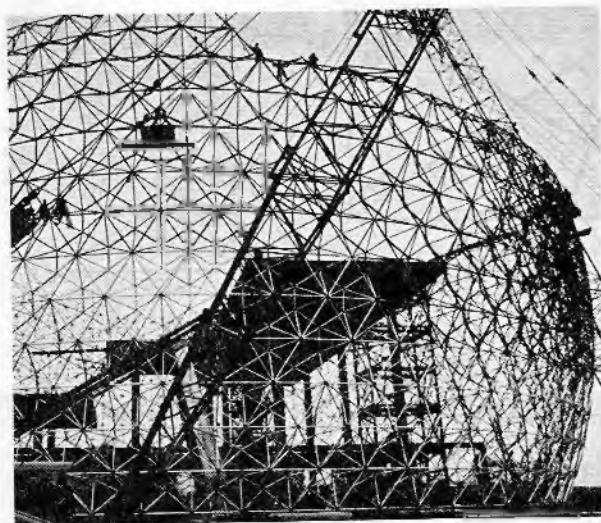
18. Cuatro triángulos equiláteros pueden colocarse para formar un triángulo equilátero más grande. ¿Cómo pueden colocarse cuatro triángulos obtusángulos para formar un triángulo obtusángulo más grande de la misma forma que el original?

SOLUCION DE PROBLEMAS

En esta figura hay 27 triángulos equiláteros. Citense todos los posibles.



6.2 Triángulos Isósceles



En todo el mundo se han construido miles de domos geodésicos. Uno de los más grandes se construyó en 1958. Se trata de un taller de reparación de automóviles de Baton Rouge, Louisiana. Este domo tiene 117 metros de diámetro y 35 de altura. Para la exposición de Montreal de 1967, también se construyó un domo, la fotografía muestra su proceso de construcción.

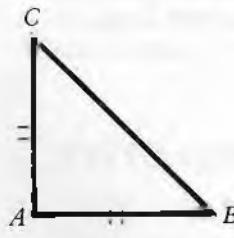
La estructura de un domo se construye uniendo muchos triángulos. De estos triángulos, muchos tienen lados de igual longitud, lo cual significa que son isósceles o equiláteros (Véase «La geometría en nuestro mundo», pág. 126).

En esta sección se estudiarán algunas propiedades importantes de estos dos tipos de triángulos.

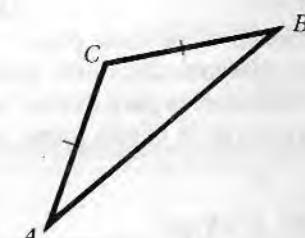
$$\overline{AB} \cong \overline{AC}$$

$$\overline{AC} \cong \overline{BC}$$

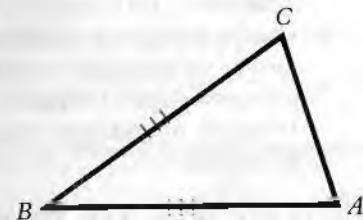
$$\overline{AB} \cong \overline{BC}$$



Obsérvese que $m\angle B = m\angle C$.



Obsérvese que $m\angle A = m\angle B$.



Obsérvese que $m\angle A = m\angle C$.

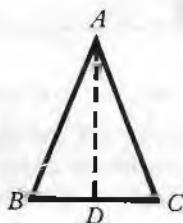
Teorema 6.1 Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de su base son congruentes.

PRUEBA

Dado: Sea $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Pruébese: $\angle B \cong \angle C$.

Plan: Sea D el punto medio de \overline{BC} . Trácese \overline{AD} y pruébese que $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

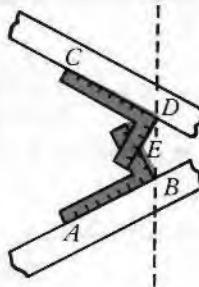


Afirmaciones	Razones
1. $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.	1. Dado.
2. D es el punto medio de \overline{BC} .	2. Cada segmento de recta tiene un, y sólo un, punto medio.
3. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.	3. Un segmento desde el vértice de un ángulo al punto medio del lado opuesto forma un par de triángulos congruentes (Teorema 4.2).
4. $\angle B \cong \angle C$.	4. PCTCC.

APLICACION

Se van a cortar dos tablitas de madera convergentes de manera que puedan clavarse a una tabla a lo largo de una línea.

Se colocan dos escuadras de carpintero de forma que $BE = DE$. Los puntos B y D determinan la línea de forma que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. ¿Por qué? Las escuadras de carpintero se colocan de manera que $\triangle BDE$ es un triángulo isósceles. Por tanto, $\angle EBD \cong \angle EDB$, con lo cual puede concluirse que $m\angle ABD = 90 + m\angle EBD = m\angle EDB + 90 = m\angle CDB$.



A continuación se presentan otros dos teoremas. El teorema 6.2 es un caso especial del teorema 6.1.

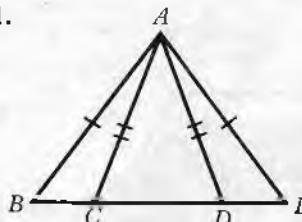
Teorema 6.2 Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.

Teorema 6.3 Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

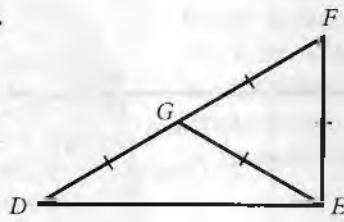
EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 3, los segmentos que tienen marcas idénticas se consideran congruentes. Cítense todos los pares de ángulos que, según el teorema 6.1, son congruentes.

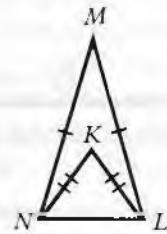
1.



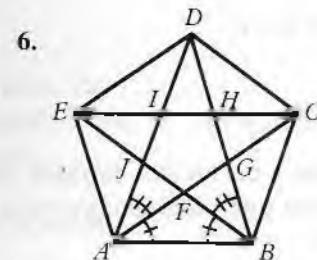
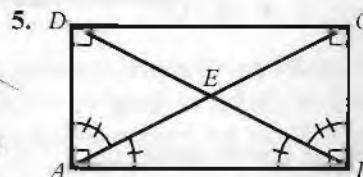
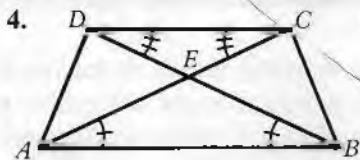
2.



3.



En los ejercicios 4 a 6, los ángulos que tienen marcas idénticas se consideran congruentes. Cítense los triángulos isósceles.



7. $m\angle ABC = ?$

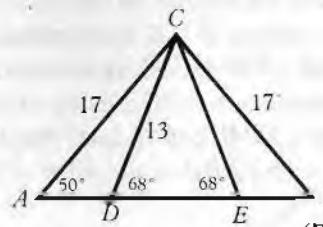
8. $CE = ?$

9. $m\angle ACD = ?$

10. $BC = ?$

11. $AB = ?$

12. $m\angle ADB = ?$



(Ejercicios 7, 8)

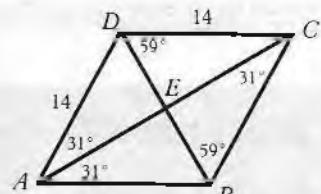
B.

13. $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Si $AB = 4x$ y $BC = 6x - 15$, encuéntrense AB y BC .

14. En $\triangle DEF$, $\overline{DE} \cong \overline{EF}$. Si $DE = 4x + 15$, $EF = 2x + 45$ y $DF = 3x + 15$, encuéntrense las longitudes de los lados del triángulo.

15. En $\triangle XYZ$, $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$. Si $m\angle X = 4x + 60$, $m\angle Y = 2x + 30$ y $m\angle Z = 14x + 30$, encuéntrense $m\angle X$, $m\angle Y$ y $m\angle Z$.

16. En $\triangle ABC$, $\angle A \cong \angle C$. Si $AB = 4x + 25$, $BC = 2x + 45$ y $AC = 3x - 15$, encuéntrense las longitudes de los tres lados.

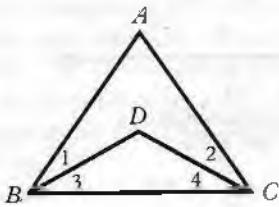


(Ejercicios 9-12)

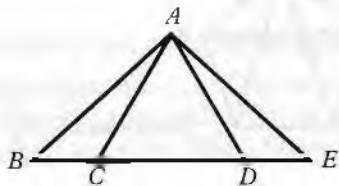
Escríbase una demostración a dos columnas para cada uno de los ejercicios 17 a 24.

- 17. Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
 $\overline{DB} \cong \overline{DC}$.

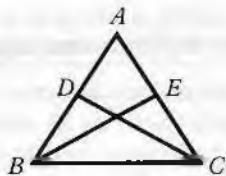
Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.



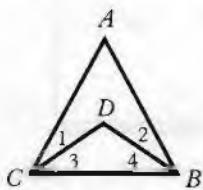
- 19. Dado:** $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, $\overline{BC} \cong \overline{ED}$.
Pruébese: $\triangle ABE$ es isósceles.



- 21. Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
 \overline{BE} biseca a $\angle B$
 \overline{CD} biseca a $\angle C$.
Pruébese: $\overline{CD} \cong \overline{BE}$.



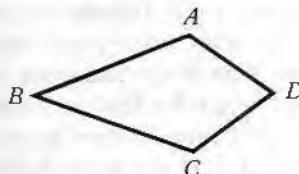
- 23. Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
 $\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle BCD$ es isósceles.



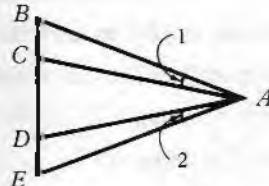
- 18. Dado:** $ABCD$ es un cuadrilátero con
 $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DA} \cong \overline{DC}$.

Pruébese: $\angle BAD \cong \angle BCD$.

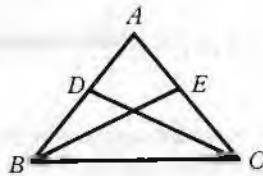
(Sugerencia: Añádase una línea auxiliar.)



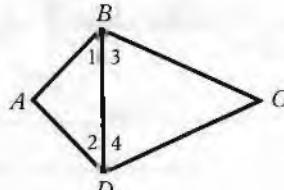
- 20. Datos:** $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle AEC$.



- 22. Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
 \overline{BE} biseca a $\angle B$
 \overline{CD} biseca a $\angle C$.
Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{AE}$.



- 24. Dado:** $\angle ABC \cong \angle ADC$
 $\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$.



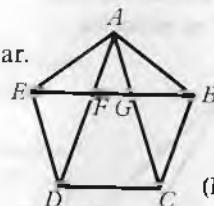
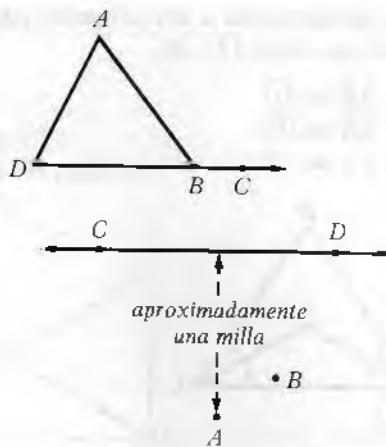
- 25. Dado:** $\angle ABC$ y $\angle D$ son suplementarios.
Pruébese: $\triangle ABD$ es isósceles.

- 26.** Se ha pedido a un grupo de agrimensores que localice un punto sobre una delimitación de propiedad CD que equidista de dos puntos previamente localizados, A y B . Debido a la magnitud de las distancias, no se puede realizar una medición directa con una cinta métrica. Los puntos A y B están cerca uno del otro. En cada uno de ellos se colocó un teodolito. ¿Cómo puede el grupo de agrimensores localizar el punto deseado?

C.

En los ejercicios 27 y 28, $ABCDE$ es un pentágono regular.

- 27.** Pruébese que $\triangle ABG$ es un triángulo isósceles.
28. Pruébese que $\triangle AFG$ es un triángulo isósceles.
29. Pruébese el teorema 6.2.
30. Pruébese el teorema 6.3.
31. Pruébese que la bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, es la bisectriz perpendicular del lado opuesto.
32. Pruébese que si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ y $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle GHI$. (Propiedad transitiva de los triángulos congruentes.)

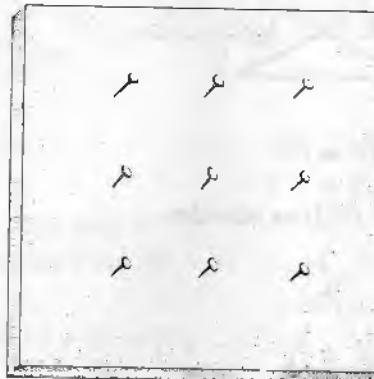


(Ejercicios 27, 28)

ACTIVIDADES

En una tabla con tres clavos en un lado, o en un papel de puntos de 3×3 , muéstrense:

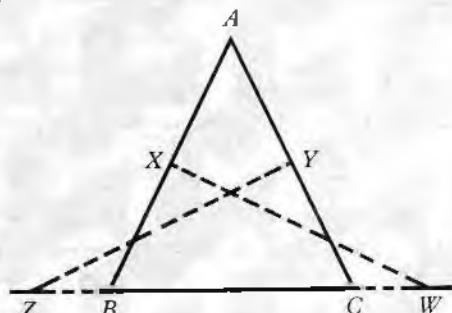
1. Segmentos de cinco longitudes diferentes.
2. Ángulos de diez tamaños diferentes.
3. Triángulos de siete tamaños y formas diferentes.



33. Pruébese que las bisectrices de los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

34. Pruébese que los segmentos de recta que tocan el punto medio de la base de un triángulo isósceles y los puntos medios de los catetos son congruentes.

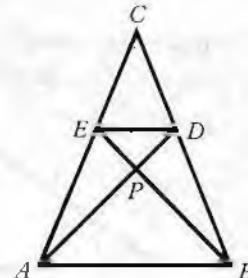
35. En un triángulo $\triangle ABC$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. X es el punto medio de \overline{AB} e Y es el punto medio de \overline{AC} . \overline{XW} es una perpendicular a \overline{AB} ; \overline{YZ} es perpendicular a \overline{AC} ; W y Z son puntos sobre \overline{BC} . Demuéstrese que $\overline{XW} \cong \overline{YZ}$.



(Ejercicio 35)

36. Pruébese que un triángulo equiángulo es equilátero.

37. Supóngase que $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y que \overline{AD} y \overline{BE} se intersecan en P de manera que $\angle PAB \cong \angle PBA$. Demuéstrese que $\triangle PDE$ es isósceles.

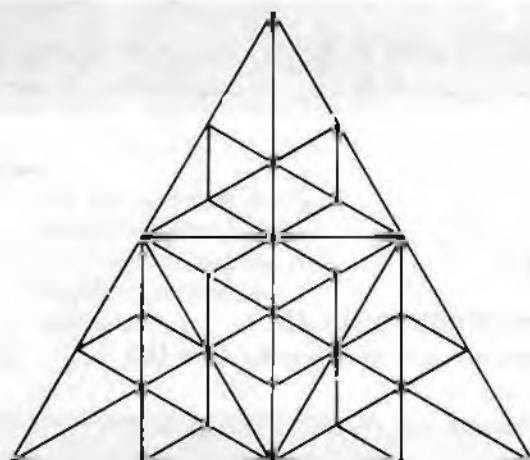


(Ejercicio 37)

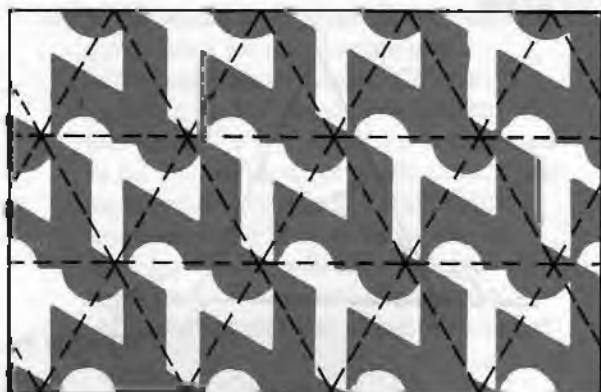
SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cuántos triángulos equiláteros hay en esta figura?

¿Cuántas cometas hay en esta figura?
(Una cometa es un cuadrilátero con exactamente dos pares de lados adyacentes congruentes.)



6.3 Medidas de los ángulos de un triángulo



Los patrones y diseños geométricos son interesantes e importantes para un decorador de interiores. (Véase «La geometría en nuestro mundo», pág. 40.) Si se analizan con cuidado se encuentra que muchos de estos diseños están construidos en torno a formas triangulares que se repiten.

El teorema de esta sección describe una propiedad de los triángulos que les da la cualidad de ser patrones de referencia.

En el capítulo 2 se observó que las esquinas de un triángulo pueden cortarse y luego unirse, la suma de estos ángulos resulta ser 180° .



Ahora se enuncia esto como un teorema.

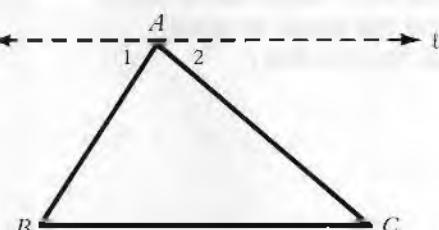
Teorema 6.4 La suma de los ángulos de un triángulo es 180° .

PRUEBA

Dado: Un triángulo ABC .

Pruébese: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

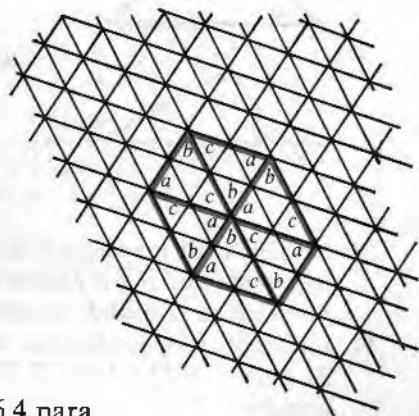
Plan: Trácese una recta ℓ a través de A y paralela a \overline{BC} , y úsense teoremas que relacionen rectas paralelas con una transversal. (La recta ℓ es una recta auxiliar.)



Afirmaciones	Razones
1. Sea ℓ una recta a través de A y paralela a \overline{BC} .	1. Construcción.
2. $\angle 1 \cong \angle B$, $\angle 2 \cong \angle C$.	2. Si dos rectas son paralelas, entonces los ángulos alternos interiores son congruentes.
3. $m\angle 1 + m\angle A + m\angle 2 = 180^\circ$.	3. Definición de «entre» para rayos y postulado del par lineal.
4. $m\angle B + m\angle A + m\angle C = 180^\circ$.	4. Sustitución.

APLICACION

Dado que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° (en la figura, $a + b + c = 180$), se pueden disponer copias congruentes de un triángulo alrededor de un punto, como se muestra en la figura, y extenderlas para cubrir un plano. Estos patrones triangulares son la base para otros más intrincados, como se muestra al principio de esta sección.



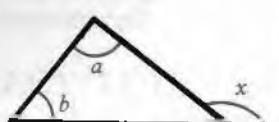
El siguiente teorema puede probarse aplicando el teorema 6.4 para triángulos equiláteros.

Teorema 6.5

Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno.

El teorema que se enuncia a continuación es útil para resolver ciertos problemas geométricos. Se enuncia e ilustra aquí, y se probará como ejercicio.

$x = a + b$, donde x es la medida del ángulo externo y a y b son las medidas de los ángulos interiores no contiguos.

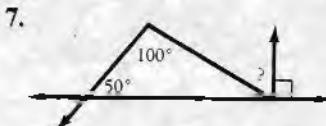
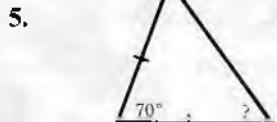
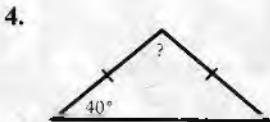
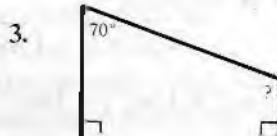
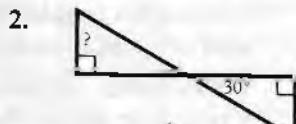
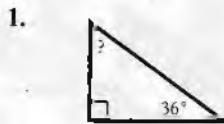


Teorema 6.6

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de sus dos ángulos interiores no contiguos.

EJERCICIOS**A.**

Encuéntrense las medidas de los ángulos indicados en los ejercicios 1 a 9. Las marcas indican segmentos congruentes.

**B.**

10. La medida de los ángulos de la base de un triángulo isósceles se representa por x , y el ángulo del vértice, por $2x + 30$. Encuéntrese la medida de cada ángulo.

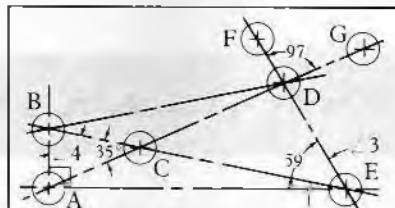
11. Las medidas de los ángulos de un triángulo se representan por $2x + 15$, $x + 20$ y $3x + 25$. Encuéntrense las medidas de los ángulos.

12. Pruébese que los ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno.

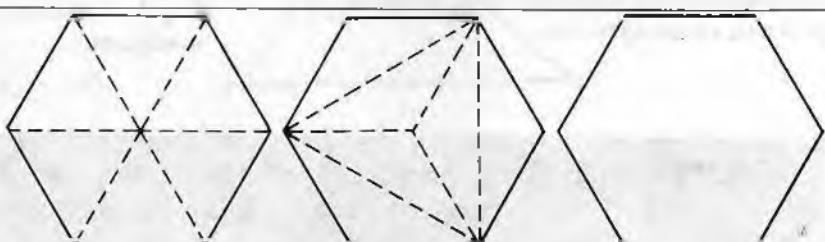
13. Pruébese que los ángulos de la base de un triángulo rectángulo isósceles miden 45° cada uno.

14. Un mecánico debe construir una placa de acero con orificios como los que muestra la figura. El mecánico debe calcular primero las medidas de $\angle 3$ y $\angle 4$.

Encuéntrense $m\angle 3$ y $m\angle 4$.

**ACTIVIDADES**

Trácense y recórtense tres hexágonos pequeños, y córtese por las líneas punteadas. Con las 13 piezas resultantes, fórmese un hexágono regular grande.

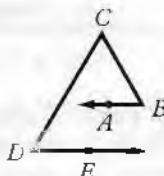


15. Pruébese que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son agudos.
16. En $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$. Pruébese que $\angle C \cong \angle F$.
17. Pruébese que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

C.

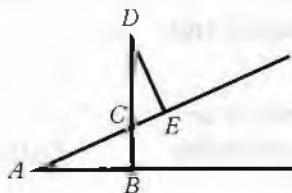
18. **Dado:** $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$.

Pruébese: $m\angle B + m\angle C + m\angle D = 180$.



20. **Dado:** $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AE}$
 $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AB}$.

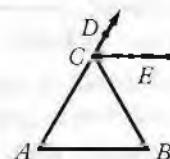
Pruébese: $m\angle CAB = m\angle CDE$.



22. Pruébese que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° .

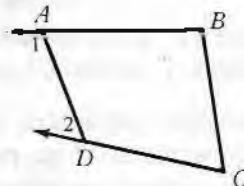
19. **Dado:** \overrightarrow{CE} biseca a $\angle BCD$
 $\overrightarrow{AC} \cong \overrightarrow{BC}$.

Pruébese: $\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{AB}$.



21. **Dado:** \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{AD} .

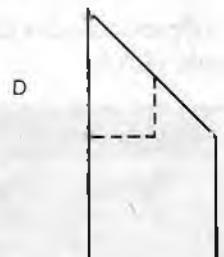
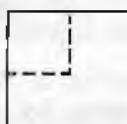
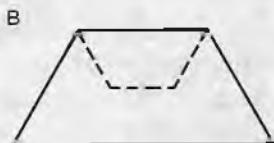
Pruébese: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle C + m\angle B$.



23. Pruébese el teorema 6.6.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Dibújense estas figuras y trácense las líneas de puntos para dividir las figuras en cuatro partes idénticas, todas de la misma forma que la original.



6.4 El teorema de la congruencia LAA

*En una isla de caníbales
hay diversos tipos de árboles:*

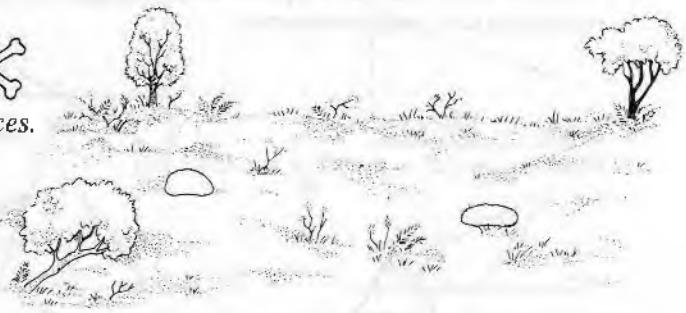


Un roble, un olmo chino, y varios arces.

*Si trazáis una senda
que vaya del olmo al roble
encontraréis el tesoro
del cual queréis que os hable.*

*Sólo encontrad el punto
y podréis estar seguros.*

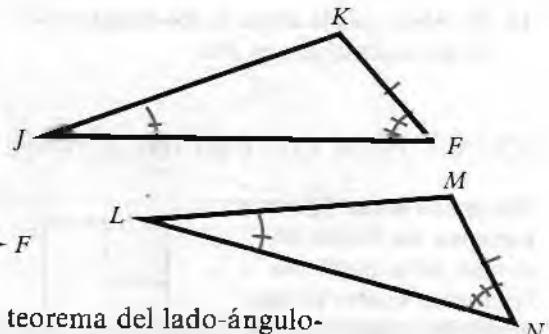
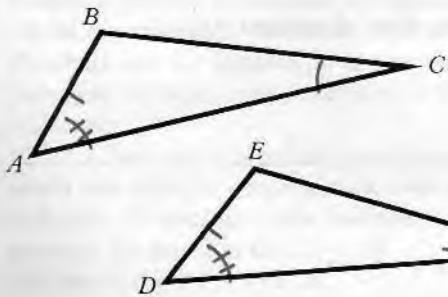
*Congruente el triángulo será
con uno de piedras que ahí está.*



Si se encuentra el punto X donde el ángulo es el mismo que el ángulo correspondiente en el triángulo de piedras, ¿puede tenerse la seguridad de que los triángulos son congruentes?

Un pirata, que era un estudiante de geometría frustrado, colocó tres enormes piedras, y escribió el poema anterior.

En los triángulos siguientes, dos ángulos y un lado opuesto a un ángulo son congruentes. Con papel vegetal, lléguese a la convicción de que los triángulos son congruentes.



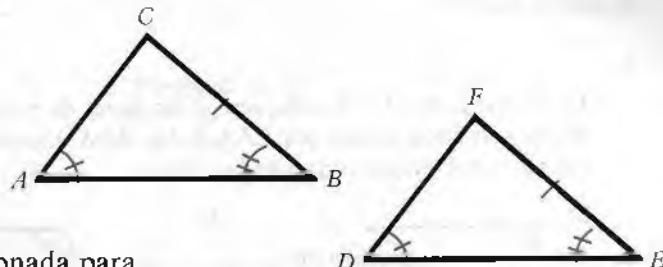
Estas conclusiones deben estar de acuerdo con el teorema del lado-ángulo-ángulo (LAA).

Teorema 6.7

Teorema LAA. Si en un triángulo, dos ángulos y un lado opuesto a uno de los ángulos son congruentes con dos ángulos y el lado correspondiente de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

PRUEBA

Dado: $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ con
 $\angle A \cong \angle D$
 $\angle B \cong \angle E$
 $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.



Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

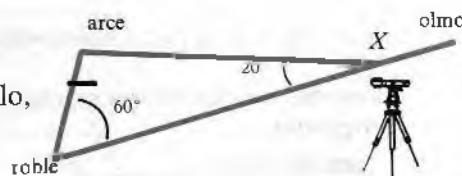
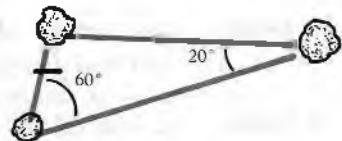
Plan: Se utilizará la información proporcionada para mostrar que $\angle C \cong \angle F$, y después se utilizará el postulado ALA.

Afirmaciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$.	1. Dado.
2. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$; $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180^\circ$.	2. La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180° .
3. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$.	3. Sustitución.
4. $m\angle C = m\angle F$.	4. Propiedad de resta de iguales.
5. $\angle C \cong \angle F$.	5. Definición de ángulos congruentes.
6. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.	6. ¿Por qué?
7. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.	7. ¿Por qué?

APLICACION

El teorema 6.7 proporciona una respuesta al problema del tesoro del pirata. Dado que dos ángulos y un lado opuesto a uno de los ángulos del «triángulo de árboles» son congruentes con dos ángulos y el lado opuesto a uno de los ángulos del «triángulo de piedras», los dos triángulos son congruentes y X señala el punto en que está el tesoro.

Cuando se aplica el teorema 6.7 a un triángulo rectángulo, resulta el teorema de la hipotenusa y el ángulo.

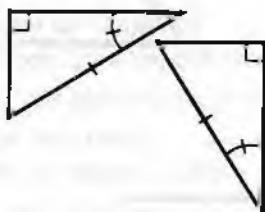
**Teorema 6.8**

Teorema de la hipotenusa y el ángulo. Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

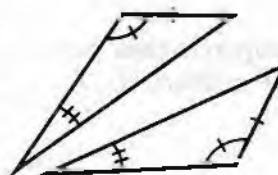
EJERCICIOS**A:**

En los ejercicios 1 a 6, indíquese si los pares de triángulos dados son congruentes por LAA, LAL, ALA, hipotenusa y cateto, o por ninguno de estos teoremas.

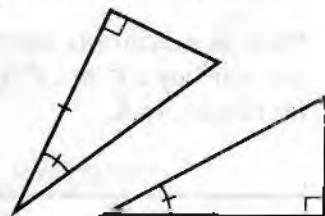
1.



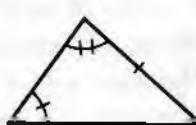
2.



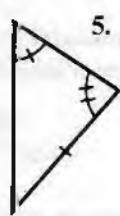
3.



4.



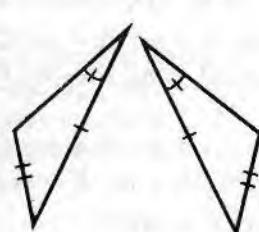
5.



6.



6.

**B:**

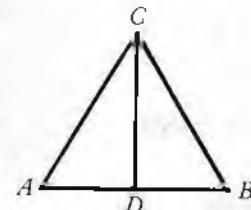
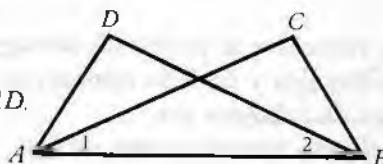
Con la información proporcionada en los ejercicios 7 y 8, pruébese que $\triangle ACD \cong \triangle BCD$.

7. Dado: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
 $\angle A \cong \angle B$

8. Dado: \overline{CD} biseca a $\angle C$
 $\angle A \cong \angle B$.

9. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle C \cong \angle D$.

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle BAD$.



(Ejercicios 7, 8)

ACTIVIDADES

Córtense palillos de las siguientes longitudes:

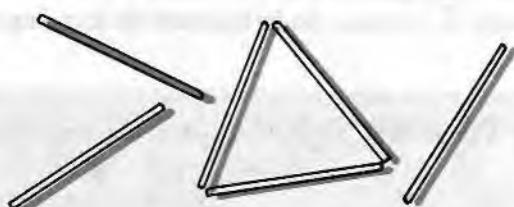
dos de 10 cm

dos de 17.3 cm

uno de 20 cm

uno de 30 cm

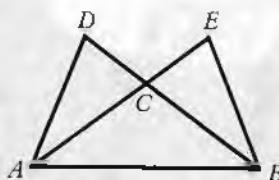
¿Cuántos triángulos distintos pueden construirse con estos seis palillos?



- 10. Dado:** $\triangle ABC$ es isósceles con ángulo de vértice C

$$\angle D \cong \angle E$$

Pruébese: $\triangle ABE \cong \triangle BAD$



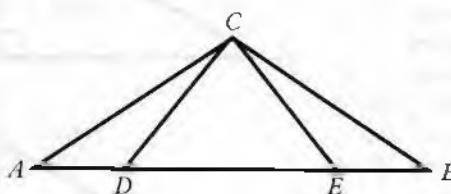
- 12. Formúlese una prueba a dos columnas para el teorema 6.7.**

- 13. Formúlese una prueba a dos columnas para el teorema 6.8.**

C.

- 14. Dado:** $\angle A \cong \angle B$
 $\angle ADC \cong \angle BEC$

Pruébese: $\triangle AEC \cong \triangle BDC$.



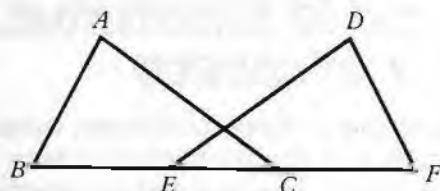
- 16. Pruébese que los segmentos desde un punto sobre la bisectriz de un ángulo perpendicular a los lados del ángulo son congruentes.**

- 11. Dado:** $\overline{BE} \cong \overline{CF}$

$$\angle A \cong \angle D$$

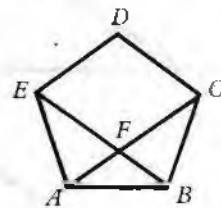
$$\angle ACB \cong \angle DEF$$

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DFE$.



- 15. Dado:** $ABCDE$ es un pentágono regular.

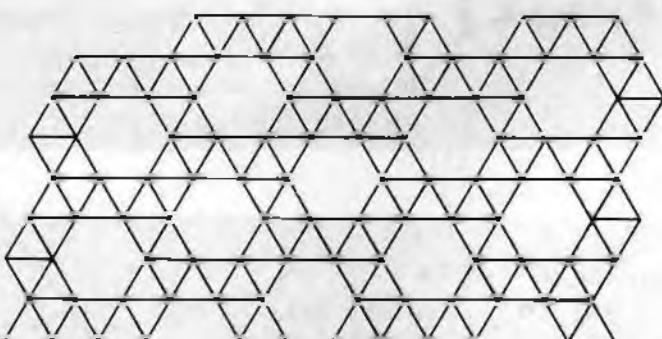
Pruébese: $\triangle AFE \cong \triangle BFC$.



- 17. Pruébese que si se trazan perpendiculares desde cualquier punto de la base de un triángulo isósceles a los lados congruentes, los ángulos que se forman en la base del triángulo son congruentes.**

SOLUCION DE PROBLEMAS

Si los triángulos y hexágonos de este diseño se dibujaran de manera que dos polígonos cualesquiera con un vértice común tuvieran diferentes colores, ¿cuál es el número mínimo de colores necesario para completar el coloreado del diseño?



6.5 El teorema de la congruencia de la hipotenusa y el cateto

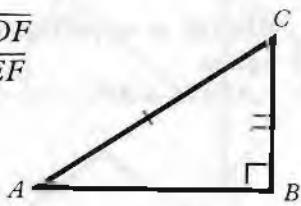
Supóngase que se desea instalar una canasta de baloncesto en una pared al aire libre.

¿Cómo se puede tener la seguridad de que el tablero quede paralelo a la pared? Los soportes que sujetan el tablero a la pared son un elemento importante para la respuesta. Consideréense los siguientes pares de triángulos.



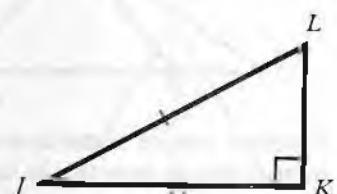
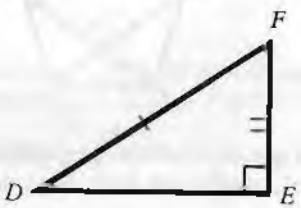
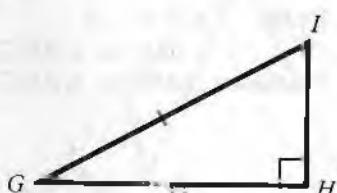
$$\overline{AC} \cong \overline{DF}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$



$$\overline{GI} \cong \overline{JL}$$

$$\overline{GH} \cong \overline{JK}$$



Utilícese papel vegetal para llegar a la conclusión de que:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

$$\triangle GHI \cong \triangle JKL$$

Teorema 6.9

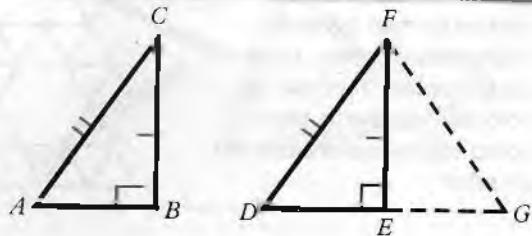
Teorema de la hipotenusa y el cateto. Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

PRUEBA

Dado: $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$

con $\angle B$ y $\angle E$ como ángulos rectos
 $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



EJERCICIOS**A.**

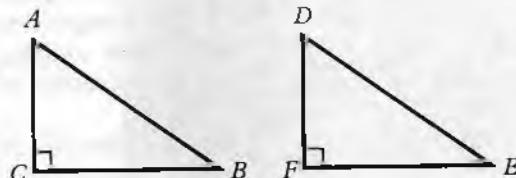
En los ejercicios 1 a 4, decidase si la información dada determina la congruencia por LAA, ALA, hipotenusa y ángulo, hipotenusa y cateto, o ninguno de estos teoremas.

1. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

2. Dado: $\angle A \cong \angle D$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

3. Dado: $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

4. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$.



(Ejercicios 1-4)

En los ejercicios 5 a 9, determíñese si la información dada asegura que los triángulos son congruentes. Si no lo son, proporcionese un contraejemplo.

5. Dado: $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$, $\angle P \cong \angle S$, $\angle Q \cong \angle T$.

6. Dado: $\overline{PQ} \cong \overline{TU}$, $\overline{QR} \cong \overline{SU}$, $\angle Q \cong \angle U$.

7. Dado: $\angle P \cong \angle S$, $\angle Q \cong \angle T$, $\angle R \cong \angle U$.

8. Dado: $\angle Q \cong \angle T$, $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{PR} \cong \overline{SU}$.

9. Dado: $\overline{PQ} \cong \overline{SU}$, $\overline{QR} \cong \overline{ST}$, $\overline{PR} \cong \overline{TU}$.



(Ejercicios 5-9)

B.

Para los ejercicios 10 y 11, supóngase que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

10. Si $BC = 2x - 3$ y $EF = x + 5$, encuéntrense las longitudes de BC y EF .

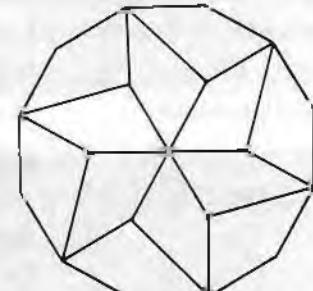
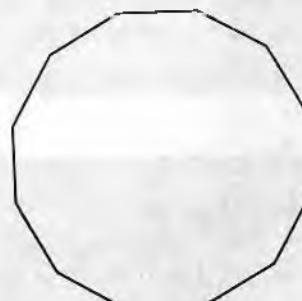
11. Si $m\angle A = 4x - 5$ y $m\angle D = 2x + 25$, encuéntrense $m\angle B$ y $m\angle E$.



(Ejercicios 10, 11)

ACTIVIDADES

Trácese y recórtense las 13 piezas de estos dos dodecágonos regulares y colóquense para formar un dodecágono regular grande.



12. Dado: $\overline{BD} \cong \overline{CE}$

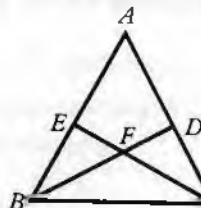
\overline{BD} y \overline{CE} son alturas.

Pruébese: $\triangle ABC$ es isósceles.

13. Dado: \overline{BD} y \overline{CE} son alturas

$\angle ABC \cong \angle ACB$

Pruébese: $\triangle BFC$ es isósceles.



(Ejercicios 12, 13)

C.

En los ejercicios 14 a 16 $\overline{BE} \cong \overline{CD}$ y \overline{BD} y \overline{CE} son alturas.

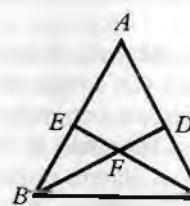
14. Pruébese que $\triangle EFB \cong \triangle DFC$.

15. Pruébese que $\triangle AED$ es isósceles.

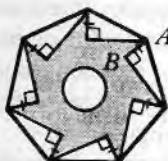
16. Pruébese que $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

17. Pruébese el teorema 6.10.

18. Una sierra circular de siete dientes se hace cortando siete triángulos rectángulos de un polígono regular de siete lados. Si \overline{AB} se corta con la misma longitud para cada diente, ¿por qué todos los puntos salientes de la sierra tienen un ángulo del mismo tamaño?



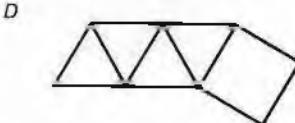
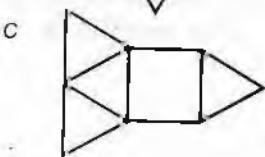
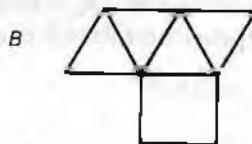
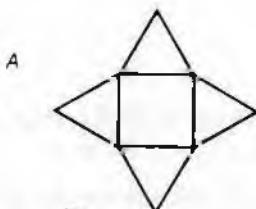
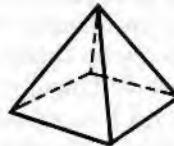
(Ejercicios 14-16)



SOLUCION DE PROBLEMAS

A la derecha se ilustra una pirámide cuadrada.

1. ¿Cuáles de estos patrones pueden doblarse para construir la pirámide?



2. Constrúyanse en mayor tamaño patrones como éstos. Compruébese la pregunta anterior construyendo una figura con cada uno de ellos.

Capítulo 6 Conceptos importantes

Términos

Triángulo escaleno (pág. 198)
 Triángulo acutángulo (pág. 198)
 Triángulo rectángulo (pág. 199)
 Hipotenusa (pág. 199)

Triángulo obtusángulo (pág. 199)
 Triángulo equiángulo (pág. 199)
 Altura (pág. 199)

Teoremas

- 6.1** Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de su base son congruentes.
- 6.2** Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.
- 6.3** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.
- 6.4** La suma de los ángulos de un triángulo es 180° .
- 6.5** Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno.
- 6.6** La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de sus dos ángulos interiores no contiguos.
- 6.7 Teorema LAA.** Si dos ángulos de un triángulo y el lado opuesto a uno de ellos son congruentes con dos ángulos y el lado correspondiente de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.
- 6.8 Teorema de la hipotenusa y el ángulo.** Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- 6.9 Teorema de la hipotenusa y el cateto.** Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de un segundo triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- 6.10** Si un punto P equidista de un par de puntos A y B , entonces P está sobre la bisectriz perpendicular de \overline{AB} . A la inversa, un punto sobre la bisectriz perpendicular de \overline{AB} equidista de A y de B .

Capítulo 6 Resumen

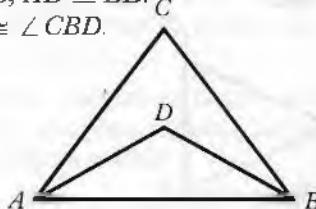
1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

- Un triángulo escaleno no puede ser un triángulo acutángulo.
- Un triángulo isósceles también puede ser un triángulo rectángulo.
- Un triángulo rectángulo tiene sólo una altura.
- Si dos ángulos de un triángulo miden 60° y 90° , entonces el triángulo es isósceles.

2. Si $m\angle ACD = 120$ y $m\angle ABC = 50$, encuéntrese $m\angle BAC$.

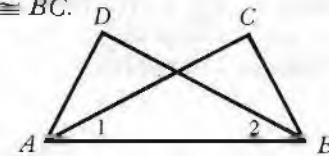
3. Las medidas de los dos ángulos de la base de un triángulo isósceles se representan por $x + 20$ y $3x - 40$. Encuéntrese la medida del ángulo del vértice.

4. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.
Pruébese: $\angle CAD \cong \angle CBD$.



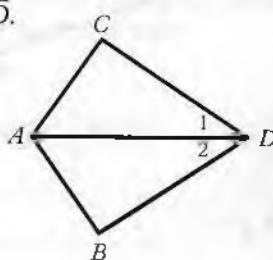
5. Dado: $\angle C \cong \angle D$
 $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



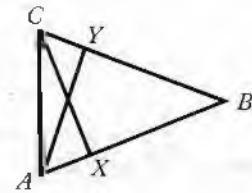
6. Dado: $m\angle B = m\angle C = 90$
 $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.



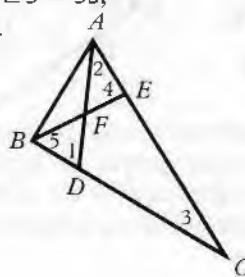
7. Dado: \overline{CX} es una altura de \overline{AB}
 \overline{AY} es una altura de \overline{CB}
 $\overline{CX} \cong \overline{AY}$.

Pruébese: $\triangle ABC$ es isósceles.



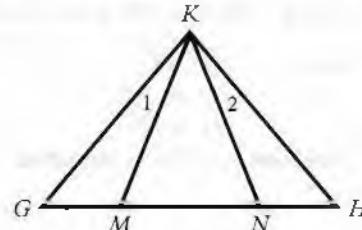
8. a. $m\angle DFE = m\angle 5 + m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 4$. ¿Por qué?

b. Si $m\angle 4 = 80$ y $m\angle 3 = 35$, encuéntrese $m\angle 5$.



9. Dado: $\triangle KMN$ es isósceles.
 $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\triangle KHG$ es isósceles.



Capítulo 6 Examen

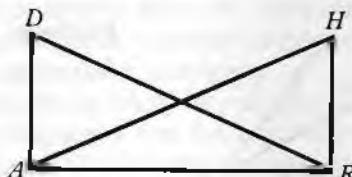
1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

- Un triángulo equilátero es equiángulo.
- Un triángulo obtusángulo puede tener un ángulo recto.
- Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es congruente con un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.
- Si dos ángulos de un triángulo miden 100° y 40° , entonces el triángulo es isósceles.

- Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $m\angle BAD = 116$, encuéntrese $\angle B$.
- Las medidas de los ángulos de un triángulo se representan por $4x$, $5x - 5$ y $x + 35$. Encuéntrense las medidas de cada uno.

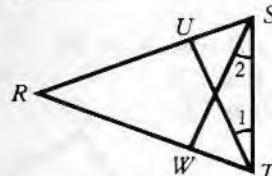
4. Dado: $\overline{DA} \perp \overline{AR}$, $\overline{HR} \perp \overline{AR}$
 $\overline{DR} \cong \overline{HA}$.

Pruébese: $\overline{DA} \cong \overline{HR}$.



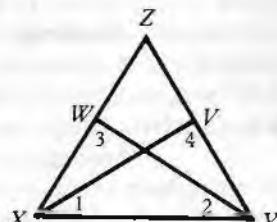
5. Dado: \overline{TU} es la altura de \overline{RS}
 \overline{SW} es la altura de \overline{RT}
 $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\triangle RST$ es isósceles.



6. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
 $\angle 3 \cong \angle 4$.

Pruébese: $\overline{XV} \cong \overline{YW}$.

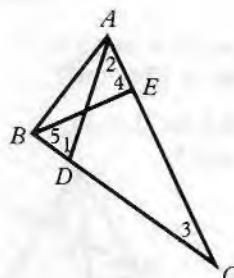
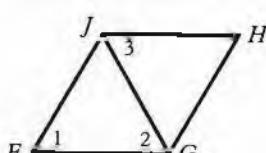


7. Pruébese que la altura a la base de un triángulo isósceles también es la bisectriz del ángulo del vértice.

- Si $m\angle 2 = 20$ y $m\angle 3 = 35$, encuéntrese $m\angle 1$.
- Si $m\angle BEC = 100$ y $m\angle BAE = 65$, encuéntrese $m\angle ABE$.

9. Dado: $\overline{JH} \parallel \overline{FG}$
 $\angle 1 \cong \angle 3$
 $JH \cong JF$.

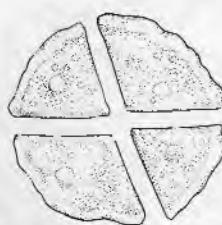
Pruébese: $\triangle JGH$ es isósceles.



Técnicas para la solución de problemas

Hacer una tabla-II

En una sección anterior sobre técnicas de solución de problemas, se sugirió el uso de una tabla para ayudar a la resolución de problemas. Aquí se presentan más problemas para los cuales puede ser útil la elaboración de tablas.

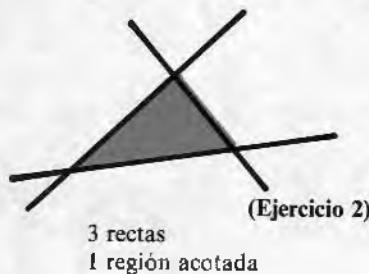


2 cortes, 4 piezas
8 cortes, ¿cuántas piezas?

PROBLEMAS

Para cada problema, hágase una tabla, obsérvese un patrón y resuélvase el problema.

1. ¿Cuál es la cantidad máxima de pedazos de *pizza* que se pueden conseguir con sólo 8 cortes? (*indicación:* Elabórese una tabla. Una columna deberá tener el número de cortes, y la otra, la cantidad máxima de pedazos de *pizza*.)
2. Una región de un plano acotada en todos sus lados por una línea, es una *región acotada*. ¿Cuántas regiones acotadas pueden formarse trazando 9 líneas rectas?
3. Un número triangular (T) es aquel que puede representarse geométricamente como se muestra en la tabla, donde se ilustran T_1 , T_2 , T_3 y T_4 . ¿Pueden encontrarse T_5 y T_6 ? ¿Puede predecirse cuál es el décimo número triangular (T_{10})?
4. Un número pentagonal (P) es un número que puede representarse geométricamente como se muestra en la tabla. ¿Pueden encontrarse P_5 y P_6 ? ¿Puede predecirse cuál es el décimo número pentagonal (P_{10})?



(Ejercicio 2)
3 rectas
1 región acotada

	configuración	número
T_1	.	1
T_2	..	3
T_3	...	6
T_4	10
T_5	??	?
T_6	??	?

	configuración	número
P_1	.	1
P_2	○	5
P_3	○○	12
P_4	○○○	22
P_5	??	?
P_6	??	?

5. Un número heptagonal (H) puede representarse geométricamente dibujando heptágonos (siete lados), de manera similar a los problemas 3 y 4. Encuéntrense H_3 y H_4 . ¿Puede predecirse cuál es el décimo número heptagonal (H_{10})?

CAPITULO

7

- 7.1 El teorema de Pitágoras 226
- 7.2 Triángulos especiales 232
- 7.3 Teoremas de la concurrencia en triángulos 236
- 7.4 Desigualdad del triángulo 244
- 7.5 Desigualdades en un triángulo 248

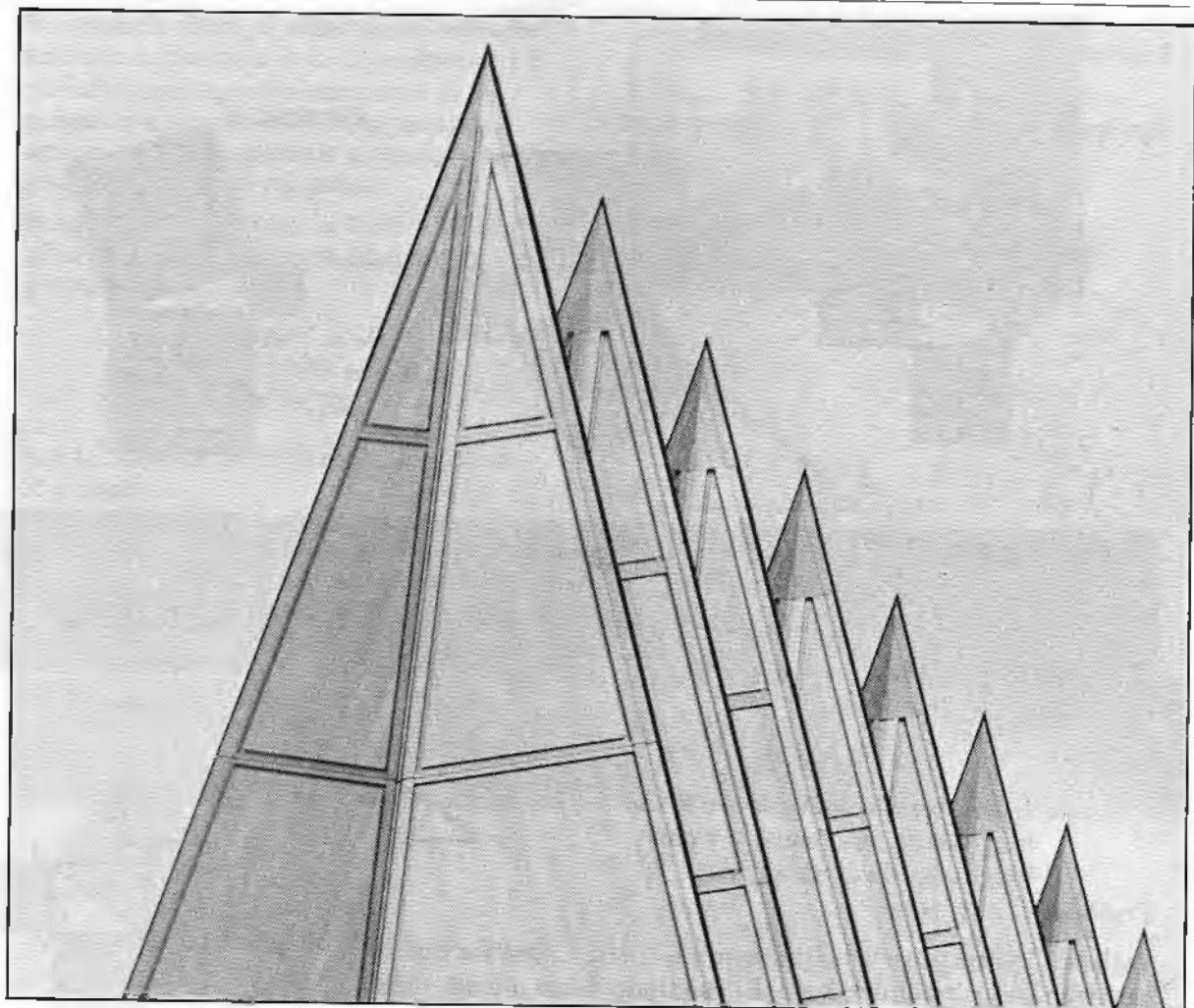
Conceptos importantes 252 *Resumen* 253 *Examen* 254

Resumen global (Caps. 4 a 7) 255

La geometría en nuestro mundo

Gráficas por computador: diseño asistido por
computador 256

Más sobre triángulos



7.1 El teorema de Pitágoras

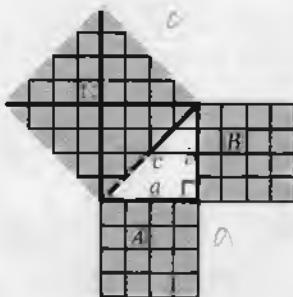
Uno de los teoremas más conocidos y útiles en geometría plana es el teorema de Pitágoras, llamado así por el matemático griego Pitágoras.

El teorema dice que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo.

En los ejemplos 1 a 3, encuéntrese la manera de contar las pequeñas unidades cuadradas para mostrar que el área de los cuadrados A y B es igual al área del cuadrado C sobre la hipotenusa.

REPASO: Las definiciones de triángulo rectángulo, hipotenusa y catetos de un triángulo rectángulo, están en la página 199.

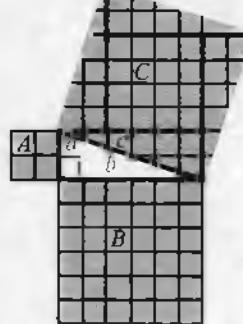
Ejemplo 1



Ejemplo 2



Ejemplo 3



Teorema 7.1

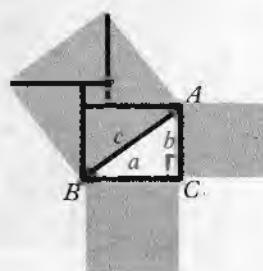
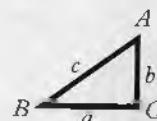
Teorema de Pitágoras. Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

PRUEBA

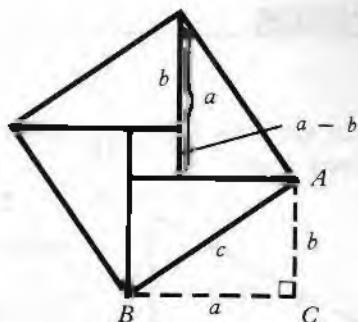
Dado: El triángulo rectángulo ACB con longitud de hipotenusa c y con longitudes de catetos a y b .

Pruébese: $c^2 = a^2 + b^2$.

Análisis: Constrúyanse cuadrados sobre $\triangle ABC$ como los que se muestran en los ejemplos 1 a 3. El cuadrado sobre a tendrá área a^2 . El cuadrado sobre b tendrá área b^2 . El cuadrado sobre c tendrá área de c^2 .



El cuadrado sobre el lado c consta de cuatro triángulos congruentes con $\triangle ABC$ y un cuadrado. La figura muestra que la longitud de un lado del cuadrado pequeño es $a - b$. Puede encontrarse el área del cuadrado grande sumando las áreas de los cuatro triángulos y el área del cuadrado pequeño. El área de los triángulos es $1/2ab$. El área del cuadrado es $(a - b)^2$. Así, $c^2 = 4(1/2ab) + (a - b)^2 = 2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2$.



APLICACION

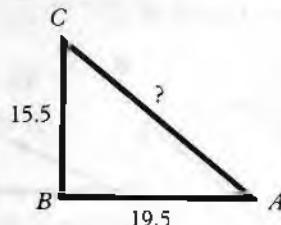
Un anuncio sobre la venta de un televisor dice que la pantalla es de 25 pulgadas. La pantalla mide aproximadamente 19.5 pulgadas de ancho y 15.5 pulgadas de altura. ¿Por qué se puede anunciar que tiene una pantalla de 25 pulgadas?

Respuesta. En realidad, el fabricante se refiere a la longitud de la diagonal de la pantalla.



$$\begin{aligned}AB^2 + BC^2 &= AC^2 \\19.5^2 + 15.5^2 &= 620.5 \\AC &\approx 24.9\end{aligned}$$

Así, la diagonal de la pantalla es de casi 25 pulgadas.



El siguiente teorema es la recíproca del teorema de Pitágoras.

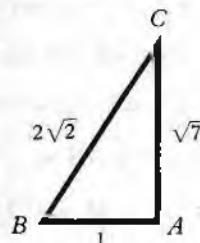
Teorema 7.2

Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitudes a , b y c , y $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.

Ejemplo

$\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo porque

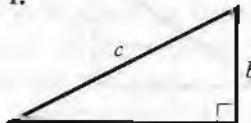
$$(\sqrt{7})^2 + 1^2 = (2\sqrt{2})^2 \quad (7 + 1 = 8)$$



EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 6, establezcase si la ecuación dada es correcta o no.

1.



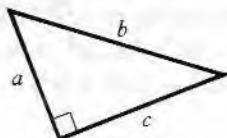
$$c^2 = a^2 + b^2$$

2.



$$x^2 + y^2 = z^2$$

3.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

4.



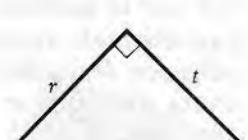
$$s^2 = u^2 - t^2$$

5.



$$f = \sqrt{e^2 + g^2}$$

6.



$$r = \sqrt{s^2 + t^2}$$

En los ejercicios 7 a 12, empleéese la información dada en la figura para encontrar el valor de x .

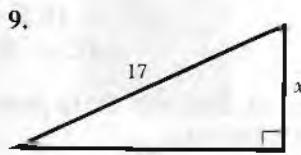
7.



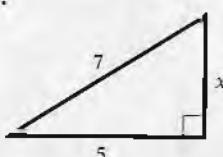
8.



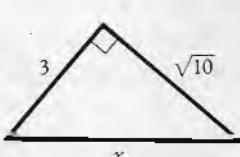
9.



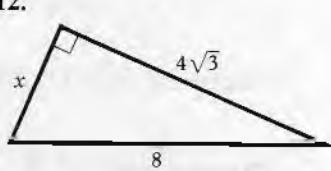
10.



11.



12.



En los ejercicios 13 a 18, empleéese el triángulo rectángulo ABC .

13. Si $AB = 6$ y $AC = 8$, entonces $BC = ?$

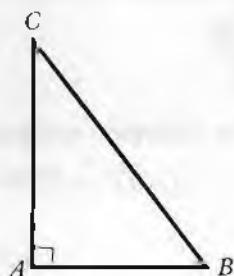
14. Si $BC = 15$ y $AB = 9$, entonces $AC = ?$

15. Si $AC = 2$ y $AB = 2$, entonces $BC = ?$

16. Si $BC = \sqrt{15}$ y $AB = \sqrt{10}$, entonces $AC = ?$

17. Si $AC = \sqrt{2}$ y $AB = \sqrt{3}$, entonces $BC = ?$

18. Si $AB = 2\sqrt{3}$ y $BC = 6$, entonces $AC = ?$



En los ejercicios 19 a 24, decidase si las cifras dadas pueden ser longitudes de lados de un triángulo rectángulo.

19. 10, 24, 26.

20. 20, 21, 29.

21. 8, 15, 17.

22. 7, 25, $\sqrt{674}$.

23. 5, 13, $\sqrt{195}$.

24. 5, 12, 13.

25. Hallar la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen de longitud 10 y 18.

26. Una puerta mide 6 pies y 6 pulgadas de altura por 36 pulgadas de ancho. ¿Cuál es el ancho mayor que puede tener un tablero para que quepa por esa puerta?



27. Una escalera de 6 pies se coloca contra una pared con la base a 2 pies de la pared. ¿A qué altura del suelo está la parte más alta de la escalera?



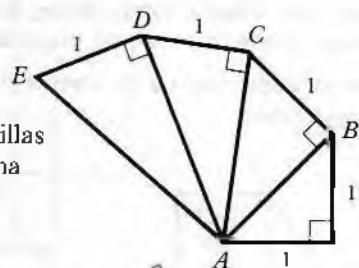
28. Encuéntrense las longitudes de \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} y \overline{AE} .



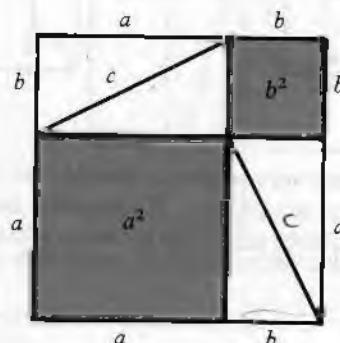
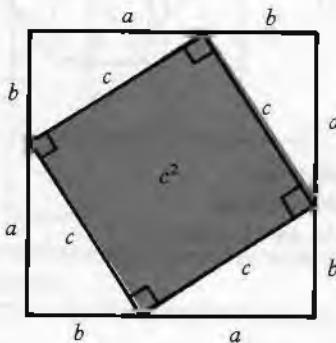
29. Con una regla y un compás, trácense segmentos de longitudes $\sqrt{6}$ y $\sqrt{7}$.

30. Una persona viaja 8 millas al norte, 3 millas al oeste, 7 millas al norte y 11 millas al este. ¿A qué distancia está la persona del punto original?

31. Con los cuadrados cuyos lados miden $a + b$, muéstrese que el teorema de Pitágoras es verdadero.



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + \dots$$



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

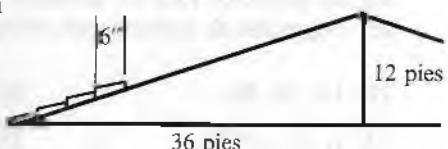
32. Una escalera extensible de 36 pies debe tener 4 pies de solape cuando está totalmente extendida. Si la base de la escalera está a 10 pies del edificio, ¿qué altura alcanzará la escalera?

33. (Empléese una calculadora.)

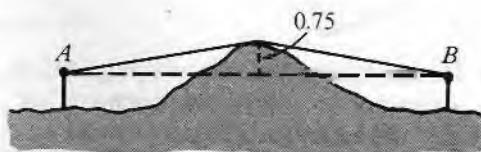
Si una hilera de tejas mide 6 pulgadas de ancho, ¿cuántas hileras de tejas se necesitan para cada lado de este tejado?

34. (Empléese una calculadora.)

Un grupo de ingenieros agrimensores quiere medir la distancia entre dos puntos A y B en un terreno accidentado. Desean conocer la distancia horizontal real AB . Si la tierra está 0.75 metros más alta en la mitad de los dos puntos y si la cinta de medir indica 27.0 metros, ¿cuál es la distancia real AB ?



(Ejercicio 33)

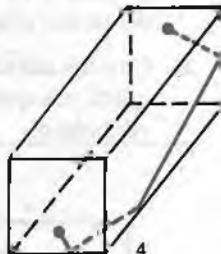
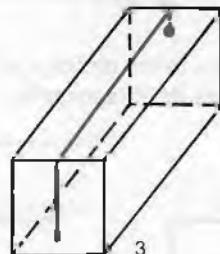
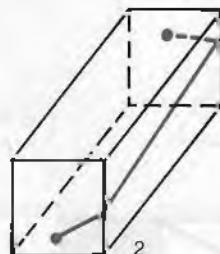
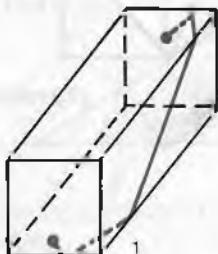


(Ejercicio 34)

ACTIVIDADES

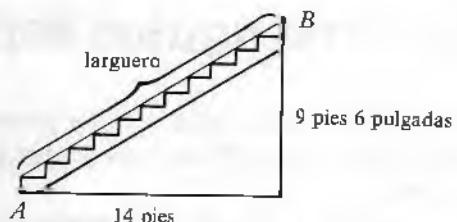
En una habitación de 8 pies de ancho, 8 pies de altura y 15 pies de largo, una mosca vuela desde la mitad de la pared delantera, a 1 pie sobre el piso, hasta la mitad de la pared trasera, a 1 pie del techo.

1. Adivíñese cuál de los recorridos que se muestran a continuación es el más corto.

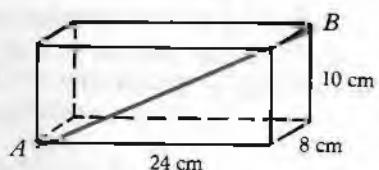


2. Constrúyase una caja que represente la habitación, trácese los recorridos y midanse sus longitudes. (Cualquiera de los diagramas que aparecen en el siguiente SOLUCIÓN DE PROBLEMAS puede servir para construir la caja.)

35. Se va a construir una escalera con una pieza de madera llamada *languero*. (Véase el ejercicio 9 de la pág. 173.) El languero va de *A* a *B*, cubre una distancia horizontal de 14 pies y una altura de 9 pies y 6 pulgadas. ¿Qué longitud debe tener la pieza de madera para el languero? (Sugerencia: la madera se vende en pies pies lineales.)

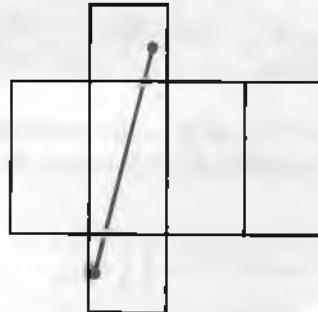
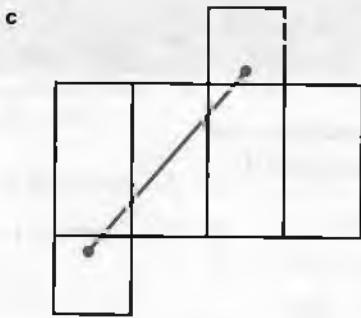
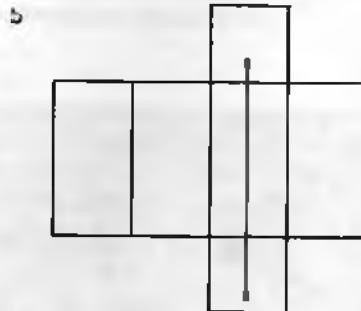
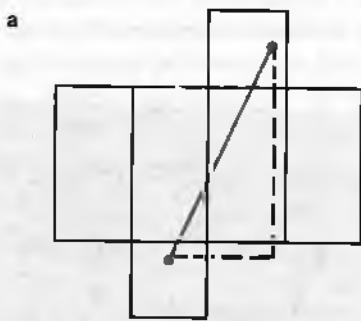


36. Una caja tiene 24 cm de largo, 8 cm de ancho y 10 cm de alto. ¿Cuál es la longitud de la diagonal \overline{AB} ?



SOLUCION DE PROBLEMAS

1. Imagínese que se cortó la caja de la sección «Actividades» anterior. Compárense los recorridos de la mosca mostrados en esa sección con uno de los diagramas siguientes:

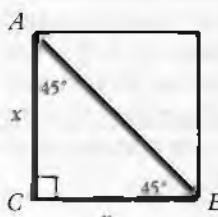


2. Complétense un triángulo rectángulo y calcúlese la longitud de cada recorrido.

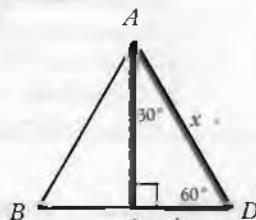
7.2 Triángulos especiales

Las figuras y tablas de la derecha presentan las dimensiones y especificaciones de dos tipos diferentes de tuercas.

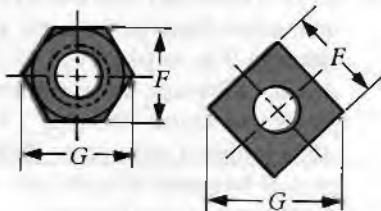
La dimensión F indica el tamaño de la llave que se necesita para la tuerca. ¿Cómo pueden calcularse las dimensiones G ? Para este cálculo es útil conocer los triángulos $45^\circ\text{-}45^\circ\text{-}90^\circ$ y $30^\circ\text{-}60^\circ\text{-}90^\circ$.



Un triángulo $45^\circ\text{-}45^\circ\text{-}90^\circ$ está formado por dos lados de un cuadrado y una diagonal.



Un triángulo $30^\circ\text{-}60^\circ\text{-}90^\circ$ está formado por una altura de un triángulo equilátero.



Tuercas cuadradas y hexagonales

Tamaño nominal	F		G	
	Anchura entre caras	Anchura entre esquinas		
		Cuadr.	Hex.	
Básica	Máx.	Máx.	Máx.	Máx.
0	5/32	0.221	0.180	0.180
1	5/32	0.221	0.180	0.180
2	3/16	0.265	0.217	0.217
3	3/16	0.265	0.217	0.217
4	1/4	0.354	0.289	0.289

Teorema 7.3

La longitud de la hipotenusa de un triángulo $45^\circ\text{-}45^\circ\text{-}90^\circ$ es $\sqrt{2}$ multiplicado por la longitud de un cateto.

Teorema 7.4

La longitud del cateto más largo de un triángulo $30^\circ\text{-}60^\circ\text{-}90^\circ$ es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ multiplicado por la longitud de la hipotenusa o $\sqrt{3}$ multiplicado por la longitud del lado más corto.

La prueba del teorema 7.3 se deja como ejercicio. Se sugiere realizar una prueba del teorema 7.4 aplicando el teorema de Pitágoras para $\triangle ACD$ presentado antes:

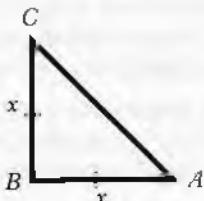
$$x^2 = (AC)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

$$(AC)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = x^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$AC = \sqrt{\frac{3}{4}}x = (\sqrt{3})\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x).$$

Estos dos teoremas pueden usarse para encontrar longitudes desconocidas en triángulos especiales.

Ejemplo 1



1. $\angle A$ y $\angle C$ deben ser ángulos de 45° .
2. Por el teorema 7.3, $x\sqrt{2} = 12$, así que

$$x = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

APLICACION 1

¿Qué distancia hay entre *home* y la segunda base en un diamante de béisbol? Recuérdese que la distancia de *home* a la primera base es 90 pies. Dado que $\triangle HFS$ es un triángulo $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$, el teorema 7.3 dice que

$$HS = \sqrt{2}(90) \doteq 127.28 \text{ pies.}$$

APLICACION 2

Las tuercas de la especificación del principio de esta sección tienen forma cuadrada y de hexágono regular. Por tanto, $\triangle ABC$ es un triángulo $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ y $\triangle DEF$ es un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

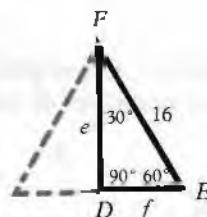
Por el teorema 7.3, $G_1 = \sqrt{2}F_1$.

Por el teorema 7.4, $FE = \sqrt{3}DE$
 $F_2 = 2FE = 2\sqrt{3}DE$

$$DE = \frac{F_2}{2\sqrt{3}}$$

$$G_2 = 4DE = \frac{2}{\sqrt{3}}F_2.$$

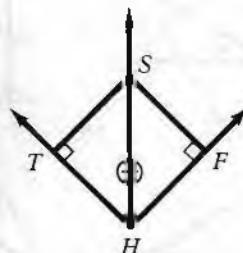
Ejemplo 2



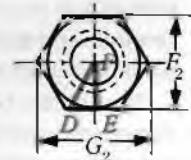
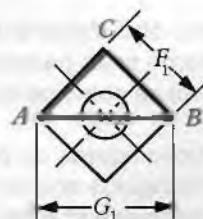
1. \overline{ED} es una altura de un triángulo equilátero, así que

$$f = \frac{16}{2} = 8.$$

2. Por el teorema 7.4, $e = \sqrt{3} \cdot f$
o bien $e = 8\sqrt{3}$.



NOTA: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ sólo se pueden aproximar con un número decimal.



Para el tamaño 4 de tuercas hexagonales con

$$F_2 = \frac{1}{4}, G_2 = 4DE = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} \doteq 0.289.$$

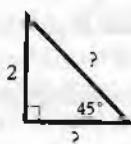
Obsérvese que este es el valor dado en la tabla.

EJERCICIOS

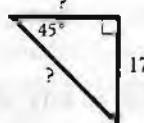
A.

En los ejercicios 1 a 4, empléese el teorema 7.3 para encontrar las longitudes de los lados indicados.

1.



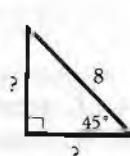
2.



3.

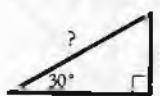


4.

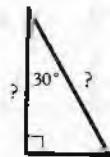


En los ejercicios 5 a 12, empléese el teorema 7.4 para encontrar las longitudes de los lados de cada triángulo.

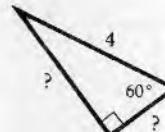
5.



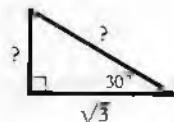
6.



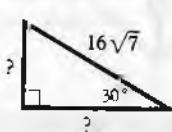
7.



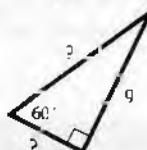
8.



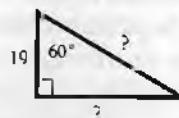
9.



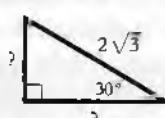
10.



11.

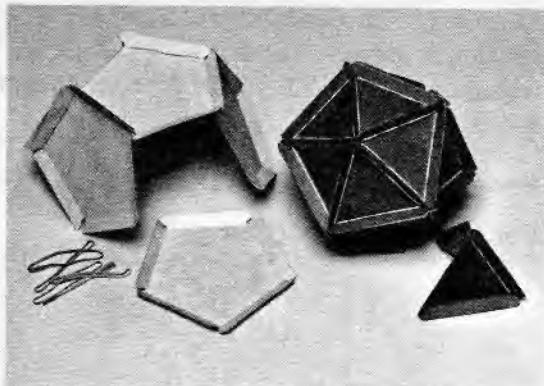
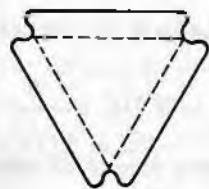


12.

**ACTIVIDADES**

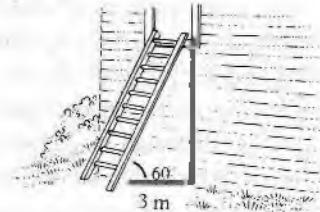
Recórtense en cartulina u otro material tantos triángulos equiláteros como sean necesarios y úñanse con bandas elásticas como se muestra en la fotografía.

Se pueden construir ocho figuras de sólidos convexos usando sólo triángulos equiláteros del mismo tamaño. Constrúyase el máximo de ellas.



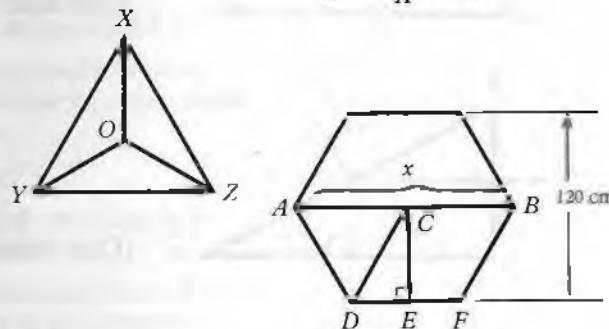
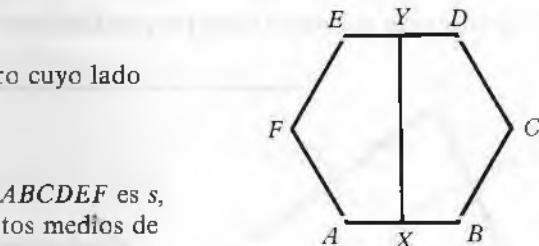
B.

13. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide el doble que el otro ángulo agudo. Si la longitud del cateto más largo es 5, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa?
14. El hueco de una ventana mide 41 pulgadas de ancho y 26 pulgadas de altura. ¿Puede introducirse por la ventana una mesa de ping-pong de 48 pulgadas de ancho?
15. Una escalera colocada contra una pared forma un ángulo de 60° con el suelo. Si la base de la escalera está a tres metros de la pared, ¿a qué altura del suelo está la parte superior de la escalera?
16. Pruébese el teorema 7.3.



C.

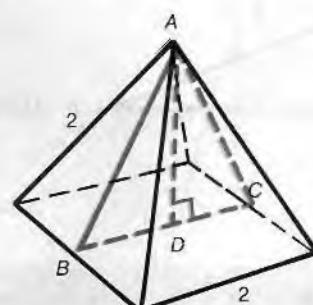
17. Pruébese que la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide s es $s\frac{\sqrt{3}}{2}$.
18. Si la longitud del lado de un hexágono regular $ABCDEF$ es s , ¿cuál es la longitud de XY si X e Y son los puntos medios de lados opuestos?
19. Si un triángulo equilátero tiene lados de longitud s , encuéntrese el radio del círculo que contiene los tres vértices.
20. Un arquitecto está calculando las dimensiones de una ventana con forma de hexágono regular. Si la altura del hueco es 120 cm, encuéntrese la anchura AB . ($m\angle ADF = 120$.)



SOLUCION DE PROBLEMAS

Considérese una pirámide cuadrada cuyas aristas tienen longitud 2. Supóngase que los puntos B y C son los puntos medios de las aristas.

1. Encuéntrense las longitudes de \overline{AB} y \overline{AC} .
2. Encuéntrese la longitud de la altura \overline{AD} de la pirámide.
3. ¿Es $\triangle ABC$ un triángulo equilátero?

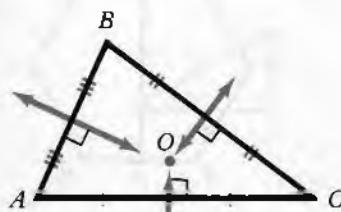


7.3 Teoremas de la concurrencia en triángulos

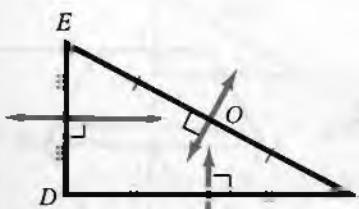
Un fabricante manufactura un producto que se vende principalmente en tres grandes ciudades. Se va a construir una fábrica nueva en un punto que equidista de las tres ciudades. ¿Cómo puede localizarse el punto donde se construirá la fábrica?

El análisis siguiente responde a esta pregunta.

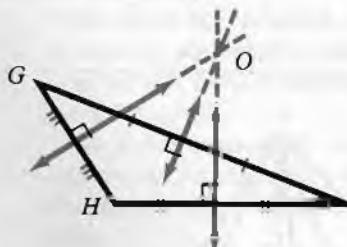
Constrúyanse las bisectrices perpendiculares a los lados de un triángulo.



¿Qué relación hay entre OA , OB y OC ?



¿Qué relación hay entre OD , OE y OF ?



¿Qué relación hay entre OG , OH y OI ?

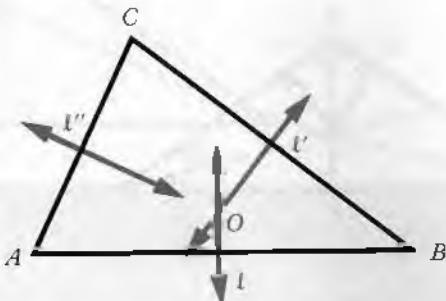
Teorema 7.5

Las bisectrices perpendiculares de los lados de un triángulo se intersecan en un punto O equidistante de los tres vértices del triángulo.

PRUEBA

Dado: $\triangle ABC$ con bisectrices perpendiculares ℓ , ℓ' y ℓ'' .

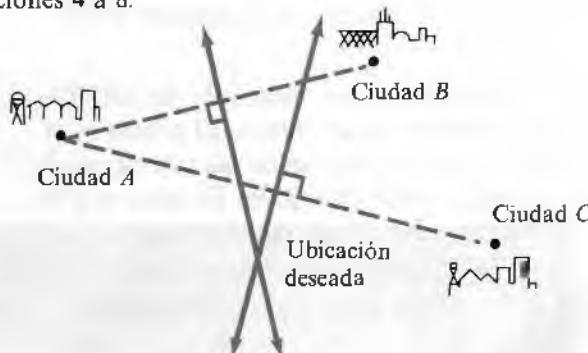
Pruébese: ℓ , ℓ' y ℓ'' son concurrentes en un punto O y $OA = OB = OC$.



Afirmaciones	Razones
1. ℓ es la bisectriz perpendicular de \overline{AB} .	1. Dado.
2. ℓ' es la bisectriz perpendicular de \overline{BC} .	2. Dado.
3. ℓ y ℓ' se intersecan en un punto O .	3. Si $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$ entonces $\ell \parallel \ell'$.
4. $OA = OB$.	4. Un punto de una bisectriz perpendicular equidista de los extremos.
5. $OB = OC$.	5. ¿Por qué?
6. $OA = OC$.	6. Propiedad transitiva de las igualdades.
7. O está en la bisectriz perpendicular de \overline{AC} .	7. Un punto equidistante de dos puntos está en la bisectriz perpendicular del segmento determinado por esos puntos.
8. O está en ℓ , ℓ' , ℓ'' y $OA = OB = OC$.	8. Afirmaciones 4 a 8.

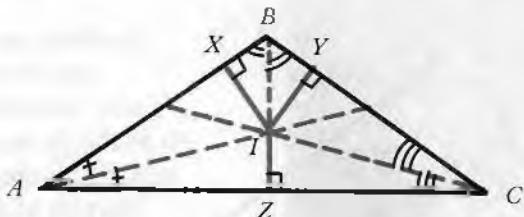
APLICACION

Al principio de esta sección, surgió la pregunta de cómo localizar un punto equidistante de tres ciudades. El teorema 7.5 responde a la pregunta.



Las bisectrices perpendiculares determinan un punto equidistante de los vértices del triángulo. También puede localizarse un punto que equidista de los *lados* del triángulo.

En $\triangle ABC$, se trazaron las bisectrices de los tres ángulos.



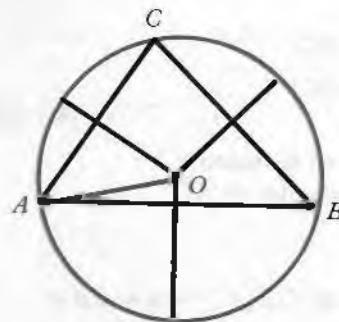
¿Qué relación hay entre IX , IY e IZ ?

Teorema 7.6

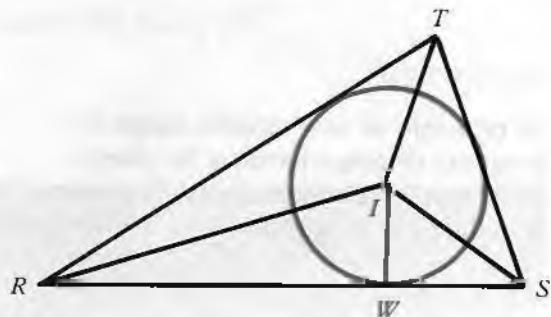
Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto I que equidista de los tres lados del triángulo.

Los puntos determinados por las bisectrices perpendiculares (Teorema 7.5) y las bisectrices de los ángulos (Teorema 7.6) son los centros de los círculos que tienen una relación especial con el triángulo.

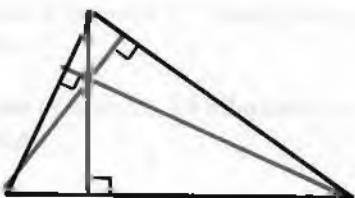
El círculo O contiene los tres vértices de $\triangle ABC$. El centro es el punto de intersección de las bisectrices perpendiculares. El radio es OA . El círculo O se llama *círculo circunscrito*.



El círculo I toca cada lado de $\triangle RST$ exactamente en un punto. El centro es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo. El radio es IW . El círculo I se llama *círculo inscrito*.



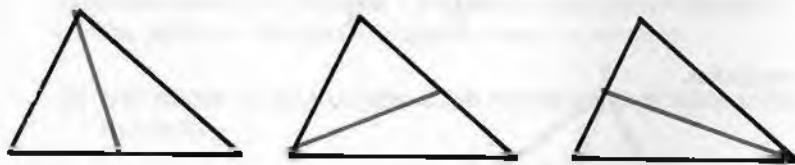
Si se dibujara un triángulo con sus tres alturas, se vería que las rectas que contienen las alturas son concurrentes.



Teorema 7.7

Las rectas que contienen las alturas de un triángulo se intersecan en un punto.

Para cualquier triángulo, hay tres segmentos llamados *medianas*.

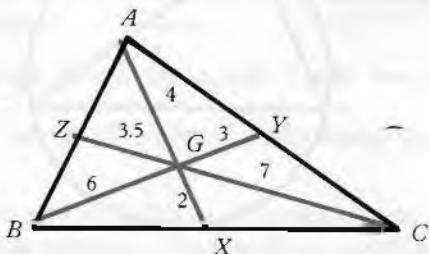


Definición 7.1

Una **mediana** de un triángulo es un segmento que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.

Si se trazaran las tres medianas de un triángulo, se vería que las tres también son concurrentes.

Hay otra relación interesante.



¿Qué relación hay entre AG y AX ?
¿Qué relación hay entre BG y BY ?
¿Qué relación hay entre CG y CZ ?

El siguiente teorema se establece sin prueba.

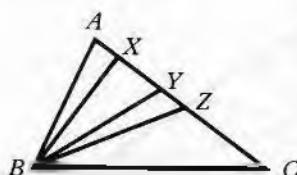
Teorema 7.8

Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto situado a dos tercios de la distancia de cada vértice al lado opuesto.

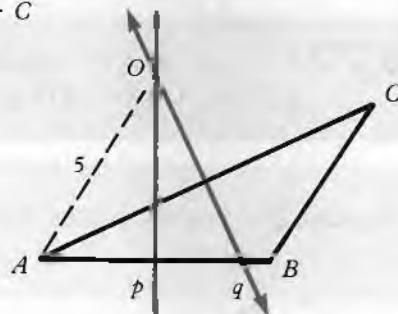
EJERCICIOS

A.

1. Cítense una altura, una bisectriz de un ángulo y una mediana de $\triangle ABC$.

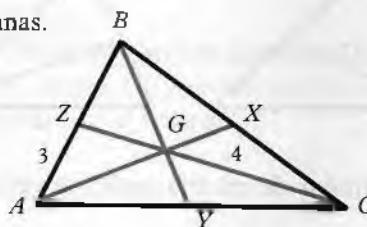


2. En $\triangle ABC$, las rectas p y q son bisectrices perpendiculares de los lados. Si $OA = 5$, encuéntrense OB y OC .

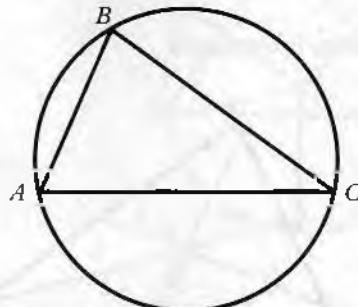


En $\triangle ABC$, \overline{AX} , \overline{BY} y \overline{CZ} son medianas.

3. Si $AZ = 3$, $ZB = \underline{\hspace{1cm}}$.
 4. Si $CG = 4$, $GZ = \underline{\hspace{1cm}}$.
 5. Si $AB = BY$, $BG = \underline{\hspace{1cm}}$.



6. Trácese $\triangle ABC$ y el círculo que pasa por los puntos A , B y C . Empléense un compás y una regla para encontrar el centro del círculo. (Indicación: Usese el Teorema 7.5.)



En los ejercicios 7 a 12 debe completarse una construcción. Empléense una regla y un compás o una hoja de plástico transparente para estas construcciones. Cada ejercicio debe ocupar casi una hoja completa de papel.

7. Ilústrese el teorema 7.5 dibujando un triángulo y las tres bisectrices perpendiculares.

8. Ilústrese el teorema 7.6 dibujando un triángulo y las tres bisectrices de los ángulos.
9. Ilústrese el teorema 7.7 dibujando un triángulo y sus tres alturas.
10. Ilústrese el teorema 7.8 dibujando un triángulo y las tres medianas.
11. Dibújense un triángulo y el círculo circunscrito. (*Indicación:* El teorema 7.5 indica cómo encontrar el centro del círculo.)
12. Dibújese $\triangle ABC$ con lados de 14 cm, 17 cm y 20 cm. Con toda precisión, trácese las intersecciones de las medianas, de las alturas y de las bisectrices perpendiculares de los lados. (El dibujo debe verificar que estos tres puntos están en una recta.)

Encuéntrense las respuestas de los ejercicios 13 a 16 experimentando con bocetos. Llénense los espacios en blanco con las palabras «siempre», «algunas veces» o «nunca».

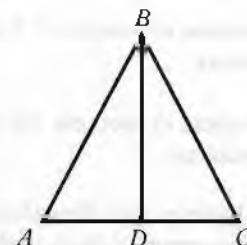
13. Las alturas de un triángulo ? se intersecan en el interior del triángulo.
14. Las medianas de un triángulo ? se intersecan en el exterior del triángulo.
15. Las bisectrices perpendiculares de los lados de un triángulo ? se intersecan en el interior del triángulo.
16. Las bisectrices de un triángulo ? se intersecan en el interior del triángulo.
17. El centro del círculo circunscrito ? está dentro del triángulo.
18. El centro del círculo inscrito ? está dentro del triángulo.

En los ejercicios 19 y 20, lléñese el primer espacio en blanco con las palabras «acutángulo», «rectángulo» u «obtusángulo», y el segundo espacio con las palabras «dentro», «sobre» o «fuera».

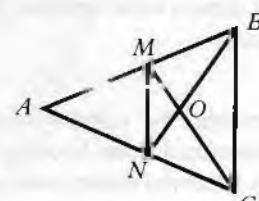
19. El punto de intersección de las rectas que contienen las alturas de un triángulo ? está ? del triángulo.
20. El punto de intersección de las bisectrices perpendiculares de un triángulo ? está ? del triángulo.

B.

21. Dibújense un triángulo y el círculo inscrito.
22. Pruébese que la mediana del vértice del ángulo de un triángulo isósceles es también una altura.
23. Pruébese que la mediana del vértice del ángulo de un triángulo isósceles es también la bisectriz del ángulo.
24. Pruébese que una altura de un triángulo equilátero es también una mediana del triángulo.
25. Pruébese que una mediana de un triángulo equilátero es también una altura del triángulo.
26. Pruébese que las medianas de los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.
27. En $\triangle ABC$, $AB = AC$, y \overline{BN} y \overline{CM} son bisectrices de los ángulos. Pruébese que $\triangle MON$ es un triángulo isósceles.



(Ejercicios 22, 23)



(Ejercicio 27)

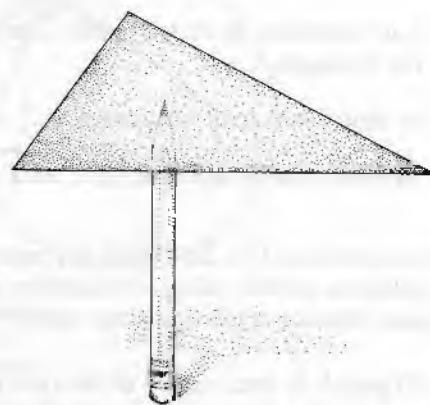
ACTIVIDADES

Centroide significa centro de masas. Si un triángulo pudiera equilibrarse, su «punto de equilibrio» sería un centroide.

Experimento: Córtese una figura triangular en cartulina o tabla. (El triángulo debe ser escaleno.)

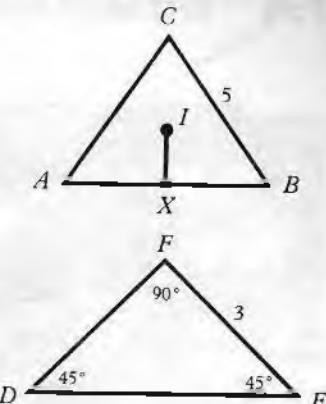
Encuéntrese el centrode de la figura.

¿Se puede equilibrar el objeto en ese punto? ¿Se puede hacer girar el objeto?



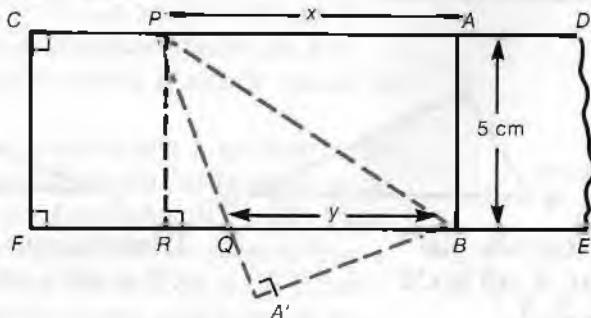
C.

28. Si $\triangle ABC$ es equilátero, encuéntrese la longitud IX del radio del círculo inscrito.
29. Si $\triangle DEF$ es un triángulo $45^{\circ}-45^{\circ}-90^{\circ}$, como se muestra, encuéntrese la longitud del radio del círculo circunscrito.
30. Pruébese que el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos de un triángulo isósceles está sobre la altura del ángulo del vértice.
31. Pruébese que las tres medianas de un triángulo equilátero dividen al triángulo en seis triángulos congruentes.
32. Pruébese que en un triángulo equilátero las bisectrices perpendiculares de los lados, las bisectrices de los ángulos, las alturas y las medianas se intersecan en el mismo punto.
33. Pruébese que las alturas de los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.



SOLUCION DE PROBLEMAS

$CDEF$ es una tira de papel de 5 cm de ancho y \overline{AB} es un doblez paralelo a \overline{CF} .

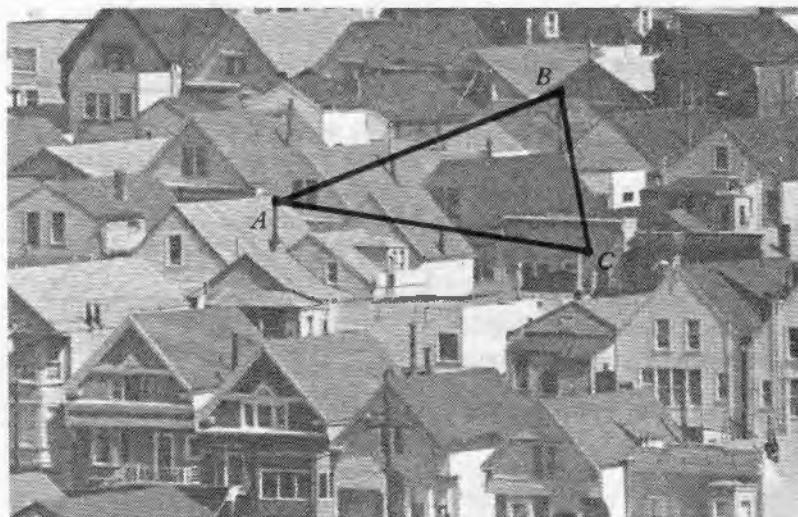


Sea P un punto cualquiera sobre \overline{CA} y doblez a lo largo de \overline{PB} localizando el punto Q . Sean $PA = x$ y $QB = y$.

1. Muéstrese que $PQ = QB = y$.
2. Muéstrese que x e y están relacionadas porque $y = \frac{x^2 + 25}{2x}$.

(Sugerencia: Muéstrese que $\triangle PQR \cong \triangle BQA'$ y emplee el teorema de Pitágoras.)

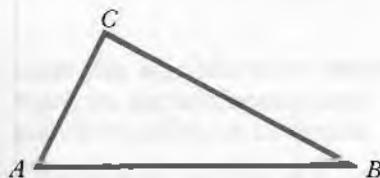
7.4 Desigualdad del triángulo



Con frecuencia se escuchan frases como «la distancia más corta entre dos puntos es un camino recto». Tales expresiones son una manera informal de describir una relación importante que se establecerá como postulado.

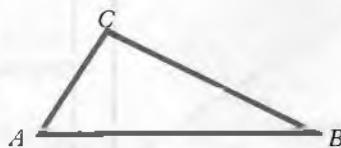
Los tres ejemplos siguientes sugieren el postulado.

Mídanse los lados.



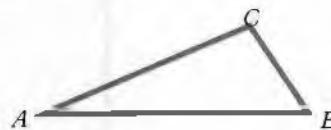
Obsérvese que
 $AB < AC + CB$.

Mídanse los lados.

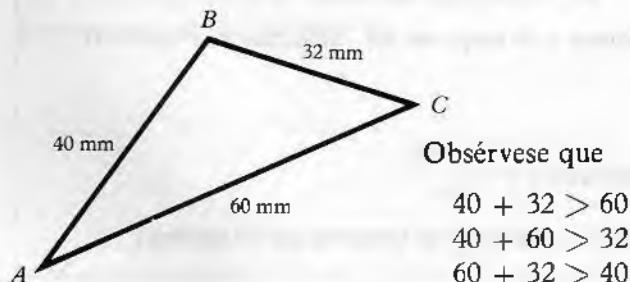


Obsérvese que
 $AC < AB + CB$.

Mídanse los lados.



Obsérvese que
 $CB < AB + AC$.



Postulado de la desigualdad del triángulo

La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

APLICACION 1

Una compañía de ferrocarriles va a construir una estación central para dar servicio a cuatro ciudades localizadas en los vértices $ABCD$ de un cuadrilátero, como se muestra en la figura. ¿Dónde debe ubicarse la estación H para que la longitud y el costo de la construcción de la línea férrea, $AH + BH + CH + DH$ sean mínimos?

Respuesta. En el punto de intersección de las diagonales de $ABDC$.

Supóngase que H' es otro punto. Entonces, por el postulado de la desigualdad del triángulo,

1. $BH + CH < BH' + CH'$ en $\triangle BCH'$.
2. $AH + DH < AH' + DH'$ en $\triangle ADH'$.

Por tanto,

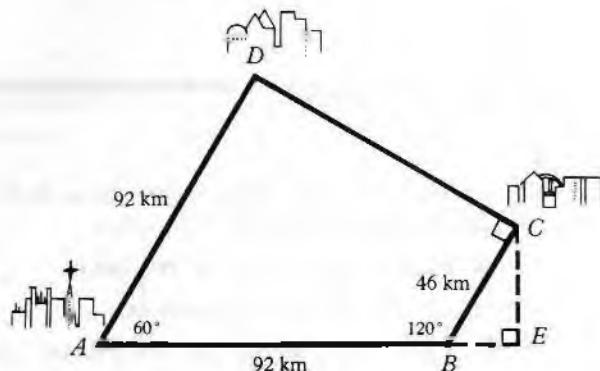
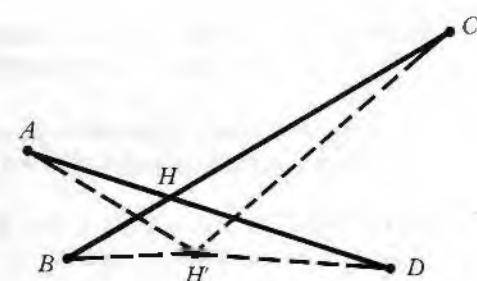
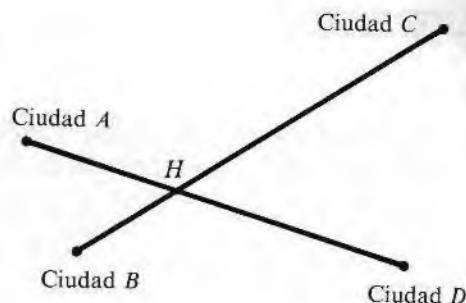
$$AH + BH + CH + DH < AH' + BH' + CH' + DH'.$$

APLICACION 2

Si las ciudades están localizadas en los puntos A , B , C y D como se muestra en la figura, ¿cuál es la longitud mínima de una línea de un punto central H a cada una de las ciudades?

Respuesta. Por la aplicación 1, se observa que la línea de longitud mínima es la suma de las longitudes de las diagonales \overline{AC} y \overline{BD} . Para encontrar la longitud de estas diagonales, primero deben encontrarse BE y CE . Dado que la longitud del cateto más corto de un triángulo 30° - 60° - 90° es la mitad de la longitud de la hipotenusa, $BE = 23$ km. El cateto más largo, CE , tiene una longitud de $23\sqrt{3}$ o unos 39.84 km.

Aplicando el teorema de Pitágoras a $\triangle AEC$, $AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{13\,225 + 1587} = 121.7$ km. $BD = 92$ km. Por tanto, la longitud mínima es, aproximadamente, 121.7 km + 92 km = 213.7 km.



EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 7, decidase si los conjuntos de números dados podrían ser las longitudes de los lados de un triángulo.

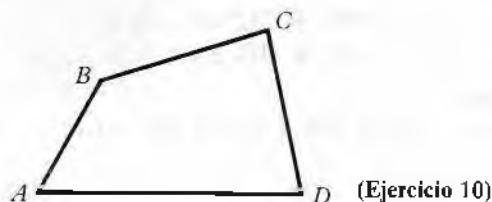
1. $\{4, 5, 7\}$.
2. $\{4, 5, 17\}$.
3. $\{6, 13, 7\}$.
4. $\{9, 13, 17\}$.
5. $\{7, 7, 13\}$.
6. $\{j, k, j + k\}$.
7. $\{a, 3a, 3a\}$.

B.

8. Si dos lados de un triángulo tienen longitudes 2 y 5, entonces la longitud del tercer lado es mayor que y menor que .

9. Si las longitudes de dos lados de un triángulo son 7 y 9, ¿cuáles son las longitudes posibles del tercer lado?

10. Pruébese que $AB + BC + CD > AD$ para cualquier cuadrilátero $ABCD$.



(Ejercicio 10)

ACTIVIDADES

Constrúyase un triángulo con lados de 8 cm, 11 cm y 15 cm, y márquense los siguientes puntos:

- a. El punto medio de los tres lados.
- b. Los pies de las tres alturas.
- c. La intersección de las tres alturas. Llámese H a este punto.
- d. Los puntos medios de los segmentos que unen H con los vértices del triángulo.

¿Qué relación existe entre los 9 puntos de los apartados a, b y d?

11. Pruébese que el camino más corto entre dos puntos, A y B , es el segmento que los une.

C.

12. Pruébese que la suma de las longitudes de los lados de un cuadrilátero es mayor que la suma de las longitudes de las diagonales.

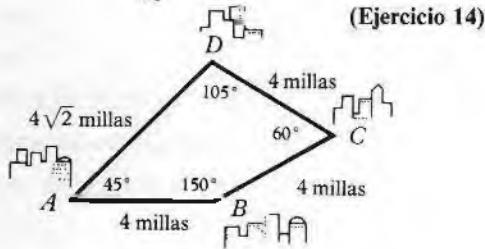
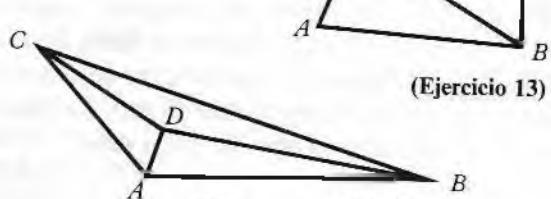
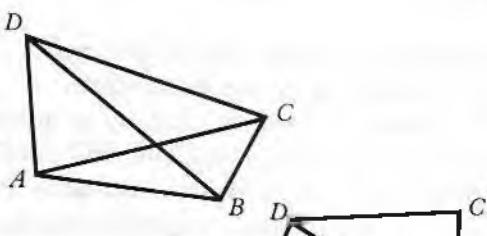
13. Pruébese que la longitud de una diagonal de un cuadrilátero es menor que la mitad del perímetro. Esto es,

$$BD < \frac{AB + BC + CD + AD}{2}.$$

14. Pruébese que si D es un punto en el interior de $\triangle ABC$, entonces

$$\frac{1}{2}(AB + BC + AC) < AD + BD + CD.$$

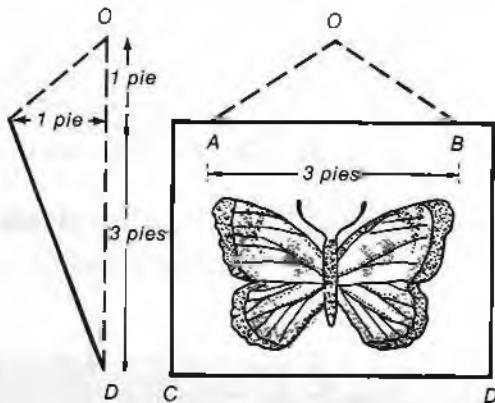
15. Supónganse que unas ciudades localizadas en los puntos A , B , C y D como se muestra en la figura. ¿Dónde está el punto H si $AH + BH + CH + DH$ es un mínimo? ¿Cuál es el valor de este mínimo? (Empléese una calculadora.)



SOLUCION DE PROBLEMAS

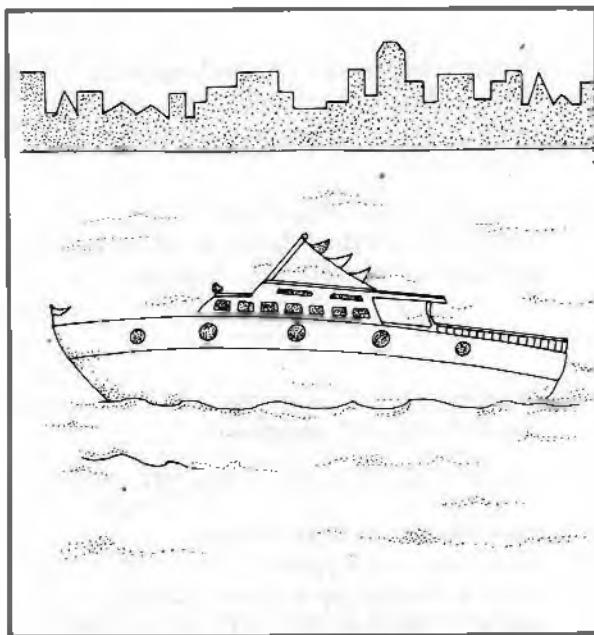
Este dibujo muestra la visión frontal y lateral de un cuadro colgado en una pared. El cuadro está apoyado contra la pared a lo largo de su base CD y separado de ella en la parte superior. Está colgado con una cuerda AOB , donde O es el clavo de la pared.

Encuéntrese la longitud AOB .



7.5 Desigualdades en un triángulo

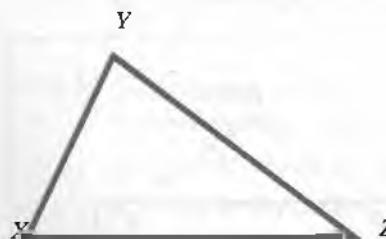
Imagínese un asentamiento físico con distancias que no pueden medirse directamente. Algunas veces no es necesario conocer la distancia real, sino sólo una comparación entre las dos distancias. Por ejemplo, en un barco se puede comparar su distancia a un punto en la costa con su distancia a un punto en una isla para tener la seguridad de que se encuentra fuera de una línea imaginaria a medio camino entre la costa y la isla. El teorema de esta sección proporciona un método de hacer esto.



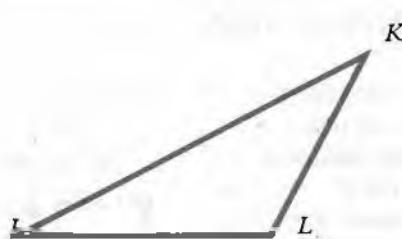
$$m\angle Z < m\angle X$$

$$m\angle J < m\angle K$$

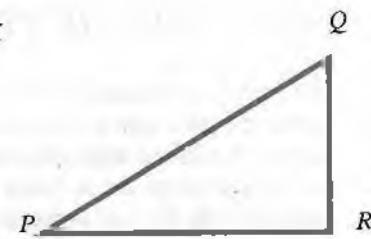
$$m\angle P < m\angle Q$$



¿Cuál es más corto, \overline{XY} o \overline{YZ} ?



¿Cuál es más corto, \overline{JL} o \overline{LK} ?



¿Cuál es más corto, \overline{PR} o \overline{QR} ?

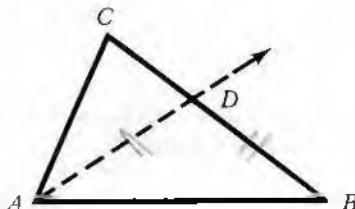
Teorema 7.9

Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son desiguales, entonces la longitud del lado opuesto al ángulo menor es menor que la longitud del lado opuesto al ángulo mayor.

PRUEBA

Dado: $\triangle ABC$ con $m\angle B < m\angle A$.

Pruébese: $AC < BC$.

**Afirmaciones****Razones**

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $m\angle B < m\angle A$.
2. Existe un punto D sobre \overline{BC} de manera que $m\angle BAD = m\angle B$.
3. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.

4. $AD = BD$.
5. $AC < AD + DC$.
6. $AD + DC = BD + DC$.
7. $BD + DC = BC$.
8. $AC < BC$. | 1. Dado.
2. Postulado del transportador.

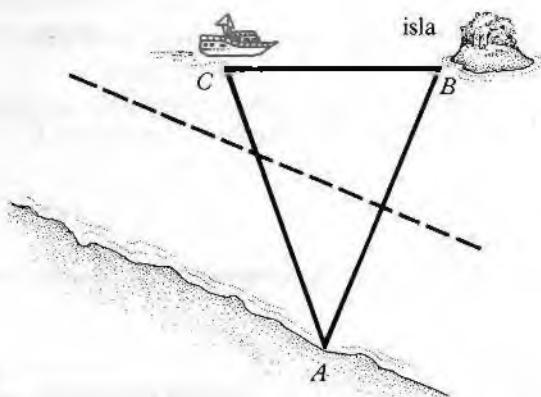
3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos son congruentes.
4. ¿Por qué?
5. ¿Por qué?
6. Propiedad de suma de las iguales.
7. Definición de «entre» para puntos.
8. Principio de la sustitución. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

APLICACION

¿Cómo puede determinarse que un barco está fuera de una linea imaginaria situada a medio camino entre la costa y una isla?

Respuesta. Unas personas situadas en los puntos A y B determinan, por medio de la radio, el radar o rayos láser, que $m\angle A < m\angle B$. Cuando esta información se comunica al barco, el capitán concluye, por el teorema 7.9, que $CB < CA$.

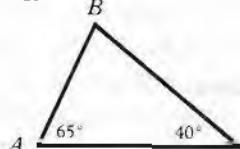
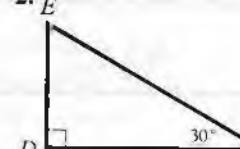
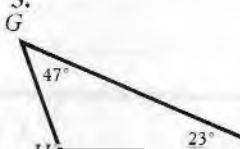
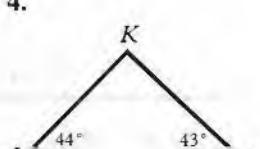
La recíproca del teorema 7.9 se enuncia aquí sin demostración.

**Teorema 7.10**

Si las longitudes de dos lados de un triángulo son desiguales, entonces la medida del ángulo opuesto al lado más corto es menor que la medida del ángulo opuesto al lado más largo.

EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 4, digase cuáles son los lados más cortos y los más largos de los triángulos dados.

1.  Lados más cortos: BC; Lados más largos: AB, AC.
2.  Lados más cortos: EF, FD; Lados más largos: DE.
3.  Lados más cortos: GH, HJ; Lados más largos: GJ.
4.  Lados más cortos: KI, IJ; Lados más largos: JK.

En los ejercicios 5 a 8, enumérense los lados del más corto al más largo, para un triángulo $\triangle ABC$ si:

5. $m\angle A = 46$, $m\angle B = 30$.
6. $m\angle C = 101$, $m\angle B = 70$.
7. $m\angle A = 59$, $m\angle C = 61$.
8. $m\angle B = 48$, $m\angle A = 47$.

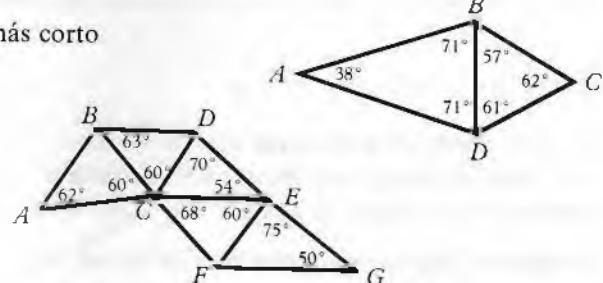
En los ejercicios 9 y 10, enumérense los ángulos del más pequeño al más grande de $\triangle ABC$ si:

9. $AB = 17$, $BC = 21$, $AC = 18$.
10. $AB = 15$, $AC = 16$, $BC = 17$.

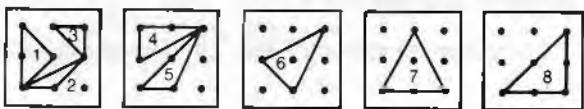
B.

11. Enumérense los lados del cuadrilátero del más corto al más largo.

12. Enumérense todos los segmentos de esta figura del más corto al más largo.
(Supóngase que todas las medidas indicadas de los ángulos son correctas.)

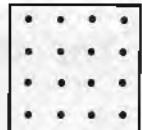
**ACTIVIDADES**

Empléese una matriz cuadrada de puntos de 3×3 . Pueden dibujarse ocho triángulos de diferente tamaño y forma.



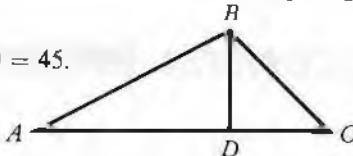
En una matriz cuadrada de puntos de 4×4 pueden dibujarse más de 30 triángulos.

Sugerencia: Trabajese en forma sistemática. No debe empezarse dibujando al azar. (Si no se dispone de papel de puntos, puede usarse papel milimetrado.)



13. Dado: $m\angle DBC = m\angle BCD = 45^\circ$.

Pruébese: $CD < AB$.



14. Pruébese que el segmento perpendicular de un punto a una recta es el segmento más corto del punto a la recta.

C.

15. Pruébese que la mediana del vértice Y del triángulo escaleno XYZ es mayor que la altura del vértice Y.

16. Pruébese que la suma de las longitudes de las tres alturas de $\triangle ABC$ es menor que la suma de los lados del triángulo.

17. Los tres lugares principales de trabajo en una cocina son el refrigerador, la estufa y el lavadero, y pueden representarse como los puntos de un triángulo. Según una regla de arquitectura, «los tres lados del triángulo de la cocina deben sumar más de 12 pies y menos de 22 pies». Además, el lado más corto del triángulo debe estar entre el lavadero y la estufa.

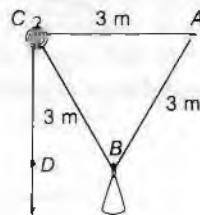
A continuación, se muestra una tabla de «triángulos de cocina» posibles. Primero, debe decidirse si cada triángulo es o no posible. Después, decídase si los triángulos cumplen con la regla establecida.



	Estufa-lavadero	Estufa-refrigerador	Refrigerador-lavadero
a.	5 pies	4 pies	8 pies
b.	10 pies	11 pies	11 pies
c.	6 pies	8 pies	7 pies
d.	3 pies	7 pies	4 pies
e.	3 pies	8 pies	4 pies

SOLUCION DE PROBLEMAS

Supóngase que $ABCD$ es un cable flexible, A es un punto fijo y C es una polea fija. B es un peso que se desliza por el cable de manera que AB y CB tienen siempre la misma inclinación con respecto a la vertical. Encuéntrese a qué altura se eleva B si se tira de D 2 m hacia abajo.



Capítulo 7 Conceptos importantes

Términos

Mediana (pág. 239)

Postulados

Postulado de la desigualdad del triángulo. La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

Teorema

- 7.1 **Teorema de Pitágoras.** Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- 7.2 Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitudes a , b y c , $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.
- 7.3 La longitud de la hipotenusa de un triángulo 45° - 45° - 90° es $\sqrt{2}$ multiplicada por la longitud de un cateto.
- 7.4 La longitud del cateto más largo de un triángulo 30° - 60° - 90° es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ multiplicado por la longitud de la hipotenusa o $\sqrt{3}$ multiplicada por la longitud del lado más corto.
- 7.5 Las bisectrices perpendiculares de los lados de un triángulo se intersecan en un punto O que equidista de los tres vértices de un triángulo.
- 7.6 Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto I que equidista de los tres lados de un triángulo.
- 7.7 Las rectas que contienen las alturas de un triángulo se intersecan en un punto.
- 7.8 Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto que está a dos tercios de la distancia de cada vértice al lado opuesto.
- 7.9 Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son desiguales, entonces la longitud del lado opuesto al ángulo menor es menor que la longitud del lado opuesto al ángulo mayor.
- 7.10 Si las longitudes de dos lados de un triángulo son desiguales, entonces la medida del ángulo opuesto al lado más corto es menor que la medida del ángulo opuesto al lado más largo.

Capítulo 7 Resumen

1. Indíquese si los siguientes problemas son falsos o verdaderos.

- Un triángulo puede tener lados de 2 cm, 3 cm y 5 cm.
- En el triángulo ABC , $m\angle A = 120$, $m\angle B = 20$ y $m\angle C = 40$. El lado más largo es \overline{BC} .
- Un rectángulo de 10 cm por 24 cm tiene una diagonal de 26 cm.
- Si el cateto más largo de un triángulo 30° - 60° - 90° tiene una longitud de $3\sqrt{3}$, entonces la longitud de la hipotenusa es 6.

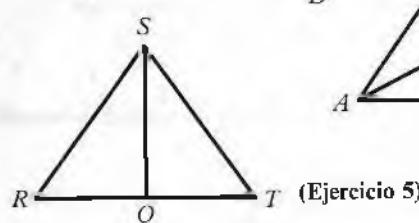
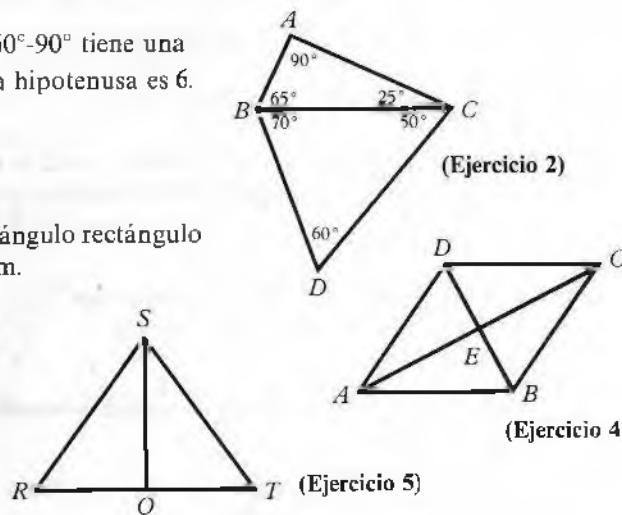
2. ¿Cuál es el lado más largo de la siguiente figura? (La figura no está dibujada a escala.)

3. Encuéntrese la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo isósceles si la longitud de la hipotenusa es 4 cm.

4. Si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$, y $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ con $BD = AB = 2$, encuéntrese AC .

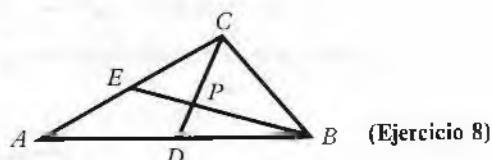
5. Pruébese que la mediana \overline{SQ} de un triángulo isósceles RST también es la bisectriz perpendicular de la base.

6. Localícese un punto equidistante de M , N y O .



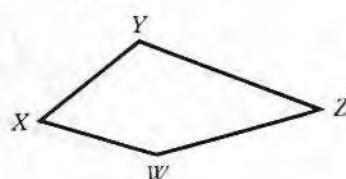
7. Si una escalera de 20 pies se coloca de manera que su base esté a 12 pies de la pared, ¿qué altura alcanzará la escalera?

8. E y D son puntos medios de \overline{AC} y \overline{AB} , respectivamente. Si $EP = 4$, encuéntrese EB .



9. **Dado:** \overline{YZ} es el lado más largo de un cuadrilátero $XYZW$. \overline{XW} es el lado más corto.

Pruébese: $m\angle X > m\angle Z$.

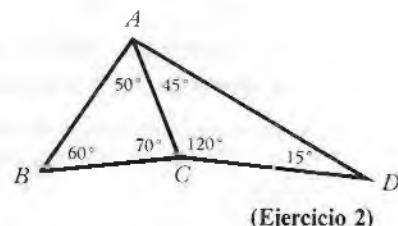


Capítulo 7 Examen

1. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.

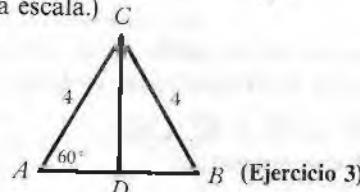
- Un triángulo puede tener lados de 6, 6 y 13.
- Si un triángulo tiene lados de 16, 30 y 44, entonces es un triángulo rectángulo.
- Si el ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide 30° , entonces la base del triángulo es el lado más corto.
- Si el cateto más largo de un triángulo de 30° - 60° - 90° mide 2, entonces la longitud de la hipotenusa es $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Dadas las medidas de ángulos indicadas, ¿cuál es el lado más corto de la figura? (La figura no está dibujada a escala.)



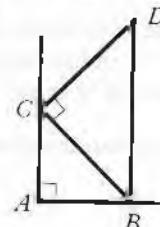
(Ejercicio 2)

3. En la figura siguiente, \overline{CD} es perpendicular a \overline{AB} . Si $AC = 4$, encuéntrense AD y CD .



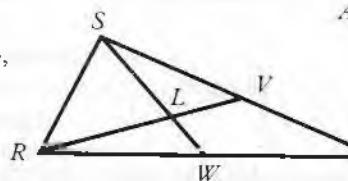
(Ejercicio 3)

4. $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ son triángulos rectángulos isósceles. Si $AC = 2$, encuéntrese BD .



(Ejercicio 4)

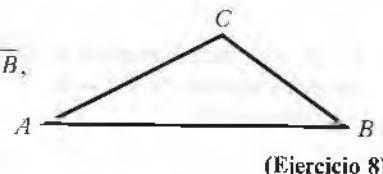
5. Pruébese que la bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles también es una mediana.



(Ejercicio 6)

7. Si se coloca una viga contra una pared, a 80 cm de ella y apoyada a 150 cm del suelo, ¿cuál es la longitud de la viga?

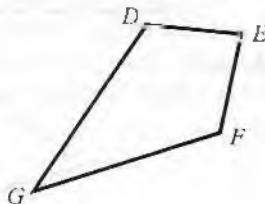
8. En $\triangle ABC$, localízese el punto que es equidistante de los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} .



(Ejercicio 8)

9. Dado: $DE = EF$, $DG = FG$
 $DE < DG$.

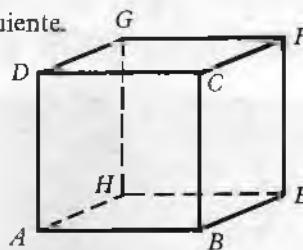
Pruébese: $m\angle G < m\angle E$.



Resumen global (Caps. 4 a 7)

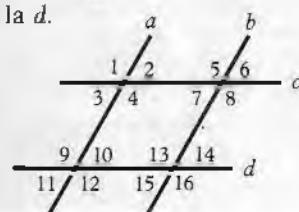
1. Utilícese la figura de un cubo para identificar lo siguiente.

- una recta paralela al plano $ABEH$.
- una recta alabeada a \overleftrightarrow{DC} .
- un plano perpendicular a \overline{CB} .
- una recta paralela a \overline{GC} .
- un plano paralelo al plano $CFEB$.



2. Supóngase que la recta a es paralela a la b y la c es paralela a la d .

- Si $m\angle 1 = 105$, encuéntrese $m\angle 14$.
- Si $m\angle 5 = 2x - 10$ y $m\angle 10 = x + 5$, encuéntrense $m\angle 5$ y $m\angle 10$.
- Si $m\angle 12$ es 10 veces el doble de la medida de $\angle 11$, encuéntrense $m\angle 12$ y $m\angle 11$.

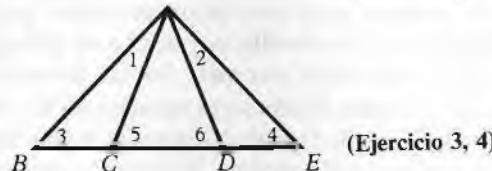


3. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$.

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle AED$.

4. Dado: $\overline{DE} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.

Pruébese: $\triangle BDA \cong \triangle ECA$.



5. Si $\angle ACB$ es el ángulo del vértice de un triángulo isósceles ABC y $m\angle 2 = 70$, encuéntrese $m\angle 5$.

6. Si $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $m\angle 3 = 45$, $m\angle 1 = 65$, encuéntrese $m\angle 2$.

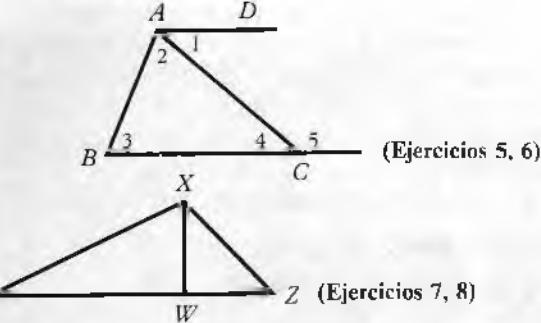
7. Si \overline{XW} es perpendicular a \overline{YZ} , $m\angle Y = 30$, $m\angle Z = 45$ y $XW = 3$, encuéntrense las longitudes de \overline{XY} , \overline{YW} y \overline{XZ} .

8. Si \overline{XZ} es una altura de \overline{XY} , $XY = 12$ y $XZ = 5$, encuéntrese YZ .

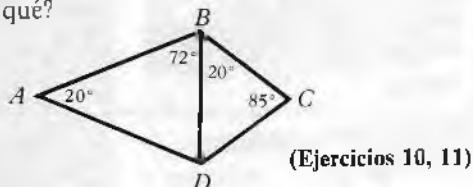
9. Si dos lados cortos de un triángulo miden 5 cm y 3 cm, ¿es posible que el lado más largo mida 7 cm? ¿Por qué?

10. Dado: Cuadrilátero $ABCD$.

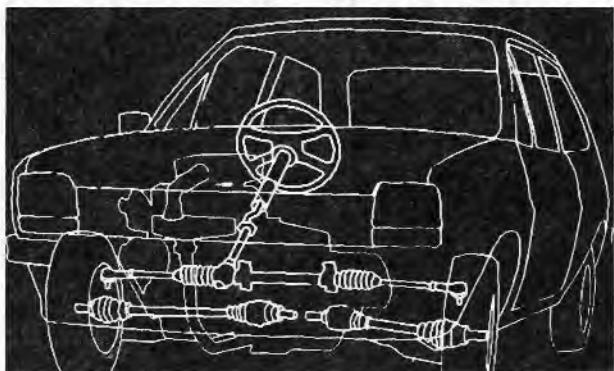
- Encuéntrese:
- $m\angle ADB$.
 - $m\angle BDC$.
 - $m\angle ADC$.



11. Enumérense los lados del cuadrilátero $ABCD$ del más corto al más largo.



Gráficas por computador: diseño asistido por computador

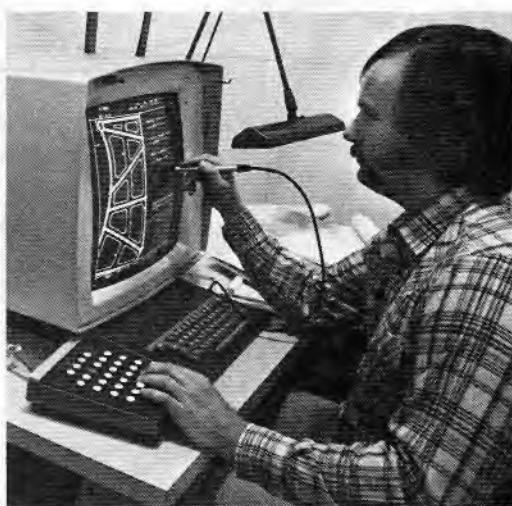
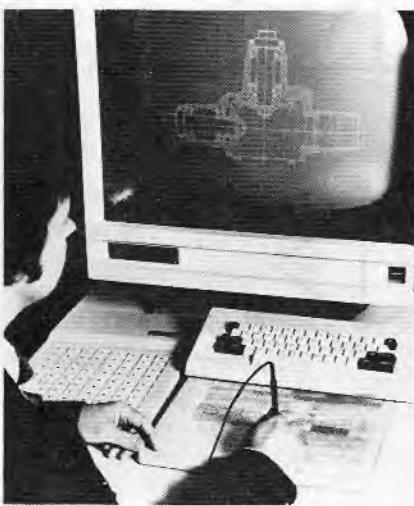


Las gráficas por computador han revolucionado el trabajo de los diseñadores industriales. El diseñador debe ser capaz de imaginar y analizar formas complejas compuestas de figuras geométricas. Con diseños asistidos por computador (*Computer Aided Design, CAD*), el diseñador emplea los computadores para dibujar diseños.

La fotografía superior muestra un diseño de un automóvil generado por un computador. El computador puede desplegar en la pantalla este diseño en infinidad de posiciones. Es decir, puede presentarse en la pantalla una vista frontal, de arriba, de abajo, etc., del automóvil.

Las fotografías muestran a unos diseñadores manejando los terminales de un computador. El diseñador de la derecha usa una pluma electrónica para alterar las dimensiones de una sección de un modelo. Al tocar la pantalla con la pluma, el diseñador se comunica con el computador.

El diseñador de la izquierda está trabajando con una sección transversal de un modelo tridimensional. El tablero que tiene delante se utiliza para dar órdenes al computador. Al colocar la pluma electrónica en diferentes cuadros, puede añadir o borrar porciones del dibujo. También puede pedir al computador que amplíe una parte del dibujo. La biblioteca del computador incluye dibujos de partes estándar, como cojinetes o la transmisión, que pueden añadirse al diseño.



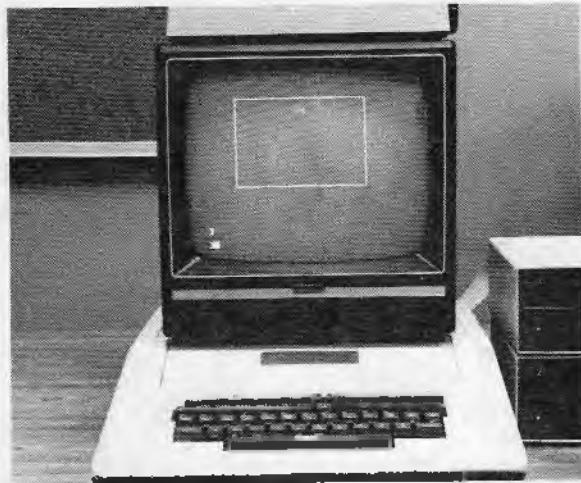
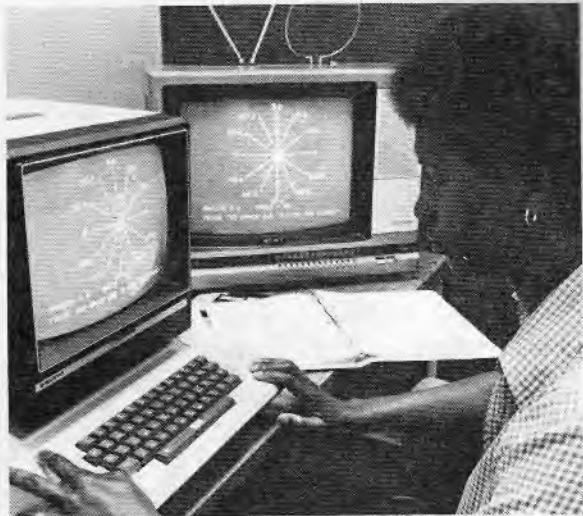
Ultimamente, con el uso de los microcomputadores, las gráficas por computador son accesibles para los estudiantes. En un modelo popular de microcomputador, la pantalla está dividida en 280 filas y 160 columnas invisibles. Por ejemplo, el espacio que está en la fila 40 y en la columna 20, es el punto llamado (40, 20). Iluminando un conjunto grande de puntos, aparecen líneas en la pantalla. Por ejemplo, el siguiente programa despliega en la pantalla un rectángulo cuyos vértices son los puntos (40, 20), (220, 20), (220, 120) y (40, 120).

El programa, o lista de instrucciones al computador, se muestra a continuación. La línea 10 indica al computador que se prepare para recibir instrucciones sobre gráficas (HGR). En la línea 20, HPLOT es una instrucción para dibujar en la pantalla una línea del punto (40, 20) al punto (220, 20). Compruébense las demás instrucciones para ver cómo se dibuja un rectángulo.

```

10 HGR
20 HPLOT 40, 20 TO 220, 20
30 HPLOT 40, 20 TO 40, 120
40 HPLOT 40, 120 TO 220, 120
50 HPLOT 220, 20 TO 220, 120
60 END

```



1. Escribanse los mandatos HPLOT para formar un cuadrado en la pantalla.
2. Escribanse cuatro mandatos HPLOT para formar un rectángulo el doble de alto que de ancho.
3. Créese una figura compuesta de segmentos de recta. Después, escribanse los mandatos HPLOT que desplegarán la figura en la pantalla de un televisor.

CAPITULO

8

- 8.1 Cuadriláteros** 260
- 8.2 Paralelogramos** 264
- 8.3 Cuadriláteros que son paralelogramos** 270
- 8.4 El teorema del segmento medio** 276
- 8.5 Rectángulos, rombos y cuadrados** 282
- 8.6 Trapecios** 288
- 8.7 Los ángulos de un polígono** 292

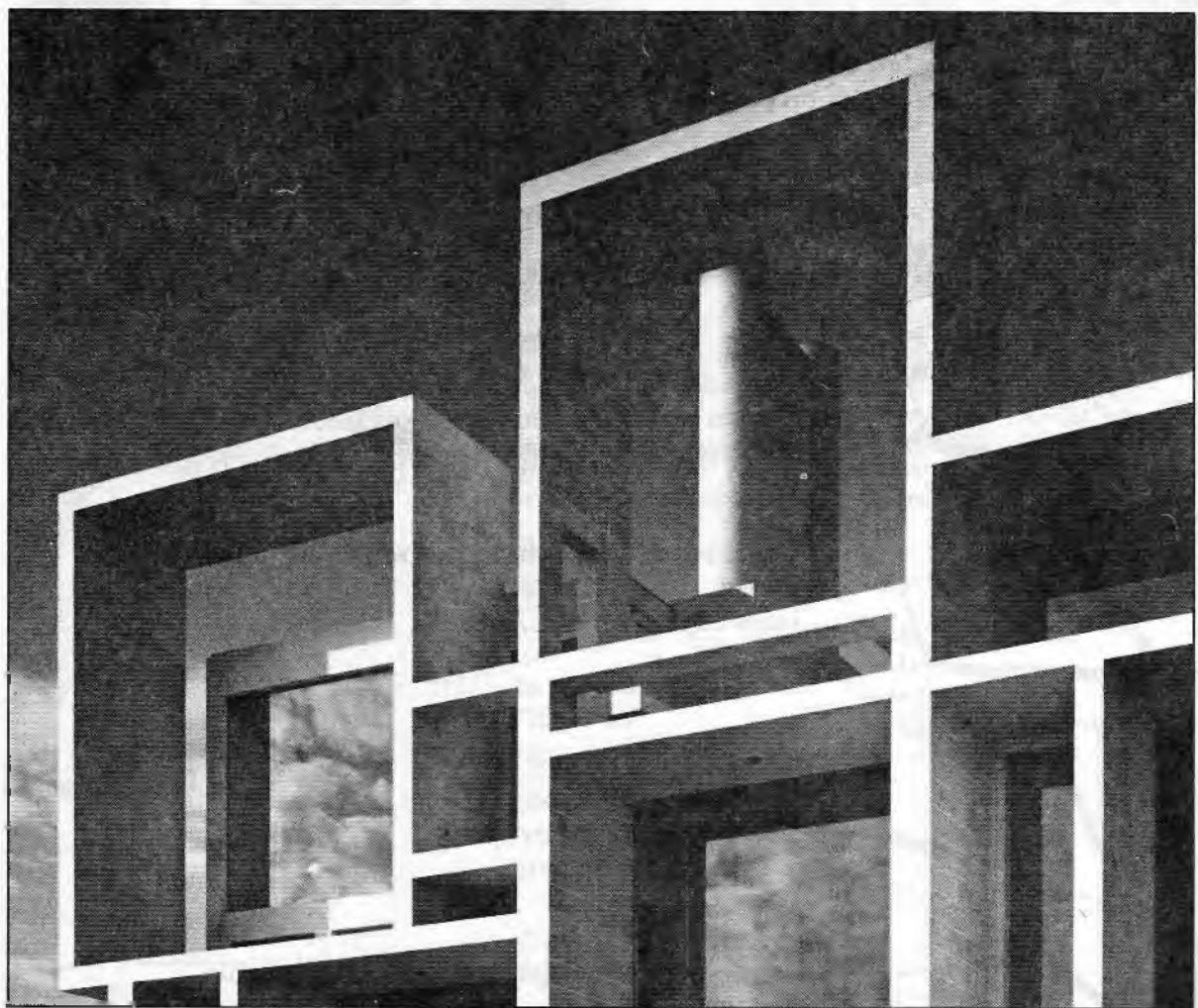
Conceptos importantes 296 *Resumen* 297 *Examen* 298

Repaso de álgebra 299

La geometría en nuestro mundo

Arquitectura: El rectángulo áureo 300

Cuadriláteros y polígonos

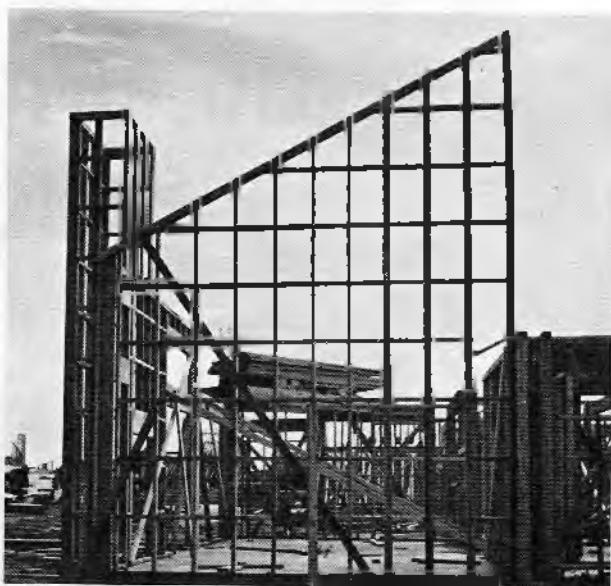


8.1 Cuadriláteros

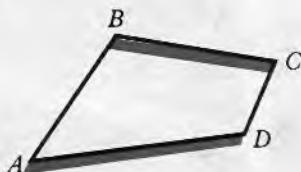
REPASO: Un cuadrilátero es la unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, tres de los cuales no son colineales. Los segmentos se intersecan sólo en sus extremos.

Nuestro mundo está lleno de ejemplos de figuras de cuatro lados de todas las formas y tamaños que se pueden clasificar en función de los lados, de los ángulos y de las relaciones entre los ángulos y los lados.

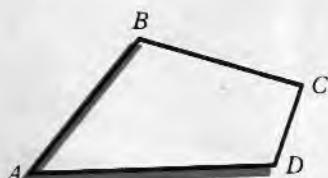
En este capítulo se estudiarán estas clasificaciones y algunas de las propiedades de los cuadriláteros.



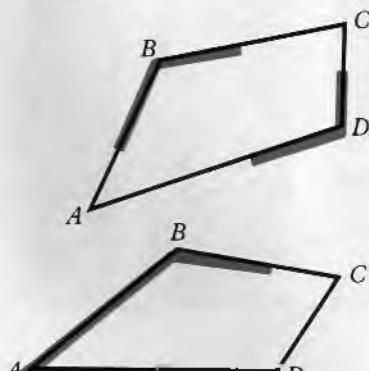
Las figuras siguientes ilustran algunos aspectos importantes de los cuadriláteros.



Los lados \overline{BC} y \overline{AD} no tienen un vértice común. Son un par de *lados opuestos*. Los lados \overline{AB} y \overline{DC} también son opuestos.



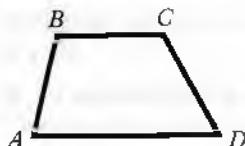
Los lados \overline{AB} y \overline{AD} tienen un vértice común. Son un par de *lados adyacentes*. Otros pares de lados adyacentes son \overline{AB} y \overline{BC} , \overline{BC} y \overline{CD} , y \overline{CD} y \overline{DA} .



Los ángulos B y D no tienen un lado común. Son un par de *ángulos opuestos*. Los ángulos A y C también son opuestos.

Los ángulos A y B tienen al lado \overline{AB} en común. Son un par de *ángulos adyacentes*. Otros pares de ángulos adyacentes son $\angle B$ y $\angle C$, $\angle C$ y $\angle D$, y $\angle D$ y $\angle A$.

Ahora se describirán los tipos básicos de cuadriláteros.

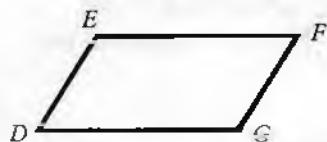


Dos lados opuestos son paralelos.

ABCD es un *trapezio*. \overline{BC} y \overline{AD} son las *bases* del trapezio.

Definición 8.1

Un **trapezio** es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.

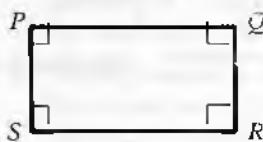


Ambos pares de lados opuestos son paralelos.

EDGF es un *paralelogramo*.

Definición 8.2

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.

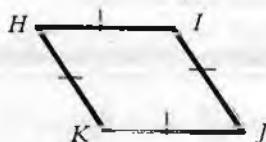


Los cuatro ángulos son rectos.

PQRS es un *rectángulo* (y también un paralelogramo).

Definición 8.3

Un **rectángulo** es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos.

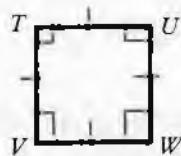


Los cuatro lados son congruentes.

HIJK es un *rombo* (y también es un paralelogramo).

Definición 8.4

Un **rombo** es un paralelogramo con cuatro lados congruentes.



Los cuatro ángulos son rectos. Los cuatro lados son congruentes.

TUWV es un *cuadrado* (y también es un rectángulo, un rombo y un paralelogramo).

Definición 8.5

Un **cuadrado** es un rectángulo con cuatro lados congruentes.

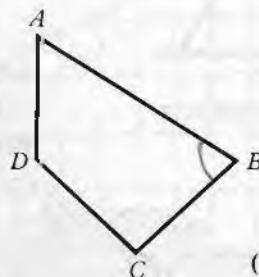
EJERCICIOS**A.**

Para los ejercicios 1 a 4, véase el cuadrilátero $ABCD$.

1. ¿Cuál es el lado opuesto a \overline{AB} ?
2. ¿Cuáles son los ángulos adyacentes a $\angle C$?
3. ¿Cuáles son los lados adyacentes a \overline{BC} ?
4. ¿Cuál es el ángulo opuesto a $\angle D$?

Determine si lo siguiente es falso o verdadero.

5. Un cuadrado es un rectángulo.
6. Un rectángulo es un paralelogramo.
7. Un paralelogramo es un rombo.
8. Un trapecio es un paralelogramo.
9. Algunos paralelogramos son rectángulos.
10. Un rombo es un cuadrado.
11. Algunos rombos son rectángulos.
12. Un paralelogramo es un trapecio.



(Ejercicios 1-4)



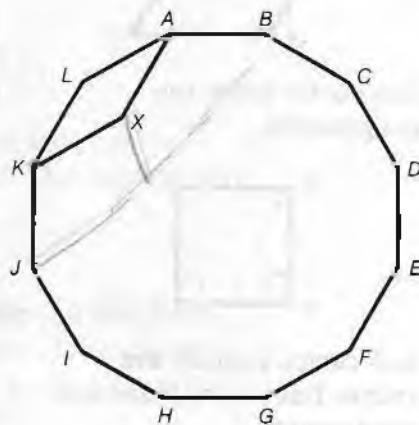
(Ejercicios 5-12)

B.

13. Dibújese un paralelogramo con un ángulo de 30° .
14. Dibújese un rombo con un ángulo de 60° .
15. Dibújese un trapecio con dos ángulos rectos.
16. Dibújese un rectángulo que mida la mitad de ancho que de largo.

ACTIVIDADES

1. Dibújese este dodecágono regular y el paralelogramo con lados \overline{AL} y \overline{LK} .
2. Dibújese un paralelogramo con lados \overline{KJ} y \overline{KX} , y otro con lados, \overline{AX} y \overline{AB} .
3. Si se continúa con este proceso, ¿cuántos paralelogramos resultarán después de haber dividido el dodecágono en paralelogramos?
4. Complétense el dibujo para comprobar la respuesta.





17. Constrúyase un trapecio con un par de ángulos de 45° en una base.

Dibújense y diganse los nombres de los cuadriláteros de los ejercicios 18 a 20.

18. El cuadrilátero tiene dos pares de lados paralelos, ningún ángulo recto y ningún par de lados adyacentes congruentes.
19. El cuadrilátero tiene, por lo menos, un par de lados adyacentes congruentes, un par de lados opuestos congruentes y ningún ángulo recto.
20. El cuadrilátero tiene, por lo menos, un par de lados paralelos, ningún par de lados adyacentes congruentes y exactamente un par de lados opuestos congruentes.

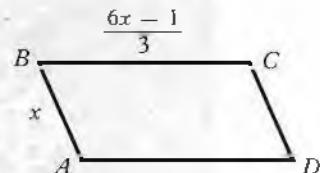
C.

21. El perímetro (medida del contorno) del paralelogramo es 32 cm. ¿Cuál es la longitud de cada lado (aproximación en milímetros)?

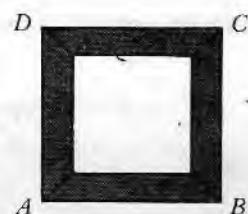
22. La base más larga de un trapecio es el cuadrado de la más corta. Los lados no paralelos son congruentes. El lado no paralelo es 3 veces mayor que la base más corta. Si el perímetro del trapecio es 24 cm, ¿cuáles son las longitudes de los lados?

23. Supóngase que se intenta construir un marco para un cuadro. Se cortan cuatro piezas de madera y se encolan de manera que $AB = BC = CD = AD$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones se sabe que son verdaderas utilizando sólo las definiciones?

- a. $ABCD$ es un cuadrado. b. $ABCD$ es un rectángulo.
c. $ABCD$ es un rombo. d. $ABCD$ es un paralelogramo.

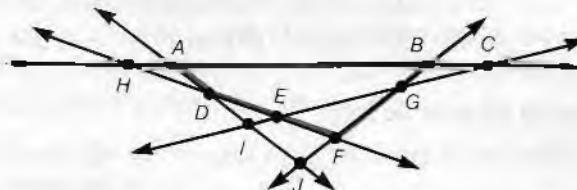


(Ejercicio 21)



SOLUCION DE PROBLEMAS

El siguiente es un cuadrilátero formado por cinco rectas.



Estos tres cuadriláteros también pueden encontrarse en la figura. Identifíquense.



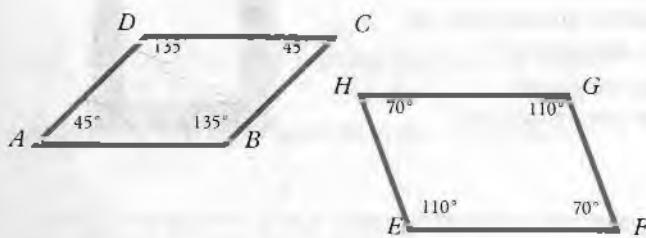
En la figura hay por lo menos otros seis cuadriláteros. Dibújense e identifíquense.

8.2 Paralelogramos

Los lados y ángulos de los paralelogramos que se muestran en el diseño tienen relaciones de lados y ángulos especiales.

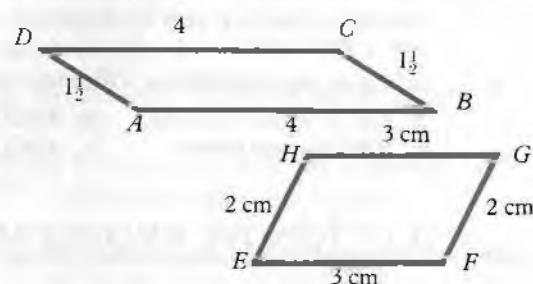


En los paralelogramos siguientes se dan las medidas de algunos pares de ángulos y lados opuestos.



Obsérvese que

$$\begin{aligned}\angle A &\cong \angle C, \quad \angle B \cong \angle D, \\ \angle E &\cong \angle G, \quad \angle F \cong \angle H.\end{aligned}$$



Obsérvese que

$$\begin{aligned}\overline{AB} &\cong \overline{CD}, \quad \overline{AD} \cong \overline{BC}, \\ \overline{EF} &\cong \overline{GH}, \quad \overline{EH} \cong \overline{FG}.\end{aligned}$$

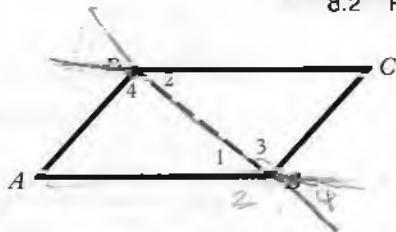
Estas observaciones sugieren dos propiedades básicas de los paralelogramos.

Teorema 8.1 Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Teorema 8.2 Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

PRUEBA

Dado: $ABCD$ es un paralelogramo.
 Pruébese: $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$
 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



Plan: Trácese la diagonal \overline{BD} y pruébese que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

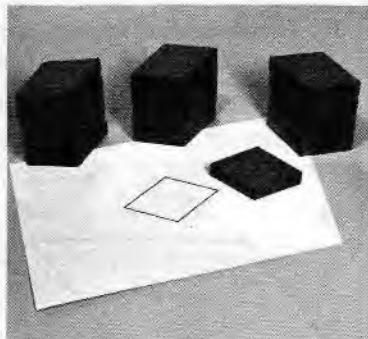
Afirmaciones	Razones
1. $ABCD$ es un paralelogramo.	1. Dado.
2. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.	2. Definición de paralelogramo.
3. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.	3. ¿Por qué?
4. $\angle 1 \cong \angle 2$.	4. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos interiores son congruentes.
5. $\angle 3 \cong \angle 4$.	5. ¿Por qué?
6. $\overline{BD} = \overline{BD}$.	6. ¿Por qué?
7. $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.	7. ¿Por qué?
8. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	8. PCTCC.
9. $\angle A \cong \angle C$.	9. PCTCC.

Si se repite esta demostración con la diagonal \overline{AC} , puede probarse que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\angle B \cong \angle D$.

APLICACION

Cualquier proceso de producción debe incluir la comprobación de la calidad del artículo producido. En la producción de bloques patrón, la verificación puede incluir la medición de ángulos opuestos de un cuadrilátero. La contrarrrecíproca del teorema 8.1 establece que si los ángulos opuestos no son congruentes, entonces el bloque no puede ser un paralelogramo y debe descartarse.

A continuación se enuncia otro teorema importante que se probará como ejercicio.

**Teorema 8.3**

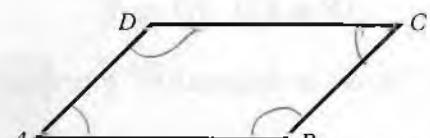
Los pares de ángulos adyacentes de un paralelogramo son ángulos suplementarios.

EJERCICIOS

A.

En los ejercicios 1 a 3, supóngase que $ABCD$ es un paralelogramo.

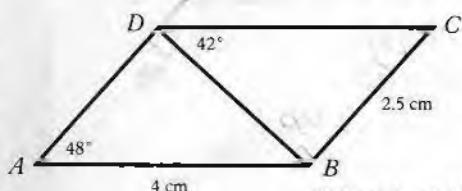
1. Diganse dos pares de segmentos congruentes.
2. Diganse dos pares de ángulos congruentes.
3. Diganse cuatro pares de ángulos supplementarios.



(Ejercicios 1-3)

En los ejercicios 4 a 11, asúmase que $ABCD$ es un paralelogramo.

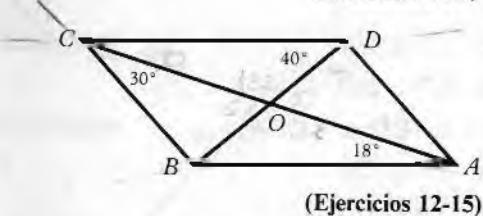
- | | |
|----------------------|----------------------|
| 4. $m\angle C = ?$ | 5. $m\angle ABC = ?$ |
| 6. $m\angle ABD = ?$ | 7. $m\angle ADB = ?$ |
| 8. $m\angle DBC = ?$ | 9. $m\angle ADC = ?$ |
| 10. $AD = ?$ | 11. $CD = ?$ |



(Ejercicios 4-11)

En los ejercicios 12 a 15, supóngase que $ABCD$ es un paralelogramo.

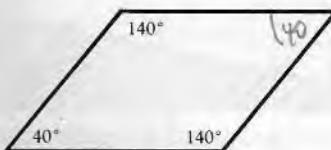
- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 12. $m\angle ABC = ?$ | 13. $m\angle DOC = ?$ |
| 14. $m\angle ADC = ?$ | 15. $m\angle BOC = ?$ |
| 16. Escribase el teorema 8.1 en la forma si-entonces y establezcase su contrarrecíproca. | |
| 17. Escribase el teorema 8.2 en la forma si-entonces y establezcase su contrarrecíproca. | |



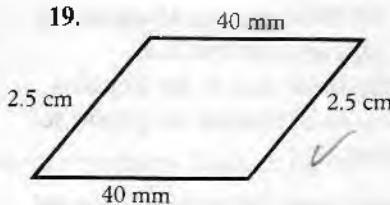
(Ejercicios 12-15)

En los ejercicios 18 a 23, empléense las contrarrecíprocas de los ejercicios 16 y 17 para determinar qué figuras *no* pueden ser paralelogramos.

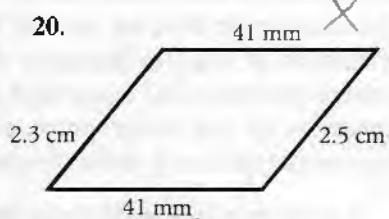
18.



19.



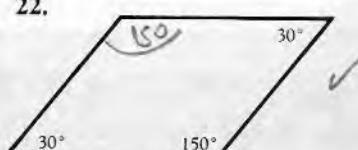
20.



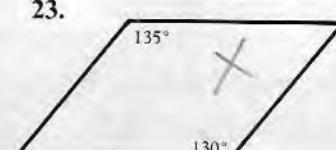
21.



22.



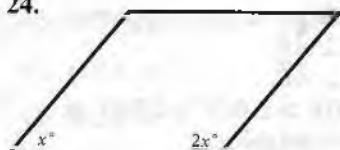
23.



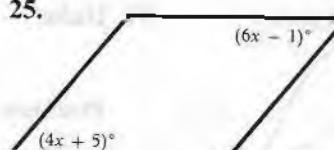
B.

En los ejercicios 24 a 26, encuéntrense las medidas de todos los ángulos de los paralelogramos.

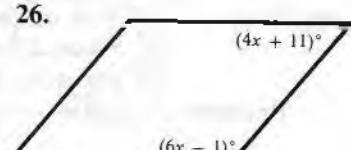
24.



25.



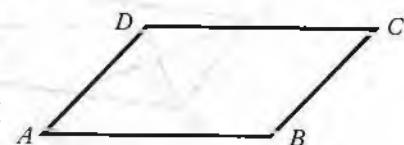
26.



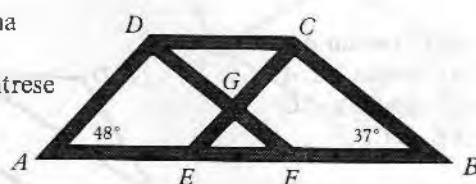
27. $ABCD$ es un paralelogramo. Si $AB = x + 5$ y $CD = 2x - 7$, encuéntrese la longitud de \overline{AB} .

28. $ABCD$ es un paralelogramo. Si $AB = 2x$, $CD = 3y + 4$, $BC = x + 7$ y $AD = 2y$, encuéntrense las longitudes de los lados del paralelogramo.

29. En la figura se muestra parte del sistema estructural de soporte de un puente $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{DF} \parallel \overline{CB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$. Encuéntrese $m\angle CGF$.

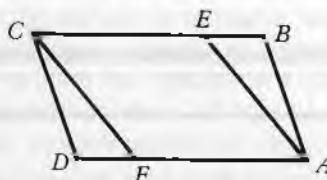


(Ejercicios 27, 28)



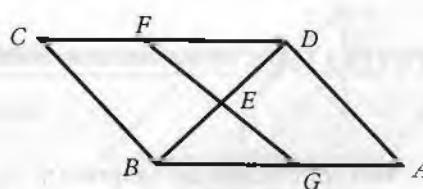
30. Dado: $ABCD$ es un paralelogramo
 $AECF$ es un paralelogramo.

Pruébese: $\triangle CDF \cong \triangle ABE$.



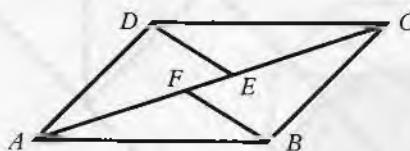
31. Dado: $ABCD$ es un paralelogramo
 FG biseca a \overline{DB} .

Pruébese: \overline{DB} biseca a \overline{FG} .



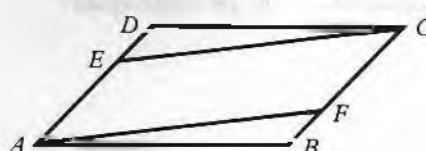
32. Dado: $ABCD$ es un paralelogramo
 A, F, E y C son colineales.
 $\overline{AF} \cong \overline{CE}$.

Pruébese: $\overline{DE} \parallel \overline{BF}$.



33. Dado: $ABCD$ es un paralelogramo
 $\overline{AE} \cong \overline{CF}$.

Pruébese: $\overline{CE} \cong \overline{AF}$.

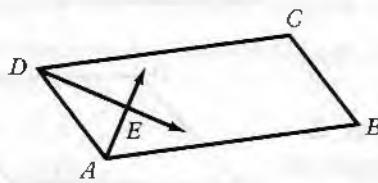


34. Pruébese que las diagonales de un paralelogramo se bisecan unas a otras.

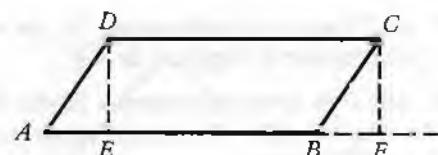
C.

35. Pruébese que un paralelogramo con un ángulo recto es un rectángulo.

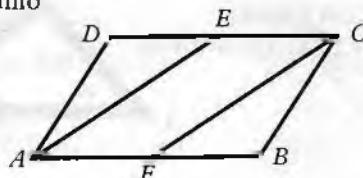
36. Dado: $ABCD$ es un paralelogramo
 \overline{AE} biseca a $\angle A$
 \overline{DE} biseca a $\angle D$.
 Pruébese: $\overline{AE} \perp \overline{DE}$.



37. Dado: $ABCD$ es un paralelogramo
 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$
 $\overline{CF} \perp \overline{AB}$.
 Pruébese: $\triangle ADE \cong \triangle BCF$ y $CDEF$ es un rectángulo.



38. Dado: $ABCD$ es un paralelogramo
 \overline{AE} biseca a $\angle A$
 \overline{CF} biseca a $\angle C$.
 Pruébese: $\overline{AE} \cong \overline{CF}$.

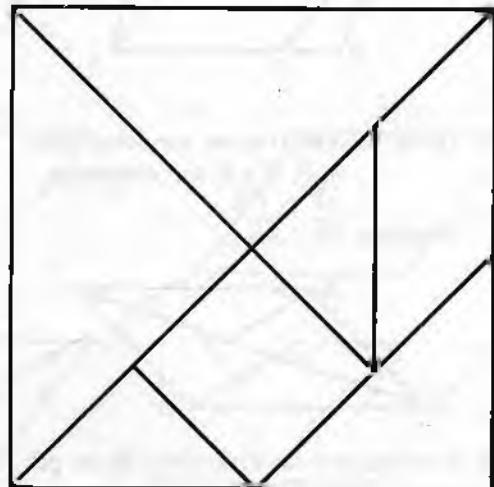


39. Pruébese el teorema 8.3.

ACTIVIDADES

Dibújese este rompecabezas tangram y recórtense las piezas. Con las cinco piezas pequeñas, constrúyase un cuadrado. ¿Se pueden colocar las dos piezas grandes alrededor del cuadrado para formar

1. un triángulo?
2. un paralelogramo?
3. un trapecio?
4. un rectángulo?



En la figura se dividió un dodecágono regular en paralelogramos. Con la definición de polígono regular y los teoremas de esta sección, respóndase a los ejercicios 40 a 48. Acéptese también que $m\angle ALK = 150$.

40. $m\angle BPX = ?$

41. $m\angle 1 = ?$

42. $m\angle 2 = ?$

43. $m\angle 3 = ?$

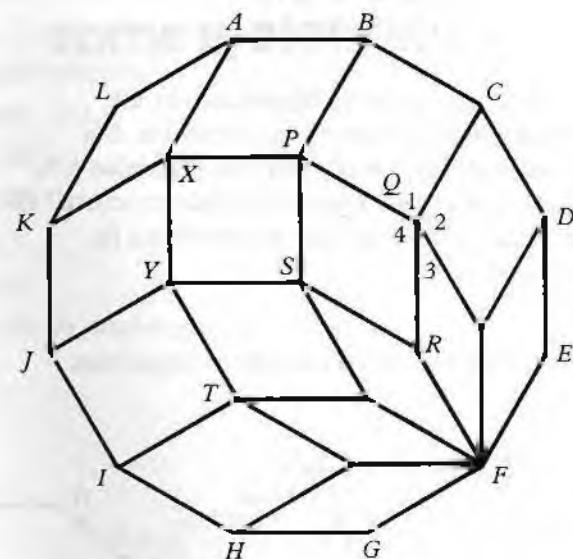
44. $m\angle 4 = ?$

45. Pruébese que $\overline{AB} \cong \overline{XY}$.

46. Pruébese que los tres polígonos de la figura son cuadrados.

47. Pruébese que $PQRS$ es un rombo.

48. Selecciónese un paralelogramo cualquiera de la figura y pruébese que es un rombo.

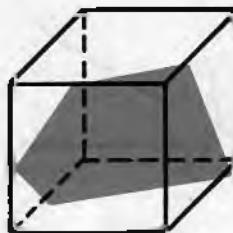
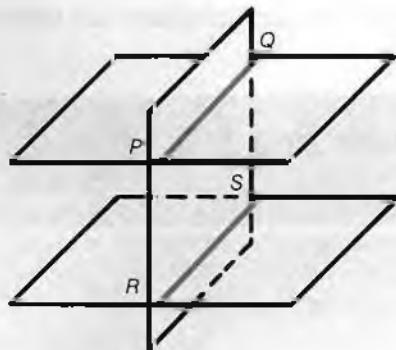


SOLUCION DE PROBLEMAS

Hecho: Cuando dos planos paralelos en el espacio se cortan por un tercer plano, las rectas de intersección son paralelas. Este hecho puede usarse para resolver los problemas siguientes.

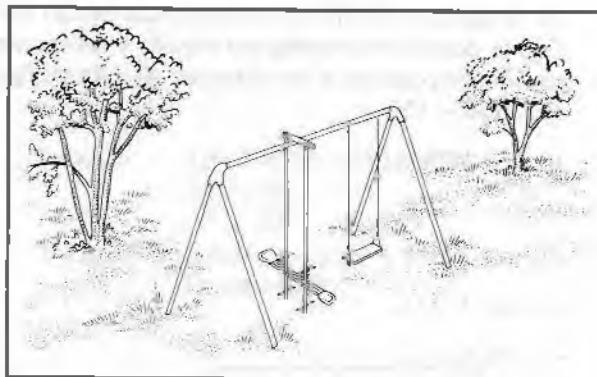
La región común a un cubo y a un plano se llama sección transversal de un cubo.

1. ¿Por qué cada sección transversal cuadrilateral tiene por lo menos un par de aristas paralelas?
2. ¿Por qué cada sección transversal pentagonal de un cubo tiene dos pares de aristas paralelas?

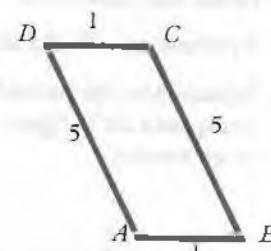
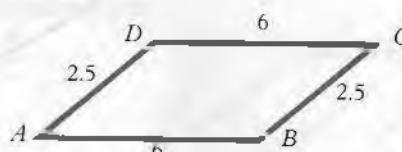
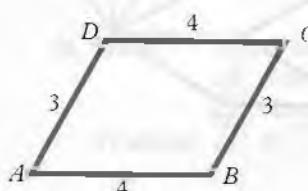


8.3 Cuadriláteros que son paralelogramos

Cuando dos niños se balancean en un columpio de dos asientos, ¿están los dos asientos del columpio siempre paralelos a la barra transversal superior de la estructura? El teorema de esta sección proporciona la respuesta.



Considérense los cuadriláteros siguientes.



¿Es $ABCD$ un paralelogramo en todos los casos?

Teorema 8.4

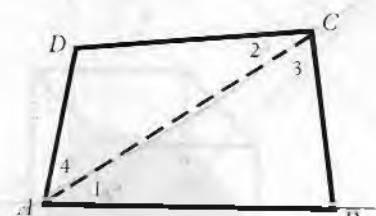
Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

PRUEBA

Dado: Cuadrilátero $ABCD$ con
 $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y
 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Pruébese: $ABCD$ es un paralelogramo.

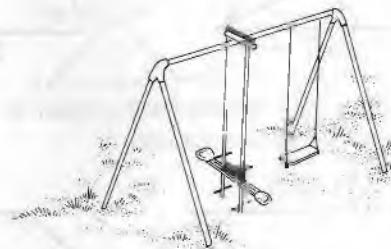
Plan: Trácese un segmento auxiliar \overline{AC} y pruébese que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.



Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	1. Dado.
2. $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.	2. Dado.
3. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$.	3. Propiedad reflexiva.
4. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.	4. Postulado LLL.
5. $\angle 1 \cong \angle 2$.	5. ¿Por qué?
6. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.	6. ¿Por qué?
7. $\angle 3 \cong \angle 4$.	7. PCTCC.
8. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.	8. ¿Por qué?
9. $ABCD$ es un paralelogramo.	9. Definición de paralelogramo.

APLICACION

La respuesta a la pregunta hecha al principio de la sección es sí. Los asientos siempre están paralelos a la barra transversal superior de la estructura AB . Hay cuatro barras de metal atornilladas en los puntos A , B , C y D , de forma que \overline{AB} y \overline{CD} , y \overline{AD} y \overline{BC} tienen la misma longitud. El teorema 8.4 dice que cuando el columpio se balancea, $ABCD$ siempre es un paralelogramo y CD es paralela a \overline{AB} .



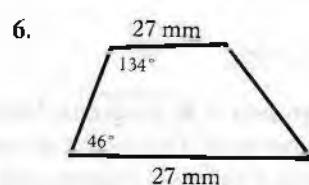
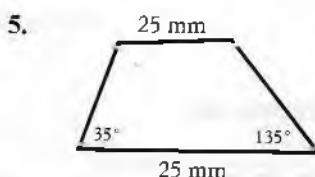
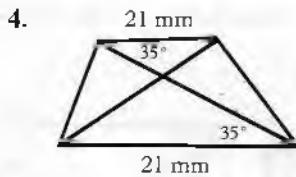
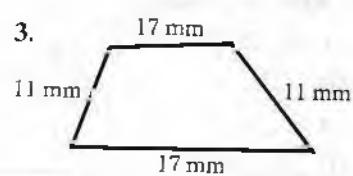
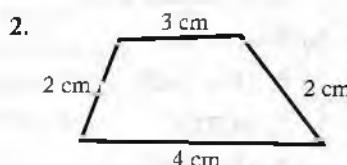
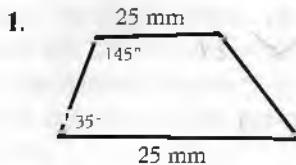
Los dos teoremas siguientes proporcionan otros métodos para probar que un cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 8.5 Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo.

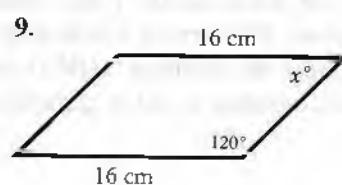
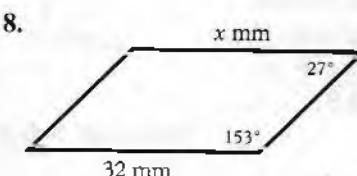
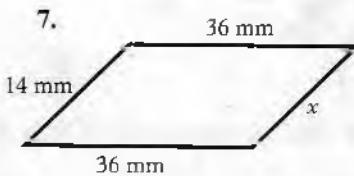
Teorema 8.6 Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

EJERCICIOS**A.**

Con los teoremas de esta sección, decidase si los cuadriláteros son o no paralelogramos. Las decisiones deben basarse en las medidas, más que en la forma de los dibujos.



En los ejercicios 7 a 9, encuéntrese el valor de x que hace que el cuadrilátero sea un paralelogramo.

**B.**

En los ejercicios 10 a 12, encuéntrense los valores de x e y que hacen que $ABCD$ sea un paralelogramo.

10. $AB = 2x + 4$, $CD = 4x - 20$, $AD = 2y$, $BC = y + 5$.

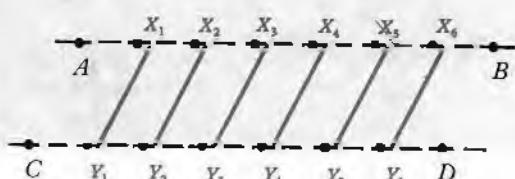
11. $m\angle A = 2x - 60$, $m\angle D = x - 5$, $AB = 4y + 6$, $CD = 6y - 10$.

12. $AB = 6x + 30$, $BC = 2x - 5$, $CD = 2y - 10$, $AD = y - 35$.

13. Un estacionamiento de automóviles se va a marcar para estacionar en batería. Se tensa una cuerda de A a B con marcas cada 9 pies, X_1, X_2, \dots, X_6 . Se tensa una segunda cuerda paralela a \overline{AB} de C a D con marcas cada 9 pies, Y_1, Y_2, \dots, Y_6 . ¿Por qué son paralelas todas las líneas pintadas?



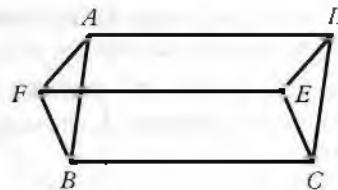
(Ejercicios 10-12)



14. Complétese la prueba del teorema 8.5.

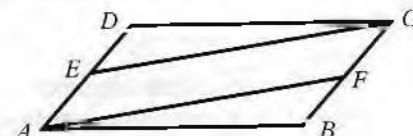
15. **Dado:** $ABCD$ es un paralelogramo
 $BCEF$ es un paralelogramo.

Pruébese: $ADEF$ es un paralelogramo.



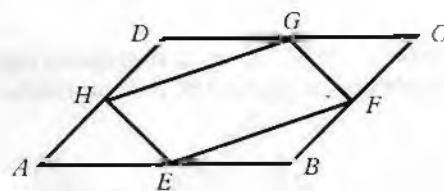
16. **Dado:** $ABCD$ es un paralelogramo
 E es el punto medio de \overline{AD}
 F es el punto medio de \overline{BC} .

Pruébese: $AFCE$ es un paralelogramo.



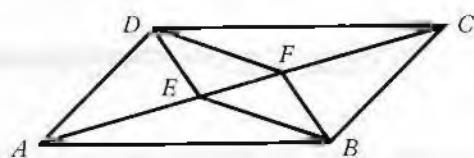
17. **Dado:** $ABCD$ es un paralelogramo
 E, F, G y H son puntos medios de los lados dados.

Pruébese: $EFGH$ es un paralelogramo.



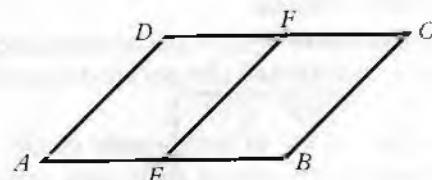
18. **Dado:** $ABCD$ es un paralelogramo
 $y AE = CF$.

Pruébese: $BFDE$ es un paralelogramo.



19. **Dado:** $ABCD$ es un paralelogramo
 E es el punto medio de \overline{AB}
 F es el punto medio de \overline{CD} .

Pruébese: $AEFD$ es un paralelogramo.

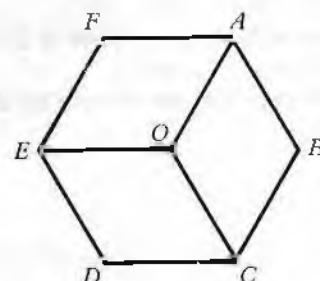


C.

20. a. **Dado:** $ABCDEF$ es un hexágono regular
 $m\angle AFE = 120$, \overline{OA} , \overline{OC} y \overline{OE} bisecan a A ,
 C y E , respectivamente.

Pruébese: $ABCO$ es un rombo.

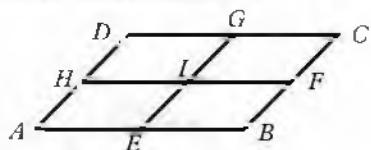
b. ¿Son rombos $CDEO$ y $EFAO$?



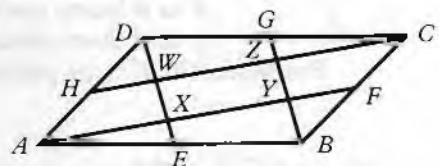
21. Pruébese que si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan unas a otras, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

22. Pruébese que si los ángulos B y D de un cuadrilátero $ABCD$ son suplementarios del ángulo A , entonces $ABCD$ es un paralelogramo.

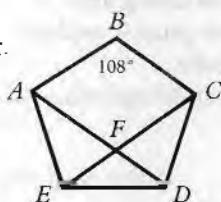
23. Dado: $ABCD$ es un paralelogramo
 E, F, G y H son puntos medios de los lados.
 Pruébese: La figura $AEIH$ es un paralelogramo.



24. Dado: $ABCD$ es un paralelogramo
 E, F, G y H son puntos medios de los lados.
 Pruébese: La figura $WXYZ$ es un paralelogramo.



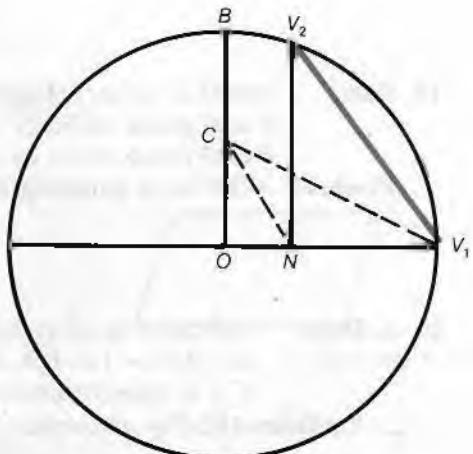
25. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular.
 Pruébese: La figura ABC F es un rombo.



ACTIVIDADES

Trácese un círculo grande con centro O y sigáñense las instrucciones para construir un pentágono regular.

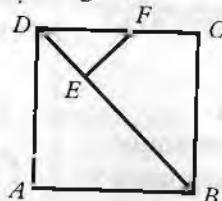
- Denomínese V_1 a un punto cualquiera del círculo y trácese una perpendicular \overline{OB} a \overline{OV}_1 .
- Unase V_1 a C , el punto medio de \overline{OB} .
- Biséquese el ángulo OCV_1 , para obtener el punto N sobre \overline{OV}_1 .
- Trácese la perpendicular a \overline{OV}_1 , en N y obténgase el punto V_2 .
 El segmento $\overline{V_1V_2}$ es un lado de un pentágono regular.



26. Pruébese que si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces la figura es un rectángulo.

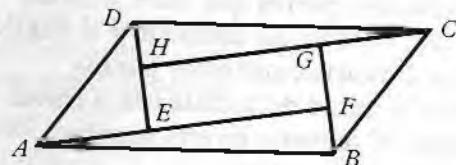
27. Dado: $ABCD$ es un cuadrado
 $BE = BC$, $\overline{EF} \perp \overline{BD}$.

Pruébese: $DE = EF = FC$.

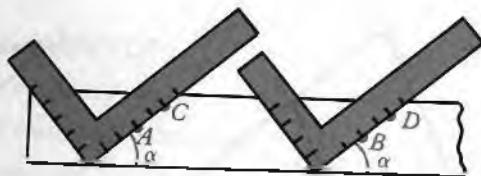


28. Dado: $EFGH$ es un paralelogramo
 $\overline{HD} \cong \overline{FB}$, $\overline{AE} \cong \overline{CG}$.

Pruébese: $ABCD$ es un paralelogramo.



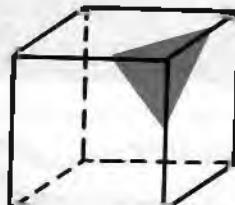
29. Un carpintero desea trazar rectas paralelas sobre una tabla. Esto puede hacerse usando dos veces una escuadra de carpintero. Las dos veces se coloca la escuadra en el mismo ángulo con la tabla y se marcan unidades iguales. Explíquese por qué este método asegura que AB será paralela a CD .



SOLUCION DE PROBLEMAS

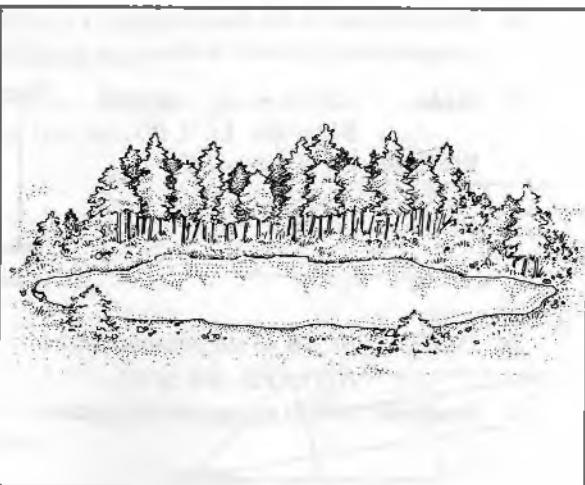
Cuando un plano interseca a un cubo, la región común al plano y al cubo se llama *sección transversal* del cubo.

- ¿Cuántos de estos cuadriláteros y sus interiores se presentan como secciones transversales de un cubo?
 - cuadrado
 - rectángulo no cuadrado
 - rombo
 - paralelogramo no rómbico
 - trapecio
 - cometa
- Para cada tipo de sección transversal existente, dibújese el cubo de la derecha y dibújese la sección transversal.

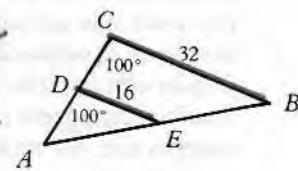
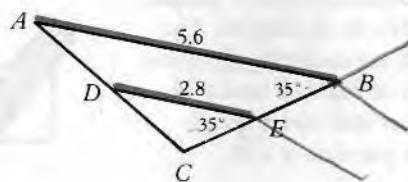
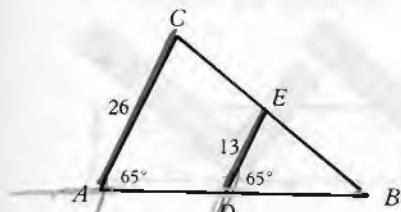


8.4 El teorema del segmento medio

Un equipo de agrimensores necesita conocer la distancia a través de un estanque grande. El equipo elige un punto cualquiera y desde él miden hasta cada lado del estanque. Localizan los dos puntos que están a medio camino entre la orilla del estanque y el punto elegido. La distancia entre estos puntos medios será la mitad de la distancia a través del estanque. El teorema de esta sección ayuda a explicar el motivo.



En los triángulos siguientes, D y E son puntos medios.
Las medidas de los segmentos y los ángulos son las que se dan.



Obsérvese que: $DE = \frac{1}{2}AC$.

Dado que: $\angle EDB \cong \angle CAB$,
 $DE \parallel AC$.

Obsérvese que: $DE = \frac{1}{2}AB$.

Dado que: $\angle CED \cong \angle CBA$,
 $DE \parallel AB$.

Obsérvese que: $DE = \frac{1}{2}CB$.

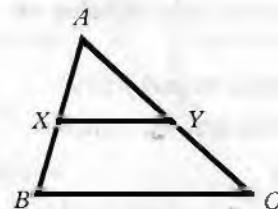
Dado que: $\angle ADE \cong \angle ACB$,
 $DE \parallel CB$.

Teorema 8.7

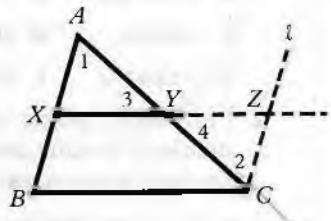
Teorema del segmento medio. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

DEMOSTRACION

Dado: Cualquier $\triangle ABC$ con X como punto medio de \overline{AB} y Y como punto medio de \overline{AC} .
Pruébese: $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ y $XY = \frac{1}{2}BC$



Plan: Trácese una recta ℓ que pase por C y sea paralela a \overline{AB} . Entonces prolónguese XY hasta que interseque a ℓ en Z . Muéstrese que se forman dos triángulos congruentes (pasos 3 a 6). Después muéstrese que $BCZX$ es un paralelogramo (pasos 10 a 13).



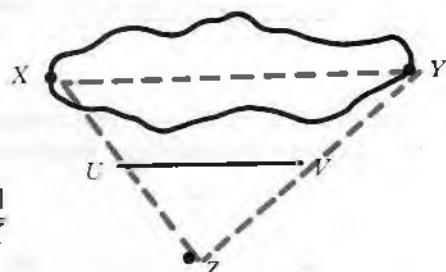
Afirmaciones	Razones
1. X es el punto medio de \overline{AB} . Y es el punto medio de \overline{AC} .	1. Dado.
2. La recta ℓ pasa por C y es paralela a \overline{AB} , y \overline{XY} se prolonga para formar $\triangle CYZ$.	2. Construcción.
3. $AY = YC$.	3. Definición de punto medio.
4. $\angle 1 \cong \angle 2$.	4. Si dos rectas son paralelas, entonces los ángulos alternos interiores son congruentes.
5. $\angle 3 \cong \angle 4$.	5. ¿Por qué?
6. $\triangle AXY \cong \triangle CYZ$.	6. Postulado ALA.
7. $XY = ZY$.	7. PCTCC.
8. Y es el punto medio de \overline{XZ} .	8. Definición de punto medio.
9. $XY = \frac{1}{2}XZ$.	9. Algebra.
10. $CZ = AX$.	10. Afirmación 6 y PCTCC.
11. $AX = XB$.	11. Definición de punto medio.
12. $CZ = XB$; $\overline{CZ} \parallel \overline{AB}$.	12. Propiedad transitiva; afirmación 2.
13. $BCZX$ es un paralelogramo.	13. Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo.
14. $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$.	14. Definición de paralelogramo.
15. $\overline{XZ} \cong \overline{BC}$.	15. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
16. $XY = \frac{1}{2}BC$.	16. Sustitución en las afirmaciones 9 y 15.

Obsérvese que la conclusión del teorema parte de las afirmaciones 14 y 16.

APLICACION

El método de los agrimensores es una aplicación directa del teorema 8.7. Dado que U y V son los puntos medios de \overline{ZX} y \overline{ZY} , $UV = \frac{1}{2}XY$, o bien $XY = 2UV$.

El siguiente teorema puede probarse con el teorema 8.7. Véase el ejercicio 33.



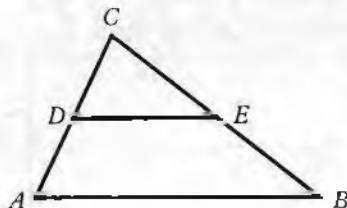
Teorema 8.8 Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

EJERCICIOS

A.

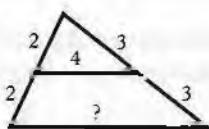
En esta figura, D y E son puntos medios.

1. Si $AB = 8$, entonces $DE = \underline{\hspace{1cm}}$.
2. Si $AC = 9$, entonces $AD = \underline{\hspace{1cm}}$.
3. Si $BE = 5$, entonces $BC = \underline{\hspace{1cm}}$.
4. Si $AB = 15$, entonces $DE = \underline{\hspace{1cm}}$.
5. Si $DE = 17$, entonces $AB = \underline{\hspace{1cm}}$.

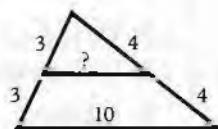


Para los ejercicios 6 a 14, digase el número (o números) que falta o escribáse «no se puede determinar».

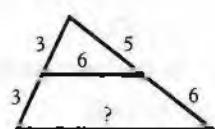
6.



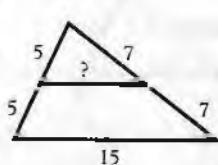
7.



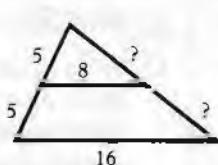
8.



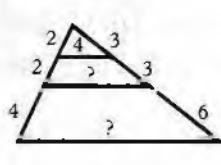
9.



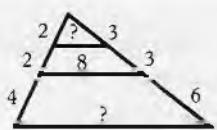
10.



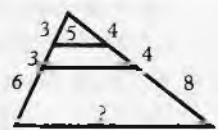
11.



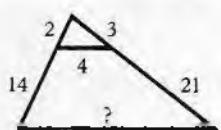
12.



13.

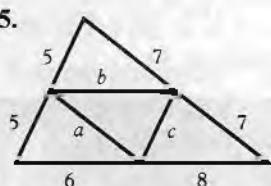


14.

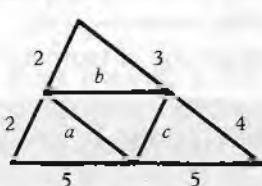


En los ejercicios 15 a 17, exactamente uno de los números, a , b o c , puede determinarse. Encuéntrese.

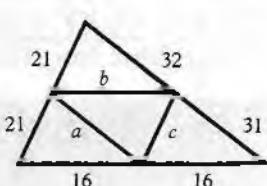
15.



16.



17.



B.

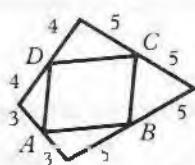
En el triángulo, M y N son puntos medios.

18. Si $MN = x + 8$ y $AB = 4x + 14$, encuéntrense las longitudes MN y AB .

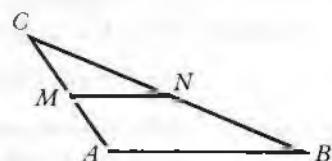
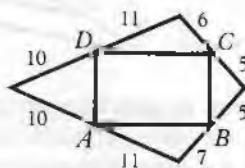
19. Si $AM = x + 5$, $MC = 2y + 6$, $MN = 2x - 5$, y $AB = y + 8$, encuéntrense las longitudes MN y AB .

En los ejercicios 20 a 22, empléese el teorema 8.8 para determinar si $ABCD$ es o no un paralelogramo.

20.

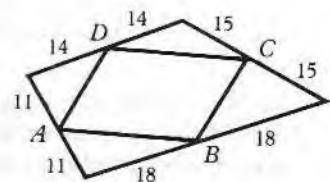


21.



(Ejercicios 18, 19)

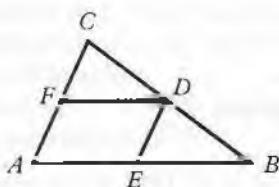
22.



En los ejercicios 23 a 26, formúlense pruebas a dos columnas.

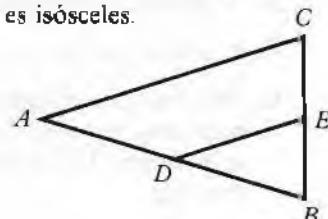
23. **Dado:** F es el punto medio de \overline{AC}
 D es el punto medio de \overline{BC}
 E es el punto medio de \overline{AB} .

Pruébese: $AEDF$ es un paralelogramo.



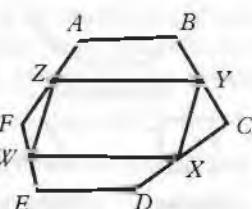
24. **Dado:** $\triangle ABC$ es isósceles con $AB = AC$
 D es el punto medio de \overline{AB}
 E es el punto medio de \overline{CB} .

Pruébese: $\triangle BDE$ es isósceles.



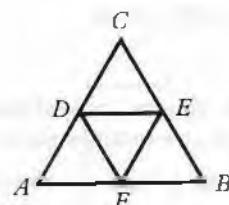
25. **Dado:** $ABCDEF$ es un hexágono con $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ y $AB = DE$

Pruébese: $WXYZ$ es un paralelogramo.



26. **Dado:** $\triangle ABC$ es equilátero
 D, E y F son puntos medios de los lados.

Pruébese: $\triangle DEF$ es equilátero.

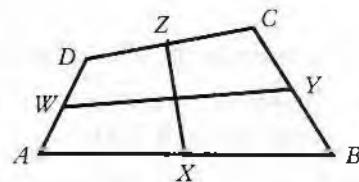


(Sugerencia: Empléense los segmentos auxiliares \overline{AE} y \overline{BD} .)

- 27. Dado:** W, X, Y y Z son puntos medios de los lados del cuadrilátero $ABCD$.

Pruébese: \overline{WY} y \overline{XZ} se bisecan.

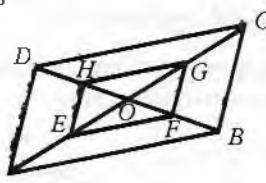
(Sugerencia: Utilicense rectas auxiliares.)



- 28. Dado:** $ABCD$ es un paralelogramo.

E, F, G y H son puntos medios de AO, BO, CO y DO , respectivamente.

Pruébese: $EFGH$ es un paralelogramo.



C.

La información que se da a continuación es para los ejercicios 29 a 32. La proposición de cualquiera de estos ejercicios puede usarse para completar cualquiera de los ejercicios siguientes.

Dado: \overline{AZ} y \overline{BW} son las medianas de $\triangle ABC$.

X es el punto medio de \overline{AG} .

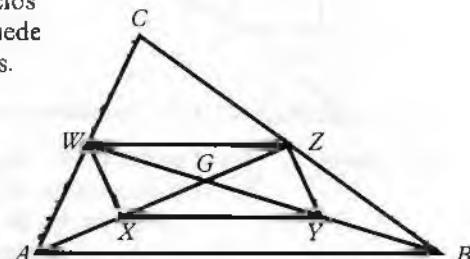
Y es el punto medio de \overline{BG} .

- 29. Pruébese que** $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$

- 30. Pruébese que** $WXYZ$ es un paralelogramo.

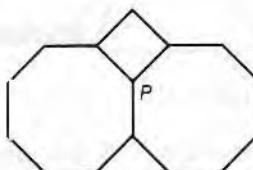
- 31. Pruébese que** $AX = XG = GZ$ y $BY = YG = GW$.

- 32. Pruébese que** el centroide de un triángulo triseca a todas las medianas. Esto es, el centroide divide la mediana en un tercio y dos tercios. (El centroide es el punto de intersección de las medianas.)



ACTIVIDADES

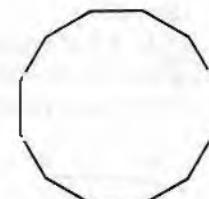
Tres de estos polígonos pueden acoplarse alrededor de un punto P como se muestra en la figura.



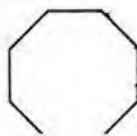
Con papel vegetal, muéstrense tantas formas como sea posible para

1. acoplar tres polígonos alrededor de un punto.
2. acoplar cuatro polígonos alrededor de un punto.
3. acoplar cinco polígonos alrededor de un punto.

Inténtense dibujar un diseño prosiguiendo este proceso de acoplamiento de polígonos.



Dodecágono



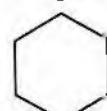
Octágono



Cuadrado



Triángulo equilátero

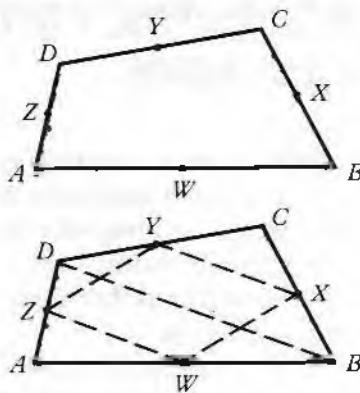


Hexágono

33. Complétese la siguiente prueba del teorema 8.8.

Dado: $ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera.
Plan: Añádanse los segmentos auxiliares \overline{DB} , \overline{ZW} , \overline{YX} , \overline{ZY} y \overline{WX} . Apíquese el teorema 8.7 a $\triangle ABD$ y a $\triangle BCD$.

Pruébese: $WXYZ$ es un paralelogramo.



La siguiente información es para los ejercicios 34 a 36.

Dado:

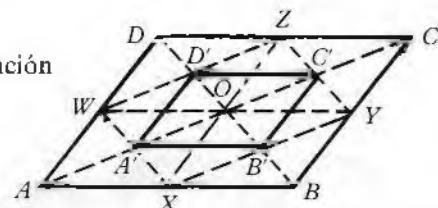
- $ABCD$ es un paralelogramo.
- W, X, Y y Z son los puntos medios de los lados.
- Cada línea de trazos es una diagonal de un polígono.

34. Pruébese que $WOZD$ es un paralelogramo. Una demostración similar mostrará que $AXOW$, $XBYO$ y $OYZC$ son paralelogramos.

(Sugerencia: Pruébese primero que $AXZD$ y $WYCD$ son paralelogramos.)

35. Pruébese que $A'B'C'D'$ es un paralelogramo.

36. Pruébese que cada lado de $A'B'C'D'$ es paralelo al lado correspondiente de $ABCD$ y su longitud es la mitad.

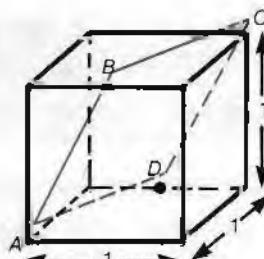


(Ejercicios 34-36)

SOLUCION DE PROBLEMAS

En la figura se muestra un cubo cuyas aristas miden 1 de longitud. Supóngase que los puntos B y D son los puntos medios de las aristas mostradas.

- Muéstrese que $ABCD$ es un rombo.
- Encuéntrense las longitudes de los lados.
- Encuéntrense las longitudes de las diagonales BD y AC .

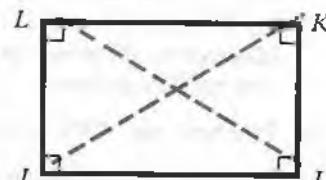
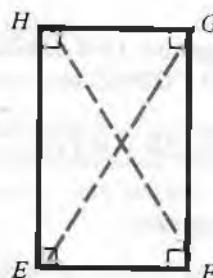
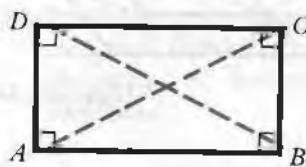


8.5 Rectángulos, rombos y cuadrados

Recuérdese por las definiciones de rectángulo, rombo y cuadrado que son tipos especiales de paralelogramos. Estas figuras se presentan en una gran variedad de montajes industriales. Con frecuencia es necesario comprobar si un objeto es realmente uno de estos paralelogramos especiales. Por ejemplo, un albañil debe estar seguro de que los cimientos de un edificio son perfectamente rectangulares.

En esta sección se estudiará la forma de determinar estos paralelogramos especiales por sus diagonales.

Estos paralelogramos también son rectángulos.



Obsérvese: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Obsérvese: $\overline{EG} \cong \overline{FH}$.

Obsérvese: $\overline{IK} \cong \overline{JL}$.

Estas observaciones respaldan el siguiente teorema.

Teorema 8.9 Un paralelogramo es un rectángulo si, y sólo si, sus diagonales son congruentes.

Es necesario probar dos cosas:

- I. Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces el paralelogramo es un rectángulo.
- II. Si un paralelogramo es un rectángulo, entonces las diagonales son congruentes.

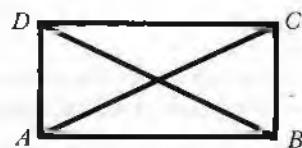
Explicación de I.

Dado: $ABCD$ es un paralelogramo.

$$\overline{AC} \cong \overline{BD}$$

Pruébese: $ABCD$ es un rectángulo.

Plan: Pruébese que $\triangle ABD \cong \triangle BAC$, y que $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes y suplementarios. Hágase lo mismo para $\angle C$ y $\angle D$.

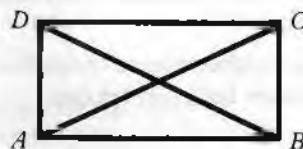
**Explicación de II.**

Dado: $ABCD$ es un rectángulo.

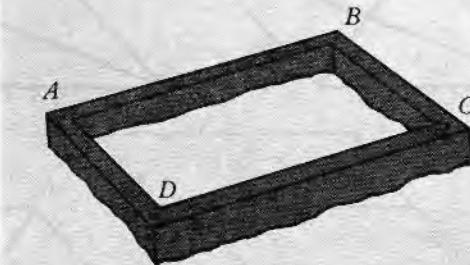
$$\overline{AC} \cong \overline{BD}$$

Plan: Pruébese que $\triangle ABD \cong \triangle BAC$.

Esta prueba se completará como ejercicio.

**APLICACION**

Los cimientos de hormigón de una casa tienen una forma rectangular un poco mayor que el rectángulo de la casa. En estos cimientos, el contratista debe localizar cuatro puntos, A , B , C y D , que serán las esquinas de la casa. Estos cuatro puntos deben localizarse con precisión para que $ABCD$ sea un rectángulo perfecto. Después de medir para hacer que $AB = CD$ y $AD = BC$, el paso siguiente es medir las diagonales. Si $AC = BD$, entonces $ABCD$ es un rectángulo.



Las pruebas de los dos teoremas siguientes se presentan en los ejercicios.

Teorema 8.10

Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si, sus diagonales son perpendiculares entre sí.

Teorema 8.11

Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si, cada diagonal biseca a un par de ángulos opuestos.

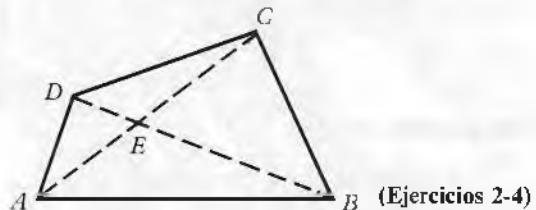
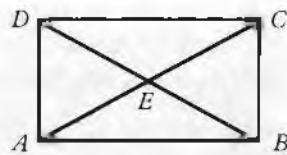
EJERCICIOS**A.**

1. Cítense todos los pares de segmentos congruentes del rectángulo $ABCD$.

En los ejercicios 2 a 4, supóngase que el cuadrilátero $ABCD$ se ha deformado para darle la forma deseada.

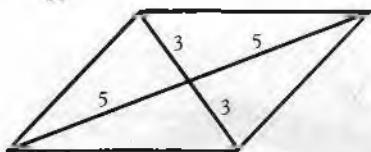
2. Si $ABCD$ fuera un paralelogramo, cítense todos los pares de segmentos congruentes.
3. Si $ABCD$ fuera un rombo, cítense todos los ángulos que deben ser rectos.
4. Si $ABCD$ fuera un rombo, cítense todos los ángulos que deben ser congruentes con $\angle CAB$.

¿Cuáles de los siguientes paralelogramos serían rectángulos?
(Supóngase que la información proporcionada es correcta, a pesar de que la figura pueda estar deformada.)

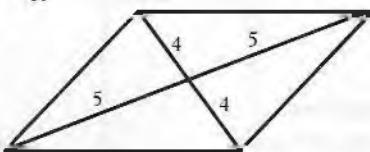


(Ejercicios 2-4)

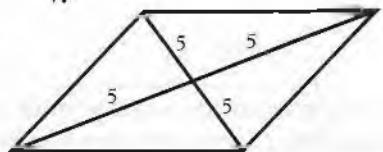
5.



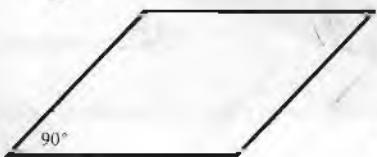
6.



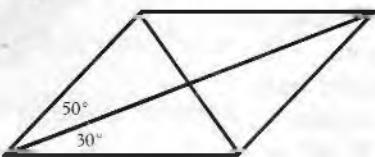
7.



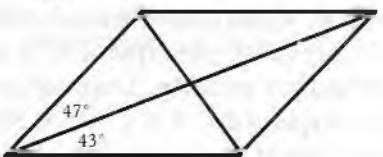
8.



9.

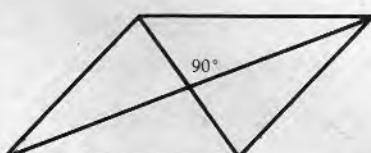


10.

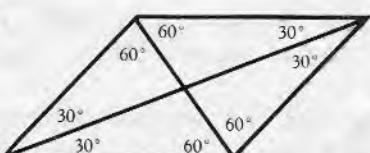


¿Cuáles de los siguientes paralelogramos serían rombos?
(Supóngase que la información proporcionada es correcta, a pesar de que la figura pueda estar deformada.)

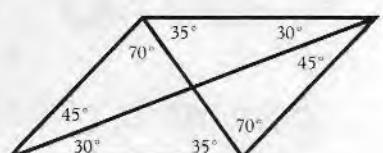
11.



12.



13.



En los ejercicios 14 a 20, decidase si la afirmación es falsa o verdadera.

14. Todo rectángulo es un paralelogramo.
15. Todo rombo es un rectángulo.
16. Todo cuadrado es un rombo.
17. Algunos rombos son cuadrados.
18. Algunos rombos son rectángulos que no son cuadrados.
19. Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces la figura es un rectángulo.
20. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

B.

En los ejercicios 21 a 25, si es posible, dibújese un paralelogramo que satisfaga las condiciones que indica cada ejercicio. Si no es posible, escríbese «no es posible».

21. Todos los ángulos congruentes.
22. Las diagonales se bisecan entre sí.
23. Todos los lados congruentes con diagonales que no son perpendiculares.
24. No hay ángulos rectos con diagonales congruentes.
25. Diagonales congruentes y perpendiculares.

26. $ABCD$ es un paralelogramo.

$$AB = 2x + 4.$$

$$DC = 3x - 11.$$

$$AD = x + 19.$$

Muéstrese que $ABCD$ es un rombo.



27. $ABCD$ es un rombo.

$$m\angle DEC = 4x + 10.$$

$$m\angle DAB = 3x + 4.$$

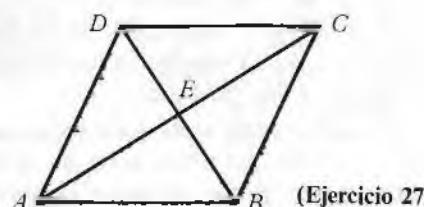
Encuéntrese $m\angle ABC$.

28. $ABCD$ es un paralelogramo.

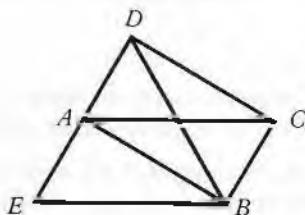
$$AB = 4x - 5. \quad AC = 3x - 2.$$

$$CD = 2x + 23. \quad BD = 2x + 12.$$

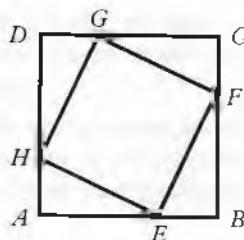
Muéstrese que $ABCD$ es un rectángulo.



- 29. Dado:** $ABCD$ es un rectángulo
 $ABCD$ es un paralelogramo.
Pruébese: $\triangle DBE$ es isósceles.



- 31. Dado:** $ABCD$ es un cuadrado
 $AH = DG = CF = BE$.
Pruébese: $EFGH$ es un cuadrado.



- 33. Dado:** $WXYZ$ es un rombo.
Pruébese: \overline{WY} y \overline{XZ} dividen a $WXYZ$ en cuatro triángulos congruentes.

- 34. Complétense la prueba del teorema 8.9.**

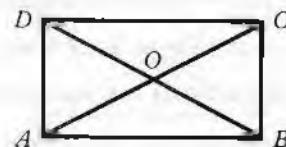
ACTIVIDADES

Supóngase que se necesita dibujar una tarjeta con siete columnas para un informe de estudios sociales. La tarjeta tiene 5 pulgadas de ancho. Aquí se muestra cómo hacer esto sin necesidad de cálculos.

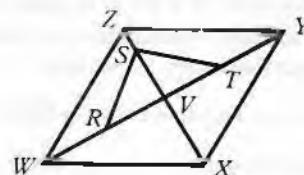
- Colóquese una regla como se muestra en el dibujo y márquense los siete puntos de una pulgada.
- Trácense rectas verticales por cada punto, paralelas a los lados de la tarjeta (o perpendiculares al borde inferior).

Experimentérese dibujando 9 columnas en un espacio de 7 pulgadas y 4 columnas en un espacio de 5 pulgadas.

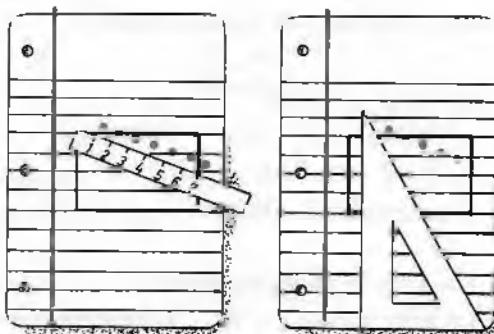
- 30. Dado:** $ABCD$ es un rectángulo.
Pruébese: $\triangle ABO$ es isósceles.



- 32. Dado:** $WXYZ$ es un rombo
 R es el punto medio de \overline{WV}
 T es el punto medio de \overline{VY}
 S es un punto sobre \overline{VZ} .
Pruébese: $\triangle RST$ es isósceles.

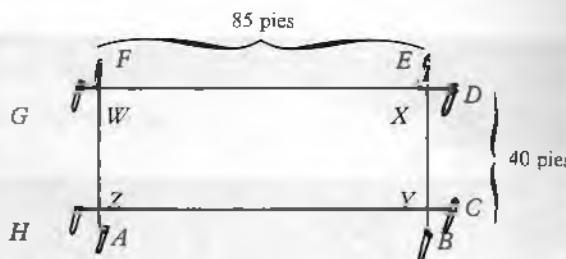


(Ejercicios 32, 33)



35. Se hará una construcción de $85' \times 40'$. Las estacas se colocan como se muestra en la figura y se tensa la cuerda. Las esquinas exteriores de la construcción serán los puntos en que se cruzan las cuerdas.

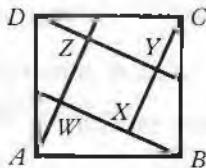
- Después de tensar las cuerdas, el contratista mide \overline{WY} y \overline{XZ} . ¿Por qué?
- Si WY es 93 pies y XZ es 94 pies, ¿cómo deben moverse las estacas E y F para que $WXYZ$ sea un rectángulo?



C.

36. **Dado:** $WXYZ$ es un cuadrado.
 $AW = BX = CY = DZ$.

Pruébese: $ABCD$ es un cuadrado.



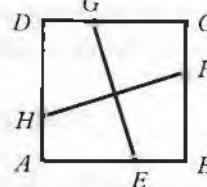
38. Pruébese el teorema 8.10.

40. **Dado:** $ABCD$ es un rombo.
 E, F, G y H son puntos medios.

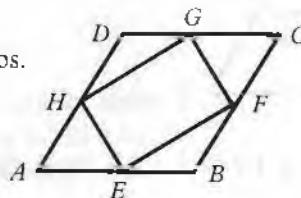
Pruébese: $EFGH$ es un rectángulo.

37. **Dado:** $ABCD$ es un cuadrado.
 $AH = DG = CF = BE$.

Pruébese: $EG = HF$ y $\overline{EG} \perp \overline{HF}$.



39. Pruébese el teorema 8.11.



SOLUCION DE PROBLEMAS

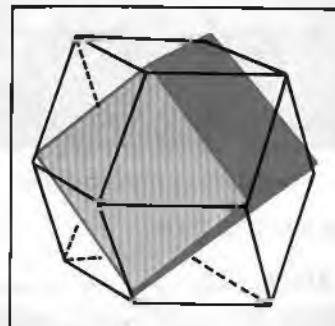
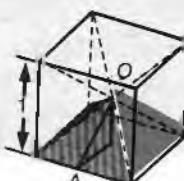
Si el centro O de un cubo se une a los vértices de una cara, se forma una pirámide con base cuadrada.

Supóngase que la longitud de una arista del cubo es 1.

- Si B es el centro de la base cuadrada, ¿cuál es la longitud de \overline{OB} ?
- Si A es el punto medio de una arista, ¿cuál es la longitud de \overline{OA} ?

Si las pirámides cuadradas, como la que se muestra en la figura, se unen a las caras de un cubo, se forma un sólido cuyas caras son rombos.

- ¿Cuántas caras en forma de rombo tiene este sólido?



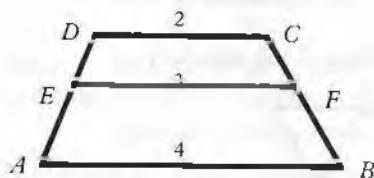
Cubo con pirámides cuadradas unidas a sus caras.

8.6 Trapecios

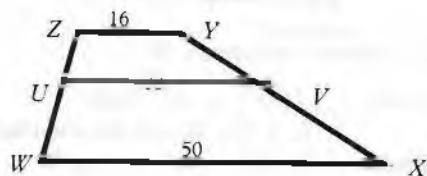


Recuérdese que un trapecio es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos. Un ejemplo de trapecio sería el tejado de una casa. En esta sección se estudiará un teorema sobre trapecios que podría ser útil en la estimación de los costos de construcción en un proyecto.

E y F son puntos medios.



U y V son puntos medios.



Obsérvese que $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ y $\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Obsérvese que $UV = \frac{1}{2}(WX + YZ)$ y $\overline{UV} \parallel \overline{WX} \parallel \overline{YZ}$.

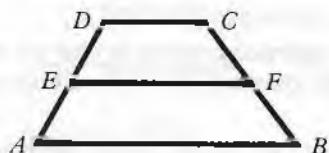
Teorema 8.12

El segmento que une los puntos medios de los dos lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las dos bases y tiene una longitud igual a la semisuma de las longitudes de las bases.

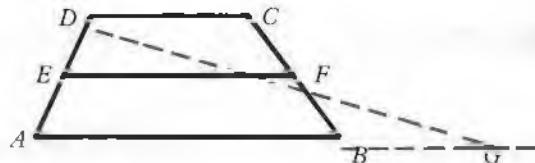
DEMOSTRACION

Dado: $ABCD$ es un trapecio $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$
 E es el punto medio de \overline{AD}
 F es el punto medio de \overline{BC} .

Pruébese: $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$,
y $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.



Plan: Prolónguese \overline{AB} y \overline{DF} para encontrar G . Despues, pruébese que F es el punto medio de \overline{DG} y utilícese el teorema del segmento medio.



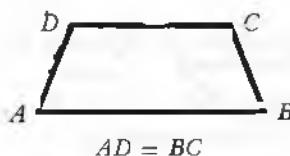
Afirmaciones	Razones
1. Prolongar \overline{AB} .	1. Construcción.
2. Dibujar a \overline{DF} intersecando a \overline{AB} en G .	2. Construcción.
3. $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$.	3. Definición de trapecio.
4. $\angle BGF \cong \angle CDF$.	4. ¿Por qué?
5. $\overline{CF} \cong \overline{BF}$.	5. ¿Por qué?
6. $\angle BFG \cong \angle DFC$.	6. ¿Por qué?
7. $\angle BFG \cong \triangle CFD$.	7. ¿Por qué?
8. $\overline{DF} \cong \overline{GF}$.	8. ¿Por qué?
9. F es el punto medio de \overline{DG} .	9. ¿Por qué?
10. $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$.	10. Teorema del segmento medio.

Sólo resta demostrar que $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Esta prueba se completará en un ejercicio.

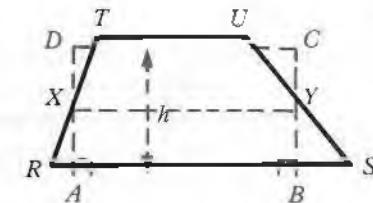
APLICACION

Al estimar los costos de construcción de un tejado, debe calcularse el área del trapecio. Esta área es igual al área del rectángulo $ABCD$. Por el teorema 8.12, $XY = \frac{1}{2}(RS + TU)$, y el área $(ABCD) = h(XY) = \frac{1}{2}h(RS + TU)$

El siguiente teorema establece propiedades de una clase especial de trapecios.



\overline{AD} y \overline{BC} son lados no paralelos. $\angle A$ y $\angle B$ juntos se llaman **ángulos de la base**. $\angle C$ y $\angle D$ son otro par de ángulos de la base.



Definición 8.6
Un **trapecio isósceles** es un trapecio con lados congruentes no paralelos.

La demostración de este teorema se deja para los ejercicios 13 y 15.

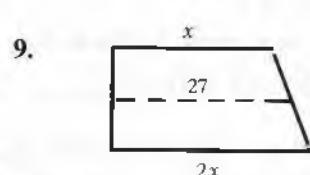
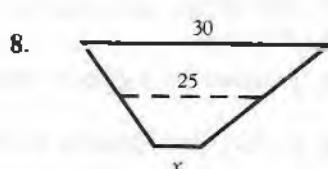
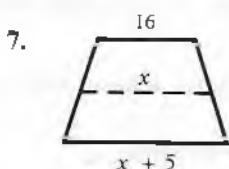
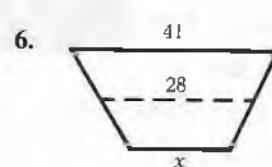
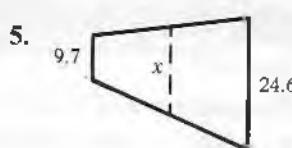
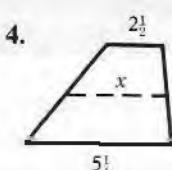
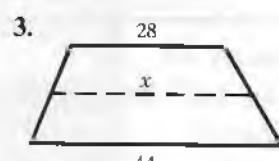
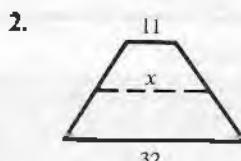
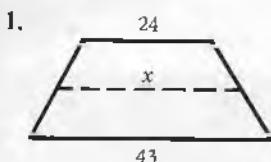
Teorema 8.13.

En un trapecio isósceles, los ángulos de la base y las diagonales son congruentes.

EJERCICIOS

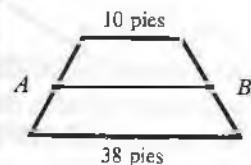
A.

En los ejercicios 1 a 9, la línea de trazos une los puntos medios de dos lados no paralelos de un trapecio. Encuéntrese el valor de x .



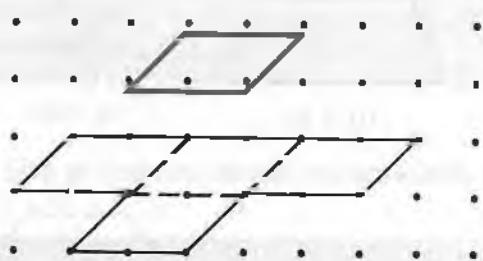
B.

10. Una presa se construye con una sección transversal trapezial, con una longitud de 10 pies en la parte superior y de 38 pies en la base. ¿Cuál es la anchura promedio AB de una presa?

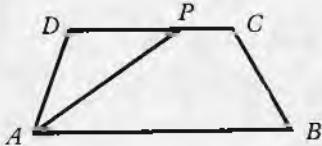
**ACTIVIDADES**

La figura muestra un polígono que se forma uniendo por las aristas comunes cuatro copias congruentes del paralelogramo dado.

Dibújense por lo menos nueve polígonos de diferentes formas con este método o uniendo cuatro copias del paralelogramo dado.



- 11. Dado:** $ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. P está sobre \overline{CD} , de manera que \overline{AP} biseca a $\angle A$.
Pruébese: $\triangle APD$ es isósceles.



- 13. Dado:** $ABCD$ es un trapecio isósceles con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
Pruébese: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

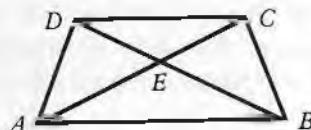


C.

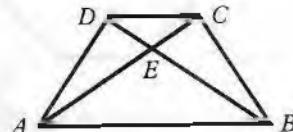
- 15. Dado:** $ABCD$ es un trapecio isósceles con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
Pruébese: $\angle A \cong \angle B$.
(Sugerencia: Constrúyase una recta que pase por D , y sea paralela a \overline{BC} .)



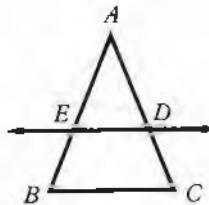
- 12. Dado:** $ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. $AD \cong BC$. \overline{AC} y \overline{BD} se intersecan en E .
Pruébese: $\triangle CDE$ es isósceles.



- 14. Dado:** $ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AE} \cong \overline{BE}$.
Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



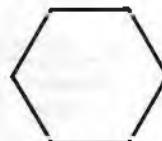
- 16. Dado:** $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle AED \cong \angle B$.
Pruébese: $BCDE$ es un trapecio con $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.



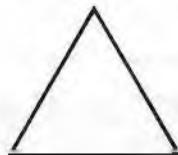
SOLUCION DE PROBLEMAS

1. Dibújese un hexágono regular. ¿Puede recortarse para formar:

- 6 triángulos equiláteros?
- 2 trapecios isósceles?
- 3 rombos congruentes?



2. Dibújense dos hexágonos regulares. ¿Pueden cortarse para formar triángulos equiláteros?

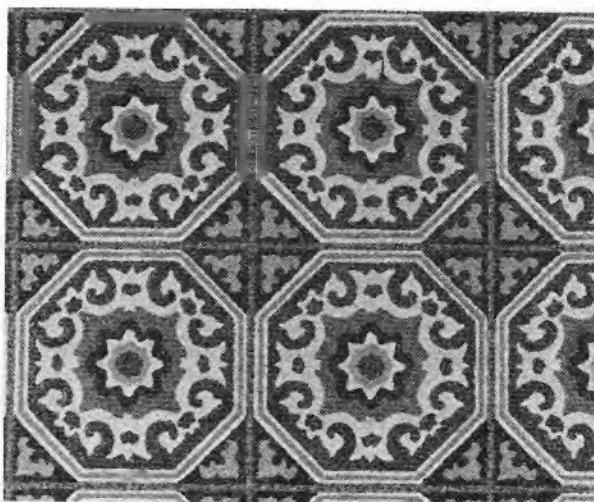
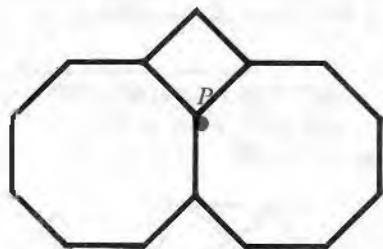


3. Dibújese un triángulo equilátero. ¿Puede cortarse en 3 figuras congruentes de 5 lados?

(Sugerencia: Empléese una figura Y en el centro.)

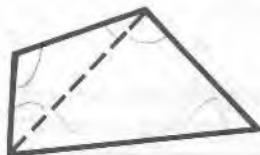
8.7 Los ángulos de un polígono

En las actividades de la página 280 se pide buscar combinaciones de polígonos regulares que puedan acoplarse alrededor del punto P .

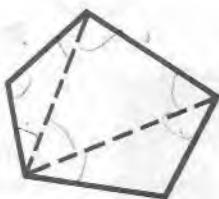


Las medidas de los ángulos de los vértices de los polígonos determinan si realmente se acoplan o no.

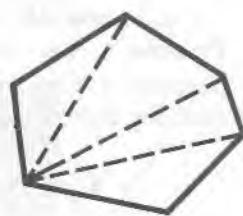
Primero, se pregunta cuál es la suma de los ángulos de un polígono. Para responder a esto, se trazan diagonales desde un vértice del polígono para formar triángulos.



Cuadrilátero



Pentágono



Hexágono

En cada uno de estos casos, la suma de las medidas de los ángulos del polígono es la suma de las medidas de los ángulos de los triángulos. Esta observación produce la siguiente tabla.

Polígono	Número de lados	Número de triángulos	Suma de las medidas de los ángulos
cuadrilátero	4	2	$2(180^\circ) = 360^\circ$
pentágono	5	3	$3(180^\circ) = 540^\circ$
hexágono	6	4	$4(180^\circ) = 720^\circ$
⋮	⋮	⋮	⋮
n -gono	n	$n - 2$	$(n - 2)180^\circ$

El razonamiento inductivo presentado en la tabla sugiere estos dos teoremas.

Teorema 8.14

La suma de los ángulos de un polígono convexo de n lados es $(n - 2)180^\circ$.

Teorema 8.15

La medida de un ángulo de un polígono regular de n lados es $\frac{(n - 2)}{n}180^\circ$.

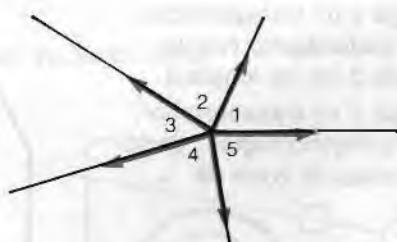
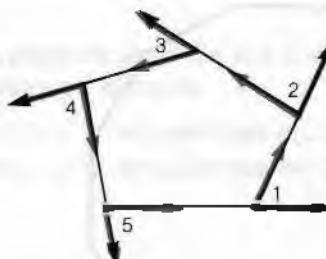
APLICACION

Un artista que trabaja en un mosaico podría preguntarse qué combinaciones de tres o cuatro de estos polígonos regulares se podrán acoplar alrededor de un punto según se muestra al principio de la sección.

Paso 1 Empléese el teorema 8.15 para encontrar la medida de los ángulos de cada uno de estos polígonos regulares.

Paso 2 Mediante prueba y error, háganse combinaciones de los números encontrados en el paso 1 cuya suma sea 360° .

Considérese el pentágono que se presenta a continuación. Un ángulo exterior de cada vértice tiene una marca. Si se cortan estos ángulos exteriores y se colocan alrededor de un punto, se observa que suman 360° .



$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360$$

Teorema 8.16

La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono, uno en cada vértice, es 360° .

EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 3, se proporciona el número de lados de un polígono convexo. ¿En cuántos triángulos dividen al polígono las diagonales trazadas desde uno de sus vértices?

1. 10.

2. 25.

3. x .

En los ejercicios 4 a 9, se proporciona el número de lados de un polígono convexo. Encuéntrese la suma de las medidas de los ángulos de los polígonos.

4. 6.

5. 12.

6. 24.

7. 36.

8. 100.

9. p .

En los ejercicios 10 a 15, se proporciona la suma de las medidas de los ángulos interiores. Encuéntrese el número de lados del polígono.

10. 720° .11. 1980° .12. 6120° .13. 1800° .14. 1260° .15. 3420° .

En los ejercicios 16 a 21, se proporciona el número de lados de un polígono regular. Encuéntrese la medida del ángulo del vértice del polígono.

16. 7.

17. 9.

18. 10.

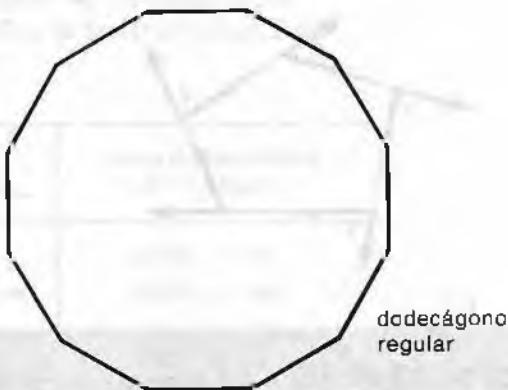
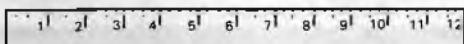
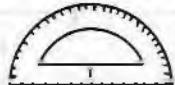
19. 15.

20. 20.

21. 100.

ACTIVIDADES

- Con una regla y un transportador, dibújese un dodecágono regular con aristas de 3 cm de longitud.
- Con una regla y un transportador, dibújese un polígono regular de 15 lados con aristas de 3 cm de longitud.

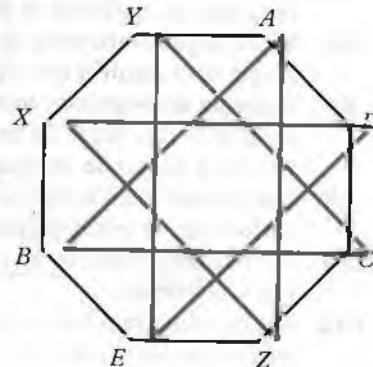


B.

22. La suma de las medidas de siete ángulos de un octágono es 1000° . ¿Cuál es la medida del octavo ángulo?
23. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos exteriores de un octágono regular y de un dodecágono regular?
24. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada ángulo exterior mide 15° ? ¿Cuántos lados tendría si cada ángulo exterior midiera 18° ?
25. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada ángulo interior mide 108° ? ¿Cuántos lados tendría si cada ángulo interior midiera 144° ?
26. Muéstrese que dos pentágonos regulares y un decágono regular pueden acoplarse alrededor de un punto. (Véase la aplicación.)
27. Muéstrese que un triángulo equilátero, un heptágono regular y un polígono regular de 42 lados pueden acoplarse alrededor de un punto.

C.

28. Encuéntrese el número de lados de un polígono si la suma de sus ángulos interiores es el doble que la suma de sus ángulos exteriores.
29. En un octágono regular se encuentra inscrito un polígono con forma de estrella. Encuéntrese $m\angle ABC$. Pruébese que la respuesta es correcta.
30. Pruébese que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.

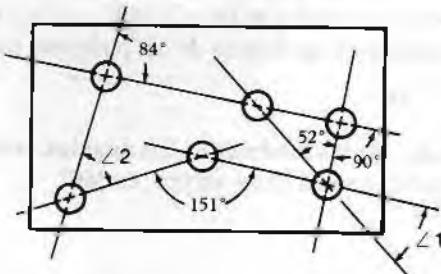


(Ejercicios 29, 30)

SOLUCION DE PROBLEMAS

En una placa de acero se van a taladrar unos agujeros como se muestra en la figura.

- Si $m\angle 1 = 37$, encuéntrese $m\angle 2$.
- Si $m\angle 1 = 43$, encuéntrese $m\angle 2$.



Capítulo 8 Conceptos importantes

Términos

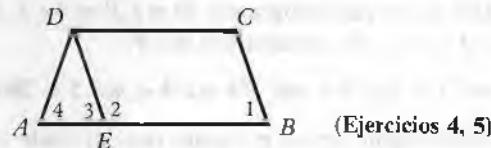
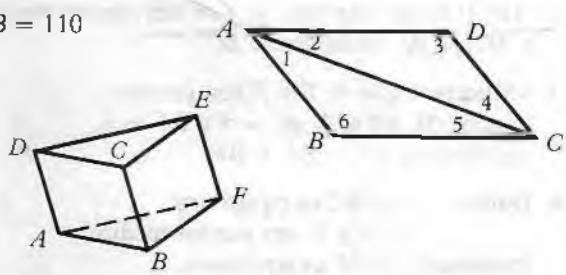
- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| Trapecio (pág. 261) | Rombo (pág. 261) |
| Paralelogramo (pág. 261) | Cuadrado (pág. 261) |
| Rectángulo (pág. 261) | Trapecio isósceles (pág. 289) |

Teoremas

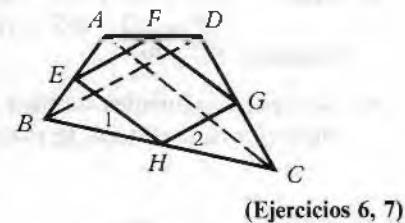
- 8.1** Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
- 8.2** Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
- 8.3** Los pares de ángulos adyacentes de un paralelogramo son ángulos supplementarios.
- 8.4** Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
- 8.5** Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo.
- 8.6** Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
- 8.7 Teorema del segmento medio.** El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.
- 8.8** Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.
- 8.9** Un paralelogramo es un rectángulo si, y sólo si, sus diagonales son congruentes.
- 8.10** Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si, sus diagonales son perpendiculares entre sí.
- 8.11** Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si, cada diagonal biseca a un par de ángulos opuestos.
- 8.12** El segmento que une los puntos medios de los dos lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las dos bases y tiene una longitud igual a la semisuma de las longitudes de las bases.
- 8.13** En un trapecio isósceles, los ángulos de la base y las diagonales son congruentes.
- 8.14** La suma de las medidas de los ángulos de un polígono convexo de n lados es $(n - 2)180^\circ$.
- 8.15** La medida de un ángulo de un polígono regular de n lados es $\frac{(n - 2)}{n}180^\circ$.
- 8.16** La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono, uno en cada vértice, es 360° .

Capítulo 8 Resumen

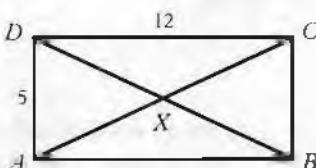
- Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.
 - Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces la figura debe ser un rectángulo.
 - Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, entonces la figura debe ser un cuadrado.
 - Si una figura es un cuadrado, entonces debe ser un rombo.
 - Si las diagonales de un trapecio son congruentes, entonces la figura es un paralelogramo.
- Supóngase que $ABCD$ es un paralelogramo, $m\angle B = 110$ y $m\angle 2 = 30$. Encuéntrese $m\angle 4$.
- Dado:** La figura $ABCD$ es un paralelogramo $\overline{EF} \parallel \overline{DA}$, $\overline{EF} \cong \overline{DA}$.
Pruébese: La figura $BCEF$ es un paralelogramo.
- Dado:** La figura $BCDE$ es un rombo. E es el punto medio de \overline{AB} , $m\angle 1 = 60$.
Pruébese: La figura $ABCD$ es un trapecio isósceles.
- Dado:** $EBCD$ es un paralelogramo, $m\angle 1 = m\angle 4$.
Pruébese: $AD = DE$.
- Supóngase que E, F, G y H son puntos medios. Si $m\angle 1 = 30$ y $m\angle 2 = 50$, encuéntrese $m\angle EFG$.
- Supóngase que E, F, G y H son puntos medios. Si $AC = 12$ y $BD = 8$, encuéntrese $EF + FG + GH + EH$.
- Encuéntrese la medida de cada ángulo de un dodecágono regular.
- Si cuatro ángulos de un pentágono miden $100^\circ, 70^\circ, 150^\circ$ y 120° , encuéntrese la medida del quinto ángulo.
- Supóngase que $ABCD$ es un rectángulo. Si $AD = 5$ y $CD = 12$, encuéntrese BX .



(Ejercicios 4, 5)



(Ejercicios 6, 7)



Capítulo 8 Examen

1. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.

- Si un cuadrilátero tiene un par de lados congruentes, entonces es un paralelogramo. ✓
- Si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes, entonces debe ser un rectángulo. ✓
- La suma de los ángulos exteriores de un pentágono regular es 360° . ✓
- Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, es un rectángulo. F

2. $ABCD$ es un trapezio. M y N son puntos medios. $AD = 6$ y $MN = 10$. Encuéntrese BC .

3. Supóngase que D , E y F son puntos medios. Si $AB = 4$, $AC = 5$ y $BC = 6$, encuéntrese $DE + EF + DF$.

4. Dado: $\triangle ABC$ es equilátero
 D , E y F son puntos medios.
Pruébese: $\triangle DEF$ es equilátero.

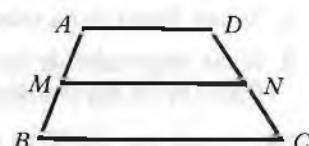
5. $PQRS$ es un paralelogramo. Si $m\angle P = 4x + 20$ y $m\angle Q = x + 10$, encuéntrese $m\angle P$.

6. Si $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 290$, encuéntrese $m\angle 6$.

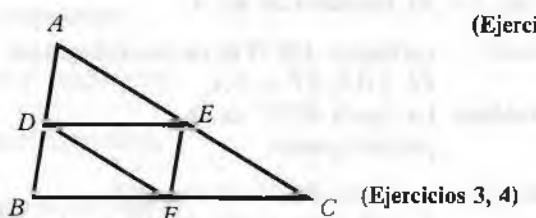
7. Si cada ángulo de un polígono regular mide 156° , ¿cuántos lados tiene el polígono?

8. Dado: $AD = DB$ y $AE = EC$
 $AF = FD$ y $AG = GE$.
Pruébese: $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$.

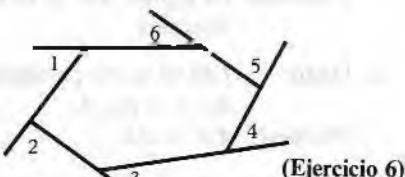
9. Las figuras siguientes son dos rectángulos solapados. Encuéntrese la suma $a + b + c + d$.



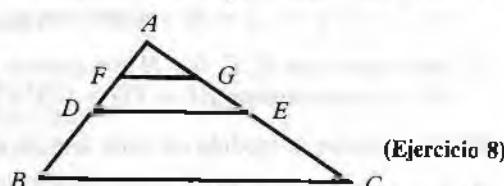
(Ejercicio 2)



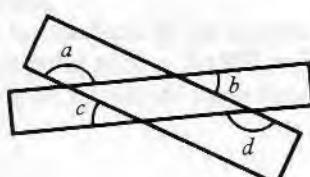
(Ejercicios 3, 4)



(Ejercicio 6)



(Ejercicio 8)



Repaso de álgebra

Despéjese x en las siguientes proporciones.

1. $\frac{x}{2} = \frac{6}{3}$.

2. $\frac{3}{4} = \frac{6}{x}$.

3. $\frac{x}{x-2} = \frac{21}{15}$.

4. $\frac{x-3}{6} = \frac{4-x}{-5}$.

5. $\frac{5}{6} = \frac{5x}{x+60}$.

6. $\frac{x}{3} = \frac{4}{x-1}$.

7. $\frac{2x-3}{2} = \frac{5x}{6}$.

8. $\frac{x-2}{x+5} = \frac{6}{20}$.

9. $\frac{x+2}{5} = \frac{1}{x-2}$.

Resuélvanse los siguientes sistemas.

10. $2x - 4y = 30$
 $3x + 2y = -3$.

11. $y = 3x - 5$
 $x = -2y - 10$.

12. $2(x-2) + y = -18$
 $3x + 2(y-1) = -26$.

13. $2x + 5y = 7$
 $x = -\frac{3}{2}$.

14. $5x + 8y = 1$
 $2x - 7y = -20$.

15. $2x + y + 3 = 0$
 $8x - \frac{y}{3} + 25 = 0$.

16. $x + 2y - 4 = 0$
 $\frac{5}{2}x - 13y - 10 = 0$.

17. $\frac{3}{2}p + \frac{4}{3}q = 2$
 $8q = 3p + 4$.

18. $m - \frac{n-2}{3} = 0$
 $0.2m + 0.3n = 5$.

Despéjese x .

19. $\sqrt{x} - 9 = 0$.

20. $\sqrt{x+4} = 5$.

21. $\sqrt{x+2} + 4 = 7$.

22. $\sqrt{x^2 - 9} = 4$.

23. $\sqrt{2+x} = 0$.

24. $\sqrt{x} + 4 = \sqrt{x} - 2$.

Despéjese x .

25. $(x+2)(x-5) = 0$.

26. $(2x+5)(3x-1) = 0$.

27. $x^2 - 10x + 25 = 0$.

28. $(x-4)^2 = 9$.

29. $x^2 - x - 12 = 0$.

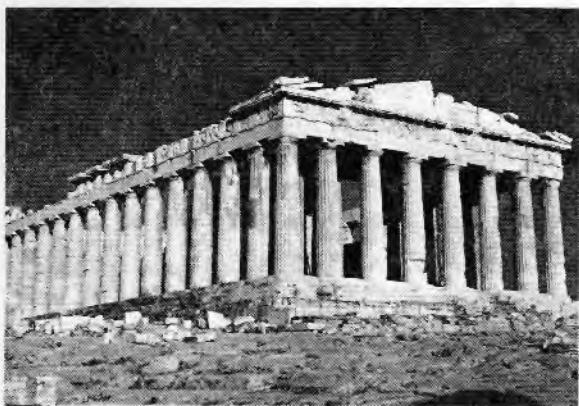
30. $4x^2 - 9 = 0$.

Resuélvase.

31. Las medidas de los ángulos de un triángulo están en una razón 2:3:5.
 Encuéntrense las medidas de los ángulos.

32. El perímetro de un rectángulo es 160. Si la razón entre la anchura y la longitud es 7:9, encuéntrense las dimensiones del rectángulo.

Arquitectura: El rectángulo áureo



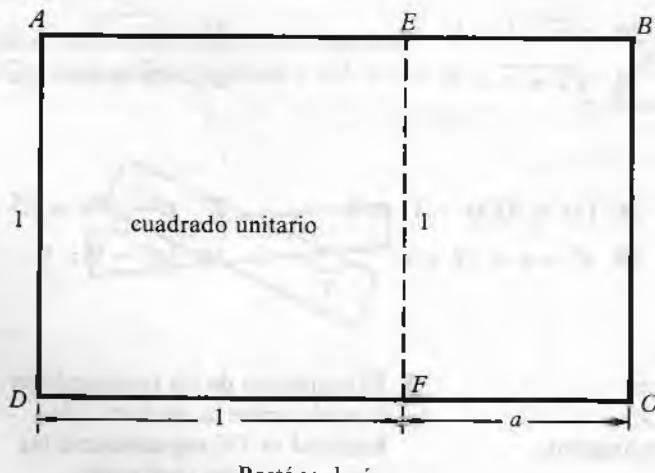
El *rectángulo áureo* fue considerado por los griegos de la antigüedad como una de las figuras geométricas más hermosamente proporcionadas. Durante siglos, los arquitectos utilizaron esta figura en la planeación de templos, rascacielos y edificios de todo tipo.

Los griegos construyeron el Partenón de Atenas en el siglo V antes de C. El rectángulo que comprende la fachada delantera es un rectángulo áureo.

El *rectángulo áureo* es un rectángulo tal que si se corta un cuadrado unitario en un extremo, los lados del rectángulo resultante estarán en la misma proporción que los del rectángulo original. Dado que las proporciones entre pares de lados correspondientes al rectángulo grande y al pequeño ($ABCD$ y $EBCF$) son iguales, puede usarse esta proporción

$$\frac{1+a}{1} = \frac{1}{a}$$

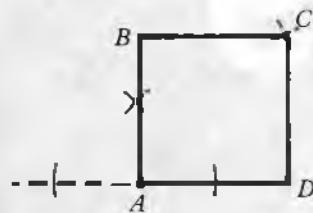
y calcular la longitud del lado más largo del rectángulo áureo de anchura uno. Encuéntrese esta longitud.



Construcción de un rectángulo áureo

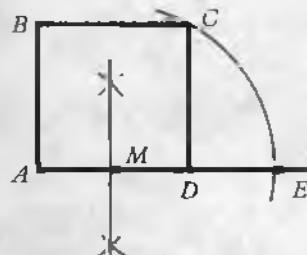
Con el compás y una regla, síganse las instrucciones para construir un rectángulo áureo.

Paso 1 Constrúyase un cuadrado unitario $ABCD$.

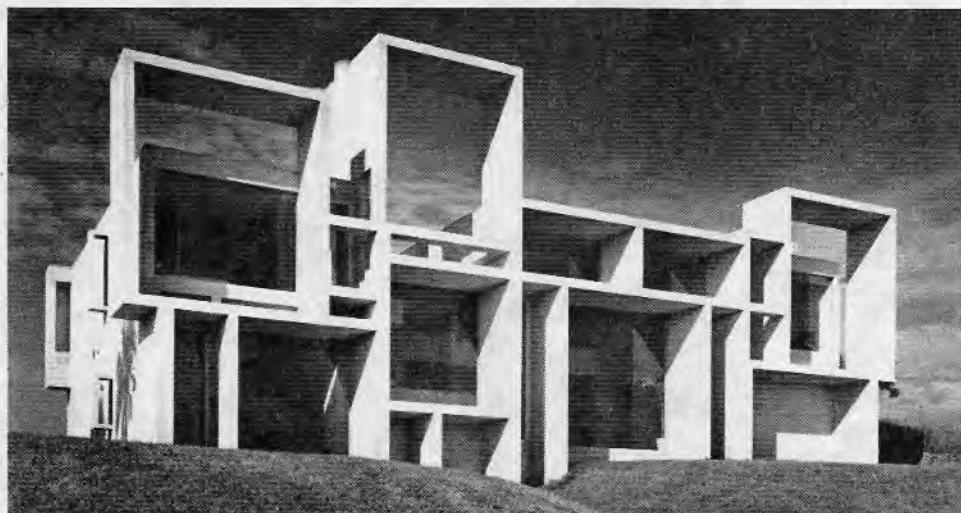


Paso 2 Constrúyase el punto medio del lado \overline{AD} .

Con M como centro y MC como radio, dibújese un arco que interseque a \overline{AD} en E .



Paso 3 Constrúyase $\overline{EF} \perp \overline{AE}$ y completése el rectángulo áureo $ABFE$.

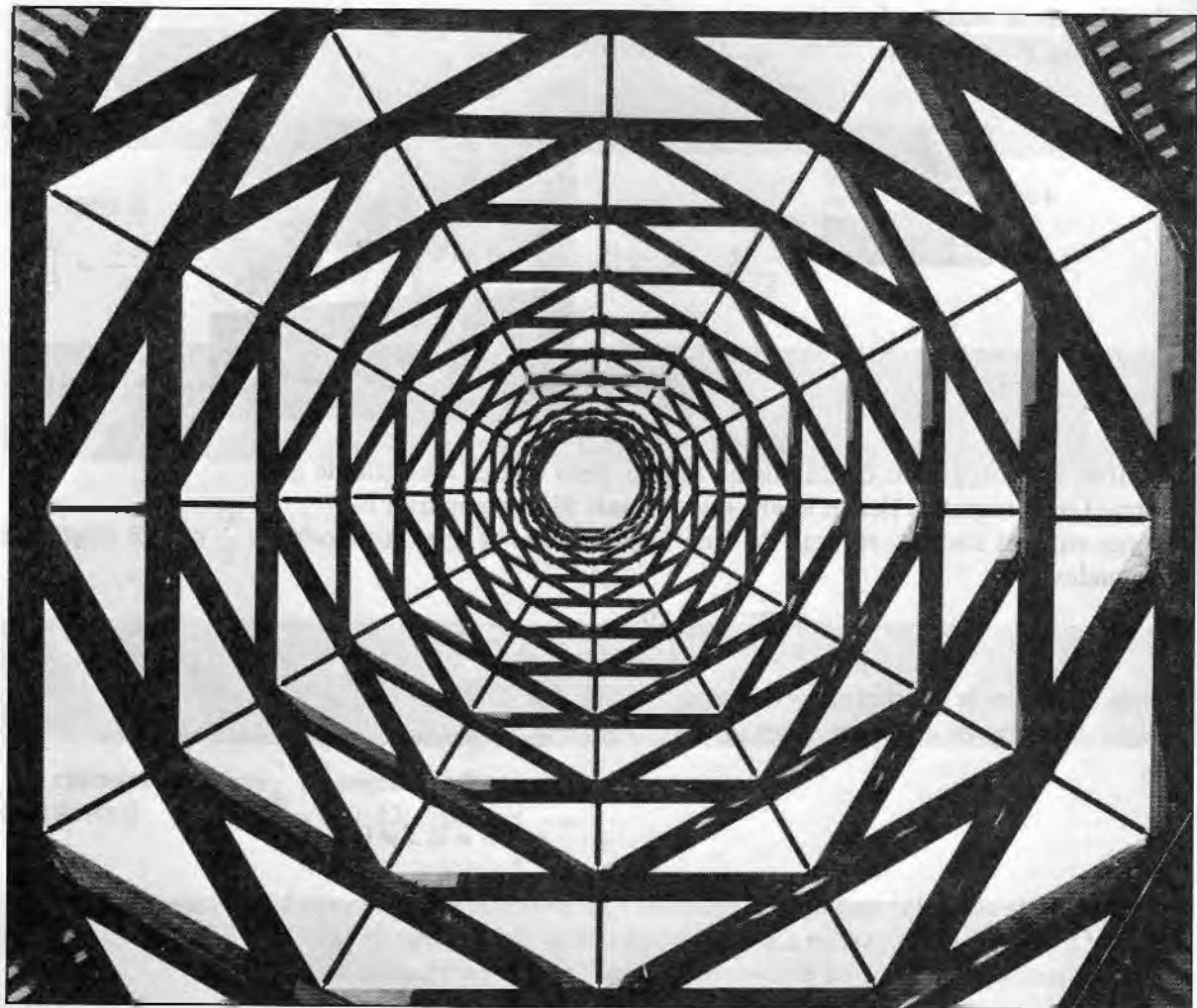


9

CAPITULO

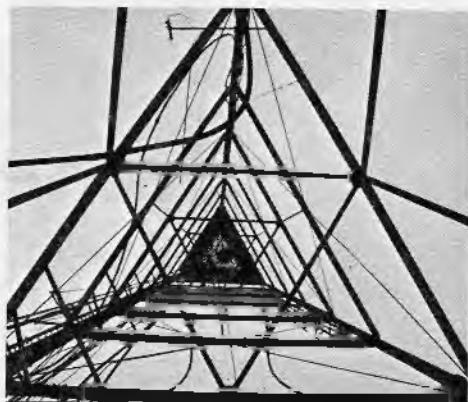
9.1	Proporciones	304
9.2	Teorema fundamental de la proporcionalidad	308
9.3	Polygonos semejantes	312
9.4	El postulado de la semejanza AAA	316
9.5	Triángulos rectángulos y triángulos semejantes	322
9.6	Teoremas de la semejanza LLL y LAL	326
9.7	Razones trigonométricas; una aplicación de los triángulos semejantes	330
9.8	Razones trigonométricas de ángulos especiales	334
	<i>Conceptos importantes</i>	336
	<i>Resumen</i>	337
	<i>Examen</i>	338
Técnicas para la solución de problemas		
	Trabájese hacia atrás	339

Semejanza

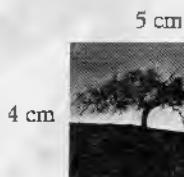


9.1 Proporciones

En este capítulo se estudiarán polígonos que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. En esta fotografía hay muchos triángulos que tienen la misma forma.



La idea de la «misma forma» aparece en las ampliaciones o reducciones. Considerense las fotografías siguientes.



Ambas son fotografías de un mismo objeto, pero una es más grande que la otra. Las fotografías tienen la «misma forma». Si se comparan las razones entre el ancho y el largo de cada foto, se observa que las razones son iguales.

$$\frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}$$

Esta ecuación se denomina *proporción*, porque se compone de dos razones iguales, $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{10}$.

Definición 9.1

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

(Es importante recordar que un denominador no puede ser igual a cero.)

En esta sección se repasarán algunas propiedades algebraicas de las proporciones. Las pruebas de estos teoremas se omiten, pero todos van precedidos de un ejemplo numérico.

Ejemplo 1 En una proporción, los productos cruzados son iguales.

$$\frac{4}{8} \cancel{\times} \frac{2}{4} \quad \text{ó} \quad 4 \times 4 = 2 \times 8$$

Teorema 9.1 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \times d = b \times c$.

Ejemplo 2 En una proporción, puede añadirse 1 a ambos lados.

$$\text{Si } \frac{9}{3} = \frac{12}{4}, \text{ entonces } \frac{9}{3} + \frac{3}{3} = \frac{12}{4} + \frac{4}{4} \quad \text{ó} \quad \frac{9+3}{3} = \frac{12+4}{4}.$$

Teorema 9.2 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

Ejemplo 3 En una proporción, puede restarse 1 de ambos lados.

$$\text{Si } \frac{9}{3} = \frac{12}{4}, \text{ entonces } \frac{9}{3} - \frac{3}{3} = \frac{12}{4} - \frac{4}{4} \quad \text{ó} \quad \frac{9-3}{3} = \frac{12-4}{4}.$$

Teorema 9.3 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Ejemplo 4 Si $\frac{9}{3} = \frac{12}{4}$, entonces $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Teorema 9.4 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Ejemplo 5 Si $9 \times 4 = 3 \times 12$, entonces $\frac{9}{3} = \frac{12}{4}$.

Teorema 9.5 Si $a \times d = b \times c$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

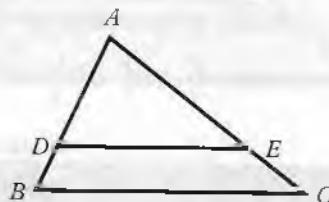
EJERCICIOS**A.**

1. Dado que $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, ¿cuál de los teoremas se usa para concluir los casos siguientes?

a. $\frac{4}{12} = \frac{5}{15}$. b. $\frac{9}{5} = \frac{27}{15}$. c. $\frac{-1}{5} = \frac{-3}{15}$.

2. Supóngase que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. ¿Qué teorema se usa para concluir los casos siguientes?

a. $\frac{AD - DB}{DB} = \frac{AE - EC}{EC}$. b. $\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC}$.
c. $\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC}$.



3. Empléense el teorema 9.5 y los siguientes productos para formar proporciones.

a. $3 \times 4 = 2 \times 6$. b. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 1 \times \sqrt{6}$.
c. $2 \cdot MN = 3 \cdot XY$. d. $AB \cdot CD = EF \cdot GH$.

4. Empléese el teorema 9.1 para despejar x en las siguientes proporciones.

a. $\frac{4}{5} = \frac{x}{25}$. b. $\frac{6}{9} = \frac{18}{x}$. c. $\frac{x - 4}{x} = \frac{3}{4}$.

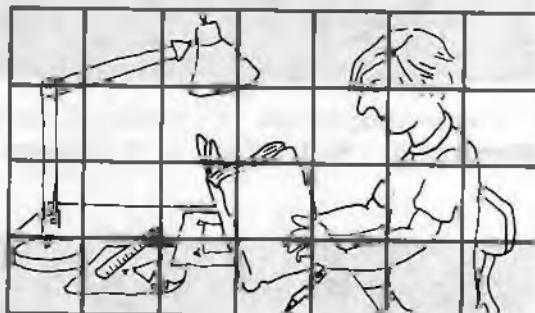
B.

5. Formúlese la contrarrecíproca del teorema 9.1. Empléese esta contrarrecíproca para mostrar que las siguientes ecuaciones no son proporciones.

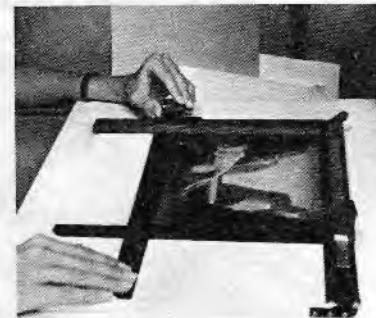
a. $\frac{12}{13} = \frac{13}{14}$. b. $\frac{23}{33} = \frac{31}{41}$. c. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3} + 1}$.

ACTIVIDADES

A este dibujo se le sobrepuso una cuadricula de 1 cm^2 . Dibújese una copia más grande del dibujo con una cuadricula de 2 cm^2 .



6. Las medidas de dos ángulos complementarios están en una razón de $\frac{2}{3}$. Encuéntrense las medidas de los ángulos.
7. Si dos calculadoras cuestan 28 dólares, ¿cuánto costarán cinco calculadoras?
8. Dos números están en la razón de 2:3. ¿Cuál es la razón de sus cuadrados?
9. Las medidas de dos ángulos suplementarios están en la razón de $\frac{3}{5}$. Encuéntrense las medidas de los ángulos.
10. Un segmento de 56 cm se divide en una razón de 3 a 5. Encuéntrese la longitud de los dos segmentos.
11. Una fotografía de 5×7 se amplía en un factor de $\frac{5}{2}$. ¿Cuál es el tamaño de la ampliación?
12. Las áreas de dos triángulos están en una razón de 4 a 9. El triángulo más pequeño tiene un área de 50 cm^2 . Encuéntrese el área del triángulo grande.



C.

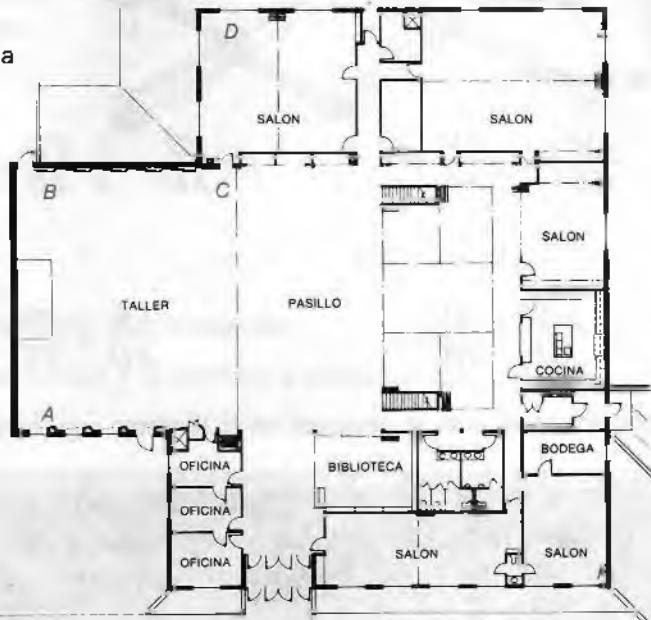
13. Despójese x en la proporción. $\frac{-3}{x} = \frac{x - 8}{5}$

SOLUCION DE PROBLEMAS

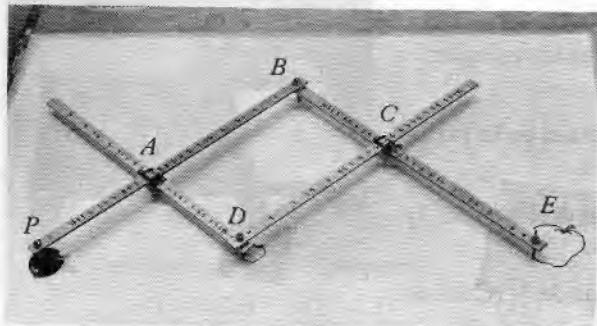
1. Con una regla y la escala que se proporciona, encuéntrese la distancia real de norte a sur y de este a oeste de la construcción.
2. Escribanse las proporciones empleadas en la solución del problema 1.
3. Si todas las paredes, desde A hasta F, partiendo hacia el norte alrededor de la construcción, se vaciaron en hormigón y este vaciado costó 20 dólares pie, estimese el costo total del vaciado.



FIANC DE UN FISO
0' 4' 8' 16' 32'
ESCALA EN FIES

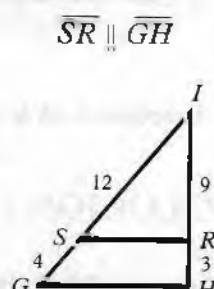
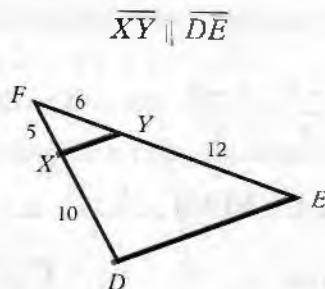
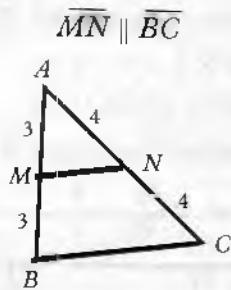


9.2 Teorema fundamental de la proporcionalidad



El instrumento articulado llamado **pantógrafo** es útil para los diseñadores y otras personas que necesiten ampliar o reducir dibujos como se muestra en la fotografía. El pantógrafo se coloca sobre una superficie plana y se fija la punta P . Cuando la punta D sigue los detalles del dibujo original, el lápiz E reproduce la figura ampliada. El pantógrafo se basa en el teorema de esta sección.

En los triángulos siguientes, se trazó un segmento paralelo a un lado del triángulo.



Obsérvese que

$$\frac{AM}{MB} = 1, \frac{AN}{NC} = 1,$$

$$\frac{FX}{XD} = \frac{1}{2}, \frac{FY}{YE} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{IS}{SG} = \frac{3}{1}, \frac{IR}{RH} = \frac{3}{1},$$

o

o

o

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}.$$

$$\frac{FX}{XD} = \frac{FY}{YE}.$$

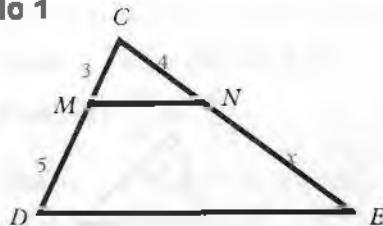
$$\frac{IS}{SG} = \frac{IR}{RH}.$$

Estas observaciones se resumen en el teorema siguiente.

Teorema 9.6

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces divide a éstos proporcionalmente.

Ejemplo 1



En esta figura, $\overline{MN} \parallel \overline{DE}$.

Encuéntrase *NE.*

Por el teorema 9.6, $\frac{CM}{MD} = \frac{CN}{NE}$,

por tanto,

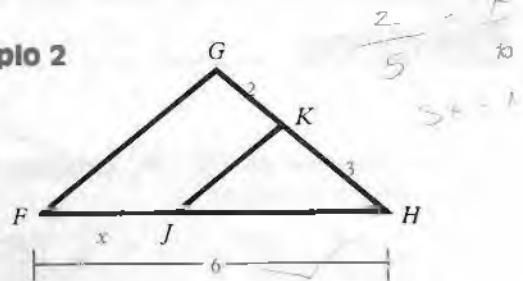
$$\frac{3}{5} = \frac{4}{x},$$

$$3x = 20,$$

o bien

$$x = \frac{20}{3}.$$

Ejemplo 2



Encuéntrese FJ en la figura si $\overline{GF} \parallel \overline{KJ}$.

Por el teorema 9.6, $\frac{GK}{KH} = \frac{FJ}{JH}$,

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{6-x},$$

$$3x = 12 - 2x.$$

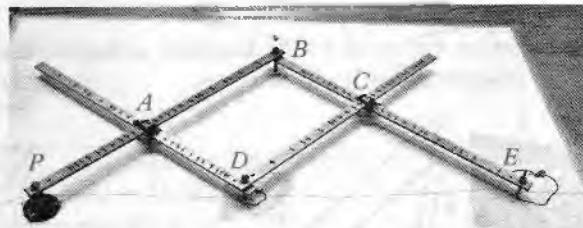
$$5x = 12,$$

o bien

$$x = \frac{12}{5}.$$

APLICACION

- Un pantógrafo se construye de manera que $AB = CD$, $AD = BC$, y P , D y E son colineales. Así, por el teorema 8.4, se puede concluir que $ABCD$ es un paralelogramo.
 - Dado que $ABCD$ es un paralelogramo, $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ en $\triangle PBE$. Por tanto, por el teorema 9.6, se puede concluir que la razón $\frac{PD}{DE}$ siempre es constante e igual a la razón $\frac{PA}{AB}$.



Este hecho ayuda a explicar el funcionamiento del pantógrafo.

La reciproca del teorema 9.6 también es verdad y se enuncia a continuación.

Teorema 9.7

Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y los divide proporcionalmente, entonces la recta es paralela al tercer lado.

EJERCICIOS**A.**

1. Supóngase que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.

a. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

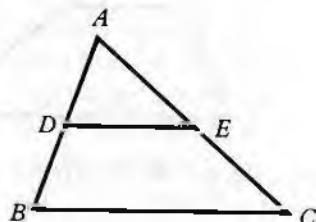
b. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

c. $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

d. $\frac{AD}{AE} = \frac{EC}{BD}$.

e. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$.

f. $\frac{AD}{AB - AD} = \frac{AE}{AC - EC}$.



(Ejercicios 1, 2)

2. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.

a. Si $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

b. Si $\frac{DB}{AE} = \frac{EC}{AD}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

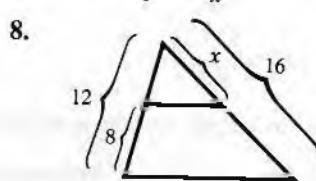
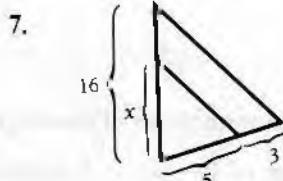
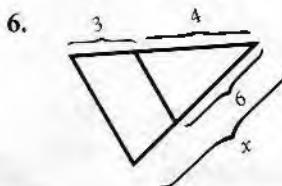
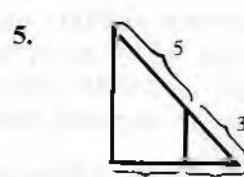
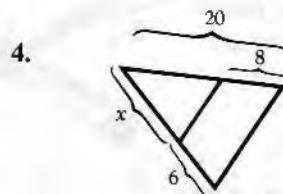
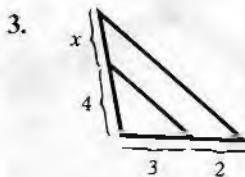
c. Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

d. Si $\frac{AD}{AB} = \frac{EC}{AC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

e. Si $\frac{DB}{AB - DB} = \frac{EC}{AC - EC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

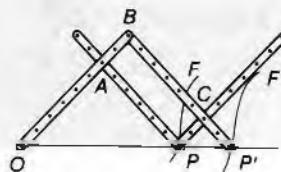
f. Si $\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

En los ejercicios 3 a 8, despéjese x . Supóngase que las rectas que parecen paralelas lo son.

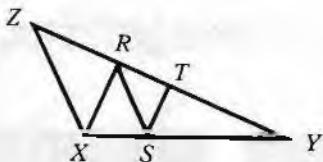
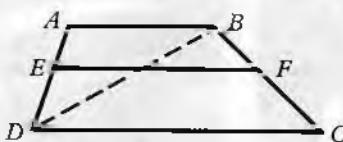
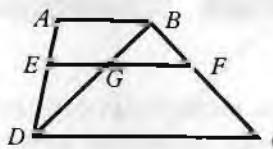
**ACTIVIDADES**

Para esta actividad se necesitarán tiras de cartulina o de madera de 30 cm o más de largo y algunos sujetadores.

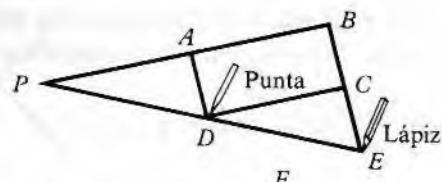
- Constrúyase un pantógrafo uniendo las tiras de manera que $AB = PC$ y $AP = BC$.
- Empléese el pantógrafo para ampliar alguna figura.



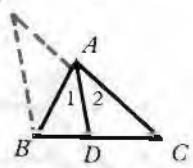
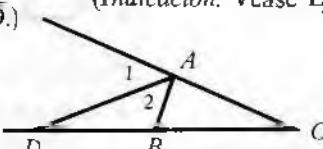
B.

9. Dado: $\overline{RS} \parallel \overline{ZX}$, $\overline{RX} \parallel \overline{TS}$.**Pruébese:** $\frac{TY}{RT} = \frac{RY}{RZ}$.**10. Dado:** $ABCD$ es un trapecio
 $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$.**Pruébese:** $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.(Sugerencia: Trácese \overline{BD} . Considérense $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$.)**11. Dado:** $ABCD$ es un trapecio $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$, $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{4}$, $BC = 30$.**Encuéntrense:** BF y FC .

(Ejercicios 11, 12)

12. Dado: $ABCD$ es un trapecio $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$, $\frac{BG}{GD} = \frac{3}{4}$, $AD = 8$, $BC = 12$.**Encuéntrense:** AE , ED , BF , FC .**13.** En este pantógrafo, $PA = 8$ cm y $AB = 24$ cm. Si la punta D traza un segmento de 14 cm, ¿cuál es la longitud del segmento que se dibuja en E ?**14. Dado:** $\triangle ABC$, $m\angle 1 = m\angle 2$.**Pruébese:** $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.(Indicación: Constrúyanse $\overline{FB} \parallel \overline{AD}$.)**15. Dado:** \overline{AD} biseca a $\angle BAC$, $AB = 10$,
 $AC = 15$, $BC = 18$.**Encuéntrense:** BD y DC .

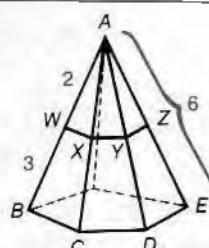
(Indicación: Véase Ejercicio 14.)

**16. Dado:** $\triangle ABC$, $m\angle 1 = m\angle 2$.**Pruébese:** $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

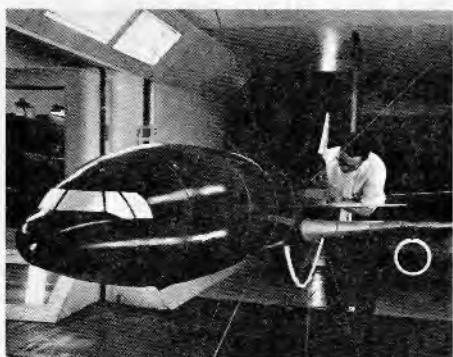
(Indicación: Empléese el teorema fundamental de la proporcionalidad y una recta auxiliar.)

SOLUCION DE PROBLEMAS

En esta pirámide pentagonal,

 $\overline{WX} \parallel \overline{BC}$, $\overline{XY} \parallel \overline{CD}$, $\overline{YZ} \parallel \overline{DE}$, y $AW = 2$, $WB = 3$, $AE = 6$ Encuéntrense AZ y ZE .

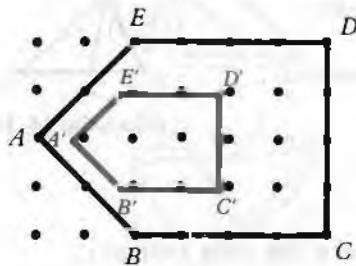
9.3 Polígonos semejantes



Con frecuencia, los diseñadores industriales construyen modelos de proyectos que luego se fabricarán en tamaño natural. El modelo del aeroplano tiene la misma forma que el avión real.

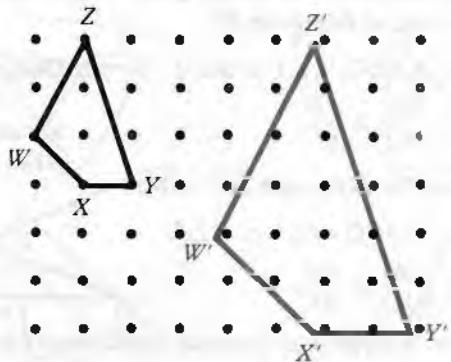
En esta sección se tratarán los polígonos y se describirá lo que significa *idéntica forma* o *semejanza*. Considérense las siguientes figuras:

$ABCDE$ es semejante a $A'B'C'D'E'$



$$\begin{aligned}\angle A &\cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B', \quad \angle C \cong \angle C', \\ \angle D &\cong \angle D', \quad \angle E \cong \angle E'.\end{aligned}$$

$WXYZ$ es semejante a $W'X'Y'Z'$



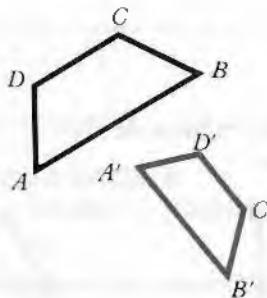
$$\begin{aligned}\angle W &\cong \angle W', \quad \angle X \cong \angle X', \\ \angle Y &\cong \angle Y', \quad \angle Z \cong \angle Z'.\end{aligned}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'} = 2. \quad \frac{WX}{W'X'} = \frac{XY}{X'Y'} = \frac{YZ}{Y'Z'} = \frac{WZ}{W'Z'} = \frac{1}{2}.$$

Obsérvese que todos los ángulos correspondientes son congruentes y que las razones de los lados correspondientes son iguales.

El símbolo « \sim » significa «es semejante a».

$ABCD \sim A'B'C'D'$ significa que $ABCD$ es semejante a $A'B'C'D'$

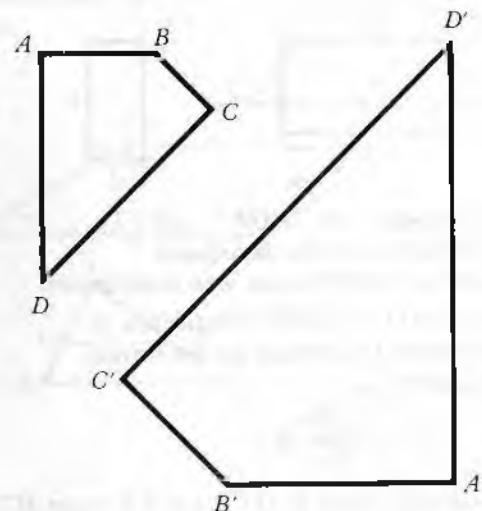


Definición 9.2

Dos polígonos son semejantes si hay una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales.

Ejemplo 1 Si se da que $ABCD \sim A'B'C'D'$, entonces puede concluirse que:

1. $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$.
2. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}$.

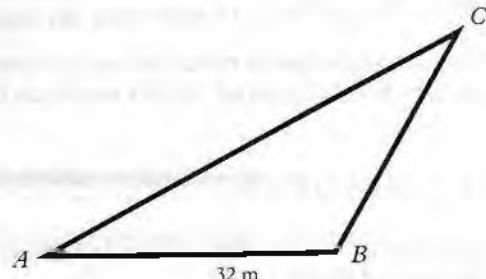


Ejemplo 2 Si se da que

1. $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$ y

2. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}$,

entonces puede concluirse que $ABCD \sim A'B'C'D'$.



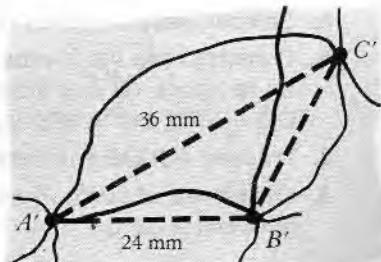
APLICACION

Si se dispone de un mapa a escala, entonces la figura del mapa es semejante a la figura que representa. Dado un mapa a escala de las ubicaciones A , B y C , entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Si $A'C' = 36$ mm, $A'B' = 24$ mm y $AB = 32$ mm, encuéntrese AC .

Solución: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ o bien $\frac{32 \text{ m}}{24 \text{ mm}} = \frac{AC}{36 \text{ mm}}$.

Por tanto, $AC = \frac{32 \text{ m} \times 36 \text{ mm}}{24 \text{ mm}} = 48 \text{ m}$.

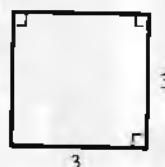


EJERCICIOS

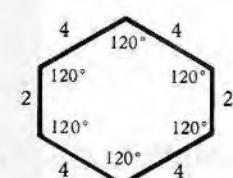
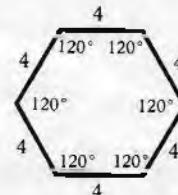
A.

En los ejercicios 1 a 4, determine si los pares de polígonos dados son semejantes o no.

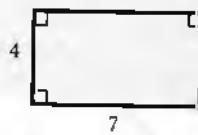
1.



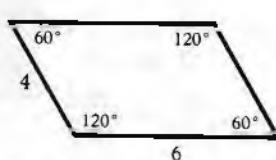
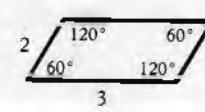
2.



3.

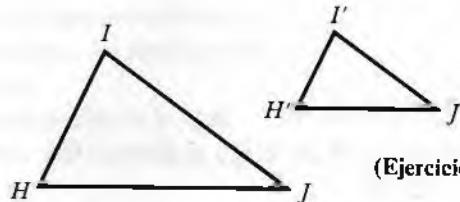


4.



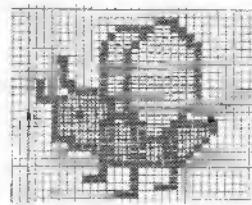
5. Supóngase que $\triangle HIJ \sim \triangle H'I'J'$.
Cítense tres pares de ángulos correspondientes que sean congruentes.
6. Si $\triangle HIJ \sim \triangle H'I'J'$, complétense la siguiente proporción en dos formas diferentes.

$$\frac{HI}{H'I'} = ?$$



(Ejercicios 5-7)

7. Supóngase que $\triangle HIJ \sim \triangle H'I'J'$ y que $H'I' = 4$, $I'J' = 6$, $H'J' = 7$ y $HJ = 12$. Encuéntrense las longitudes HI e IJ .
8. Con la escala que se indica en este patrón de bordado, encuéntrese la longitud AB del producto final ampliado.

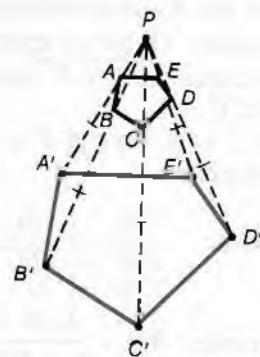


5 mm = 2 cm

ACTIVIDADES

El siguiente es un método para construir un polígono semejante a $ABCDE$.

- Selecciónese un punto P y dibújense \overrightarrow{PA} , \overrightarrow{PB} , \overrightarrow{PC} , \overrightarrow{PD} y \overrightarrow{PE} .
- Constrúyanse los puntos A' , B' , C' , D' y E' como se muestra en la figura, de manera que $AA' = 2PA$, $BB' = 2PB$, $CC' = 2PC$, $DD' = 2PD$ y $EE' = 2PE$.
- Trácese $ABCDE$ e inténtese hacer la construcción anterior.
- Localícese el punto P en diferentes posiciones y repítase la construcción.



B.

En esta figura, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

9. Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, demuéstrese que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

10. Si las longitudes de los segmentos son las que se muestran, encuéntrense DB y EC . (Sugerencia: Empléese el ejercicio 9.)

11. Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y las longitudes de los segmentos son las que se muestran, pruébese que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

12. Las longitudes de los lados de un pentágono son 6, 8, 9, 12 y 15. Si un pentágono semejante tiene de lado más largo 4, encuéntrense las medidas de los lados restantes.



13. Constrúyase un triángulo rectángulo semejante a $\triangle ABC$ con un cateto de longitud $\sqrt{2}$.



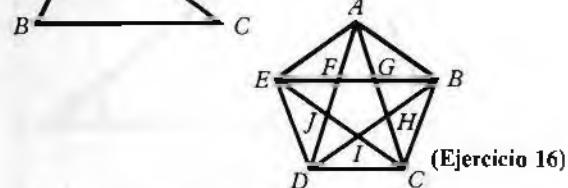
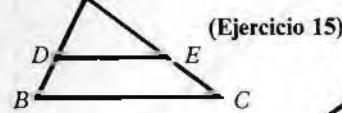
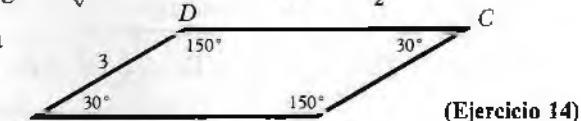
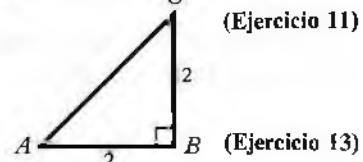
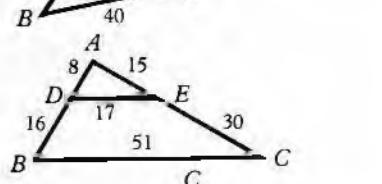
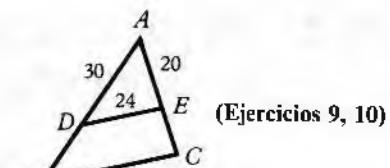
14. Constrúyase un cuadrilátero semejante a $ABCD$ cuyo lado más corto mida 9.

C.

15. Supóngase que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Pruébese que $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$. (Esta es la conclusión del teorema fundamental de la proporcionalidad.)

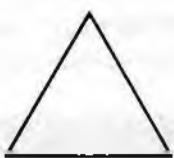
16. Dado que $ABCDE$ es un pentágono regular y que $\frac{BD}{DC} = \frac{BC}{DI} = \frac{DC}{CI}$, establezcanse varios pares de triángulos semejantes. Justifiquense las elecciones.



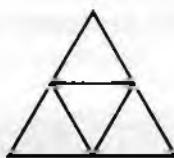
SOLUCION DE PROBLEMAS

Empléese la técnica de solución de problemas de elaboración de tablas (pág. 167) para resolver este problema.

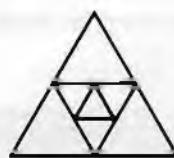
sin subdivisiones una subdivisión dos subdivisiones tres subdivisiones



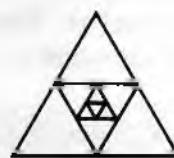
1 triángulo



4 triángulos



9 triángulos



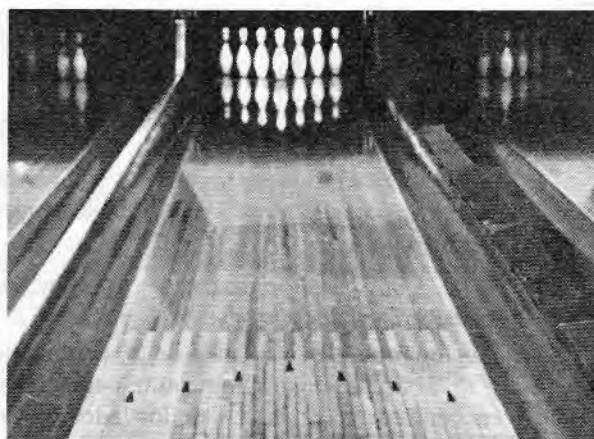
16 triángulos

Si al triángulo equilátero se le hicieran 10 subdivisiones, ¿cuántos triángulos resultarían?

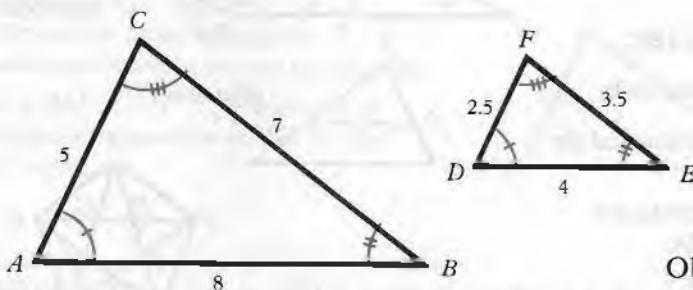
9.4 El postulado de la semejanza AAA

En el juego de los bolos, el jugador se basa en las marcas de la pista para dirigir la bola. Supóngase que el jugador lanza la bola para que pase por la segunda marca y falla por dos centímetros. ¿Por cuántos centímetros fallará la bola al pasar junto al bolo?

Esta pregunta puede responderse aplicando el teorema de esta sección.



Si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, y $\angle C \cong \angle F$.



$$\text{Obsérvese que } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}.$$

Al parecer, siempre que los tres ángulos de un triángulo sean congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces las razones de los lados correspondientes también serán iguales. Esto se acepta como postulado.

El teorema siguiente describe un método simple para probar que dos triángulos son semejantes.

Postulado de la semejanza AAA

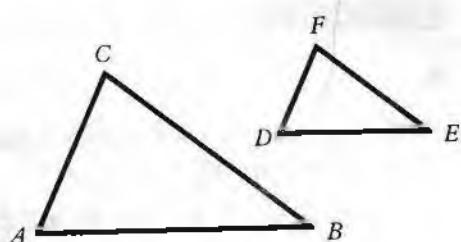
Si tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Teorema 9.8

Teorema de la semejanza AA. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

PRUEBA

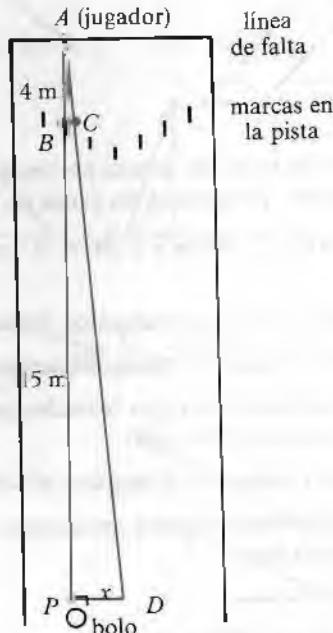
Dado: $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ con $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$.
 Pruébese: $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DEF$.



Afirmaciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle D$.	1. Dado.
2. $\angle B \cong \angle E$.	2. Dado.
3. $\angle C \cong \angle F$.	3. ¿Por qué?
4. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.	4. Semejanza AAA.

APLICACION

Cuando un jugador de bolos falla una marca de la pista por 2 cm, ¿por cuánto falla el bolo? Considérense los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle APD$. Estos triángulos se construyeron para ser rectángulos, y tienen un ángulo A común. Por tanto, por el teorema 9.8, se concluye que $\triangle ABC \sim \triangle APD$.



$$\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PD} \quad \text{o} \quad \frac{4 \text{ m}}{19 \text{ m}} = \frac{2 \text{ cm}}{x \text{ cm}}$$

$$\text{o} \quad x = \frac{38}{4} \text{ cm} = 9\frac{1}{2} \text{ cm}$$

Al aplicar el teorema de la semejanza AA al caso de los triángulos rectángulos, se obtiene este otro teorema.

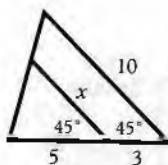
Teorema 9.9 Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno es congruente con un ángulo agudo del otro.



EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 4, se dan $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$. Complétense la afirmación $\triangle ABC \sim \underline{\hspace{1cm}}$.

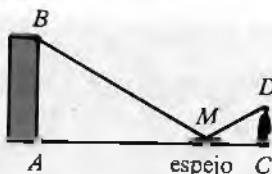
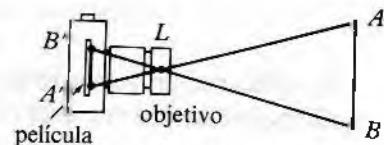
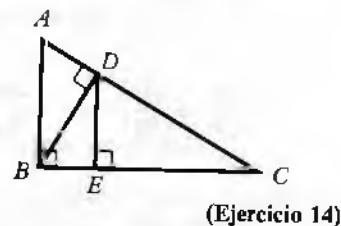
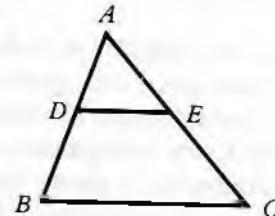
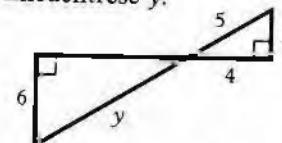
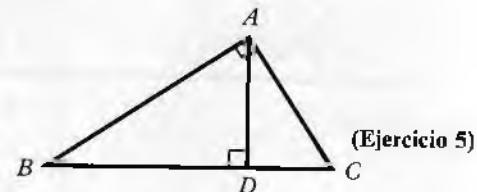
1. $m\angle A = 17$, $m\angle C = 49$, $m\angle X = 17$, $m\angle Z = 49$.
2. $m\angle A = 23$, $m\angle B = 111$, $m\angle Y = 23$, $m\angle Z = 111$.
3. $m\angle B = 68$, $m\angle C = 21$, $m\angle X = 21$, $m\angle Y = 91$.
4. $m\angle C = 119$, $m\angle A = 24$, $m\angle X = 24$, $m\angle Y = 37$.
5. Explíquese por qué $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.
6. Encuéntrese x .



7. Encuéntrese y .
8. Si un hombre de 6 pies de altura proyecta una sombra de 9 pies, ¿qué sombra proyectará un poste de 20 pies?
9. Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $AD = 3$, $AB = 8$ y $BC = 9$, ¿cuál es la longitud de \overline{DE} ?
10. ¿Son semejantes todos los triángulos rectángulos isósceles?
11. ¿Son semejantes todos los triángulos rectángulos? ¿Por qué?
12. ¿Son semejantes dos triángulos isósceles que tienen sus vértices congruentes? ¿Por qué?
13. ¿Son semejantes todos los triángulos 30° - 60° - 90° ? ¿Por qué?
14. Cítese el máximo de triángulos semejantes que puedan encontrarse en la figura.

B.

15. Cuando se toma una fotografía, la imagen que se forma en la película es semejante al objeto que se fotografía. Los triángulos semejantes ayudan a explicar esto. Si $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ son paralelos, pruébese que $\triangle LAB \sim \triangle L'A'B'$ son semejantes.
16. Un método para encontrar la altura de un objeto es colocar un espejo en el suelo y después situarse de manera que la parte más alta del objeto pueda verse en el espejo. ¿Qué altura tiene una torre si una persona de 150 cm de altura observa la parte superior de la torre cuando el espejo está a 120 m de la torre y la persona está a 6 m del espejo?

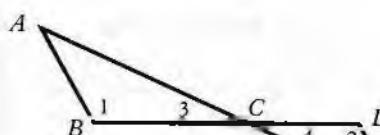


$$\angle AMB \cong \angle CMD$$

17. Dado: $m\angle 1 = m\angle 2$.
 Pruébese: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

18. Dado: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.
 Pruébese: a. $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

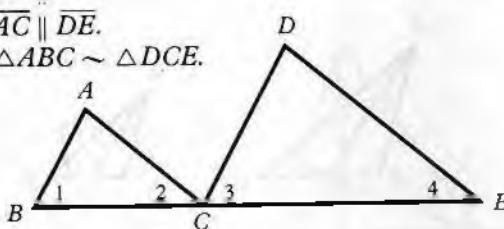
b. $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE}$



(Ejercicios 17, 18)

19. Dado: $ABCD$ es un trapecio.
 Pruébese: $\triangle AED \sim \triangle CEB$.

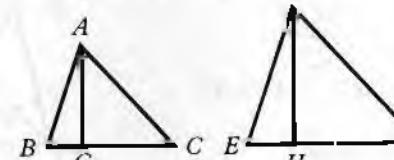
20. Dado: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.
 Pruébese: $\triangle ABC \sim \triangle DCE$.



(Ejercicio 19)

21. Dado: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
 \overline{AG} y \overline{DH} son alturas.

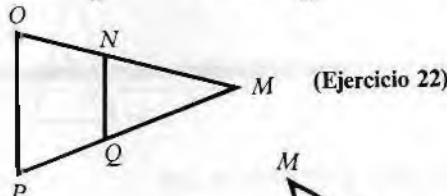
Pruébese: $\frac{AB}{DE} = \frac{AG}{DH}$.



(Ejercicio 21)

22. Dado: $\overline{NQ} \parallel \overline{OP}$.
 Pruébese: a. $\triangle MNQ \sim \triangle MOP$.

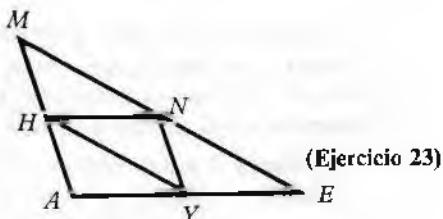
b. $\frac{MN}{MO} = \frac{NQ}{OP}$.



(Ejercicio 22)

23. Dado: H, N e Y son puntos medios de $\overline{MA}, \overline{ME}$ y \overline{AE} .

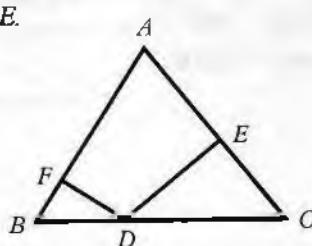
- Pruébese: $\triangle HNY \sim \triangle EAM$.



(Ejercicio 23)

24. Dado: $\angle B \cong \angle C$, $\overline{DF} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} \perp \overline{AC}$.
 Pruébese: a. $\triangle BDF \sim \triangle CDE$.

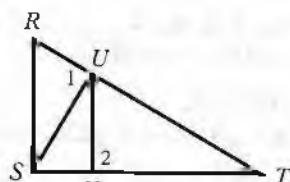
b. $\frac{FD}{ED} = \frac{BD}{CD}$.



25. Dado: $\angle RST$, $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos rectos.

Pruébese: a. $\triangle RSU \sim \triangle RTS$.

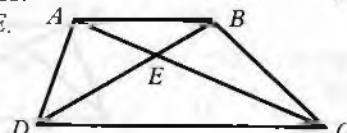
b. $\triangle UVT \sim \triangle RUS$.



C.

26. Dado: $ABCD$ es un trapecio.

Pruébese: $AE \cdot DE = BE \cdot CE$.

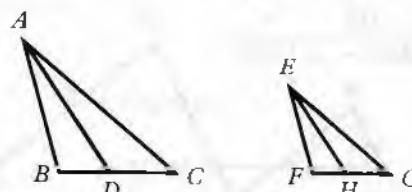


27. Dado: $\triangle ABC \sim \triangle EFG$

\overline{AD} biseca a $\angle A$

\overline{EH} biseca a $\angle E$.

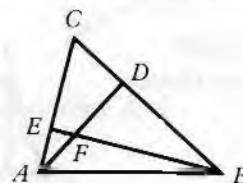
Pruébese: $\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{EH}$.



28. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$.

Pruébese: a. $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}$.

b. $AD \cdot BC = AC \cdot BE$.



ACTIVIDADES

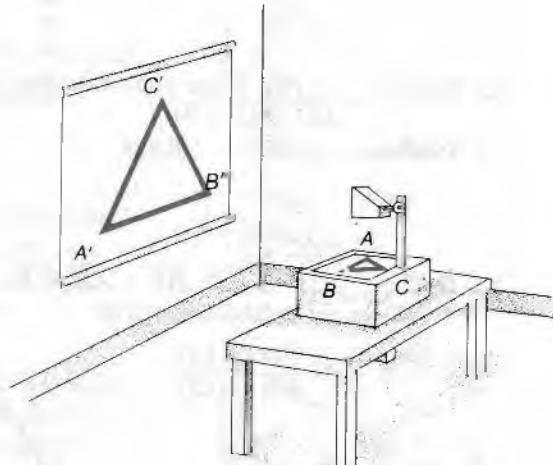
Colóquese un proyector a 10 pies de una pantalla y perpendicular a ésta. Colóquese un triángulo ABC en el proyector. Llámese triángulo $A'B'C'$ al que aparece en la pantalla.

1. Mídase $\angle A$ y su imagen $\angle A'$. ¿Qué relación tienen?

2. Midanse las longitudes AB y $A'B'$, AC y $A'C'$ y BC y $B'C'$.

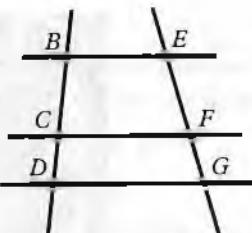
¿Cuál es la razón entre $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{AC}{A'C'}$ y $\frac{BC}{B'C'}$?

¿Qué conclusión se saca de $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$?



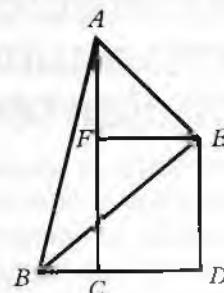
29. Dado: $\overline{BE} \parallel \overline{CF} \parallel \overline{DG}$.

$$\text{Pruébese: } \frac{BC}{CD} = \frac{EF}{FG}.$$



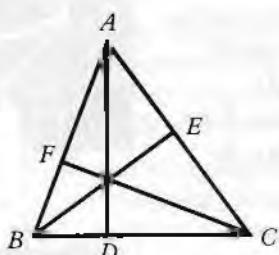
30. Dado: $\overline{AC} \perp \overline{FE}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$,
 $\overline{DE} \perp \overline{BD}$, $\overline{AE} \perp \overline{BE}$.

Pruébese: $\triangle AFE \sim \triangle BDE$.



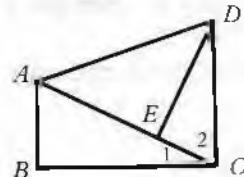
31. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{FC} \perp \overline{AB}$
 $\overline{BE} \perp \overline{AC}$.

$$\text{Pruébese: } \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$



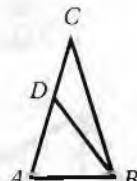
32. Dado: $\overline{DE} \perp \overline{AC}$
 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$
 $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$.

Pruébese: $BC \cdot CE = ED \cdot AB$.



33. Dado: $\overline{CA} \cong \overline{CB}$
 $\overline{BA} \cong \overline{BD}$.

Pruébese: $(AB)^2 = AC \cdot AD$.

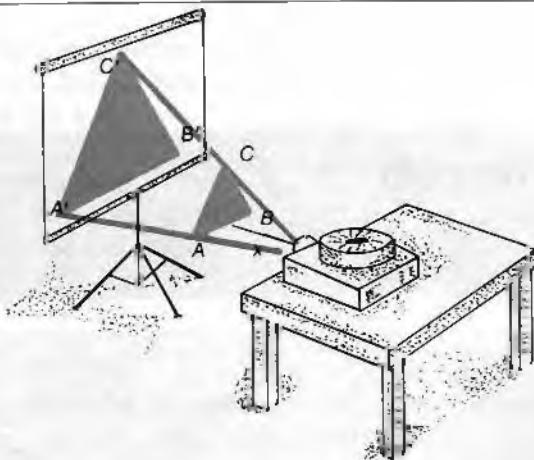


SOLUCION DE PROBLEMAS

Supóngase que se coloca un proyector de transparencias a 20 pies de la pantalla.

Supóngase que $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle A'B'C'$.

- Si se corta un triángulo $\triangle ABC$ y se coloca a x pies frente al proyector, calcúlese la longitud $A'B'$ en función de la longitud AB y de la distancia x .
- Si x se reduce a la mitad, ¿qué pasa con $A'B'$?



9.5 Triángulos rectángulos y triángulos semejantes

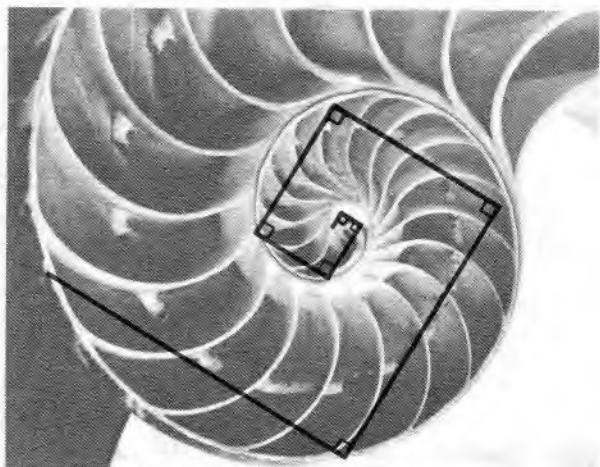
Un ejemplo interesante de semejanza entre triángulos rectángulos en la naturaleza es la concha de un nautilo. La fotografía muestra una concha cortada por la mitad para revelar su construcción espiral. Esta espiral puede aproximarse mediante una sucesión de segmentos colocados en ángulos rectos. Esta espiral está relacionada con el teorema de esta sección.

Se empezará con un ejemplo y una definición.

La media geométrica entre 4 y 16 es 8, dado que

$$\frac{4}{8} = \frac{8}{16}.$$

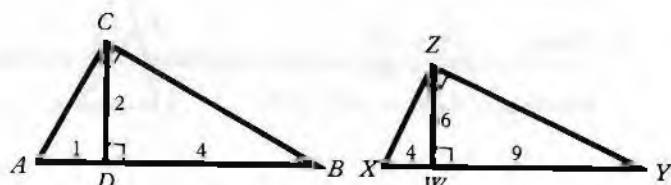
El concepto de media geométrica se emplea en el teorema siguiente.



Definición 9.3

Un número x es una **media geométrica** entre dos números a y b si

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}, \quad x \neq 0, b \neq 0.$$



Obsérvese que

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}.$$

Obsérvese que

$$\frac{XW}{WZ} = \frac{WZ}{WY}.$$

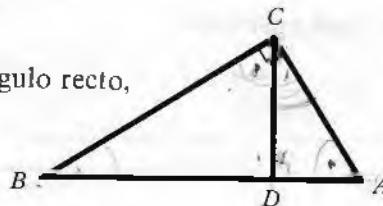
Teorema 9.10

En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura a la hipotenusa es la media geométrica entre las longitudes de los dos segmentos de la hipotenusa.

PRUEBA

Dado: $\triangle ABC$ con $\angle C$ como ángulo recto, \overline{CD} es una altura.

Pruébese: $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB}$.



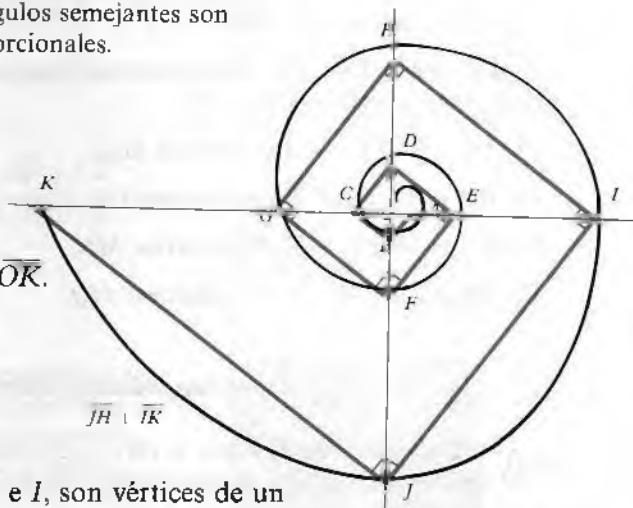
Afirmaciones	Razones
1. $\angle ADC$ es un ángulo recto.	1. \overline{CD} es una altura.
2. $\angle BDC$ es un ángulo recto.	2. ¿Por qué?
3. $\angle C$ es un ángulo recto.	3. Dado.
4. $\angle BCD$ es complementario de $\angle ACD$.	4. ¿Por qué?
5. $\angle CAD$ es complementario de $\angle ACD$.	5. ¿Por qué?
6. $\angle BCD \cong \angle CAD$.	6. ¿Por qué?
7. $\angle ADC \sim \angle CDB$.	7. Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno es congruente con un ángulo agudo del otro.
8. $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB}$.	8. Partes correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.

APLICACION

La concha del nautilo está basada en una media geométrica. Considérese la sucesión de radios:

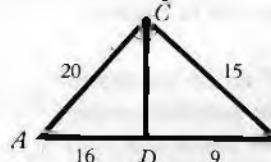
$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}, \overline{OF}, \overline{OG}, \overline{OH}, \overline{OI}, \overline{OJ}, \overline{OK}$.

La longitud de cada uno de estos segmentos es una media geométrica entre la longitud del segmento precedente y la del siguiente.



Cada tres puntos sucesivos, por ejemplo, G, H e I , son vértices de un triángulo rectángulo. Además, \overline{OH} es una altura de $\triangle GHI$. Por tanto, por el teorema 9.10, OH es la media geométrica entre OG y OI .

Este triángulo ilustra el teorema 9.11. La prueba de este teorema se deja como ejercicio.



Obsérvese que $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ y $\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB}$.

Teorema 9.11

Dados un triángulo rectángulo y la altura a la hipotenusa, cada cateto es la media geométrica entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del segmento de la hipotenusa adyacente al cateto.

EJERCICIOS**A.**

¿Cuál es la media geométrica entre los números de los ejercicios 1 a 4?

1. 4 y 9. 2. 9 y 16. 3. 4 y 5. 4. $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.

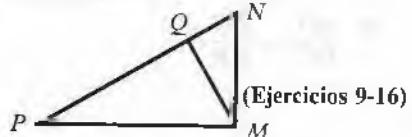
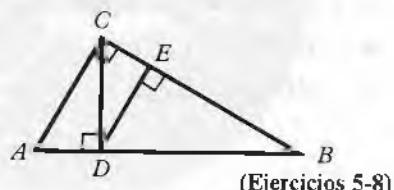
5. La longitud \bar{CD} es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos, ¿cuáles?

6. La longitud \bar{DE} es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos, ¿cuáles?

7. La longitud \bar{AC} es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos, ¿cuáles? (Véase Teorema 9.11.)

8. La longitud \bar{BC} es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos, ¿cuáles?

Para los ejercicios 9 a 16, empléese esta figura en la cual $\angle PMN$ es un ángulo recto y $\bar{MQ} \perp \bar{PN}$.



9. $PQ = 9$, $QN = 4$. Encuéntrese MQ .

10. $QN = 3$, $MQ = 9$. Encuéntrese PQ .

11. $PM = 12$, $PQ = 9$. Encuéntrese PN .

12. $MN = 8$, $QN = 6$. Encuéntrese PN .

13. $PN = 75$, $PQ = 72$. Encuéntrese MN .

14. $MQ = 4$, $PN = 10$. Encuéntrese QN .

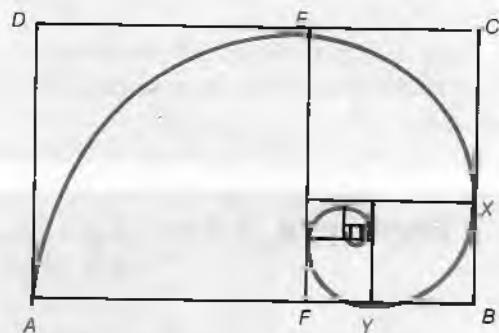
15. $PN = 13$, $PM = 12$. Encuéntrese MQ .

16. $PM = 16$, $MN = 12$. Encuéntrese PQ .

ACTIVIDADES

Una espiral semejante a la de una concha de nautilo está basada en el rectángulo áureo y puede construirse con un compás y una regla.

- Constrúyase un rectángulo áureo $ABCD$ como se muestra en la sección «La geometría en nuestro mundo» de la página 301.
- Divídase el rectángulo $BCEF$ en un cuadrado y un rectángulo, y continúese subdividiendo el rectángulo resultante en un cuadrado y un rectángulo.
- En cada cuadrado, constrúyase un arco de círculo como el que se muestra en el dibujo. El centro de cada arco es un vértice del cuadrado.



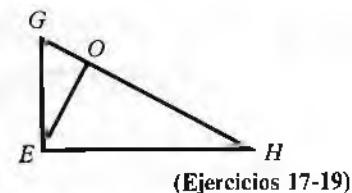
B.

17. Supóngase que $m\angle HEG = 90$ y $\overline{EO} \perp \overline{HG}$. Si $HO = 6$ y $EG = 4$, encuéntrese OG .

18. Supóngase que $m\angle HEG = 90$, $\overline{EO} \perp \overline{HG}$, $EO = 8$ y $\frac{HO}{OG} = \frac{2}{1}$. Encuéntrese HO .

19. Supóngase que $m\angle HEG = 90$, $\overline{EO} \perp \overline{HG}$, $HO = 10$ y $OG = 8$. Encuéntrese $HE \cdot EG$.

- 20. Dado:** $m\angle ACB = 90^\circ$, $\overline{CM} \perp \overline{AB}$, $AB \cdot CM = (AC)^2$.
Pruehse: $AC = BC$.

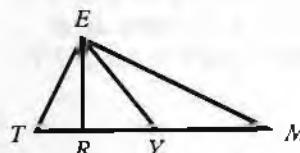


(Ejercicios 17-19)

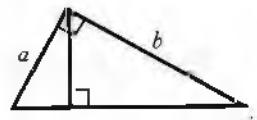
C

- 21. Dado:** $m\angle TEM = 90$, $\overline{RE} \perp \overline{TM}$,
 $TY = YM$, $ER = 4\frac{1}{2}$, $TE = 6$.

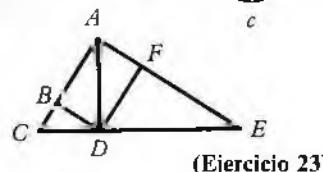
Pruéhese: *RY.*



22. Empléense el teorema 9.11 y la figura para mostrar que $a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema de Pitágoras).

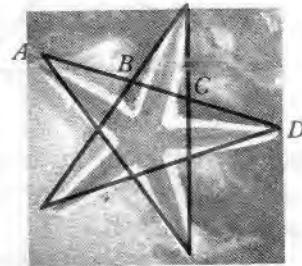


23. Supóngase que $AFDB$ es un rectángulo y que $\overline{AD} \perp \overline{CE}$.
Muéstrese que el área de $AFDB = \sqrt{BC \cdot BA \cdot AF \cdot FE}$.



24. Pruebese el teorema 9.11.

25. En una estrella de mar se encuentra la media geométrica de varias formas. Por ejemplo, en la estrella de cinco puntas que se muestra en la fotografía, AB es la media geométrica entre BC y AC . Acéptese esto como un hecho y empleése para mostrar que AC también es la media geométrica entre AB y AD . (Sugerencia: Empléese el teorema 9.2.)



$$AB = CD$$

SOLUCION DE PROBLEMAS

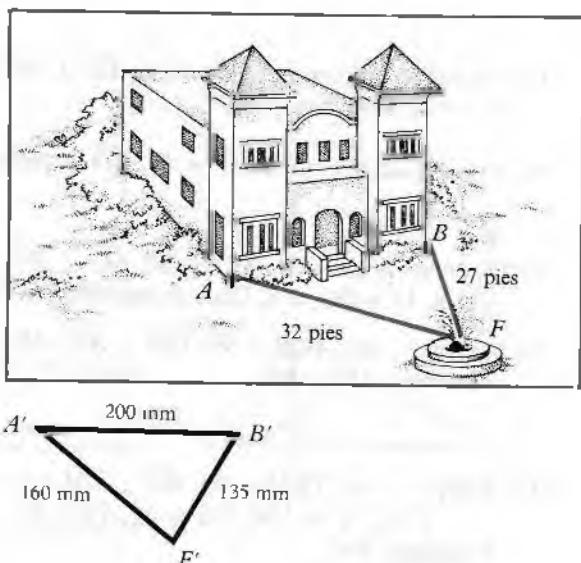
Muéstrese que la espiral construida en la actividad anterior es una espiral de una concha de nautilo.

Esto es, muéstrese que EX es la media geométrica entre AE y XY . (Sugerencia: Empléense la definición del rectángulo áureo de «La geometría en nuestro mundo» de la página 300, y el hecho de que $ABCD$ y $BCEF$ son rectángulos áureos.)

9.6 Teoremas de la semejanza LLL y LAL

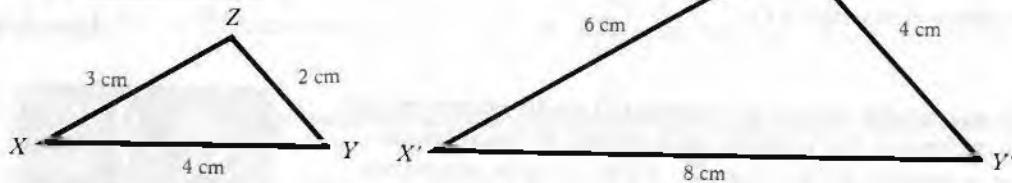
Se va a instalar una fuente a 32 pies de una esquina de un edificio y a 27 pies de la otra esquina. El edificio tiene 40 pies de ancho.

En el conjunto de planos para este proyecto se emplea una escala de 5 mm por pie. Después de localizar las esquinas A' y B' del edificio del dibujo, se localiza un punto F' a 160 mm de A' (5×32) y a 135 mm de B' (5×27). ¿Son semejantes $\triangle ABF$ y $\triangle A'B'F'$?



En el siguiente ejemplo, $\triangle XYZ$ y $\triangle X'Y'Z'$ se dibujaron de manera que

$$\frac{XY}{X'Y'} = \frac{YZ}{Y'Z'} = \frac{XZ}{X'Z'}.$$



Cuando los lados de los triángulos se trazan proporcionalmente, entonces $m\angle X = m\angle X' = 30^\circ$, $m\angle Y = m\angle Y' = 46^\circ$ y $m\angle Z = m\angle Z' = 104^\circ$.

Estos ejemplos sugieren el teorema llamado teorema de la semejanza LLL.

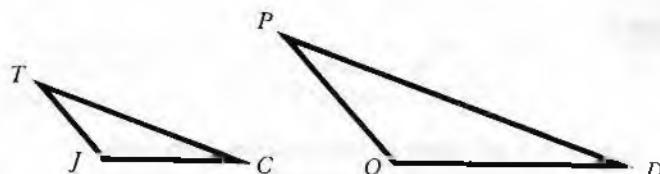
Teorema 9.12

Teorema de la semejanza LLL. Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

El teorema 9.12 establece que

$$\text{si } \frac{TJ}{PO} = \frac{JC}{OD} = \frac{TC}{PD},$$

entonces $\triangle TJC \sim \triangle POD$.



APLICACION

En el ejemplo del principio de esta sección hay un triángulo cuyos lados miden 27 pies, 32 pies y 40 pies, y un dibujo a escala de lados 135 mm, 160 mm y 200 mm. ¿Son semejantes estos triángulos?

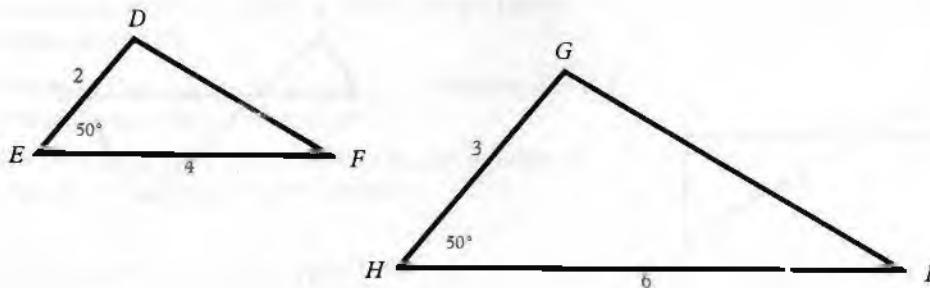
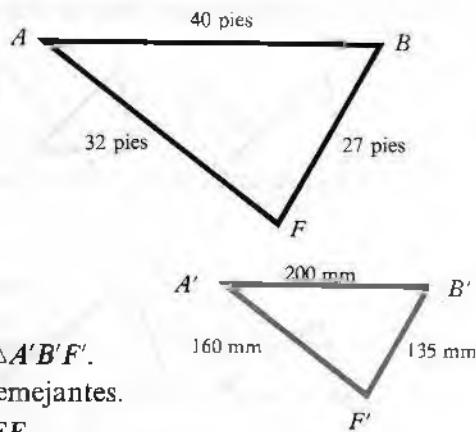
Dado que

$$\frac{40}{200} = \frac{32}{160} = \frac{27}{135} = \frac{1}{5},$$

el teorema 9.12 responde a esta pregunta. Si, $\triangle ABF \sim \triangle A'B'F'$.

Hay otra manera de mostrar que dos triángulos son semejantes.

$\triangle DEF$ y $\triangle GHI$ se construyeron de manera que $\frac{DE}{GH} = \frac{EF}{HI}$ y $\angle E \cong \angle H$.



Estas condiciones implican que $\angle F \cong \angle I$ y $\angle D \cong \angle G$. Este ejemplo sugiere el siguiente teorema, llamado teorema de la semejanza LAL.

Teorema 9.13

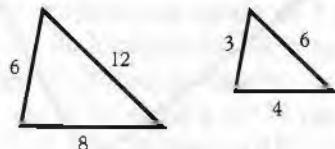
Teorema de la semejanza LAL. Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo, y si los lados correspondientes que incluyen al ángulo son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

EJERCICIOS

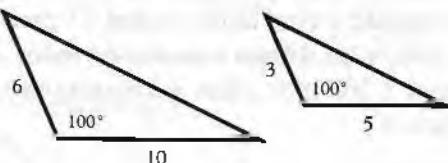
A.

En los ejercicios 1 a 4, empléese la información dada para determinar si los triángulos son semejantes. Las decisiones deben basarse en las medidas dadas, más que en la forma de los dibujos. Si los triángulos son semejantes, determíñese cuál de los tres teoremas de semejanza se aplicó. (AA, LAL o LLL).

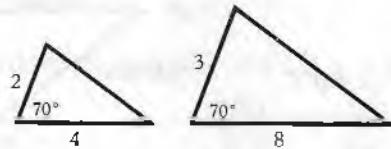
1.



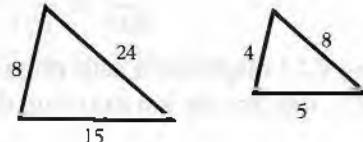
2.



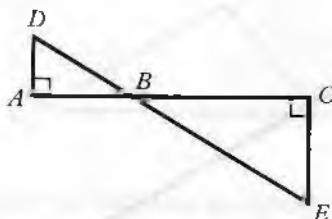
3.



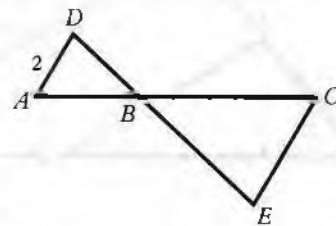
4.



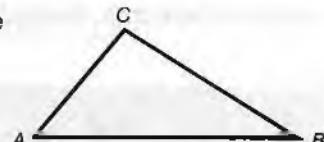
5. Si $AB = 4$ y $BC = 7$, encuéntrese $\frac{AD}{CE}$.



6. Si el punto B divide \overline{AC} y \overline{DE} en tercios, ¿cuál es la longitud de CE ?

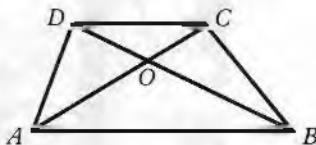
**ACTIVIDADES**

- Constrúyase $\triangle ABC$ con lados de 10 cm, 13 cm y 17 cm de largo. Encuéntrese el punto de intersección de las bisectrices perpendiculares de los lados.
- Este punto es el centro del círculo que pasa por los tres vértices. Este círculo se llama círculo circunscrito. Trácese este círculo.
- Después, trácese el círculo de nueve puntos, como se describió en la página 246.
- ¿Qué relación existe entre el radio del círculo circunscrito y el radio del círculo de nueve puntos?



B.

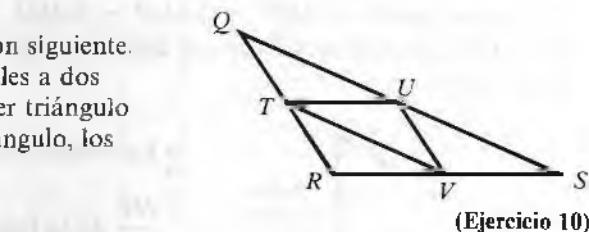
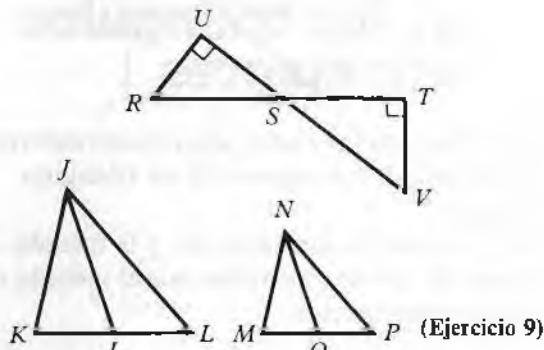
- 7. Dado:** Trapecio $ABCD$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
Pruébese: $\triangle AOB \sim \triangle COD$.



- 9. Dado:** $\triangle JKL \sim \triangle NMP$.
 \overline{JI} y \overline{NO} son medianas.
Pruébese: $\frac{JI}{NO} = \frac{JK}{NM}$.

- 10. Dado:** T , U , y V son puntos medios.
Pruébese: $\triangle QRS \sim \triangle VUT$.

- 8. Dado:** $\overline{RU} \perp \overline{UV}$, $\overline{TV} \perp \overline{RT}$.
Pruébese: $\triangle RSU \sim \triangle VST$.



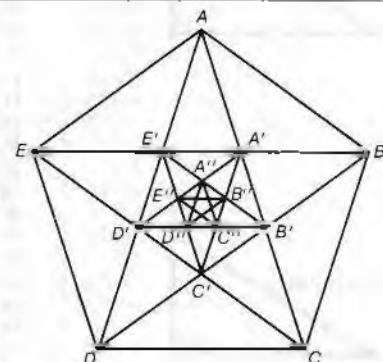
(Ejercicio 10)

C.

- 12. Pruébese:** Las diagonales correspondientes de dos cuadriláteros semejantes están en la misma razón que los lados correspondientes.
- 13. Pruébese:** Dos triángulos isósceles con ángulos de los vértices congruentes son semejantes.
- 14. Dibújese** un triángulo dados dos ángulos agudos y la longitud de la altura al lado incluido.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Identifíquense tantas figuras de diferente forma como sea posible, y para las cuales se pueda encontrar otra figura que sea semejante.

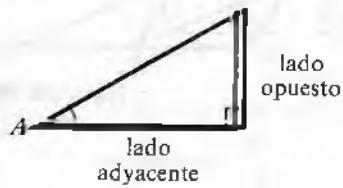


9.7 Razones trigonométricas; una aplicación de los triángulos semejantes

La altura de edificios muy altos puede determinarse con la ayuda de las razones de un triángulo rectángulo.

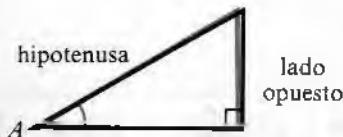
Si se conocen la distancia AC y la medida de $\angle A$, la altura BC puede calcularse por el método que se estudia en esta sección.

En esta figura, $\triangle ABC \sim \triangle AED \sim \triangle AGF \sim \triangle AIH$. Por tanto, las razones entre los lados correspondientes son iguales.



Las relaciones $\frac{BC}{AB}$, $\frac{DE}{AE}$, $\frac{FG}{AG}$ y

$\frac{HI}{AI}$ de la figura anterior son iguales. Estas razones se asocian con $\angle A$ y se llaman *tangente de $\angle A$* , que se abrevia *tan A*.



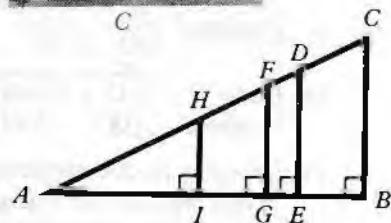
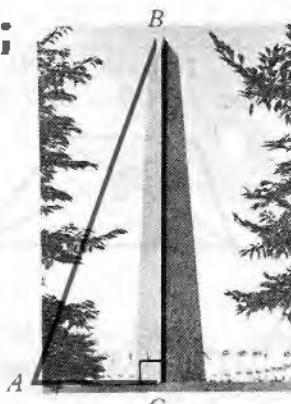
Las razones $\frac{BC}{AC}$, $\frac{ED}{AD}$, $\frac{GF}{AF}$ e

$\frac{IH}{AH}$ son iguales. Estas razones, asociadas con $\angle A$, se llaman *seno de $\angle A$* , que se abrevia *sen A*.



Las razones $\frac{AB}{AC}$, $\frac{AE}{AD}$, $\frac{AG}{AF}$ y

$\frac{AI}{AH}$ son iguales. Estas razones, asociadas con $\angle A$, se llaman *coseno de $\angle A$* , que se abrevia *cos A*.



Definición 9.4

La **tangente** de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón

$$\frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud del lado adyacente}}$$

Definición 9.5

El **seno** de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón

$$\frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

Definición 9.6

El **coseno** de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón

$$\frac{\text{longitud del lado adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

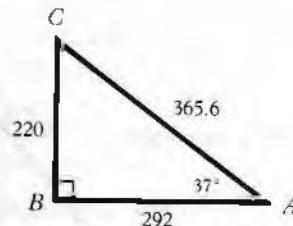
Ejemplo 1

En la figura de la derecha puede observarse que

$$\tan 37^\circ = \frac{220}{292} \doteq 0.7534,$$

$$\sin 37^\circ = \frac{220}{365.6} \doteq 0.6018,$$

$$\cos 37^\circ = \frac{292}{365.6} \doteq 0.7986.$$



Estas razones trigonométricas pueden encontrarse para varios ángulos por medio de una tabla de valores como la que aparece aquí o con una calculadora que tenga funciones trigonométricas.

**Ejemplo 2**

Por la tabla de valores aproximados, puede verse que

$$\tan 42^\circ = 0.9004,$$

$$\sin 42^\circ = 0.6691,$$

$$\cos 42^\circ = 0.7431.$$

APLICACION

Una persona situada a 1000 pies de la base del monumento a Washington encuentra que $\angle A$ es aproximadamente 29° . ¿Cuál es la altura aproximada del monumento?

$$\tan 29^\circ = \frac{x}{1000} \quad o \quad x = 1000 \times \tan 29^\circ$$

$$= 1000 \times 0.5543 = 554.3 \text{ pies}$$

$m\angle A$ en grados	$\tan A$	$\sin A$	$\cos A$
1	0.0175	0.0175	0.9998
2	0.0349	0.0349	0.9994
3	0.0524	0.0523	0.9986
4	0.0699	0.0698	0.9976
5	0.0875	0.0872	0.9962
6	0.1051	0.1045	0.9945
7	0.1228	0.1219	0.9925
8	0.1405	0.1392	0.9903
9	0.1584	0.1564	0.9877
10	0.1763	0.1736	0.9848
11	0.1944	0.1908	0.9816
12	0.2126	0.2079	0.9781
13	0.2309	0.2250	0.9744
14	0.2493	0.2419	0.9703
15	0.2679	0.2588	0.9659
16	0.2867	0.2756	0.9613
17	0.3057	0.2924	0.9563
18	0.3249	0.3090	0.9511
19	0.3443	0.3256	0.9455
20	0.3640	0.3420	0.9397
21	0.3839	0.3584	0.9336
22	0.4040	0.3746	0.9272
23	0.4245	0.3907	0.9205
24	0.4452	0.4067	0.9135
25	0.4663	0.4226	0.9063
26	0.4877	0.4384	0.8988
27	0.5095	0.4540	0.8910
28	0.5317	0.4695	0.8829
29	0.5543	0.4848	0.8746
30	0.5774	0.5000	0.8660
31	0.6009	0.5150	0.8572
32	0.6249	0.5299	0.8480
33	0.6494	0.5446	0.8387
34	0.6745	0.5592	0.8290
35	0.7002	0.5736	0.8192
36	0.7265	0.5878	0.8090
37	0.7536	0.6018	0.7986
38	0.7813	0.6157	0.7880
39	0.8098	0.6293	0.7771
40	0.8391	0.6428	0.7660
41	0.8693	0.6561	0.7547
42	0.9004	0.6691	0.7431
43	0.9325	0.6820	0.7314
44	0.9657	0.6947	0.7193
45	1.0000	0.7071	0.7071

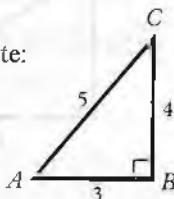
EJERCICIOS**A.**

1. Complétense lo siguiente:

$$\tan A = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\sin A = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\cos A = \underline{\hspace{1cm}}$$

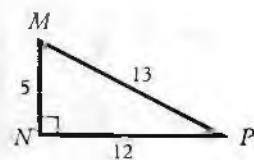


2. Complétense lo siguiente:

$$\tan M = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\sin P = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\cos P = \underline{\hspace{1cm}}$$



Para los ejercicios 3 a 14, empléense las tablas trigonométricas.

3. $\sin 17^\circ = \underline{\hspace{1cm}}$

4. $\cos 43^\circ = \underline{\hspace{1cm}}$

5. $\tan 21^\circ = \underline{\hspace{1cm}}$

6. $\cos 13^\circ = \underline{\hspace{1cm}}$

7. $\tan 35^\circ = \underline{\hspace{1cm}}$

8. $\sin 37^\circ = \underline{\hspace{1cm}}$

Dadas las siguientes medidas aproximadas, encuéntrese el valor de $\angle A$ redondeando al grado más próximo.

9. $\tan \angle A = 0.7536$.

10. $\cos \angle A = 0.9985$.

11. $\sin \angle A = 0.2925$.

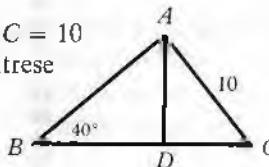
12. $\cos \angle A = 0.8290$.

13. $\sin \angle A = 0.0699$.

14. $\tan \angle A = 0.9658$.

B.

15. $\triangle ABC$ tiene $AB = AC = 10$ y $m\angle B = 40$. Encuéntrese la longitud de \overline{AD} .



16. $\triangle ABC$ tiene $AB = AC = 10$ y $m\angle B = 40$. Encuéntrese la longitud de \overline{BD} .

(Ejercicios 15, 16)

ACTIVIDADES

Empléese una calculadora para determinar lo siguiente:

1. a. $(\sin 57^\circ)^2 + (\cos 57^\circ)^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ b. $(\sin 43^\circ)^2 + (\cos 43^\circ)^2 = \underline{\hspace{1cm}}$

c. $(\sin 9^\circ)^2 + (\cos 9^\circ)^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ d. $(\sin 24^\circ)^2 + (\cos 24^\circ)^2 = \underline{\hspace{1cm}}$

e. ¿Qué puede decirse sobre $\sin^2 x + \cos^2 x$ para todas las x ?

2. a. Compárese $\frac{\sin 47^\circ}{\cos 47^\circ}$ con $\tan 47^\circ$. b. Compárese $\frac{\sin 71^\circ}{\cos 71^\circ}$ con $\tan 71^\circ$.

c. Compárese $\frac{\sin 33^\circ}{\cos 33^\circ}$ con $\tan 33^\circ$. d. Compárese $\frac{\sin 66^\circ}{\cos 66^\circ}$ con $\tan 66^\circ$.

e. ¿Qué puede decirse sobre $\frac{\sin x}{\cos x}$ y $\tan x$?

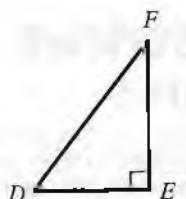


17. $\sin F = \frac{7}{25}$.

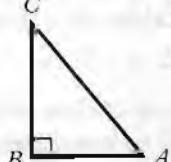
$FD = ?$

$FE = ?$

$\tan D = ?$



19. Supóngase que $AB = 3$, $BC = 4$ y $AC = 5$. Empléense las tablas trigonométricas o una calculadora para determinar $m\angle A$ y $m\angle C$ en la mayor aproximación posible.

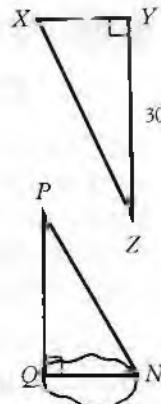


18. $\tan Z = \frac{8}{15}$.

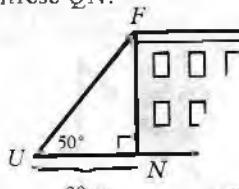
$XY = ?$

$XZ = ?$

$\cos X = ?$

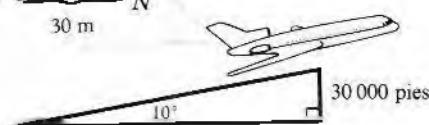


20. Supóngase que se desea encontrar la distancia a través del embalse QN . Se mide para encontrar que $PQ = 50$ m y determinar que $m\angle P = 44$. Encuéntrese QN .

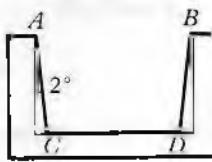
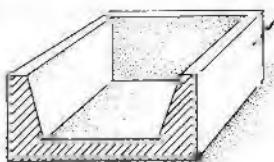


- C. 21. Supóngase que se desea encontrar la altura del edificio FN . $m\angle FUN = 50$ a una distancia de 30 metros de N . ¿Cuál es la longitud de FN ?

22. Si un aeroplano despegó y asciende a una razón uniforme de 10° hasta alcanzar una altura de 30 000 pies, ¿cuál fue la distancia recorrida?



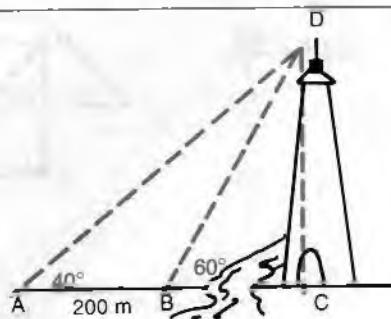
23. El oro derretido se vacía en moldes para formar lingotes. Para esto, se emplea un molde con forma de caja y con lados interiores inclinados. El ángulo de inclinación es la pendiente de los lados. Este ángulo es 2° y $BD = 6$ cm. ¿Cuál es la diferencia entre las medidas de AB y CD ?



SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Supóngase que se desea encontrar la altura (DC) de una torre, pero no es posible medir directamente las distancias AC y AB .

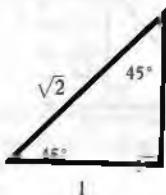
Si $m\angle A = 40$, $m\angle DBC = 60$ y $AB = 200$ m, encuéntrese DC .



9.8 Razones trigonométricas de ángulos especiales

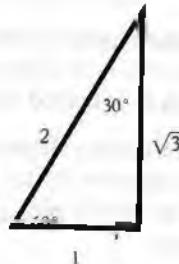
Así como los ángulos de 30° , 45° y 60° , son importantes para los diseñadores, también son ángulos especiales importantes para la trigonometría. Con frecuencia es útil conocer las razones trigonométricas de estos ángulos sin tener que recurrir a las tablas de valores o a una calculadora.

Por el teorema 7.3, se concluye que las longitudes de los lados de un triángulo de 45° - 45° - 90° tienen una razón $1:1:\sqrt{2}$.



Esta tabla muestra las razones trigonométricas para estos ángulos especiales.

Por el teorema 7.4, se concluye que las longitudes de los lados de un triángulo de 30° - 60° - 90° tienen una razón de $1:\sqrt{3}:2$.



	30°	60°	45°
\tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1
\sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
\cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejemplo 1

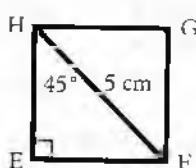
La diagonal de un cuadrado es 5 cm. Encuéntrese la longitud de un lado.

$$\sin \angle EHF = \frac{EF}{5}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{EF}{5}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{EF}{5}$$

$$EF = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm.}$$



Ejemplo 2

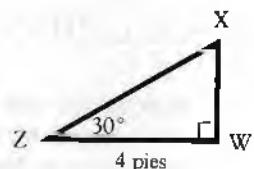
En el triángulo que se muestra, encuéntrense XW y XZ .

$$\tan \angle Z = \frac{XW}{4}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{XW}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{XW}{4}$$

$$XW = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ pies.}$$



Dado que XZ es $2XW$, entonces $XZ = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ pies.

EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 6, complétese correctamente la proposición sin consultar la tabla de la página 331.

1. $\sin 45^\circ = ?$

2. $\cos 30^\circ = ?$

3. $\tan 60^\circ = ?$

4. $\cos 60^\circ = ?$

5. $\sin 30^\circ = ?$

6. $\tan 45^\circ = ?$

En los ejercicios 7 a 14, el triángulo rectángulo que se muestra no se dibujó con precisión. Acéptense las longitudes dadas de los lados. Complétese correctamente las proposiciones siguientes.

7. $\sin A = ?$

8. $\cos A = ?$

9. $\tan A = ?$

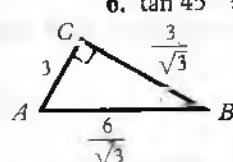
10. $\cos B = ?$

11. $\tan B = ?$

12. $\sin B = ?$

13. $m\angle A = ?$

14. $m\angle B = ?$



(Ejercicios 7-14)

B.

En los ejercicios 15 a 18, evalúense las expresiones dadas.

Identifiquense aquellos pares de expresiones que sean iguales.

Para todos los problemas, supóngase que $m\angle A = 30$.

15. $2 \sin A, 2 \sin A \cos A, \sin 2A$.

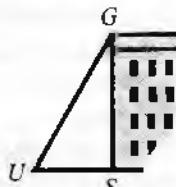
16. $\cos 2A, (\cos A)^2 - (\sin A)^2, 2(\cos A)^2 - 1$.

17. $\tan 2A, 2 \tan A, \frac{2 \tan A}{1 - (\tan A)^2}$.

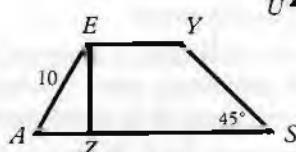
18. $2 \cos A, 1 - 2(\sin A)^2, \cos 2A$.

C.

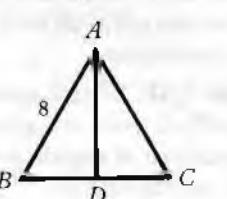
19. Si $m\angle GUS = 30$ y $US = 50$ m, ¿cuál es la altura del edificio?



20. El cuadrilátero EASY es un trapezo isósceles con $EA = SY$. Si $EA = 10$ y $m\angle EAS = 45$, encuéntrese la longitud de la altura EZ.



21. $\triangle ABC$ es equilátero. Encuéntrese la longitud de la altura AD.



22. Muéstrese que si $\triangle ABC$ tiene un ángulo recto $\angle C$, entonces $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$.

(Ejercicio 21)

Capítulo 9 Conceptos importantes

Términos

Proporción (pág. 304)

Polygones semejantes (pág. 313)

Media geométrica (pág. 322)

Tangente de un ángulo agudo (pág. 330)

Seno de un ángulo agudo (pág. 330)

Coseno de un ángulo agudo (pág. 330)

Postulado

Postulado de la semejanza AAA (pág. 316)

Teoremas

9.1 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \times d = b \times c$.

9.2 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

9.3 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

9.4 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

9.5 Si $a \times d = b \times c$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

9.6 **Teorema fundamental de la proporcionalidad.** Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces divide a éstos proporcionalmente.

9.7 Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y los divide proporcionalmente, entonces la recta es paralela al tercer lado.

9.8 **Teorema de la semejanza AA.** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

9.9 Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno es congruente con un ángulo agudo del otro.

9.10 En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura a la hipotenusa es la media geométrica entre las longitudes de los dos segmentos de la hipotenusa.

9.11 Dados un triángulo rectángulo y la altura a la hipotenusa, cada cateto es la media geométrica entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del segmento de la hipotenusa adyacente al cateto.

9.12 **Teorema de la semejanza LLL.** Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

9.13 **Teorema de la semejanza LAL.** Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo, y si los lados correspondientes que incluyen al ángulo son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Capítulo 9 Resumen

1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

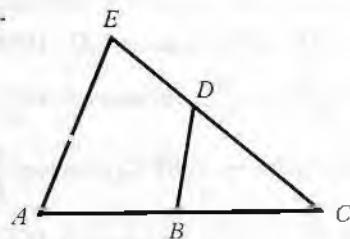
a. Si $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$, entonces $\frac{CD}{DE} = \frac{CB}{BA}$.

b. Si $\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CA}$, entonces $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.

c. Si $CD = 4$, $DE = 3$, $BC = 8$, entonces $AB = 6$.

d. Si $\angle A \cong \angle DBC$, entonces $\triangle EAC \sim \triangle DBC$.

e. Si $CD = DE = AB = BC$, entonces $\triangle EAC \sim \triangle DBC$.



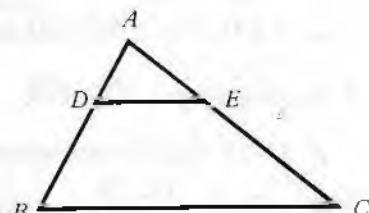
2. Supóngase que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

a. $AD = 4$, $BD = 6$, $AE = 5$. Encuéntrese AC .

b. $AB = 10$, $BD = 7$, $AC = 12$. Encuéntrese AE .

c. $AD = 3$, $BD = 4$, $BC = 6$. Encuéntrese DE .

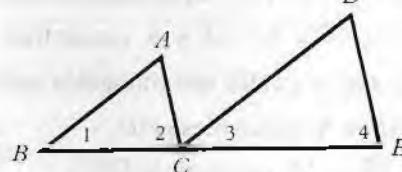
d. $AB = BC = AC = 6$, $AD = 2$. Encuéntrese $AD + DE + AE$.



3. Dado: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

Pruébese: $AB \cdot CE = BC \cdot DC$.

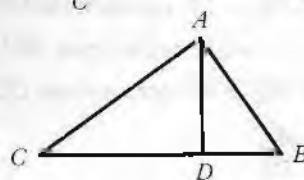


4. Supóngase que $m\angle CAB = 90$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

a. Si $AB = 8$ y $BC = 12$, encuéntrese BD .

b. Si $AC = 6$ y $DC = 4$, encuéntrese BC .

c. Si $BD = 4$ y $AD = 6$, encuéntrese DC .

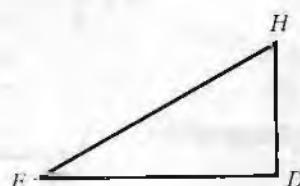


5. Supóngase que $m\angle D = 90$.

a. Si $\operatorname{sen} \angle E = \frac{8}{17}$, encuéntrese $\tan \angle E$.

b. Si $\cos \angle H = \frac{9}{41}$, encuéntrese $\cos \angle E$.

c. Si $\tan \angle E = \frac{4}{3}$, encuéntrese $\cos \angle H$.



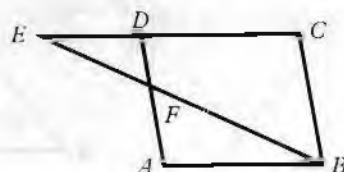
6. Si un árbol de 20 pies proyecta una sombra de 45 pies, ¿qué sombra proyectará un árbol de 30 pies?

7. Dado: La figura ABCD es un paralelogramo.

Pruébese: a. $\triangle ECB \sim \triangle EDF$

b. $\triangle EDF \sim \triangle BAF$

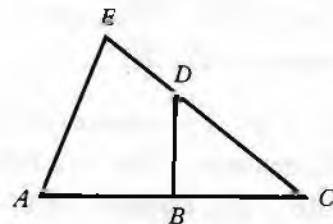
c. $\triangle ECB \sim \triangle BAF$



Capítulo 9 Examen

1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

- Si $\overline{DB} \parallel \overline{AE}$, entonces $CD \cdot DE = BC \cdot AB$.
- Si $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{BC}$, entonces $\triangle AEC \sim \triangle BDC$.
- Si $\triangle AEC \sim \triangle BDC$, entonces $\frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AB}$.
- Si $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{EC}$, entonces $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.
- Si $DC \cdot AB = BC \cdot ED$, entonces $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.

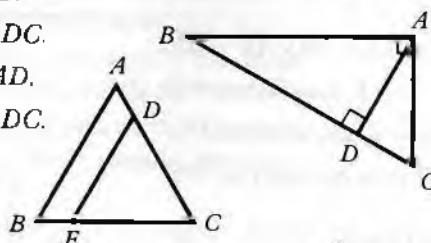


2. Supóngase que $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$.

- Si $ME = 2ED$, encuéntrese $\frac{NE}{EC}$.
- Si $ME = 4$, $NE = 5$ y $EC = 3$, encuéntrese ED .
- Si $ME = 4$, $DE = 2$ y $NC = 9$, encuéntrese EC .
- Si $MN = ME = NE = 6$ y $CE = 4$, encuéntrese $CE + CD + DE$.

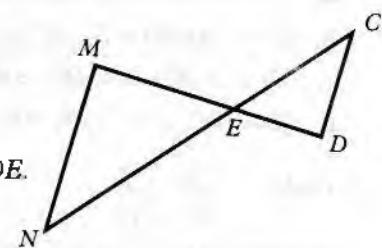
3. Supóngase que $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ son triángulos rectángulos.

- Si $AC = 3$ y $AB = 4$, encuéntrese AD .
- Si $AB = 12$ y $BC = 13$, encuéntrese DC .
- Si $BD = 9$ y $BC = 15$, encuéntrese AD .
- Si $AC = 20$ y $BC = 40$, encuéntrese DC .



4. Dado: $AB = AC$
 $DE = DC$.

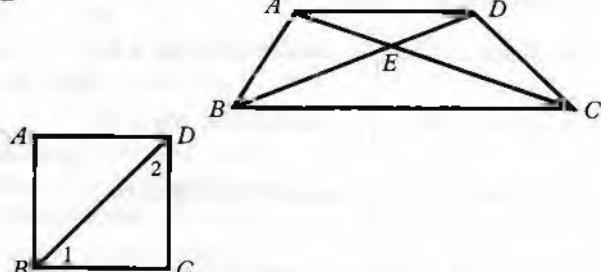
Pruébese: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.



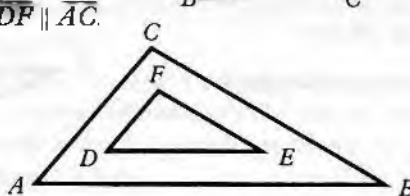
5. Dado: $ABCD$ es un trapezio.
Pruébese: $DE \cdot EC = AE \cdot BE$.

6. $ABCD$ es un cuadrado con diagonal \overline{BD} .

- Encuéntrese $\tan \angle 1$.
- Encuéntrese $\cos \angle 2$.
- ¿Es $\cos \angle 1 = \sin \angle 1$?



7. Dado: $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$, $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$.
Pruébese: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.



Técnicas para la solución de problemas

Trabajese hacia atrás

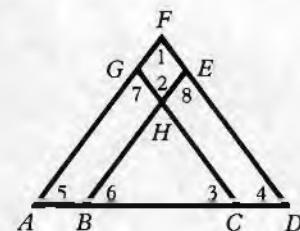
Algunas veces, al resolver problemas, es tan útil trabajar hacia atrás como hacia adelante. Plantéese esta pregunta: «¿Qué información se necesita para llegar a la conclusión deseada?»

Ejemplo

Considérese el problema siguiente utilizando las preguntas y respuestas que se dan como ayuda para resolver el problema.

Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$
 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Pruébese: $\triangle AGC \cong \triangle BED$.

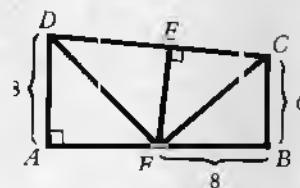
- Pregunta: ¿Cómo se puede demostrar que los triángulos son congruentes?
- Pregunta: ¿Qué segmentos son congruentes?
- Pregunta: ¿Qué lados de los triángulos puede demostrarse que son congruentes?
- Pregunta: ¿Qué ángulos de los triángulos puede demostrarse que son congruentes?



PROBLEMAS

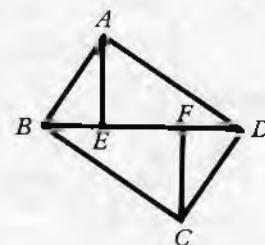
Resuélvanse los problemas siguientes con el método de trabajo hacia atrás.

1. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
 \overline{EF} biseca, y es perpendicular, a \overline{DC} .



Encuéntrese: AF .

2.

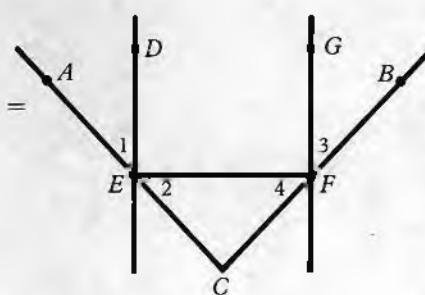


- ¿Qué clase de triángulo es $\triangle ADF$?
- ¿Puede usarse aquí el teorema de Pitágoras?
- Para encontrar AF , ¿qué lado de $\triangle ADF$ es necesario encontrar?
- ¿Qué se sabe acerca de DF ?

Dado: $m\angle BAD = m\angle DCB = 90^\circ$,
 $\overline{AE} \perp \overline{BD}$, $\overline{FC} \perp \overline{BD}$,
 $AB = CD = 9$, $AD = BC = 12$.
Encuéntrese: EF .

3. Supóngase que $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$. ¿Cuál debe ser la medida de $\angle C$ para que $\overline{DE} \parallel \overline{GF}$?

- Supóngase que $\overline{DE} \parallel \overline{GF}$. Entonces, $m\angle DEF + m\angle GFE = 180^\circ$.
- Sea $m\angle 1 = m\angle 2 = x$, y $m\angle 3 = m\angle 4 = y$. Encuéntrese una expresión para $m\angle 2 + m\angle 4$ y después para $m\angle C$.
- Inviértase el orden de este razonamiento para probar que la respuesta asegura que $\overline{DE} \parallel \overline{GF}$.



CAPITULO

10

- 10.1 Definiciones básicas** 342
- 10.2 La medición en grados de los arcos** 346
- 10.3 Cuerdas y distancias desde el centro** 350
- 10.4 Perpendiculares a las cuerdas** 354
- 10.5 Tangentes a los círculos** 360
- 10.6 Tangentes desde un punto a un círculo** 364
- 10.7 Medidas de ángulos inscritos** 368
- 10.8 Ángulos formados por cuerdas** 374
- 10.9 Ángulos y segmentos formados por tangentes y secantes** 378

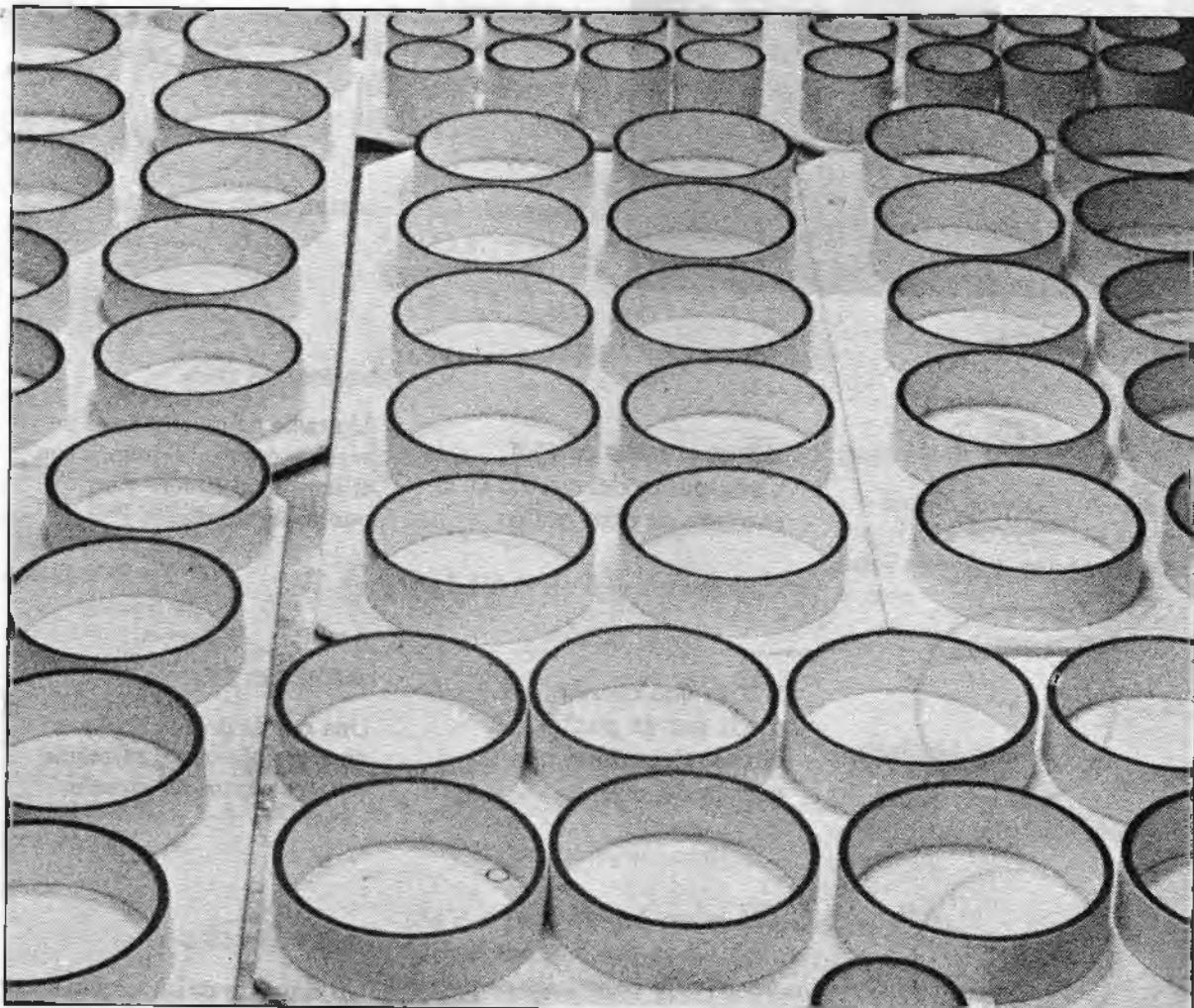
Conceptos importantes 386 *Resumen* 387 *Examen* 388

Resumen global (Caps. 8 a 10) 389

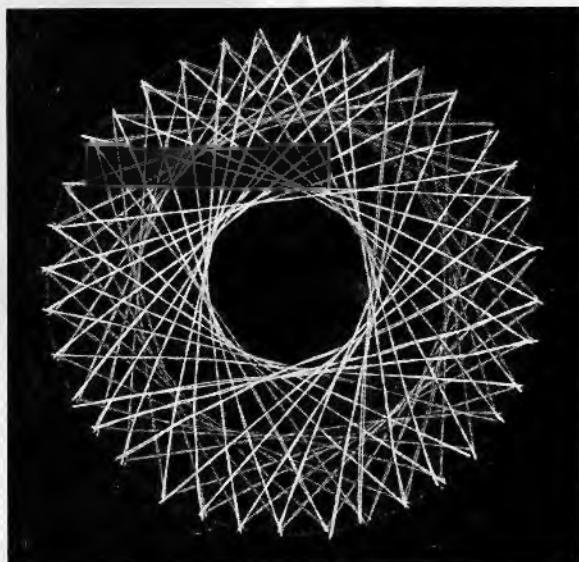
La geometría en nuestro mundo

Agrimensura: el teodolito 390

Círculos

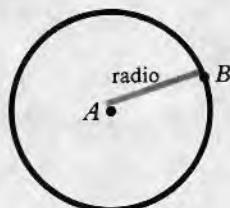


10.1 Definiciones básicas



Recuérdese que un círculo es un conjunto de puntos en un plano que están situados a la misma distancia de un punto fijo.

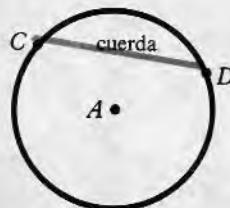
En esta sección se definirán términos relacionados con los círculos.



\overline{AB} es el *radio* de $\odot A$.
Cada punto del círculo es el extremo de otro radio.

Definición 10.1

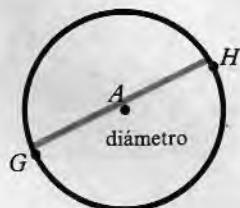
Un **radio** de un círculo es un segmento cuyos extremos son el centro del círculo y un punto del círculo.



\overline{CD} es una *cuerda* $\odot A$.
Cada par de puntos del círculo determina una cuerda del círculo.

Definición 10.2

Una **cuerda** de un círculo es un segmento cuyos extremos son dos puntos del círculo.

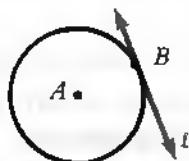


\overline{GH} es un *diámetro* de $\odot A$. Cada par de puntos del círculo colineales con A determinan un diámetro del círculo.

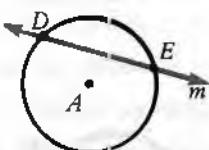
Definición 10.3

Un **diámetro** de un círculo es una cuerda que contiene el centro del círculo.

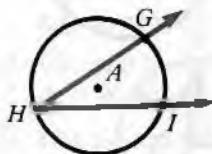
Cuerdas, radios y diámetros son segmentos relacionados con los círculos. Las definiciones siguientes describen algunas rectas y ángulos también relacionados con los círculos.



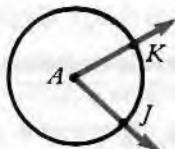
La recta ℓ sólo tiene a B como punto común con $\odot A$.



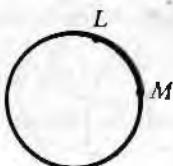
La recta m tiene dos puntos en común con $\odot A$.



El vértice de $\angle GHI$ está en $\odot A$. Los lados de $\angle GHI$ intersecan a $\odot A$ en los puntos G e I .



El vértice de $\angle KAJ$ es el centro de $\odot A$.



La recta ℓ es *tangente* a $\odot A$. El punto B es el *punto de tangencia*.

La recta m es una *secante* de $\odot A$.

$\angle GHI$ es un *ángulo inscrito*.

$\angle KAJ$ es un *ángulo central*.

Se define un *arco* como una parte continua de un círculo. Se escribe \overarc{LM} para representar al *arco LM*. Un *arco interceptado* es un arco con extremos en los lados de ángulos inscritos o centrales.

Definición 10.4

Una **tangente** a un círculo es una recta que interseca al círculo exactamente en un punto.

Definición 10.5

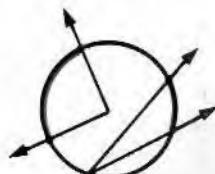
Una **secante** de un círculo es una recta que interseca al círculo exactamente en dos puntos.

Definición 10.6

Un **ángulo inscrito** es un ángulo con vértice en el círculo y con lados que contienen cuerdas del círculo.

Definición 10.7

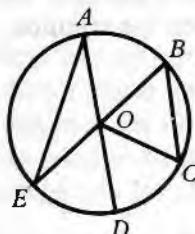
Un **ángulo central** es un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo.



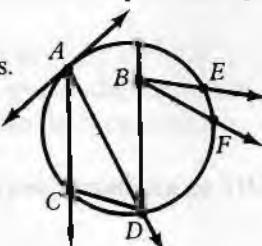
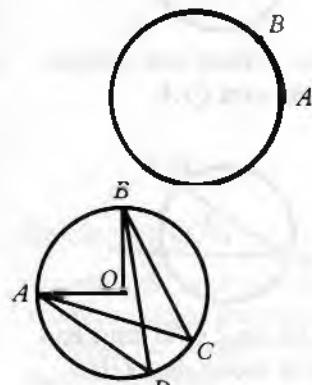
EJERCICIOS

A.

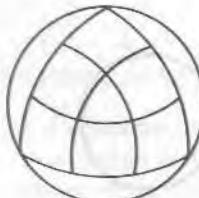
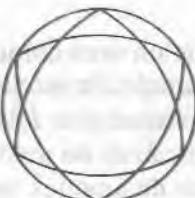
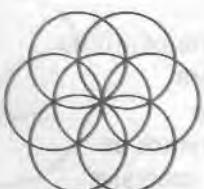
1. Cítense todas las cuerdas de la figura.
2. Cítense los diámetros de la figura.
3. Cítense por lo menos cuatro arcos de la figura.
4. Cítense todos los radios de la figura.
5. Dibújese un círculo con centro T . Trácese una recta tangente al círculo en el punto B . Trácese una recta secante que interseque al círculo en los puntos F y G .
6. Dibújense un círculo y un ángulo inscrito. Si el arco interceptado por ese ángulo es \widehat{PQ} , localícese en el círculo.
7. Dibújense un círculo y un ángulo central. Si el arco interceptado por ese ángulo es \widehat{XY} , localícese en el círculo.
8. Dibújese un círculo y localícese un arco según se muestra en la figura. Después, dibújese un ángulo inscrito que intercepte a \widehat{AB} .
9. Dibújese un círculo y denomíñese \widehat{CD} a un arco. Dibújense dos ángulos inscritos diferentes, ambos con el arco interceptado \widehat{CD} .
10. Cítense todos los ángulos con el arco interceptado \widehat{AB} y con el arco interceptado \widehat{CD} .
11. Cítense todos los ángulos inscritos.



(Ejercicios 1-4)

**ACTIVIDADES**

Con un compás, dibújense ejemplos en grande de cada uno de los diseños de «técnica de compás» que se ilustran a continuación. Elabórense diseños originales y coloréense de manera interesante.



12. Citense todos los ángulos que tengan al menos un lado en una tangente.

13. Citense todos los ángulos centrales.

B.

Para los ejercicios 14 a 16, dibújese un círculo A.

14. Trácese un segmento que tenga un extremo en el círculo pero que no sea una cuerda.

15. Trácese un segmento que esté por completo dentro del círculo pero que no sea una cuerda.

16. Trácese un segmento que interseque al círculo en dos puntos y contenga al centro, pero que no sea un radio, un diámetro o una cuerda.

Para los ejercicios 17 a 19, dibújese un círculo B.

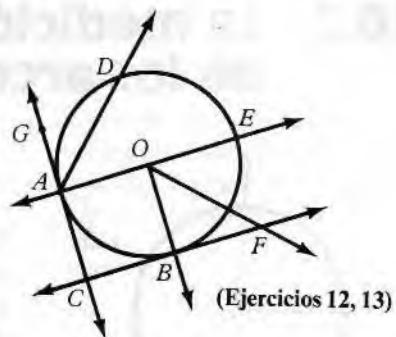
17. Trácese un recta que no sea ni secante ni tangente.

18. Dibújese un ángulo que tenga su vértice en el círculo y que interseque al círculo pero que no sea un ángulo inscrito.

19. Trácese un ángulo con dos lados intersecando al círculo y cuyo vértice no esté fuera del círculo, pero que no sea un ángulo central ni un ángulo inscrito.

20. Un asidero de 0.41 cm de diámetro se reduce a un diámetro de 0.34 cm. ¿Cuál fue la profundidad del corte?

21. Los aviones del vuelo Nueva York-París suelen volar sobre Irlanda. ¿Por qué se eligió esta ruta? (Sugerencia: Empléese un globo terráqueo y una regla flexible.)



(Ejercicios 12, 13)



profundidad del corte

SOLUCION DE PROBLEMAS

Este polígono con forma de estrella puede construirse de varias maneras:

- marcando cinco puntos igualmente espaciados en un círculo.
(Puede emplearse un transportador.)
- empezando en un punto S y uniendo cada dos puntos a medida que se recorre el círculo en la dirección en que giran las manecillas del reloj.

A éste último se le llama polígono de estrella $\left\{ \frac{5}{2} \right\}$.

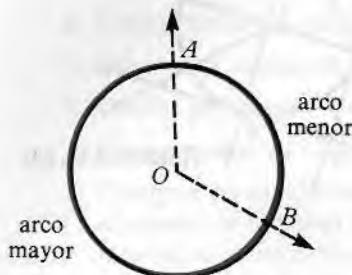
1. ¿Pueden construirse los polígonos de estrella

$$\left\{ \frac{7}{2} \right\}, \left\{ \frac{7}{3} \right\}, \left\{ \frac{8}{3} \right\}, \left\{ \frac{9}{2} \right\}, \text{ y } \left\{ \frac{9}{4} \right\}?$$

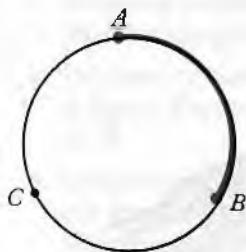
2. ¿Qué puede decirse acerca de los polígonos de estrella $\left\{ \frac{7}{5} \right\}, \left\{ \frac{7}{4} \right\}, \left\{ \frac{8}{5} \right\}$, etc.?



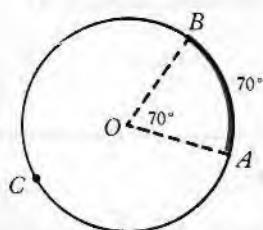
10.2 La medición en grados de los arcos



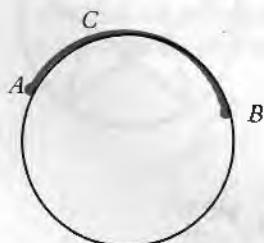
Cuando se eligen dos puntos en un círculo (que no sean extremos de un diámetro), se determinan dos arcos. A uno se le llama *arco mayor*, y al otro, *arco menor*.



\widehat{AB} simboliza siempre al arco menor determinado por los puntos *A* y *B*. Para simbolizar al arco mayor, se marca un tercer punto. \widehat{ACB} simboliza al arco mayor determinado por *A* y *B*.



La medida de un arco se determina por la medida de un ángulo central. Por ejemplo, $m\widehat{AB} = m\angle AOB = 70$ y $m\widehat{ACB} = 360 - 70 = 290$.



El punto *C* está sobre el arco *AB*. Dos arcos, \widehat{AC} y \widehat{CB} , se suman para formar el arco *AB*.

Definición 10.8

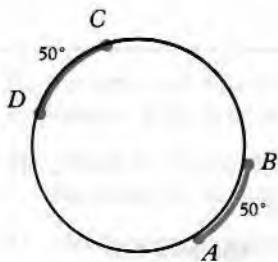
Un **arco menor** es un arco que está en el interior de un ángulo central, de lo contrario se denomina **arco mayor**.

Definición 10.9

La **medida de un arco menor** es la medida de su ángulo central asociado. La **medida de un arco mayor** es 360, menos la medida del arco menor asociado.

Postulado de la suma de arcos

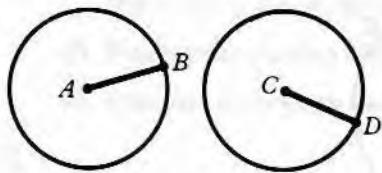
Si *C* está en \widehat{AB} , entonces $m\widehat{AC} + m\widehat{CB} = m\widehat{AB}$.



Los arcos DC y BA de este círculo miden 50° cada uno, y se dice que los *arcos son congruentes*.

Definición 10.10

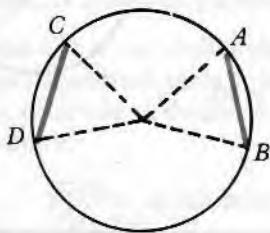
Si dos **arcos** de un círculo tienen la misma medida, se dice que son **congruentes**. Si \overarc{AB} y \overarc{CD} son congruentes, se escribe $\overarc{AB} \cong \overarc{CD}$.



El radio AB tiene la misma longitud que el radio CD . Los círculos determinados por estos radios son congruentes.

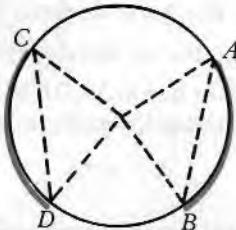
Obsérvese en las dos figuras siguientes la relación existente entre cuerdas congruentes y sus arcos.

Dadas las cuerdas congruentes $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



¿Es $\overarc{AB} \cong \overarc{CD}$?
¿Por qué?

Dados los arcos congruentes $\overarc{AB} \cong \overarc{CD}$.



¿Es $\overline{AB} \cong \overline{CD}$?
¿Por qué?

Estas figuras sugieren los teoremas siguientes.

Teorema 10.1

En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes tienen arcos menores congruentes.

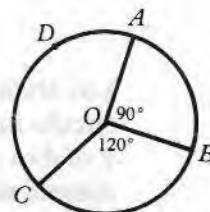
Teorema 10.2

En un círculo, o en círculos congruentes, los arcos menores congruentes tienen cuerdas congruentes.

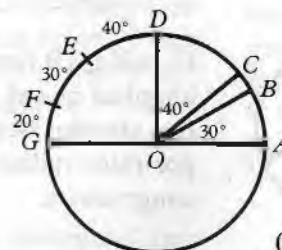
EJERCICIOS

A.

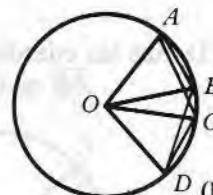
1. ¿Está el punto D en \widehat{BAC} ?
¿Está D en \widehat{AB} ?
2. Cítense tres arcos menores. Cítense tres arcos mayores. Cítense tres ángulos centrales.
3. Encuéntrense las siguientes medidas en grados.
 - a. $m\widehat{AB}$.
 - b. $m\widehat{AC}$.
 - c. $m\widehat{BCA}$.
 - d. $m\angle ABC$.
4. Encuéntrense las siguientes medidas en grados.
 - a. $m\widehat{AB}$.
 - b. $m\angle BOC$.
 - c. $m\widehat{BD}$.
 - d. $m\angle COG$.
5. Encuéntrense las siguientes medidas en grados.
 - a. $m\widehat{DF}$.
 - b. $m\widehat{EG}$.
 - c. $m\widehat{ECG}$.
6. Cítense todos los arcos menores que contengan al punto C .
7. Cítense tres pares de arcos menores congruentes.
8. Cítese un par de arcos mayores congruentes.
9. Supóngase que $m\angle AOB = 40$, $m\angle BOC = 20$ y $m\angle COD = 40$. Cítense todos los pares de cuerdas congruentes.



(Ejercicios 1-3)



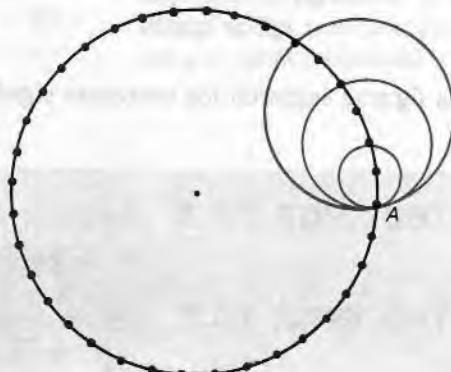
(Ejercicios 4-8)



(Ejercicio 9)

ACTIVIDADES

1. Dibújese un círculo con radio de 4 cm e indíquese un punto A en el círculo.
2. Con un transportador, márquense puntos cada 10° alrededor del círculo, empezando en A .
3. Cada uno de esos puntos es el centro de un círculo que pasa por A . Dibújense los círculos. (Ya se dibujaron 3 de ellos.)
4. Adivínese cuál será la forma de la figura resultante.



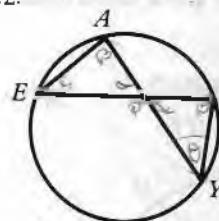
B.

En los ejercicios 10 a 12, háganse dibujos precisos y respóndase a las preguntas.

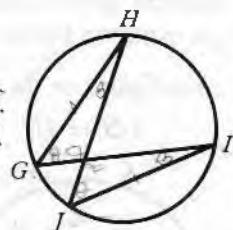
10. ¿Tiene la cuerda de un arco de 90° de un círculo doble longitud que la cuerda correspondiente a un arco de 45° ?
11. ¿Se duplica la medida del ángulo central si se duplica la medida de un arco menor?
12. Supóngase que en el círculo O , \overline{OA} y \overline{OB} son radios y $OA = OB = AB$. ¿Cuál es la medida de $\angle AOB$?
13. Pruébese el teorema 10.1.
14. Pruébese el teorema 10.2.

C.

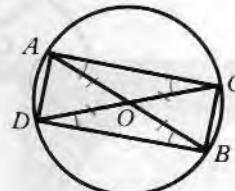
15. Dado: $ES = AY$.
Pruébese: $EA = SY$.



16. Dado: $\widehat{HG} \cong \widehat{JI}$.
Pruébese: $HJ = GI$.

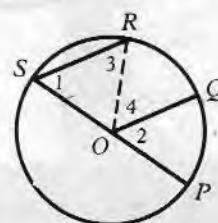


17. Dado: \overline{AB} y \overline{CD} son diámetros.
Pruébese: $ACBD$ es un paralelogramo.



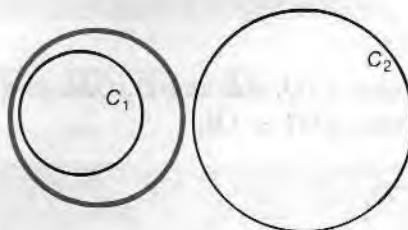
18. Pruébese que si los vértices de un triángulo equilátero están sobre un círculo, el círculo se divide en tres arcos congruentes.

19. Dado: \overline{POS} es un diámetro de $\odot O$
 $\overline{SR} \parallel \overline{OQ}$.
Pruébese: $\widehat{RQ} \cong \widehat{QP}$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

1. Dibújense los círculos C_1 y C_2 , de diferente tamaño.
2. ¿Cuántos círculos hay con centros colineales que toquen a los círculos dados exactamente en un punto? (Se ha dibujado uno de ellos.)
3. Dibújense estos dos círculos. (Primero constrúyanse los centros de los círculos. No es necesario hacer conjeturas.)



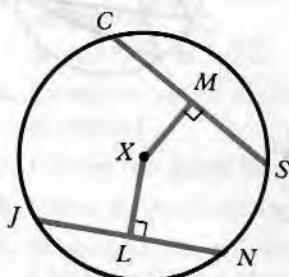
10.3 Cuerdas y distancias desde el centro

La fotografía muestra una broca de un taladro eléctrico cuya cabeza tiene tres superficies planas. Una característica necesaria de este diseño es que las tres superficies planas estén a igual distancia del eje de rotación para asegurar que la broca se deslice con suavidad.

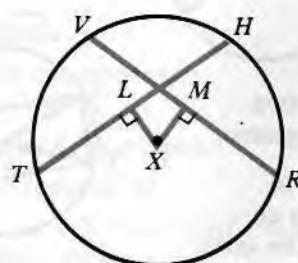
El teorema de esta sección describe un método para determinar que se satisfaga esta condición.

En cada figura se da un par de cuerdas congruentes.

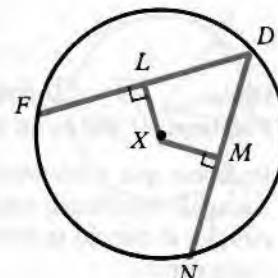
$$CS = JN$$



$$VR = TH$$



$$FD = DN$$



¿Es $XL = XM$ en cada caso?

Estos ejemplos sugieren el teorema siguiente.

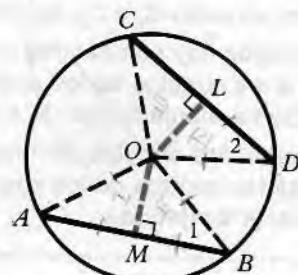
Teorema 10.3

En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes equidistan del centro.

PRUEBA

Dado: $\odot O$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{OL} \perp \overline{CD}$.

Pruébese: $OM = OL$.

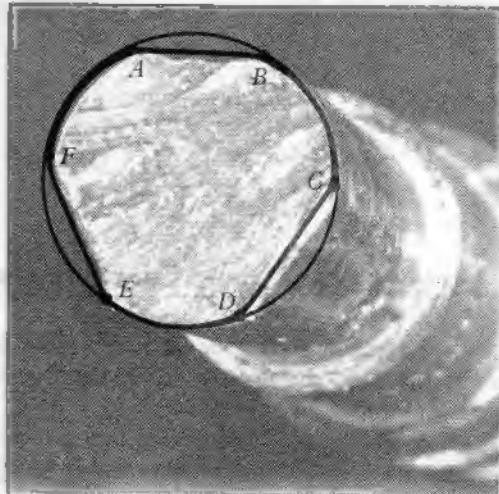


Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	1. Dado.
2. $OA = OB = OC = OD$.	2. Definición de círculo.
3. $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$.	3. Definición de segmentos congruentes.
4. $\triangle AOB \cong \triangle COD$.	4. Congruencia LLL.
5. $\angle 1 \cong \angle 2$.	5. PCTCC.
6. $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{OL} \perp \overline{CD}$.	6. Dado.
7. $\angle OMB \cong \angle OLD$, $\angle OMB$ y $\angle OLD$ son ángulos rectos.	7. Las rectas perpendiculares forman ángulos rectos congruentes.
8. $\triangle OMB$ y $\triangle OLD$ son triángulos rectángulos.	8. Definición de triángulo rectángulo.
9. $\triangle OMB \cong \triangle OLD$.	9. Congruencia de la hipotenusa y el ángulo.
10. $\overline{OM} \cong \overline{OL}$.	10. PCTCC.
11. $OM = OL$.	11. Definición de segmentos congruentes.

APLICACION

La broca de la fotografía debe estar equilibrada para que funcione con suavidad. ¿Cómo debe construirse la cabeza de la broca para que esté equilibrada?

Si los segmentos \overline{AB} , \overline{CD} y \overline{EF} son congruentes, entonces, por el teorema 10.3, equidistan del centro del círculo que contiene a los arcos \widehat{AB} , \widehat{CD} y \widehat{EF} . Esto asegura el equilibrado de la broca.



La recíproca del teorema 10.3 también es importante y se presenta a continuación.

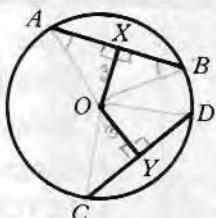
Teorema 10.4

En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

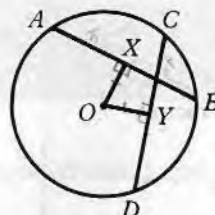
EJERCICIOS

A.

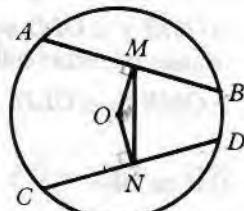
- 1. Dado:** $\overline{AB} = \overline{CD}$
 $\overline{OX} \perp \overline{AB}$, $\overline{OY} \perp \overline{CD}$
 $OX = 3$.

Encuéntrese: OY .

- 2. Dado:** $OX = OY$
 $\overline{OX} \perp \overline{AB}$, $\overline{OY} \perp \overline{CD}$
 $AB = 10$.

Encuéntrese: CD .

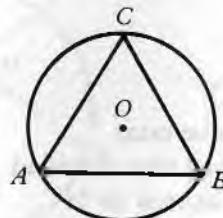
- 3. Dado:** $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{CD}$
 $AB = CD$
 $m\angle MON = 150$.

Encuéntrese: $m\angle OMN$ (Sugerencia: ¿Es $OM = ON$?).

- 4. Dado:** $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{CD}$
 $AB = CD$
 $m\angle NMB = 70$.

Encuéntrese: $m\angle MON$.

- 5. Dado:** \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CA} equidistan del centro O .
Pruébese: $\triangle ABC$ es equilátero.



(Ejercicios 3, 4)

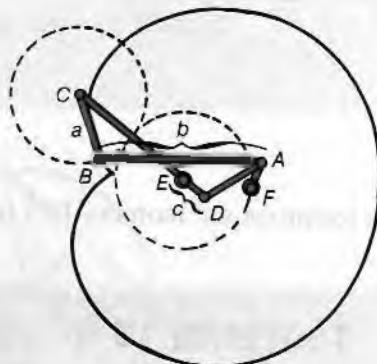
ACTIVIDADES

La trayectoria descrita por un punto B de un círculo que rueda alrededor de un círculo fijo del mismo radio es una curva denominada *cardioide*.

Una cardioide también puede dibujarse con un varillaje articulado como el que se muestra en la figura.

Siganse estas instrucciones y dibújese una cardioide.

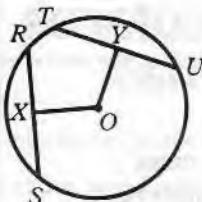
- Constrúyase un varillaje articulado con cartulina como el que se muestra en la figura. Obsérvese que $BC = AD = a$, $AB = CD = b$, $DE = AF = c$ y $a^2 = bc$. (Sugerencia: Sea $a = 6$ cm, $b = 32$ cm y $c = 8$ cm.)
- Fíjese el varillaje a una superficie dura y plana en los puntos E y F .
- Colóquese un lápiz en B y dibújese la cardioide.



B.

- 6. Dado:** $OX = OY$
 $\overline{OX} \perp \overline{RS}$, $\overline{OY} \perp \overline{TU}$.

Pruébese: $m\widehat{RS} = m\widehat{TU}$.



- 7. Dado:** En el círculo O , $\overline{OX} \perp \overline{AB}$,
 $\overline{OY} \perp \overline{CD}$

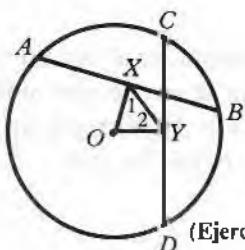
$$m\angle 1 = m\angle 2.$$

Pruébese: $AB = CD$.

- 8. Dado:** En el círculo O , $\overline{OX} \perp \overline{AB}$,
 $\overline{OY} \perp \overline{CD}$

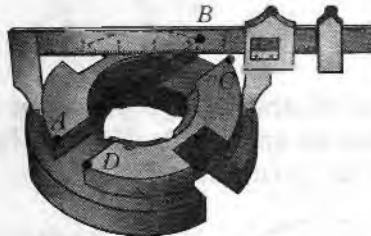
$$CD = AB.$$

Pruébese: $m\angle 1 = m\angle 2$.



(Ejercicios 7, 8)

- 9.** Con frecuencia, piezas de máquinas como la que se muestra sólo funcionarán adecuadamente si las ranuras están «centradas». ¿Por qué al medir \overline{AB} y \overline{CD} se sabe si las ranuras están centradas o no?



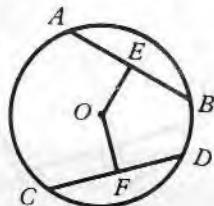
C.

- 10.** Este ejercicio presenta una prueba del teorema 10.4.

- Dado:** Círculo O , $OE = OF$
 $\overline{OE} \perp \overline{AB}$, $\overline{OF} \perp \overline{CD}$.

Pruébese: $AB = CD$.

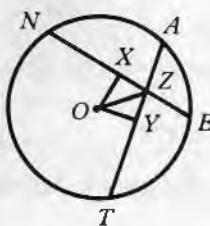
(Sugerencia: Trácense radios y empleéense triángulos congruentes.)



- 11. Dado:** En el círculo O , $\overline{OX} \perp \overline{NE}$,
 $\overline{OY} \perp \overline{AT}$

$$\angle XZO \cong \angle YZO.$$

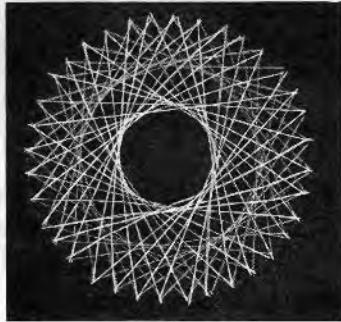
Pruébese: $NE = AT$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

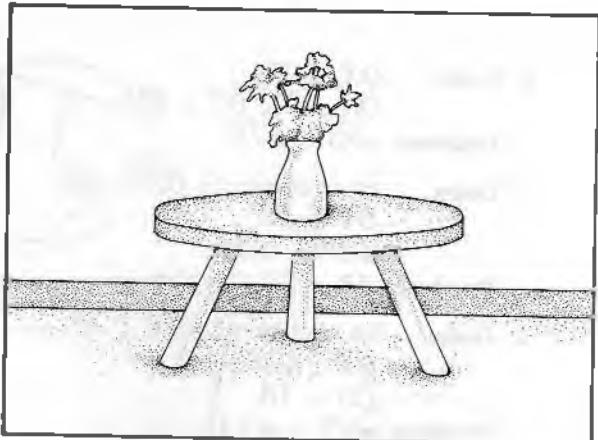
La región central de este hilorama parece circular.

Explíquese por qué es así. Esto es, explíquese por qué los puntos medios de los segmentos que conforman los bordes de la región central equidistan de un punto central imaginario. (Puede asumirse que los clavos de los extremos de cada cuerda están igualmente espaciados alrededor de un círculo.)

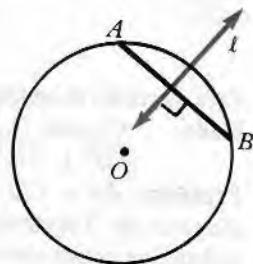
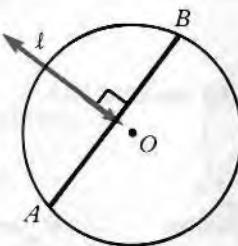
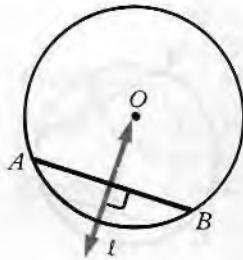


10.4 Perpendiculares a las cuerdas

Para encontrar el centro de una mesa redonda se puede usar una escuadra de carpintero. El teorema de esta sección explica cómo hacerlo.



Estas figuras ilustran una propiedad de las bisectrices perpendiculares de una cuerda. En cada figura, ℓ es la bisectriz perpendicular de la cuerda \overline{AB} .



¿Pasa la recta ℓ por el punto O ?

Estas tres figuras sugieren el siguiente teorema.

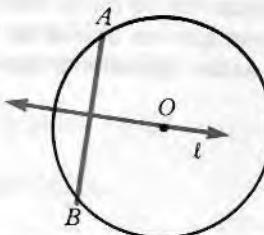
Teorema 10.5

La bisectriz perpendicular de una cuerda contiene al centro del círculo.

PRUEBA

Dado: \overline{AB} es una cuerda del círculo O y ℓ es la bisectriz perpendicular de \overline{AB} .

Pruébese: O es un punto de ℓ .



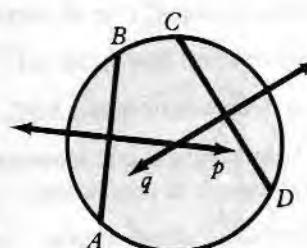
Afirmaciones	Razones
1. ℓ es la bisectriz perpendicular de \overline{AB} .	1. Dado.
2. $OA = OB$.	2. Definición de círculo.
3. O está en ℓ .	3. Un punto equidistante de los puntos A y B pertenece a la bisectriz perpendicular de \overline{AB} . (Teorema 6.10.)

APLICACION

Encuéntrese el centro de una mesa redonda.

Paso 1 Selecciónense dos cuerdas cualesquiera \overline{AB} y \overline{CD} .

Paso 2 Trácese la bisectriz perpendicular p de \overline{AB} y la bisectriz perpendicular q de \overline{CD} .



Conclusión: Por el teorema 10.5, se concluye que el centro está en ambas rectas, p y q . En consecuencia, el centro de la mesa debe ser la intersección de estas dos rectas.

A continuación se presentan otros dos teoremas importantes.

Teorema 10.6

Si una recta que pasa por el centro de un círculo es perpendicular a una cuerda que no es un diámetro, entonces biseca a la cuerda y a su arco menor.

Teorema 10.7

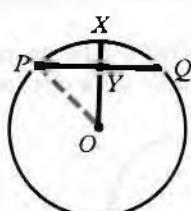
Si una recta que pasa por el centro de un círculo biseca a una cuerda que no es un diámetro, entonces es perpendicular a la cuerda.

El teorema 10.6 puede emplearse para encontrar información sobre círculos.

Ejemplo Dado: $\odot O$ de radio 4 pulgadas.
 $\overline{OX} \perp \overline{PQ}$. La cuerda \overline{PQ} está a 1 pulgada de O .

Encuéntrese: PQ .

La información dada dice que $OP = 4$ (¿Por qué?), y que $OY = 1$ (¿Por qué?). Al aplicar el teorema de Pitágoras a $\triangle OPY$, puede determinarse que $PY = \sqrt{15}$. El teorema 10.6 indica que \overline{OX} biseca a \overline{PQ} . Por tanto, $PQ = 2\sqrt{15}$.



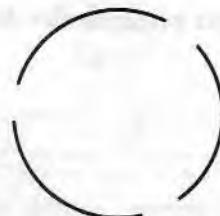
EJERCICIOS

A.



1. Trácese la figura de la derecha.

Encuéntrese el centro de los arcos y compleítense el círculo.



2. Con un compás y una regla, trácese una figura que ilustre los teoremas 10.6 y 10.7.

En la figura de los ejercicios 3 y 4, O es el centro del círculo.

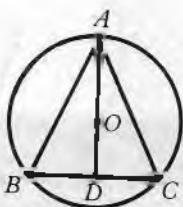
3. Si $\overline{OC} \perp \overline{AB}$, ¿qué relación hay entre $m\widehat{AC}$ y $m\widehat{CB}$?

4. Si $AD = 3$ y $BD = 3$, encuéntrese $m\angle BDC$.

En los ejercicios 5 a 7, determinése qué teorema (10.5, 10.6 ó 10.7) se empleó para llegar a la conclusión.

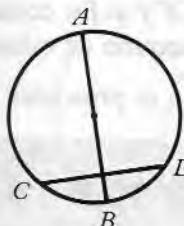
5. Dado: $\odot O$ con \overline{AOB} como altura de $\triangle ABC$.

Conclusión: \overline{AD} biseca a \overline{BC} .



6. Dado: El diámetro \overline{AB} biseca a \overline{CD} .

Conclusión: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

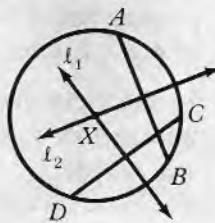


7. Dado: ℓ_1 es la bisectriz perpendicular de \overline{CD} .

ℓ_2 es la bisectriz perpendicular de \overline{AB} .

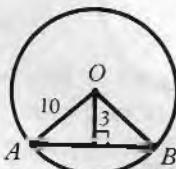
ℓ_1 y ℓ_2 se intersecan en X .

Conclusión: X es el centro del círculo.



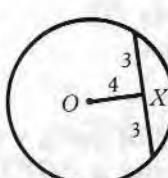
En los ejercicios 8 a 10, encuéntrese la información que falta.
 O es el centro de cada círculo.

8.



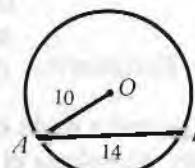
$$AB = ?$$

9.



¿Cuál es la longitud del radio?

10.



¿A qué distancia del centro está \overline{AB} ?

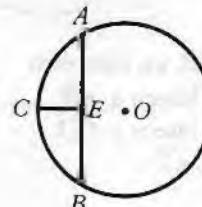
B.

11. En un círculo de radio 5 cm, \overline{AB} es una cuerda que mide 8 cm. ¿Qué distancia hay entre \overline{AB} y el centro del círculo? (Hágase un bosquejo para ayudar a la solución del problema.)

12. Dado: C es el punto medio de \overline{AB}
 $\overline{CE} \perp \overline{AB}$.

$CE = 2$ pulgadas, $AB = 16$ pulgadas.

Encuéntrese: La longitud de un radio del círculo.

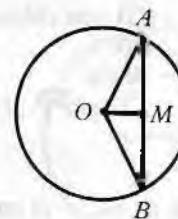


13. Dado: $AM = MB = 6$ cm
 $AO = 10$ cm.

Encuéntrese: OM .

14. Dado: $\overline{OM} \perp \overline{AB}$
 $OM = 5$, $AO = 13$.

Encuéntrese: AB .



(Ejercicios 13-15)

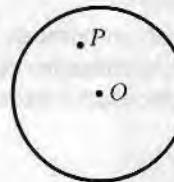
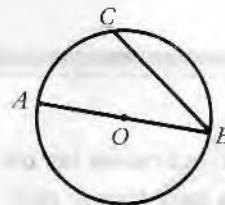
15. Dado: M es el punto medio de \overline{AB}
 $OM = MB$
 $OB = \sqrt{2}$.

Encuéntrese: AB .

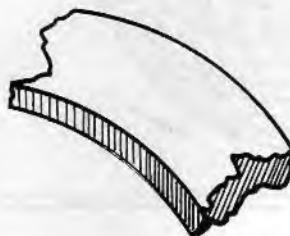
16. Dos cuerdas de un círculo tienen la misma longitud. La distancia entre cada una de ellas y el centro se representa por x^2 y $4x$, respectivamente. ¿Qué distancia hay entre cada cuerda y el centro?

17. Dado: Un círculo con $AB = 8$ pies
y $m\angle ABC = 45$.

Encuéntrese: La distancia entre O y \overline{BC} .



18. Dibújese un círculo O y márquese un punto P dentro del círculo. Con un compás y una regla, trácese una cuerda a la que biseque P .

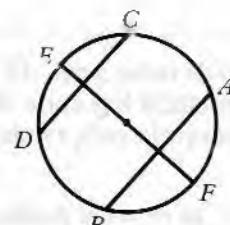


19. En una excavación, un arqueólogo encontró un trozo de rueda. Esta rueda puede reconstruirse determinando su radio original. Explíquese cómo puede realizarse esto.

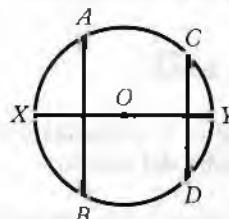


C.

- 20. Dado:** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
Pruébese: \overline{EF} es la bisectriz perpendicular de \overline{AB} .
 \overline{EF} biseca a \overline{CD} .

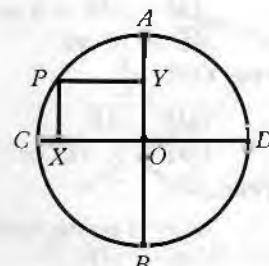


- 21. Dado:** \overline{XY} es un diámetro
Pruébese: \overline{XY} biseca a \overline{AB} ,
 \overline{XY} biseca a \overline{CD} ,
 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



- 22. Dado:** \overline{AB} y \overline{CD} son diámetros
 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$
 $AO = 10$ cm
 $\overline{PX} \perp \overline{CD}$ y $\overline{PY} \perp \overline{AB}$.

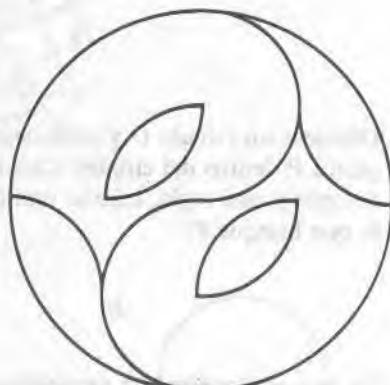
Encuéntrese: XY



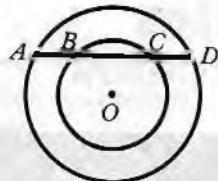
- 23. Un círculo** O tiene de radio 10 cm. Las cuerdas \overline{AB} y \overline{CD} son perpendiculares y se intersecan en un punto F del interior del círculo. Si $AB = 16$ y $CD = 18$, encuéntrese DF .

ACTIVIDADES

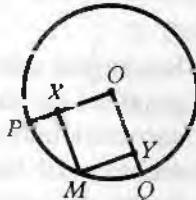
- Dibújese esta figura y recórtense las piezas.
- Calóquense las piezas para formar dos regiones ovoides y sin un centro.
- Dibújese el rompecabezas con un compás.
 (Se necesitará determinar cuidadosamente el centro de cada arco. No es necesario hacer conjeturas.)



- 24. Dado:** Dos círculos con centro O .
 A, B, C y D son colineales.
Pruébese: $AB = CD$.



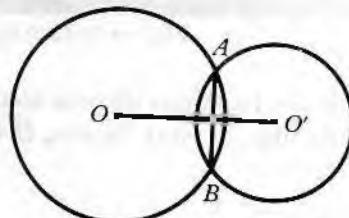
- 25. Dado:** $m\widehat{PM} = m\widehat{MQ}$
 $\overline{XM} \perp \overline{OP}$
 $\overline{YM} \perp \overline{OQ}$



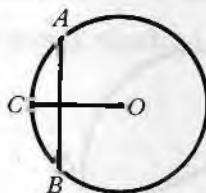
Pruébese: $XM = YM$.

(Sugerencia: Trácese \overline{OM} y empleéense triángulos congruentes.)

- 26. Dado:** \overline{AB} es una cuerda común a los círculos O y O' .
Pruébese: $\overline{OO'}$ es la bisectriz perpendicular de \overline{AB} .



- 27. Dado:** \overline{OC} biseca a \widehat{ACB} .
Pruébese: \overline{OC} biseca a \overline{AB} .

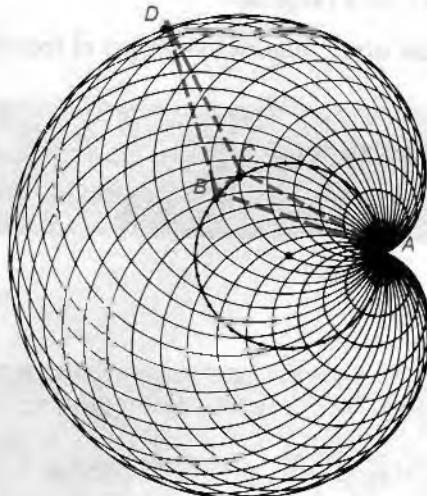


SOLUCION DE PROBLEMAS

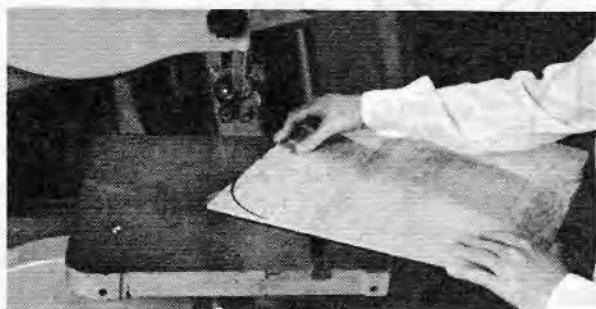
Usando el método descrito en las actividades de la página 348, se dibujó una cardioida.

Los puntos b y c son centros de los círculos que pasan por A y se encuentran de nuevo en el punto D .

¿Por qué son congruentes $\triangle ABC$ y $\triangle DBC$?



10.5 Tangentes a los círculos

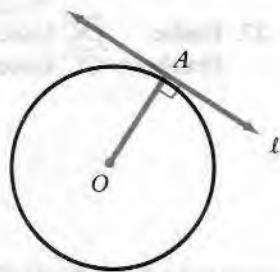
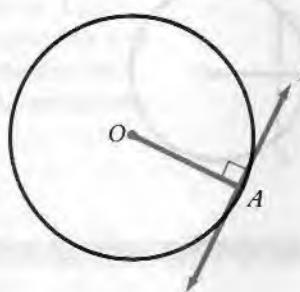
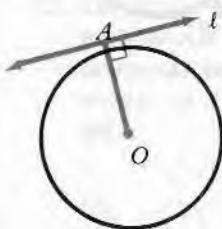


REPASO: Una recta es tangente a un círculo si lo interseca exactamente en un punto.

Supóngase que se desean redondear las esquinas de un pieza de madera para construir una mesa pequeña. Para que el trabajo esté bien hecho, debe encontrarse la forma de trazar un arco. Los bordes de la tabla deben ser tangentes al arco circular. ¿Cómo puede trazarse este arco?

Uno de los teoremas de esta sección ayuda a resolver el problema.

En cada una de estas figuras, \overline{OA} es un radio y ℓ es perpendicular a \overline{OA} en A .



¿Es ℓ una tangente?

Estas observaciones sugieren el teorema siguiente.

Teorema 10.8

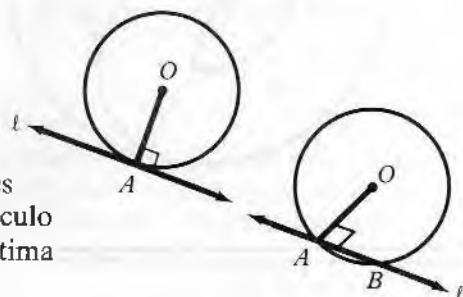
Si una recta es perpendicular a un radio en un punto del círculo, entonces la recta es tangente al círculo.

PRUEBA

Dado: $\ell \perp \overline{OA}$.

Pruébese: ℓ es tangente al círculo.

Plan: Hágase una prueba indirecta. Supóngase que ℓ no es tangente al círculo. Esto significa que ℓ no interseca al círculo o que lo interseca en dos puntos. Ahora se analizará la última suposición.

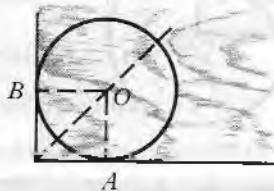


Afirmaciones	Razones
1. ℓ interseca al círculo en un segundo punto B .	1. Suposición de la prueba indirecta.
2. $\overline{OA} \perp \ell$.	2. Dado.
3. \overline{OB} es una hipotenusa de un triángulo rectángulo.	3. Definición de hipotenusa.
4. $OB > OA$.	4. La longitud de la hipotenusa es mayor que la longitud de cualquier lado.
5. $OB = OA$.	5. Definición de círculo.

Las afirmaciones 4 y 5 son contradictorias. Por tanto, la suposición es falsa y la recta ℓ es tangente al círculo.

APLICACION

Ahora ya se puede resolver el problema planteado al principio de esta sección.



Paso 1 Dibújese la bisectriz del ángulo.

Paso 2 Elijase un punto O en la bisectriz y dibújense las perpendiculares \overline{OA} y \overline{OB} a los lados del ángulo.

Paso 3 El punto O de la bisectriz del ángulo es equidistante de los lados de los ángulos. Por tanto, $OA = OB$. Dibújese el círculo con centro O que pase por A y B .

Los bordes de la tabla son tangentes al círculo por el teorema 10.8.

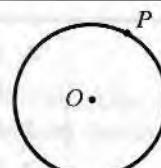
Ahora se presentan otros dos teoremas sobre tangentes.

Teorema 10.9 Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.

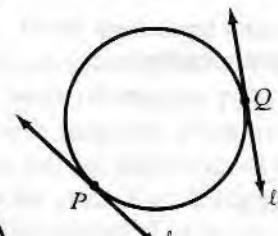
Teorema 10.10 Si una recta es perpendicular a una tangente en un punto del círculo, entonces la recta contiene al centro del círculo.

EJERCICIOS

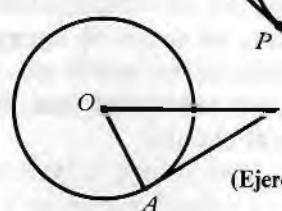
- 1.** Dibújese un círculo O y márquese en él un punto P . Trácese una tangente al círculo a través de P .



- 2.** Trácese la figura siguiente, en la cual ℓ y ℓ' son tangentes en los puntos P y Q , respectivamente. Encuéntrese el centro del círculo. (Sugerencia: Empléese el teorema 10.10.)



- 3.** \overleftrightarrow{AX} es tangente al círculo en A .
 $m\angle AOX = 51$. $m\angle AXO = ?$
- 4.** \overleftrightarrow{AX} es tangente al círculo en A . Si
 $OA = 10$ y $AX = 24$, encuéntrese OX .

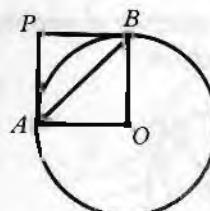


(Ejercicios 3, 4)

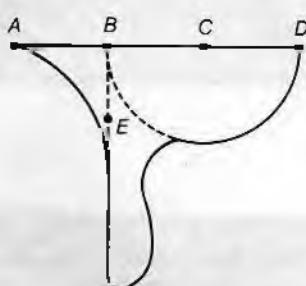
B.

- 5. Dado:** \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes
 \overline{OA} y \overline{OB} son radios de 4 cm
 $\overline{PA} \perp \overline{PB}$.

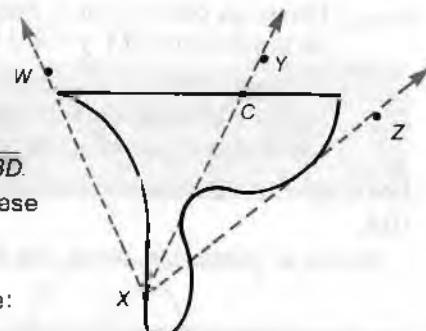
Pruébese: $AOPB$ es un cuadrado.

**ACTIVIDADES**

Dibújese, márquese y recórtense en cartulina una figura como la siguiente, denominada a veces *tomahawk* (hacha de guerra de los indios).



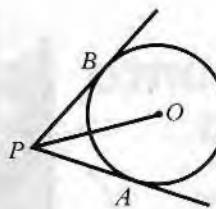
- Trácese \overline{AD} de manera que $AB = BC = CD$.
- Trácese un semicírculo en \overline{BD} .
- Trácese $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ y compleítense la figura como se muestra.
- Colóquese el tomahawk sobre $\angle WXY$ de manera que:
 - X esté sobre \overline{BE} .
 - A esté sobre un rayo del ángulo.
 - El borde semicircular del tomahawk sea tangente al otro borde del ángulo.
- Entonces, \overline{XC} es la trisectriz del ángulo.
 Empléese un tomahawk para trisecar varios ángulos.



$$m\angle YXZ = \frac{1}{3}m\angle WXY$$

- 6. Dado:** \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes
 $\overline{PA} \perp \overline{PB}$
 $OB = 8$.

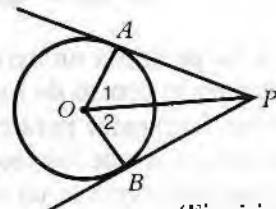
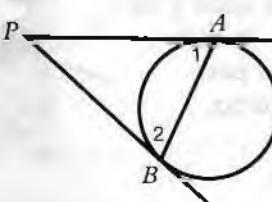
Encuéntrese: OP .



- 7. Dado:** \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes
 \overline{OA} y \overline{OB} son radios.

Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.

- 8. Dado:** \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes.
Pruébese: $m\angle 1 = m\angle 2$.



(Ejercicio 7)

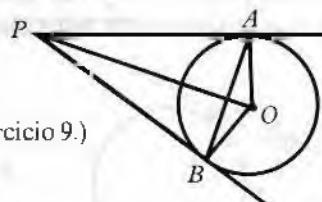
C.

- 9. Dado:** \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes
 \overline{OA} y \overline{OB} son radios.

Pruébese: \overline{OP} es la bisectriz perpendicular de \overline{AB} .

- 10. Dado:** \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes
 \overline{OA} y \overline{OB} son radios
 $m\angle APB = 80$.

Encuéntrese: $m\angle ABO$ (Sugerencia: empleese la conclusión del ejercicio 9.)

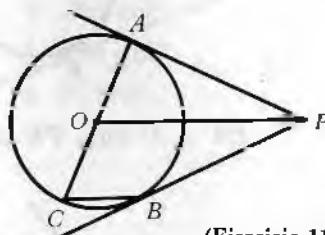


- 11. Dado:** \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes al círculo O
 \overline{AC} es un diámetro.

Pruébese: $\overline{OP} \parallel \overline{BC}$.

- 12. Pruébese el teorema 10.9.**

- 13. Pruébese el teorema 10.10.**

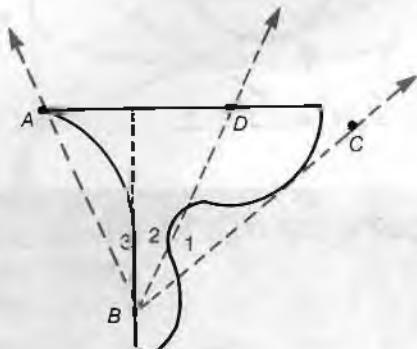


(Ejercicio 11)

(Ejercicios 9, 10)

SOLUCION DE PROBLEMAS

Pruébese que el método *tomahawk* presentado en la actividad anterior sirve para probar que $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son congruentes.

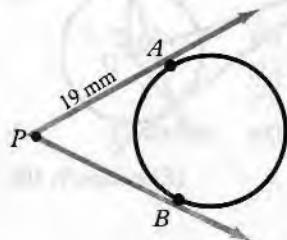


10.6 Tangentes desde un punto a un círculo

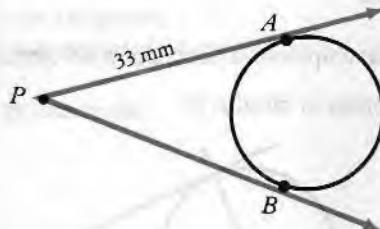
Se le ha pedido a un agrimensor que encuentre el centro de una fuente circular. Pueden emplearse para esto un jalón y un teodolito. Uno de los teoremas de esta sección proporciona un método para encontrar el centro con este equipo.



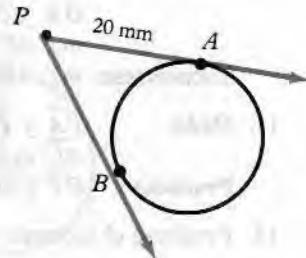
En cada caso, \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PB} son tangentes en A y B . Tómense medidas con regla o transportador para encontrar las longitudes que faltan.



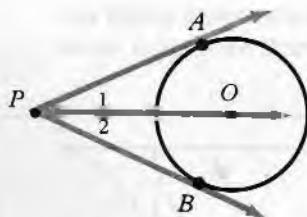
$$PA = 19 \text{ mm}, PB = ?$$



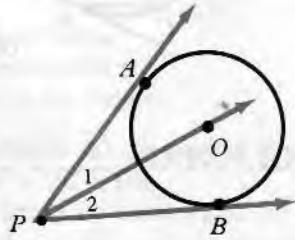
$$PA = 33 \text{ mm}, PB = ?$$



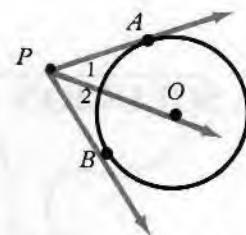
$$PA = 20 \text{ mm}, PB = ?$$



$$m\angle 1 = 24, m\angle 2 = ?$$



$$m\angle 1 = 25, m\angle 2 = ?$$



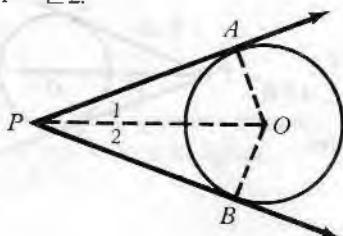
$$m\angle 1 = 38, m\angle 2 = ?$$

Teorema 10.11

Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto.

PRUEBA

Dado: \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PB} son tangentes en A y B .
 Pruébese: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$.



Afirmaciones	Razones
1. Trácese \overrightarrow{PO} y los radios \overline{OA} y \overline{OB} .	1. Construcción.
2. $OA = OB$.	2. Definición de radio.
3. $PO = PO$.	3. ¿Por qué?
4. $\overline{OA} \perp \overrightarrow{PA}$ y $\overline{OB} \perp \overrightarrow{PB}$.	4. ¿Por qué?
5. $\triangle POA \cong \triangle POB$.	5. ¿Por qué?
6. $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.	6. PCTCC.

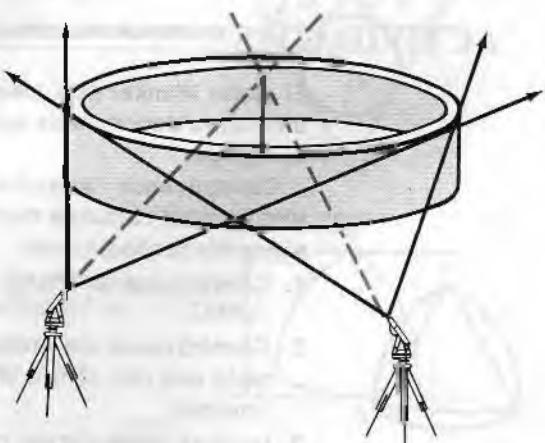
APLICACION

El problema del agrimensor que se introdujo al principio de esta sección puede resolverse con el teorema 10.11 y el hecho de que la bisectriz de un ángulo es única.

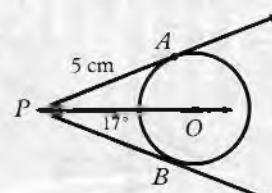
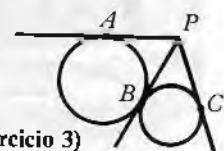
Paso 1 Se colocan dos teodolitos y se determina en cada caso la posición de los rayos tangentes.

Paso 2 Se coloca el telescopio de los dos teodolitos en el lugar de la bisectriz del ángulo formado por las tangentes.

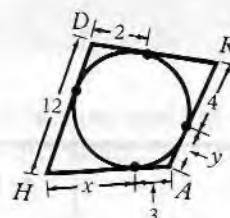
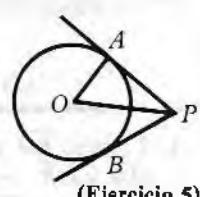
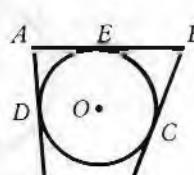
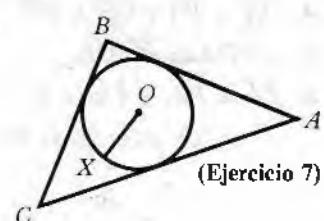
Paso 3 Un jalón situado en la «línea de visión» de ambos telescopios debe estar en el centro del círculo.



NOTA: No es un dibujo a escala

EJERCICIOS**A.****Dado:** \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes $PA = 5 \text{ cm}, m\angle BPO = 17^\circ$.**1. Encuéntrese:** PB . **2. Encuéntrese** $m\angle APB$.**3. Dado:** \overline{PA} , \overline{PB} y \overline{PC} son tangentes $PA = 10 \text{ cm}$.**Encuéntrese:** PC .

(Ejercicio 3)

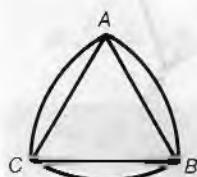
B.**4. Dado:** \overline{HA} , \overline{AR} , \overline{RD} y \overline{DH} son tangentes.**Encuéntrense:** Las longitudes x e y .**5. Dado:** \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes a $\odot O$ $OA = 10$ $m\angle APB = 60^\circ$.**Encuéntrese:** OP .**6. Dado:** \overline{AB} , \overline{AD} y \overline{BC} son tangentes a $\odot O$.**Pruébese:** $AD + BC = AB$.**7. Dado:** El triángulo rectángulo ABC \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} son tangentes $AB = 6$, $BC = 8$ y $AC = 10$.**Encuéntrese:** La longitud del radio OX .

(Ejercicio 7)

ACTIVIDADES

El motor Wankel está diseñado en torno a una curva denominada curva de ancho constante.

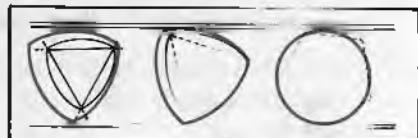
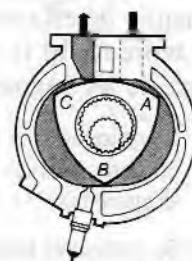
Construyanse varias formas curvas idénticas de cartulina mediante el siguiente procedimiento.



1. Constrúyase un triángulo equilátero $\triangle ABC$.

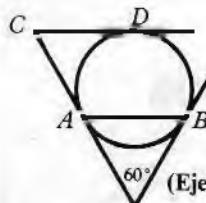
2. Constrúyase los arcos \overarc{AB} , \overarc{AC} y \overarc{BC} , cada uno con centro en el vértice opuesto.

3. Gírense estas curvas como se muestra en el diagrama para demostrar que tienen el mismo ancho.



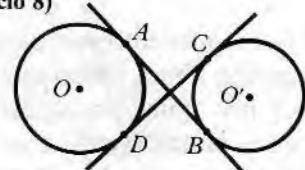
- 8. Dado:** \overline{CP} , \overline{CD} y \overline{PB} son tangentes
 $CD = 4$, $CP = 9$
 $m\angle APB = 60^\circ$.

Encuéntrese: AB .



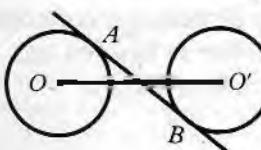
(Ejercicio 8)

- 9. Dado:** \overline{AP} y \overline{CL} son tangentes comunes, como se muestra en la figura.
Pruébese: $AB = CD$.

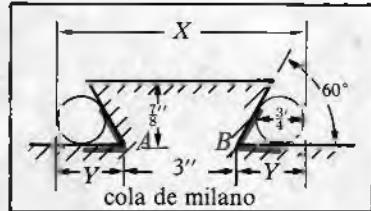


(Ejercicio 9)

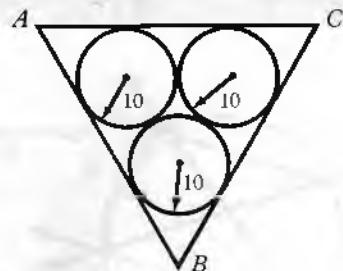
- 10. Dado:** Círculo $O \cong$ círculo O' .
 \overline{AB} es una tangente interna común
Pruébese: \overline{AB} biseca a $\overline{OO'}$.



- 11.** El control de calidad en la producción de piezas de maquinaria con frecuencia requiere métodos poco usuales de medición. Por ejemplo, para verificar la corrección de los ángulos A y B en una pieza llamada «cola de milano», se insertan espigas circulares como ilustra la figura. Entonces, se mide la distancia X con un micrómetro. En el caso de la cola de milano que se muestra aquí, ¿cuál sería esta distancia?



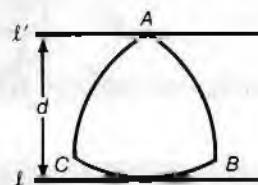
- 12.** Tres discos de metal de 10 cm de radio cada uno, son tangentes entre sí. Los discos están encerrados en una estructura metálica con forma de triángulo equilátero. ¿Cuál es la longitud de un lado del triángulo?



SOLUCION DE PROBLEMAS

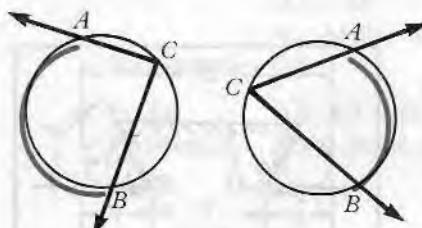
Supóngase que ℓ es una recta tangente a un arco de la curva construida en la actividad anterior y que ℓ' es paralela a ℓ a través de un vértice opuesto.

¿Qué relación existe entre la distancia d que separa a las rectas y la longitud AB ?



10.7 Medidas de ángulos inscritos

Dos faros pueden servir como auxilio a la navegación de un barco que pasa cerca de la costa y por aguas poco profundas. Si el barco está en el punto D , entonces $\angle ADB$ debe ser menor que un «ángulo de peligro» conocido. Esta técnica de navegación se basa en un teorema desarrollado en esta sección.

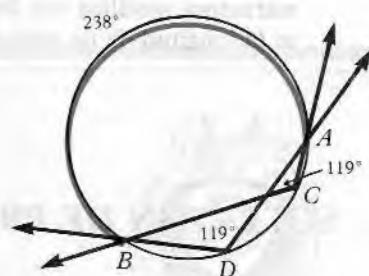
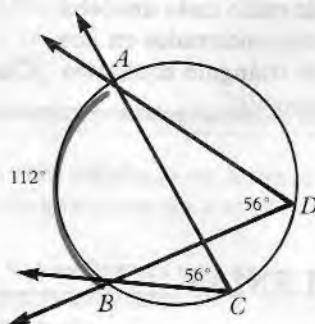
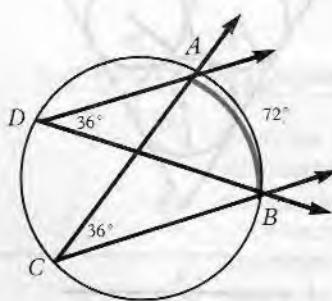


Un ángulo inscrito determina un arco llamado *arco interceptado*.

Definición 10.12

El *arco interceptado* en un ángulo inscrito $\angle ACB$ es el arco AB que está en el interior del ángulo.

En cada figura se dan $m\widehat{AB}$, $m\angle ACB$ y $m\angle ADB$.



Estas figuras sugieren el teorema siguiente.

Teorema 10.12

La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

APLICACION 1

La técnica de navegación presentada al principio de esta sección se basa en el teorema 10.12. Si un punto C está en un círculo de manera que el arco AB mida el doble que el «ángulo de peligro», entonces $m\angle ACB$ es igual al ángulo de peligro.

Si D estuviera en este mismo círculo o dentro de él, entonces $m\angle ADB$ sería igual o mayor que el ángulo de peligro. Cuando D está fuera del círculo, $m\angle ADB$ es menor que el ángulo de peligro y el barco en el punto D está a salvo.

La segunda aplicación se basa en un caso especial del teorema 10.12, que se formula como teorema 10.13.

APLICACION 2

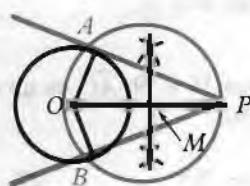
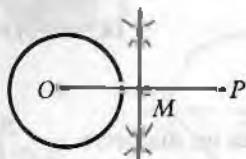
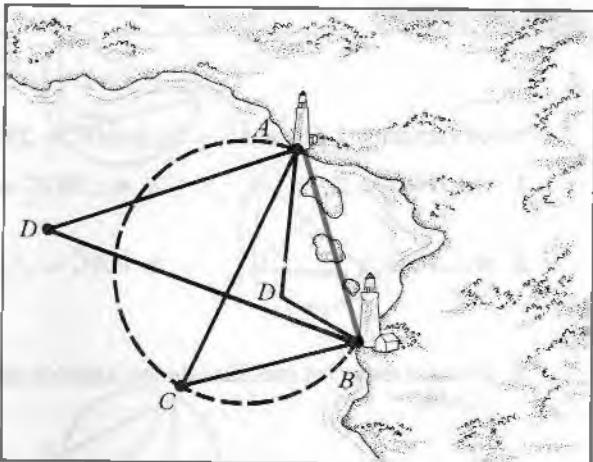
Con frecuencia, los diseñadores tienen que trazar dos rectas tangentes a un círculo desde un punto dado fuera del círculo.

A continuación se presenta un método para realizar esto.

Paso 1 Trácense \overline{OP} y su punto medio M desde un punto P fuera de un círculo dado con centro O .

Paso 2 Trácese el círculo con diámetro \overline{OP} que interseca al círculo dado en los puntos A y B . Trácense \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PB} . El teorema 10.12 indica que $\angle OAP$ y $\angle OBP$ son ángulos rectos.

Paso 3 El teorema 10.8 indica que \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PB} son tangentes al círculo dado.



Teorema 10.13 Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

EJERCICIOS**A.**

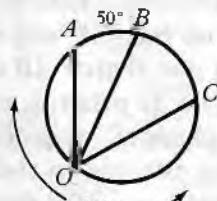
En los ejercicios 1 a 4, $m\widehat{AB} = 50$, $m\widehat{AOC} = 230$.

1. $m\angle AOB = ?$

2. $m\angle BOC = ?$

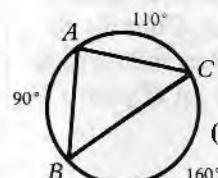
3. $m\angle AOC = ?$

4. $m\widehat{AC} = ?$



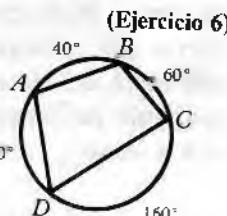
(Ejercicios 1-4)

5. Encuéntrense las medidas de los ángulos de $\triangle ABC$.



(Ejercicio 5)

6. Encuéntrense las medidas de los ángulos de $ABCD$.



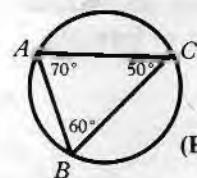
(Ejercicio 6)

7. Encuéntrense: $m\widehat{AB}$, $m\widehat{AC}$, y $m\widehat{BC}$.

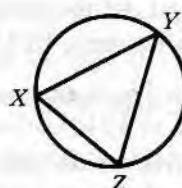
8. **Dado:** $XY = YZ$

$$m\angle Y = 40.$$

Encuéntrese: $m\widehat{XY}$, $m\widehat{YZ}$ y $m\widehat{XZ}$.



(Ejercicio 7)



En los ejercicios 9 a 14, $m\widehat{AC} = 160$, $m\widehat{AB} = 75$ y $m\widehat{CD} = 45$.

9. $m\angle ABC = ?$

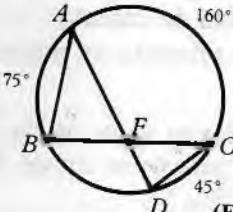
10. $m\angle ADC = ?$

11. $m\widehat{BD} = ?$

12. $m\angle BAD = ?$

13. $m\angle BCD = ?$

14. $m\angle AFB = ?$

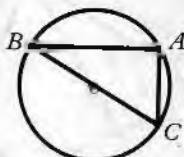


(Ejercicio 9-14)

B.

15. **Dado:** \overline{BC} es un diámetro
 $\overline{AB} = 8$, $AC = 6$.

Encuéntrese: BC .



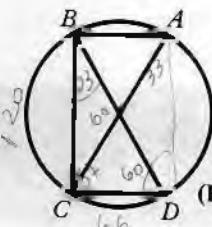
En los ejercicios 16 a 19, \overline{AC} es un diámetro, $m\widehat{CD} = 66$, y $m\angle CDB = 60$.

16. $m\angle ADB = ?$

17. $m\widehat{BC} = ?$

18. $m\angle BCA = ?$

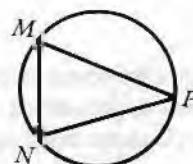
19. $m\angle BCD = ?$



(Ejercicio 16-19)

20. Dado: $\frac{m\widehat{MN}}{mNP} = \frac{2}{3}$ y $\frac{m\widehat{NP}}{mMP} = \frac{3}{4}$

Encuéntrese: $m\angle M$, $m\angle N$ y $m\angle P$.



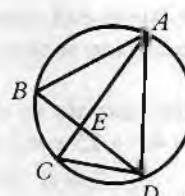
21. Dado: $m\widehat{BC} = 100$, $m\widehat{AB} = 80$
 \overline{AC} es un diámetro.
 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

Encuéntrese: a. $m\angle BAC$. b. $m\angle ACB$.
c. $m\angle EBC$. d. $m\widehat{AD}$.



22. Dado: \overline{AC} biseca a $\angle BAD$
 $m\widehat{CD} = 80$, $m\widehat{AD} = 160$.

Encuéntrese: a. $m\angle BAC$. b. $m\angle BDC$.
c. $m\angle AEB$. d. $m\angle ADB$.

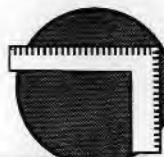


(Ejercicio 22-23)

23. Dado: \overline{AC} biseca a $\angle BAD$.

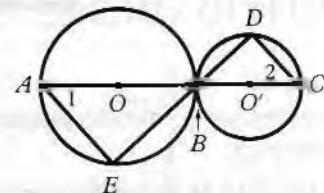
Pruébese: Tres ángulos de $\triangle ABE$ son congruentes con tres ángulos de $\triangle DCE$.

24. ¿Cómo puede emplearse una escuadra de carpintero para encontrar el centro de un disco?
¿Por qué funciona este método?



25. Dado: \overline{AB} es un diámetro del círculo O
 \overline{BC} es un diámetro del círculo O'
El círculo O es tangente al círculo O' en B .

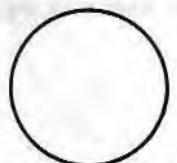
Pruébese: $m\angle 1 = m\angle 2$.



26. Pruébese que todos los ángulos inscritos que tengan el mismo arco interceptado o arcos interceptados congruentes tienen la misma medida.



27. Dibújense un círculo y un punto P que no esté dentro ni en el círculo. Trácese dos rectas que pasen por P y sean tangentes al círculo.



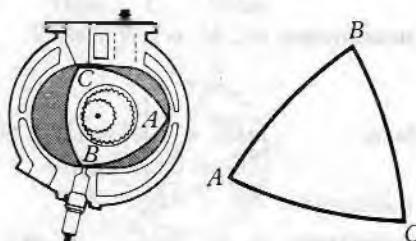
•P



C.

- 28.** Una curva de ancho constante como la de un motor Wankel se compone de tres arcos circulares AB , BC y AC . ¿Cuánto mide cada uno de estos arcos?

(Véase la construcción de la actividad de la pág. 366.)

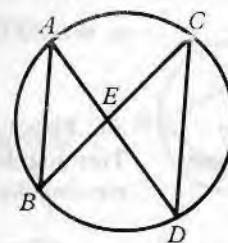


- 29.** Pruébese que si un cuadrilátero está inscrito en un círculo, sus ángulos opuestos son supplementarios.

- 30.** Si $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en un círculo y $m\angle A = 3x + 50$, $m\angle B = 4x + 25$ y $m\angle C = 7x + 30$, encuéntrese $m\angle D$.

- 31.** Pruébese que un paralelogramo inscrito en un círculo es un rectángulo.

- 32.** En la figura, $\angle BAD$ y $\angle BCD$ son ángulos inscritos. Pruébese que $\triangle ABE$ es semejante a $\triangle CDE$.



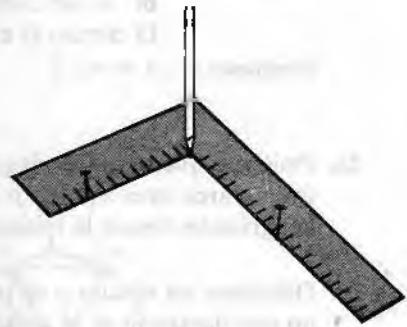
(Ejercicio 32)

ACTIVIDADES

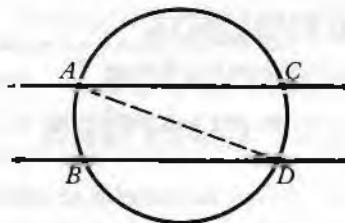
Para dibujar un círculo puede usarse una escuadra de carpintero.

- Apóyese la escuadra contra un par de clavos o alfileres y un lápiz en el ángulo recto.
- Girese la escuadra sin separarla de los clavos. El lápiz marcará el semicírculo con el diámetro determinado por los clavos. ¿Por qué?

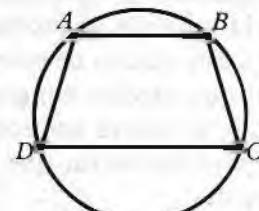
Dibújese un círculo con este método.



33. Demuéstrese que si dos rectas paralelas intersecan a un círculo, entonces interceptan a arcos congruentes.

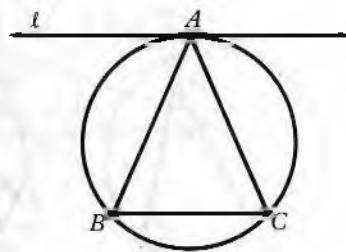


34. Dado: $ABCD$ es un trapecio inscrito.
Pruébese: $ABCD$ es un trapecio isósceles.



35. Dado: $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
Pruébese: $ABCD$ es un trapecio.

(Ejercicios 34, 35)

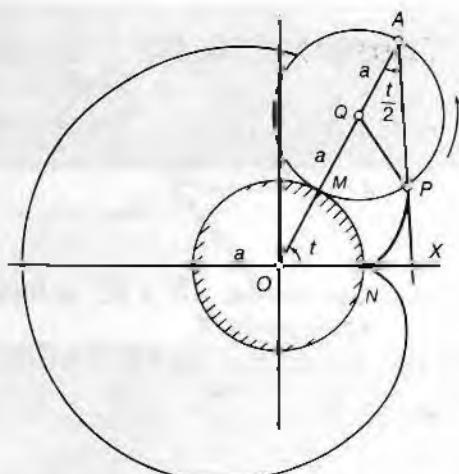


36. Dado: t es tangente al círculo en A
 $\overline{BC} \parallel t$
Pruébese: $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.

SOLUCION DE PROBLEMAS

La figura de la derecha muestra un círculo que rueda alrededor de otro generando una cardioide.

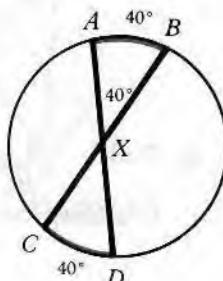
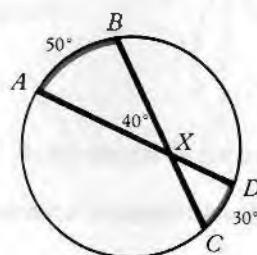
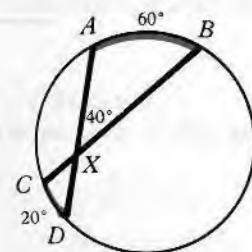
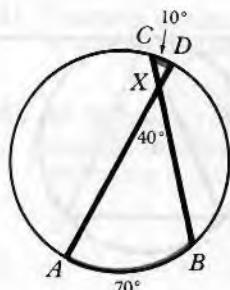
Si $m\angle AOX = t$, ¿por qué $m\angle OAP = \frac{t}{2}$?



10.8 Angulos formados por cuerdas

El polígono con forma de estrella se dibuja uniendo cada cuarto punto de un conjunto de nueve igualmente espaciados sobre un círculo. (Véase la solución de problemas de la pág. 345.) En este diseño de estrella hay muchos ángulos que parecen congruentes. En esta sección se estudiará un teorema que puede usarse para demostrar que estos ángulos son congruentes.

En todas las figuras, $m\widehat{AB} + m\widehat{CD} = 80$.



Estas figuras sugieren el teorema siguiente.

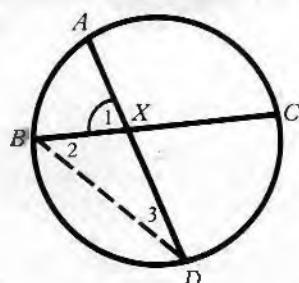
Teorema 10.14

Un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan en el interior de un círculo tiene una medida igual a la semisuma de los arcos interceptados.

PRUEBA

Dado: Las cuerdas \overline{AD} y \overline{BC} se intersecan en el punto X .

Pruébese: $m\angle AXB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$.

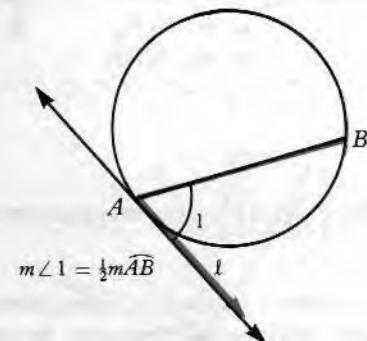
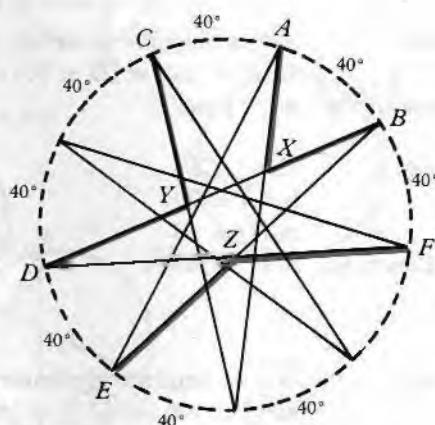


Afirmaciones	Razones
1. Constrúyase \overline{BD} .	1. Construcción.
2. $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{CD}$.	2. La medida de un ángulo inscrito es la mitad de su arco interceptado.
3. $m\angle 3 = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$.	3. ¿Por qué?
4. $m\angle AXB = m\angle 2 + m\angle 3$.	4. ¿Por qué?
5. $m\angle AXB = \frac{1}{2}m\widehat{AB} + \frac{1}{2}m\widehat{CD}$.	5. Sustitución (afirmaciones 2, 3 y 4).
6. $m\angle AXB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$.	6. Propiedad distributiva.

APLICACION

Determiníse la medida de los ángulos de este polígono con forma de estrella. Se usará el teorema 10.14.

1. $m\angle AXB = \frac{1}{2}(40 + 80) = 60$.
2. $m\angle CYD = \frac{1}{2}(80 + 120) = 100$.
3. $m\angle EZF = \frac{1}{2}(120 + 160) = 140$.



El siguiente es un caso especial del teorema 10.14 para una recta tangente.

Teorema 10.15

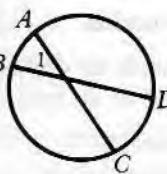
La medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada al punto de contacto es igual a la mitad del arco interceptado.

EJERCICIOS

A.

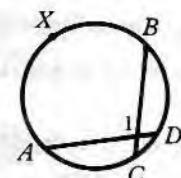
1. Dado:

$$\begin{aligned}m\widehat{AB} &= 30 \\m\widehat{CD} &= 20.\end{aligned}$$

Encuéntrese: $m\angle 1$.

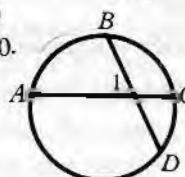
2. Dado:

$$\begin{aligned}m\widehat{AXB} &= 190 \\m\widehat{CD} &= 25.\end{aligned}$$

Encuéntrese: $m\angle 1$.

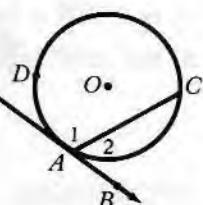
3. Dado:

$$\begin{aligned}m\angle 1 &= 80 \\m\widehat{AB} &= 100.\end{aligned}$$

Encuéntrese: $m\widehat{CD}$.

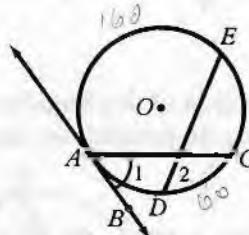
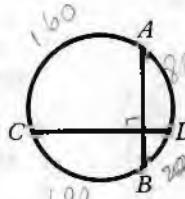
4. Dado:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \text{ es tangente al círculo } O \\m\widehat{ADC} = 300.\end{aligned}$$

Encuéntrese: $m\angle 1$ y $m\angle 2$.

5. Dado:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \text{ es tangente al círculo } O \\m\widehat{AE} = 160, m\widehat{AD} = 50, m\widehat{DC} = 60.\end{aligned}$$

Encuéntrese: $m\angle 1$ y $m\angle 2$.

6. Dado:

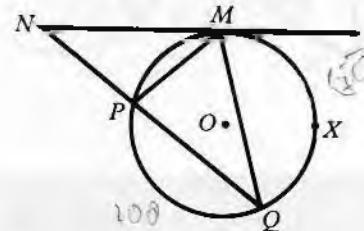
$$\begin{aligned}\overline{AB} \perp \overline{CD} \\m\widehat{BD} = 20 \\m\widehat{AD} = 80.\end{aligned}$$

Encuéntrese: $m\widehat{AC}$ y $m\widehat{BC}$.

B.

7. Dado:

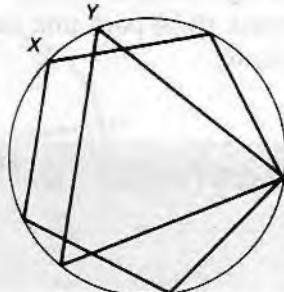
$$\begin{aligned}\overline{MN} \text{ es tangente al círculo } O \\m\widehat{PQ} = 100, m\widehat{MXQ} = 150.\end{aligned}$$

Encuéntrese: a. $m\angle NMP$. b. $m\angle PQM$.
c. $m\angle MPQ$. d. $m\angle PMQ$.
e. $m\angle MNP$.**ACTIVIDADES**

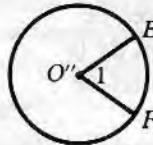
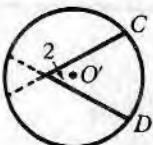
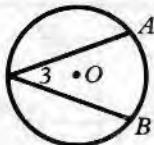
Con un compás y una regla, márquense 15 puntos igualmente espaciados alrededor de un círculo.

Dibújense dos polígonos con forma de estrella, uno de ellos uniendo cada cuarto punto, y el otro, uniendo cada séptimo punto. (Sugerencia: Constrúyanse un pentágono regular y un triángulo equilátero con un vértice común.

Después, $m\widehat{XY} = 24 = \frac{1}{15}(360)$. El método para construir un pentágono regular se describe en la página 274.)

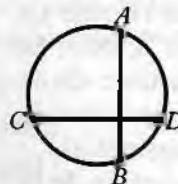


8. Los tres círculos que se muestran a continuación son congruentes, con $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = m\widehat{EF}$. $\angle 1$ es un ángulo central y $\angle 3$ es un ángulo inscrito. ¿Cuál de los tres ángulos es el mayor y cuál el menor? ¿Por qué?



9. Dado: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

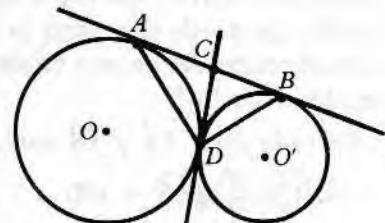
Pruébese: $m\widehat{AD} + m\widehat{BC} = m\widehat{AC} + m\widehat{BD}$.



C.

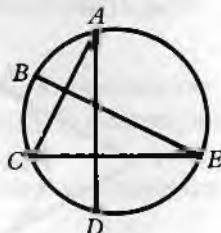
10. Dado: \overline{AB} es una tangente externa común a los círculos O y O' . \overline{CD} es una tangente interna común.

Pruébese: $\angle ADB$ es un ángulo recto.



11. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{CE}$
 $\overline{BE} \perp \overline{AC}$.

Pruébese: $m\widehat{BC} = m\widehat{CD}$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

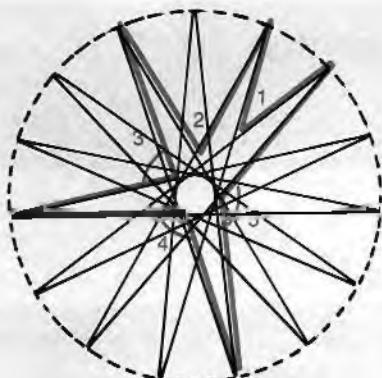
En el polígono con forma de estrella de la figura, se resaltaron en color cinco ángulos.

Sin usar el transportador, encuéntrese lo siguiente:

$$m\angle 1 = ? \quad m\angle 4 = ?$$

$$m\angle 2 = ? \quad m\angle 5 = ?$$

$$m\angle 3 = ?$$



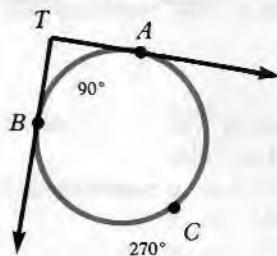
10.9 Angulos y segmentos formados por tangentes y secantes

Cuando los ingenieros diseñan torres de antena, necesitan saber qué fracción de la superficie de la Tierra cubrirá la señal de radio de la torre.

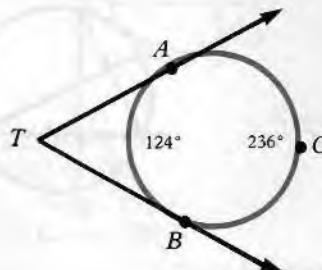
En esta sección se simplifica este problema al considerar un corte transversal circular de la Tierra que pasa por la base de la torre. Se plantea entonces la siguiente cuestión: «Si se conoce la medida del ángulo formado por la punta de la torre y los rayos tangentes al círculo, ¿se puede encontrar la fracción de la circunferencia del círculo cubierta por las señales de radio?

En cada caso, \overrightarrow{TA} y \overrightarrow{TB} son rayos tangentes.

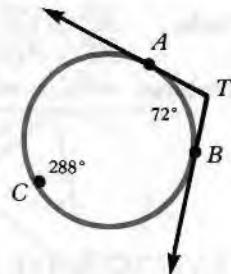
$$m\widehat{ACB} - m\widehat{AB} = 180$$



$$m\widehat{ACB} - m\widehat{AB} = 112$$



$$m\widehat{ACB} - m\widehat{AB} = 216$$



Mídase $\angle ATB$ con un transportador. ¿Cuál es el resultado?

Teorema 10.16

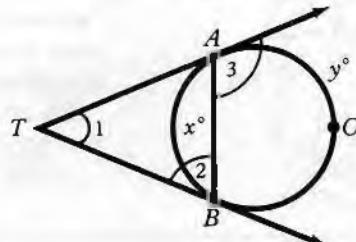
La medida de un ángulo formado por dos tangentes a un círculo que se intersecan, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

PRUEBA

Dado: \overrightarrow{TA} y \overrightarrow{TB} son rayos tangentes a un círculo.

$$m\widehat{AB} = x, \text{ y } m\widehat{ACB} = y.$$

Pruébese: $m\angle ATB = \frac{1}{2}(y - x)$.



Afirmaciones	Razones
1. $m\angle 2 = \frac{1}{2}x$.	1. La medida de un ángulo formado por una tangente y una cuerda es igual a la mitad del arco interceptado.
2. $m\angle 3 = \frac{1}{2}y$.	2. ¿Por qué?
3. $m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$.	3. La medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de dos ángulos interiores no contiguos.
4. $m\angle 1 = m\angle 3 - m\angle 2$.	4. ¿Por qué?
5. $m\angle 1 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$.	5. Sustitución.
6. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(y - x)$.	6. ¿Por qué?

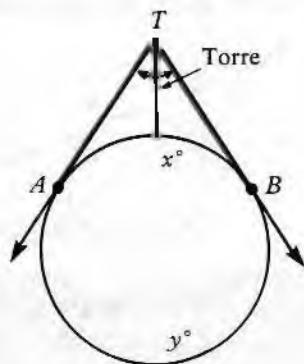
APLICACION

Supóngase que el ángulo formado por los dos rayos tangentes que parten de la punta de la torre de antena mide 160° . ¿Qué fracción del círculo cubren las ondas de radio?

- Respuesta:** 1. El teorema 10.16 da como resultado la ecuación (1) al pie de la figura y la ecuación (2) expresa una propiedad del círculo.
 2. Al resolver el sistema de ecuaciones se encuentra que $x = 20$.

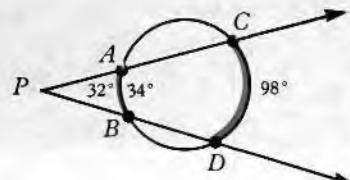
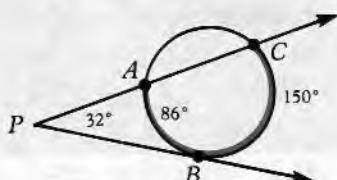
$$3. \frac{x}{360} = \frac{20}{360} = \frac{1}{18}$$

Las ondas de radio cubren $\frac{1}{18}$ de la circunferencia del círculo.



$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y - x) &= 160 \quad (1) \\ (y + x) &= 360 \quad (2) \end{aligned}$$

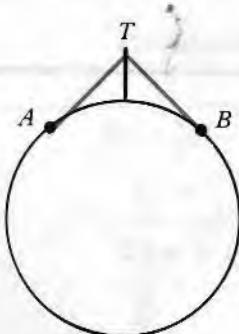
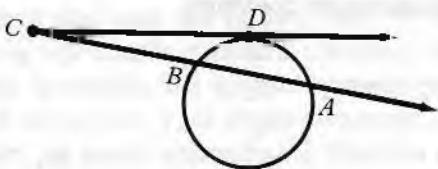
Estas figuras sugieren un teorema adicional.

**Teorema 10.17**

La medida de un ángulo formado por una tangente y una secante, o por dos secantes desde un punto exterior a un círculo, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

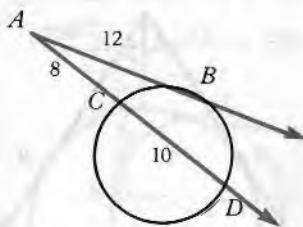
Al principio de esta sección se preguntó qué fracción de superficie de la Tierra cubrían las señales de radio de la torre. Otra cuestión de igual importancia es la distancia que cubren las señales de radio. El teorema siguiente dará una buena aproximación a la respuesta.

Para presentar el siguiente teorema es necesario introducir algunos términos nuevos.

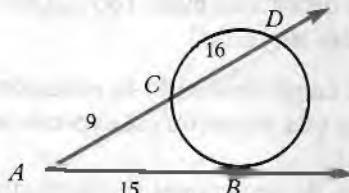


Recuérdese que \overrightarrow{AC} es una secante. \overline{CA} es un segmento secante. \overline{BC} es un segmento secante externo. \overline{CD} es un segmento tangente.

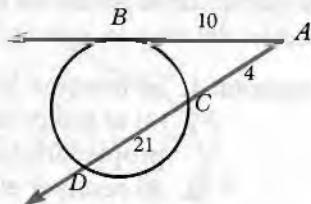
Considérense los siguientes ejemplos de círculos con una tangente y una secante. ¿Qué relación común a los tres ejemplos se puede encontrar?



$$\text{Obsérvese que } 12^2 = 8 \times 18$$



$$\text{Obsérvese que } 15^2 = 9 \times 25$$



$$\text{Obsérvese que } 10^2 = 4 \times 25$$

Esta relación se establece como el teorema 10.18.

Teorema 10.18

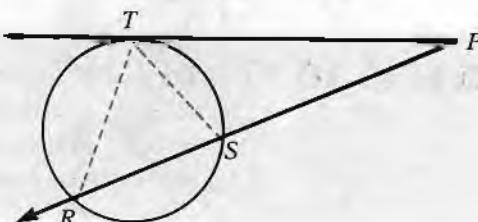
Si se trazan un segmento tangente y un segmento secante desde un punto exterior a un círculo, entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante por su segmento secante externo.

PRUEBA

Dado: $\odot O$ con el segmento tangente \overline{PT} .

Pruébese: $(PT)^2 = PS \cdot PR$.

Plan: Márquense \overline{ST} y \overline{TR} . Empléense los triángulos semejantes.



Afirmaciones	Razones
1. Dibújese \overline{ST} y \overline{TR} .	1. Construcción.
2. $\angle P \cong \angle P$.	2. Propiedad reflexiva.
3. $m\angle PTS = \frac{1}{2}m\widehat{TS}$.	3. ¿Por qué?
4. $m\angle SRT = \frac{1}{2}m\widehat{TS}$.	4. ¿Por qué?
5. $\angle PTS \cong \angle SRT$.	5. Sustitución, definición de congruencia.
6. $\triangle PTS \sim \triangle PRT$.	6. Teorema de la semejanza AA.
7. $\frac{PT}{PR} = \frac{PS}{PT}$.	7. Definición de triángulos semejantes.
8. $(PT)^2 = PS \cdot PR$.	8. Teorema 9.1.

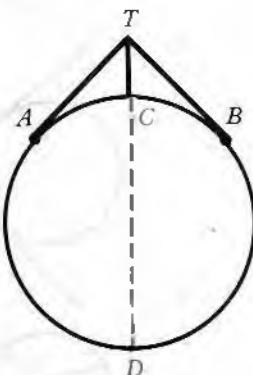
APLICACION

Con anterioridad se planteó la cuestión de la distancia que cubren las ondas de radio desde la torre. La longitud TA es una buena aproximación a la respuesta. El teorema 10.18 indica que $(TA)^2 = (TC)(TD)$ o bien $TA = \sqrt{(TC)(TD)}$.

Supóngase que la torre tiene 800 pies de altura. Se supondrá que el diámetro CD de la Tierra es de 8000 millas \times 5280 pies/millas, o 42 240 000 pies. Entonces,

$$TA = \sqrt{800 \text{ pies} \times 42\,240\,000 \text{ pies}} \doteq 183\,827.7 \text{ pies} \doteq 34.8 \text{ millas.}$$

Los dos teoremas siguientes también incluyen segmentos relacionados con círculos.

**Teorema 10.19**

Si dos cuerdas se intersecan en un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de la segunda cuerda.

Teorema 10.20

Si se trazan dos segmentos secantes a un círculo desde un punto exterior, entonces el producto de las longitudes de un segmento secante y su segmento secante externo es igual al producto de las longitudes del otro segmento secante y su segmento secante externo.

Ejemplo 1

Encuéntrese: BE

Por el teorema 10.19,
 $CE \cdot ED = BE \cdot AE$

$$BE = \frac{CE \cdot ED}{AE} = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4.$$

**Ejemplo 2**

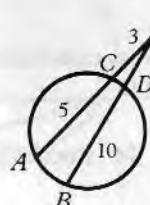
Encuéntrese: PD

Por el teorema 10.20,
 $PC \cdot PA = PD \cdot PB$

$$3 \cdot 8 = x(x + 10)$$

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

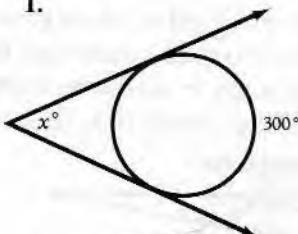
$$x = 2$$



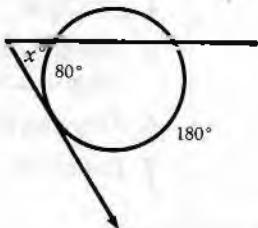
EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 12, encuéntrese x . Puede suponerse que las rectas que parecen tangentes lo son.

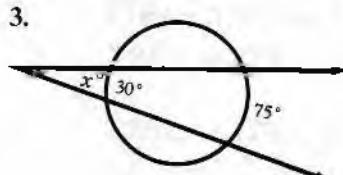
1.



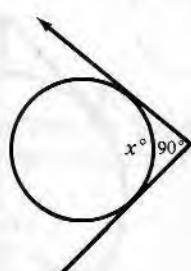
2.



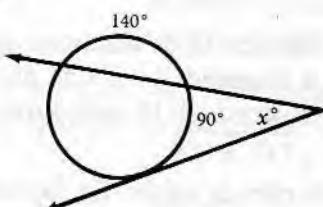
3.



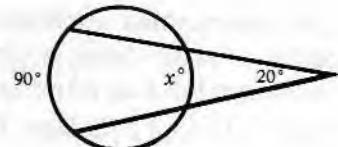
4.



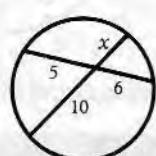
5.



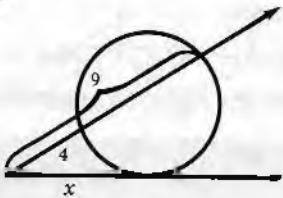
6.



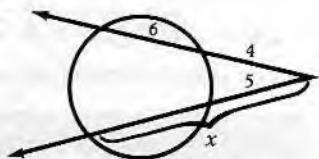
7.



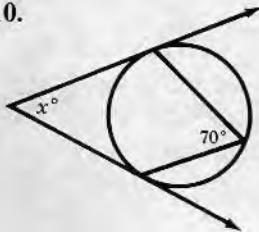
8.



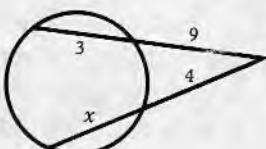
9.



10.



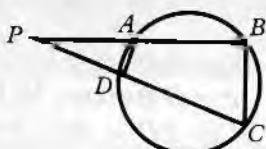
11.



12.

**B.**

En los ejercicios 13 a 15, $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito. $m\angle A = 100$, $m\angle D = 30$, $m\angle B = 90$.

13. Encuéntrese $m\angle P$.14. Encuéntrese $m\angle BAD$.15. Encuéntrese $m\angle ABC$.

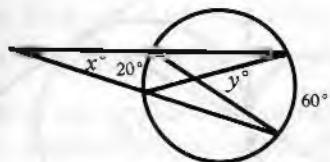
(Ejercicio 13-15)

En los ejercicios 16 a 19, $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito. $m\widehat{FG} = 60$, $m\widehat{GH} = 70$, $m\widehat{HE} = 80$.

16. Encuéntrese $m\widehat{EF}$.

18. Encuéntrese $m\angle B$.

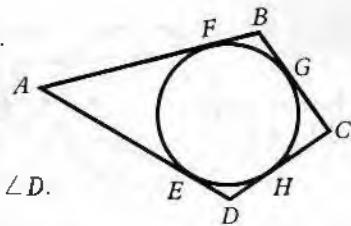
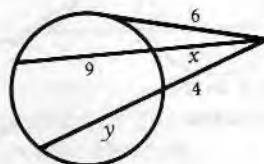
20. Encuéntrense los valores de x e y .



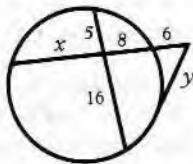
17. Encuéntrese $m\angle A$.

19. Encuéntrense $m\angle C$ y $m\angle D$.

21. Encuéntrense los valores de x e y .



22. Encuéntrense los valores de x e y .

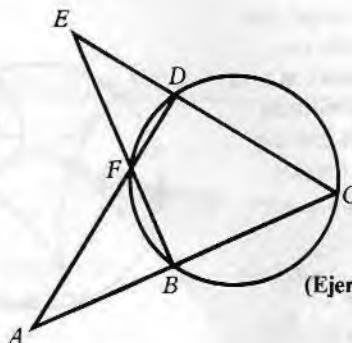


En los ejercicios 23 a 25, \overline{EC} , \overline{EB} , \overline{AD} y \overline{AC} son secantes. $m\angle E = 40$, $m\widehat{BC} = 120$, y $m\widehat{BF} = 80$.

23. Encuéntrese $m\widehat{DF}$.

24. Encuéntrese $m\widehat{DC}$.

25. Encuéntrese $m\angle A$.



(Ejercicios 23-25)

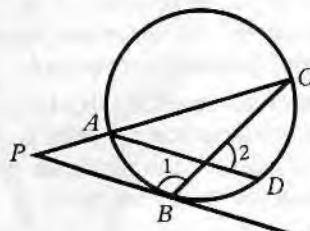
En los ejercicios 26 a 29, $m\widehat{AB} = 55$, $m\widehat{BD} = 40$, \overline{AC} es un diámetro y \overline{PB} es tangente al círculo en B .

26. Encuéntrese $m\angle P$.

27. Encuéntrese $m\angle 2$.

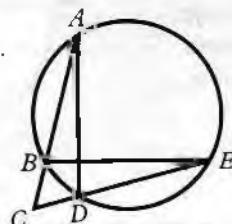
28. Encuéntrese $m\angle 1$.

29. ¿Es $\overline{AD} \parallel \overline{PB}$? Explíquese.

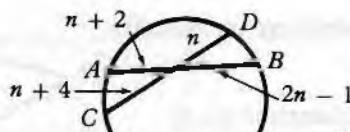


(Ejercicios 26-29)

30. Dado: $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ y $m\angle C = 40$.
Encuéntrese: $m\widehat{BD}$.

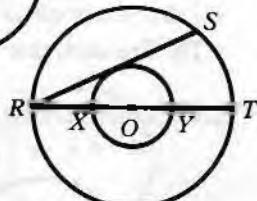


31. Encuéntrense AB y CD .

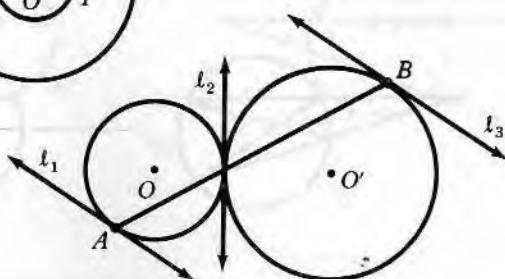


C.

32. En la figura, O es el centro de ambos círculos. \overline{RS} es tangente al círculo menor. Si $RX = 5$ y $RS = 30$, encuéntrese XY .



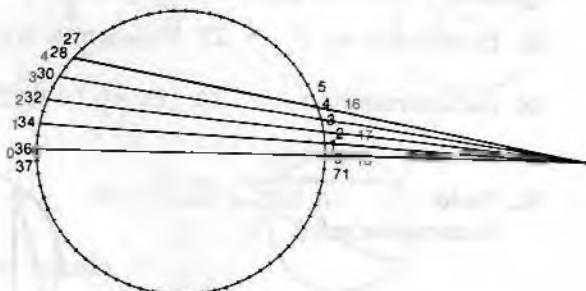
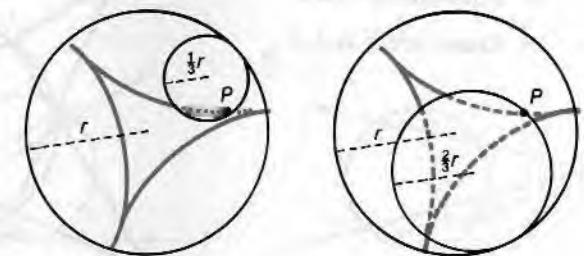
33. En esta figura, ℓ_2 es tangente a ambos círculos; ℓ_1 y ℓ_3 son tangentes a los círculos en los puntos A y B , respectivamente. Demuéstrese que $\ell_1 \parallel \ell_3$.



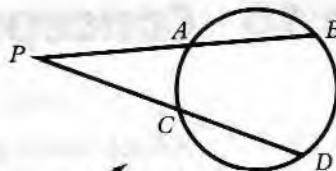
ACTIVIDADES

Cuando se rueda un círculo a lo largo del interior de otro círculo más grande, un punto P del círculo que rueda describe una trayectoria (en líneas rojas) denominada *deltóide*, siempre que el radio del círculo que rueda sea $\frac{1}{3}$ ó $\frac{2}{3}$ del radio del mayor. Trácese una deltoide siguiendo las instrucciones.

- Dibújese un círculo de 3 cm de radio en el centro de una hoja de papel. Márquense puntos e intervalos de 5° . Numérense los puntos 0, 1, 2, ... en la dirección en que giran las manecillas del reloj (números en negro).
- Empezando en el 36 (en negro), numérense puntos alternos 0, 1, 2, ... en la dirección en que giran las manecillas del reloj (números en rojo).
- Trácese un rayo desde un punto rojo, que pase por un punto con el mismo número en negro. Hágase lo mismo con todos los números del 0 al 71.
- Señálese la deltoide que rodea al círculo.

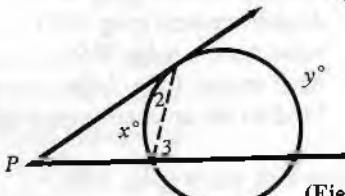


34. Si \overline{PB} y \overline{PD} son segmentos secantes y $PB = PD$, demuéstrese que $PA = PC$.



(Ejercicio 34)

35. Pruébese el teorema 10.17 para el caso de una tangente y una secante.



(Ejercicio 35)

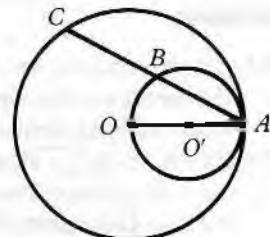
36. Pruébese el teorema 10.19.

37. Pruébese el teorema 10.20.

38. Si dos círculos son tangentes interiormente y el diámetro del círculo menor es el radio del círculo mayor, entonces cualquier cuerda del círculo mayor que vaya al punto de tangencia será bisecado por el círculo menor.

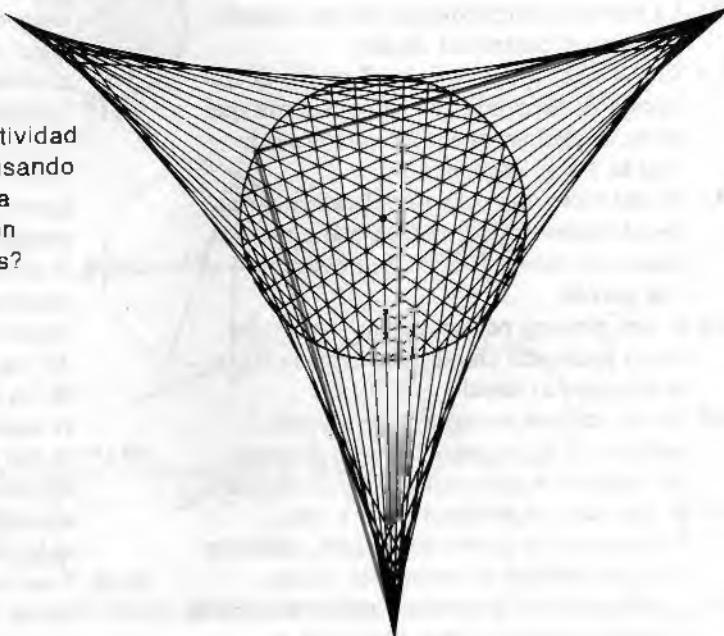
Dado: $O'A = \frac{1}{2}OA$ y los círculos son tangentes en A .

Pruébese: B es el punto medio de \overline{AC} .



SOLUCION DE PROBLEMAS

Con el método descrito en la actividad anterior, se trazó una deltoide usando intervalos de 10° . Cada punto da origen a dos rayos. ¿Por qué son perpendiculares estos dos rayos?



Capítulo 10 Conceptos importantes

Términos

Radio (pág. 342)	Ángulo inscrito (pág. 343)	Medida de un arco mayor (pág. 346)
Cuerda (pág. 342)	Ángulo central (pág. 343)	Arcos congruentes (pág. 347)
Diámetro (pág. 342)	Arco menor (pág. 346)	Círculos congruentes (pág. 347)
Tangente (pág. 343)	Arco mayor (pág. 346)	
Secante (pág. 343)	Medida de un arco menor (pág. 346)	

Postulado Postulado de la suma de arcos (pág. 346)

Teoremas

- 10.1 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes tienen arcos menores congruentes.
- 10.2 En un círculo, o en círculos congruentes, los arcos menores congruentes tienen cuerdas congruentes.
- 10.3 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes equidistan del centro
- 10.4 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.
- 10.5 La bisectriz perpendicular de una cuerda contiene al centro del círculo.
- 10.6 Si una recta que pasa por el centro de un círculo es perpendicular a una cuerda que no es un diámetro, entonces biseca a la cuerda y a su arco menor.
- 10.7 Si una recta que pasa por el centro de un círculo biseca a una cuerda que no es un diámetro, entonces es perpendicular a la cuerda.
- 10.8 Si una recta es perpendicular a un radio en un punto del círculo, entonces la recta es tangente al círculo.
- 10.9 Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.
- 10.10 Si una recta es perpendicular a una tangente en un punto del círculo, entonces la recta contiene al centro del círculo.
- 10.11 Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto.
- 10.12 La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.
- 10.13 Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.
- 10.14 Un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan en el interior de un círculo tiene una medida igual a la semisuma de los arcos interceptados.
- 10.15 La medida de un ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada al punto de contacto es igual a la mitad del arco interceptado.
- 10.16 La medida de un ángulo formado por dos tangentes a un círculo que se intersecan, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.
- 10.17 La medida de un ángulo formado por una tangente y una secante, o por dos secantes, desde un punto exterior a un círculo es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.
- 10.18 Si se trazan un segmento tangente y otro secante desde un punto exterior a un círculo, entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante por su segmento secante externo.
- 10.19 Si dos cuerdas se intersecan en un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de la segunda cuerda.
- 10.20 Si se trazan dos segmentos secantes a un círculo desde un punto exterior, entonces el producto de las longitudes de un segmento secante y su segmento secante externo es igual al producto de las longitudes del otro segmento secante y su segmento secante externo.

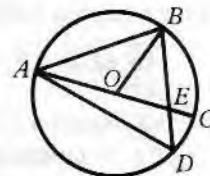
Capítulo 10 Resumen

En los ejercicios 1 a 4, indíquese si las afirmaciones son falsas o verdaderas. Si una afirmación es falsa, dibújese un contraejemplo.

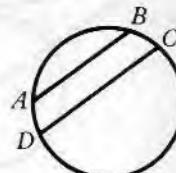
1. Si un triángulo está inscrito en un círculo, con un lado como diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.
2. Si una recta biseca a dos cuerdas que no son diámetros, entonces las cuerdas son paralelas.
3. Si una recta es perpendicular a una cuerda, entonces contiene al centro del círculo.
4. Si \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PB} son tangentes al mismo círculo en los puntos A y B , respectivamente, entonces $PA = PB$.

Dado: $m\angle AOB = 120$, $m\widehat{AD} = 150$, \overline{AC} es un diámetro.
Encuéntrese:

- a. $m\angle ADB$.
- b. $m\angle BAC$.
- c. $m\angle CED$.
- d. $m\widehat{BCD}$.



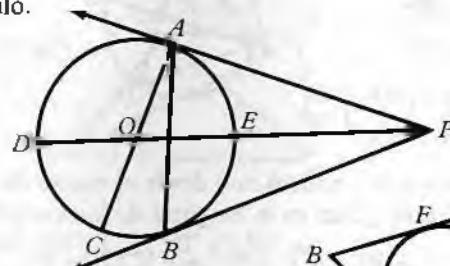
Dado: $m\widehat{AD} = m\widehat{BC}$.
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



Dado: \overline{PA} y \overline{PB} son tangentes.
O es el centro de un círculo.
 \overline{AC} es un diámetro.
 $m\angle APO = 20$.

Encuéntrese:

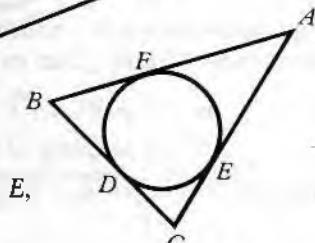
- a. $m\angle DPB$.
- b. $m\widehat{AD}$.
- c. $m\widehat{BC}$.
- d. $m\widehat{AE}$.
- e. $m\angle CAB$.



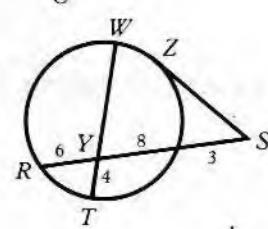
Dado: \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} son tangentes en los puntos F , D y E , respectivamente. $CE = 3$, $AF = 5$, $BC = 7$.

Encuéntrese:

- a. la longitud de \overline{BD} .
- b. el perímetro de $\triangle ABC$.



9. Si una cuerda de 16 cm está a 15 cm del centro, ¿cuál es el radio del círculo?



10. \overline{SZ} es tangente al círculo que se muestra en la figura.
Encuéntrense SZ y WY .

Capítulo 10 Examen

En los ejercicios 1 a 4, indique si las afirmaciones son falsas o verdaderas. Si alguna afirmación es falsa, dibújese un contraejemplo.

1. En dos círculos diferentes, si dos cuerdas tienen la misma longitud, están a la misma distancia de sus centros.
2. Si un triángulo está inscrito en un círculo y los arcos interceptados tienen medidas de 200° , 90° y 70° , entonces el triángulo es obtusángulo.
3. Si una recta biseca al arco menor de una cuerda, también biseca al arco mayor.
4. Si dos tangentes son paralelas, entonces sus puntos de tangencia determinan un diámetro.
5. Dado: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, \overline{EF} es la bisectriz perpendicular de \overline{AB} .
Pruébese: \overline{EF} biseca a \overline{CD} .
6. Dado: \overline{PA} es tangente al círculo O .
 $OA = 10$ cm, $PA = 24$ cm.

Encuéntrese la longitud de \overline{PC} .

7. Dado: \overline{AB} es un diámetro

$$m\angle CAB = 50$$

$$m\widehat{BD} = 20.$$

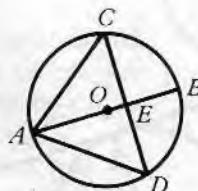
Encuéntrense:

- $m\widehat{BC}$.

$$\text{b. } m\widehat{AC}.$$

$$\text{c. } m\angle ADC.$$

$$\text{d. } m\angle BED.$$

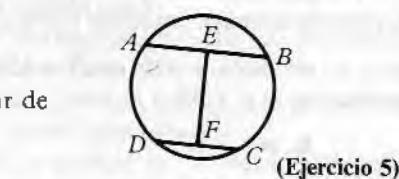


8. Supóngase que una cuerda mide 6 mm desde el centro de un círculo de radio 10 mm. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

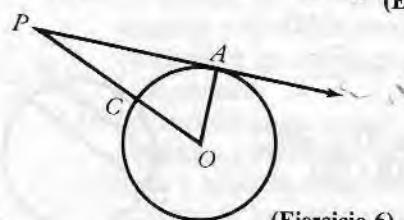
9. Dado: $m\angle X = 30$, $m\widehat{YT} = 50$, $m\angle WRZ = 90$

\overline{XY} es tangente al círculo.

Encuéntrense: $m\widehat{YZ}$, $m\widehat{WZ}$ y $m\widehat{TW}$.

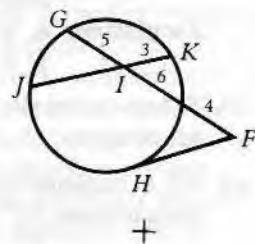
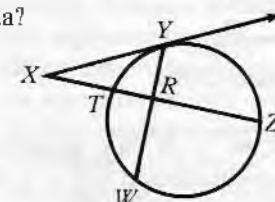


(Ejercicio 5)



(Ejercicio 6)

10. En la figura siguiente, \overline{FH} es tangente al círculo. Encuéntrense JI y FH .



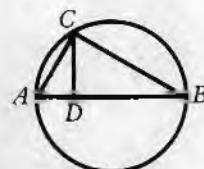
+

Resumen global (Caps. 8 a 10)

1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

- Si un paralelogramo está inscrito en un círculo, es un rectángulo.
- Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces sus diagonales son congruentes.
- Si $m\angle A = 40$ en el triángulo rectángulo ABC y $m\angle D = 50$ en el triángulo rectángulo DEF , entonces los triángulos son semejantes.
- Todos los rectángulos son polígonos semejantes.

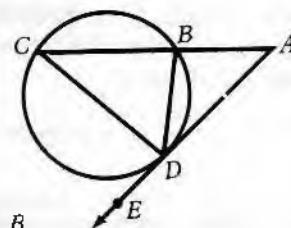
2. \overline{AB} es un diámetro y \overline{CD} es perpendicular a \overline{AB} .



- Si $AD = 4$ y $AB = 12$, encuéntrese CD .
- Si $AB = 13$ y $CD = 6$, encuéntrese AD .
- Si $CB = 12$ y $AB = 13$, encuéntrese BD .
- Demuéstrese que $\triangle ABC \sim \triangle CBD$.

3. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior de un decágono regular?

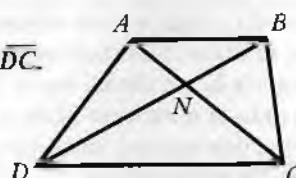
4. \overline{AC} es una secante, \overline{AD} es una tangente, $m\widehat{BC} = 100$, $m\angle CBD = 80$ y $m\angle BD = 100$.



- Encuéntrese $m\angle ABD$.
- Encuéntrese $m\angle BCD$.
- Encuéntrese $m\angle CAD$.
- Encuéntrese $m\angle EDC$.

5. Dado: $ABCD$ es un trapezoide con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

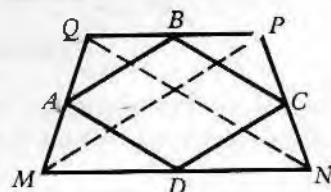
Pruébese: $NB \cdot NC = NA \cdot ND$.



6. Si cuatro ángulos de un pentágono miden 100° , 160° , 90° y 150° , ¿cuál es la medida del quinto ángulo?

7. Dado: $MNPQ$ es un trapecio con $MP = QN$.
 A , B , C y D son puntos medios, como se ilustra la figura.

Pruébese: $ABCD$ es un rombo.

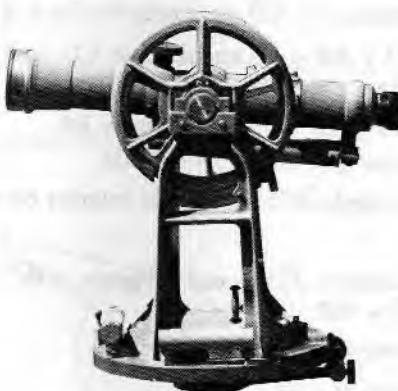


Agrimensura: El teodolito

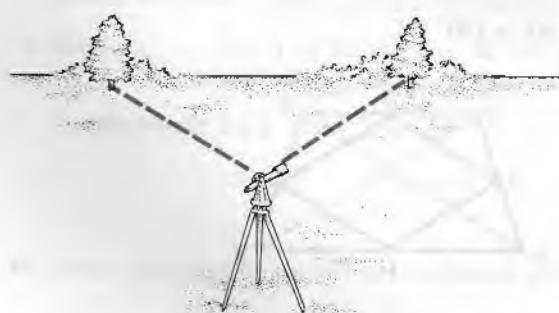


El teodolito es, quizás, el instrumento más importante para el agrimensor. Se emplea para medir ángulos y distancias.

Los agrimensores están relacionados con la construcción de edificios, caminos, puentes y presas. Una de las responsabilidades de los agrimensores es establecer límites exactos en los terrenos. Toda la información necesaria la toman en el lugar, y luego, en la oficina, hacen dibujos o mapas del terreno medido.



El teodolito puede usarse para medir ángulos entre objetos y ángulos de elevación. Un ángulo entre objetos se mide enfocando el primer objeto y luego moviendo el telescopio a la derecha o a la izquierda, hacia el segundo objeto. Un ángulo de elevación se mide inclinando el telescopio hacia arriba para enfocar el extremo del objeto. El teodolito tiene dos escalas, una para medir ángulos horizontales y otra para medir ángulos verticales.

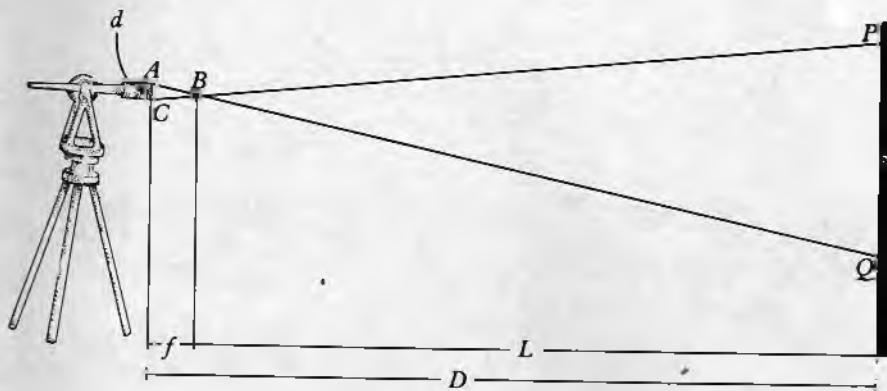


Medición de un ángulo entre dos objetos (ángulo horizontal)



Medición de un ángulo de elevación (ángulo vertical)

El teodolito también se emplea para medir distancias. Las propiedades ópticas del telescopio de un teodolito hacen que los rayos de luz se crucen y formen un par de triángulos semejantes.



Para medir distancias, se suelen necesitar dos personas. Una de ellas está en el teodolito y la otra se coloca en la segunda ubicación, sosteniendo un jalón graduado perpendicular al suelo. Los siguientes pasos muestran cómo encontrar la distancia deseada D .

Paso 1 Mirese por el telescopio. Léanse los números de jalón para determinar la distancia PQ .

Paso 2 Encuéntrese L por medio de una proporción basada en triángulos semejantes.

Paso 3 Súmense f y L para encontrar D .

1. ¿Por qué $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle QBP$?

2. f y L son longitudes de las alturas de los dos triángulos. Se puede demostrar que

$$\frac{f}{L} = \frac{d}{PQ}.$$

Empléese esta proporción y encuéntrese una expresión para $\frac{f}{d}$.

3. f es la distancia focal del telescopio. El telescopio está construido para que los rayos de luz se crucen siempre a la misma distancia. d es también un punto fijo en un telescopio dado. Por tanto, la razón f/d es fija.

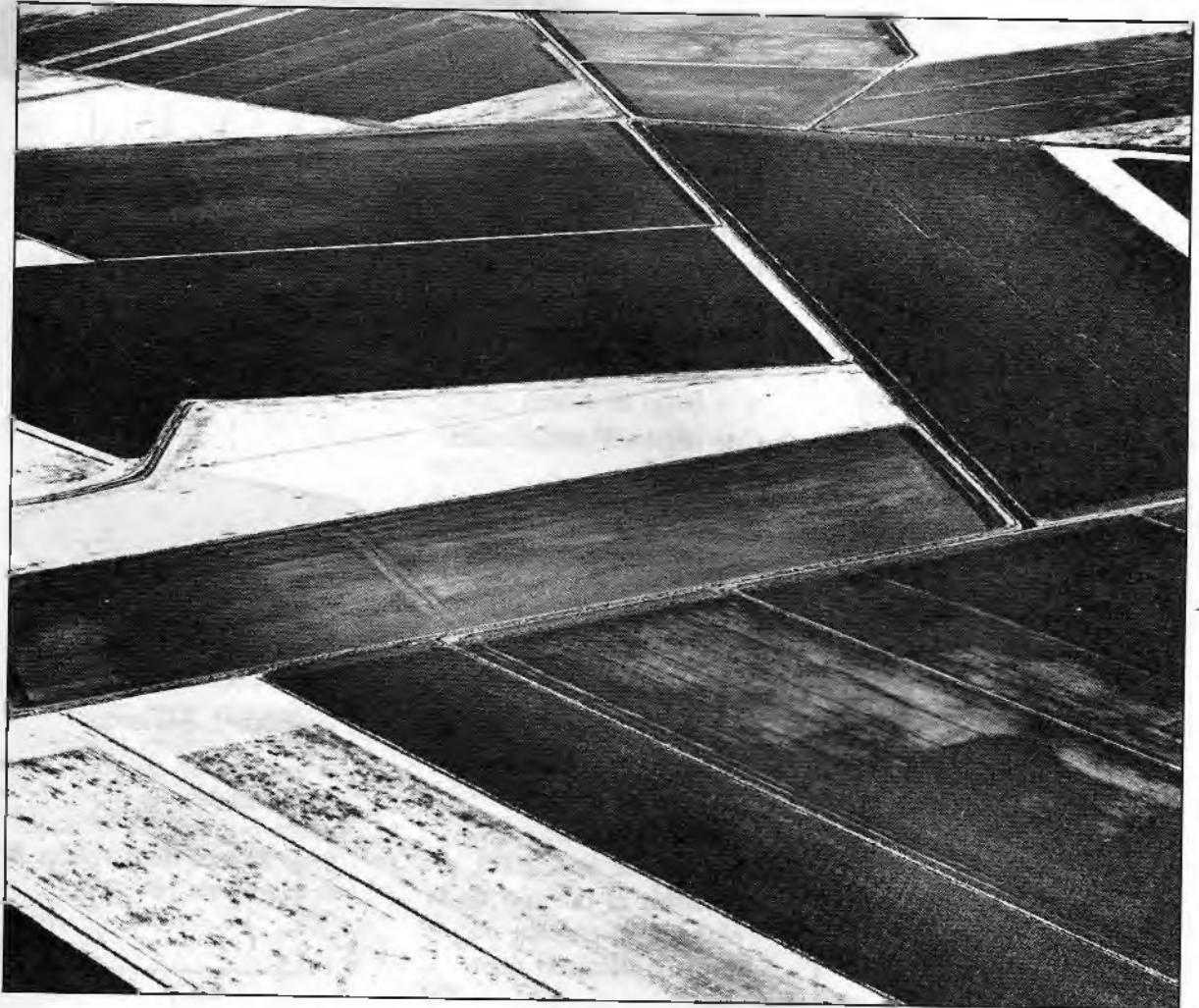
Supóngase que $f = 1$ metro, $d = 1$ centímetro y $PQ = 0.836$ metros. Encuéntrense L y D . (Véase el Paso 3.)

CAPITULO

11

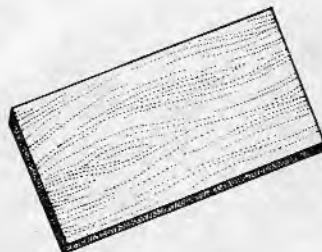
11.1 Postulados del área	394
11.2 Área de paralelogramos	398
11.3 Áreas de triángulos y trapecios	402
11.4 Área de polígonos regulares	408
11.5 Comparación entre perímetros y áreas de polígonos semejantes	412
11.6 La razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo	416
11.7 Área de círculos	420
<i>Conceptos importantes</i>	426
<i>Resumen</i>	427
<i>Examen</i>	428
Repaso de álgebra	429
La geometría en nuestro mundo	
Gráficas por computador: transformaciones	430

Área y perímetro



11.1 Postulados del área

Al construir una casa, se clavan tablas para cubrir la estructura. Después, se pintan o barnizan. El tejado se suele cubrir con planchas de madera prensada que luego se cubrirán con tejas. La construcción de casas proporciona muchas aplicaciones de los postulados y definiciones de esta sección.

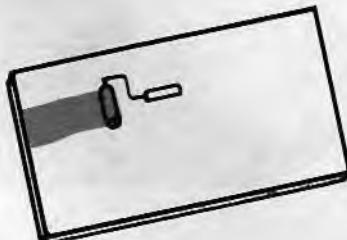


Una tabla representa un polígono llamado rectángulo. La superficie de esta tabla representa un subconjunto de un plano denominado *región poligonal*.

Los siguientes son tres ejemplos de regiones poligonales.



¿Qué cantidad de barniz se requiere para una plancha de madera prensada?



La cantidad de barniz que se requiere para una plancha de madera prensada depende del tamaño de ésta. Para describir el tamaño de la plancha se emplea un número llamado *área*.

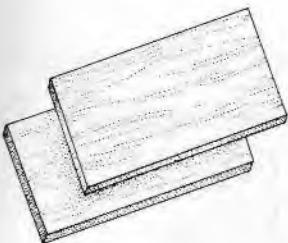
Definición 11.1

Una **región poligonal** es un subconjunto de un plano acotado por un polígono (o polígonos).

Postulado del área

A cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominado **área**. El área de la región R se representa por $A(R)$.

Las propiedades de las áreas las describen varios postulados.

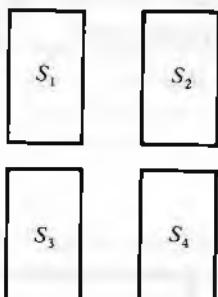


Dos planchas de madera del mismo tamaño tienen la misma área, por tanto deben necesitar la misma cantidad de barniz.

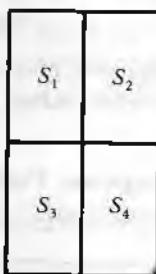
Este hecho es el tema de un postulado.

Postulado del área de regiones congruentes

Si dos rectángulos o dos triángulos son congruentes, entonces, las regiones que acotan tienen la misma área.



Cuatro planchas de madera, S_1 , S_2 , S_3 y S_4 , se colocan juntas.



El área de esta figura de cuatro piezas es igual a la suma de las áreas de cada pieza.

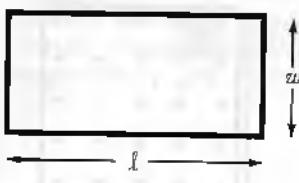
Esto es,

$$A(4 \text{ piezas}) = A(S_1) + A(S_2) + A(S_3) + A(S_4).$$

Postulado de la suma de áreas

Si una región poligonal es la unión de n regiones poligonales que no se solapan, su área es la suma de las áreas de las n regiones.

Para conocer el número de planchas de madera que se necesitan para una casa, es necesario poder calcular el área de regiones rectangulares.



$$\text{Area} = lw$$

Este último postulado, en combinación con el postulado del área, el del área de regiones congruentes y el de la suma de áreas, permite calcular el área.

Postulado del área del rectángulo

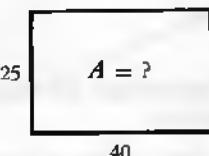
El área de un rectángulo de longitud l y ancho w está dada por la fórmula lw .

EJERCICIOS**A.**

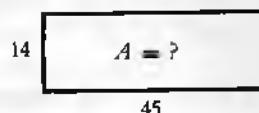
1. Dibújese un polígono y sombréese la región poligonal que determina.
2. ¿Es el interior de un círculo una región poligonal?
3. ¿Es un rectángulo una región poligonal?
4. Si dos rectángulos tienen la misma área, ¿son necesariamente congruentes?
5. ¿Qué postulado expresa que toda región poligonal debe tener área?
6. ¿Expresan los postulados que sólo las regiones poligonales tienen área?
7. Dibújese un contrajeemplo para la siguiente proposición:
Si dos regiones poligonales tienen la misma área, entonces tienen el mismo número de lados.

Encuéntrense las áreas de las siguientes regiones. Puede suponerse que los ángulos que parecen rectos lo son.

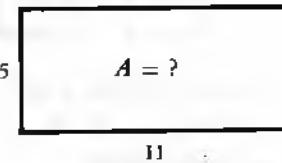
8.



9.



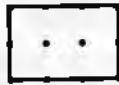
10.

**B.**

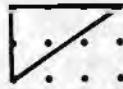
En los ejercicios 11 a 16, supóngase que el área de la parte sombreada es 1. Encuéntrese el área de cada región mediante los postulados. (Sugerencia: Búsqunse los rectángulos y los medios rectángulos.)

E: :
... .

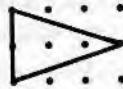
11.



12.

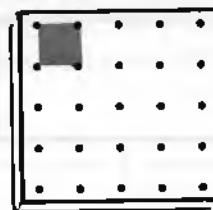


13.

**ACTIVIDADES**

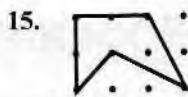
El área del cuadrado sombreado de este tablero es 1.

Constrúyanse o dibújense en un tablero como este triángulos con áreas de $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2 , $2\frac{1}{2}$ y 3 .

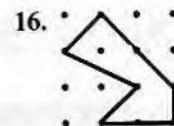




14.

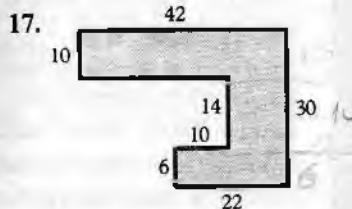


15.

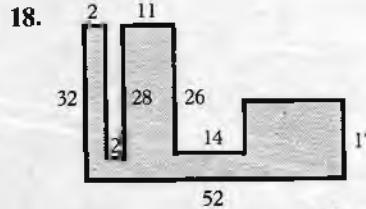


16.

Encuéntrese el área de cada una de estas regiones.

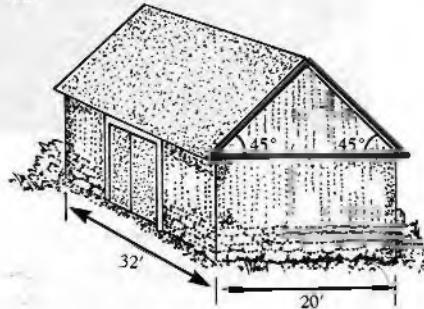


17.



18.

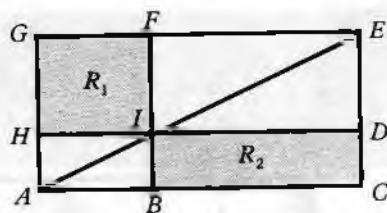
19. Encuéntrese el área del tejado de la figura. Si se supone que se desperdicia el 10 % de los materiales pedidos, ¿cuántas planchas de madera de 4×8 se necesitan para cubrir el tejado?



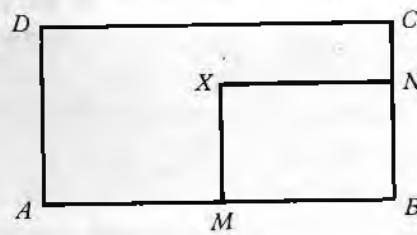
C.

20. Pruébese que la diagonal divide al rectángulo en dos triángulos de igual área.

21. $ABIH$, $IDEF$ y $ACEG$ son rectángulos. Explíquese por qué las áreas de R_1 y R_2 son iguales. (Sugerencia: $A(\triangle ACE) = A(\triangle AGE)$.)

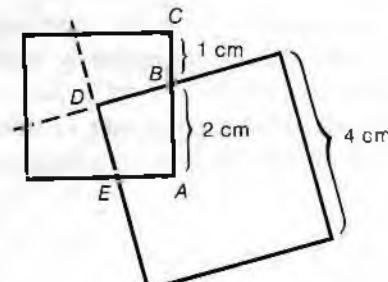


22. El área de $MBNX$ es $\frac{1}{3}$ del área de $ABCD$, y M es el punto medio de AB . ¿Qué relación existe entre la longitud de BN y la de BC ?



SOLUCION DE PROBLEMAS

En la figura de la derecha, D es el centro del cuadrado más pequeño. El cuadrado más grande solapa al pequeño en el cuadrilátero $ABDE$. Encuéntrese el área de este cuadrilátero. ¿Es importante que B triseque a AC ?



11.2 Área de paralelogramos



Hay situaciones en las que es importante encontrar el área de regiones que no son rectangulares. Por ejemplo, si se va a hacer un estacionamiento en batería para autos, cada espacio será una región en forma de paralelogramo. La cantidad de asfalto requerida para cada espacio depende del área de esa región en forma de paralelogramo.



1 centímetro



1 centímetro cuadrado

Al medir el área de regiones, debe elegirse una unidad de medida.

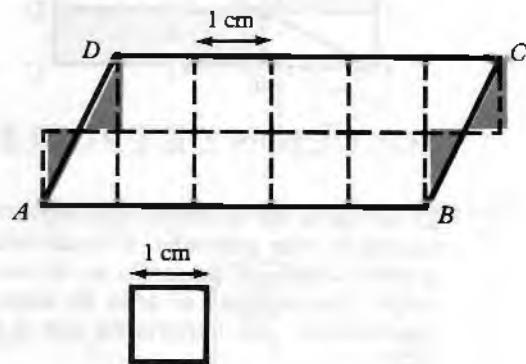
Las unidades más comunes para medir áreas son la pulgada cuadrada, el pie cuadrado, las yardas cuadradas, los centímetros cuadrados y los metros cuadrados.

El área de una región puede determinarse contando el número de unidades cuadradas que se requieren para cubrir exactamente la región.

Acoplando unidades cuadradas y regiones triangulares congruentes, y mediante diversos postulados del área, se concluye que el paralelogramo de la derecha tiene un área de 10 centímetros cuadrados.

Definición 11.2

Una **unidad cuadrada** es una región cuadrada en la cual cada uno de sus lados mide una unidad de longitud.

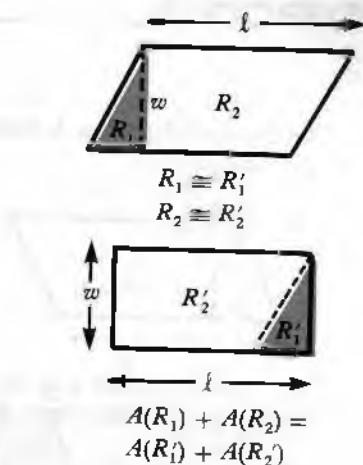
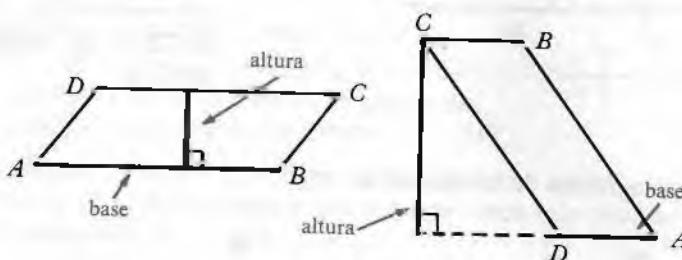


unidad cuadrada

Se escribe: $A(ABCD) = 10 \text{ cm}^2$

Otra forma de encontrar el área de un paralelogramo es imaginando que la pieza triangular del extremo de la figura se corta y se coloca en el otro extremo para formar un rectángulo. Así, con el postulado del área de regiones congruentes y el postulado de la suma de áreas, se concluye que las áreas del paralelogramo y del rectángulo son la misma. Por tanto, dado que el área de un rectángulo es el producto de la longitud por la anchura, se deduce que el área del paralelogramo también es «longitud por anchura».

Con los paralelogramos, se usan los términos *base* y *altura* en lugar de longitud y anchura. Cualquier lado de un paralelogramo puede ser la base. Una vez elegida la base, un segmento perpendicular a ella, con un extremo en la base y el otro en el lado opuesto, se denomina altura. Obsérvese que un paralelogramo tiene dos pares de bases paralelas.



Definición 11.3

Una **altura de un paralelogramo** es un segmento perpendicular a un par de lados paralelos en los cuales tiene sus extremos. La **altura** del paralelogramo es la longitud de ese segmento.

Teorema 11.1

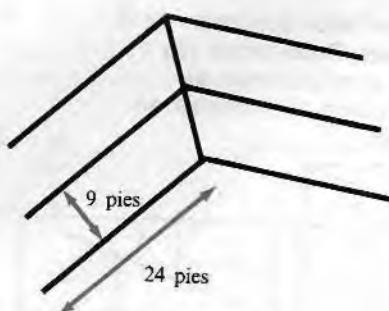
Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h , el área A está dada por la fórmula $A = bh$.

APLICACION

La medida estándar para un estacionamiento de vehículo en batería es 9 pies de ancho por 24 pies de largo. ¿Cuál es el área de la superficie que cubre el asfalto en un estacionamiento?

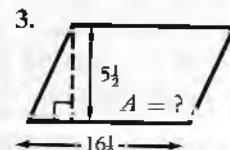
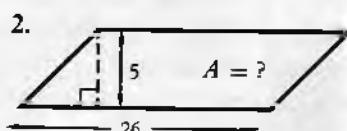
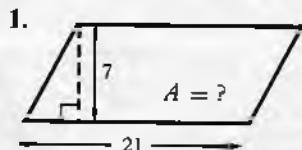
Respuesta. Un estacionamiento es un paralelogramo con 24 pies de base y 9 pies de altura. Si se aplica el teorema 11.1, se puede calcular el área:

$$\text{área} = 24 \text{ pies} \times 9 \text{ pies} = 216 \text{ pies cuadrados}$$

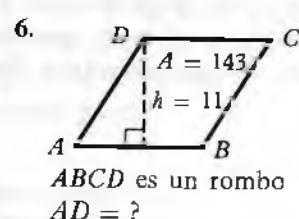
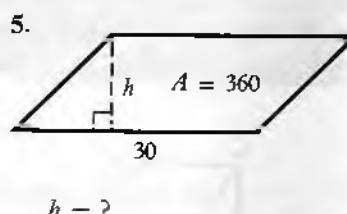
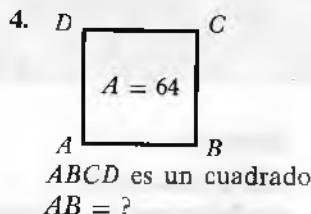


EJERCICIOS**A.**

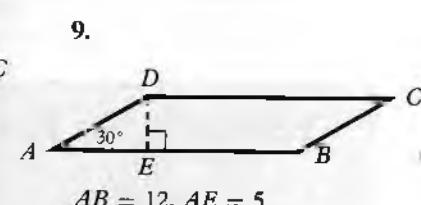
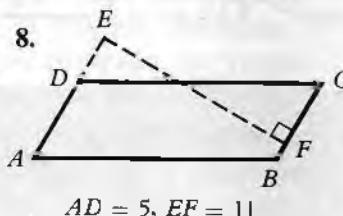
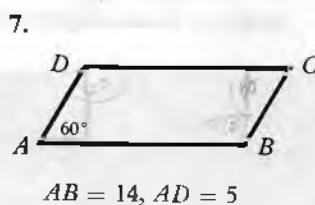
En los ejercicios 1 a 3, encuéntrese el área de cada paralelogramo.



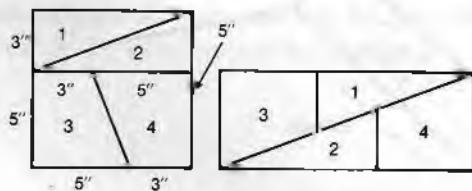
En los ejercicios 4 a 6, se da el área de los paralelogramos. Encuéntrese el dato que falta.

**B.**

Encuéntrense las áreas de los paralelogramos de los ejercicios 7 a 9.

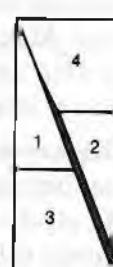
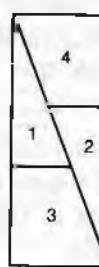
**ACTIVIDADES**

Dibújese este cuadrado de 8 pulgadas. Recórtense las piezas y colóquense de nuevo como se muestra en la figura.

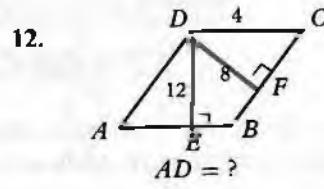
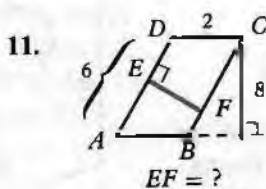
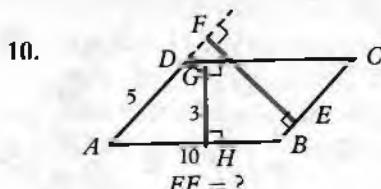


1. ¿Cuál de las tres situaciones que se señalan a la derecha se presenta?

2. Empléense los conceptos relacionados con el área para determinar cuál de los tres casos se presenta realmente.



En los ejercicios 10 a 12, encuéntrese el dato desconocido. Cada cuadrilátero es un paralelogramo.

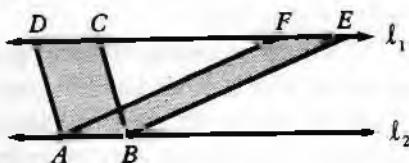


13. ¿Qué le sucede al área si se duplican las longitudes de los lados de un paralelogramo?

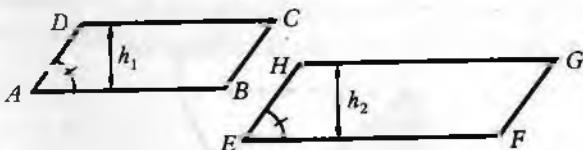
14. Un paralelogramo tiene lados con longitudes 12 y 8, y la medida de uno de los ángulos es 120° . ¿Cuál es el área?

C.

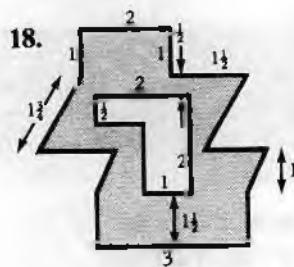
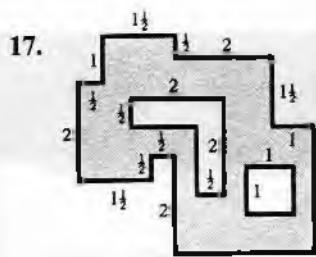
15. Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas. Compárese el área del paralelogramo $ABEF$ con la del paralelogramo $ABCD$.



16. Dados los paralelogramos $ABCD$ y $EFGH$, con $m\angle A = m\angle E$ y $h_2 = \sqrt{3}h_1$, si el área de $EFGH$ es doble que la de $ABCD$, ¿qué relación hay entre AB y EF ?



Encuéntrese el área de las regiones que aparecen en los ejercicios 17 y 18. Supóngase que los segmentos que parecen perpendiculares o paralelos lo son.

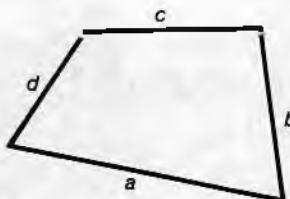


SOLUCION DE PROBLEMAS

Los antiguos babilonios usaron la fórmula $\frac{(a + c)(b + d)}{4}$

para determinar el área de un cuadrilátero con lados de longitudes a , b , c y d .

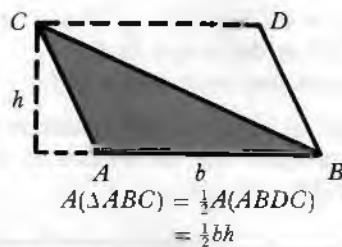
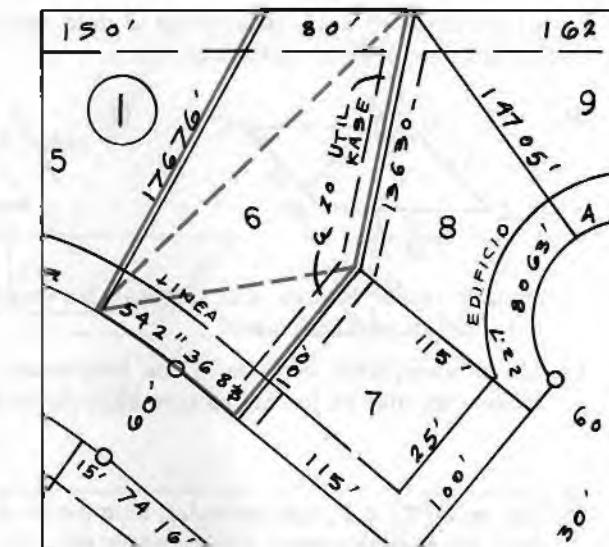
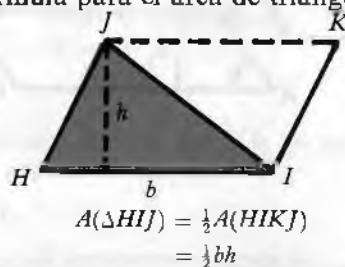
1. ¿Sirve también esta fórmula para rectángulos?
2. ¿Sirve también esta fórmula para paralelogramos?



11.3 Áreas de triángulos y trapecios

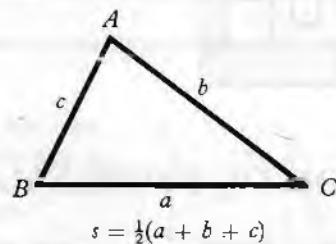
Un ingeniero civil necesita encontrar el área de una parcela para edificación de forma irregular como la que se ilustra en la figura con el número 6. Esto puede hacerse dividiendo la parcela en regiones triangulares y calculando el área de cada región triangular.

Las figuras siguientes ilustran que una región triangular puede considerarse como la mitad de una región en forma de paralelogramo. Por tanto, la fórmula para encontrar el área de un paralelogramo proporciona una fórmula para el área de triángulos.



Teorema 11.2 Dado un triángulo con base b y altura correspondiente h , el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$.

En ocasiones, puede suceder que se conozcan los tres lados de un triángulo, pero no la altura. En tales casos es útil la fórmula utilizada por Herón de Alejandría en el siglo primero de nuestra era.



Teorema 11.3 Fórmula de Herón. Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitudes a , b y c , entonces $A(\triangle ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

APLICACION

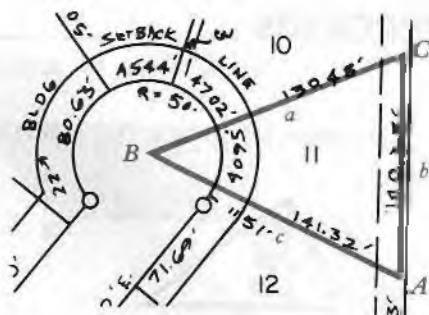
Un método para encontrar el área de la parcela 11 requiere encontrar primero el área de $\triangle ABC$. Con la fórmula de Herón y una calculadora, ésta es una tarea fácil. (Obsérvese que el radio del círculo es 50 pies.)

$$a = 130.48 + 50 = 180.48 \quad b = 148.37$$

$$c = 141.32 + 50 = 191.32$$

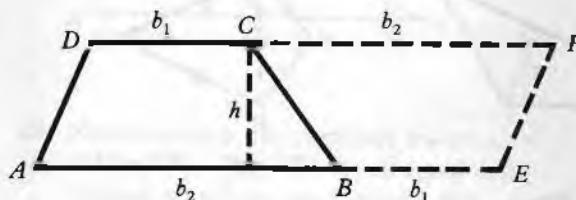
$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 260.09$$

$$s - a = 79.61, s - b = 111.72, s - c = 68.77$$



Por la fórmula de Herón, $A(\triangle ABC) \doteq \sqrt{(260.09)(79.61)(111.72)(68.77)} \doteq 12\,613$.

También puede considerarse que un trapecio es la mitad de un paralelogramo. El área de un trapecio es la mitad del área del paralelogramo.



$$\text{base de } \square AEFD = b_1 + b_2 \\ A(\square AEFD) = h(b_1 + b_2)$$

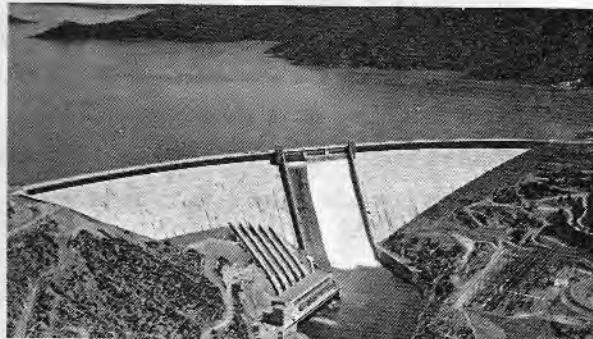
Teorema 11.4

Dado un trapecio con bases b_1 y b_2 , y altura h , el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

APLICACION

Las presas suelen tener sección transversal trapecial. El diseñador de la presa debe determinar el área de esta sección transversal. Si la presa mide 180 metros de altura y tiene bases de 10 metros y 60 metros de longitud, ¿cuál será el área de la sección transversal? Por el teorema 11.4 puede calcularse el área:

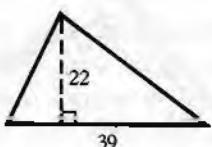
$$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot 180(10 + 60) \text{ m}^2 = 6300 \text{ m}^2$$



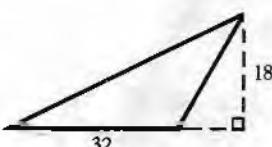
EJERCICIOS**A.**

Calcúlense las áreas de las regiones de los ejercicios 1 a 11.

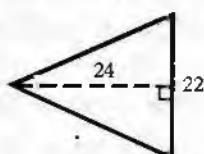
1.



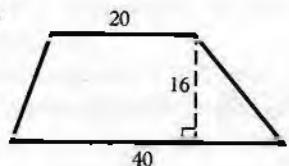
2.



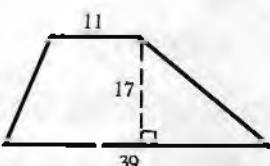
3.



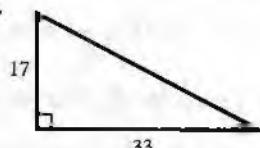
4.



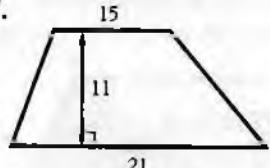
5.



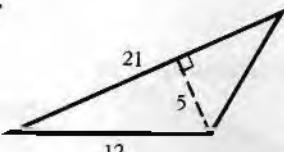
6.



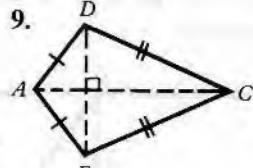
7.



8.

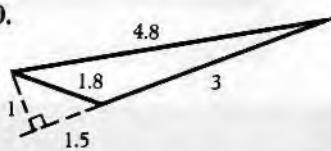


9.

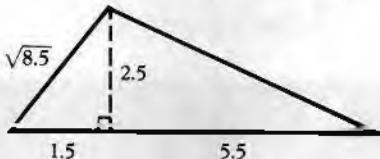


$$AC = 41 \quad BD = 25$$

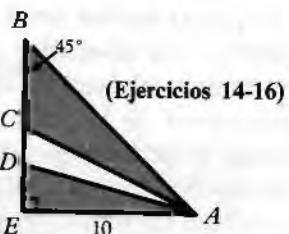
10.



11.

**B.**

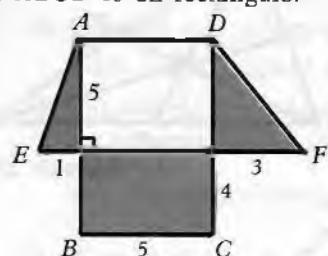
12. El área de $\triangle ABC$ es 48 cm^2 , y $AB = 6 \text{ cm}$. ¿Cuál es la longitud de la altura en \overline{AB} ?
13. Un trapecio con bases de longitud 14 pies y 21 pies, tiene un área de $87\frac{1}{2}$ pies cuadrados. ¿Cuál es su altura?
14. ¿Cuál es el área de la región sombreada?
15. ¿Cuál es el área de la región no sombreada?
16. ¿Cuál es la razón entre el área de la región sombreada y el área de $\triangle ABE$?



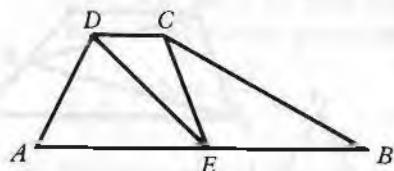
C es el punto medio de \overline{BE} .
D es el punto medio de \overline{CE} .

En los ejercicios 17 y 18, encuéntrese el área de las regiones sombreadas.

17. $ABCD$ es un rectángulo.

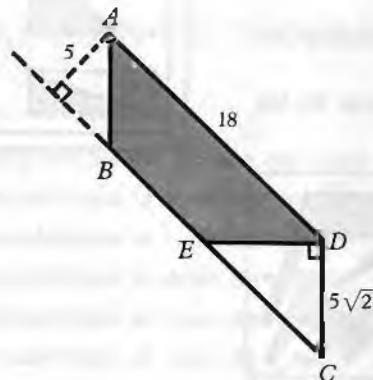


19. $ABCD$ es un trapeño y E es el punto medio de \overline{AB} . Muéstrese que el área de $AECD$ es igual al área de $EBCD$.

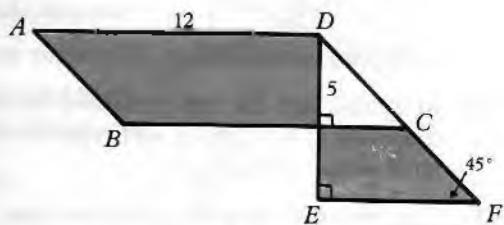


21. Muéstrese que una mediana divide a un triángulo en dos regiones de igual área. Esto es, si \overline{BD} es una mediana de $\triangle ABC$, muéstrese que el área de $\triangle ABD$ es igual al de $\triangle BDC$.

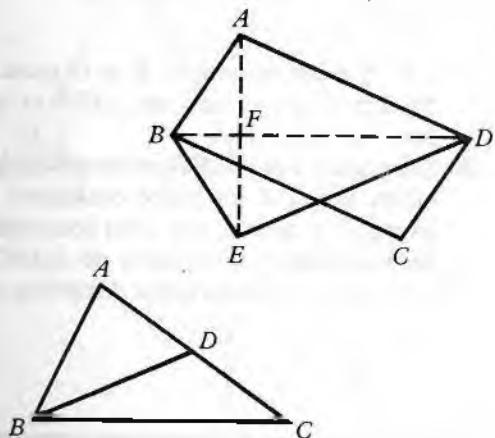
22. $ABCD$ es un paralelogramo. Encuéntrese la longitud de BE .



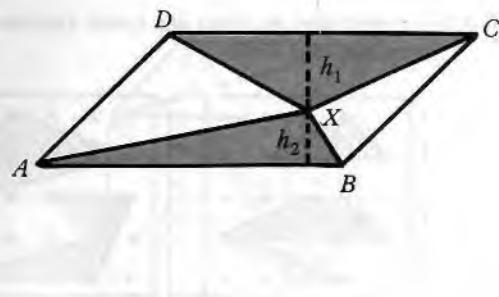
18. $ABCD$ es un paralelogramo.



20. $ABCD$ es un paralelogramo cuya área es 60 unidades cuadradas. Encuéntrese el área de la cometa $ABED$. (Sugerencia: Encuéntrese el área de $\triangle ABD$.)



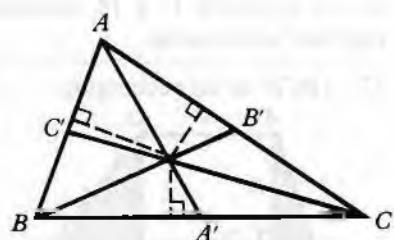
23. $ABCD$ es un paralelogramo y X es cualquier punto en su interior. Muéstrese que el área de la región sombreada es la mitad del área del paralelogramo. (Indicación: $h_1 + h_2$ es la altura de $ABCD$.)



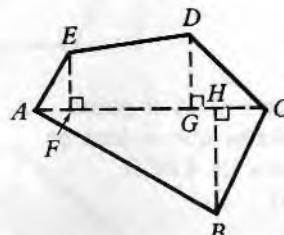
24. Empléese la fórmula de Herón para encontrar el área de un triángulo cuyos lados tienen las siguientes longitudes:
 a. 3 cm, 4 cm, 5 cm. b. 17 cm, 18 cm, 19 cm. (Empléese una calculadora.)
 c. 25 cm, 36 cm, 41 cm. (Empléese una calculadora.)

25. Muéstrese que las tres medianas de un triángulo lo dividen en seis regiones de igual área.

26. Una persona compró un terreno con forma de pentágono irregular. Encuéntrese el área de este terreno si $AF = 10$ m, $FG = 40$ m, $GH = 15$ m, $HC = 20$ m, $EF = 20$ m, $DG = 30$ m y $HB = 35$ m.



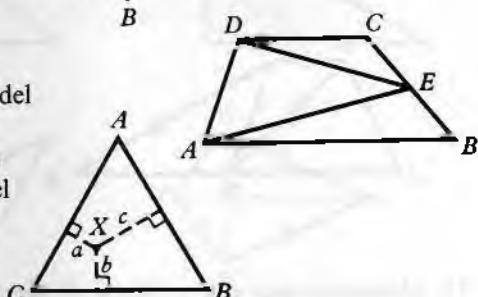
(Ejercicio 25)



C.

27. $ABCD$ es un trapecio y E es el punto medio de \overline{BC} . Muéstrese que el área de $\triangle ADE$ es igual a la mitad del área de $ABCD$.

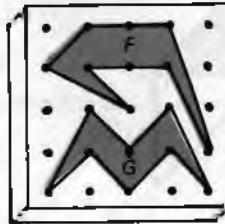
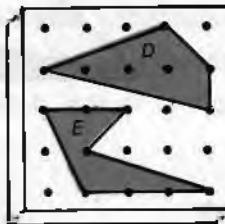
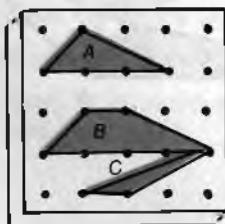
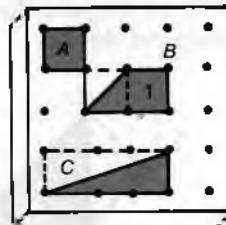
28. Supóngase que $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero con altura h . Sea X un punto cualquiera en el interior del triángulo y sean a , b y c las longitudes de las perpendiculares a los lados de $\triangle ABC$. Pruébese que $a + b + c = h$. (Indicación: Empléese el área.)



ACTIVIDADES

En este tablero, el área del cuadrado A es 1 y el área de cada una de las figuras B y C es $1\frac{1}{2}$.

1. Dibújense las figuras siguientes en papel cuadriculado o en un tablero.
2. Encuéntrese el área de cada región sin usar ninguna de las fórmulas del área.



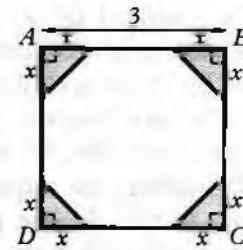
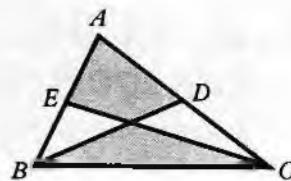
29. Dado $\triangle ABC$ con medianas \overline{BD} y \overline{CE} , muéstrese que las áreas de las regiones sombreadas son iguales.
30. Pruébese que el área de un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud s es $s^2\sqrt{3}/4$.

31. Considérese el cuadrado $ABCD$. Si se cortan triángulos en las esquinas, resulta un octágono. Si $AB = 3$, muéstrese que $x = \frac{3}{2 + \sqrt{2}}$ si el octágono resultante es regular.

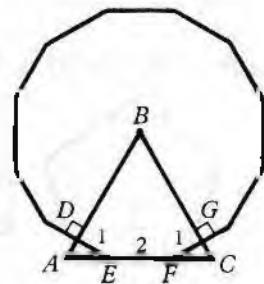
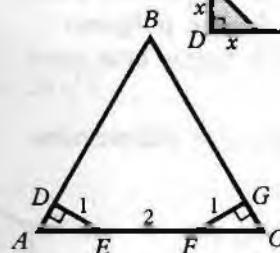
32. ¿Cuál es el área de un octágono regular que tiene lados de longitud 2?

33. Considérese el triángulo equilátero $\triangle ABC$. Los puntos D, E, F y G se eligieron como se muestra en la figura, de manera que $\overline{ED} \perp \overline{AB}$, $\overline{FG} \perp \overline{BC}$, $DE = FG = 1$, y $EF = 2$. Muéstrese que el área de $\triangle CFG$ es $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, o bien $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

34. Muéstrese que el área de un dodecágono regular con lados de longitud 2 es $6(4 + 2\sqrt{3})$. (Sugerencia: La figura que se muestra a continuación es un pentágono $BDEFG$ que es $\frac{1}{6}$ del dodecágono regular cuyos lados tienen longitud 2. Encuéntrese la longitud AC y empléese para encontrar el área de $\triangle ABC$. Despues, restense las áreas de los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle CFG$.)



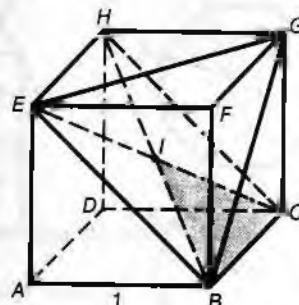
(Ejercicios 31, 32)



SOLUCION DE PROBLEMAS

La longitud de las aristas del cubo es 1.

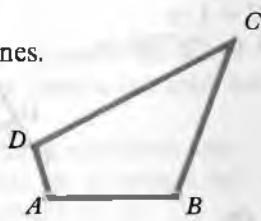
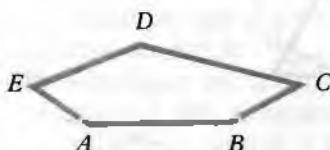
1. Encuéntrese la longitud de \overline{BE} .
2. Encuéntrese la longitud de \overline{BH} .
3. Encuéntrese el área de $\triangle BEG$.
4. Encuéntrese el área del rectángulo $BCHE$.
5. Encuéntrese el área de $\triangle BIC$.



11.4 Área de polígonos regulares

El costo de construcción de un edificio depende de la longitud de las paredes exteriores, es decir, del perímetro de la construcción. Es obvio que un edificio grande requiere más bloques, vigas y materiales para ventanas. En consecuencia, al diseñar un edificio, un arquitecto puede plantearse la cuestión de qué polígono regular proporcionará la mejor área para un perímetro dado.

Para esto son necesarias dos definiciones.

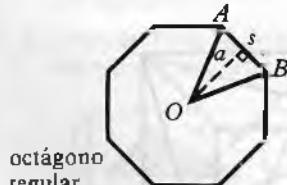


$$p = AB + BC + CD + DE + AE$$

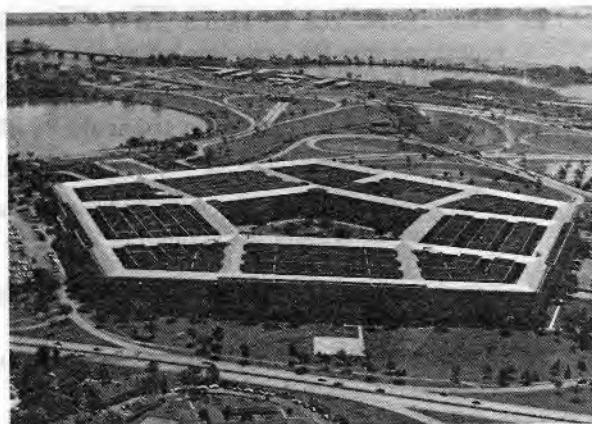
$$p = AB + BC + CD + AD$$



Estas dos definiciones se emplean para desarrollar una fórmula para el área de un polígono regular de n lados. La tabla que se muestra a continuación resulta útil para analizar dos ejemplos.



	Área de $\triangle ABO$	Perímetro (p)	Área del polígono
octágono	$\frac{1}{2}as$	$p = 8s$	$8 \times \frac{1}{2}as = \frac{1}{2}a(8s)$ $= \frac{1}{2}ap$
decágono	$\frac{1}{2}as$	$p = 10s$	$10 \times \frac{1}{2}as = \frac{1}{2}a(10s)$ $= \frac{1}{2}ap$



Definición 11.4

El **perímetro (p)** de un polígono es la suma de las longitudes de los lados del polígono.

Definición 11.5

La **apotema (a)** de un polígono regular es la distancia de su centro a un lado.

Teorema 11.5 Dado un polígono regular de n lados de longitud s y apotema a , el área A está dada por la fórmula $A = (\frac{1}{2})ans = (\frac{1}{2})ap$, donde el perímetro $p = ns$.

Ejemplo

La longitud de cada lado de un hexágono regular es 4. Encuéntrense la apotema y el área del hexágono regular.

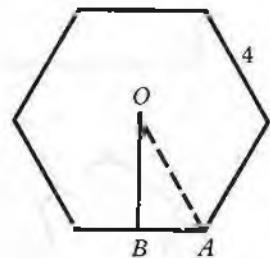
$\triangle OAB$ es un triángulo $30^\circ-60^\circ-90^\circ$. Por tanto,

$$AB = 2, OA = 4 \text{ y}$$

$$a = OB = 2\sqrt{3}.$$

Aplicando el teorema 11.5, área $= \frac{1}{2}(2\sqrt{3}) \cdot 6 \cdot 4 = 24\sqrt{3}$.

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a \quad n \quad s \end{array}$$



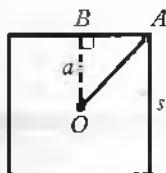
APLICACION

Si un edificio cuadrado y un edificio con forma de hexágono regular tienen el mismo perímetro (p), ¿cuál es la relación entre sus áreas?

1. $\triangle OAB$ es un triángulo $45^\circ-45^\circ-90^\circ$.

Por tanto, la apotema $a = AB =$

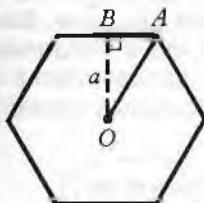
$$= \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p}{8}.$$



$$\text{Área del cuadrado} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{8} \cdot p.$$

2. $\triangle OAB$ es un triángulo $30^\circ-60^\circ-90^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{La apotema } a &= \sqrt{3}AB = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}s\right) = \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}p}{12}. \end{aligned}$$



$$\text{Área del hexágono} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}p \cdot p.$$

Dado que $\frac{\sqrt{3}}{2 \times 12} > \frac{1}{2 \times 8}$, el área del hexágono es mayor que el área del cuadrado. Por tanto, un edificio hexagonal proporciona mayor área que un edificio cuadrado con el mismo perímetro.

EJERCICIOS

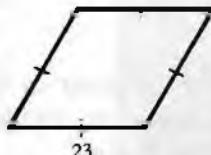
A.

En los ejercicios 1 a 6, encuéntrese el perímetro de la figura dada.

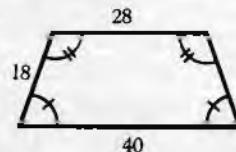
1.



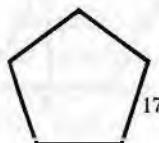
2.



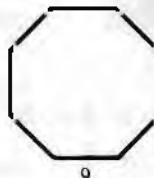
3.



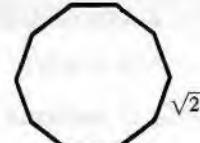
4.



5.

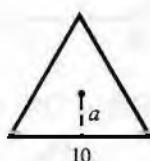


6.

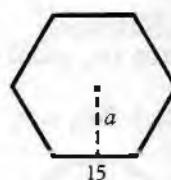


En los ejercicios 7 a 9, encuéntrense la apotema y el área de cada polígono regular dado.

7.



8.



9.

**ACTIVIDADES**

En las actividades de la sección anterior se encontraron las áreas de algunas regiones en un tablero sin usar ninguna fórmula del área.

Complétense la tabla siguiente. Búsquese una fórmula para las áreas de estos polígonos en función del número de clavos que delimitan a cada figura (d) y del número de puntos interiores (i).

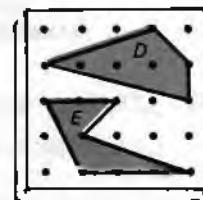
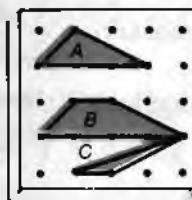
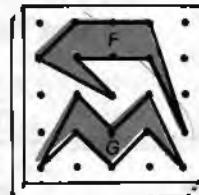


Figura	Número de clavos en el límite (d)	Número de puntos interiores (i)	$\frac{d}{2} + i$	Área del polígono
A	?	?	?	?
B	7	0	$\frac{7}{2} + 0$	$\frac{5}{2}$
C	?	?	?	?
:				



B.

10. Encuéntrese el área de un hexágono regular con apotema $3\sqrt{3}$.

12. Si el área de un hexágono regular es $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$, ¿cuáles son la apotema y la longitud de cada lado?

C.

14. Si un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro, demuéstrese que la razón entre sus áreas es 2 a 3.

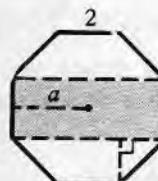
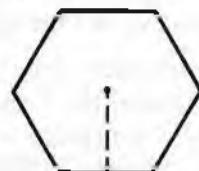
15. El área de un hexágono regular es $50\sqrt{3}$ pies cuadrados. ¿Cuáles son el perímetro y la apotema?

16. La longitud de los lados de un octágono regular es 2. ¿Cuál es su apotema?

17. Un granjero quiere construir un corral con 100 metros de valla y ha de decidir la forma del corral.
Rellénese la siguiente tabla y véase si se le puede hacer alguna recomendación al granjero.

11. Encuéntrese el área de un octágono regular con lados de longitud 5 y apotema k .

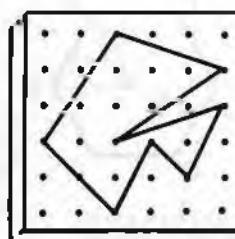
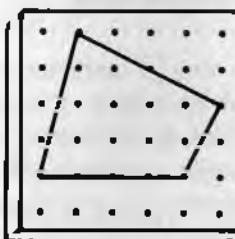
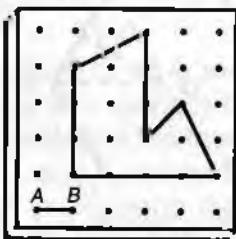
13. Si la apotema de un hexágono regular es 5 m, ¿cuáles son el perímetro y el área?



Longitud	Ancho	Perímetro	Área
48 m	?	100 m	?
45 m	?	100 m	?
40 m	?	100 m	?
35 m	?	100 m	?
30 m	?	100 m	?
25 m	?	100 m	?

SOLUCION DE PROBLEMAS

Encuéntrese el perímetro de cada uno de los polígonos de este tablero. Obsérvese que $AB = 1$.



11.5 Comparación entre perímetros y áreas de polígonos semejantes

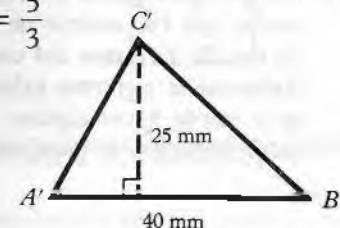
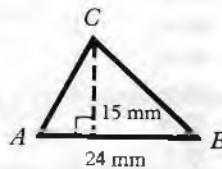
Para diseñar el sistema de aire acondicionado de un edificio, un ingeniero debe poder responder a preguntas como las siguientes:

1. ¿Qué diferencia hay entre el paso de aire de un conducto de 7 pulgadas \times 14 pulgadas y uno de 5 pulgadas \times 10 pulgadas?
2. ¿Qué será más económico, dos conductos de 5 pulgadas \times 10 pulgadas o uno de 7 pulgadas \times 14 pulgadas?

Para responder a estas preguntas, es necesario hacer una comparación entre las áreas de las secciones transversales de un rectángulo de 5×10 y de otro de 7×14 , es decir, de un par de polígonos semejantes.

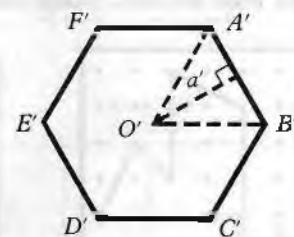
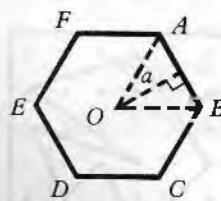
Estúdiense los dos ejemplos siguientes, en los que se comparan las áreas de un par de triángulos semejantes y de un par de hexágonos semejantes.

Ejemplo 1 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ con $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C}{BC} = \frac{5}{3}$



$$\frac{\text{perímetro } \triangle A'B'C'}{\text{perímetro } \triangle ABC} = \frac{5}{3} \quad \frac{\text{área } \triangle A'B'C'}{\text{área } \triangle ABC} = \frac{\frac{1}{2}(40)(25)}{\frac{1}{2}(24)(15)} = \frac{500}{180} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Ejemplo 2 $A'B'C'D'E'F' \sim ABCDEF$ con $\frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{1}$



$$\frac{\text{perímetro } (A'B'C'D'E'F')}{\text{perímetro } (ABCDEF)} = \frac{2}{1} \quad \frac{\text{área } (A'B'C'D'E'F')}{\text{área } (ABCDEF)} = \frac{6 \cdot A(\triangle A'O'B')}{6 \cdot A(\triangle AOB)} = \frac{\frac{1}{2}a'A'B'}{\frac{1}{2}aAB} = \left(\frac{2}{1}\right)^2$$

Los ejemplos anteriores se resumen en esta tabla.

	Razón de los lados correspondientes	Razón de los perímetros	Razón de las áreas
Ejemplo 1	$\frac{A'B'}{AB} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^2$
Ejemplo 2	$\frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\left(\frac{2}{1}\right)^2$

Estos ejemplos sugieren los teoremas siguientes.

Teorema 11.6

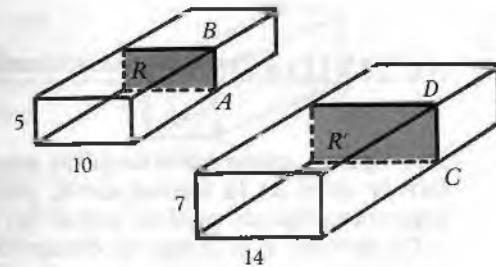
La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.

Teorema 11.7

La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.

APLICACION

Ahora se responderá a las dos preguntas planteadas al principio de esta sección por medio de una comparación entre las áreas y los perímetros de las secciones transversales rectangulares de los dos conductos.



$$\frac{CD}{AB} = \frac{7}{5} \quad \frac{\text{área}(R')}{\text{área}(R)} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = \frac{2}{1} \quad \frac{\text{perímetro}(R')}{\text{perímetro}(R)} = \frac{7}{5}$$

Conclusión: El área de la sección transversal (y por tanto la cantidad de aire movido) del conducto mayor es casi el doble que la del otro, aunque el perímetro de su sección transversal es sólo $\frac{7}{5}$ mayor que la del conducto menor. En consecuencia, se requerirá menos material para construir un conducto grande que para construir dos conductos pequeños.

EJERCICIOS**A.**

Supóngase que las longitudes de los lados de dos cuadrados son 4 y 8, respectivamente.

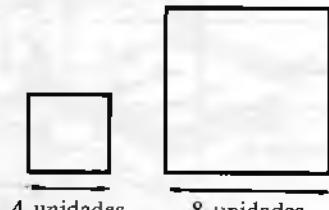
1. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?

2. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

La razón entre las longitudes de los lados de dos pentágonos regulares es 13:20.

3. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?

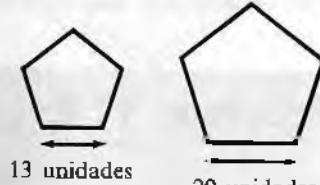
4. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?



4 unidades

8 unidades

(Ejercicios 1, 2)



13 unidades

20 unidades

(Ejercicios 3, 4)

B.

5. La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

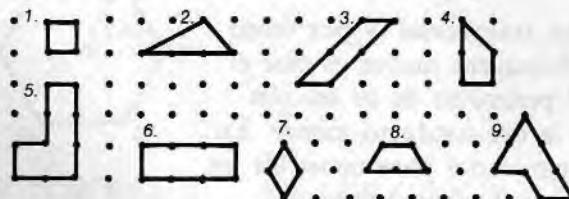
6. Si la razón entre las áreas de dos polígonos semejantes de n lados es $\frac{36}{25}$, ¿cuál es la razón entre sus perímetros?

7. La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es $\frac{25}{9}$, y la suma de las dos áreas es 272. Encuéntrense las áreas de los dos polígonos.

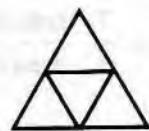
ACTIVIDADES

Hay figuras, como los triángulos equiláteros, con las que se pueden formar otras de la misma forma, pero más grandes. ¿Cuáles de las siguientes figuras podrían entrar en esta clasificación?

Contéstese a la pregunta dibujando en papel punteado o recortando cuatro copias de cada una de estas piezas e intentando acoplarlas para formar una figura mayor de la misma forma.

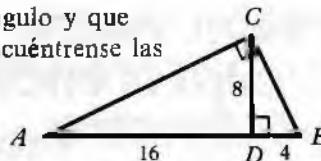


Un «reptil»



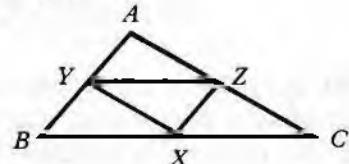
8. Supóngase que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo y que $CD \perp AB$. Si $CD = 8$, $AD = 16$ y $BD = 4$, encuéntrense las razones entre estas áreas.

a. $\frac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle CBD)}$ b. $\frac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle ABC)}$

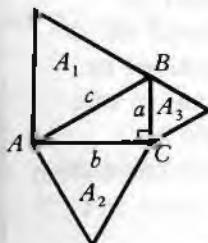


C.

9. Supóngase que los puntos X , Y y Z son puntos medios de los lados de $\triangle ABC$. Encuéntrese la razón $A(\triangle XYZ):A(\triangle ABC)$.

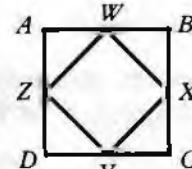


10. Supóngase que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c y catetos a y b . Constrúyanse triángulos equiláteros a los lados de $\triangle ABC$ como se muestra en la figura. Si las áreas de estos triángulos son A_1 , A_2 y A_3 , como se muestra, demuéstrese que

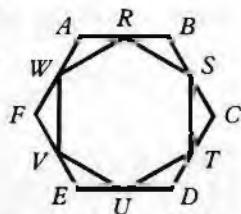


$$\frac{A_2 + A_3}{A_1} = 1.$$

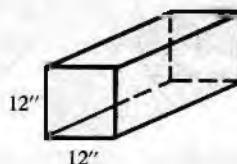
11. Los puntos W , X , Y y Z son puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$. Encuéntrese $\frac{A(ABCD)}{A(WXYZ)}$.



12. Los puntos R , S , T , U , V y W son puntos medios de los lados del hexágono regular $ABCDEF$. Encuéntrese $\frac{A(ABCDEF)}{A(RSTUVW)}$.



13. Se construyó un conducto para aire acondicionado con una sección transversal cuadrada de 12 pulgadas de lado. ¿Qué longitud debe tener un lado del conducto para que su sección transversal admita doble cantidad de aire?

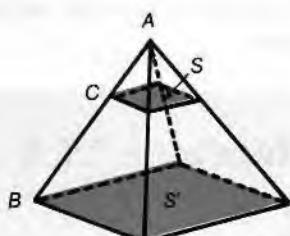


14. Si la cantidad de aire admitida por un conducto cuadrado de 10 pulgadas se va a incrementar en un 30 %, ¿de qué tamaño debe construirse el nuevo conducto cuadrado? (Redondéese el resultado a la $\frac{1}{2}$ pulgada más próxima.)

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

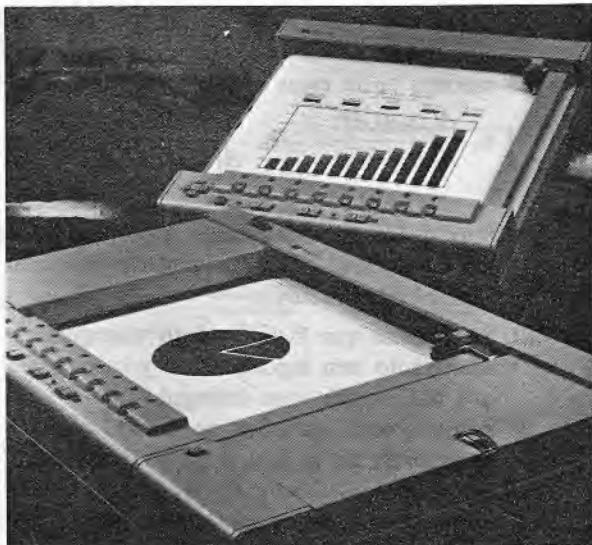
Una pirámide cuadrada se corta por un plano que pasa por el punto C y la arista AB . Si el plano es paralelo a la base cuadrada, resulta una sección transversal cuadrada.

Si $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{3}$, encuéntrese $\frac{A(S)}{A(S')}$.

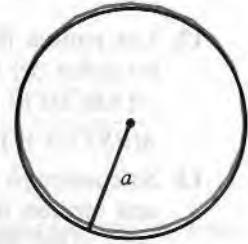
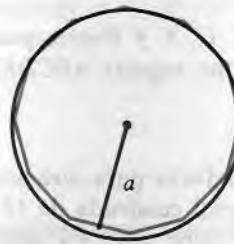
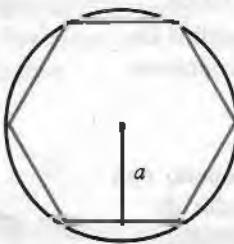
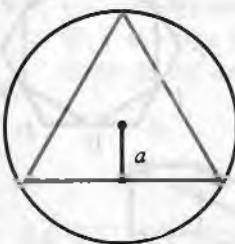


11.6 La razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo

En las gráficas por computador, la impresora dibuja algo que parecen ser líneas curvas. En realidad, la pluma del graficador dibuja segmentos sucesivos de recta tan cortos que el efecto final es una línea curva. Este mismo concepto se emplea para encontrar la circunferencia de un círculo.



Estas figuras muestran una secuencia de polígonos regulares que poco a poco se aproximan a un círculo.



Al incrementarse el número de lados de un polígono regular, poco a poco su forma se aproxima a la de un círculo circunscrito. Además, su perímetro se aproxima a un número fijo que recibe el nombre de *circunferencia* del círculo, y la apotema se acerca al radio del círculo circunscrito.

El siguiente teorema es básico para la teoría de los círculos.

Definición 11.6

La **circunferencia de un círculo** es el número al que se aproximan los perímetros de los polígonos regulares inscritos conforme se incrementa el número de lados de los polígonos regulares.

Teorema 11.8 La razón entre la circunferencia y el diámetro es la misma para todos los círculos.

EXPLICACION DE LA PRUEBA

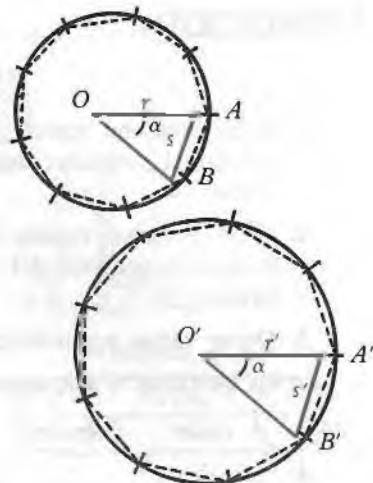
1. Selecciónense dos círculos cualesquiera e inscríbase en ellos un polígono regular de n lados.
2. Un par de triángulos isósceles semejantes $\triangle AOB$ y $\triangle A'OB'$ están determinados por un lado de cada polígono.
3. Por tanto, las razones $\frac{s}{r}$ y $\frac{s'}{r'}$ son iguales y $\frac{ns}{r} = \frac{n's'}{r'}$.
4. Los números ns y $n's'$ igualan los perímetros p y p' de los dos polígonos regulares. Por tanto,

$$\frac{p}{r} = \frac{p'}{r'}$$

5. Al incrementarse el número de lados n , los perímetros p y p' se aproximan a las circunferencias C y C' . Por tanto,

$$\frac{C}{r} = \frac{C'}{r'} \text{ y } \frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'}$$

La razón $\frac{C}{d}$ es un número irracional, lo que significa que no puede escribirse exactamente como un decimal. Algunas aproximaciones de este número son 3.14 , $3\frac{1}{7}$ y 3.14159 .

**Definición 11.7**

La razón $\frac{C}{d}$, que es el mismo número real para cualquier círculo, se representa por π (la letra griega pi).

Teorema 11.9 Dado un círculo de radio r y diámetro d , la circunferencia C está dada por la fórmula $C = \pi d = 2\pi r$.

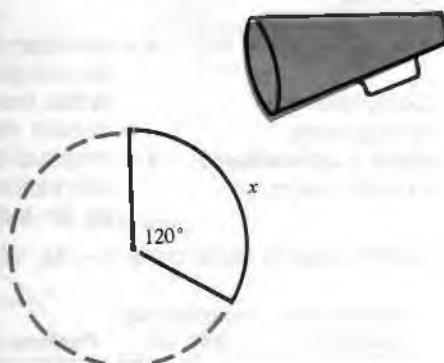
APLICACION

El animador de un espectáculo quiere diseñar un modelo para un megáfono. Este diseño es una porción de un círculo limitado por un ángulo central y su arco interceptado. Si los lados del modelo tienen 15 pulgadas y el ángulo central mide 120° , encuéntrese la longitud del arco interceptado.

Solución. Puede establecerse una proporción entre la longitud del arco, la circunferencia del círculo, la medida del ángulo central y la medida en grados del círculo.

$$\frac{120}{360} = \frac{x}{\text{circunferencia}} = \frac{x}{2\pi 15}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{30\pi \text{ pulgadas}} \quad \text{o} \quad x = 10\pi \doteq 31.4 \text{ pulgadas}$$



EJERCICIOS

A.

- Si un polígono regular de 100 lados está inscrito en un círculo, el perímetro del polígono es casi igual a la ? del círculo.
- Si un polígono regular de 100 lados está inscrito en un círculo, la apotema del polígono es casi igual al ? del círculo.
- Dense varias aproximaciones para el valor π .

En los ejercicios 4 a 8, encuéntrense los números que faltan.

	radio	diámetro	circunferencia
4.	2	<u>?</u>	4π
5.	<u>?</u>	6	<u>?</u>
6.	$7/\pi$	<u>?</u>	<u>?</u>
7.	<u>?</u>	<u>?</u>	8π
8.	<u>?</u>	<u>?</u>	16

B.

9. En un círculo, ¿a qué es igual la razón $\frac{C}{\pi}$?

ACTIVIDADES

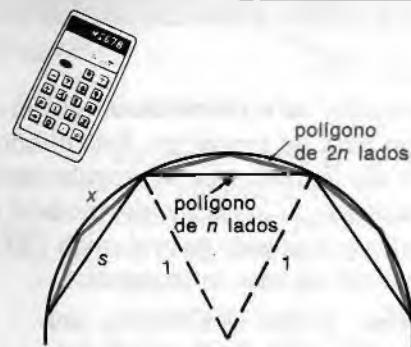
Cálculo de un valor aproximado para π . (Empléese una calculadora.) Se puede probar la siguiente fórmula.

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}} \quad s = \text{longitud de un lado de un polígono regular de } n \text{ lados inscrito en un círculo de radio 1.}$$

Completese la siguiente tabla y approxímese el valor de π .

Completar la tabla y aproxímate el valor de π .

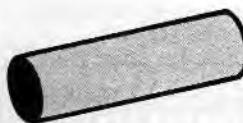
Continúese la tabla para $n = 48, 96, 192, 384$ y 768 .



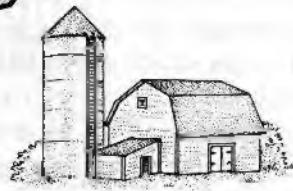
Número de lados (n)	Longitud del lado (s)	Perímetro ($n \cdot s$)	Perímetro ÷ diámetro	Longitud de los lados del polígono de $2n$ lados (x)
6	1	6	3	$\sqrt{2 - \sqrt{4 - (1)^2}} = 0.517638$
12	0.517638	6.211656	3.105828	$\sqrt{2 - \sqrt{4 - (0.517638)^2}} = 0.261052$
24	0.261052	?	?	

10. Encuéntrese la longitud de un arco interceptado por un ángulo central de 60° en un círculo con radio 10.
(Preséntese la respuesta en función de π .)

11. Un rectángulo de cartulina se enrolla para formar un tubo de 12 pulgadas de largo y 3 pulgadas de diámetro.
¿Cuál es el área del rectángulo de cartulina?

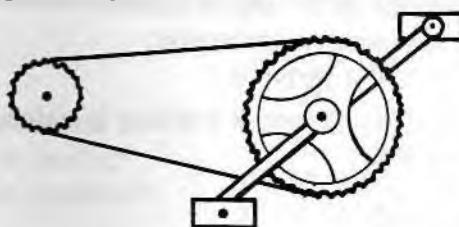


12. Si un galón de pintura cubre 400 pies cuadrados, ¿cuántos galones se necesitan para pintar un granero (sin contar el tejado) que mide 10 pies de diámetro y 50 pies de altura?



13. En una máquina grande, los centros de dos poleas están separados 16 pies, y el radio de cada polea es 24 pulgadas.
¿Qué longitud debe tener la correa para que abarque a las dos poleas?

14. En los pedales de una bicicleta, el piñón más grande tiene 50 dientes, y el pequeño, 20. Cuando los pedales completan dos vueltas ¿cuántas vueltas da la rueda?



C.

15. Una torre redonda, con una circunferencia de 10 metros, está rodeada por una valla situada a dos metros de la torre. ¿Cuál es la longitud de la valla?

16. ¿Qué distancia recorre una bicicleta por cada 25 vueltas de una rueda si el diámetro exterior de cada rueda es de 29 pulgadas?



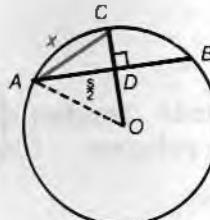
17. Supóngase que el ecuador terrestre es un círculo perfecto con radio de 4000 millas, y que se ciñe una cuerda a su alrededor. Supóngase que luego se añadió un trozo de cuerda de 40 pies y se estiró para formar una valla, ¿qué distancia hay entre la valla y la Tierra?

SOLUCION DE PROBLEMAS

Empléese dos veces el teorema de Pitágoras para probar la fórmula utilizada en la actividad anterior.

Dado: $OC = 1$.
 $AB = s$, $AC = x$.
 $AD = \frac{s}{2}$.

Encuéntrense: OD , CD y x .



11.7 Área de círculos

Un inspector de construcciones debe asegurarse de que la tubería principal de abastecimiento de agua sea suficientemente grande para satisfacer la demanda de agua requerida en cada parte. ¿Cuántas veces es mayor la cantidad de agua que puede conducir una tubería principal de 6 pulgadas que una de 4 pulgadas?

Para mostrar que el volumen mayor es $2\frac{1}{4}$ veces el volumen menor, debe compararse el área de la sección transversal circular de la tubería grande con el área de la sección transversal circular de la tubería pequeña.

La figura siguiente ayuda a explicar la definición de área de un círculo.



El área de un polígono inscrito de n lados es una buena aproximación al área del círculo circunscrito cuando n tiene un valor grande.

Un polígono regular inscrito puede cortarse en triángulos que pueden luego disponerse para formar un paralelogramo.

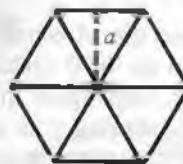
Una aproximación cercana al área del paralelogramo es $\frac{1}{2}Ca$, $\frac{1}{2}(2\pi r)a$, o bien πra .

Esta aproximación mejora cuando aumenta el número de lados del polígono regular.

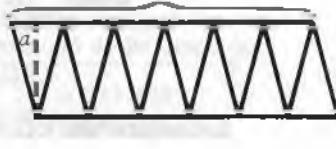


Definición 11.8

El área de un círculo es el número al que se aproximan las áreas de los polígonos regulares inscritos de n lados a medida que n aumenta.



alrededor de $\frac{1}{2}C$
alrededor de $\frac{1}{2}C$



A medida que aumenta el número de lados, el número de triángulos que componen el paralelogramo también aumenta.

alrededor de $\frac{1}{4}C = \pi r$



La apotema a se aproxima al radio r y el área $\pi r a$ se aproxima a πr^2 .

Teorema 11.10 Dado un círculo de radio r , el área A está dada por la fórmula $A = \pi r^2$.

APLICACION

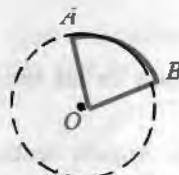
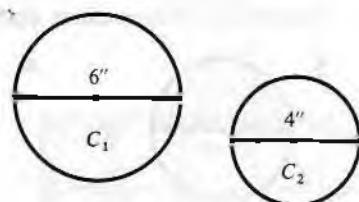
La cantidad de agua que puede conducir una tubería de 6 pulgadas puede compararse con el agua que conduce una tubería de 4 pulgadas. Esto puede hacerse formando la razón de las áreas.

$$A(C_1) = \pi(3)^2 = 9\pi$$

$$A(C_2) = \pi(2)^2 = 4\pi$$

$$\frac{A(C_1)}{A(C_2)} = \frac{9\pi}{4\pi} = 2.25 \text{ ó } 2\frac{1}{4} \text{ veces más}$$

Puede usarse la fórmula para el área de un círculo para encontrar el área de una región que recibe el nombre de sector.



AOB es un sector de $\odot O$.

Definición 11.9

Un **sector** es una región acotada por un ángulo central y su arco interceptado.

La razón $\frac{\text{área de un sector}}{\text{área del círculo}}$ es igual a la razón: $\frac{\text{medida en grados del ángulo central}}{360^\circ}$.

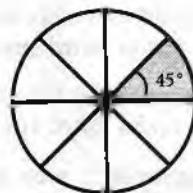
APLICACION



Si una pizza de 16 pulgadas se corta en ocho pedazos congruentes, ¿cuál será el área de cada pedazo?

$$\frac{\text{área de un pedazo}}{64\pi \text{ pulgadas cuadradas}} = \frac{45^\circ}{360^\circ}$$

$$\text{Área (un pedazo)} = \frac{1}{8} \times 64\pi \text{ pulgadas}^2 = 8\pi \text{ pulgadas}^2.$$

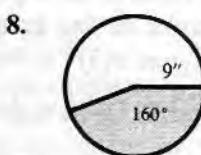
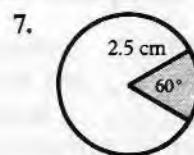
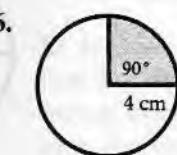
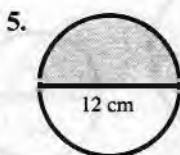


EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 4, expírense las respuestas con un número exacto (empleese el número π).

1. Encuéntrese el área de un círculo con radios:
a. 2. b. $5\frac{1}{2}$. c. π . d. $\sqrt{3}$.
2. Encuéntrese el área de un círculo con diámetros:
a. 6. b. $7\frac{1}{2}$. c. 3π . d. $4\sqrt{2}$.
3. Encuéntrese el área de un círculo con circunferencias:
a. 2π . b. 6π . c. $\sqrt{6}\pi$. d. 10.
4. Encuéntrese el radio de un círculo con áreas:
a. 144π . b. 225π . c. 12π . d. 100.

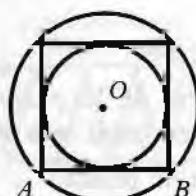
En los ejercicios 5 a 8, encuéntrese el área de los sectores sombreados. Respóndase en función de π .



9. Encuéntrese el área aproximada de los sectores siguientes. Empléese 3.14 para π .
 - a. Ángulo central, 50° . b. Ángulo central, 75° .
Radio, 3 cm. Radio, 3 m.
 - c. Ángulo central, 15° .
Radio, 10 pulgadas.
10. Si el área de un sector es un décimo del área del círculo, ¿cuál es el ángulo central del sector?

B.

11. Dos círculos tienen radios de 4 cm y 5 cm, respectivamente. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?
12. La razón entre las áreas de dos círculos es 9 a 4. ¿Cuál es la razón entre sus radios?
13. La razón entre las áreas de dos círculos es 8 a 5. ¿Cuál es la razón entre sus radios?
14. Encuéntrese el área de los círculos inscritos y circunscritos de un cuadrado cuyo lado mide 4 cm.



$$AB = 4 \text{ cm}$$

En los ejercicios 15 a 17, encuéntrese el área de la región sombreada. La longitud de un lado del cuadrado es 3.

15.



16.

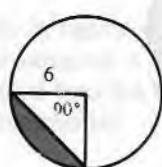


17.



En las figuras de los ejercicios 18 a 20, las áreas sombreadas reciben el nombre de **segmento circular**. Encuéntrese el área de cada uno de ellos.

18.

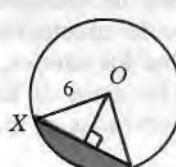


19.



$$m\angle AOB = 120$$

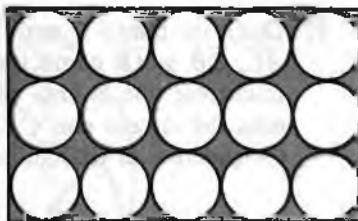
20.



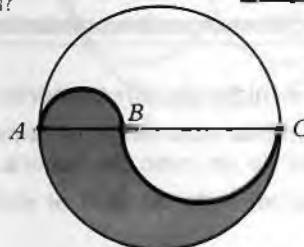
$$m\angle XOY = 60$$

C.

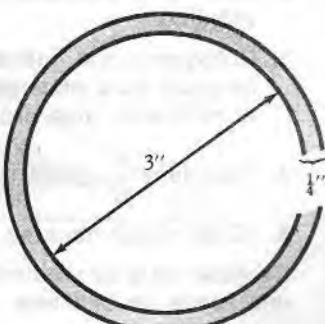
21. Unos círculos, con radios iguales, están colocados en un rectángulo como ilustra la figura. ¿Qué fracción de la región rectangular está sombreada?



22. ¿Cuántas veces es mayor la cantidad de agua conducida por una tubería de 12 pulgadas de diámetro que la conducida por una tubería de 10 pulgadas?

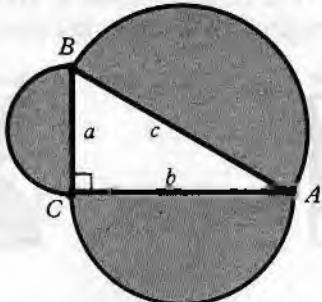


23. Si $BC = 2AB$, ¿qué fracción del círculo está sombreada?

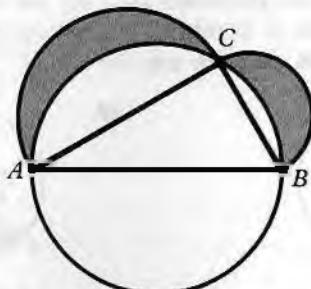


24. La figura siguiente representa la sección transversal de una tubería de $\frac{1}{4}$ de pulgada de espesor que tiene un diámetro interior de 3 pulgadas. Encuéntrese el área de la región sombreada.

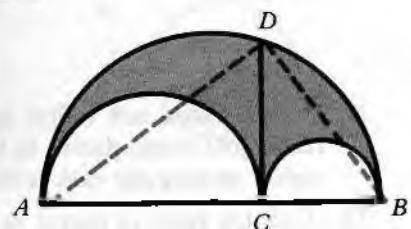
25. Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, muéstrese que el área de un semicírculo sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos sobre los dos catetos del triángulo.



26. Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, su círculo circunscrito y los semicírculos sobre los catetos, muéstrese que la suma de las áreas de las dos regiones sombreadas es igual al área de $\triangle ABC$.



27. Dado un punto C entre A y B , los semicírculos sobre \overline{AC} , \overline{CB} y \overline{AB} como ilustra la figura, si $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, muéstrese que el área de la región sombreada es igual al área del círculo con \overline{CD} como diámetro. (Sugerencia: Considérese el triángulo rectángulo $\triangle ADB$)



ACTIVIDADES

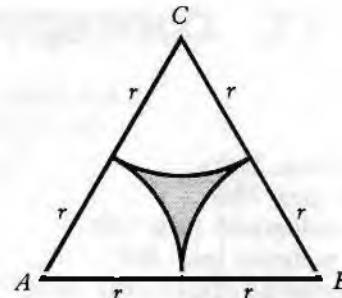
Estímese el valor de π midiendo directamente.

1. Elíjase un objeto circular que tenga el tamaño aproximado de la parte superior de un cubo de basura.
2. Mídase su diámetro (d) redondeando al milímetro más próximo.
3. Colóquese una cuerda alrededor del objeto y mídase su longitud para encontrar su circunferencia (C) redondeando al milímetro más próximo.
4. Calcúlese $\frac{C}{d}$. ¿Qué precisión tiene la estimación de π ?
5. ¿Qué puede hacerse para mejorar la aproximación?

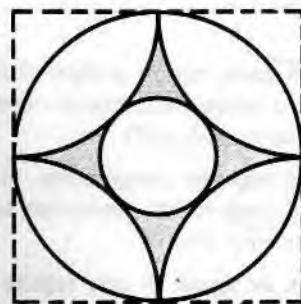
Reptítase este procedimiento con una lata de aluminio y con una rueda de bicicleta.



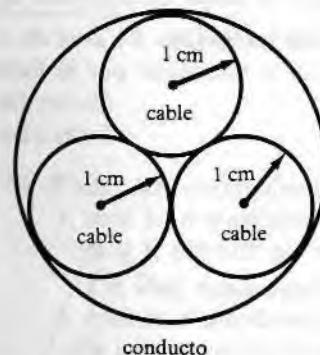
28. Si $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero, ¿qué fracción del triángulo está sombreada?



29. En la figura siguiente, el círculo pequeño es tangente a cuatro arcos circulares. ¿Qué fracción del círculo grande está sombreada?



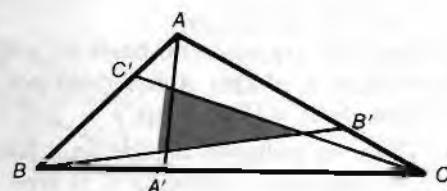
30. Los conductos de cables telefónicos están construidos para contener tres cables (todos circulares y tangentes al conductor y entre sí) de 1 cm de radio. ¿Qué fracción del conductor está ocupada por los cables?



SOLUCION DE PROBLEMAS

Los puntos A' , B' y C' son puntos de trisección de los lados de $\triangle ABC$. El área de la región triangular sombreada es $\underline{\hspace{2cm}}$ del área de $\triangle ABC$.

Empléese una cuadricula pequeña o alguna técnica de medición para determinar si la región blanca debe llenarse con la fracción $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ ó $\frac{1}{8}$.



Capítulo 11 Conceptos importantes

Términos

- Región poligonal (pág. 394)
- Unidad cuadrada (pág. 398)
- Altura de un paralelogramo (pág. 399)
- Perímetro de un polígono (pág. 408)
- Apotema de un polígono regular (pág. 408)

- Circunferencia de un círculo (pág. 416)
- Pi (π) (pág. 417)
- Área de un círculo (pág. 420)
- Sector (pág. 421)
- Segmento circular (pág. 423)

Postulados

Postulado del área. A cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominado área. El área de una región R se representa por $A(R)$.

Postulado del área de regiones congruentes. Si dos rectángulos o dos triángulos son congruentes, entonces las regiones que acotan tienen la misma área.

Postulado de la suma de áreas. Si una región poligonal es la unión de n regiones poligonales que no se solapan, entonces su área es la suma de las áreas de estas n regiones.

Postulado del área del rectángulo. El área de un rectángulo de longitud ℓ y ancho w está dada por la fórmula ℓw .

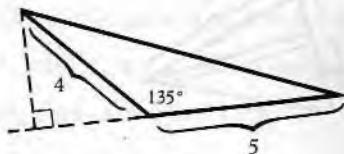
Teoremas

- 11.1 Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h , el área A está dada por la fórmula $A = bh$.
- 11.2 Dado un triángulo con base b y altura correspondiente h , el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$.
- 11.3 Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitudes a , b y c , entonces $A(\triangle ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.
- 11.4 Dado un trapecio con bases b_1 y b_2 , y altura h , el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.
- 11.5 Dado un polígono regular de n lados de longitud s y apotema a , el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}ans = \frac{1}{2}ap$, donde el perímetro $p = ns$.
- 11.6 La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.
- 11.7 La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.
- 11.8 La razón entre la circunferencia y el diámetro es la misma para todos los círculos.
- 11.9 Dado un círculo de radio r y diámetro d , la circunferencia C está dada por la fórmula $C = \pi d = 2\pi r$.
- 11.10 Dado un círculo de radio r , el área A está dada por la fórmula $A = \pi r^2$.

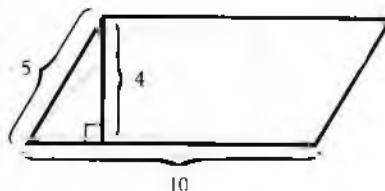
Capítulo 11 Resumen

1. Encuéntrese el área de las siguientes figuras. Supóngase que los segmentos que parecen paralelos o congruentes lo son.

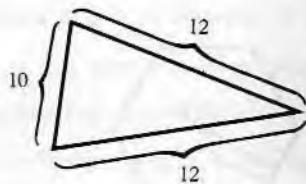
a.



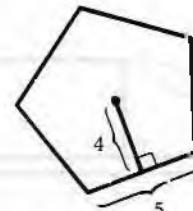
b.



c.



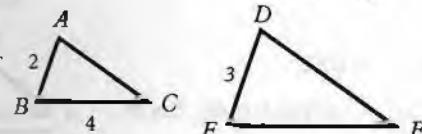
d.



2. Dado: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, área ($\triangle ABC$) = 3

a. Encuéntrese la longitud de la altura de \overline{AB} .

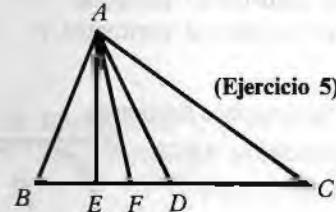
b. Encuéntrese el área de $\triangle DEF$.



3. La circunferencia del círculo O' es doble que la del círculo O . ¿Cuál es la razón entre las longitudes de sus diámetros?

4. Encuéntrese el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de 6 cm de diámetro.

5. En $\triangle ABC$, \overline{AE} es una altura, \overline{AF} es la bisectriz de un ángulo y \overline{AD} es una mediana. ¿Qué segmento divide a $\triangle ABC$ en dos triángulos de igual área?



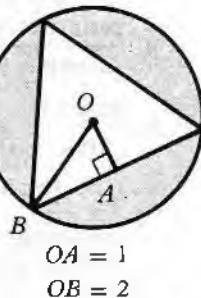
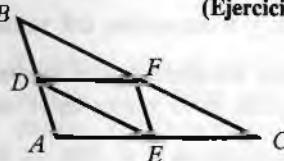
6. Encuéntrese el área de las porciones sombreadas.

Supóngase que los segmentos son congruentes si lo parecen.

(Ejercicio 6)

7. En $\triangle ABC$, D , E y F son puntos medios.

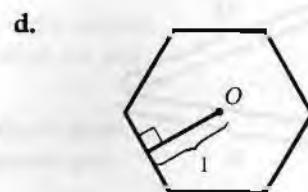
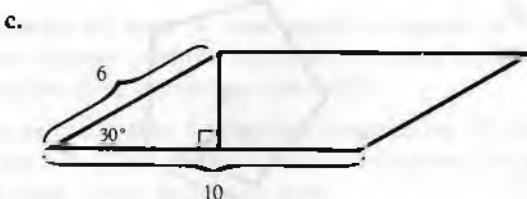
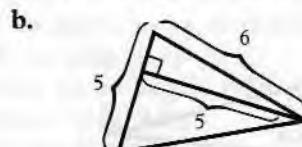
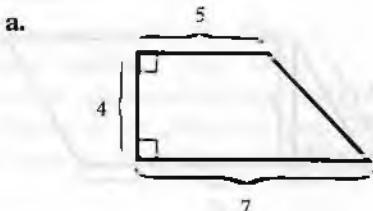
Encuéntrese la razón $\frac{\text{área} (\triangle DEF)}{\text{área} (\triangle ABC)}$.



8. Encuéntrese el área de un círculo que está inscrito en un cuadrado de área 16 unidades cuadradas.

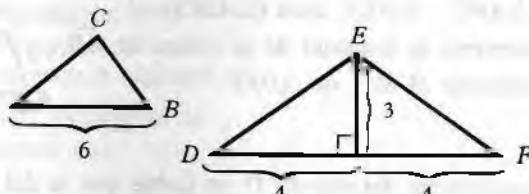
Capítulo 11 Examen

1. Encuéntrese el área de las figuras siguientes. Supóngase que los segmentos que parecen paralelos o congruentes lo son.



2. Dado: $\triangle ABC \sim \triangle DFE$

- a. Encuéntrese el perímetro de $\triangle ABC$.
b. Encuéntrese el área de $\triangle ABC$.

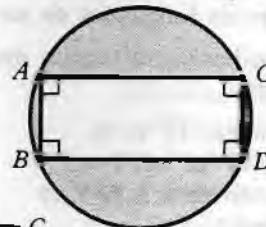
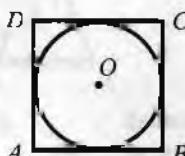


3. Encuéntrese el área de las porciones sombreadas, donde $AB = 10$ y $BC = 26$.

4. Si se duplica cada lado de un polígono regular, ¿en qué afecta esto al perímetro y al área?

5. Encuéntrense las dos razones siguientes.

a. $\frac{\text{perímetro del cuadrado } ABCD}{\text{circunferencia del círculo } O}$
b. $\frac{\text{área } (ABCD)}{\text{área } (\odot O)}$

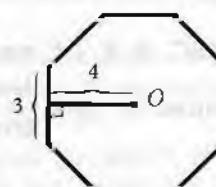


- c. ¿Las respuestas a y b dependen del tamaño de la figura?

6. Si dos triángulos son semejantes y la razón entre sus perímetros es 2:1, ¿cuál es la razón entre sus áreas?

7. Encuéntrese la circunferencia y el área de un círculo de diámetro 4 cm. ¿En qué son diferentes?

8. Encuéntrese el área del polígono regular.



(Ejercicio 8)

Repaso de álgebra

Evalúese cada fórmula para la letra indicada.

1. $A = bh$; para A si $b = 6$ cm, $h = 4$ cm.
2. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$; para A si $h = 7$ cm, $b_1 = 9$ cm, $b_2 = 15$ cm.
3. $C = 2\pi r$; para C si $r = 14$ cm (empléese $\pi \doteq 3.14$).
4. $A = 4\pi r^2$; para A si $r = 14$ cm.
5. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; para V si $r = 14$ cm.
6. $V = \frac{1}{3}Bh$; para h si $V = 100$ cm³, $B = 30$ cm².
7. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$; para h si $A = 36$ cm², $b_1 = 12$ cm, $b_2 = 8$ cm.
8. $A = 4\pi r^2$; para r si $A = 100\pi$ m².
9. $A = \pi rl + \pi r^2$; para A si $r = 4\frac{1}{2}$ pulgadas, $l = 8\frac{1}{2}$ pulgadas.
10. $A = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$; para s si $A = 6\sqrt{3}$ yardas cuadradas.

Despejese x .

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 11. $(x + 2)(x - 3) = 0$. | 12. $x^2 - 9 = 0$. | 13. $x^2 + 4x + 4 = 0$. |
| 14. $x^2 - 6x + 9 = 0$. | 15. $x^2 + 5x = -6$. | 16. $x^2 + x - 2 = 0$. |
| 17. $x(x - 1) = 90$. | 18. $6x^2 - 7x = 5$. | 19. $1 - 8x + 15x^2 = 0$. |
| 20. $x^2 - 11x = 180$. | 21. $x(x - 5) + 6 = 0$. | 22. $0 = 5x - 3x^2 + 2$. |

Resuélvase.

23. Encuéntrese el área de un campo rectangular cuya longitud es 100 yardas, y su ancho, 79 yardas.
24. Encuéntrese el área de un cuadrado cuyo perímetro es 20 cm.
25. El perímetro de un rectángulo es 40 cm, y su longitud, 5 cm mayor que su ancho. Encuéntrese el área.
26. Una laguna circular tiene 48 metros de diámetro. ¿Cuál es su área?
27. La base de un triángulo es tres veces la longitud de su altura. Si estas dos medidas suman 72 mm, ¿cuál es el área del triángulo?
28. La longitud y el ancho de un rectángulo suman 100 yardas. Su diferencia es 7 yardas. ¿Cuál es el área del rectángulo?
29. Las dimensiones de un jardín rectangular son 40 m \times 24 m. Alrededor del jardín hay un camino. El área del jardín y el camino es 1232 m². Encuéntrese el ancho del camino.
30. El ancho de un rectángulo es 16 cm. La diagonal es 4 cm mayor que la longitud. Encuéntrese la longitud del rectángulo.

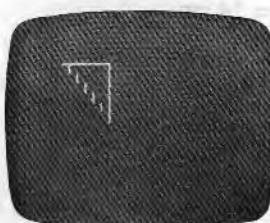
LA GEOMETRÍA EN NUESTRO MUNDO

Gráficas por computador: transformaciones

El análisis de formas es un uso importante de las gráficas por computador. Primero se analizará la idea de mover una forma en un plano. Los computadores pueden programarse para mover una figura a diferentes posiciones de la pantalla. Estos movimientos se llaman *transformaciones*.

Una de las transformaciones que pueden emplearse es la traslación. En un programa, el mandato que aparece a continuación hará que el punto (x, y) se mueva 50 unidades hacia la derecha y 70 unidades hacia arriba. Es una línea de un programa la que causa la traslación de una figura.

H PLOT X,Y TO X+50, Y+70



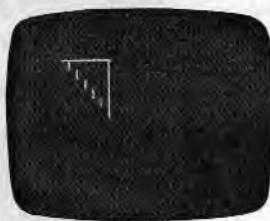
Antes de la traslación



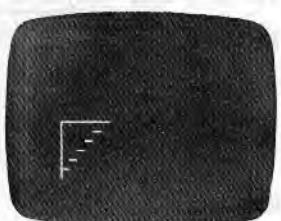
Después de la traslación

En un programa, el mandato que aparece a continuación hará que el punto (x, y) sufra una rotación de 90° sobre su origen en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Podría ser una línea de programa la que causa la rotación de una figura.

H PLOT X, Y TO -Y,X



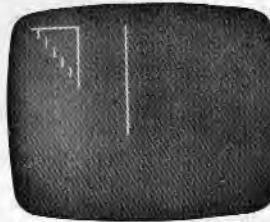
Antes de la rotación



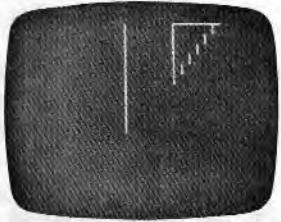
Después de la rotación

En un programa, el mandato que aparece hará que un punto (x, y) se refleje en el eje de las y . Podría ser una línea de un programa la que cause la reflexión de una figura.

H PLOT X,Y TO -X,Y



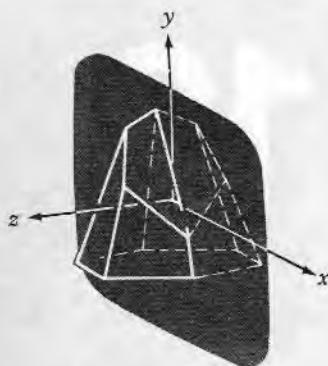
Antes de la reflexión



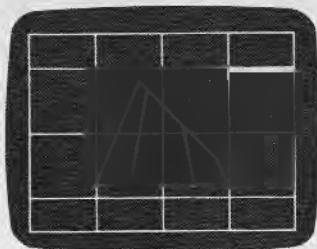
Después de la reflexión

La ventaja de usar computadores para mostrar diferentes vistas de un objeto es particularmente interesante para sólidos tridimensionales. La ilustración muestra un ejemplo de sólido de este tipo.

A continuación se muestra cómo puede servir un computador para presentar diferentes vistas de este sólido.



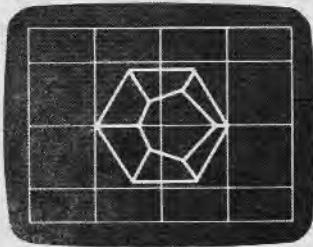
En cada una de estas figuras, la pantalla del computador muestra al sólido de acuerdo con el plano xy .



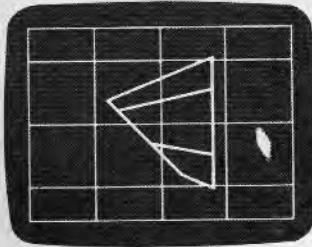
Una vista del plano xy .



Una vista después de una rotación de 90° sobre el eje de las y .

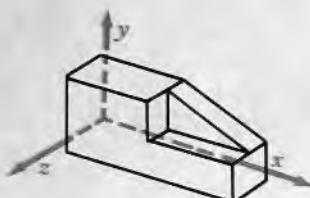


Una vista después de una rotación de 90° sobre el eje de las x .



Una vista después de una rotación de 90° sobre el eje de las z .

1. Para el sólido que se muestra a continuación, elabórense bosquejos de las cuatro vistas presentadas antes.
2. Hágase un bosquejo tridimensional propio. Para este sólido, dibújense las cuatro vistas mostradas antes.



CAPITULO

12

- 12.1** Pirámides y prismas 434
- 12.2** Área de prismas y pirámides 440
- 12.3** Volumen de prismas 444
- 12.4** Volumen de pirámides 448
- 12.5** Área y volumen de cilindros 452
- 12.6** Área y volumen de conos 456
- 12.7** Área y volumen de esferas 460
- 12.8** Poliedros regulares 464

Conceptos importantes 468 *Resumen* 469 *Examen* 470

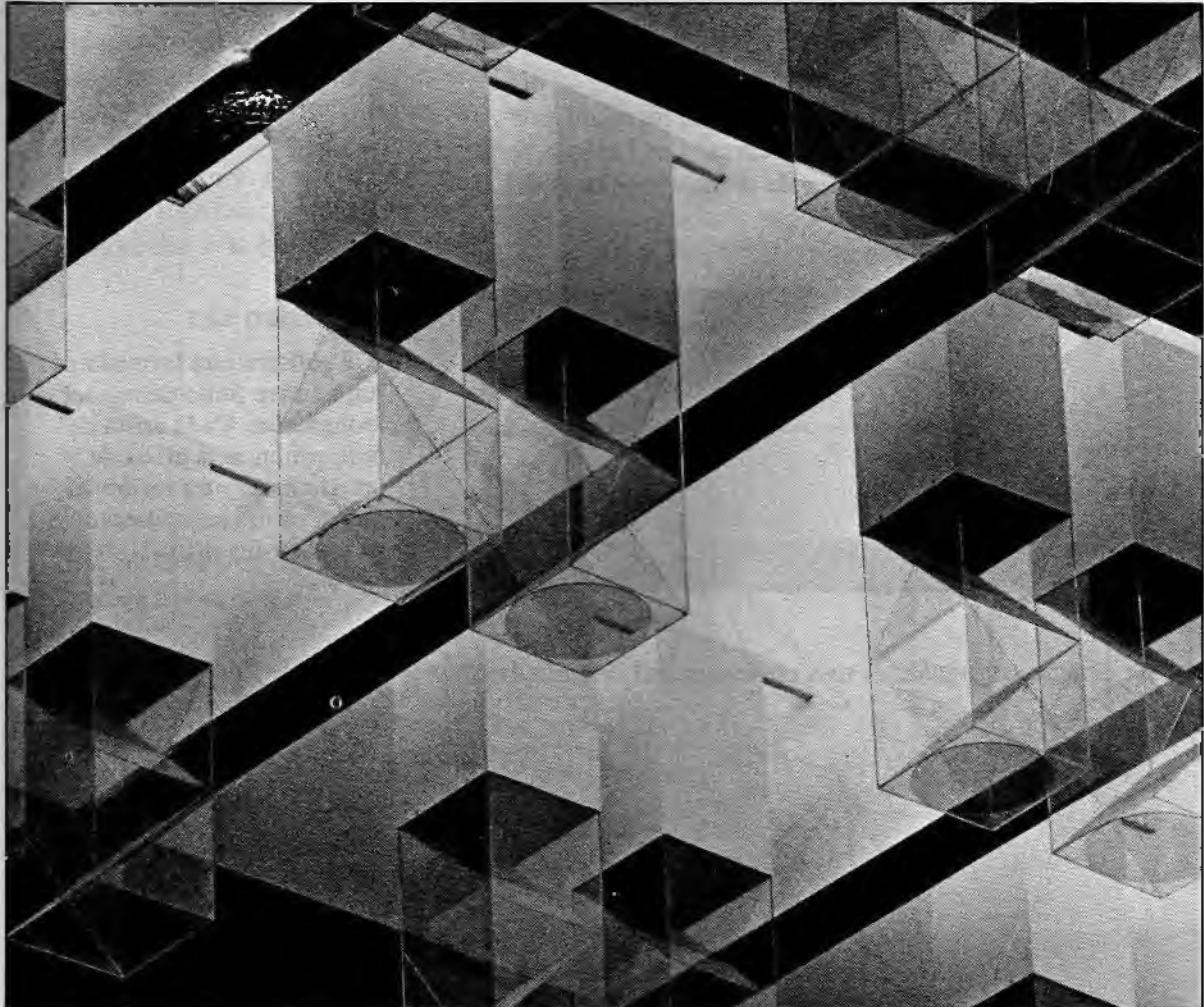
Técnicas para la solución de problemas

Hágase un dibujo preciso 471

La geometría en nuestro mundo

Navegación 472

Sólidos

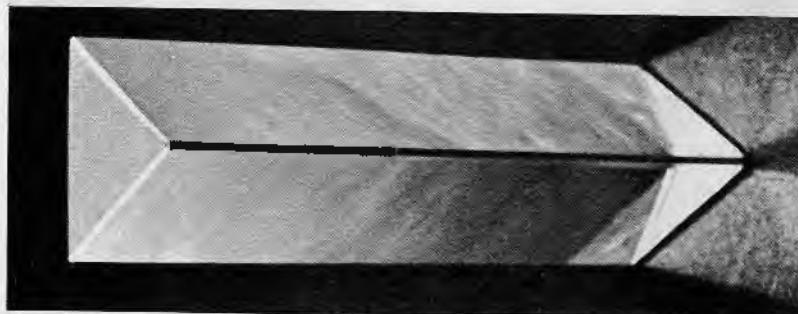


12.1 Pirámides y prismas



La forma de pirámide fue utilizada por muchas civilizaciones antiguas. Los egipcios construyeron las que aparecen en la fotografía; estas pirámides son ejemplos de *poliedros*.

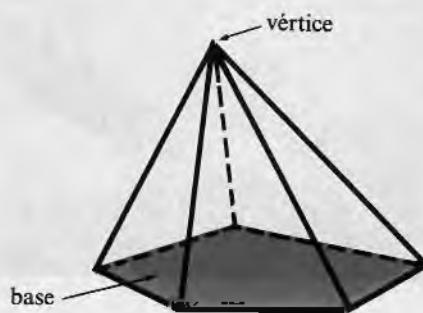
Un *poliedro* es un objeto tridimensional formado por regiones poligonales denominadas *caras*. Los lados y vértices de las caras reciben los nombres de *aristas* y *vértices* del poliedro.



Definición 12.1

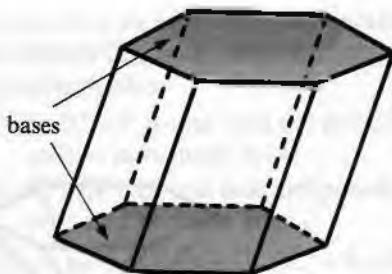
Un **poliedro** está formado por un número finito de regiones poligonales. Cada arista de una región es la arista de exactamente otra región. Si dos regiones se intersecan, lo hacen en una arista o en un vértice.

Este prisma triangular es una clase especial de poliedro.



Definición 12.2

Una **pirámide** es un poliedro en el cual todas las caras, menos una, tienen un vértice común. Ese vértice común es el *vértice de la pirámide*, y la cara que no contiene al vértice es la *base de la pirámide*.

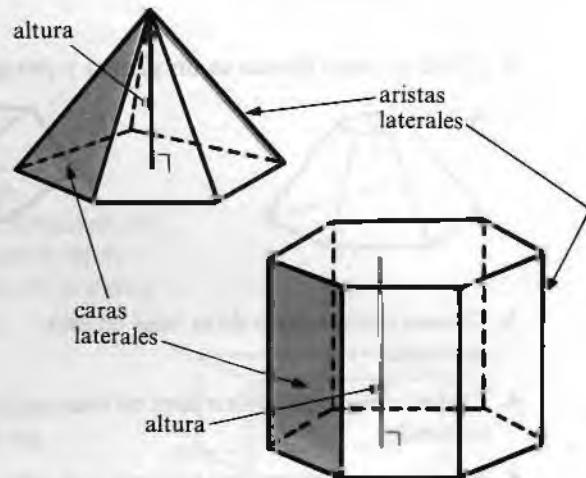


Definición 12.3

Un **prisma** es un poliedro que satisface estas condiciones:

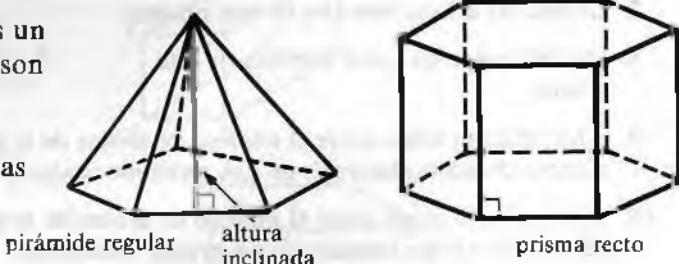
1. Hay un par de caras congruentes sobre planos paralelos (*bases*).
2. Todas las demás caras son paralelogramos.

Tanto en los prismas como en las pirámides, las caras que no son bases se llaman *caras laterales*, y las aristas que no pertenecen a la base se llaman *aristas laterales*. Un segmento que esté entre las bases de un prisma y sea perpendicular a ellas es una *altura*. Un segmento que vaya del vértice a la base de una pirámide y sea perpendicular a la base, es una *altura*.



Una pirámide es *regular* si su base es un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes.

Un prisma es un *prisma recto* si sus aristas laterales son perpendiculares a las bases.



Este teorema establece una característica importante de los prismas.

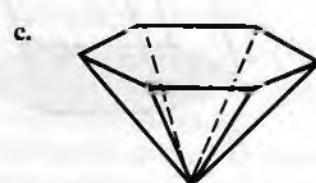
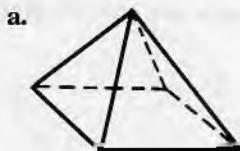
Teorema 12.1

Las aristas laterales de un prisma son paralelas y congruentes.

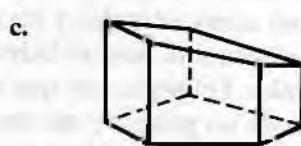
EJERCICIOS

A.

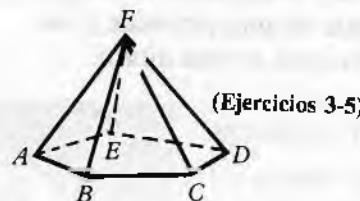
1. ¿Cuál de estas figuras no es una pirámide y por qué?



2. ¿Cuál de estas figuras es un prisma y por qué?



3. Citense cinco aristas de la base en esta pirámide.



(Ejercicios 3-5)

4. Citense cinco aristas laterales en esta pirámide.

5. Identifiquense cinco caras laterales en esta pirámide.

6. Citense las aristas de la base de este prisma.

7. Citense las aristas laterales de este prisma.

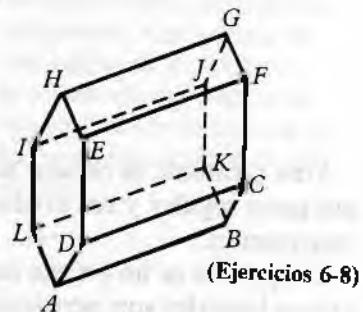
8. Identifiquense las caras laterales de este prisma.

9. ¿Qué relación existe entre el número de aristas de la base y el número de aristas laterales de una pirámide cualquiera?

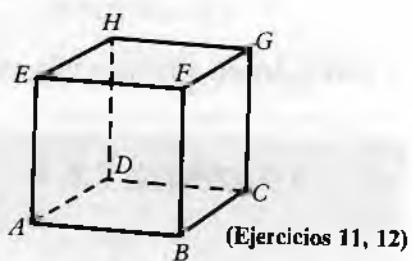
10. ¿Qué relación existe entre el número de aristas de la base y el número de aristas laterales de un prisma cualquiera?

11. Si se considera que el cubo que se muestra a continuación es un prisma y se tiene que $ABCD$ es una base, digase cuáles son la segunda base y las aristas laterales.

12. Para este mismo cubo, si se considera que $ABFE$ es una base, digase cuáles son la segunda base y las aristas laterales.



(Ejercicios 6-8)



(Ejercicios 11, 12)

Si las bases de un prisma son paralelogramos, el prisma recibe el nombre de *paralelepípedo*. Los ejercicios 13 a 19 tratan de paralelepípedos.

13. Si $BCGF$ es una base del prisma, dígase cuál es la segunda base.

14. Si $ABFE$ es una base del prisma, dígase cuál es la segunda base.

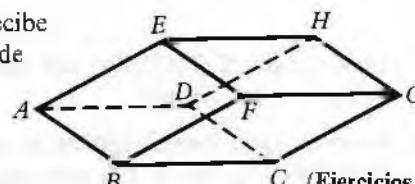
En los ejercicios 15 a 19, $BC = 8$, $AB = 6$ y $BF = 5$.

Encuéntrense las siguientes longitudes.

15. $AE = ?$ 16. $EH = ?$

17. $CD = ?$ 18. $DH = ?$

19. Dígase cuáles son las cuatro diagonales de este paralelepípedo.



(Ejercicios 13-19)

B.

20. Bosquéjese una pirámide con base en forma de cuadrilátero. Las aristas que no se ven deben dibujarse con líneas de puntos. (*Sugerencia:* Primero, dibújese la base; después, elijase el vértice y únase a los vértices de la base.)

21. Bosquéjese una pirámide con base hexagonal.

22. Bosquéjese un prisma con base hexagonal.

23. Supóngase que todas las caras de un paralelepípedo son rectángulos y que $AB = 15$ cm y $AD = 8$ cm. Muéstrese que $AC = 17$.

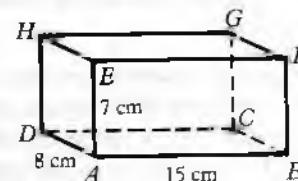
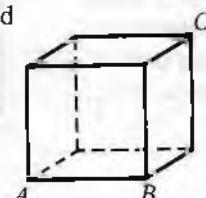
24. Muéstrese que la diagonal \overline{AG} tiene una longitud de $\sqrt{338}$.

25. Dado un paralelepípedo con todas las caras rectangulares como el que se muestra, si $EH = 10$, $DC = 4$ y $FB = 4$, encuéntrese la longitud de la diagonal \overline{HB} .

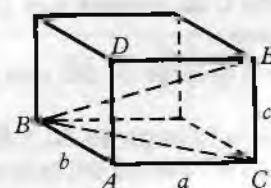
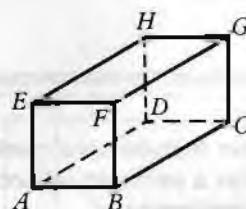
26. Supóngase que todas las caras de un paralelepípedo son rectángulos. Si $AC = a$, $AB = b$ y $EC = c$, muéstrese que $BE = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

27. En el cubo siguiente, $AB = 5$.

Encuéntrese la longitud de la diagonal \overline{AC} .

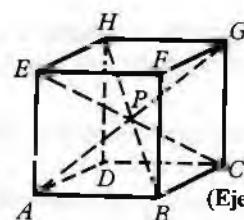


(Ejercicios 23, 24)

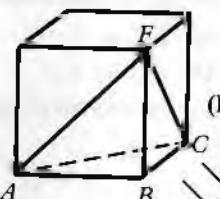


C.

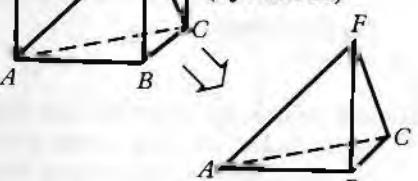
28. ¿De qué tipo es el poliedro con vértices $ABCDP$ de esta figura?
29. ¿En cuántas pirámides dividen al cubo los segmentos que van de P a cada uno de los vértices?
30. Dígase cuál es la base de cada una de las pirámides del ejercicio 29.
31. Supóngase que el cubo de la figura está cortado por un plano ACF , formando la pirámide $ABCF$. Explíquese por qué esta pirámide es regular. (Recuérdese que las aristas de un cubo siempre tienen la misma longitud.)
32. ¿Cuál es la base de la pirámide regular que resultó de cortar el cubo?
33. ¿Cuántas pirámides regulares como $ABCF$ pueden cortarse del cubo? Cítense.
34. Si se quitan cuatro pirámides como $ABCF$ del cubo de la figura, queda el poliedro $ACHF$. Cítense todas las caras de $ACHF$ y explíquese por qué son todas triángulos equiláteros.



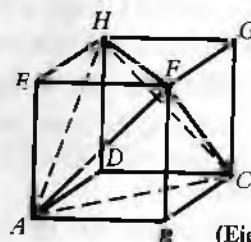
(Ejercicios 28-30)



(Ejercicio 31)



(Ejercicio 32)



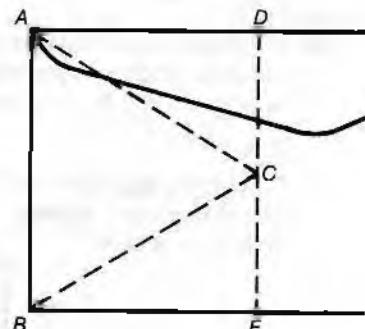
(Ejercicios 33, 34)

ACTIVIDADES

A continuación se explica un método para construir una pirámide con base triangular a partir de un sobre para cartas cerrado. Complétense la construcción.

1. Márquese el punto C de manera que $\triangle ABC$ sea un triángulo equilátero.
2. Hágase un corte a lo largo de \overline{DE} , que pase por C y sea paralelo a \overline{AB} .
3. Hágase un doblez a lo largo de \overline{AC} y \overline{BC} , adelante y atrás.
4. Sea C' el punto en el reverso del lado correspondiente a C .
5. Abrase y comprímase el sobre de manera que los puntos D y E se junten y que C y C' se separen. Péguese a lo largo de $\overline{CC'}$ y la pirámide está terminada.

Constrúyase otro sólido con este método.



35. En este paralelepípedo, explíquese por qué el punto O es el punto medio de \overline{AG} y \overline{BH} .

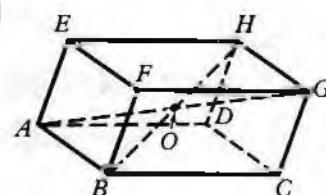
36. ¿De qué paralelogramo son diagonales los segmentos \overline{CE} y \overline{AG} ?

37. Explíquese por qué O es el punto medio de \overline{CE} .

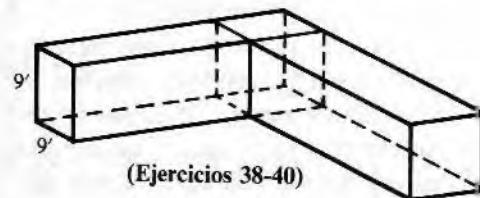
38. Una escuela tiene un pasillo de 9 pies de altura por 9 pies de ancho que hace esquina como muestra la figura. (Esto puede considerarse como la intersección de un par de paralelepípedos con caras rectangulares.) ¿Es posible hacer pasar una pétiga de 12 pies por la esquina de este pasillo? Explíquese.

39. La figura muestra una vista aérea del pasillo del ejercicio anterior. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, verifíquese que $CD = 18\sqrt{2}$.

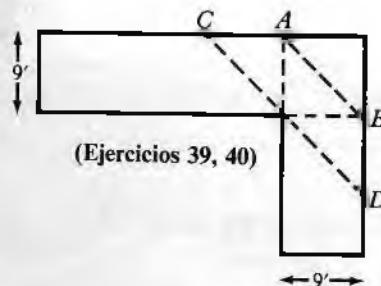
40. ¿Se podría hacer pasar por la esquina del pasillo una pétiga ligeramente más larga de $18\sqrt{2}$ pies? Explíquese.



(Ejercicios 35-37)



(Ejercicios 38-40)

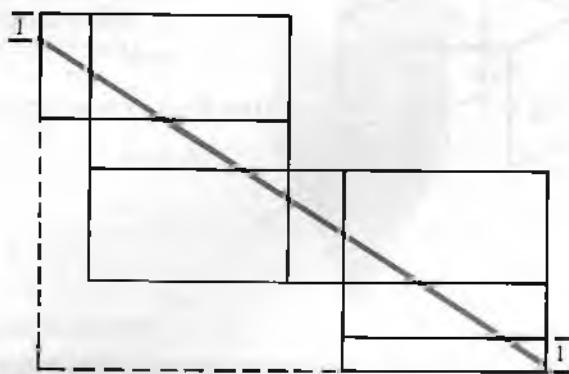
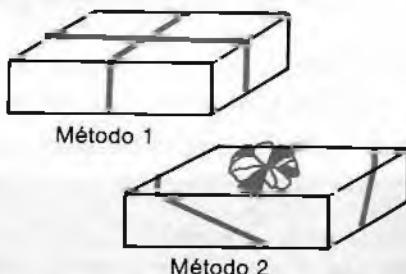


(Ejercicios 39, 40)

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Una caja de dimensiones $2 \times 4 \times 8$ puede atarse con una cinta con dos métodos diferentes. ¿Qué cantidad de cinta se requiere en cada caso?

(Sugerencia: Piénsese en cortar la caja y abrirla para calcular la cantidad de cinta que se necesita para el segundo método. En el diagrama, algunas caras se muestran dos veces.)



12.2 Área de prismas y pirámides

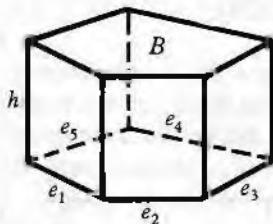
Los diseñadores profesionales y aficionados de interiores necesitan determinar la cantidad de material que se requiere para decorar superficies. En ocasiones, objetos familiares tales como mesas auxiliares o vitrinas tienen forma de prisma. Con frecuencia es necesario calcular las áreas de estas superficies.



Las áreas de prismas y pirámides pueden encontrarse usando la siguiente regla:

$$\text{Área} = \text{suma de las áreas de las caras laterales} + \text{áreas de las bases.}$$

Considérese un prisma de altura h , con caras laterales rectangulares y bases pentagonales.



Si el área de cada base es B y las aristas de la base tienen longitudes e_1, e_2, e_3, e_4 y e_5 , entonces:

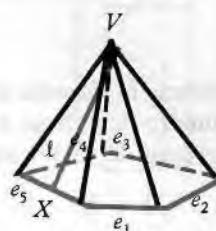
$$\begin{aligned}\text{área de las caras laterales} &= e_1h + e_2h + e_3h + e_4h + e_5h \\ &= h(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \\ &= hp, \text{ donde } p \text{ es el perímetro de la base.}\end{aligned}$$

Teorema 12.2

Dado un prisma con caras laterales rectangulares, si la altura del prisma es h y las bases tienen área B y perímetro p , entonces el área S se encuentra con la fórmula $S = hp + 2B$.

El área total de una pirámide es igual a la suma de las áreas de las caras laterales más el área de la base.

Considérese una pirámide regular con base pentagonal, altura inclinada ℓ , y aristas de la base de longitudes $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5$.



Suma de las áreas de las caras laterales =

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}e_1\ell + \frac{1}{2}e_2\ell + \frac{1}{2}e_3\ell + \frac{1}{2}e_4\ell + \frac{1}{2}e_5\ell \\ &= \frac{1}{2}\ell(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \\ &= \frac{1}{2}\ell p, \text{ donde } p \text{ es el perímetro de la base.} \end{aligned}$$

Esta información se resume en el siguiente teorema.

Teorema 12.3

Dada una pirámide regular con altura inclinada ℓ y base con área B y perímetro p , el área S se encuentra con la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\ell p + B.$$

APLICACION

En ocasiones, es necesario adaptar las fórmulas para aplicarlas a determinados objetos. Por ejemplo, considérese la plomada (un peso que se emplea en construcción) que se muestra a la derecha. Su forma es la de un prisma hexagonal con una base unida a una pirámide hexagonal en la parte inferior. Un fabricante necesita saber el área de esta pieza.

Por el dibujo se puede calcular que el área de la base es $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$. De los teoremas 12.2 y 12.3 se tiene que el área del prisma y de la pirámide es:

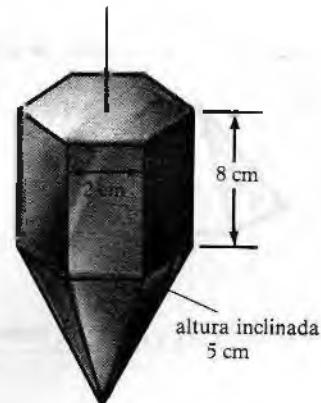
$$\text{Área del prisma} = (12)(8) \text{ cm}^2 + 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\text{Área de la pirámide} = \frac{1}{2}(5)(12) \text{ cm}^2 + 6\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Pero una base del prisma y la base de la pirámide son comunes. Dado que ninguna de estas bases es parte de la superficie de la plomada, se debe restar dos veces el área de la base.

Por tanto, el área de la plomada es:

$$\begin{aligned} &= (12)(8) + 12\sqrt{3} + \frac{1}{2}(5)(12) + 6\sqrt{3} - 2(6\sqrt{3}) \\ &= (126 + 6\sqrt{3}) \text{ cm}^2. \end{aligned}$$



EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 y 2, selecciónese la fórmula correcta para encontrar el área. p es el perímetro de la base, h es la altura, ℓ es la altura inclinada y B es el área de la(s) base(s).

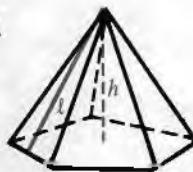
1.

a. $S = \frac{1}{2}ph + 2B$.

b. $S = ph + B$.

c. $S = ph + 2B$.

d. $S = pl + 2B$.

2.

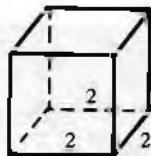
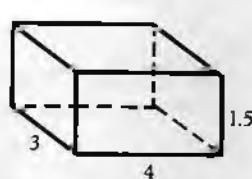
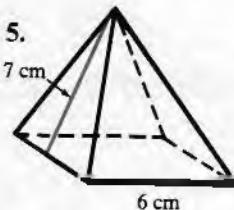
a. $S = \frac{1}{2}ph + B$.

b. $S = pl + B$.

c. $S = \frac{1}{2}pl + 2B$.

d. $S = \frac{1}{2}pl + B$.

En los ejercicios 3 a 5, encuéntrese el área de estos prismas rectos y de la pirámide regular.

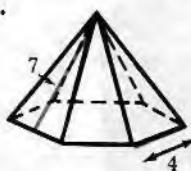
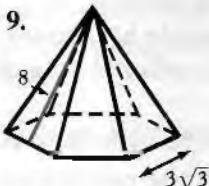
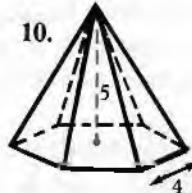
3.**4.****5.**

- 6.** Encuéntrese el área de una caja sin tapa de 5 unidades de longitud, 3 unidades de ancho y 2 unidades de altura.

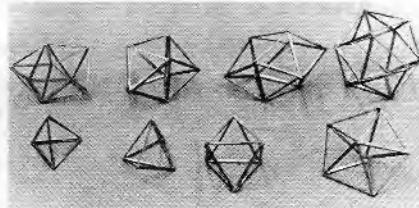
- 7.** Encuéntrese el área de un prisma recto con bases de triángulo equilátero si todas las aristas miden 2 unidades de longitud.

B.

Encuéntrense las áreas de estas pirámides regulares.

8.**9.****10.****ACTIVIDADES**

Un deltaedro es un poliedro con caras triangulares. Elabórense modelos de deltaedros con palillos y pegamento. ¿Cuáles de ellos son pirámides?

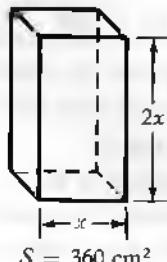


11. La superficie de un prisma con base cuadrada es 360 cm^2 , y la altura es el doble de la longitud de las aristas de la base. ¿Cuáles son las longitudes de las aristas del prisma?

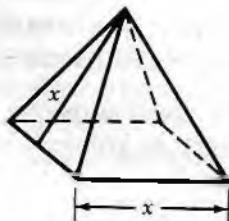
12. El área de una pirámide con base cuadrada es 48 cm^2 . Si la altura inclinada es igual a la arista de la base, ¿cuál es el área de la base?

13. ¿Cuál es la longitud de la altura de la pirámide del ejercicio anterior?

14. Si la longitud de cada arista de un prisma se duplica, ¿cómo cambia el área?



$$S = 360 \text{ cm}^2$$



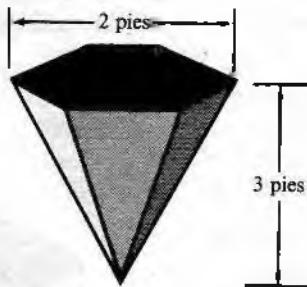
(Ejercicios 12, 13)

C.

15. Se desea cubrir unos moldes para bizcochos de 20 cm de lado por 6 cm de profundidad con un material antiadherente. Si la cantidad disponible de antiadherente cubre 100 metros cuadrados, ¿cuántos moldes podrán cubrirse?



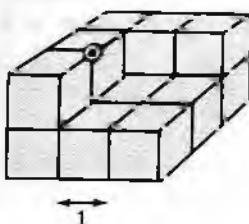
16. Un recipiente con forma de pirámide regular tiene la parte superior abierta. Esta parte es un hexágono regular con las dimensiones que muestra la figura. Si se van a pintar 100 de estos recipientes, por dentro y por fuera, con una pintura que cubre 450 pies cuadrados por galón, ¿cuántos galones se requieren?



SOLUCION DE PROBLEMAS

En la figura de la derecha, se sacaron 14 cubos para formar un sólido cuya área (incluyendo la base) es 42 unidades.

1. ¿Cómo puede cambiarse el área a 44 unidades moviendo un solo cubo?
2. ¿Cómo puede cambiarse el área a 40 unidades moviendo un solo cubo?



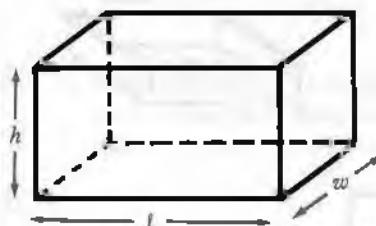
12.3 Volumen de prismas

Un ingeniero civil estima costos de construcción. En la construcción de esta carretera, un ingeniero determina la cantidad de material que debe sacarse para conformar el terreno calculando el volumen.

Hay postulados que caracterizan el concepto de volumen y se estudiarán en esta sección.



Intuitivamente se considera el volumen como la cantidad de espacio que ocupa un sólido.



Un sólido rectangular tiene longitud, ancho y altura.

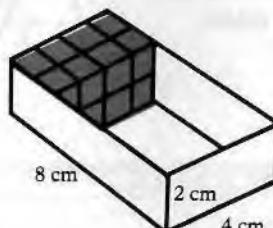
Se iniciará el estudio del volumen considerando un sólido denominado comúnmente «caja», y que se define como un sólido rectangular.

Postulado del volumen

A cada sólido se le asigna un número positivo único denominado **volumen**.

Definición 12.4

Un sólido rectangular es un prisma con bases rectangulares cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases.



Ejemplo.

Encuéntrese el volumen (V) de una caja de $8 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$.
 $V = 2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^3$
 (léase 64 centímetros cúbicos).

Esto equivale a contar el número de cubos de 1 cm de lado que caben en la caja.

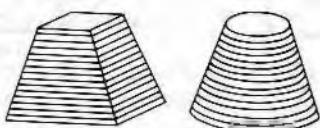
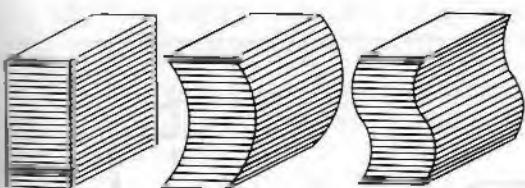


Postulado del volumen de un sólido rectangular

El volumen de un sólido rectangular es igual al producto de su longitud l , ancho w y altura h .

Postulado de la suma de volúmenes

Si un sólido es la unión de dos sólidos que no tienen puntos interiores en común, entonces su volumen es la suma de los volúmenes de los dos sólidos.



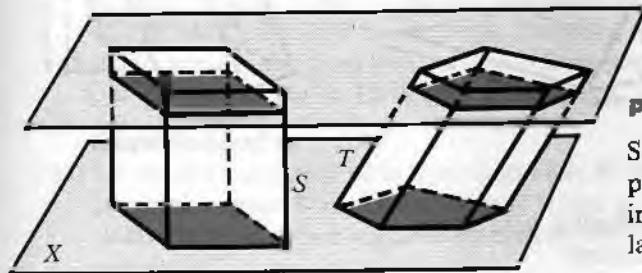
Imagínese un sólido rectangular cortado en rebanadas que pueden moverse para obtener sólidos de formas irregulares. El volumen del sólido será el mismo.

Igualmente, supóngase que dos sólidos pueden rebanarse de manera que sus partes superiores correspondientes tengan áreas iguales. La intuición sugiere que los volúmenes de los dos sólidos son iguales.

Definición 12.5

Una **sección transversal** de un sólido es una región común al sólido y a un plano que interseca al sólido.

Los ejemplos anteriores dan lugar a un postulado conocido como principio de Cavalieri, llamado así por el matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647).



Postulado de Cavalieri

Sean S y T sólidos y X un plano. Si todo plano paralelo a X que interseca a S o T , también interseca a S y a T en una sección transversal con la misma área, entonces

$$\text{Volumen } S = \text{Volumen } T.$$

Los postulados de esta sección pueden combinarse para probar el siguiente teorema.

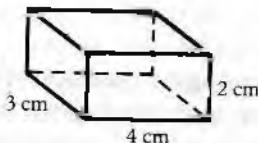
Teorema 12.4

El volumen de un prisma cualquiera es el producto de la longitud de una altura por el área de la base.

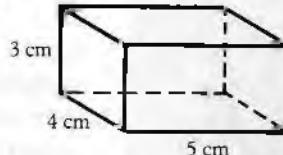
EJERCICIOS**A.**

Encuéntrense los volúmenes de las cajas siguientes.

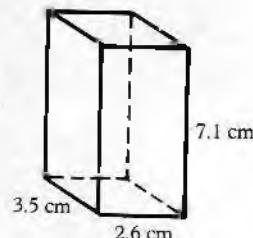
1.



2.



3.



4. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 1?

6. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 2?

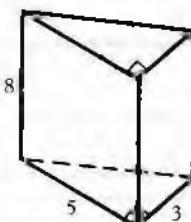
8. ¿Cuántas pulgadas cúbicas tiene un pie cúbico?

5. ¿Cuántos cubos de 2 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 1?

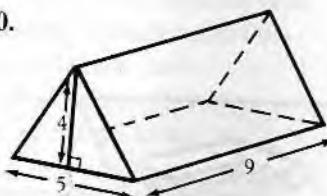
7. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 3?

Encuéntrese el volumen de los prismas de los ejercicios 9 a 11.

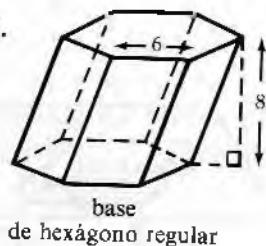
9.



10.



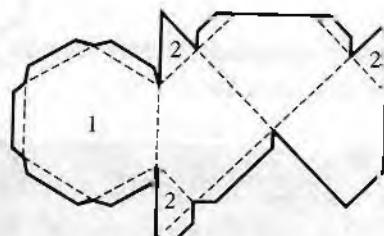
11.

**B.**

12. Si el área de la base de un prisma se duplica y la altura permanece igual, ¿cuánto aumenta el volumen?

ACTIVIDADES

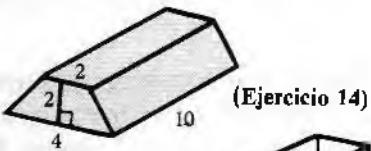
Dibújense dos copias de esta figura y constrúyanse dos sólidos.

Unanse los dos sólidos para formar un prisma.
(Al dibujar la figura, asegúrese de que el polígono 1 sea un hexágono regular y que los polígonos 2 sean triángulos 45-45-90.)

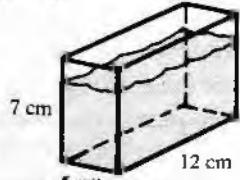
13. Si las longitudes de todos los lados de una caja se duplican, ¿cuánto aumenta el volumen?
14. Los lingotes de plata son barras moldeadas como la de la figura. Los extremos son trapecios isósceles paralelos. ¿Cuál es el volumen?
15. Un recipiente rectangular tiene 5 cm de ancho y 12 cm de longitud, y contiene agua hasta una profundidad de 7 cm. Se mete una piedra y el nivel del agua sube 1.7 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?
16. Un ingeniero necesita encontrar el volumen de una construcción para diseñar un sistema de calefacción. Encuéntrese el volumen de la construcción de la figura.
17. Si un recipiente rectangular con base cuadrada tiene 2 pies de altura y un volumen de 50 pies cúbicos, encuéntrense la longitud y el ancho de la base.
18. Supóngase que el área de la base de un prisma es x pies cuadrados, y su altura, $2x$ pies. Si el volumen del prisma es 54 pies cúbicos, ¿cuál es su altura?

C.

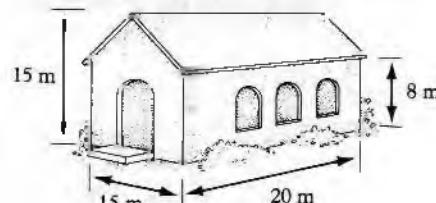
19. El plano de un ingeniero muestra un canal con sección transversal trapezoidal de 8 pies de profundidad, 14 pies a lo largo de la base, y con las paredes formando un ángulo de 45° . El canal tiene 620 pies de largo. Se estima que el costo de excavación del canal será de 1.50 dólares por yarda cúbica. Si se añade un 10% para gastos extra, ¿cuál será el presupuesto?
20. Un muro de contención de hormigón mide 80 pies de longitud, con extremos como los de la figura. ¿Cuántas yardas cúbicas de hormigón se emplearon para construir este muro?



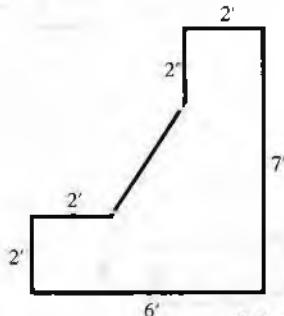
(Ejercicio 14)



(Ejercicio 15)



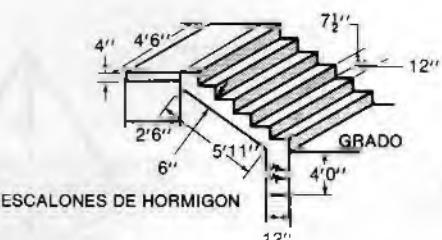
(Ejercicio 16)



(Ejercicio 20)

SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cuántas yardas cúbicas de hormigón se necesitan para los escalones de la figura?

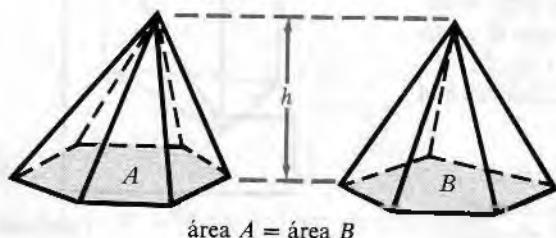
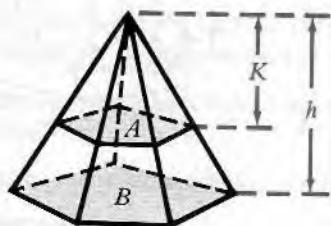


12.4 Volumen de pirámides

En muchas ocasiones es necesario encontrar el volumen de un objeto que no es ni un sólido ni un prisma regular. Este dibujo muestra un recipiente con forma de pirámide de base triangular. Conocer el volumen del recipiente es fundamental para el fabricante.



El teorema 12.7 proporciona la fórmula para encontrar el volumen de una pirámide. Primero deben presentarse otros dos teoremas, que se usan en el desarrollo de la fórmula.



Teorema 12.5

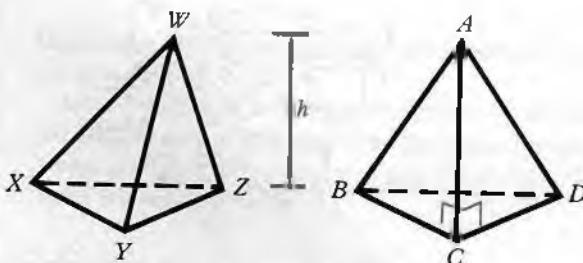
Dada una pirámide con base B y altura h , si A es una sección transversal paralela a la base y la distancia desde el vértice a la sección transversal es K , entonces

$$\frac{\text{área } A}{\text{área } B} = \left(\frac{K}{h}\right)^2$$

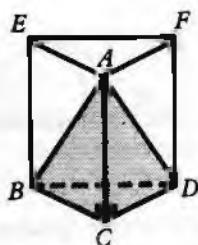
Teorema 12.6

Dos pirámides con alturas iguales y bases de igual área tienen el mismo volumen.

Supóngase que se desea encontrar el volumen de la pirámide $WXYZ$. Para hacer esto, primero debe encontrarse el volumen de la pirámide recta $ABCD$ con área de la base igual a la de $\triangle XYZ$ y altura h . Empléese el teorema 12.6.



Considérese ahora el prisma recto con base y altura iguales a las de la pirámide $ABCD$.

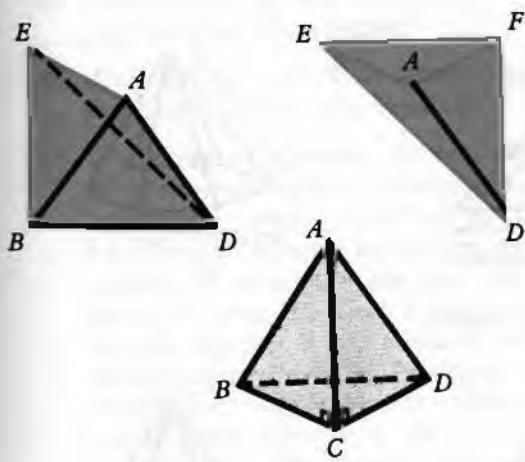


Háganse en el prisma los dos cortes siguientes:

1. Córtense desde A a través de BD .
2. Córtense desde A a través de ED .



Entonces



1. Volumen de $ABCD$ = volumen $ADEF$. Las bases de $\triangle BCD$ y $\triangle AEF$ tienen la misma área, y las alturas AC y DF son de igual longitud. Por tanto, el teorema 12.6 implica la igualdad entre volúmenes.
2. Volumen $ADEF$ = volumen $ABDE$. Estas dos pirámides tienen bases $\triangle BDE$ y $\triangle FDE$ de áreas iguales, ya que son las mitades del rectángulo $BDFE$. Las alturas de ambas pirámides se forman por un segmento perpendicular que va de A a la base opuesta, por lo que las alturas son iguales. El teorema 12.6 establece que los volúmenes son iguales.

Por tanto, el volumen de la pirámide $ABCD$ = $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma $ABCDEF$

$$= \frac{1}{3}hB.$$

Teorema 12.7

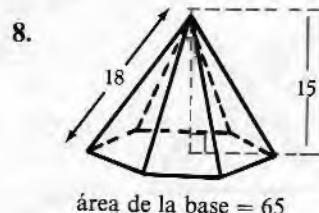
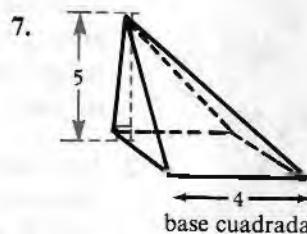
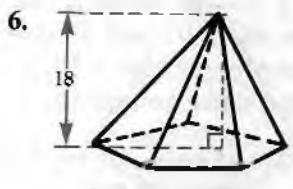
Dada una pirámide de altura h y área de la base B , el volumen se encuentra por la fórmula $V = \frac{1}{3}hB$.

EJERCICIOS**A.**

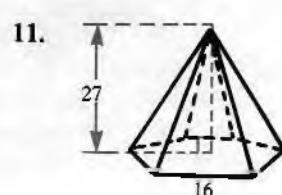
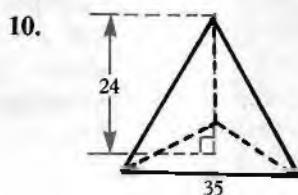
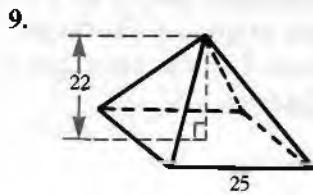
Clasifiquense los ejercicios 1 a 5 como falsos o verdaderos.

1. Si dos pirámides de alturas iguales tienen bases congruentes, entonces sus volúmenes son iguales.
2. Si dos pirámides tienen volúmenes iguales, entonces sus alturas son necesariamente iguales.
3. Si dos pirámides tienen volúmenes iguales y alturas iguales, entonces sus bases son necesariamente congruentes.
4. Si dos pirámides tienen volúmenes iguales y bases de la misma área, entonces sus alturas son necesariamente iguales.
5. Una pirámide con base cuadrada no puede tener nunca un volumen igual al de una pirámide con base triangular.

Encuéntrese el volumen de estas pirámides.

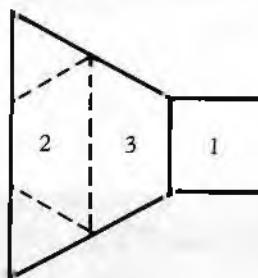
**B.**

En los ejercicios 9 a 11, encuéntrese el volumen de las pirámides regulares que se muestran.

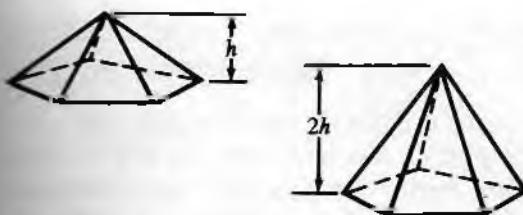
**ACTIVIDADES**

Dibújese una ampliación de esta figura, recórtense dos copias, dóblense y péguense para formar dos poliedros. ¿Se pueden unir estos dos poliedros para formar una pirámide?

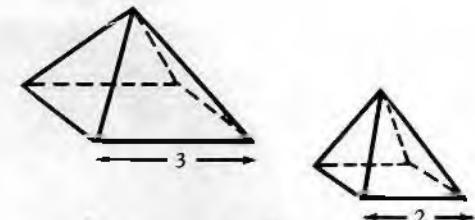
(Al dibujar la figura, asegúrese de que el polígono 1 sea un cuadrado y de que los polígonos 2 y 3, juntos, formen un hexágono regular.)



12. Las bases de estas dos pirámides tienen áreas iguales. ¿Qué relación existe entre sus volúmenes?



13. Estas dos pirámides tienen alturas iguales y bases cuadradas. ¿Qué relación existe entre sus volúmenes?

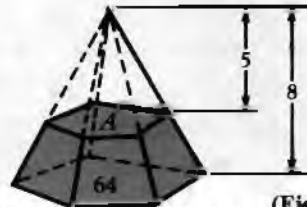


14. ¿Cuál es el área de la sección transversal A de esta pirámide?

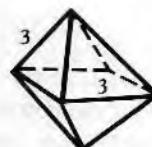
15. ¿Cuál es el volumen de la porción sombreada de esta pirámide?

16. ¿Cuál es el volumen de un octaedro regular cuyas aristas miden 3 de longitud?

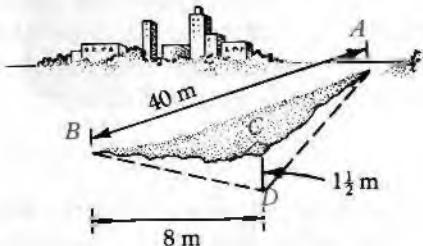
17. Una represa está situada a lo largo de un lado de un estacionamiento de vehículos. La represa empieza en el punto A y se hace más profunda a medida que aumenta su anchura. El borde superior \overline{BC} de la parte más profunda mide 8 metros de ancho. El punto B está a 40 metros de A. El punto D, el más profundo, está 1.5 metros por debajo de \overline{BC} . En D hay un desagüe que drena 50 litros por minuto. Dado que un metro cúbico tiene 1000 litros, ¿cuántas horas tardará en vaciarse la represa si está llena? (Supóngase que ABCD es una pirámide.)



(Ejercicios 14, 15)
tronco de una pirámide



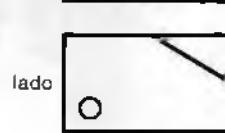
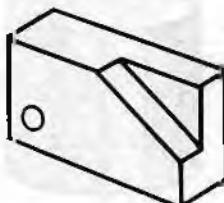
octaedro regular



SOLUCION DE PROBLEMAS

Muchos dibujos en copias heliográficas muestran la parte superior, un lado y el frente de los objetos. Obsérvese que las líneas punteadas muestran cortes que no están a la vista.

Bosquéjense dos «cortes de bloques» que tengan las vistas superior y frontal iguales y diferente visión lateral.



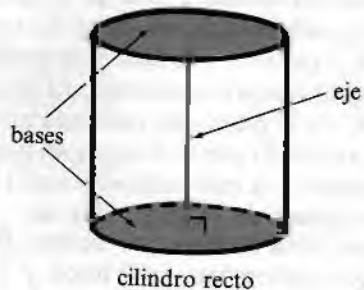
12.5 Área y volumen de cilindros



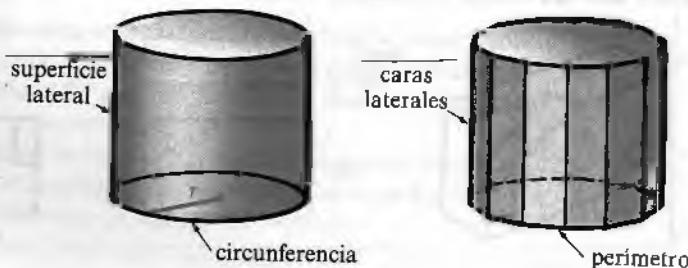
Muchos objetos de uso corriente son ejemplos de formas cilíndricas. Estos dibujos muestran algunos de ellos. En esta sección se definirá el cilindro circular y se describirán fórmulas para calcular su área y su volumen.

Un *cilindro* es como un prisma en el sentido de que tiene bases congruentes en un par de planos paralelos. Las bases son regiones circulares congruentes.

El segmento que une los centros de las dos bases se llama *eje* del cilindro. Un cilindro es *recto* si su eje es perpendicular a las bases. La *altura* del cilindro es la longitud del eje.



Un cilindro puede considerarse como un prisma con un número infinito de lados. La superficie lateral y la circunferencia de las bases de un cilindro corresponden, respectivamente, a las caras laterales y al perímetro de un prisma.



Los dos teoremas siguientes describen el área y el volumen de un cilindro circular recto.

Teorema 12.8

Dado un cilindro circular recto de altura h , si la circunferencia de la base es C y el área de la base es B , el área S está dada por la fórmula

$$S = Ch + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Teorema 12.9

Dado un cilindro circular recto con área de la base B y altura h , su volumen está dado por la fórmula

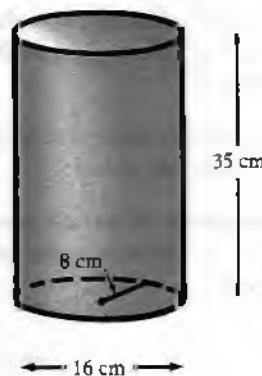
$$V = Bh = \pi r^2 h.$$

Ejemplo 1

Un recipiente con forma de cilindro circular recto mide 35 cm de altura y 16 cm de diámetro. Encuéntrense el área y el volumen.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi(8) \cdot 35 + 2\pi(8)^2 \\ &= 560\pi + 128\pi \\ &= 688\pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi(8)^2 \cdot 35 \\ &= 2240\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

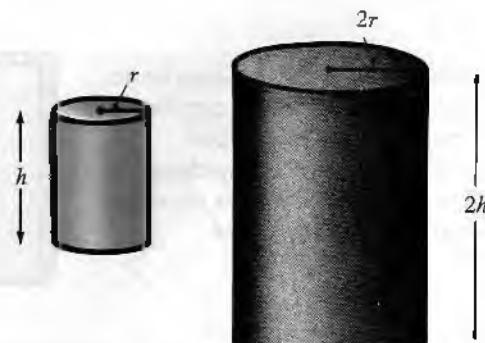


Ejemplo 2

Si el radio y la altura de un cilindro se duplican, ¿en cuánto cambian su área y su volumen?

$$\begin{aligned} S(\text{cilindro grande}) &= 2\pi(2r)(2h) + 2\pi(2r)^2 \\ &= 4(2\pi rh) + 4(2\pi r^2) \\ &= 4S (\text{cilindro pequeño}). \end{aligned}$$

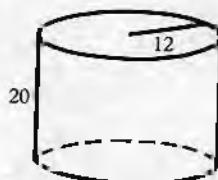
$$\begin{aligned} V(\text{cilindro grande}) &= \pi(2r)^2(2h) \\ &= 8\pi r^2 h \\ &= 8V (\text{cilindro pequeño}). \end{aligned}$$



EJERCICIOS**A.**

Encuéntrense el área y el volumen de los cilindros de los ejercicios 1 a 3.

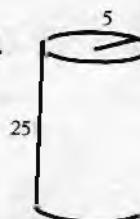
1.



2.



3.



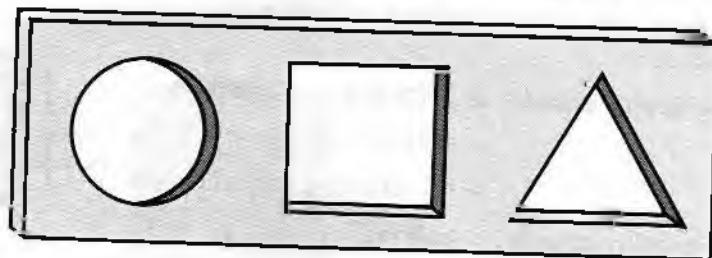
4. Un depósito cilíndrico tiene 17 pies de altura, y el radio de su base es 10 pies. ¿Cuántos pies cúbicos contiene el depósito?
5. ¿Cuántas yardas cúbicas contiene el depósito del ejercicio 4?

B.

6. Una columna cilíndrica de mármol mide 9 pies de altura y 80 cm de diámetro. Si 1 m^3 de mármol pesa 300 kg, encuéntrese el peso de la columna.
7. El volumen de un cilindro circular recto es 972 cm^3 . Si la altura es 12 cm, ¿cuál es el radio de la base?
8. La razón entre los radios de dos cilindros circulares rectos de la misma altura es 2:1. ¿Cuál es la razón entre los volúmenes de los dos cilindros?

ACTIVIDADES

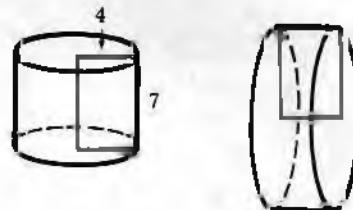
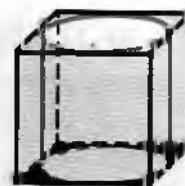
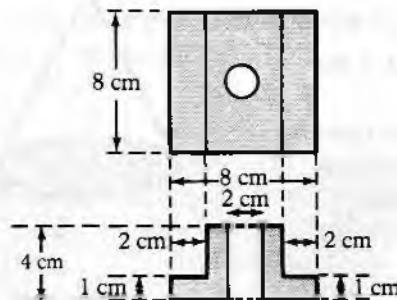
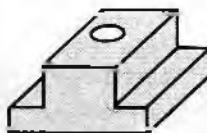
Elabórese un sólido con barro, madera o cualquier otro material que ocupe por completo estos agujeros y pueda pasar a través de ellos sin cambiar de forma.



9. En un cubo se corta un cilindro de 8 pulgadas de diámetro. La arista del cubo también mide 8 pulgadas. Encuéntrense el volumen y el área de este sólido hueco.

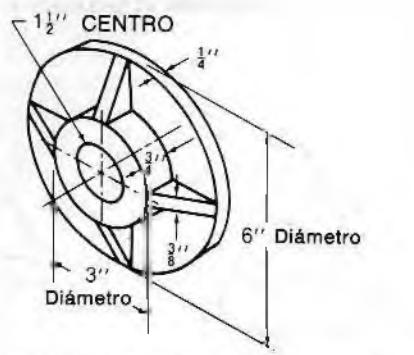
C.

10. Un rectángulo de 4×7 se rota alrededor del lado largo para generar un cilindro y se rota alrededor del lado corto, para generar otro cilindro. ¿Cuál es la razón entre los volúmenes de estos cilindros?
11. En una caja se embalan seis latas cilíndricas. ¿Cuál es la razón entre el volumen de la caja y los volúmenes de las seis latas juntas?
12. Encuéntrense el área y el volumen de esta pieza de acero.

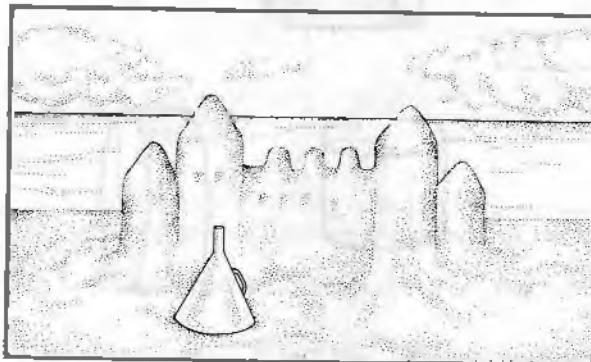


SOLUCION DE PROBLEMAS

Encuéntrense el volumen y el área de esta pieza.



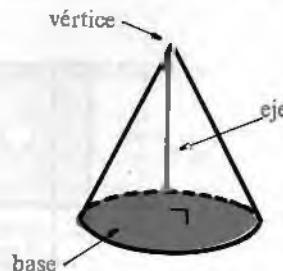
12.6 Área y volumen de conos



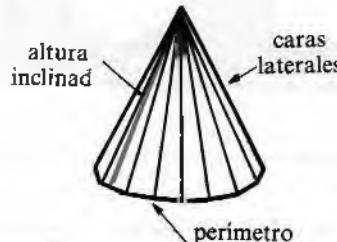
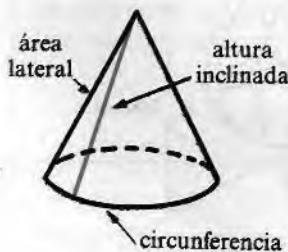
La forma de cono suele encontrarse en el mundo real combinada con la forma de cilindro. Por ejemplo, la punta de un lápiz o la punta de un alfiler puede considerarse como un cono montado sobre un cilindro. Un niño puede construir un castillo de arena combinando estas formas.

La figura de la derecha es un *cono circular recto*. Tiene una *base circular* y un *vértice*.

Su *eje* es el segmento que une al vértice con el centro de la base. El cono se llama *recto* porque el eje es perpendicular a la base.



Un cono puede considerarse como una pirámide con un número infinito de caras laterales. La superficie lateral de un cono corresponde a las caras laterales de una pirámide. La altura inclinada (ℓ) de un cono corresponde a la altura inclinada (ℓ) de una pirámide, y la circunferencia (C) de la base de un cono corresponde al perímetro (p) de la base de la pirámide.

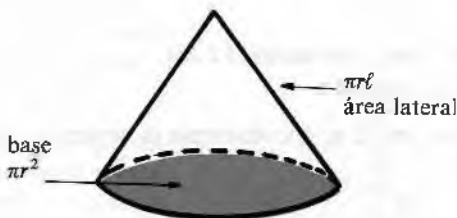


El teorema siguiente describe el área de un cono.

Teorema 12.10

Dado un cono circular recto con altura inclinada ℓ , si la circunferencia de su base es C y el área de la base B , entonces el área S está dada por la fórmula

$$S = \frac{1}{2}C\ell + B = \pi r\ell + \pi r^2.$$



La fórmula del volumen dada en el siguiente teorema es similar a la fórmula para el volumen de una pirámide.

Teorema 12.11

Dado un cono circular recto con altura h y área de la base B , el volumen está dado por la fórmula

$$V = \frac{1}{3}hB = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Ejemplo

Un cono circular recto tiene altura 15 y radio de la base 8. Encuéntrense la altura inclinada, el área y el volumen.

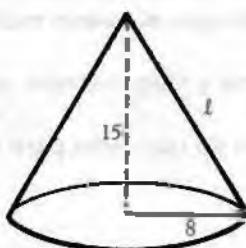
- a. altura inclinada:

$$\ell^2 = 64 + 225 = 289.$$

$$\ell = 17.$$

b. $S = \pi(8)(17) + \pi 64 = 200\pi.$

c. $V = \frac{1}{3}\pi(8)^2 15 = 320\pi.$

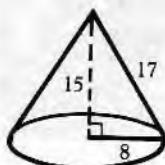


EJERCICIOS

A.

En los ejercicios 1 a 3, encuéntrense el volumen y el área de cada uno de los conos rectos.

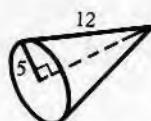
1.



2.



3.



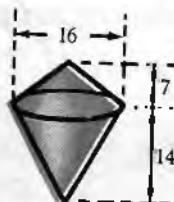
4. El radio de un cono es 5 cm, y su altura, 12 cm.
Encuéntrense el área y el volumen.
5. Si el volumen de un cono es 72π , encuéntrense la altura y el radio si son iguales.

B.

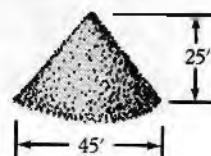
6. Un recipiente está formado por un cilindro circular recto de 4 cm de diámetro y 8 cm de altura, y un cono de 6 cm de altura. Encuéntrese el volumen del recipiente.
7. Encuéntrese el área del recipiente.
8. Encuéntrese el volumen de este trompo.
9. Encuéntrese el área de este trompo.
10. Una pila de arena tiene forma de cono. ¿Cuántas yardas cúbicas de arena hay en él? (Para grandes cantidades de arena se emplea la yarda cónica.)



(Ejercicios 6, 7)



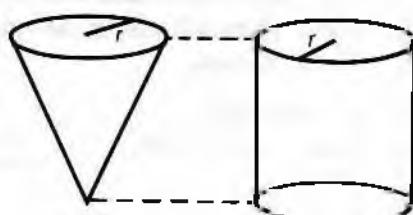
(Ejercicios 8, 9)

**ACTIVIDADES**

Constrúyanse o consíganse modelos de cono y cilindro sin una tapa, que tengan el mismo radio y la misma altura.

Lléñese el cono con arena y luego vacíense la arena en el cilindro.

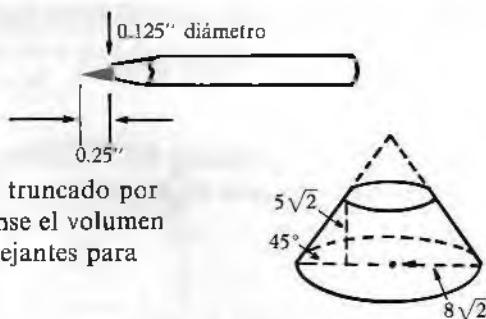
¿Cuántos conos de arena se requieren para llenar el cilindro?



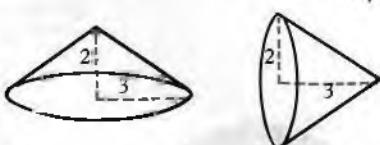
11. ¿Cuántas pulgadas cúbicas de grafito hay en la punta afilada de este lápiz? (Empléese una calculadora.)

C.

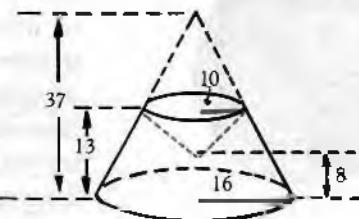
12. Este sólido está formado por un cono cortado o truncado por un plano paralelo a la base del cono. Encuéntrese el volumen y el área. (Sugerencia: Empléense triángulos semejantes para encontrar la altura del cono original.)



13. Los catetos de un triángulo rectángulo tienen longitudes 2 y 3. Al rotar los triángulos sobre sus lados cortos y largos, se forman conos. Encuéntrese la razón entre los volúmenes y la razón entre las áreas de ambos sólidos.

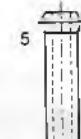
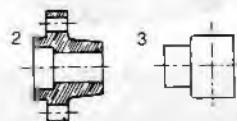
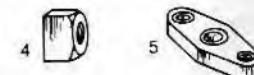
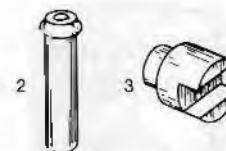
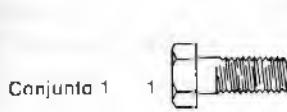


14. Este sólido se forma cortando un cono con un plano paralelo a la base y luego perforando la parte superior en forma de cono. Encuéntrese el volumen de este sólido.



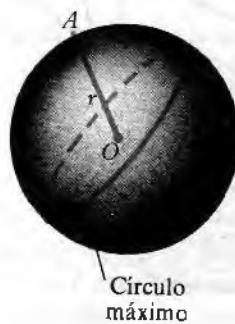
SOLUCION DE PROBLEMAS

Relacionense correctamente los objetos del conjunto 1 con su visión (superior o lateral) del conjunto 2.



12.7 Área y volumen de esferas

En esta sección, se estudiarán las fórmulas para el volumen y el área de una esfera.

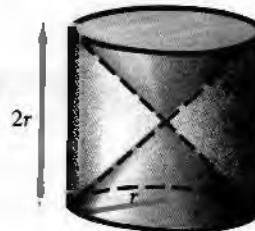
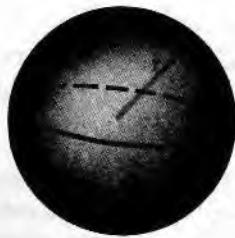


El punto O dado es el *centro* de la esfera. Un *radio* de una esfera es un segmento determinado por el centro y un punto sobre la esfera. La intersección de una esfera y un plano que contiene al centro de la esfera es un *círculo máximo* de la esfera.

Definición 12.6

Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos que están a una distancia dada de un punto dado.

La explicación de la fórmula del teorema 12.12 está basada en una comparación entre una esfera y un cilindro al que se le ha perforado un cono doble. Los radios de la esfera y del cilindro son iguales. La altura del cilindro es el doble del radio.

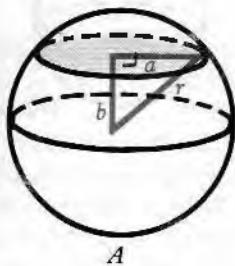


Teorema 12.12

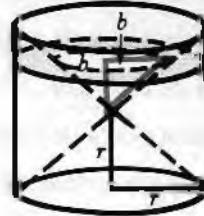
Dada una esfera de radio r , el volumen se encuentra con la fórmula

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Considérese una sección transversal de la esfera y del cilindro perforado que está a una distancia b del centro de la esfera. Se tiene por el teorema de Pitágoras que la distancia a en la figura es $a^2 = r^2 - b^2$.

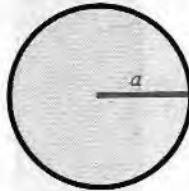


A

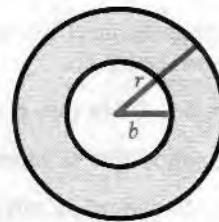


El triángulo
en rojo
es isósceles

Compárense las áreas de las dos secciones transversales.



$$\text{Área} = \pi a^2.$$



$$\begin{aligned}\text{Área} &= \pi r^2 - \pi b^2 \\ &= \pi(r^2 - b^2) \\ &= \pi a^2.\end{aligned}$$

Dado que las áreas de las dos secciones transversales son iguales, por el principio de Cavalieri (pág. 445) se concluye que el volumen de la esfera A es igual al volumen del sólido B en el que se perforaron dos conos.

El volumen del sólido B puede calcularse como:

$$\pi r^2(2r) - 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2\right)(r) = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Entonces, el volumen de la esfera A con radio r también es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

El teorema 12.13 da una fórmula para el área de una esfera.

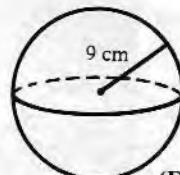
Teorema 12.13

Dada una esfera de radio r , el área S se encuentra con la fórmula

$$S = 4\pi r^2.$$

EJERCICIOS**A.**

1. Encuéntrese el volumen de una esfera de radio 9 cm.
2. Encuéntrese el área de una esfera de radio 9 cm.
3. Encuéntrese el volumen de una esfera de radio 2π .
4. Encuéntrese el área de una esfera de radio 2π .
5. Si el área de una esfera es 36π , encuéntrese el radio.
6. Si el volumen de una esfera es 36π , encuéntrese el radio.
7. Si el área de una esfera es 8π , encuéntrese el radio.
8. Si el volumen de una esfera es $4\pi\sqrt{3}$, encuéntrese el radio.

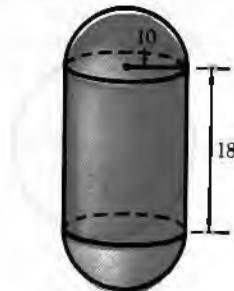


(Ejercicios 1, 2)

B.

En los ejercicios 9 y 10, supóngase que el sólido de la derecha es un cilindro recto tapado con dos semiesferas.

9. Encuéntrese el volumen del sólido que se muestra.
10. Encuéntrese el área del sólido que se muestra.
11. Encuéntrese el volumen de una esfera cuya área es 144π unidades cuadradas.
12. Encuéntrese el área de una esfera cuyo volumen es 36π unidades cúbicas.
13. Si el número de pies cuadrados del área de una esfera es igual al número de pies cúbicos del volumen, ¿cuál es el radio de la esfera?

**ACTIVIDADES**

Consígase un recipiente semiesférico y otro cilíndrico; el diámetro de la base del cilindro y su altura son iguales al diámetro de la esfera.

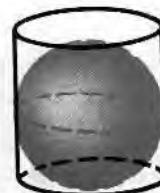
Con arena u otro material, mídase cuántos recipientes semiesféricos se necesitan para llenar el cilindro.



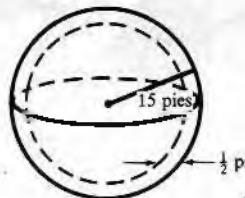
14. El radio de una esfera es el doble que el radio de otra. ¿Cuáles son las razones entre sus volúmenes y entre sus áreas?

C.

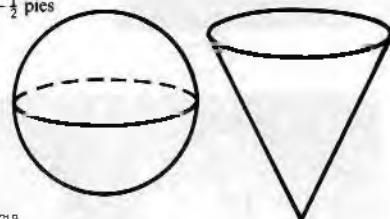
15. Una esfera está inscrita en un cilindro. Muéstrese que el área de la esfera es igual al área lateral del cilindro.



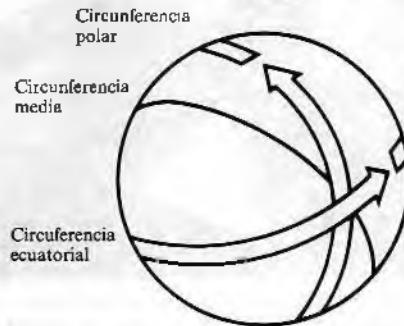
16. Un depósito esférico cuyo radio a la superficie exterior es 15 pies, está hecho de acero de $\frac{1}{2}$ pulgada de ancho. ¿Cuántos pies cúbicos de acero se usaron en la construcción del depósito?



17. Un cono tiene una altura igual al doble de su radio. Una esfera tiene un radio igual al radio de la base del cono. ¿Cuál es la relación entre el volumen del cono y el volumen de la esfera?



18. La Tierra no tiene forma esférica perfecta, sino que es un esferoide oblato. Determinese el radio promedio de la Tierra si se sabe que el radio polar es 6357 km y que el radio ecuatorial es 6378 km. Supóngase que la Tierra es una esfera perfecta y determinense su volumen y su área.



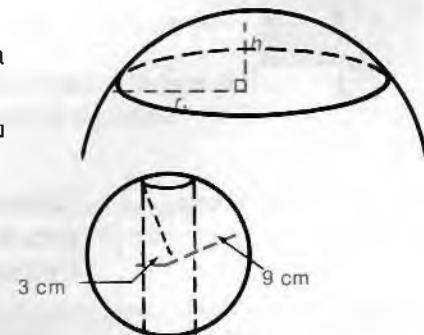
SOLUCION DE PROBLEMAS

Si se corta una esfera con un plano, se obtiene una porción de ella con base circular.

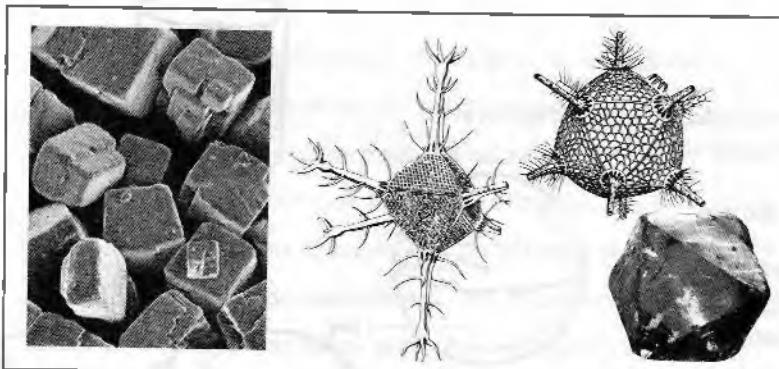
Hecho: Si el radio de esta base circular es r_1 y su altura h , entonces el volumen de este casquete sólido es

$$V = \frac{1}{2}\pi r_1^2 h + \frac{1}{6}\pi r_1^2 h^3.$$

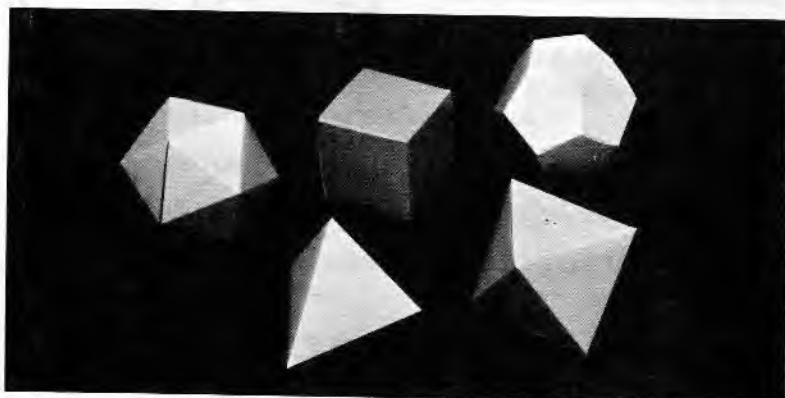
Si se perfora un agujero de 3 cm de radio en el centro de una esfera con radio 9 cm, encuéntrese el volumen de este sólido.



12.8 Poliedros regulares



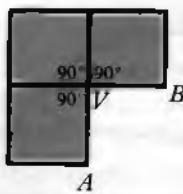
Algunos minerales y esqueletos de pequeñas criaturas marinas son modelos de los sólidos que se estudiarán en esta sección. Estos sólidos se denominan poliedros.



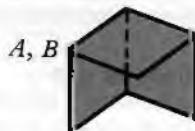
Definición 12.7

Un **poliedro regular** es aquel cuyas caras son polígonos regulares con el mismo número de aristas y cuyos vértices están rodeados, todos y cada uno, por el mismo número de caras.

Un cubo es un ejemplo de poliedro regular. El método descrito a continuación para construir un cubo por medio de la construcción de un «tejado» es ilustrativo para el análisis del siguiente teorema.



Rodéese un vértice V con tres cuadrados.



Dóblese, únanse A y B para formar un «tejado» tridimensional.

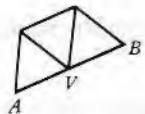
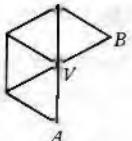
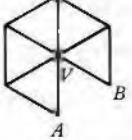
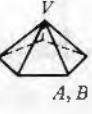
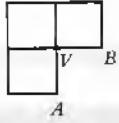
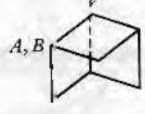
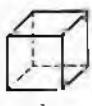
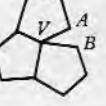
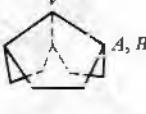
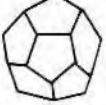


Unanse dos «tejados» para formar un cubo.

Teorema 12.14

Hay exactamente cinco poliedros regulares que son sólidos convexos.

La tabla siguiente resume los cinco poliedros regulares convexos. Sólo pueden construirse cinco tipos de «tejados» con polígonos regulares, resultando de cada uno un poliedro regular.

Cara del polígono	Número de caras en un vértice (V)	Unión de \overline{AV} y \overline{BV} para formar un «tejado» tridimensional	El «tejado» coincide con cada vértice de un poliedro regular completo
triángulo equilátero			 tetraedro regular
triángulo equilátero			 octaedro regular
triángulo equilátero			 icosaedro regular
cuadrado			 cubo
pentágono regular			 dodecaedro regular

El prefijo que se emplea en el nombre de cada poliedro regular indica el número de caras que tiene. Esta información se resume en la siguiente tabla.

Nombre del poliedro	Prefijo y su significado	Número de caras
tetraedro	tetra-4	4
cubo (hexaedro)	hexa-6	6
octaedro	octa-8	8
dodecaedro	dodeca-12	12
icosaedro	icoso-20	20

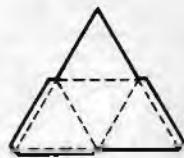
EJERCICIOS**A.**

1. Citense tres poliedros regulares cuyas caras sean triángulos equiláteros.
2. ¿Qué poliedro regular tiene 20 caras?
3. ¿Por qué un hexágono regular *no puede ser la cara de un poliedro regular?*
4. ¿Por qué *no* puede haber seis caras en un vértice de un poliedro regular?
5. ¿Qué poliedro regular es una pirámide?
6. ¿Qué poliedro regular es un prisma?

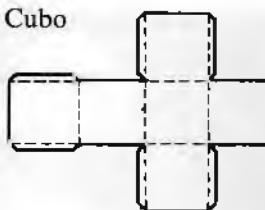
B.

Empléese cartulina para construir un modelo de cada poliedro regular. Los modelos que se muestran a continuación deben ampliarse. Cúrtase por las líneas continuas y dóblese por las de puntos.

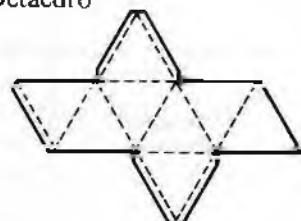
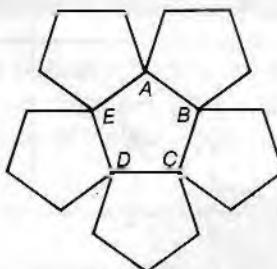
7. Tetraedro



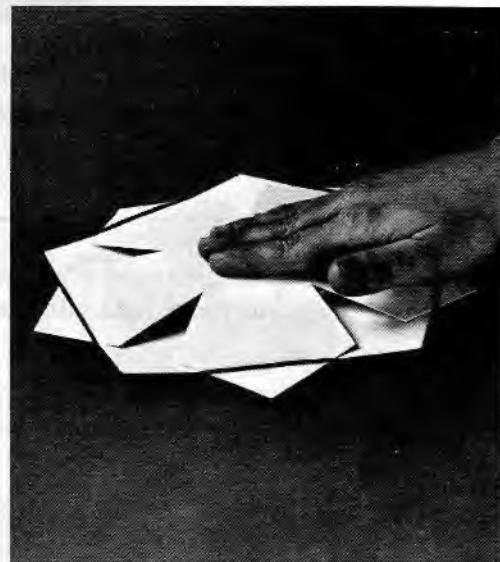
8. Cubo



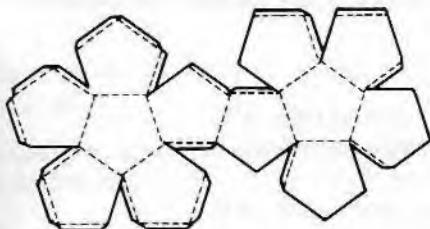
9. Octaedro

**ACTIVIDADES**

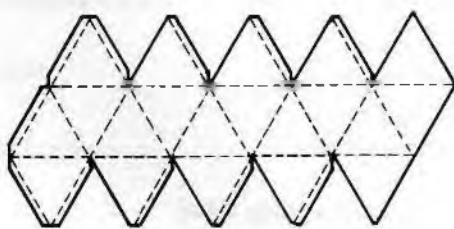
1. Recórtense en cartulina dos modelos grandes como el que se muestra arriba.
2. Hágase un doblez a lo largo de *ABCDE*.
3. Colóquese un modelo sobre el otro girando 36° . Sin soltarlos, pásese una cinta elástica alternativamente por arriba y por abajo de cada esquina.
4. Al levantar la mano, se verá un dodecaedro.



10. Dodecaedro



11. Icosaedro



C.

El número de caras (F), el número de aristas (E) y el número de vértices (V) de un poliedro satisfacen una de las fórmulas que aparecen a continuación.

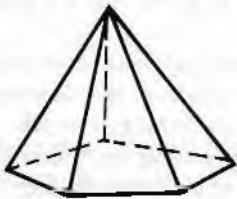
12. ¿Qué fórmula corresponde a un tetraedro regular?
¿Qué fórmula corresponde a un octaedro regular?

- a. $F + E + V = 26$. b. $F - V + E = 10$.
c. $F - E + V = 2$. d. $F - E + V = 0$.

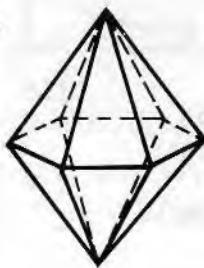
La respuesta correcta a este ejercicio se llama *fórmula de Euler*.

¿Para cuáles de estos poliedros es válida la fórmula de Euler?

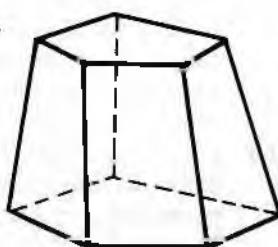
13.



14.



15.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Sean: F el número de caras de un poliedro, E el número de aristas de un poliedro y V el número de vértices de un poliedro. $F \times (\text{número de aristas por cara}) = 2E$, porque cada arista de un poliedro es la arista de dos caras.

1. ¿Cuántas aristas tiene un octaedro regular?
2. ¿Cuántas aristas tiene un dodecaedro regular?
3. ¿Cuántas aristas tiene un icosaedro regular?
4. En un dodecaedro regular, $F \times (\text{número de vértices/cara}) = 3V$, porque cada vértice de un dodecaedro regular es el vértice de tres caras. ¿Cuántos vértices tiene un dodecaedro regular?

Capítulo 12 Conceptos Importantes

Términos

- Poliedro (pág. 434)
- Pirámide (pág. 434)
- Prisma (pág. 435)
- Sólido rectangular (pág. 444)
- Sección transversal (pág. 445)

- Cilindro circular (pág. 452)
- Cono circular recto (pág. 456)
- Esfera (pág. 460)
- Poliedro regular (pág. 464)

Postulados

- Postulado del volumen (pág. 444)
- Postulado del volumen de un sólido rectangular (pág. 444)
- Postulado de la suma de volúmenes (pág. 445)
- Postulado de Cavalieri (pág. 445)

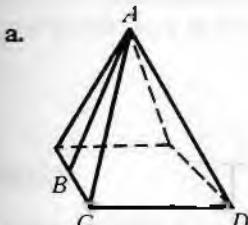
Teoremas

- 12.1** Las aristas laterales de un prisma son paralelas y congruentes.
 - 12.2** Dado un prisma con caras laterales rectangulares, si la altura del prisma es h y las bases tienen un área B y un perímetro p , entonces el área S se encuentra con la fórmula $S = hp + 2B$.
 - 12.3** Dada una pirámide regular con altura inclinada ℓ y una base con área B y perímetro p , el área S se encuentra con la fórmula $S = \frac{1}{2}\ell p + B$.
 - 12.4** El volumen de un prisma cualquiera es el producto de la altura por el área de la base.
 - 12.5** Dada una pirámide con base B y altura h , si A es una sección transversal paralela a la base y la distancia desde el vértice a la sección transversal es K , entonces
- $$\frac{\text{área } A}{\text{área } B} = \left(\frac{K}{h}\right)^2.$$
- 12.6** Dos pirámides con alturas iguales y bases de igual área, tienen el mismo volumen.
 - 12.7** Dada una pirámide de altura h y área de la base B , el volumen se encuentra con la fórmula $V = \frac{1}{3}hB$.

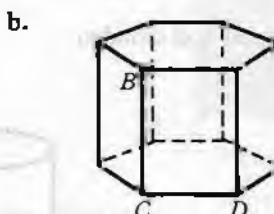
- 12.8** Dado un cilindro circular recto con altura h , si la circunferencia de la base es C y el área de la base es B , el área se encuentra con la fórmula $S = Ch + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
- 12.9** Dado un cilindro circular recto con área de la base B y altura h , el volumen se encuentra con la fórmula $V = Bh = \pi r^2 h$.
- 12.10** Dado un cono circular recto con altura inclinada ℓ , si la circunferencia de la base es C y el área de la base B , entonces el área S se encuentra con la fórmula $S = \frac{1}{2}\ell C + B = \pi r\ell + \pi r^2$.
- 12.11** Dado un cono circular recto con altura h y área de la base B , el volumen está dado por la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- 12.12** Dada una esfera de radio r , el volumen se encuentra con la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
- 12.13** Dada una esfera con radio r , el área S se encuentra con la fórmula $S = 4\pi r^2$.
- 12.14** Hay exactamente cinco poliedros regulares que son sólidos convexos.

Capítulo 12 Resumen

- Encuéntrense el área y el volumen de un cubo con aristas de 4 cm.
- Encuéntrense las áreas de la pirámide y del prisma regulares que se muestran a continuación.

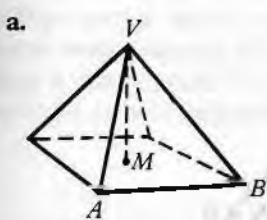


$$AB = 10 \text{ cm}, CD = 6 \text{ cm}.$$

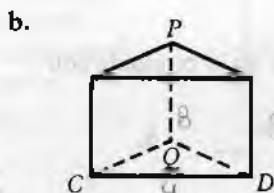


$$BC = 6 \text{ cm}, CD = 2 \text{ cm}.$$

- Encuéntrense los volúmenes de la pirámide y el prisma regulares.

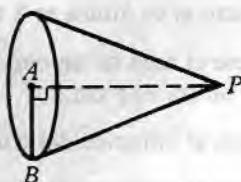


$$VM = 8 \text{ cm}, AB = 5 \text{ cm}.$$



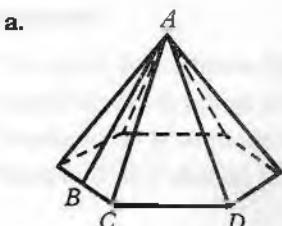
$$PQ = 8 \text{ cm}, CD = 4 \text{ cm}.$$

- ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel se necesitan para una etiqueta de una lata cilíndrica de 10 cm de altura y base circular de 6 cm de diámetro?
- Encuéntrese el volumen de la lata cilíndrica del ejercicio 4.
- El volumen de un cilindro circular recto es 160π . Si la altura es 10, ¿cuál es el diámetro de la base?
- Encuéntrese el volumen del cono circular, donde $PA = 12 \text{ cm}$ y $AB = 3 \text{ cm}$.
- Si la altura de un cono circular recto se duplica, ¿cómo afecta esto al volumen?
- Una esfera tiene un volumen de $36\pi \text{ cm}^3$. ¿Cuál es su radio?
- Encuéntrese el área de una esfera con radio 10 cm.

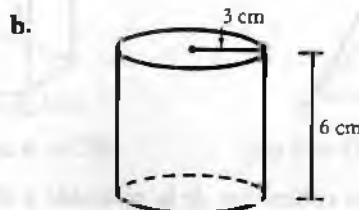


Capítulo 12 Examen

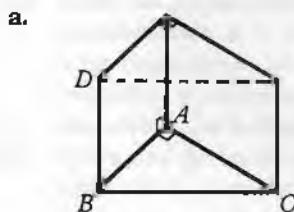
1. ¿Cuántos cubos con aristas de 2 cm pueden colocarse dentro de una caja de dimensiones $3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$?
2. Encuéntrese la diagonal de un cubo con aristas de 1 cm de longitud.
3. Encuéntrense las áreas de la pirámide regular y el cilindro circular recto siguientes.



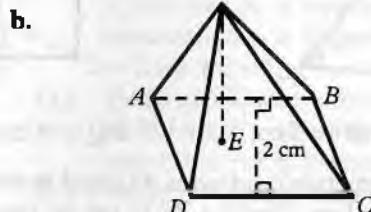
$$AB = 6 \text{ cm}, CD = 2 \text{ cm}.$$



4. Encuéntrense los volúmenes del prisma y de la pirámide con base trapezoidal siguientes.

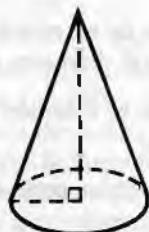


$$AB = 4 \text{ cm}, AC = 6 \text{ cm},\\ BD = 12 \text{ cm}.$$



$$AB = 4 \text{ cm}, DC = 3 \text{ cm},\\ FE = 5 \text{ cm}.$$

5. ¿Cuántos centímetros cúbicos de líquido podrían caber en un cono circular recto si su altura es 8 cm y el radio de su base es 3 cm?
6. Encuéntrese el área de un cono circular recto si la base tiene radio 2 cm y su altura es 6 cm.
7. Encuéntrese el volumen del cono descrito en el ejercicio 6.
8. Encuéntrese el volumen de una esfera de radio 3 cm.
9. Encuéntrese el radio de una esfera si su volumen es $228\pi \text{ cm}^3$.
10. ¿Cómo afecta al área de una esfera la duplicación del diámetro?
11. ¿Cómo afecta al volumen de una esfera la duplicación del radio?



(Ejercicios 5-7)

Técnicas para la solución de problemas

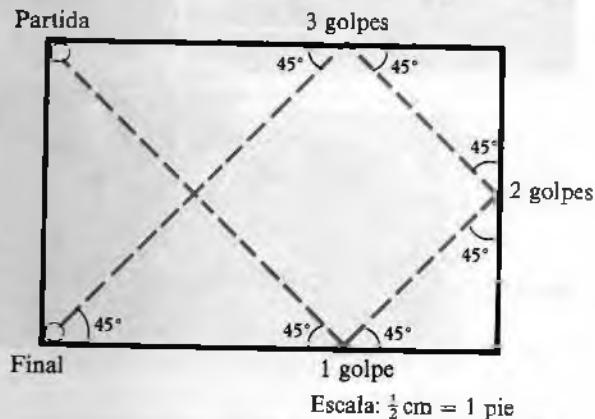
Hágase un dibujo preciso

En ocasiones, la respuesta a un problema puede encontrarse haciendo un dibujo preciso o un dibujo a escala. Estúdiense el ejemplo que se presenta a continuación, en el cual se emplea un dibujo a escala para la solución.



Ejemplo

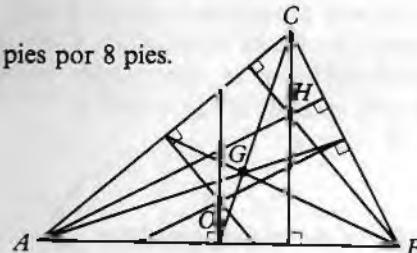
Una mesa de billar de 8 pies por 12 pies, tiene una bola en una esquina. Supóngase que se golpea la bola y que ésta se desplaza formando un ángulo de 45° con una banda de la mesa. Entonces, la bola rebota y se desplaza en otro ángulo de 45° hasta llegar a otra banda y rebotar de nuevo. ¿Cuántas veces golpeará la bola las bandas antes de llegar a una esquina? El dibujo a escala muestra que la bola golpeará tres veces.



PROBLEMAS

Empléese un dibujo preciso o uno a escala para resolver los problemas siguientes.

1. Supóngase que una bola se desplaza como se describió en el ejemplo anterior, pero en una mesa de 8 pies por 10 pies. ¿Cuántas veces golpeará la bola las bandas antes de llegar a una esquina?
2. Respóndase a la misma pregunta para una mesa de 6 pies por 8 pies.
3. O es la intersección de las bisectrices perpendiculares de los lados de $\triangle ABC$, G es la intersección de las medianas y H es la intersección de las alturas. Obsérvese que O , G y H son colineales. ¿Qué fracción de OH es OG ? Inténtese con varios triángulos.
4. Un piloto de una avioneta mantiene una velocidad constante de 120 m.p.h. Viaja hacia el norte 30 minutos y hacia el noreste 10 minutos, luego hacia el sureste 45 minutos y, finalmente, hacia el suroeste 30 minutos. Una vez en ese lugar, ¿cuánto tiempo tendrá que volar para volver directamente a su punto de partida?



LA GEOMETRÍA EN NUESTRO MUNDO

Navegación

Viajar en un barco de recreo puede resultar una forma audaz de conocer el mundo. Pero alguien de a bordo tiene que saber navegar.



En términos generales, navegar significa saber encontrar el camino para ir de un lado a otro y saber dónde se está en cada momento. Un piloto náutico debe conocer siempre la ubicación de la nave, la dirección en que viaja y la distancia recorrida.

Dos instrumentos necesarios para un navegante son la brújula y las cartas náuticas. Las cartas náuticas son mapas a escala de las zonas marinas y contienen información sobre la profundidad de las aguas, la ubicación de puertos y señales, y toda clase de peligros para la navegación de la zona.



Dos técnicas de navegación

1

Determinación de la posición de un barco observando un objeto.

Para determinar la posición de un barco, a veces es útil encontrar la distancia D entre el barco y el del barco a un objeto observado. (Fig. 1).

Mientras el barco navega en la dirección $\overrightarrow{P_1P_2}$, se observa el faro desde P_1 . Después, cuando el ángulo visual se ha duplicado, la observación se hace desde P_2 . La distancia, d , que recorre el barco de P_1 a P_2 se calcula por medio de la velocidad y el tiempo. La distancia buscada D es igual a d .

¿Por qué es cierto esto? ¿Qué teorema o teoremas se emplearon?

2

Determinación de la posición de un barco observando tres objetos.

Para determinar la posición de un barco, un piloto observa tres objetos reales representados por A , B y C en una carta náutica (Fig. 2). Entonces, el piloto mide los ángulos entre las líneas de visión. Las líneas que parten del punto P y muestran estos ángulos, se dibujan en una hoja de plástico rojo. Al colocar la hoja de plástico sobre la carta, de forma que las rectas pasen por A , B y C , la posición del barco está indicada por el punto P .



Figura 2

U.S. Dept. of Commerce

Sin embargo, el método que se acaba de describir no funcionará cuando P está en un círculo que contenga a A , B y C . En esta figura, por ejemplo, el barco podría estar en el círculo en la posición R , en la S o en otra. ¿Qué teorema puede usarse para demostrar que esto es verdad?

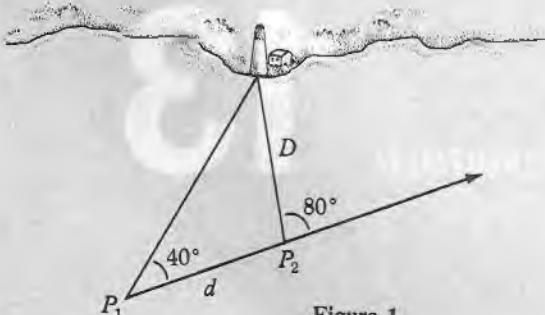
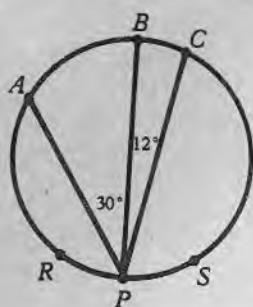
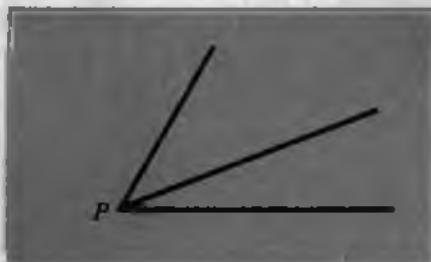


Figura 1



CAPITULO

13

13.1	Reflexiones sobre rectas	476
13.2	Uso de las reflexiones sobre rectas en la solución de problemas	480
13.3	Traslaciones	484
13.4	Rotaciones	488
13.5	Simetría	494
<i>Conceptos importantes</i>		498
Técnicas para la solución de problemas		499
Examen de casos especiales		501
		500

Transformaciones y simetría



13.1 Reflexiones sobre rectas

La palabra *transformación* implica que un objeto cambia de alguna manera. En una transformación geométrica, hay que tener en cuenta tres puntos:

1. la figura original,
2. una regla u operación que describa el cambio, y
3. la figura que resulta después del cambio.

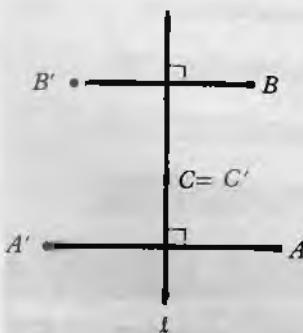
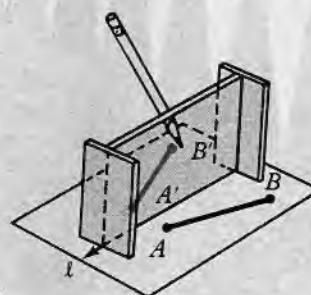
El objeto antes del cambio se llama *preimagen*, y después del cambio, *imagen*.

En este capítulo, se estudiarán los tres tipos de transformaciones denominados *reflexiones sobre rectas*, *traslaciones* y *rotaciones*. La primera de estas transformaciones, la reflexión sobre rectas, puede describirse utilizando una hoja de plástico.

Supóngase que se coloca una hoja de plástico sobre una recta ℓ como se muestra en la figura. Los puntos A' y B' son las imágenes reflejadas de A y B .



Drawing by W. Miller;
© 1962 The New Yorker Magazine, Inc.



Obsérvese que ℓ es la bisectriz perpendicular de AA' y BB' . Esto es válido para cualquier segmento que une a un punto con su imagen reflejada. Dado que el punto C está sobre la recta ℓ , es su propia imagen.

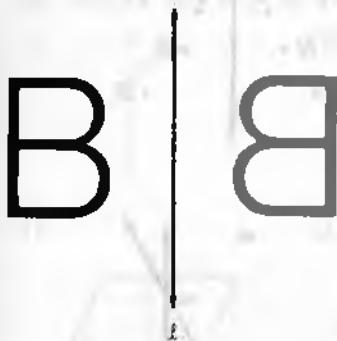
Definición 13.1

En un plano, una **reflexión** sobre la recta ℓ es una transformación que representa cada punto P del plano en el punto P' como sigue:

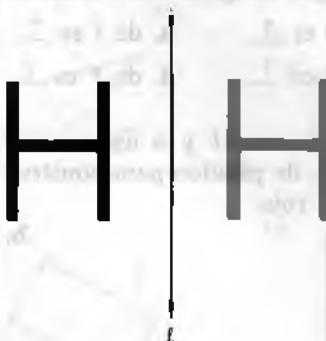
- Si P está sobre ℓ , $P' = P$.
- Si P no está sobre ℓ , entonces ℓ es la bisectriz perpendicular de PP' .

P' es la **imagen** de P' y P es la **preimagen** de P' .

Cuando cada punto de una figura se refleja sobre una recta ℓ , el conjunto de todos los puntos de la imagen forman una figura que es la imagen reflejada de la figura. A continuación se muestran dos ejemplos.



Una letra «B» y su reflexión sobre la recta ℓ .



Una letra «H» y su reflexión sobre la recta ℓ .

La transformación llamada reflexión sobre una recta satisface varias propiedades importantes, como establece el teorema siguiente.

Teorema 13.1

Dada una reflexión sobre una recta:

- la imagen reflejada de un segmento es un segmento de igual longitud;
- la imagen reflejada de un ángulo es un ángulo de igual medida.

A continuación se presenta un plan para probar el apartado a del teorema 13.1.

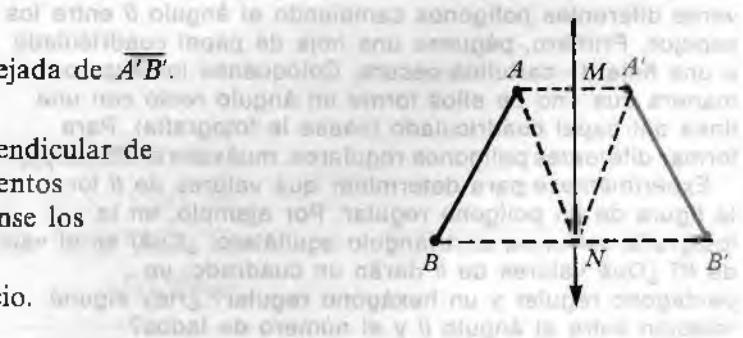
PRUEBA

Dado: \overline{AB} es la imagen reflejada de $\overline{A'B'}$.

Pruébese: $AB = A'B'$

Plan: ℓ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$. Dibújense los segmentos auxiliares AN y $A'N'$ y empléense los triángulos congruentes.

La prueba se deja como ejercicio.



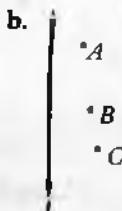
EJERCICIOS

A.

1. La imagen reflejada sobre la recta ℓ

- a. de B es . b. de I es .
 c. de D es . d. de F es .

2. Trácese la recta ℓ y la figura roja. Empléese un compás o una hoja de plástico para construir la imagen reflejada de la figura roja



Cópiense las siguientes figuras. Empléese una hoja de plástico, papel vegetal o un compás para trazar con la mayor precisión posible la imagen reflejada sobre la recta ℓ de cada figura.

3.



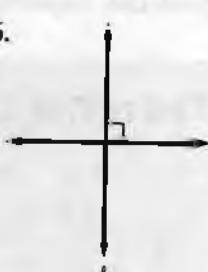
4.



5.

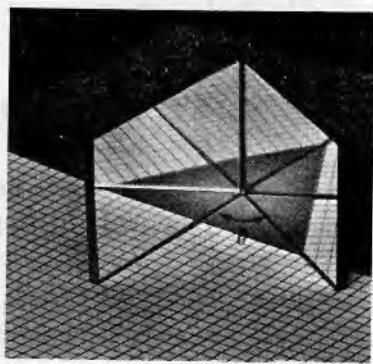


6.

**ACTIVIDADES**

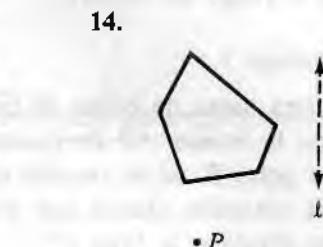
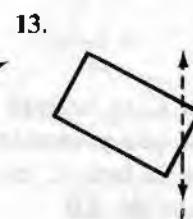
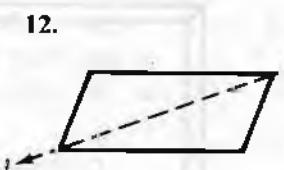
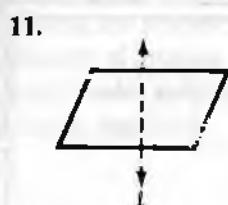
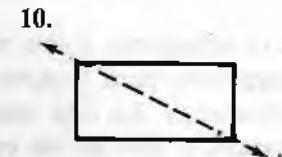
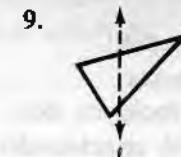
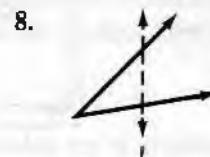
Consíganse un par de espejos rectangulares y únanse con cinta adhesiva. Con papel cuadriculado y cartulina pueden verse diferentes polígonos cambiando el ángulo θ entre los espejos. Primero, péguense una hoja de papel cuadriculado a una hoja de cartulina oscura. Colóquense los espejos de manera que uno de ellos forme un ángulo recto con una línea del papel cuadriculado (véase la fotografía). Para formar diferentes polígonos regulares, muévase el otro espejo.

Experiméntese para determinar qué valores de θ formarán la figura de un polígono regular. Por ejemplo, en la fotografía se forma un triángulo equilátero. ¿Cuál es el valor de θ ? ¿Qué valores de θ darán un cuadrado, un pentágono regular y un hexágono regular? ¿Hay alguna relación entre el ángulo θ y el número de lados?



B

En los ejercicios 7 a 14 dibújese la figura dada. Hágase un bosquejo a mano alzada de la imagen reflejada de la figura dada sobre la recta ℓ . Verifíquese el resultado con un compás, una hoja de plástico o un espejo.



C.

15. La ilustración muestra una construcción con un compás de puntas fijas de la imagen reflejada de un punto. Como resultado de este método, $AP = PB = AP' = BP'$. ¿Cómo se sabe que ℓ es la bisectriz perpendicular de $\overline{PP'}$?
 16. Dibújese esta figura en la que A' es la imagen reflejada de A . Usando sólo una regla, constrúyase la reflexión del punto B .
 17. Formúlese una prueba completa a dos columnas que muestre que la construcción del ejercicio 16 es correcta.
 18. Formúlese una prueba a dos columnas para el teorema 13.1.
 19. Pruébese que un triángulo y su imagen reflejada son congruentes.



$\times P'$ (Ejercicio 15)



(Ejercicio 16)

SOLUCION DE PROBLEMAS

2. ¿Es correcta esta suma?

— କାମକାଳୀ ଏହି କଥା କିମ୍ବା କିମ୍ବା କିମ୍ବା କିମ୍ବା କିମ୍ବା

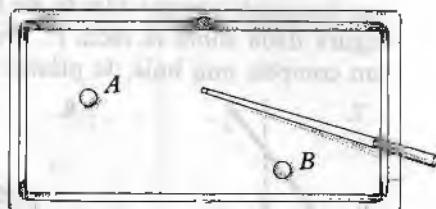
3414
340
74813
43374813

13.2 Uso de las reflexiones sobre rectas en la solución de problemas

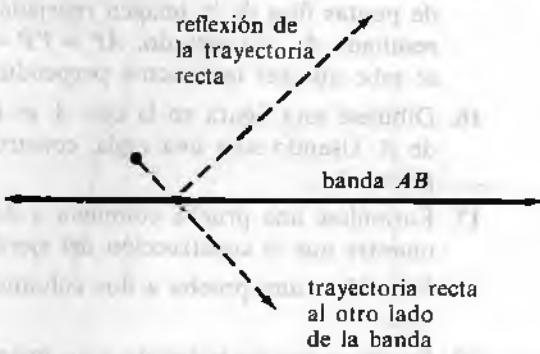
Las reflexiones sobre rectas pueden emplearse para resolver problemas cotidianos. En esta sección se incluyen dos ejemplos, uno de los cuales está relacionado con el juego del billar.

Problema 1

En una mesa de billar, la bola C se lanzará hacia la banda \overline{AB} de manera que golpee la bola ocho E . Si se supone que la bola C no tiene rotación, ¿hacia qué punto de \overline{AB} debe dirigirse la bola C ?



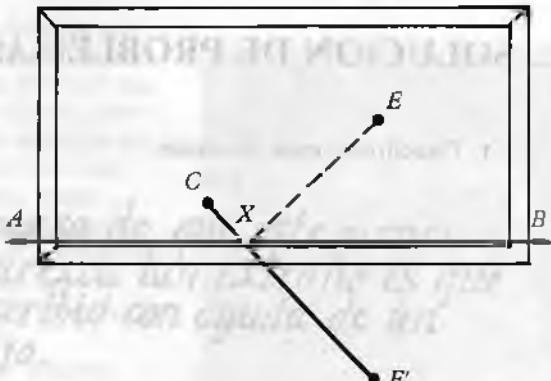
Solución. La respuesta a este problema considera el siguiente hecho. *La bola rebota a lo largo de una trayectoria que es la reflexión (en la banda) de la trayectoria recta al otro lado de la banda.*



Paso 1 Refléjese E sobre la recta AB para obtener el punto E' .

Paso 2 Dibújese la recta CE' . Sea X el punto donde CE' interseca a la banda.

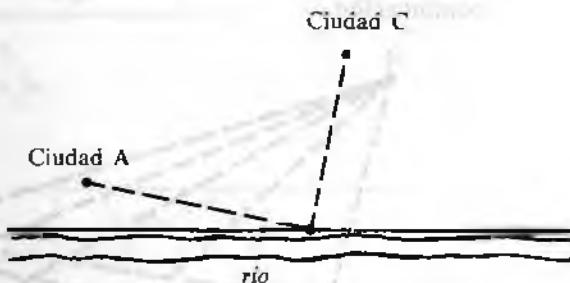
Paso 3 Al golpear una bola sin rotación en el punto X , rebotará y golpeará a la bola ocho E . ¿Por qué?



En el primer problema se usó la reflexión sobre una recta para determinar la ubicación de un punto que satisficiera una condición necesaria. El segundo problema también incluye la determinación de la ubicación de un punto. En el problema 2, se usará la definición de «entre» para puntos, además de la reflexión sobre una recta para determinar la ubicación de un puente que se va a construir.

Problema 2

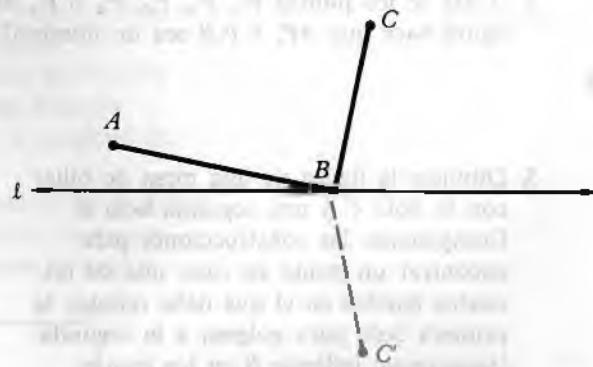
Dos ciudades están localizadas en el mismo lado de un río a través del cual se construirá un puente. ¿Dónde debe construirse el puente (B) para que la longitud de la carretera $AB + BC$ sea la más corta posible?



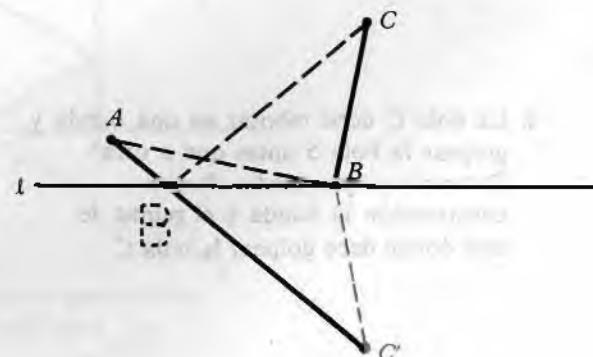
Solución

Paso 1 Imagíñese que el río es la recta ℓ y refléjese el punto C sobre la recta ℓ hasta el punto C' .

Paso 2 Por el teorema 13.1 puede concluirse que $BC = BC'$. Por tanto, $AB + BC = AB + BC'$.

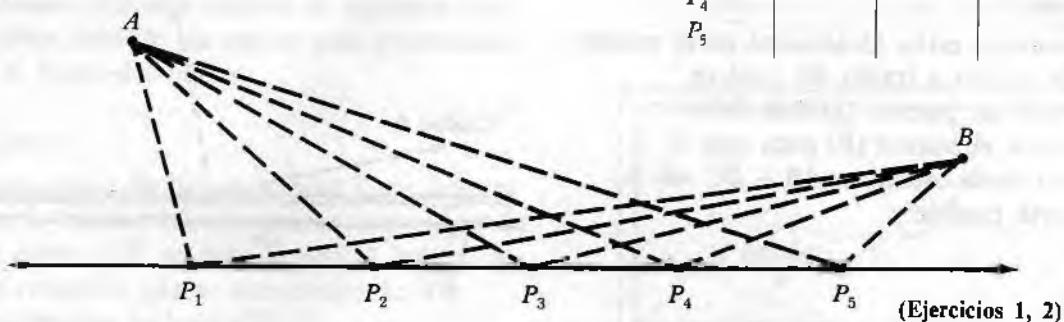


Paso 3 El camino más corto entre A y C' es una línea recta. Por tanto, para que el camino $A-B-C$ tenga la menor longitud posible, el puente B debe construirse de manera que A , B y C' sean colineales.



EJERCICIOS**A.**

1. Con una regla milimetrada, midanse las distancias de esta figura y anótesen en una tabla como la que se muestra a continuación.

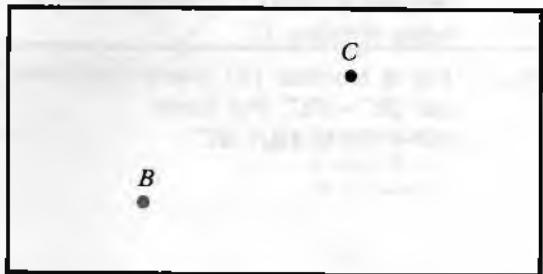


Punto P_i	AP_i	BP_i	$AP_i + BP_i$
P_1			
P_2			
P_3			
P_4			
P_5			

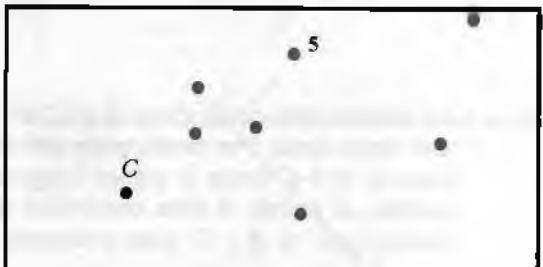
2. ¿Cuál de los puntos P_1 , P_2 , P_3 , P_4 o P_5 de la figura hace que $AP_i + P_iB$ sea un mínimo?

B.

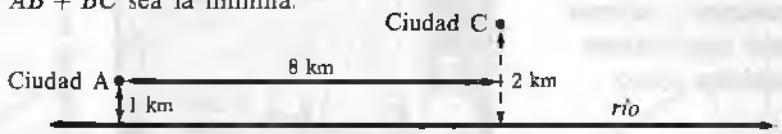
3. Dibújese la figura de una mesa de billar con la bola C y una segunda bola B . Complétense las construcciones para encontrar un punto en cada una de las cuatro bandas en el que debe rebotar la primera bola para golpear a la segunda. (Sugerencia: refléjese B en los cuatro lados de la mesa.)



4. La bola C debe rebotar en una banda y golpear la bola 5 antes que a otra. Determinese por medio de una construcción la banda y el punto de ésta donde debe golpear la bola C .



5. En esta figura se muestran dos ciudades que están en el mismo lado del río. Determínese la posición B donde debe construirse un puente para que la longitud de la carretera $AB + BC$ sea la mínima.

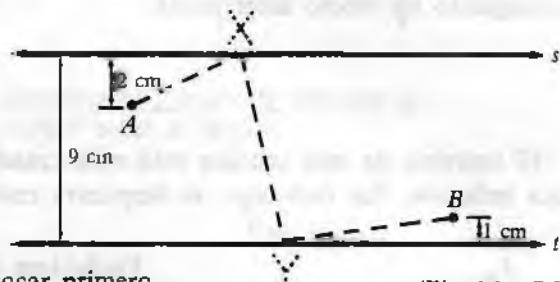


(Ejercicios 5, 6)

6. Despues de construir el punto B del ejercicio 5, emplee el teorema de Pitágoras para calcular la longitud mínima de $AB + BC$.

C.

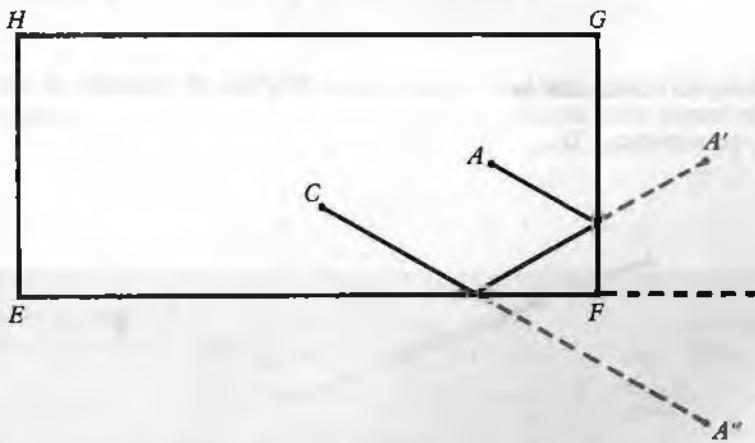
7. Supóngase que una trayectoria de A a B debe tocar primero la recta s y después la recta t . Trácese esta figura y constrúyanse los puntos X sobre s e Y sobre t para que $AXYB$ sea la trayectoria más corta.
(Sugerencia: Refléjese el punto A sobre la recta s y el punto B sobre la recta t .)



(Ejercicios 7, 8)

8. Supóngase que la trayectoria de A a B debe tocar primero la recta t y después la recta s . Trácese esta figura y constrúyanse los puntos X sobre t e Y sobre s de manera que $AYXB$ sea la trayectoria más corta. ¿Qué relación existe entre la longitud de esta trayectoria y la longitud de la trayectoria del ejercicio 7?

9. La figura siguiente ilustra la forma en que puede determinarse un punto sobre la banda EF hacia el que debe dirigirse la bola C para que rebote en dos bandas y golpee la bola A .



Complétense otra construcción para determinar el punto sobre la banda GH hacia el que debe dirigirse la bola para que rebote en dos bandas y golpee la bola A .

13.3 Traslaciones

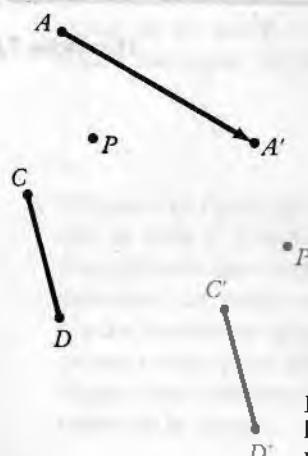
Es muy común encontrar espejos en la decoración de grandes almacenes y salones de belleza. Estos no sólo son importantes para la decoración, sino también como medida de seguridad.

En ocasiones, estos espejos están en paredes opuestas de un salón. En la ilustración, los espejos de la peluquería han conseguido un efecto interesante.



Drawing by Chas. Addams
© 1957 The New Yorker Magazine, Inc.

El teorema de esta sección está relacionado con la reflexión de una reflexión. Sin embargo, se empezará con una definición.



Dada una flecha AA' , imagínese que una figura se desliza en la dirección de la flecha una distancia AA' .

Definición 13.2

Dada una flecha AA' , la **imagen trasladada** de un punto P para la flecha AA' es el punto P' , donde:

- $AA' = PP'$, y
- las flechas AA' y PP' tienen la misma dirección.

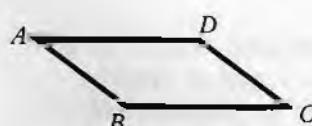
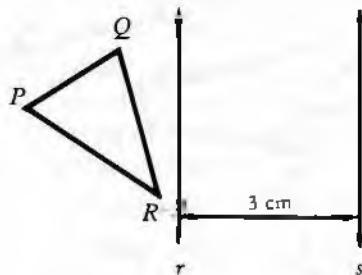


Imagen trasladada de $ABCD$ para la flecha XY .

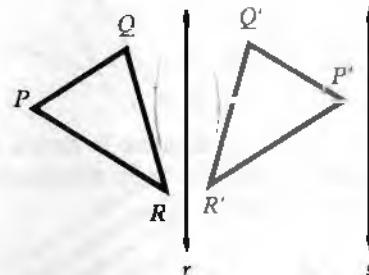
Se puede completar una traslación siguiendo una reflexión de otra.
Complétense esta construcción de cuatro pasos.

Paso 1



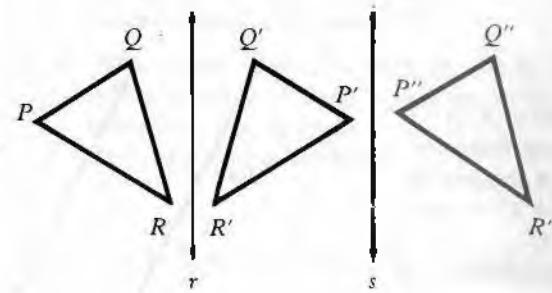
Empiécese con las rectas r y s , paralelas y separadas 3 cm.

Paso 2



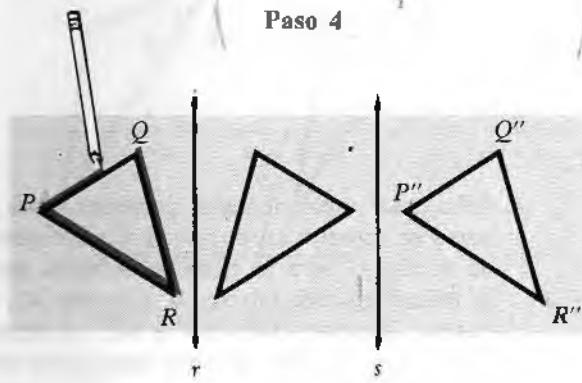
Encuéntrese primero la reflexión de $\triangle PQR$ sobre la recta r .

Paso 3



Encuéntrese la reflexión de $\triangle P'Q'R'$ sobre la recta s .

Paso 4



Dibújese $\triangle PQR$ y muéstrese que puede trasladarse 6 cm en una dirección perpendicular a r y s , y que $\triangle PQR \cong \triangle P''Q''R''$.

Teorema 13.2

Si las rectas r y s son paralelas, entonces una reflexión sobre la recta r , seguida de una reflexión sobre la recta s , es una traslación. Además, si A'' es la imagen de A , entonces

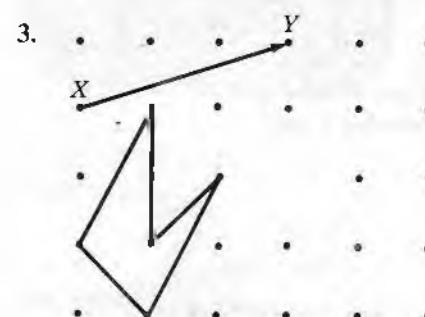
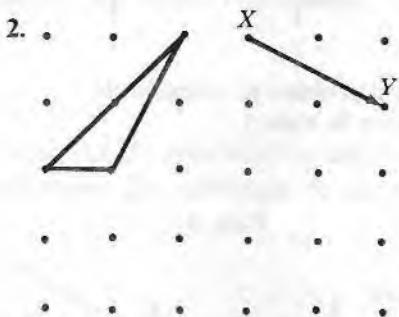
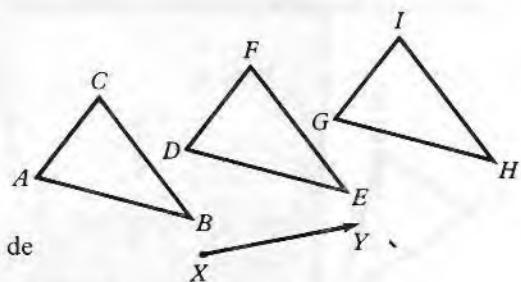
- $\overline{AA''} \perp r$,
- $\overline{AA''} = 2d$, donde d es la distancia entre las rectas r y s .

EJERCICIOS**A.**

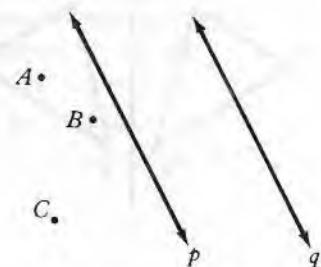
1. Para la flecha de traslación XY , la imagen trasladada de:

- a. C es ?.
- b. E es ?.
- c. D es ?.
- d. B es ?.

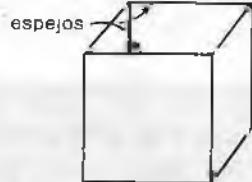
En los ejercicios 2 y 3, dibújese la figura sobre papel de puntos o cuadriculado. Después dibújese su imagen trasladada para la flecha XY .

**B.**

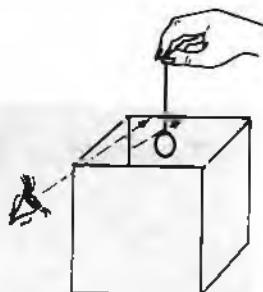
4. Dibújense un par de rectas paralelas y tres puntos A , B y C como se muestra en la figura. Constrúyanse las imágenes de A , B y C para la reflexión sobre la recta p seguida de la reflexión sobre la recta q . Llámase A'' , B'' y C'' a estos puntos. Mídanse $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ y $\overline{CC''}$. Lléguense al convencimiento de que estos segmentos son paralelos y de igual longitud.

**ACTIVIDADES**

Cúbranse las caras interiores anterior y posterior de una caja, preferentemente con forma de cubo, con espejos. Cúbranse las otras caras con cartulina negra.



Con una cuerda, cuélguese un objeto dentro de la caja y mírese dentro de ella por encima del borde anterior. ¿Qué se ve?



¿Qué relación existe entre esta vista y la ilustración del principio de la sección?

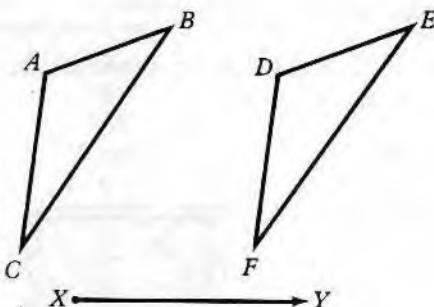
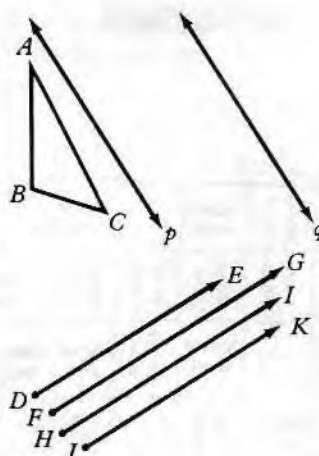
5. Trácese un par de rectas paralelas p y q separadas 3 cm y dibújese $\triangle ABC$ como se muestra en la figura. Constrúyase la imagen de $\triangle ABC$ para la reflexión sobre la recta p seguida de la reflexión sobre la recta q .

6. ¿Cuál de las flechas de esta figura describe la traslación que es la reflexión sobre la recta p seguida de la reflexión sobre la recta q ?

- a. Flecha DE . b. Flecha FG .
c. Flecha HI . d. Flecha JK .

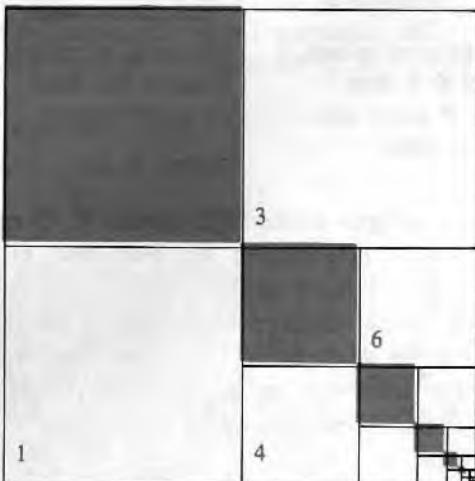
C.

7. En esta figura, $\triangle DEF$ es la imagen trasladada de $\triangle ABC$ para la traslación de la flecha XY .
- Trácese la figura en una hoja de papel.
 - Trácese una recta p cualquiera perpendicular a la recta XY .
 - Trácese una recta q de manera que la reflexión sobre la recta p seguida de la reflexión sobre la recta q , sea la traslación con la flecha XY .

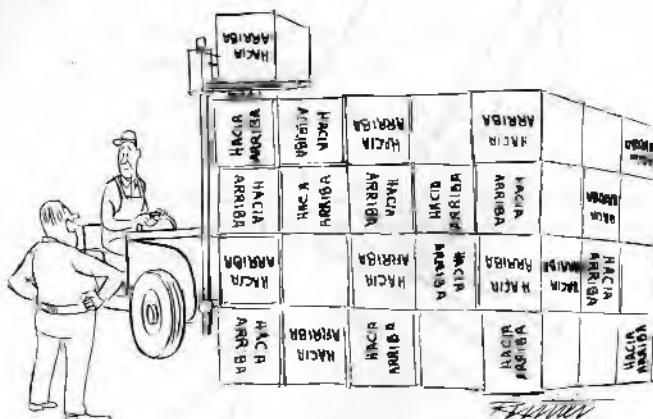


SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Qué fracción de la región cuadrada está sombreada? (Supóngase que el proceso de sombreado continúa indefinidamente.)



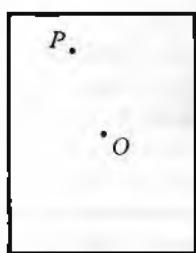
13.4 Rotaciones



«¡Estás despedido!» Drawing by Richter; © 1957 The New Yorker Magazine, Inc.

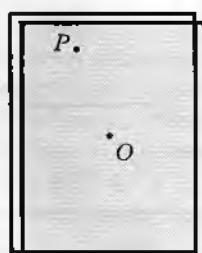
Pueden investigarse las propiedades de una rotación como se ilustra a continuación.

Paso 1



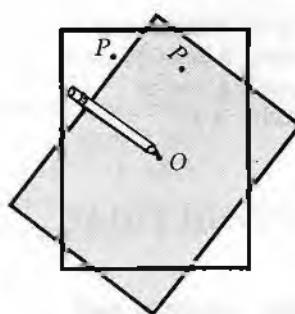
Márquese un punto central O y otro punto P sobre una hoja de papel.

Paso 2



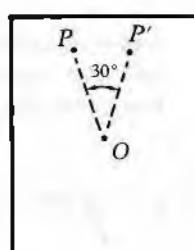
Márquese el punto P sobre una hoja de papel vegetal.

Paso 3



Manténgase inmóvil el punto O y gírese el papel vegetal.

Paso 4



Márquese la nueva posición de P como P' .

P' es la imagen rotada del punto P . O es el centro de la rotación. En este caso, el ángulo de rotación es 30° .

Estas ideas sugieren la definición de rotación de la derecha. Obsérvese que una rotación puede ser en la dirección de las manecillas del reloj o en la dirección contraria.

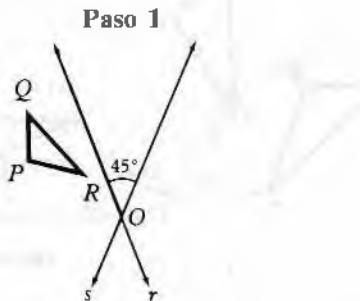
Definición 13.3

Una **rotación** con centro O y ángulo α es una transformación que representa cada punto P del plano en un punto P' :

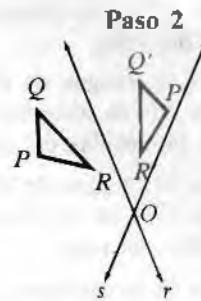
- Si P es el punto central O , $P' = P$.
- Si $P \neq O$, entonces $P'O = PO$ y $m\angle POP' = \alpha$.

P' es la **imagen rotada** del punto P .

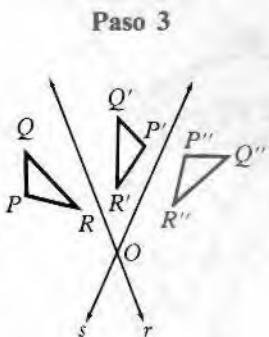
Como las traslaciones, las rotaciones pueden completarse haciendo una reflexión tras otra. En este caso, las rectas de reflexión no son paralelas. Complétense la siguiente construcción de cuatro pasos.



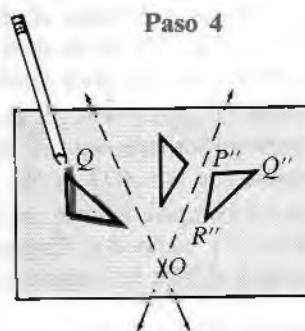
Empíécese por las rectas r y s , que pasan por O y se intersecan en un ángulo de 45° , y $\triangle PQR$.



Encuéntrese primero la reflexión de $\triangle PQR$ sobre la recta r .



Encuéntrese la reflexión de $\triangle P'Q'R'$ sobre la recta s .



Dibújese $\triangle PQR$ y muéstrese que puede rotarse un ángulo de 90° alrededor del punto O y que $\triangle PQR \cong \triangle P'''Q'''R'''$.

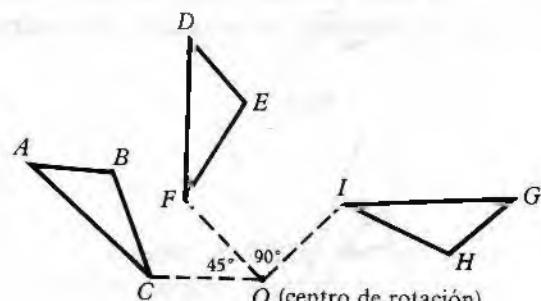
Dos reflexiones sobre rectas intersecantes darán siempre como resultado una rotación de un ángulo dos veces mayor que el ángulo entre las rectas. Esto sugiere el teorema siguiente.

Teorema 13.3

Si las rectas r y s se intersecan en el punto O , entonces una reflexión sobre r seguida de una reflexión sobre s , es una rotación. El punto O es el centro de rotación y el ángulo de rotación es 2α , donde α es la medida del ángulo recto o agudo que hay entre las rectas r y s .

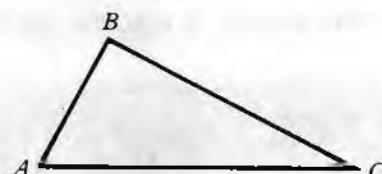
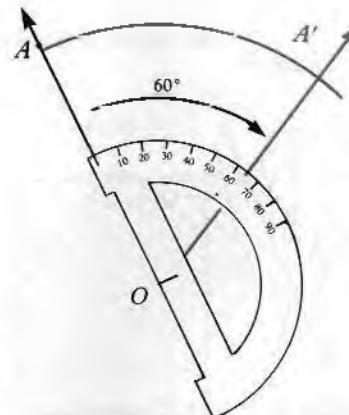
EJERCICIOS**A.**

- Encuéntrese la imagen de B en una rotación de 45° en la dirección de las manecillas del reloj.
- Encuéntrese la imagen de H en una rotación de 90° en dirección contraria a la de las manecillas del reloj.
- Encuéntrese la imagen de B en una rotación de 135° en la dirección de las manecillas del reloj.
- Encuéntrese la imagen de $\triangle DEF$ en una rotación de 45° en dirección contraria a la de las manecillas del reloj.



(Ejercicios 1-4)

- Márquense los puntos O y A en un papel. Dibújese la imagen A' de A en una rotación de 60° en la dirección de las manecillas del reloj como sigue:
 - Trácese el rayo \overrightarrow{OA} . Con un transportador, trácese \overrightarrow{OX} de manera que $m\angle AOX = 60$.
 - Con un compás, trácese un arco con centro O y radio OA . Este arco interseca al lado del ángulo en el punto A' .
- Trácese un segmento \overline{XY} y un punto O en una hoja de papel. Con un transportador y un compás, trácese la imagen de \overline{XY} en una rotación de 40° en dirección contraria a la de las manecillas del reloj.
- Dibújese un triángulo ABC y un punto O en una hoja de papel. Con un transportador y un compás, dibújese la imagen de $\triangle ABC$ en una rotación de 50° en la dirección de las manecillas del reloj.
- Dibújese un triángulo ABC y un punto O . Dibújese la imagen de $\triangle ABC$ en una rotación de 135° en dirección contraria a la de las manecillas del reloj.

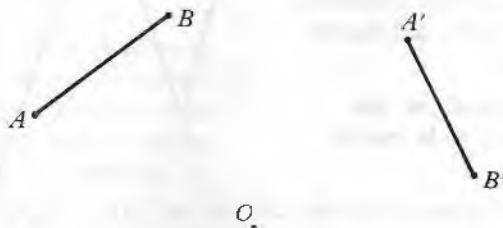


O.

B.

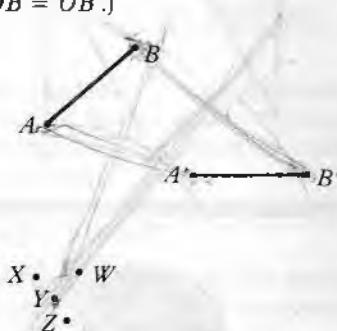
9. Si $\overline{A'B'}$ es la imagen de \overline{AB} en una rotación con centro O , ¿qué ángulo debe medirse para encontrar el ángulo de rotación?

- a. $\angle AOB$.
- b. $\angle AA'O$.
- c. $\angle A'B'O$.
- d. $\angle BOB'$.



10. Si $\overline{A'B'}$ es la imagen de \overline{AB} después de una rotación, ¿cuál de los cuatro puntos podría ser centro de rotación? (Recuérdese que si O es el centro, $OA = OA'$ y $OB = OB'$.)

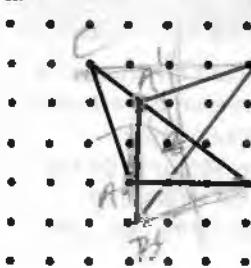
- a. W.
- b. X.
- c. Y. ✓
- d. Z.



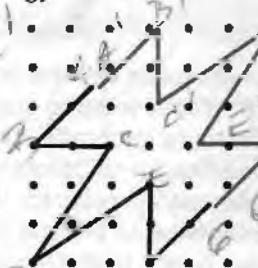
11. Trácese \overline{RS} y \overline{VW} . Si \overline{VW} es la imagen de \overline{RS} en una rotación, encuéntrense el centro y el ángulo de rotación.

12. En cada una de las figuras siguientes, la figura roja es la imagen de la figura negra en una rotación. Digase cuál es el centro de rotación e indíquese la medida de cada ángulo de rotación. (Puede ser útil usar papel vegetal.)

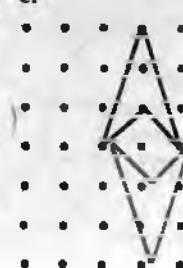
a.



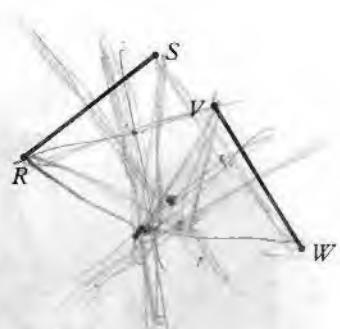
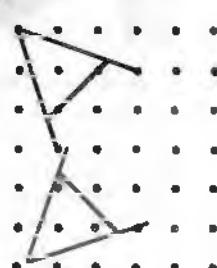
b.



c.

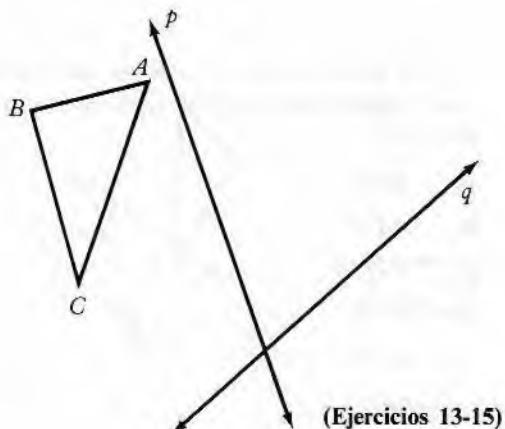


d.

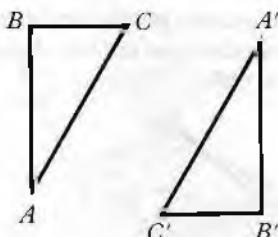


C.

13. Trácese un par de rectas intersecantes p y q y un triángulo ABC como se muestra. Dibújese la imagen de $\triangle ABC$ para la reflexión sobre la recta p seguida de la reflexión sobre la recta q . Llámese $\triangle A''B''C''$ a esta imagen.
14. Con papel vegetal, compruébese que $\triangle A''B''C''$ del ejercicio 13 es la imagen de rotación de $\triangle ABC$.
15. Midase con un transportador el ángulo agudo formado por las rectas p y q del dibujo del ejercicio 13. ¿Qué relación existe entre el tamaño de este ángulo y el tamaño del ángulo de rotación?
16. A una rotación de 180° sobre un punto se le llama *media vuelta*. $\triangle A'B'C'$ es la imagen rotada de media vuelta de $\triangle ABC$. Dibújense estas figuras y encuéntrese el centro de la media vuelta.



(Ejercicios 13-15)



ACTIVIDADES



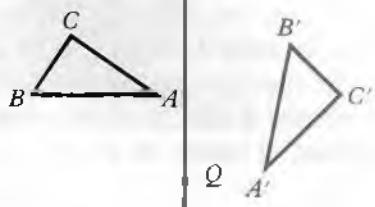
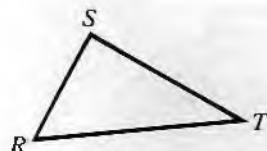
Unanse dos espejos formando un ángulo de 90° y obsérvese lo que se ve en ellos como ilustra la fotografía. ¿Es algo curioso? Explíquese la observación.



Unanse dos espejos formando un ángulo de 90° y obsérvese lo que se ve en ellos como ilustra la fotografía. La reflexión que aparece en la fotografía es sólo una de las tres que aparecerán. Una de estas tres imágenes es distinta de las otras dos, ¿en qué radica la diferencia?

17. Márquense los puntos X e Y en una hoja de papel y dibújese $\triangle RST$.

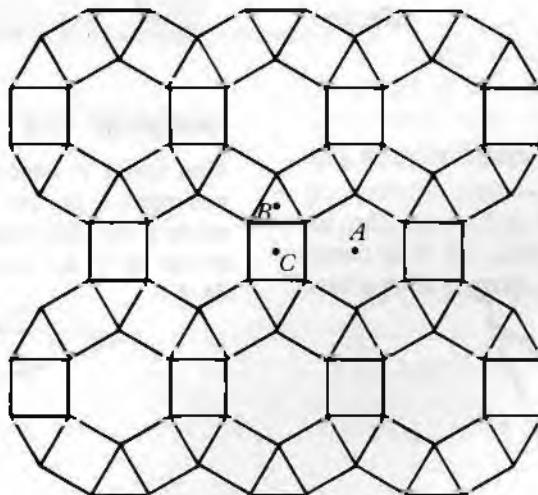
- Dibújese la imagen de media vuelta de $\triangle RST$ alrededor de X . Con la imagen de esta rotación dibújese una media vuelta alrededor de Y .
 - ¿Qué movimiento tiene el mismo efecto que una media vuelta sobre X seguida de una media vuelta sobre Y ? Describase este movimiento de la manera más específica posible.
18. $\triangle A'B'C'$ es la imagen de $\triangle ABC$ en una rotación sobre el centro Q . Dibújense estas figuras. ¿Se puede trazar la recta q de manera que la reflexión sobre la recta p seguida de una reflexión sobre la recta q tenga el mismo efecto que la rotación?



SOLUCION DE PROBLEMAS

Dibújese el diseño siguiente en papel vegetal. Rótese el papel 60° sobre el punto A y obsérvese que la copia concuerda con el diseño (supóngase que el diseño y su copia se extienden en todas direcciones para cubrir todo el plano).

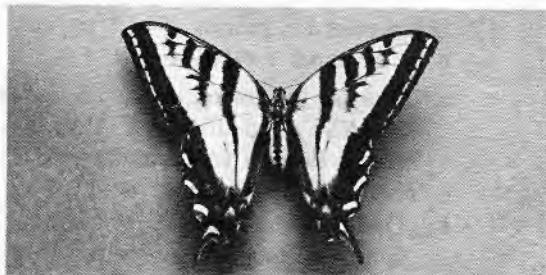
- ¿Qué otros ángulos de rotación centrados en A harán que el diseño concuerde consigo mismo?
- ¿Cuáles son los ángulos de rotación centrados en los puntos B y C que harán que el diseño concuerde consigo mismo?



13.5 Simetría

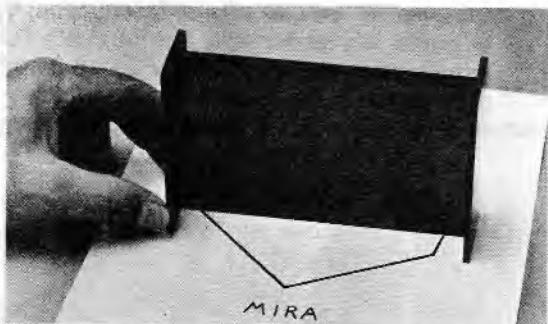
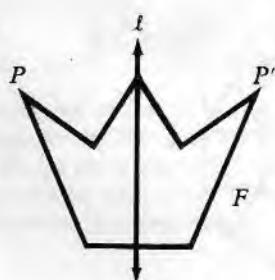
La mariposa y el cangrejo de las fotografías poseen una belleza natural relacionada con su forma. Una mitad parece idéntica a la otra. La relación parece tan perfecta que podría colocarse un espejo de manera que se reflejara la mitad de un animal y dar la apariencia de que el animal está completo.

Se dice que las formas tienen *simetría reflexiva* y que la recta sobre la cual se coloca el espejo es la *línea de simetría*.



Para comprobar la simetría reflexiva de una figura, puede dibujarse ésta en un papel y verificar si puede doblarse de manera que una mitad coincida exactamente con la otra. También puede emplearse la prueba del «espejo», como se muestra en la fotografía. Si se puede colocar un «espejo» sobre la figura de manera que la mitad de ella y su reflexión parezcan una copia fiel de la figura completa, entonces se dice que la figura tiene simetría reflexiva.

La siguiente definición está ilustrada por el dibujo.

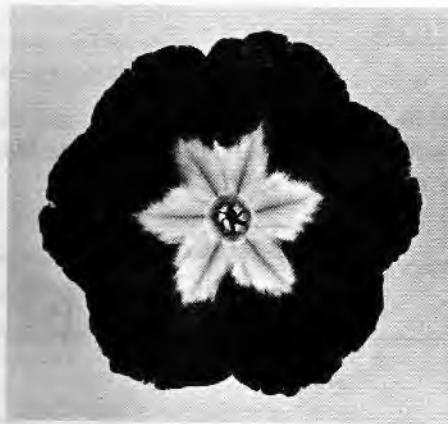


Definición 13.4

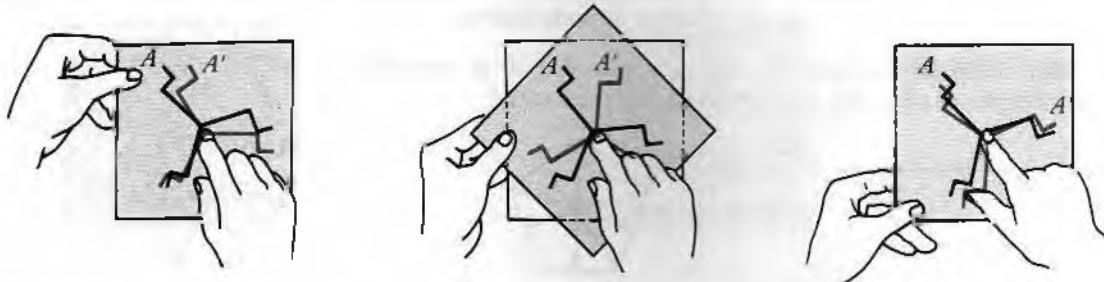
Una figura F tiene **simetría reflexiva** si hay una recta ℓ tal que la imagen de reflexión sobre ℓ de cada punto P de F también es un punto de F . La recta se llama **línea de simetría** de F .

Esta flor tiene otro tipo de simetría. Puede hacerse girar sobre un centro fijo a posiciones diferentes sin que cambie su apariencia original.

Se dice entonces que la figura tiene *simetría rotacional* y que el centro fijo es el *centro de simetría rotacional*.

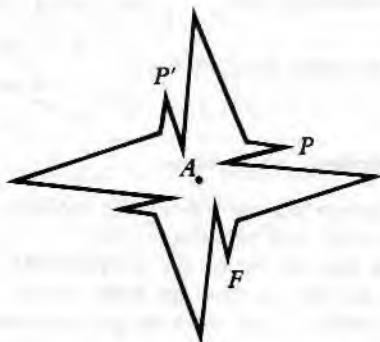


Para probar si una figura tiene simetría rotacional, puede dibujarse sobre una hoja de papel vegetal o sobre una hoja de plástico. Colóquese la copia directamente sobre la figura original. Entonces, manteniendo fijo el centro, se hace girar la copia hasta que coincida de nuevo con la figura original como se ilustra a continuación.



Comprobación de la simetría rotacional por el método de dibujar y girar

La siguiente definición está ilustrada por el dibujo.



Definición 13.5

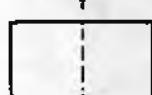
Una figura F tiene **simetría rotacional** si hay un giro sobre el centro A tal que la imagen rotada de cada punto P de la figura F también es un punto de F . El centro, A , de la rotación se llama **centro de la simetría rotacional** de F .

EJERCICIOS**A.**

¿En cuál de las siguientes figuras es ℓ una línea de simetría?

Verifíquese la respuesta con la prueba del «espejo» para la simetría reflexiva.

1.



2.



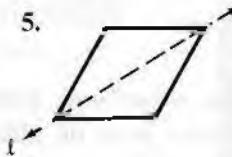
3.



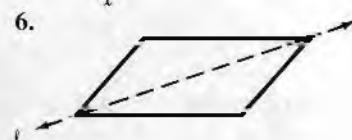
4.



5.



6.



7. Dibújense un cuadrado, un rombo, un rectángulo, un trapecio, un pentágono regular y un hexágono regular, y muéstrense todas las líneas de simetría reflexiva de cada figura.

¿Para cuáles de las figuras de los ejercicios 8 a 10 es verdadera la afirmación: «esta figura tiene simetría rotacional»?

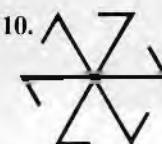
8.



9.

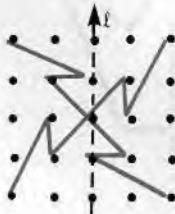


10.

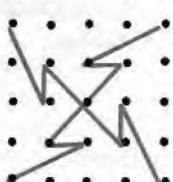
**ACTIVIDADES**

A la derecha aparece una figura con simetría rotacional de 90° (puede rotarse 90° para volver a su posición original) en una matriz de puntos 5×5 . Esta figura se construye trazando cuatro líneas idénticas que satisfacen estas condiciones.

1. Todas las líneas empiezan en el punto central y se mueven de punto en punto hasta alcanzar uno de la frontera.
2. Ninguna de las cuatro líneas se tocan o cruzan.
3. Una vez que la línea ha alcanzado un punto de la frontera, se detiene.



Sobre una matriz de puntos, dibújense por lo menos 20 modelos diferentes con simetría rotativa de 90° que satisfagan las condiciones anteriores. Obsérvese que la figura de la izquierda no se considera «diferente» de la de arriba, porque se trata de la figura anterior reflejada sobre la recta ℓ . Las figuras que pueden reflejarse o rotarse hasta coincidir nuevamente no se consideran diferentes.



B.

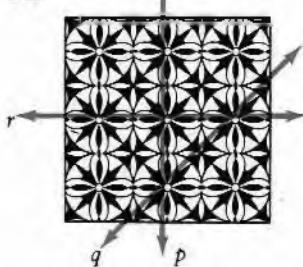
Dibújense figuras que satisfagan cada una de las siguientes condiciones.

11. Cuadrilátero no convexo con una línea de simetría.
12. Un hexágono con exactamente dos líneas de simetría.
13. Un hexágono con exactamente tres líneas de simetría.
14. Un pentágono con exactamente una línea de simetría.
15. Una figura con un número infinito de líneas de simetría.
16. Bosquéjese un polígono que tenga simetría rotacional, pero no simetría reflexiva.
17. Bosquéjese un polígono que tenga simetrías rotacional y reflexiva.

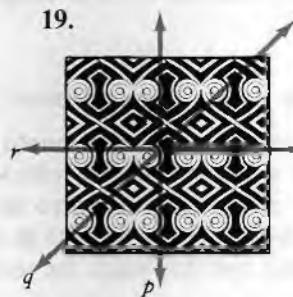
C.

En los ejercicios 18 y 19, supóngase que el diseño se ha extendido para cubrir todo el plano. En cada problema, ¿cuáles de las rectas, p , q y r son líneas de simetría?

18.



19.



SOLUCION DE PROBLEMAS

**NOW NO
SWIMS
ON MON**

En una piscina pública, estaba este letrero. Gírese 180° . ¿Qué se observa?



En este pastel falta una rebanada. Gírese la figura para poder encontrar la rebanada?

337-31770

El señor Oliver Lee pidió este número para la matrícula de su automóvil. Gírese la tarjeta 180° y explíquese por qué el señor Lee hizo esta petición.

Capítulo 13 Conceptos Importantes

Términos

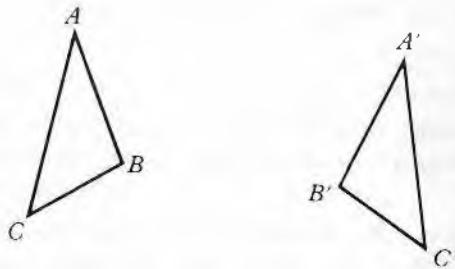
Reflexión (pág. 476)	Línea de simetría (pág. 494)
Imagen trasladada (pág. 484)	Simetría rotacional (pág. 495)
Rotación (pág. 488)	Centro de simetría rotacional (pág. 495)
Simetría reflexiva (pág. 494)	

Teoremas

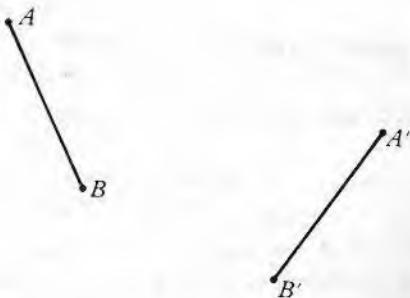
- 13.1** Dada una reflexión sobre una recta:
- la imagen reflejada de un segmento es un segmento de igual longitud;
 - la imagen reflejada de un ángulo es un ángulo de igual medida.
- 13.2** Si las rectas r y s son paralelas, entonces una reflexión sobre la recta r seguida de una reflexión sobre la recta s es una traslación. Además, si A'' es la imagen de A , entonces
- $\overline{AA''} \perp r$,
 - $AA'' = 2d$, donde d es la distancia entre las rectas r y s .
- 13.3** Si las rectas r y s se intersecan en el punto O , entonces una reflexión sobre r seguida de una reflexión sobre s , es una rotación. El punto O es el centro de rotación y el ángulo de rotación es 2α , donde α es la medida del ángulo recto o agudo que hay entre las rectas r y s .

Capítulo 13 Resumen

1. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.
 - a. Toda reflexión es una transformación.
 - b. Si P' es la imagen de P para una reflexión dada sobre la recta ℓ , entonces ℓ es la bisectriz perpendicular de PP' .
 - c. Una rotación puede representarse como dos reflexiones.
 - d. Un cuadrado tiene exactamente dos líneas de simetría.
 - e. Un trapezo isósceles tiene simetría rotacional.
2. Citense dos letras mayúsculas que tengan exactamente dos líneas de simetría. ¿Hay otras con esta condición?
3. Citense dos letras mayúsculas que tengan simetría rotacional pero no línea de simetría. ¿Hay otras con esta condición?
4. ¿Cuántas líneas de simetría tiene un octágono regular?
5. Tráicense los triángulos ABC y $A'B'C'$. Constrúyase la recta ℓ de manera que $\triangle A'B'C'$ sea la imagen de reflexión de $\triangle ABC$ sobre ℓ .

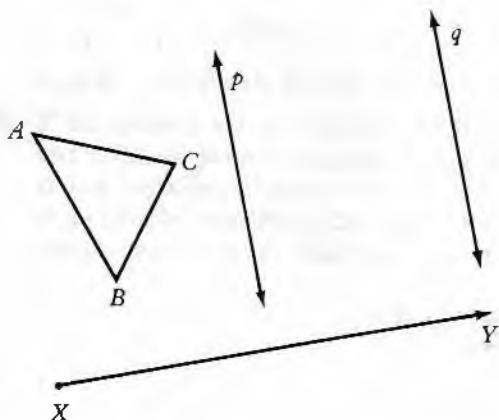


6. Tráicense \overline{AB} y $\overline{A'B'}$. Encuéntrense el centro de rotación y el ángulo de rotación si $\overline{A'B'}$ es la imagen de \overline{AB} en una rotación.

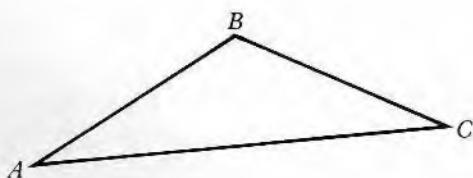


Capítulo 13 Examen

1. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.
 - a. Toda traslación es una transformación.
 - b. Si $\overline{A'B'}$ es la imagen de \overline{AB} en rotación sobre el centro O , entonces $m\angle AOA' = m\angle BOB'$.
 - c. Una traslación puede representarse como dos reflexiones.
 - d. Un paralelogramo tiene exactamente dos líneas de simetría.
 - e. Un rombo tiene simetría rotacional.
2. Cítense dos letras mayúsculas que tengan exactamente una línea de simetría. ¿Hay otras con esta condición?
3. Cítense dos letras mayúsculas que tengan simetría reflexiva y rotacional. ¿Hay otras con esta condición?
4. ¿Tiene un polígono regular simetrías reflexiva y rotacional?
5. Dibújese el triángulo ABC , las rectas p y q y la flecha de traslación \overrightarrow{XY} . Refléjese $\triangle ABC$ sobre p y q . ¿Qué relación hay entre la distancia de p a q y XY ?



6. Trácese $\triangle ABC$. Con C como centro de rotación, rótese $\triangle ABC$ un ángulo de 120° .



Técnicas para la solución de problemas

Examen de casos especiales

En ocasiones es útil considerar casos especiales para la solución de problemas. Estúdiese el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Sea P cualquier punto sobre o dentro de un triángulo equilátero. Si a , b y c son las longitudes de los segmentos perpendiculares de P a los lados del triángulo, ¿qué relación existe entre la suma $a + b + c$ y la longitud de una altura?

Considérense estos casos especiales:

1. Supóngase que $P = D$. Entonces, $a = c = 0$.

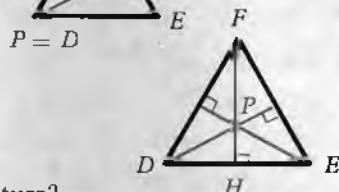
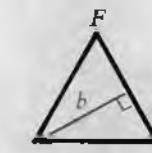
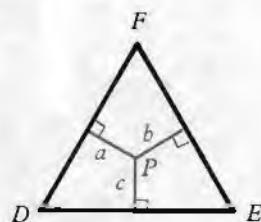
Dado que b es la altura de FE , $a + b + c$ es igual a la longitud de una altura.

2. Supóngase que P está en el centro de

$\triangle DEF$. Entonces, $a = b = c = \frac{1}{3}FH$

(la altura). Entonces, $a + b + c = FH$ o la longitud de la altura.

¿Aparenta $a + b + c$ ser igual a la longitud de la altura?



PROBLEMAS

1. En el ejemplo anterior, inténtese el caso especial en el que P es el punto medio de un lado. ¿Es $a + b + c$ igual a la longitud de la altura?

2. $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero inscrito en un círculo. P es un punto cualquiera en el círculo. ¿Qué relación existe entre PA , PB y PC ? (Sugerencia: Considérense estos casos: 1. $P = A$, 2. $P = C$, y 3. $PA = PC$.)

3. **Dado:** $AB = BC = AC = 4$ cm. P es cualquier punto sobre \overline{AB} . $DP \perp AC$, $PE \perp BC$.

Encuéntrese: $DP + PE$.

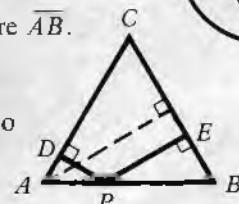
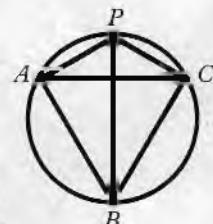
(Sugerencia: Considérese la relación entre DP , PE y AF usando los casos especiales en que $P = A$ y $PA = PB$.)

4. **Dado:** El cuadrado $ABCD$ con cada lado de 1 unidad de longitud.

Encuéntrese: Un punto P tal que $PA + PB + PC + PD$ sea el mínimo posible.

(Sugerencia: Considérense estos casos: 1. $P = A$; 2. P es el punto medio de AB ; 3. P es la intersección de las diagonales; 4. Empléese una regla para encontrar $PA + PB + PC + PD$ cuando P está en el interior de $ABCD$ pero no en el punto de intersección de las diagonales.)

¿Qué posición parece producir un mínimo para $PA + PB + PC + PD$?

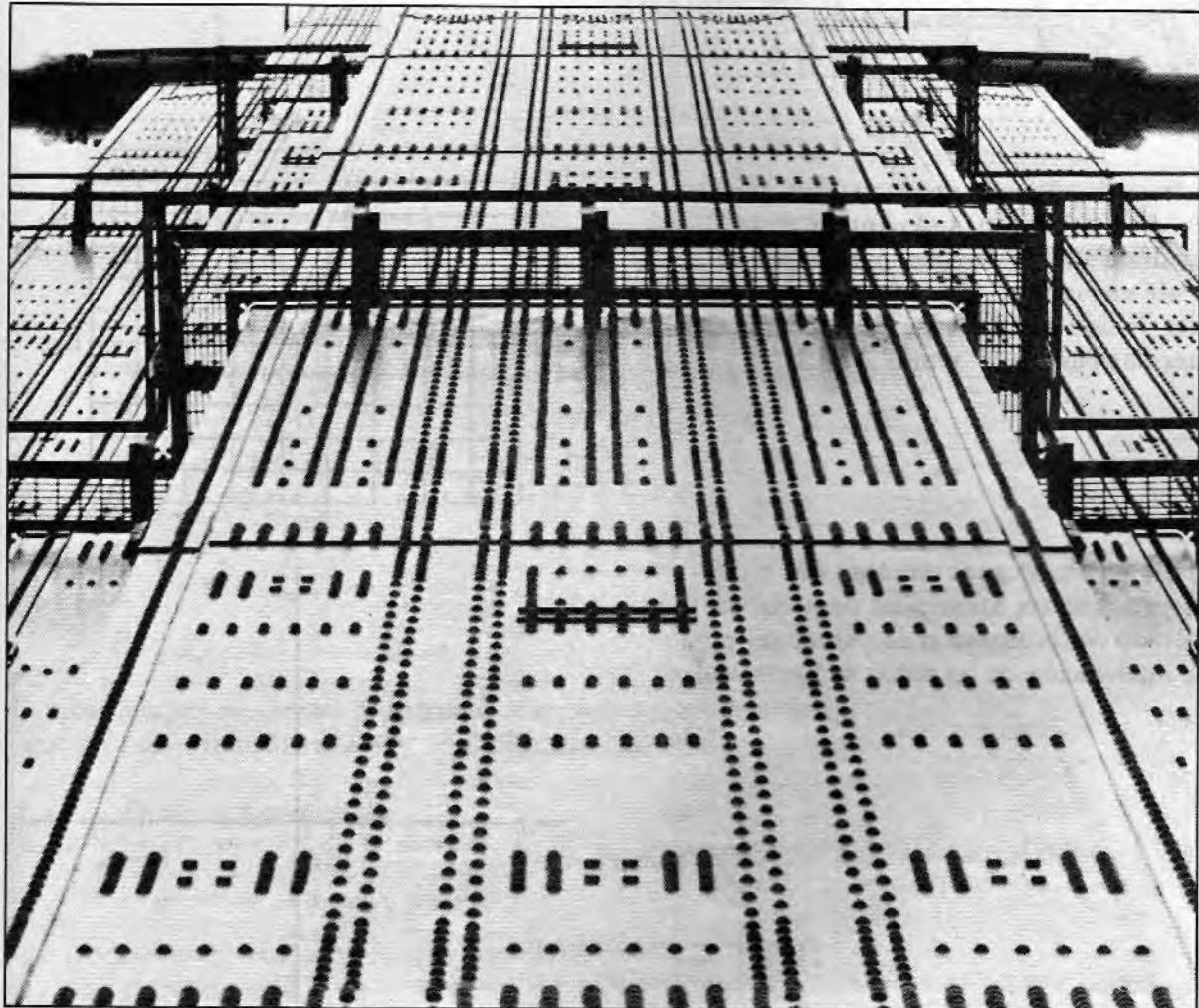


CAPÍTULO

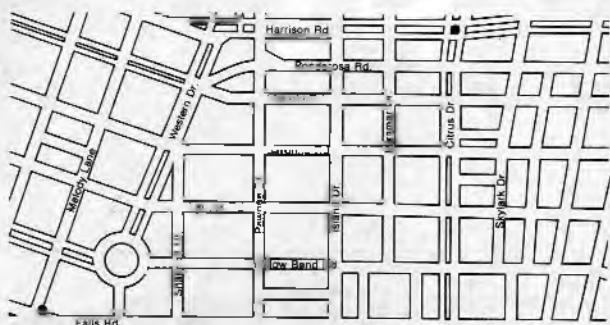
14

14.1	Sistema de coordenadas cartesianas	504
14.2	Punto medio de un segmento	508
14.3	La pendiente de una recta	512
14.4	Pendientes de rectas perpendiculares y paralelas	516
14.5	La fórmula de la distancia	520
14.6	La ecuación de la recta	524
14.7	La ecuación del círculo	528
14.8	Uso de las coordenadas en la prueba de teoremas	532
14.9.	Transformaciones y geometría de coordenadas	536
	<i>Conceptos importantes</i>	538
	<i>Resumen</i>	539
	<i>Examen</i>	540
	Resumen global (Caps. 11 a 14)	541

Geometría de coordenadas



14.1 Sistema de coordenadas cartesianas

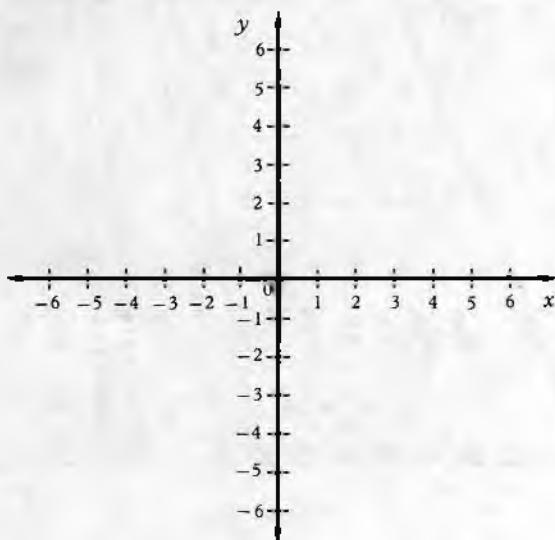


Para dar direcciones de manera que se pueda ir del punto *A* al punto *B* de la cuadrícula de la derecha, podría decirse:

«Ir una calle al este, ocho al norte, cinco al este y dos al sur.» Dense dos maneras más sencillas para ir del punto *A* al *B*.

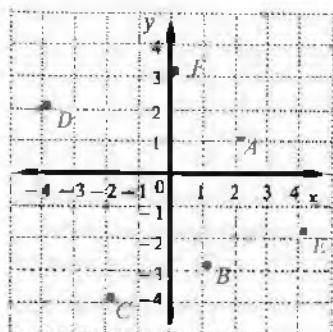
En matemáticas se emplean dos rectas perpendiculares numeradas para elaborar un método de localización de puntos. El punto de intersección de las rectas se llama *origen*.

¿Cómo puede decirse a una persona que vaya de un punto a otro? Cuando se dan direcciones, suele decirse que se recorra cierta distancia en una dirección y luego otra distancia en otra dirección.

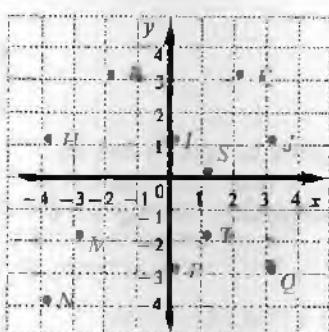


Un par de números llamados *coordenadas* indican la ubicación de cada punto. El punto *A* del ejemplo siguiente está «2 la derecha» y «1 arriba» del origen. Se dice que *A* tiene coordenadas $(2, 1)$. El primer número es la coordenada x y el segundo es la coordenada y . En general, un punto se representa por las coordenadas (x, y) . Se empleará la notación $P(x, y)$ para representar al punto *P* con las coordenadas (x, y) . Este método de determinación de puntos se llama *sistema de coordenadas cartesianas*, por el famoso matemático René Descartes.

Estúdiense los siguientes ejemplos.



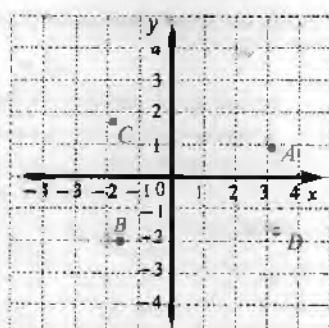
Punto	Coordenadas
<i>A</i>	$(2, 1)$
<i>B</i>	$(1, -3)$
<i>C</i>	$(-2, -4)$
<i>D</i>	?
<i>E</i>	?
<i>F</i>	?



Punto	Coordenadas
<i>J</i>	$(3, 1)$
<i>H</i>	$(-4, 1)$
<i>I</i>	$(0, 1)$
?	$(-3, -2)$
?	$(1, 0)$
?	$(0, -3)$

Los ejemplos siguientes muestran que las coordenadas no tienen que ser necesariamente enteros. Estúdiense cada ejemplo.

Puntos	Coordenadas
<i>A</i>	$(3, \frac{2}{3})$
<i>B</i>	$(-1\frac{4}{5}, -\frac{7}{3})$
<i>C</i>	$(-2, \sqrt{2})$
<i>D</i>	$(\pi, -2)$



EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 4, máquense los siguientes puntos en un papel cuadriculado. Empléese un juego diferente de ejes para cada ejercicio.

1. $(-4, 2), (6, -1), (-5, -4)$ y $(-3, -2)$.
2. $(6, 2), (-2\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), (-5, \frac{8}{3})$ y $(-\sqrt{6}, \sqrt{2})$.
3. $(-4, 0), (5, 0), (0, 0)$ y $(2\frac{1}{2}, 0)$.
4. $(0, -2\frac{1}{2}), (0, 6), (0, -3)$ y $(0, \sqrt{2})$.

En los ejercicios 5 a 8, trácese rectas que contengan los siguientes pares de puntos.

5. $(0, 0)$ y $(-5, -5)$.
6. $(4, 0)$ y $(0, -3)$.
7. $(-4, 2)$ y $(-2, -6)$.
8. $(5, -3)$ y $(4, -3)$.

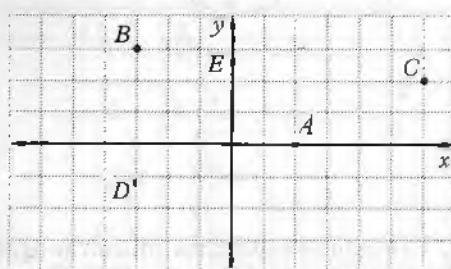
En los ejercicios 9 a 11, dibújense triángulos con las coordenadas siguientes como vértices. Indíquese si los triángulos resultantes son acutángulos, rectángulos u obtusángulos.

9. $(-2, 3), (4, 1)$ y $(7, -2)$.
10. $(3, 3), (-4, 0)$ y $(4, 6)$.
11. $(-4, 2), (-4, -3)$ y $(3, -3)$.

En los ejercicios 12 a 14, trácese cuadriláteros con las siguientes coordenadas como vértices.

12. $(-5, -3), (-1, -3), (-5, 1)$ y $(-1, 1)$.
13. $(0, 6), (6, 0), (0, -6)$ y $(-6, 0)$.
14. $(-1, 5), (3, 2), (2, -5)$ y $(-4, -1)$.

15. Dada la gráfica siguiente, díganse las coordenadas de los puntos A, B, C, D y E . En algunos casos, será necesario dar un resultado aproximado.

**ACTIVIDADES**

En una cuadricula de coordenadas, empezando en $(0, 0)$, dibújese una secuencia continua de segmentos que vayan de un punto a otro. Léase cada columna de arriba abajo.

¿QUE OBJETO SE REPRESENTA?

Empezar → $(0, 0)$	$(6, 24)$	$(6, 39)$	$(4, 39)$	$(4, 24)$
	$(10, 0)$	$(6, 35)$	$(7, 39)$	$(4, 37)$
	$(12, 2)$	$(7, 35)$	$(6, 39)$	$(3, 37)$
	$(12, 8)$	$(6, 35)$	$(6, 42)$	$(4, 37)$
	$(8, 14)$	$(6, 37)$	$(4, 42)$	$(2, 14)$
	$(10, 17)$	$(7, 37)$	$(4, 39)$	$(3, 35)$
	$(10, 22)$	$(6, 37)$	$(3, 39)$	$(4, 35)$
				$(0, 0) ←$ Terminar

B.

En los ejercicios 16 a 18, se dan las coordenadas de tres vértices de un rectángulo. Encuéntrense las coordenadas del cuarto vértice. (Sugerencia: Se pueden representar las tres coordenadas.)

16. $(0, 0)$, $(-4, 0)$ y $(0, -2)$.

17. $(-4, 3)$, $(-4, -1)$ y $(5, -1)$.

18. $(1, -3)$, $(1, 5)$ y $(4, 5)$.

En los ejercicios 19 a 21, se proporcionan las coordenadas de tres vértices de un cuadrado. Encuéntrense las coordenadas del cuarto vértice.

19. $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, -3)$.

20. $(-1, 2)$, $(2, 2)$ y $(2, -1)$.

21. $(-3, 2)$, $(-3, 5)$ y $(0, 5)$.

En los ejercicios 22 y 23, se proporcionan las coordenadas de tres vértices de un paralelogramo. Encuéntrense las coordenadas del cuarto vértice. (Hay más de una respuesta correcta.)

22. $(0, 0)$, $(4, 4)$ y $(6, 4)$.

23. $(1, 1)$, $(4, 1)$ y $(0, -1)$.

24. Márquense varios puntos en los que el producto de las coordenadas sea igual a 12. Trácese una recta fina por estos puntos.

25. Márquense varios puntos en los que la coordenada y sea el doble que la coordenada x . Trácese una recta que pase por los puntos.

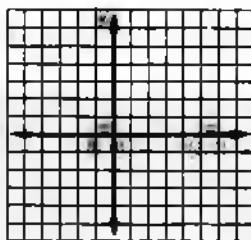
26. Encuéntrese un tercer punto que esté sobre la línea que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(-1, 2)$.

27. Grafíquense los puntos $(2, 0)$ y $(0, 4)$ y trácese una recta que pase por ellos. Si las coordenadas $(0, 0)$ y $(3, n)$ determinan una línea paralela a la primera, ¿cuál es el valor de n ?

SOLUCION DE PROBLEMAS

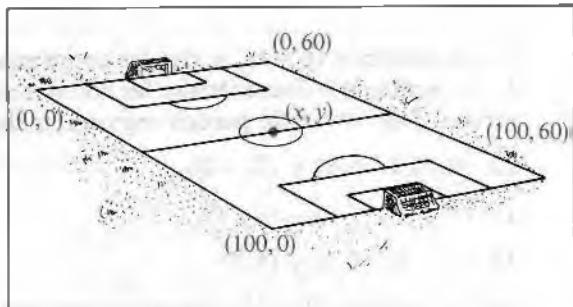
Dos vértices de una figura son $(0, 0)$ y $(6, 0)$.

1. ¿Cuáles son las coordenadas del tercer vértice si la figura es un triángulo equilátero? (Hay dos soluciones.)
2. ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices si la figura es un cuadrado? (Hay tres soluciones.)
3. ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices si la figura es un paralelogramo de altura 4?



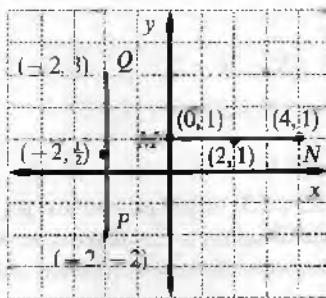
14.2 Punto medio de un segmento

Un campo de fútbol suele medir 100 yardas de largo y 60 de ancho. Supóngase que las coordenadas se asignan a las esquinas del campo como se ilustra en la figura. ¿Cuáles son las coordenadas del centro del campo?

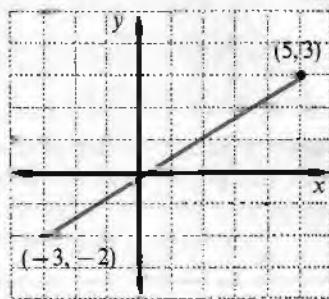


Obsérvense los puntos medios de los segmentos de la derecha.

Obsérvese que para el segmento horizontal \overline{MN} , la coordenada x del punto medio es la semisuma de las coordenadas x de los extremos. Para el segmento vertical \overline{PQ} , la coordenada y del punto medio es la semisuma de las coordenadas y de los extremos.



Este mismo concepto puede usarse para otros segmentos de recta. Sean (x_1, y_1) las coordenadas de un extremo y (x_2, y_2) las coordenadas de otro extremo de la figura siguiente.



$$(x_1, y_1) = (-3, -2); (x_2, y_2) = (5, 3)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}$$

Las coordenadas del punto medio son $(1, \frac{1}{2})$.

Este ejemplo sugiere el teorema siguiente.

Teorema 14.1

Si las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$ son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , entonces las coordenadas del punto medio de $\overline{P_1P_2}$ son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Las siguientes preguntas sugieren una prueba para el teorema 14.1.
La prueba se deja como ejercicio.

1. ¿Por qué las coordenadas de C son $(-3, -4)$?
2. ¿Por qué las coordenadas de E , el punto medio de \overline{AC} , son $(-3, -1)$?
3. ¿Por qué las coordenadas de D , el punto medio de \overline{BC} , son $(2, -4)$?
4. Considerando las preguntas 2 y 3, ¿por qué las coordenadas de M , el punto medio de \overline{AB} , son $(2, -1)$?

Obsérvese que si las coordenadas de A son (x_1, y_1) o $(-3, 2)$, y las coordenadas de B son (x_2, y_2) o $(7, -4)$, entonces, $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = 2$ e $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$. Por tanto, las coordenadas de M son $(2, -1)$.

Ejemplo

Si M es el punto medio de \overline{AB} , donde $(-4, -2)$ son las coordenadas de A y $(2, 1)$ son las coordenadas de M , encuéntrense las coordenadas de B .

Sean (x_1, y_1) las coordenadas de B . Por el teorema 14.1,

$$2 = \frac{-4 + x_1}{2} \text{ y } 1 = \frac{-2 + y_1}{2}.$$

Despejando x_1 e y_1 , se obtiene $x_1 = 8$ e $y_1 = 4$. Las coordenadas de B son, pues, $(8, 4)$.

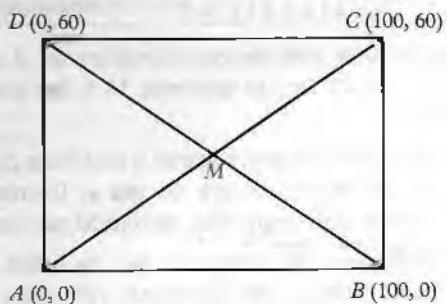
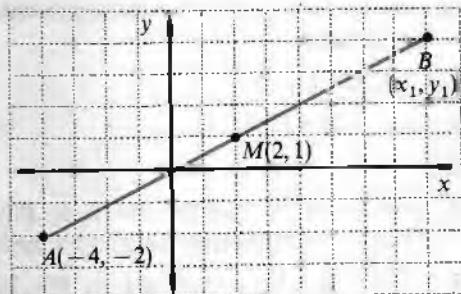
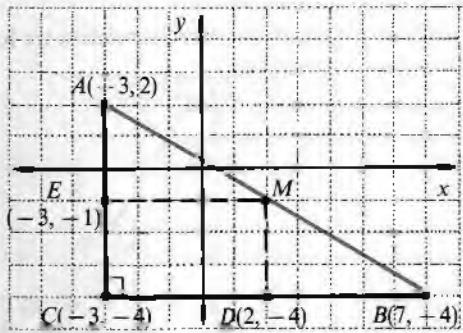
APLICACION

Para encontrar las coordenadas del centro del campo de fútbol es necesario encontrar el punto medio de \overline{AC} .

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{0 + 100}{2}, \frac{0 + 60}{2} \right)$$

Las coordenadas de M son $(50, 30)$.

¿Tendría M las mismas coordenadas si se hubiera encontrado el punto medio de \overline{BD} ?



EJERCICIOS

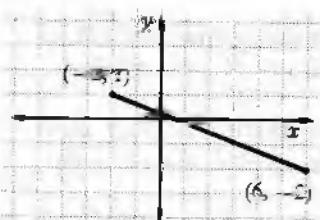
A.

1. Determinense los puntos medios de los segmentos siguientes.

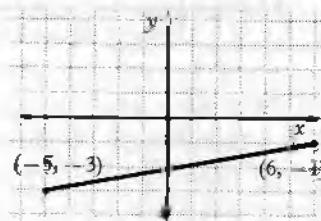
a.



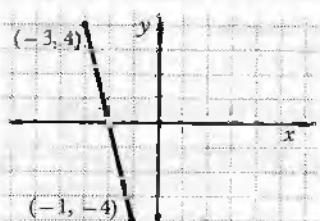
b.



c.



d.



En los ejercicios 2 a 7, determinense los puntos medios de los segmentos cuyos extremos están representados por las siguientes coordenadas.

2. $(-3, 2)$ y $(7, 10)$.

3. $(-7, 4)$ y $(9, -4)$.

4. $(-1, -2)$ y $(5, 4)$.

5. $(-3, -5)$ y $(-7, -2)$.

6. $(-4, 2)$ y $(5, -3)$.

7. $(7, -3)$ y $(0, 0)$.

8. Grafíquense los puntos $A(-2, 5)$, $B(6, 1)$ y $C(-4, -3)$ y trácese $\triangle ABC$. Encuéntrense los puntos medios de \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} .

9. Grafíquense los puntos $A(1, 6)$, $B(6, 2)$, $C(8, -3)$ y $D(-5, 2)$.

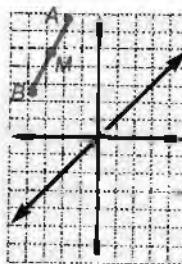
Encuéntrense los puntos medios de \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} .

Dibújese un cuadrilátero uniendo los puntos medios. ¿Qué clase de cuadrilátero es?

ACTIVIDADES

Supóngase que las coordenadas de A son $(-2, 6)$ y las coordenadas de B son $(-4, 2)$. Por el teorema 14.1, las coordenadas del punto medio M son $(-3, 4)$.

- Empléese papel vegetal o una hoja de plástico para encontrar la reflexión de \overline{AB} sobre el eje de las y . Compárense las coordenadas del punto medio del segmento reflejado con las coordenadas de M .
- Refléjese \overline{AB} sobre el eje de las x . Compárense las coordenadas del punto medio del segmento reflejado con las coordenadas de M .
- Establézcase la misma comparación cuando la recta $y = x$ se usa como línea de reflexión.



B.

En los ejercicios 10 a 14, M es el punto medio de \overline{AB} . Se dan las coordenadas de dos de los puntos. Encuéntrense las coordenadas del tercer punto.

10. $A(1, 1)$, $M(5, 1)$, encuéntrese B .
11. $A(-2, -6)$, $M(-2, 1)$, encuéntrese B .
12. $A(-5, -3)$, $M(2, 1)$, encuéntrese B .
13. $M(0, 0)$, $B(-4, 3)$, encuéntrese A .
14. $M(0, 0)$, $B(1, 6)$, encuéntrese A .
15. Dado el triángulo ABC con vértices $A(-4, -3)$, $B(8, 0)$ y $C(6, 12)$ se traza una recta paralela a la base AB y que biseca a AC . Encuéntrense las coordenadas del punto donde la recta interseca a \overline{BC} .
16. Supóngase que las coordenadas de A y B son $(-4, 6)$ y $(6, -2)$. Encuéntrense las coordenadas de X , tales que $AX = \frac{1}{4}AB$.
17. Supóngase que las coordenadas de A y B son $(-7, -2)$ y $(5, -1)$. Encuéntrense las coordenadas de un punto C sobre \overline{AB} tal que $AC = \frac{1}{2}AB$.

C.

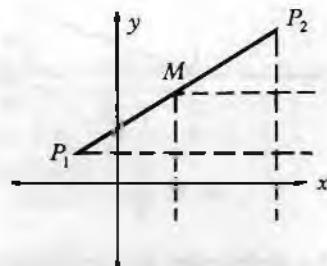
18. Pruébese el teorema 14.1 considerando la siguiente información.

Dado: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_1M = MP_2$

Pruébese: Las coordenadas de M son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

(Sugerencia: Trácense las rectas auxiliares indicadas en el diagrama.)

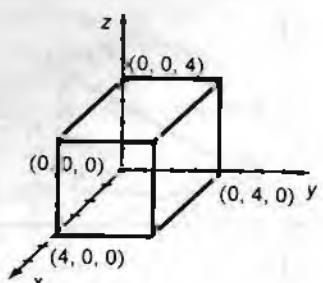
19. Considérense los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Encuéntrense las coordenadas de los puntos que trisecan a $\overline{P_1P_2}$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Considérese un sistema tridimensional de coordenadas, con un eje de las x , uno de las y y uno de las z . Se sitúa un cubo con aristas de 4 unidades según ilustra el diagrama.

¿Cuáles son las coordenadas (x, y, z) del centro del cubo?



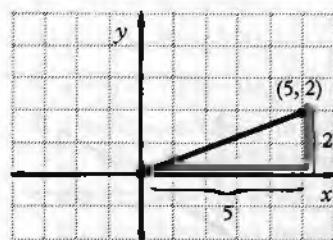
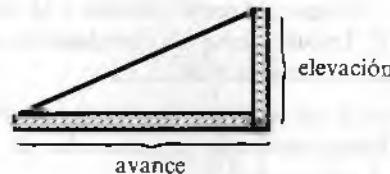
14.3 La pendiente de una recta



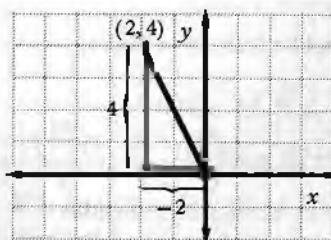
¿Cuál es la pendiente de los tejados?

La pendiente de una recta o de un segmento puede considerarse como la razón $\frac{\text{elevación}}{\text{avance}}$, tal como aparece en la figura.

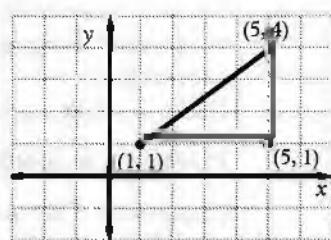
Se usa la letra m para designar a la pendiente. Estúdiense los siguientes ejemplos.



$$m = \frac{2}{5}$$

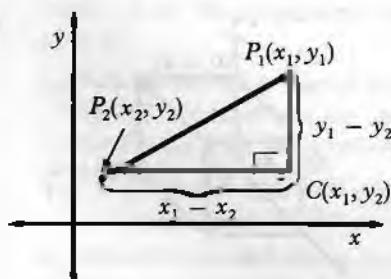


$$m = \frac{4}{-2} = -\frac{2}{1}$$



$$m = \frac{3}{4}$$

La definición de pendiente que se presenta a continuación incluye el sistema de coordenadas cartesianas.



La pendiente de una recta está determinada por el cambio en la distancia vertical ($y_1 - y_2$) dividida entre el cambio en la distancia horizontal ($x_1 - x_2$).

Definición 14.1

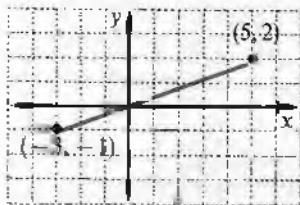
Si P_1 y P_2 tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , respectivamente, entonces la pendiente m de $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

si $x_1 - x_2 \neq 0$.

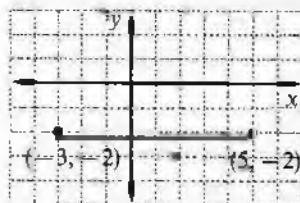
Los ejemplos siguientes muestran que la pendiente de una recta puede ser positiva, negativa, cero o indefinida.

Ejemplo 1 Pendiente positiva



$$m = \frac{2 - (-1)}{5 - (-3)} = \frac{3}{8}$$

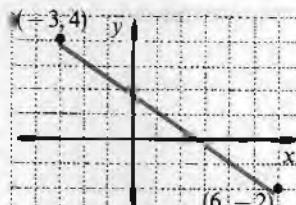
Ejemplo 3 Pendiente cero



$$m = \frac{-2 - (-2)}{5 - (-3)} = \frac{0}{8} = 0$$

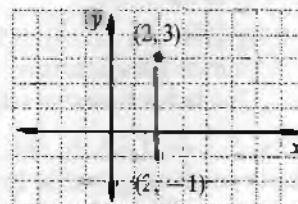
La pendiente de una recta, si es paralela al eje de las x , es cero.

Ejemplo 2 Pendiente negativa



$$m = \frac{4 - (-2)}{-3 - 6} = -\frac{2}{3}$$

Ejemplo 4 Pendiente indefinida



$$m = \frac{3 - (-1)}{2 - 2} = \frac{4}{0}$$

Así pues, la pendiente es indefinida. ¿Por qué? La pendiente de una recta paralela al eje de la y es indefinida.

APLICACION

Si esta casa mide 30 pies de ancho y la elevación del tejado es 6 pies, ¿cuál es la pendiente del tejado?

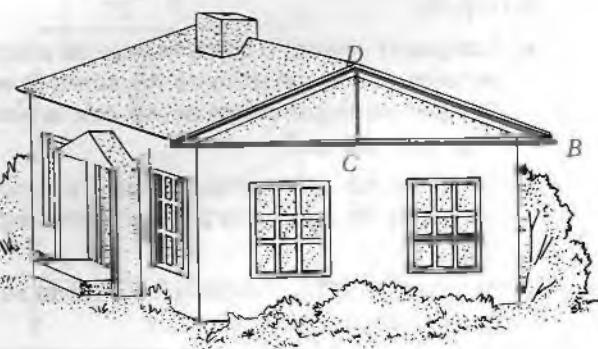
Si $AB = 30$, entonces

$AC = 15$.

Dado que $DC = 6$, entonces la pendiente =

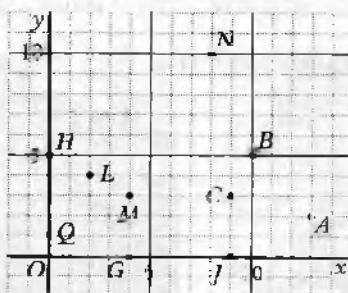
$$= \frac{\text{elevación}}{\text{avance}} = \frac{6}{15}.$$

Por tanto, la pendiente = $\frac{2}{5}$



EJERCICIOS**A.**

1. Determinense las coordenadas de cada punto y encuéntrense las pendientes de los siguientes segmentos.
- \overline{AB} .
 - \overline{HN} .
 - \overline{AC} .
 - \overline{MC} .
 - \overline{GJ} .
 - \overline{LQ} .
 - \overline{HG} .
 - \overline{MB} .
 - \overline{MG} .



En los ejercicios 2 a 7, encuéntrese la pendiente de la recta que contiene los puntos dados.

- (0, 0), (4, 6).
- (3, 5), (9, 2).
- (-2, 5), (6, -3).
- (-2, 10), (-6, -4).
- (10, 2), (-2, 2).
- (5, 0), (0, -5).
- Los vértices de un paralelogramo son $R(1, 4)$, $S(3, 2)$, $T(4, 6)$ y $U(2, 8)$. Grafíquense estos puntos y encuéntrense las pendientes de cada lado. ¿Qué lados tienen pendientes iguales?
- Los vértices de un rectángulo son $E(-2, 3)$, $F(4, 3)$, $G(4, -1)$ y $H(-2, -1)$. Encuéntrese la pendiente de cada lado. ¿Cuáles son los dos lados que tienen pendientes indefinidas?

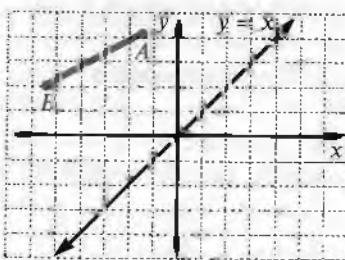
B.

- ¿Cuál es la pendiente de una recta si cruza el eje de las x en 6 y el eje de las y en -2?
- Los vértices de un triángulo son $A(4, 6)$, $B(-1, 2)$ y $C(2, -4)$. Encuéntrese la pendiente de cada lado.

ACTIVIDADES

Supóngase que las coordenadas de A son $(-2, 4)$, y las de B $(-6, 2)$.

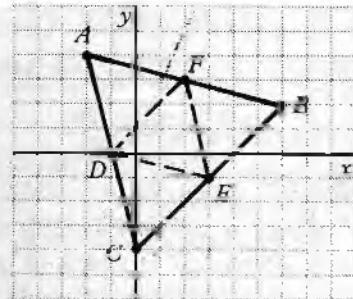
- Con papel vegetal o con una hoja de plástico, encuéntrese la reflexión de \overline{AB} sobre el eje de las y . Compárese la pendiente de \overline{AB} con la pendiente del segmento reflejado.
- Refléjese \overline{AB} sobre el eje de las x y compárese la pendiente de \overline{AB} con la pendiente del segmento reflejado.
- Hágase la misma comparación cuando se usa la recta $y = x$ como línea de reflexión.



12. Dado $\triangle ABC$ con $A(-2, 4)$, $B(6, 2)$ y $C(0, -4)$:
- Encuéntrense las coordenadas de los puntos medios D , E y F .
 - Determiníense las pendientes de \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} .
 - Determiníense las pendientes de \overline{DE} , \overline{DF} y \overline{FE} .
 - ¿Qué se observa en las pendientes encontradas en b y c?

13. Los vértices de un triángulo son $X(11, 0)$, $Y(-5, 4)$ y $Z(3, 4)$.

- Encuéntrense las pendientes de los lados.
- Encuéntrense las pendientes de las medianas.
(Empléese el teorema 14.1 para encontrar los puntos medios de los lados.)
- Una recta con pendiente -3 cruza el eje de las x en $(8, 0)$. ¿En qué punto cruza el eje de las y ?



15. ¿Cuál es la pendiente de una recta si la coordenada x siempre es doble que la coordenada y ?

C.

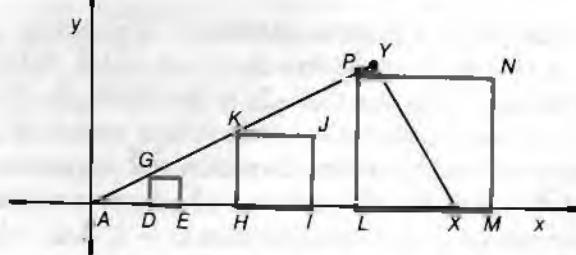
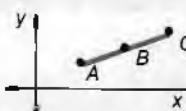
- $ABCD$ es un cuadrilátero con vértices $A(a, b)$, $B(c, b)$, $C(c + d, e)$ y $D(a + d, e)$. Encuéntrense las pendientes de los lados.
- $\triangle ABC$ tiene vértices $B(-6, -3)$ y $C(8, -4)$. La pendiente de $\overline{AB} = \frac{1}{2}$ y la pendiente de $\overline{AC} = -2$. Encuéntrense las coordenadas del punto A .
- Una recta con pendiente -1 contiene al punto $(5, -2)$. Encuéntrese x si la recta también contiene al punto $(x, 8)$.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Tres puntos, A , B y C , son colineales si la pendiente de \overline{AB} es igual a la pendiente de \overline{BC} . Empléese este hecho para resolver el siguiente problema.

Dado: $\triangle AXY$ con $A(0, 0)$, pendiente de $\overline{AY} = \frac{1}{2}$, $DEFG$, $Hijk$ y $LMNP$ son cuadrados con coordenadas $D(4, 0)$, $H(10, 0)$ y $L(18, 0)$.

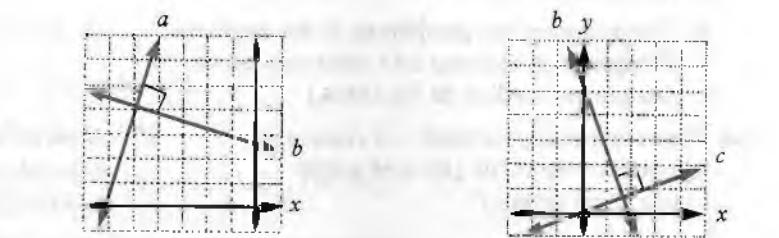
Pruébese: F , J y N son colineales.



14.4 Pendientes de rectas perpendiculares y paralelas

Supóngase que se hace girar en dirección contraria a la de las manecillas del reloj una bola sujetada a una cuerda. Si se suelta la bola en el punto A , ¿cuál es la pendiente de la trayectoria que sigue? Esta pregunta se examina en esta sección.

Primero, se considerarán las pendientes de rectas perpendiculares. Las rectas de las figuras son perpendiculares. Determinense la pendiente de cada par de rectas.



Obsérvese que la pendiente de $a = 4$, la pendiente de $b = \frac{1}{4}$ y $4 \cdot \frac{1}{4} = -1$.

Obsérvese que la pendiente de $b = -\frac{5}{2}$, la pendiente de $c = \frac{2}{5}$, y $-\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} = -1$.

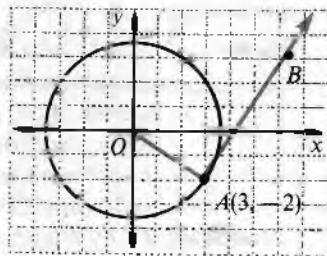
Estas observaciones sugieren el siguiente teorema.

Teorema 14.2 El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es -1 .

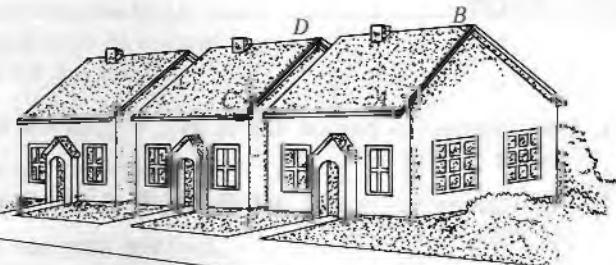
El teorema 14.2 sólo es verdadero si ninguna de las rectas es paralela al eje de las y . ¿Por qué?

APLICACION

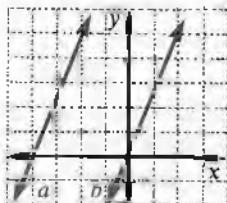
Para resolver el problema planteado al principio de la sección, asíñase un sistema de coordenadas. Si las coordenadas de A son $(3, -2)$, la pendiente de \overline{OA} es $-\frac{2}{3}$. Sorprendentemente, las leyes científicas muestran que la bola siempre se moverá en una dirección \overline{AB} tangente al círculo. Así, $\overline{OA} \perp \overline{AB}$. Por el teorema 14.2, el producto de las pendientes de estos dos segmentos es -1 . Así, $-\frac{2}{3} \cdot$ pendiente de $\overline{AB} = -1$, o la pendiente de $\overline{AB} = \frac{3}{2}$.



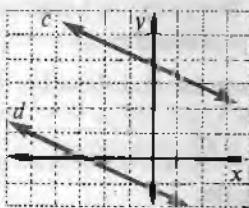
Considérense las pendientes de los tejados de la derecha. Si la pendiente de \overline{AB} es $\frac{2}{3}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, ¿cuál es la pendiente de \overline{CD} ? Esta pregunta se responde más adelante.



Considérense ahora las pendientes de las rectas paralelas. Las rectas siguientes son paralelas. Determinense las pendientes de cada par de rectas.



Obsérvese que la pendiente de $a = \frac{3}{1}$, la pendiente de $b = \frac{3}{1}$ y la pendiente de $a =$ pendiente de b .



Obsérvese que la pendiente de $c = -\frac{2}{2}$, la pendiente de $d = -\frac{2}{2}$ y la pendiente de $c =$ pendiente de d .

Estas observaciones sugieren el teorema siguiente.

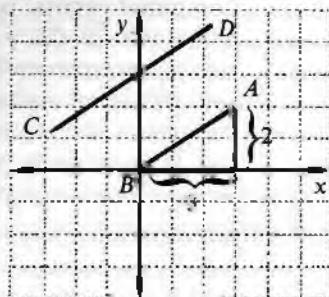
Teorema 14.3

Las pendientes de dos rectas paralelas son iguales.

El teorema 14.3 sólo es verdadero si ninguna de las rectas es paralela al eje de las y . ¿Por qué?

APLICACION

Para responder a la pregunta referente a los tejados, asígnese un sistema de coordenadas. Entonces, la pendiente de $\overline{AB} = \frac{2}{3}$. El teorema 14.3 establece que la pendiente de \overline{AB} es igual a la pendiente de \overline{CD} . Por tanto, la pendiente de $\overline{CD} = \frac{2}{3}$.



EJERCICIOS

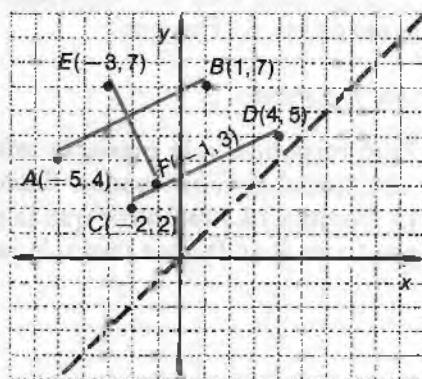
A.

1. Considerérense los puntos $A(3, 5)$, $B(7, -1)$, $C(-4, 4)$, y $D(0, -2)$. ¿Es $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$?
2. Considerérense los puntos $A(3, 5)$, $B(7, -1)$, $C(0, 0)$ y $D(12, 8)$. ¿Es $\overline{AB} \perp \overline{CD}$?
3. Muéstrese que $(3, 9)$, $(7, 5)$, $(4, -1)$ y $(0, 3)$ son las coordenadas de los vértices de un paralelogramo. (Empléese el teorema 14.3.)
4. Muéstrese que $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(0, -4)$ y $(-2, -3)$ son las coordenadas de los vértices de un paralelogramo.
5. Muéstrese que $(1, -3)$, $(4, 5)$, $(-3, 7)$ y $(-6, -1)$ son las coordenadas de los vértices de un paralelogramo.
6. Muéstrese que $(4, 6)$, $(5, 1)$ y $(2, 4)$ son las coordenadas de los vértices de un triángulo rectángulo.
7. Muéstrese que $(7, 9)$, $(10, -3)$ y $(2, -5)$ son las coordenadas de los vértices de un triángulo rectángulo.
8. Muéstrese que $(1, 4)$, $(3, 5)$, $(-3, 12)$ y $(-1, 13)$ son las coordenadas de los vértices de un rectángulo.
9. Muéstrese que $(-3, -3)$, $(-1, -2)$, $(1, -6)$ y $(-1, -7)$ son las coordenadas de los vértices de un rectángulo.
10. Muéstrese que $(10, 2)$, $(8, 8)$, $(-1, 5)$ y $(1, -1)$ son las coordenadas de los vértices de un rectángulo.

ACTIVIDADES

Supóngase que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ y $\overline{EF} \perp \overline{CD}$ tienen las coordenadas que se muestra en la figura.

- a. Con papel vegetal o con una hoja de plástico, refléjense \overline{AB} , \overline{CD} , y \overline{EF} sobre el eje de las x . ¿Siguen siendo verdaderas las mismas relaciones para los segmentos reflejados?
- b. Refléjense los segmentos para el eje de las y . ¿Siguen siendo verdaderas las mismas relaciones en los segmentos reflejados?
- c. Refléjense los segmentos sobre la recta $y = x$. ¿Siguen siendo verdaderas las mismas relaciones para los segmentos reflejados?



11. Los vértices de un triángulo tienen coordenadas $(5, 1)$, $(-1, 7)$ y $(1, -3)$. Encuéntrense las pendientes de los tres lados. Encuéntrense las pendientes de las tres alturas.

B.

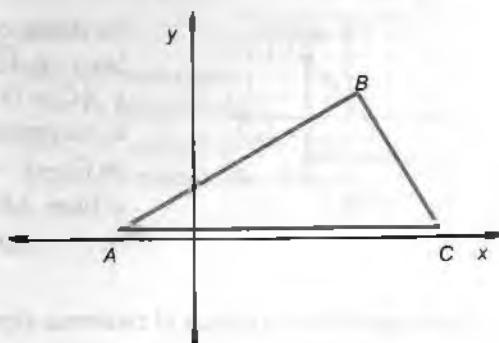
12. Encuéntrese y de manera que la recta que pasa por $(-4, -3)$ y $(8, y)$ sea paralela a la recta que pasa por $(4, -4)$ y $(3, 5)$.
13. Encuéntrese y de manera que la recta que pasa por $(-2, -1)$ y $(10, y)$ sea perpendicular a la recta que pasa por $(6, -2)$ y $(5, 7)$.
14. Determinese a de manera que la recta que pasa por $(7, 1)$ y $(4, 8)$ sea paralela a la recta que pasa por $(2, a)$ y $(a, -2)$.
15. Determinese b de manera que la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(4, -5)$ sea perpendicular a la recta que pasa por $(4, -5)$ y (b, b) .
16. Las coordenadas de A , B y C son $(-3, 2)$, $(4, -2)$ y $(0, 6)$, respectivamente. Encuéntrese D de manera que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y D esté sobre el eje de las x .
17. Si las coordenadas de A y B son $(0, 4)$ y $(-5, 1)$, y si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, encuéntrese el punto en el que \overrightarrow{AC} cruza el eje de las x .

C.

18. $ABCD$ es un rombo con vértices $A(-3, 6)$, $B(5, 7)$ y $C(9, 0)$. Encuéntrense las coordenadas de D .
19. $ABCD$ es un paralelogramo con vértices $A(3, 6)$, $B(5, 9)$ y $C(8, 2)$. Encuéntrense las coordenadas de D .
20. Un círculo con radio a y centro en el origen contiene el punto de coordenadas (c, d) . Encuéntrese la pendiente de la tangente al círculo en el punto (c, d) :

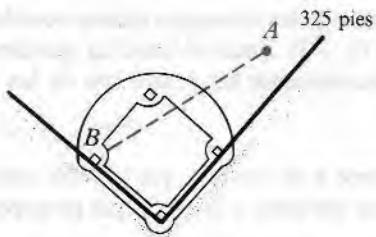
SOLUCION DE PROBLEMAS

Considérense los puntos $A(-2, 0)$, $B(6, 4)$ y $C(x, 0)$. Si $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, encuéntrese el área de $\triangle ABC$.
 (Sugerencia: Encuéntrense primero las coordenadas del punto C .)



14.5 La fórmula de la distancia

En esta sección se estudiará una de las fórmulas más importantes de la geometría analítica: la *fórmula de la distancia*. Puede usarse esta fórmula para saber a qué distancia se lanzó la pelota (véase la figura de la derecha).



Si un jardinero derecho lanza la pelota del punto A a la tercera base (punto B), ¿qué distancia recorrió la pelota?

Ejemplo 1 Para encontrar la longitud de un segmento paralelo al eje de las x .



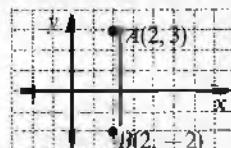
$$AB = |4 - (-2)|$$

$$AB = |6|$$

$$AB = 6$$

Si \overline{AB} es paralela al eje de la x y las coordenadas de A y B son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , entonces $AB = |x_1 - x_2|$.

Ejemplo 2 Para encontrar la longitud de un segmento paralelo al eje de las y .



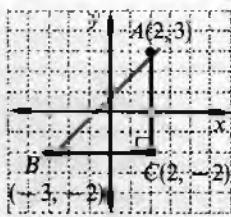
$$AB = |3 - (-2)|$$

$$AB = |5|$$

$$AB = 5$$

Si \overline{AB} es paralela al eje de las y y las coordenadas de A y B son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , entonces $AB = |y_1 - y_2|$.

Ejemplo 3 Para encontrar la longitud de un segmento que no es paralelo a ninguno de los ejes.



Se desea encontrar la longitud de \overline{AB} . Sea \overline{BC} paralela al eje de las x , y \overline{AC} paralela al eje de las y . Entonces, $BC = |2 - (-3)|$ y $AC = |3 - (-2)|$. $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo. Así, por el teorema de Pitágoras, $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Por tanto, $AB^2 = (2 - (-3))^2 + (3 - (-2))^2$
o bien $AB = \sqrt{(2 + 3)^2 + (3 + 2)^2}$.
$$AB = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$
.

Estos ejemplos sugieren el teorema siguiente.

Teorema 14.4

La fórmula de la distancia. Si A tiene coordenadas (x_1, y_1) y B tiene coordenadas (x_2, y_2) , entonces $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Ejemplo

Empléese la fórmula de la distancia para determinar si $\triangle ABC$ es isósceles.

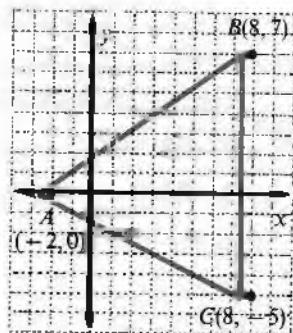
Se empieza por encontrar las longitudes de los tres lados.

$$AB = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (7 - 0)^2} = \sqrt{149}$$

$$BC = \sqrt{0^2 + (7 - (-5))^2} = \sqrt{144}$$

$$AC = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (-5 - 0)^2} = \sqrt{125}$$

No hay dos lados que tengan la misma longitud, por tanto $\triangle ABC$ no es isósceles.

**APLICACION**

Volviendo a la pregunta planteada al principio de la sección relativa a la distancia que recorrió la pelota de béisbol, asígnese un sistema de coordenadas como el de la derecha, con origen en *home*. El jugador estará en la posición $(280, 20)$. Con la fórmula de la distancia, se obtiene:

$$AB = \sqrt{(280 - 0)^2 + (20 - 90)^2}$$

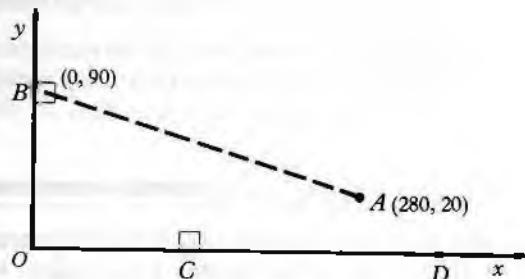
$$AB = \sqrt{(280)^2 + (-70)^2}$$

$$AB = \sqrt{78,400 + 4900}$$

$$AB = \sqrt{83,300}$$

$$AB = 288.62 \text{ pies}$$

La pelota recorrió unos 289 pies.



$B(0, 90)$; tercera base

$C(90, 0)$; primera base

$D(325, 0)$; valla del jardín derecho

$A(280, 20)$; posición del jugador

EJERCICIOS

A.

En los ejercicios 1 a 8, encuéntrese la distancia entre los puntos dados.

1. $(-4, 5)$ y $(6, 5)$.
2. $(3, 2)$ y $(3, -8)$.
3. $(4, 5)$ y $(-3, -2)$.
4. $(-2, 5)$ y $(5, -2)$.
5. $(4, 0)$ y $(0, -6)$.
6. $(1, 2)$ y $(-7, 3)$.
7. $(-5, 3)$ y $(0, -4)$.
8. $(6, -2)$ y $(7, 3)$.

En los ejercicios 9 a 12, empléese la fórmula de la distancia para clasificar los triángulos en escaleno, isósceles o equilátero.

9. $A(4, 5)$, $B(5, -2)$, y $C(1, 1)$.
10. $A(1, 1)$, $B(-3, 5)$, y $C(2\sqrt{3} - 1, 2\sqrt{3} + 3)$.
11. $A(-6, 2)$, $B(1, 7)$, y $C(6, 3)$.
12. $A(10, -5)$, $B(-2, 1)$, y $C(7, 4)$.

En los ejercicios 13 y 14, empléese la fórmula de la distancia para determinar si el triángulo es o no rectángulo.

13. $A(1, 4)$, $B(-2, -2)$, y $C(10, -8)$.
14. $A(5, 7)$, $B(8, -5)$, y $C(-4, -4)$.
15. ¿Resulta más sencillo emplear la definición 14.1 o el teorema 14.4 para mostrar que un triángulo es rectángulo?
16. Empléese la fórmula de la distancia para mostrar que $ABCD$ es un paralelogramo si los vértices son $A(1, -5)$, $B(7, -1)$, $C(2, 0)$ y $D(-4, -4)$.

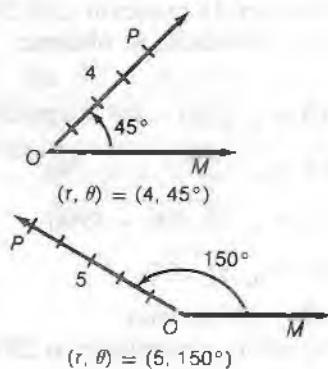
ACTIVIDADES

Además del uso de las coordenadas cartesianas, hay otra forma de encontrar puntos en un plano. Por ejemplo, para localizar el punto P podría decirse «desplazarse 4 unidades en un ángulo de 45° ».

La notación de esto se representa con el par ordenado $(4, 45^\circ)$, o bien, en general, (r, θ) , donde θ representa el ángulo y r representa la distancia de O al punto dado.

Trácese un rayo OM (con O en el origen) y empleese el transportador para representar los puntos siguientes:

1. $(2, 30^\circ)$
2. $(3, 90^\circ)$
3. $(5, 90^\circ)$
4. $(2.5, 120^\circ)$
5. $(4, 42^\circ)$
6. $(1, 180^\circ)$



- 17.** Encuéntrese la longitud de la mediana \overline{AD} en $\triangle ABC$ con vértices $A(2, 6)$, $B(3, -5)$ y $C(-1, 7)$.

En los ejercicios 18 a 20, empleese la fórmula de la distancia para determinar si B está entre A y C . (Si B está entre A y C , entonces $AB + BC = AC$.)

- 18.** $A(-3, -7)$, $B(0, -2)$, $C(6, 8)$.
19. $A(1, -2)$, $B(4, 3)$, $C(10, 12)$.
20. $A(1, 4)$, $B(2, 3)$, $C(4, 1)$.

B.

- 21.** Encuéntrese x si la distancia entre $(1, 2)$ y $(x, 8)$ es 10.
22. $ABCD$ es un rectángulo inscrito en un círculo, con vértices $A(0, 0)$, $B(2, 1)$, $C(4, -3)$ y $D(2, -4)$. Encuéntrese la longitud del diámetro del círculo.
23. Encuéntrese el área de $\triangle ABC$ cuyos vértices son $A(-3, -4)$, $B(3, 4)$ y $C(-5, 0)$.
24. Encuéntrese el área de $ABCD$ con vértices $A(-2, 3)$, $B(3, 8)$, $C(8, 3)$ y $D(3, -2)$.

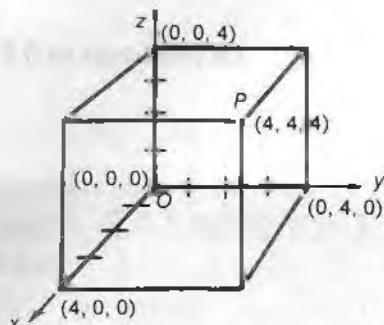
C.

- 25.** Encuéntrense las coordenadas del punto equidistante de $(3, 11)$, $(9, 5)$ y $(7, -1)$.
26. Encuéntrense las coordenadas del punto que equidista de $(0, 6)$ y $(10, 0)$ y está sobre la línea $y = x$.
27. Grafiquense al menos cuatro puntos que satisfagan la condición de que la distancia entre ellos y el punto $(1, 2)$ sea siempre 5 unidades.

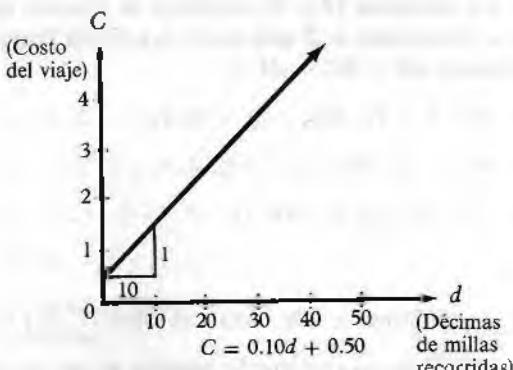
SOLUCION DE PROBLEMAS

Considérese un sistema de coordenadas tridimensional con un eje de las x , un eje de las y y un eje de las z . En él, se coloca un cubo cuyas aristas miden 4 unidades cada una, como se muestra en el diagrama.

- Encuéntrese la longitud de \overline{OP} .
- Encuéntrese la fórmula para la longitud \overline{OP} en un cubo de cualquier tamaño. (Sugerencia: Sea P un punto con coordenadas (x_1, y_1, z_1) .)



14.6 La ecuación de la recta

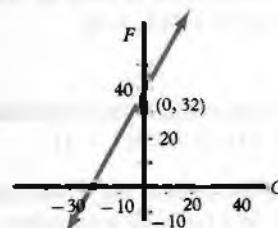


Las relaciones de nuestro mundo pueden representarse con frecuencia mediante la gráfica de una recta. Estas relaciones, como las tarifas de los taxis, se llaman *relaciones lineales*. Toda relación lineal puede representarse por una ecuación de la forma $y = mx + b$, donde la recta corta al eje de las y en b y tiene una pendiente m .

Ejemplo 1 La relación entre la escala Fahrenheit y la escala Celsius está dada por la ecuación

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

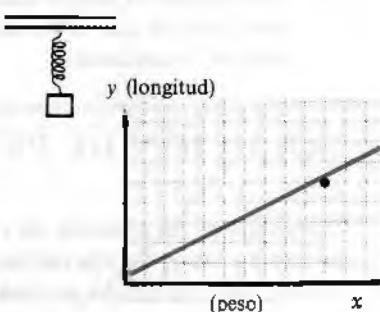
La pendiente es $\frac{9}{5}$. El cruce con el eje F es en 32.



Ejemplo 2 Supóngase que por cada onza de peso que se agregue a un muelle, éste se estirará 0.5 pulgadas. La relación entre el peso (x) y la longitud del alargamiento (y) está dada por la ecuación

$$y = 0.5x$$

La pendiente es 0.5. El cruce con el eje y es 0.



Teorema 14.5

Cualquier recta en el plano de coordenadas que no sea paralela al eje de las y puede representarse por la ecuación $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el punto en que cruza el eje de las y .

Ejemplo 1 Determinense la pendiente y el punto de cruce con el eje y de una recta, dada la ecuación de la forma $ax + by = c$.

Considérese la ecuación $3x + 4y = 12$.

Despéjese y . $3x + 4y = 12$.

$$4y = -3x + 12$$

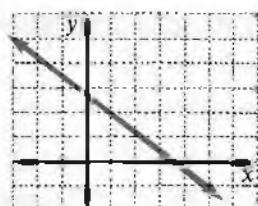
$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

Ahora, encuéntrense la pendiente y el cruce con el eje y .

Por el teorema 14.5,

$$m = -\frac{3}{4} \text{ (la pendiente) y}$$

$$b = 3 \text{ (el cruce con el eje } y).$$



$$3x + 4y = 12$$

Los dos ejemplos siguientes ilustran la forma en que puede emplearse el teorema 14.5 para encontrar la ecuación de una recta dadas ciertas condiciones.

Ejemplo 2 Encuéntrese la ecuación de una recta dados la pendiente de la recta y un punto sobre la recta.

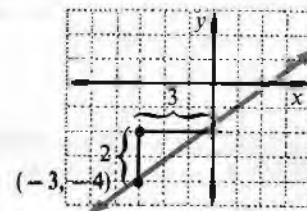
Considérese una recta con pendiente $\frac{2}{3}$ y un punto $(-3, -4)$.

Paso 1 La pendiente está determinada

$$\text{por la ecuación } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Considérese un par de puntos (x_1, y_1) y $(-3, -4)$, y obténgase la ecuación

$$\frac{2}{3} = \frac{y - (-4)}{x - (-3)}.$$



$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

Paso 2 Simplifíquese la ecuación.

$$2(x - (-3)) = 3(y - (-4))$$

$$\text{o } y = \frac{2}{3}x - 2$$

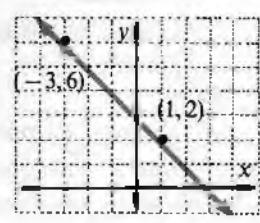
Ejemplo 3 Encuéntrese la ecuación de una recta dados dos puntos sobre la recta.

Considérese una recta que contiene los puntos $(-3, 6)$ y $(1, 2)$.

$$\text{Paso 1} \text{ La pendiente } m = \frac{6 - 2}{-3 - 1} = \frac{4}{-4} = -1.$$

Paso 2 Dado que se conocen la pendiente y un punto, sigase el ejemplo 2 usando los puntos (x_1, y_1) y $(-3, 6)$.

$$-1 = \frac{y - 6}{x - (-3)} \text{ o } y = -x + 3.$$



$$y = -x + 3$$

EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 6, escríbese la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$.

1. $m = 2, b = 3$.

2. $m = \frac{2}{3}, b = -2$.

3. $m = -\frac{3}{4}, b = 5$.

4. $m = -0.2, b = -2.5$.

5. $m = 10, b = -4$.

6. $m = 0, b = 2$.

En los ejercicios 7 a 10, represéntese la ecuación.

7. $y = x + 4$.

8. $y = -2x - 3$.

9. $y = \frac{3}{4}x - 5$.

10. $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

En los ejercicios 11 a 16, encuéntrese la pendiente y el cruce con el eje y de cada recta y represéntese la ecuación.

11. $y + 2x = 4$.

12. $2y - x = 5$.

13. $3x - 2y = 4$.

14. $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}x = 1$.

15. $5 - 3x = 2y$.

16. $3x - 4y = 12$.

En los ejercicios 17 a 22, encuéntrese la ecuación de la recta dados la pendiente y un punto.

17. $m = 2, (1, -3)$.

18. $m = -3, (-2, 1)$.

19. $m = \frac{2}{3}, (0, 0)$.

20. $m = -\frac{1}{2}, (4, 3)$.

21. $m = \frac{3}{2}, (-3, -4)$.

22. $m = -\frac{5}{2}, (0, 4)$.

En los ejercicios 23 a 28, encuéntrese la ecuación de la recta que contiene a los puntos dados.

23. $(0, 0), (4, 3)$.

24. $(-2, 1), (5, -3)$.

25. $(0, 0), (-3, -3)$.

26. $(0, -4), (6, 0)$.

27. $(5, 2), (-3, 2)$.

28. $(1, 3), (-4, -2)$.

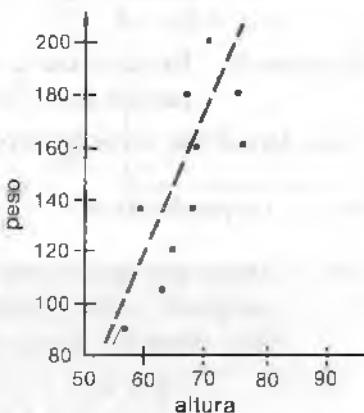
ACTIVIDADES

Identifíquense dos variables que se supone tienen alguna relación. Por ejemplo:

- el peso y la altura de una persona,
- el número de bateos y el número de hits de un jugador de béisbol
- la circunferencia de varios círculos y los diámetros correspondientes.

Después,

- Represéntense los pares ordenados.
- Dibújese una recta que sea el mejor ajuste a los datos.
- Determiníñense la pendiente y el cruce con el eje vertical de la recta.



B.

En los ejercicios 29 a 31, encuéntrese la pendiente de una recta que sea perpendicular a la recta dada.

29. $y = -2x + 3$.

30. $2x - 3y = 6$.

31. $12x + 30y = 18$.

32. Los vértices de un triángulo tienen coordenadas $(0, 0)$, $(2, 4)$ y $(-4, 2)$. Encuéntrese la ecuación de los lados del triángulo.

33. Encuéntrese el punto de intersección de la recta $x - 3y = 1$ y la recta que contiene a los puntos $(1, 7)$ y $(6, -3)$.

35. Encuéntrese el área de un triángulo formado por el eje de las x , el eje de las y y la recta $y = x - 5$.

37. Encuéntrense las ecuaciones de las diagonales del rectángulo $ABCD$ con vértices $A(-6, -4)$, $B(-6, 2)$, $C(3, 2)$ y $D(3, -4)$.

39. Encuéntrese la ecuación de la recta que es la bisectriz perpendicular del segmento \overline{AB} con extremos $A(10, 2)$ y $B(2, -6)$.

34. Si los puntos sobre x e y son $(4, 0)$ y $(0, -3)$, ¿cuál es la ecuación de la recta?

36. Encuéntrese la ecuación de la mediana \overline{AD} de $\triangle ABC$ con vértices $A(4, 4)$, $B(6, 2)$ y $C(-2, -4)$.

38. Encuéntrese la ecuación de la altura \overline{AD} de $\triangle ABC$ con vértices $A(-1, 5)$, $B(-7, -3)$ y $C(5, 1)$.

40. Encuéntrese la ecuación de la recta que contiene al punto $(4, 2)$ y es perpendicular a la recta $y = -2x - 4$.

C.

41. Una diagonal de un cuadrado está sobre la recta $3x - 5y = 14$. Un vértice está en $(0, 4)$. Encuéntrese la ecuación de la otra diagonal.

43. Encuéntrese la distancia entre las rectas paralelas con ecuaciones $y = 1x + 10$ e $y = -1x + 15$. (*Sugerencia:* Dibújese un diagrama preciso.)

45. Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $(0, 0)$, $(18, 0)$ y $(6, 12)$. Encuéntrense las coordenadas del centroide (el punto de intersección de las medianas).

42. Las ecuaciones de dos lados adyacentes de un paralelogramo son $x + 2y - 4 = 0$ y $3x + y + 3 = 0$. Un vértice tiene coordenadas $(8, -7)$. Encuéntrense las ecuaciones de los otros dos lados.

44. Las coordenadas de $\triangle ABC$ son $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(4, 6)$. \overline{AD} es una altura desde \overline{BC} . Encuéntrense las coordenadas de D .

SOLUCION DE PROBLEMAS

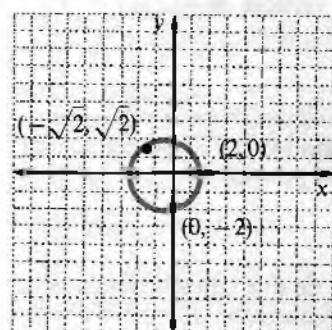
Encuéntrese la distancia entre el punto $(2, 1)$ y la recta $3x - 4y = 0$. (*Sugerencia:* Dibújese una figura precisa y digase la distancia que debe encontrarse.)

14.7 La ecuación del círculo

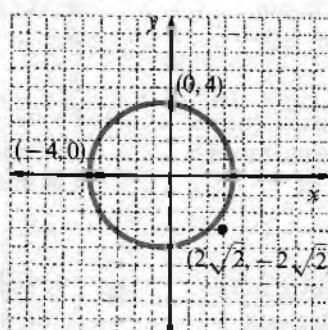
Supóngase que se asigna un sistema de coordenadas para este dibujo de forma que la niña sea el origen. ¿Cómo podría describirse matemáticamente la trayectoria del avión? El teorema de esta sección ayudará a resolver la pregunta.



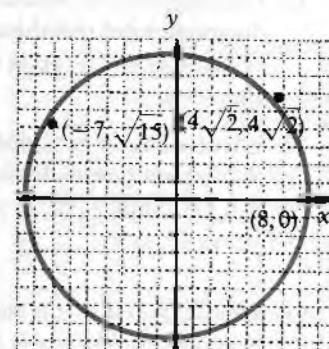
En los ejemplos siguientes, muéstrese que los puntos están sobre el círculo. Esto puede hacerse si se muestra primero que las coordenadas de los puntos satisfacen la ecuación dada para el círculo.



$$x^2 + y^2 = 4$$



$$x^2 + y^2 = 16$$



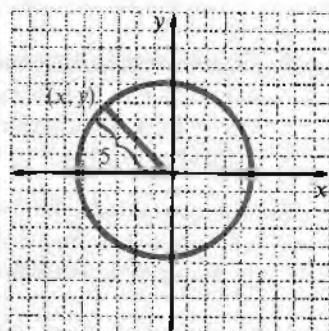
$$x^2 + y^2 = 64$$

Considérese el círculo de la derecha con centro en el origen y radio 5 unidades. Supóngase que (x, y) es un punto sobre el círculo. La fórmula de la distancia expresa que

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = 5.$$

Por tanto, $x^2 + y^2 = 25$, que es la ecuación del círculo.

Esto sugiere el siguiente teorema.



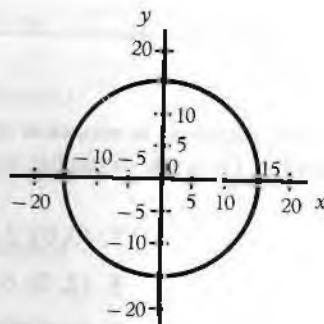
Teorema 14.6

La gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es un círculo de radio r y centro en el origen.

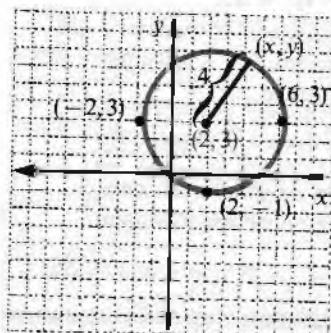
APLICACION

Considérese a la niña que maneja el avión como se describió al principio de esta sección. Si la niña está en el origen y la cuerda tiene 15 pies de longitud, entonces, por el teorema 14.6, la trayectoria del avión está descrita por la ecuación

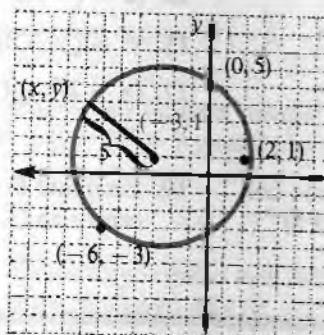
$$x^2 + y^2 = 225.$$



En los ejemplos siguientes, muéstrese que los puntos están sobre los círculos. Las coordenadas del centro del círculo se dan en rojo.

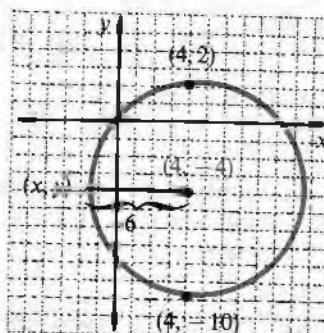


$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$



$$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$$\text{o } (x + 0)^2 + (y - 5)^2 = 25$$



$$(x - 4)^2 + (y - (-4))^2 = 36$$

$$\text{o } (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

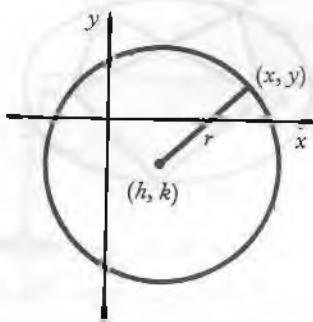
Supóngase que el círculo de la derecha tiene su centro en el punto (h, k) y tiene radio r unidades. La fórmula de la distancia expresa que

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Por tanto, la ecuación del círculo es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Ahora se enuncia el teorema siguiente.

**Teorema 14.7**

La gráfica de la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es un círculo de radio r y centro en el punto (h, k) .

EJERCICIOS**A.**

En los ejercicios 1 a 9, esribase la ecuación de un círculo con el radio y el centro dados. Después, dibújense los círculos con un compás.

1. $(0, 0); 5.$

2. $(0, 0); 2.$

3. $(0, 0); 6.$

4. $(0, 0); 4.$

5. $(2, 3); 6.$

6. $(-3, -4); 4.$

7. $(5, 2); \sqrt{2}.$

8. $(-4, 6); 2.5.$

9. $(0, -4); 5.$

En los ejercicios 10 a 17, encuéntrense el centro y el radio del círculo.

10. $x^2 + y^2 = 25.$

11. $x^2 + y^2 = 36.$

12. $x^2 + y^2 = 20.$

13. $(x - (-3))^2 + (y - 4)^2 = 25.$

14. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 10.$

15. $x^2 + (y - 3)^2 = 12.$

16. $(x + 2)^2 + y^2 = 9.$

17. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 36.$

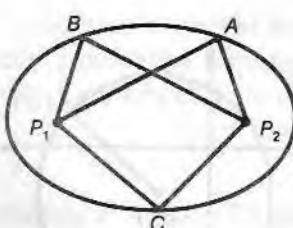
B.

18. Esribase la ecuación de un círculo con centro en $(-4, 0)$ y que contenga al origen.

19. Esribase la ecuación de un círculo con centro en $(3, 4)$ y que contenga al origen.

ACTIVIDADES

Una elipse es una figura muy relacionada con el círculo. Estúdiense la definición siguiente:

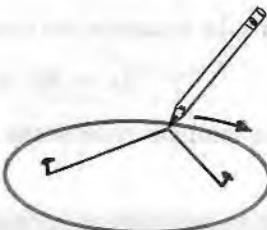


P_1 y P_2 son puntos fijos. La suma de las distancias desde cualquier punto de la curva hasta P_1 y P_2 es siempre la misma. Esto es, $P_1B + BP_2 = P_1A + AP_2 = P_1C + CP_2$.

Una elipse es el conjunto de puntos en el que la suma de las distancias desde dos puntos fijos (P_1 y P_2) hasta un punto de la curva es una constante.

El siguiente es un procedimiento para construir una elipse.

1. Fijense dos puntos con clavos o alfileres.
2. Atense los extremos de una cuerda a los dos clavos.
3. Muévase un lápiz como se muestra en la figura.



Dibújense varias elipses cambiando la distancia entre los clavos y la longitud de la cuerda. ¿Cuándo se parece la elipse más a un círculo?

20. Escribase la ecuación de un círculo con centro en $(-2, 3)$ y que contenga al punto $(3, 3)$.
21. Escribase la ecuación de un círculo con un diámetro cuyos extremos sean $(-4, 0)$ y $(2, 0)$.
22. Escribase la ecuación de un círculo con un diámetro cuyos extremos sean $(3, 6)$ y $(3, -2)$.
23. Escribase la ecuación de un círculo con un diámetro cuyos extremos sean $(-4, 8)$ y $(6, 2)$.
24. Escribase la ecuación de una recta que sea tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(-3, 4)$. (Recuérdese que la tangente es perpendicular al radio.)
25. Escribase la ecuación de la recta de los centros de los círculos $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$ y $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 17$.
26. Escribase la ecuación del círculo con centro en $(-5, -5)$ y tangente a ambos ejes.
27. Escribase la ecuación de un círculo que tenga el mismo centro que el círculo $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$ y sea tangente al eje de las y .

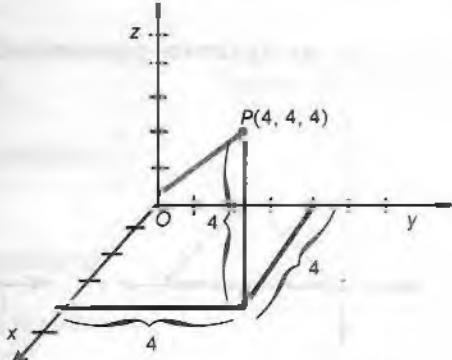
C.

28. Encuéntrese la ecuación del círculo cuyo centro esté sobre la recta $y = \frac{1}{2}x$ y que contenga a los puntos $(0, 6)$ y $(0, -2)$.
29. Escribase la ecuación del círculo con centro en $(1, 7)$ y sea tangente a la recta $x + 3y = 12$.
30. Encuéntrese la longitud de una tangente desde $(6, 4)$ al círculo $x^2 + y^2 = 36$.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Supóngase que una esfera con centro en $(0, 0, 0)$ contiene al punto $P(4, 4, 4)$ en un sistema de coordenadas tridimensional. Escribase la ecuación que representa la esfera.

Escribase la ecuación de la esfera con centro en $(1, 3, 2)$ y que contenga al punto $(4, -2, 3)$.



14.8 Uso de las coordenadas en la prueba de teoremas

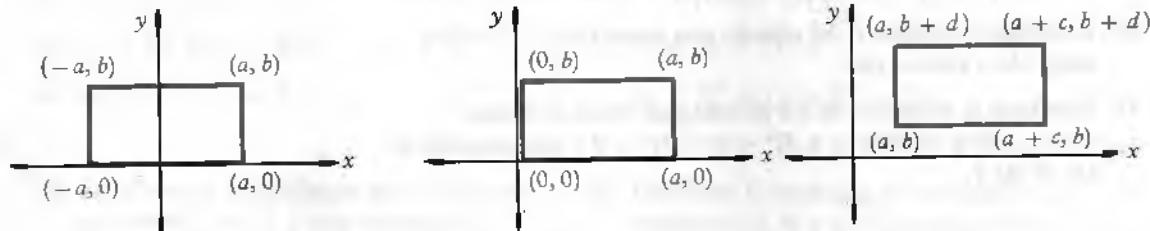
Algunos teoremas se pueden probar fácilmente con el uso de las coordenadas. Sin embargo, es muy importante elegir las coordenadas con cuidado. Estúdiense los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 1

Considérese el teorema:

Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

¿Cuál de las siguientes posiciones del rectángulo parece ser la mejor?



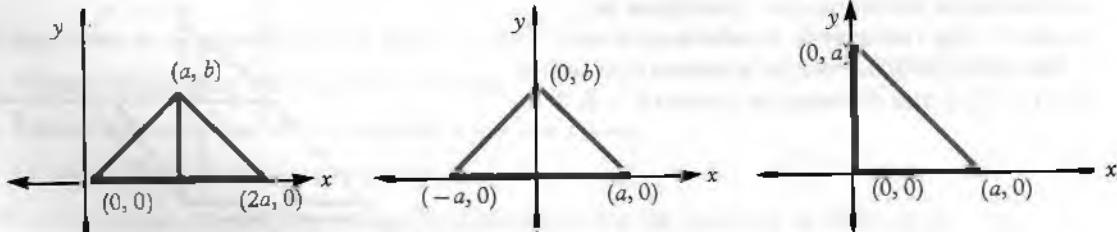
El teorema podría probarse utilizando la fórmula de la distancia con cualquiera de las tres posiciones. Sin embargo, la figura del centro puede ser la más fácil de usar dado que las coordenadas que se necesitan tienen más ceros.

Ejemplo 2

Considérese el teorema:

La mediana de la base de un triángulo rectángulo isósceles es perpendicular a la base

¿Cuál de las siguientes posiciones de un triángulo rectángulo isósceles parece ser la mejor?



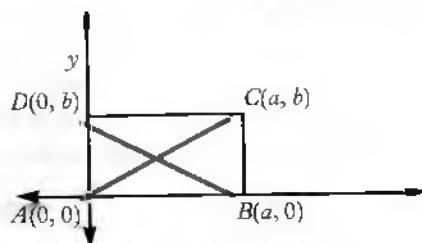
Cualquiera de las tres posiciones podría usarse para probar el teorema. Sin embargo, para la prueba se usará la posición de la derecha.

Ejemplo 3 Teorema: Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

PRUEBA

Dado: $ABCD$ es un rectángulo con coordenadas $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, b)$, $D(0, b)$ y diagonales \overline{AC} y \overline{BD} .

Pruébese: $AC = BD$.



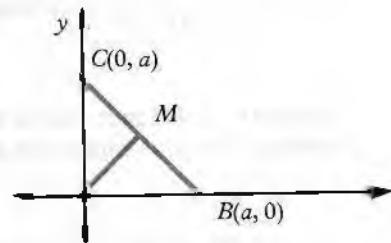
Afirmaciones	Razones
1. $ABCD$ es un rectángulo con $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, b)$, $D(0, b)$.	1. Dado.
2. $AC = \sqrt{(a - 0)^2 + (b - 0)^2}$.	2. Fórmula de la distancia.
3. $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$.	3. Propiedades de los números.
4. $BD = \sqrt{(a - 0)^2 + (0 - b)^2}$.	4. ¿Por qué?
5. $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.	5. Propiedades de los números.
6. $AC = BD$.	6. ¿Por qué?

Ejemplo 4 Teorema: La mediana de la base de un triángulo rectángulo isósceles es perpendicular a la base.

PRUEBA

Dado: Triángulo rectángulo isósceles ABC con $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, a)$ y $BM = MC$.

Pruébese: $\overline{AM} \perp \overline{BC}$



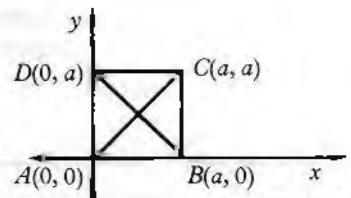
Afirmaciones	Razones
1. Triángulo rectángulo isósceles ABC con $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, a)$.	1. Dado.
2. Las coordenadas de M son $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.	2. Fórmula del punto medio (Teorema 14.1).
3. Pendiente de $\overline{AM} = \frac{\frac{a}{2} - 0}{\frac{a}{2} - 0} = 1$.	3. Definición de pendiente.
4. Pendiente de $\overline{BC} = \frac{a - 0}{0 - a} = -1$.	4. Definición de pendiente.
5. Pendiente de $\overline{AM} \cdot$ pendiente de $\overline{BC} = (1)(-1) = -1$.	5. Propiedades de los números.
6. $\overline{AM} \perp \overline{BC}$.	6. ¿Por qué?

EJERCICIOS

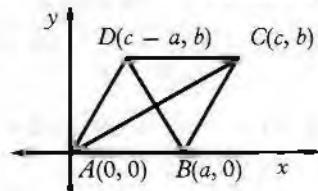
A.

En los ejercicios 1 a 5, dibújese un sistema de coordenadas y ubíquese la figura. Dese una proposición sobre la figura que pueda probarse.

1. Cuadrado.
2. Triángulo equilátero.
3. Paralelogramo.
4. Trapecio isósceles.
5. Un trapecio $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $m\angle A = m\angle D = 90$.
6. **Dado:** $ABCD$ es un cuadrado con $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, a)$ y $D(0, a)$.
Pruébese: $AC = BD$.
7. **Dado:** $ABCD$ es un rombo con $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(c, b)$ y $D(c - a, b)$.
Pruébese: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
(Sugerencia: Muéstrese que pendiente de $\overline{AC} \cdot$ pendiente de $\overline{BD} = -1$. Recuérdese que $AD = AB$.)



(Ejercicio 6)

**ACTIVIDADES**

Consíganse algunos conos de un material cualquiera. Córtense de varias formas, como se sugiere a continuación. Obsérvese la figura resultante.

1. Córtense una sección paralela a la base. La figura que se forma es un *círculo*.



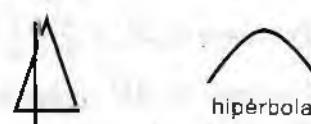
2. Hágase un corte que no sea paralelo a la base y que no la interseque. La figura que se forma se llama *elipse*.



3. Córtense una sección paralela al lado inclinado del cono. La figura que se forma es una *parábola*.



4. Córtense una sección que sea perpendicular a la base. La figura que se forma se llama *hipérbola*.



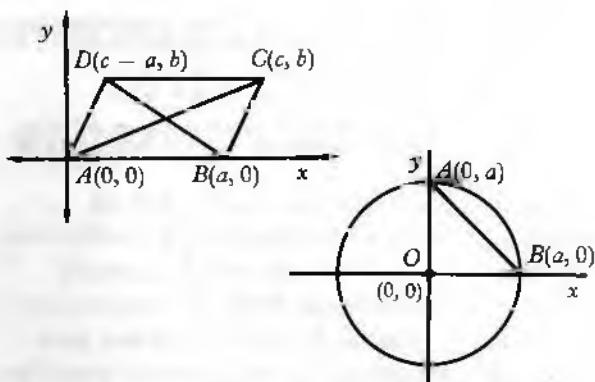
Explíquese por qué estas figuras se llaman *cónicas*.

- 8. Dado:** $ABCD$ es un paralelogramo con $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(c, b)$ y $D(c - a, b)$.

Pruébese: \overline{AC} y \overline{BD} se bisecan.

- 9. Dado:** Un círculo con centro en el origen y cuerda \overline{AB} con coordenadas $(0, a)$ y $(a, 0)$.

Pruébese: La bisectriz perpendicular de una cuerda de un círculo contiene al centro.



B.

- 10. Pruébese:** Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares. (Asígnese un sistema de coordenadas como el del ejercicio 6.)

- 12. Pruébese:** El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC equidista de los vértices. (Asígnense los vértices $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ y $C(0, b)$.)

C.

- 14. Pruébese:** Si las diagonales de un trapecio $ABCD$ son congruentes, entonces los catetos del trapecio son congruentes.

- 11. Pruébese:** Las diagonales de un trapecio isósceles $ABCD$ son congruentes. (Asígnense los vértices $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(c, b)$ y $D(a - c, b)$.)

- 13. Pruébese:** Si las diagonales de un paralelogramo $ABCD$ son congruentes, el paralelogramo es un rectángulo. (Asígnense los vértices $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(c, b)$ y $D(c - a, b)$.)

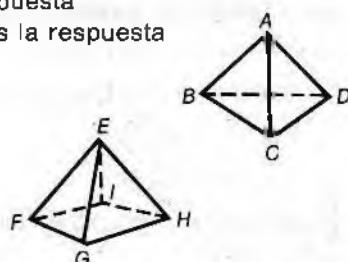
- 15. Pruébese:** El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es igual a la mitad del tercer lado y es paralelo a él.

SOLUCION DE PROBLEMAS

El siguiente problema se presentó en un examen de admisión a una universidad. La respuesta pretendida era 7 caras. Sin embargo, un estudiante de bachillerato alegó que 7 caras no era la respuesta correcta. ¿Estaba en lo cierto? En caso afirmativo, ¿cuál es la respuesta correcta?

En las pirámides $ABCD$ y $EFGHI$, todas las caras son triángulos equiláteros congruentes excepto la base $FGHI$. Si la cara ABC se colocara sobre la cara EFG de manera que los vértices del triángulo coincidieran, ¿cuántas caras tendría el sólido resultante?

- a. 5. b. 6. c. 7. d. 8. e. 9.



14.9 Transformaciones y geometría de coordenadas

Estos dibujos fueron elaborados por un computador de la Universidad de Connecticut, Estados Unidos (Véase la revista *Scientific American* de febrero de 1980). El computador usó un tipo especial de transformación para mostrar la secuencia (figura superior) desde la infancia (perfil interno) a la edad adulta (perfil externo). Se empleó un tipo de transformación diferente para producir la secuencia (figura inferior) desde el hombre de Neanderthal (perfil interno) hasta un ser humano del futuro (perfil externo). Las transformaciones ayudan a simular el crecimiento y los cambios en las características del cuerpo humano para que los científicos puedan estudiarlos.

Los efectos de transformaciones simples, como traslaciones, reflexiones, rotaciones y otras, pueden mostrarse en un eje de coordenadas. Estúdiese el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Para representar una figura y su imagen después de una transformación, cuando la regla es $(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 5)$.

Paso 1 Represéntese una figura, $\triangle ABC$, por ejemplo.

$$A(-3, -4), B(1, -2), C(2, -4).$$

Paso 2 Apíquese la regla de la transformación a los puntos A , B y C para obtener como imagen los puntos A' , B' y C' .

$$(x, y) \longrightarrow (x + 4, y + 5).$$

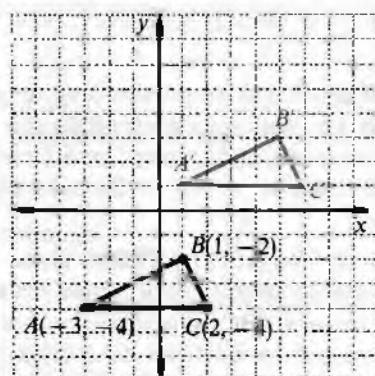
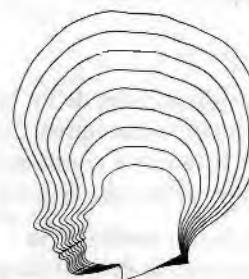
$$(-3, -4) \longrightarrow (1, 1).$$

$$(1, -2) \longrightarrow (5, 3).$$

$$(2, -4) \longrightarrow (6, 1).$$

Paso 3: Represéntense la imagen de $\triangle ABC$, que es $\triangle A'B'C'$.

Esta transformación es una traslación.



EJERCICIOS**A.**

Represéntese cada figura y su imagen con la regla de transformación que se proporciona en los ejercicios 1 a 3.

- Figura: Triángulo ABC , $A(-6, 3)$, $B(-4, 5)$ y $C(-3, 4)$.
Regla de transformación: $(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 3)$.
- Figura: Triángulo DEF , $D(2, 1)$, $E(3, 4)$, $F(1, 5)$.
Regla de transformación: $(x, y) \rightarrow (-x, y)$.
- Figura: Triángulo PQR , $P(7, 1)$, $Q(7, 4)$, $R(5, 2)$.
Regla de transformación: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$.
- Para los ejercicios 1 a 3, digase si la transformación es una traslación, una rotación o una reflexión. Si es una traslación, encuéntrese la distancia del traslado. Si es una reflexión, especíquese la línea de reflexión. Si es una rotación, especíquense el centro y el número de grados de la rotación.

B.

En los ejercicios 5 a 7, represéntense el cuadrilátero y su imagen. Después, respóndase a las preguntas.

- Cuadrilátero: $A(1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 1)$, $D(2, 2)$.
Regla de transformación: $(x, y) \rightarrow (3x, 3y)$.
Esta transformación se denomina *ampliación*. ¿Qué relación existe entre las longitudes de los lados de esta figura y las longitudes de los lados de la imagen? ¿Qué relación hay entre sus áreas?
- Cuadrilátero: $P(1, 2)$, $Q(1, 3)$, $R(3, 3)$, $S(3, 2)$.
Regla de transformación: $(x, y) \rightarrow (x + 3y, y)$.
Esta transformación se denomina *partición*. ¿Qué relación existe entre el área de la imagen y el área del cuadrilátero?
- Cuadrilátero: $W(4, -1)$, $X(3, 2)$, $Y(-3, 2)$, $Z(-2, 1)$.
Regla de transformación: $(x, y) \rightarrow (\frac{1}{2}x, 2y)$.
Esta transformación se denomina *alargamiento*. ¿Cómo cambia esto a una figura? ¿Qué relación existe entre las áreas?

C.

- Elabórense algunas reglas de transformación y represéntense una figura y su imagen para ver cómo se transforma la figura. Elabórese una regla que produzca una «contracción» de la figura.

Capítulo 14 Conceptos importantes

Términos

Sistema de coordenadas cartesianas (pág. 505)

Pendiente de una recta (pág. 512)

Teoremas

- 14.1** Si las coordenadas del segmento $\overline{P_1P_2}$ son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , entonces las coordenadas del punto medio de $\overline{P_1P_2}$ son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
- 14.2** El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es -1 . (Suponiendo que ninguna de las rectas es paralela al eje de las y .)
- 14.3** Las pendientes de dos rectas paralelas son iguales.
(Suponiendo que ninguna de las rectas es paralela al eje de las y .)
- 14.4** La fórmula de la distancia. Si A tiene coordenadas (x_1, y_1) y B tiene coordenadas (x_2, y_2) , entonces $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- 14.5** Cualquier recta en el plano de coordenadas que no sea paralela al eje de las y puede representarse por la ecuación $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el punto en que se cruza el eje de las y .
- 14.6** La gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es un círculo de radio r y centro en el origen.
- 14.7** La gráfica de la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es un círculo de radio r y centro en el punto (h, k) .

Capítulo 14 Resumen

1. Encuéntrense las distancias entre las coordenadas.
 - a. $(1, 2)$ y $(5, 8)$
 - b. $(-3, 4)$ y $(5, -2)$
 - c. $(-4, -2)$ y $(2, -2)$
2. Encuéntrense las pendientes de las rectas que contienen las coordenadas del ejercicio 1.
3. Encuéntrense los puntos medios de los segmentos determinados por las coordenadas del ejercicio 1.
4. Encuéntrese la ecuación de una recta que contiene al punto $(2, -4)$ con pendiente -3 .
5. Encuéntrese la ecuación de una recta que contiene al punto $(4, 1)$ y es paralela a la recta $3x + 4y = 2$.
6. Muéstrese que $(8, -5)$, $(0, -7)$ y $(5, 7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
7. Encuéntrese la coordenada que falta de manera que $\overrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ para $A(2, 5)$, $B(4, -2)$, $C(-3, -4)$ y $D(6, x)$.
8. Encuéntrese la coordenada que falta de manera que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ para $A(-4, -5)$, $B(7, -2)$, $C(-4, 6)$ y $D(x, 0)$.
9. Encuéntrense el centro y el radio de un círculo con ecuación $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 24$.
10. Escríbase la ecuación de un círculo con centro en el origen y que pasa por el punto $(4, 3)$.
11. **Dado:** $ABCD$ es un cuadrado con vértices $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, a)$ y $D(0, a)$.
Pruébese: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
12. **Dado:** Figura $WXYZ$ con vértices $W(0, 0)$, $X(a, 0)$, $Y(a + b, c)$ y $Z(b, c)$.
Pruébese: $WXYZ$ es un paralelogramo.

Capítulo 14 Examen

1. Encuéntrense las distancias entre las coordenadas.
 - a. $(3, 6)$ y $(-6, -3)$.
 - b. $(-4, 0)$ y $(0, -4)$.
 - c. $(-2, 5)$ y $(-2, -1)$.
2. Encuéntrense las pendientes de las rectas que contienen a las coordenadas del ejercicio 1.
3. Encuéntrense los puntos medios de los segmentos determinados por las coordenadas del ejercicio 1.
4. Encuéntrese la ecuación de una recta que contiene a los puntos $(-3, 5)$ y $(2, -4)$.
5. Encuéntrese la ecuación de una recta que contiene al punto $(3, 5)$ y es perpendicular a la recta $2x + 6y = -3$.
6. Muéstrese que $(4, 5)$, $(6, 4)$, $(3, -1)$ y $(1, 0)$ son las coordenadas de los vértices de un paralelogramo.
7. Encuéntrese la coordenada que falta de manera que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ para $A(-4, 2)$, $B(-1, -3)$, $C(6, 2)$ y $D(x, -4)$.
8. Encuéntrese la coordenada que falta de manera que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ para $A(5, -3)$, $B(-2, 4)$, $C(3, 3)$ y $D(-7, x)$.
9. Escribase la ecuación de un círculo con centro en $(2, 3)$ y radio 6.
10. Escribase la ecuación de un círculo con centro en el origen y que pasa por el punto $(-5, 12)$.
11. **Dado:** Triángulo isósceles ABC con vértices $C(b, c)$, $A(0, 0)$, $B(2b, 0)$ y puntos medios E y D de \overline{AC} y \overline{BC} , respectivamente
Pruébese: $AD = BE$.
12. **Dado:** Figura $ABCD$ con vértices $A(-b, 0)$, $B(0, a)$, $C(b, 0)$ y $D(0, -a)$.
Pruébese: $ABCD$ es un rombo.

Resumen global (Caps. 11 a 14)

1. Encuéntrese el área de un cuadrado inscrito en un círculo de diámetro 10 cm.
2. Encuéntrese el área de un triángulo isósceles de base 8 cm y donde cada uno de los lados iguales mide 5 cm.
3. Encuéntrese el área de un triángulo equilátero si su perímetro es 12 cm.
4. Si la razón entre los perímetros de dos triángulos semejantes es 2:1, ¿cuál es la razón entre sus áreas?
5. Encuéntrese el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 6 cm.
6. Si un prisma tiene de altura 6 m, y área de la base 12 m^2 , ¿cuál es su volumen?
7. Si una pirámide tiene base cuadrada de lado 3 m y altura 7 m, ¿cuál es el volumen de la pirámide?
8. Encuéntrese el área de un cilindro circular recto de altura 10 cm y diámetro de la base 4 cm. (Empléese $\pi = 3.14$.)
9. Encuéntrese el volumen del cilindro del ejercicio 8.
10. Si un triángulo ABC con vértices $A(3, 5)$, $B(5, -2)$ y $C(-4, 3)$ se reflejara sobre el eje de las y , ¿cuáles serán las coordenadas de su imagen?
11. Si un triángulo ABC con vértices $A(4, -2)$, $B(-3, -7)$ y $C(1, 6)$ se reflejara sobre el eje de las x , ¿cuáles serían las coordenadas de su imagen?
12. Dízase las ecuaciones de las líneas de simetría de un cuadrado con vértices $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$ y $(1, 5)$.
13. Si se rota 180° sobre el origen el punto $(2, 6)$, ¿cuáles serían las coordenadas de su imagen?
14. Encuéntrese la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con vértices en $(6, 8)$, $(9, -4)$ y $(1, -6)$.
15. Encuéntrese la ecuación de una recta que contiene a los puntos $(2, -6)$ y $(-4, 3)$.

Símbolos

\overleftrightarrow{AB}	recta AB (pág. 12)
\parallel	es paralela a (pág. 13)
\overline{AB}	segmento AB (pág. 16)
\overrightarrow{AB}	rayo AB (pág. 16)
$\angle ABC$	ángulo ABC (pág. 17)
$\triangle ABC$	triángulo ABC (pág. 17)
$\odot O$	círculo O (pág. 17)
AB	longitud del segmento \overline{AB} (pág. 20)
\cong	es congruente con (pág. 20)
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$ (pág. 20)
$\not\cong$	no es congruente con (pág. 22)
\perp	es perpendicular a (pág. 28)
$p \rightarrow q$	p implica q (pág. 56)
$\sim p$	no p (pág. 60)
$p \leftrightarrow q$	p si, y sólo si, q (pág. 61)
$\not\parallel$	no es paralela a (pág. 175)
$\not\perp$	no es perpendicular a (pág. 160)
\neq	no es igual a (pág. 161)
$\sqrt{}$	raíz cuadrada (pág. 227)
\sim	es semejante a (pág. 313)
\doteq	es aproximadamente igual a (pág. 331)
\widehat{AB}	arco menor determinado por A y B (pág. 346)
\widehat{ACB}	arco mayor determinado por A y B (pág. 346)
$m\widehat{AB}$	medida de \widehat{AB} (pág. 346)
$A(R)$	área de la región R (pág. 394)
$P(x, y)$	punto P con coordenadas x e y (pág. 505)

Tabla de cuadrados y raíces cuadradas

N	N^2	\sqrt{N}	N	N^2	\sqrt{N}	N	N^2	\sqrt{N}	N	N^2	\sqrt{N}
1	1	1.000	26	676	5.099	51	2,601	7.141	76	5,776	8.718
2	4	1.414	27	729	5.196	52	2,704	7.211	77	5,929	8.775
3	9	1.732	28	784	5.292	53	2,809	7.280	78	6,084	8.832
4	16	2.000	29	841	5.385	54	2,916	7.348	79	6,241	8.888
5	25	2.236	30	900	5.477	55	3,025	7.416	80	6,400	8.944
6	36	2.449	31	961	5.568	56	3,136	7.483	81	6,561	9.000
7	49	2.646	32	1,024	5.657	57	3,249	7.550	82	6,724	9.055
8	64	2.828	33	1,089	5.745	58	3,364	7.616	83	6,889	9.110
9	81	3.000	34	1,156	5.831	59	3,481	7.681	84	7,056	9.165
10	100	3.162	35	1,225	5.916	60	3,600	7.746	85	7,225	9.220
11	121	3.317	36	1,296	6.000	61	3,721	7.810	86	7,396	9.274
12	144	3.464	37	1,369	6.083	62	3,844	7.874	87	7,569	9.327
13	169	3.606	38	1,444	6.164	63	3,969	7.937	88	7,744	9.381
14	196	3.742	39	1,521	6.245	64	4,096	8.000	89	7,921	9.434
15	225	3.873	40	1,600	6.325	65	4,225	8.062	90	8,100	9.487
16	256	4.000	41	1,681	6.403	66	4,356	8.124	91	8,281	9.539
17	289	4.123	42	1,764	6.481	67	4,489	8.185	92	8,464	9.592
18	324	4.243	43	1,849	6.557	68	4,624	8.246	93	8,649	9.644
19	361	4.359	44	1,936	6.633	69	4,761	8.307	94	8,836	9.695
20	400	4.472	45	2,025	6.708	70	4,900	8.367	95	9,025	9.747
21	441	4.583	46	2,116	6.782	71	5,041	8.426	96	9,216	9.798
22	484	4.690	47	2,209	6.856	72	5,184	8.485	97	9,409	9.849
23	529	4.796	48	2,304	6.928	73	5,329	8.544	98	9,604	9.899
24	576	4.899	49	2,401	7.000	74	5,476	8.602	99	9,801	9.950
25	625	5.000	50	2,500	7.071	75	5,625	8.660	100	10,000	10.000

Postulados y teoremas

Postulados

Postulado de la existencia de los puntos. El espacio existe y contiene por lo menos cuatro puntos no coplanares y no colineales. Un plano contiene por lo menos tres puntos no colineales. Una recta contiene por lo menos dos puntos. (Pág. 68)

Postulado del punto y la recta. Dos puntos están contenidos en una, y sólo una, recta. (Pág. 68)

Postulado del punto y el plano. Tres puntos no colineales están contenidos en uno, y sólo un plano. (Pág. 68)

Postulado de la intersección de planos. Si dos planos se intersecan, entonces se intersecan exactamente en una recta. (Pág. 68)

Postulado de los dos puntos, la recta y el plano. Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene está en el plano. (Pág. 69)

Postulado de la separación de planos. Sea N un plano y ℓ una recta en N . Los puntos del plano que no estén sobre ℓ forman dos semiplanos de manera que:

- cada semiplano es un conjunto convexo;
- si P está sobre un semiplano y Q está en el otro, entonces \overline{PQ} interseca a ℓ .

(Pág. 69)

Postulado de la separación del espacio. Sea N un plano en el espacio. Los puntos del espacio que no están sobre N forman dos semiespacios de manera que:

- cada semiespacio es un conjunto convexo;
- si un punto A está en un semiespacio y B está en el otro, \overline{AB} interseca a N .

(Pág. 69).

Postulado de las perpendiculares. Dados un punto y una recta en un plano, hay exactamente una recta que pasa por el punto y es perpendicular a la recta dada. Dado un plano en el espacio y un punto que no está en ese plano, hay exactamente una recta que pasa por el punto y es perpendicular al plano dado. (Pág. 69)

Postulado de la regla. a. A cada par de puntos corresponde un número positivo único al cual se le llama *distancia* entre los puntos. b. Los puntos de una recta pueden aparearse biunívocamente con los números reales de manera que la distancia entre dos puntos cualesquiera sea el valor absoluto de la diferencia de sus números asociados. (Pág. 72)

Postulado del transportador. a. A cada ángulo corresponde un número real único entre 0 y 180, llamado medida del ángulo. b. Sea P un punto en la arista del semiplano H . Cada rayo del semiplano o su arista con un vértice P puede aparearse biunívocamente con los números reales n , $0 < n < 180$, de manera que la medida de un ángulo formado por un par de rayos no colineales con vértice P es el valor absoluto de la diferencia de sus números reales. (Pág. 73)

Postulado de la congruencia LAL. Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con respecto a dos lados y el ángulo incluido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes. (Pág. 91)

Postulado de la congruencia ALA. Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con respecto a dos ángulos y el lado incluido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes. (Pág. 91)

Postulado de la congruencia LLL. Si los tres lados de un triángulo son congruentes con respecto a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes. (Pág. 91)

Postulado del par lineal. Si dos ángulos forman un par lineal, entonces los ángulos son suplementarios. (Pág. 146)

Postulado de las paralelas. Dada una recta ℓ y un punto P que no está sobre la recta ℓ , existe sólo una recta que pasa por P y sea paralela a ℓ . (Pág. 180)

Postulado de la desigualdad del triángulo. La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado. (Pág. 244)

Postulado de la semejanza AAA. Si tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes. (Pág. 316)

Postulado de la suma de arcos. Si C está en \widehat{AB} , entonces $m\widehat{AC} + m\widehat{CB} = m\widehat{AB}$. (Pág. 346)

Postulado del área. A cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominado *área*. El área de la región R se representa por $A(R)$. (Pág. 394)

Postulado del área de regiones congruentes. Si dos rectángulos o dos triángulos son congruentes, entonces las regiones que acotan tienen la misma área. (Pág. 395)

Postulado de la suma de áreas. Si una región poligonal es la unión de n regiones poligonales que no se solapan, su área es la suma de las áreas de las n regiones. (Pág. 395)

Postulado del área del rectángulo. El área de un rectángulo con longitud ℓ y ancho w está dada por la fórmula ℓw . (Pág. 395)

Postulado del volumen. A cada sólido se le asigna un número positivo único denominado *volumen*. (Pág. 444)

Postulado del volumen de un sólido rectangular. El volumen de un sólido rectangular es igual al producto de su longitud ℓ , anchura w y altura h . (Pág. 444)

Postulado de la suma de volúmenes. Si un sólido es la unión de dos sólidos que no tienen puntos interiores en común, entonces su volumen es la suma de los volúmenes de los dos sólidos. (Pág. 444)

Postulado de Cavalieri. Sean S y T dos sólidos y X un plano. Si todo plano paralelo a X que interseca a S o T , interseca a S y a T en una sección transversal de la misma área, entonces volumen S = volumen T . (Pág. 445)

Teoremas

Prueba de teoremas mediante propiedades básicas

- 4.1 Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva valen para la congruencia de ángulos y segmentos.
- 4.2 En un triángulo isósceles, el segmento que va del vértice al punto medio del lado opuesto forma un par de triángulos congruentes.
- 4.3 **Suma de ángulos iguales.** Si $m\angle APB = m\angle DQE$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, \overrightarrow{PB} está entre \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PC} , y \overrightarrow{QE} está entre \overrightarrow{QD} y \overrightarrow{QF} , entonces $m\angle APC = m\angle DQE$.
- 4.4 **Resta de segmentos iguales.** Si $AC = DF$, $BC = EF$, B está entre A y C , y E está entre D y F , entonces $AB = DE$.
- 4.5 **Suma de segmentos iguales.** Si $AB = DE$, $BC = EF$, B está entre A y C , y E está entre D y F , entonces $AC = DF$.
- 4.6 **Resta de ángulos iguales.** Si $m\angle APC = m\angle DQE$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, \overrightarrow{PB} está entre \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PC} , y \overrightarrow{QE} está entre \overrightarrow{QD} y \overrightarrow{QF} , entonces $m\angle APB = m\angle DQE$.
- 4.7 **Teorema de los complementos congruentes.** Dos ángulos que son complementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes) son congruentes.
- 4.8 **Teorema de los suplementos congruentes.** Dos ángulos que son suplementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes) son congruentes.
- 4.9 **Teorema de los ángulos verticales.** Si dos rectas se intersecan, los ángulos verticales son congruentes.
- 4.10 **Teorema del ángulo externo.** La medida de un ángulo externo es mayor que la medida de cualquier ángulo interno no contiguo.

Rectas y planos paralelos

- 5.1 Si dos rectas están cortadas por una transversal y un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
- 5.2 Si dos rectas están cortadas por una transversal y un par de ángulos alternos interiores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
- 5.3 Si dos rectas están cortadas por una transversal y un par de ángulos alternos exteriores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
- 5.4 Si dos rectas están cortadas por una transversal y un par de ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios, entonces las rectas son paralelas.
- 5.5 Dadas las rectas p , q y r , si $p \parallel q$ y $q \parallel r$, entonces $p \parallel r$.
- 5.6 Si dos rectas paralelas están cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos interiores son congruentes.
- 5.7 Si dos rectas paralelas están cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos exteriores son congruentes.

- 5.8** Si dos rectas paralelas están cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
- 5.9** Si dos rectas paralelas están cortadas por una transversal, entonces los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios.

Triángulos

- 6.1** Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de su base son congruentes.
- 6.2** Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.
- 6.3** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.
- 6.4** La suma de los ángulos de un triángulo es 180° .
- 6.5** Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno.
- 6.6** La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no contiguos.
- 6.7 Teorema LAA.** Si dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos en un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado correspondiente de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.
- 6.8 Teorema de la hipotenusa y el ángulo.** Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- 6.9 Teorema de la hipotenusa y el cateto.** Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de un segundo triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- 6.10** Si un punto P equidista de un par de puntos A y B , entonces P está sobre la bisectriz perpendicular de \overline{AB} . A la inversa, un punto sobre la bisectriz perpendicular de \overline{AB} equidista de A y de B .

Más sobre triángulos

- 7.1 Teorema de Pitágoras.** Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- 7.2** Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitudes a , b y c , y $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.
- 7.3** La longitud de la hipotenusa de un triángulo $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ es $\sqrt{2}$ multiplicada por la longitud de un cateto.
- 7.4** La longitud del cateto más largo de un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ multiplicada por la longitud de la hipotenusa o bien $\sqrt{3}$ multiplicada por la longitud del lado más corto.
- 7.5** Las bisectrices perpendiculares de los lados de un triángulo se intersectan en un punto O que equidista de los tres vértices de un triángulo.

- 7.6 Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto I que equidista de los tres lados de un triángulo.
- 7.7 Las rectas que contienen las alturas de un triángulo se intersecan en un punto.
- 7.8 Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto que está a dos tercios de la distancia entre cada vértice y su lado opuesto.
- 7.9 Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son desiguales, entonces la longitud del lado opuesto al ángulo menor es menor que la longitud del lado opuesto al ángulo mayor.
- 7.10 Si las longitudes de dos lados de un triángulo son desiguales, entonces la medida del ángulo opuesto al lado más corto es menor que la medida del ángulo opuesto al lado más largo.

Cuadriláteros y polígonos

- 8.1 Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
- 8.2 Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
- 8.3 Cada par de ángulos adyacentes de un paralelogramo es un par de ángulos suplementarios.
- 8.4 Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
- 8.5 Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, es un paralelogramo.
- 8.6 Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
- 8.7 **Teorema del segmento medio.** El segmento entre los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.
- 8.8 Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.
- 8.9 Un paralelogramo es un rectángulo si, y sólo si, sus diagonales son congruentes.
- 8.10 Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si, sus diagonales son perpendiculares entre sí.
- 8.11 Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si, cada diagonal biseca un par de ángulos opuestos.
- 8.12 El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las dos bases y tiene una longitud igual a la semisuma de las longitudes de las bases.
- 8.13 En un trapecio isósceles, los ángulos de la base son congruentes y también lo son las diagonales.
- 8.14 La suma de las medidas de los ángulos de un polígono convexo de n lados es $(n - 2)180^\circ$.
- 8.15 La medida de un ángulo de un polígono regular de n lados es $\frac{(n - 2)}{n} 180^\circ$.
- 8.16 La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono, uno en cada vértice, es 360° .

Semejanza

- 9.1 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \times d = b \times c$.
- 9.2 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
- 9.3 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.
- 9.4 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
- 9.5 Si $a \times d = b \times c$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
- 9.6 **Teorema fundamental de la proporcionalidad.** Si una recta es paralela a un lado de un triángulo e interseca a los otros dos lados, entonces divide proporcionalmente a dichos lados.
- 9.7 Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y los divide proporcionalmente, entonces la recta es paralela al tercer lado.
- 9.8 **Teorema de la semejanza AA.** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.
- 9.9 Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno de los triángulos es congruente con un ángulo agudo del otro triángulo.
- 9.10 En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura a la hipotenusa es la media geométrica entre las longitudes de los dos segmentos de la hipotenusa.
- 9.11 Dados un triángulo rectángulo y la altura a la hipotenusa, cada cateto es la media geométrica entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del segmento de la hipotenusa adyacente al cateto.
- 9.12 **Teorema de la semejanza LLL.** Si tres lados de un triángulo son proporcionales a tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.
- 9.13 **Teorema de la semejanza LAL.** Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo y si los lados correspondientes que incluyen al ángulo son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Círculos

- 10.1 En un círculo o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes tienen arcos menores congruentes.
- 10.2 En un círculo o en círculos congruentes, los arcos menores congruentes tienen cuerdas congruentes.
- 10.3 En un círculo o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes equidistan del centro.
- 10.4 En un círculo o en círculos congruentes, las cuerdas que equidistan del centro son congruentes.

550 Postulados y teoremas

- 10.5 La bisectriz perpendicular de una cuerda contiene al centro del círculo.
- 10.6 Si una recta que pasa a través del centro de un círculo es perpendicular a una cuerda que no es un diámetro, entonces biseca a la cuerda y a su arco menor.
- 10.7 Si una recta que pasa a través del centro de un círculo biseca a una cuerda que no es un diámetro, entonces es perpendicular a la cuerda.
- 10.8 Si una recta es perpendicular a un radio en un punto sobre el círculo, entonces la recta es tangente al círculo.
- 10.9 Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.
- 10.10 Si una recta es perpendicular a una tangente en un punto sobre el círculo, entonces la recta contiene al centro del círculo.
- 10.11 Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto fuera de él son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro y al punto.
- 10.12 La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida de su arco interceptado.
- 10.13 Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.
- 10.14 Un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan en el interior de un círculo tiene una medida igual a la semisuma de los arcos interceptados.
- 10.15 La medida de un ángulo formado por una tangente y una cuerda hasta el punto de contacto es igual a la mitad del arco interceptado.
- 10.16 La medida de un ángulo formado por dos rectas tangentes a un círculo que se intersecan es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.
- 10.17 La medida de un ángulo formado por una tangente y una secante o dos secantes desde un punto exterior a un círculo es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.
- 10.18 Si un segmento tangente y un segmento secante a un círculo se trazan desde un punto exterior, entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante y su segmento secante externo.
- 10.19 Si dos cuerdas se intersecan en un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de la segunda cuerda.
- 10.20 Si se trazan dos segmentos secantes a un círculo desde un punto exterior, entonces el producto de las longitudes de un segmento secante y su segmento secante externo es igual al producto de las longitudes del otro segmento secante y su segmento secante externo.

Área y perímetro

- 11.1 Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h , el área está dada por la fórmula $A = bh$.
- 11.2 Dado un triángulo con base b y altura correspondiente h , el área A está dada por la fórmula $A = 1/2bh$.
- 11.3 **Fórmula de Herón.** Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitud a , b y c , entonces $A(\triangle ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, donde $s = 1/2(a + b + c)$.

- 11.4** Dado un trapecio con bases b_1 y b_2 y altura h , el área A está dada por la fórmula $A = 1/2h(b_1 + b_2)$.
- 11.5** Dado un polígono regular de n lados de longitud s y apotema a , el área A está dada por la fórmula $A = 1/2ans = 1/2ap$, donde el perímetro $p = ns$.
- 11.6** La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.
- 11.7** La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual a la suma del cuadrado de la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.
- 11.8** La razón entre la circunferencia y el diámetro es igual para todos los círculos.
- 11.9** Dado un círculo con radio r y diámetro d , la circunferencia C está dada por la fórmula $C = \pi d = 2\pi r$.
- 11.10** Dado un círculo con radio r , el área A está dada por la fórmula $A = \pi r^2$.

Sólidos

- 12.1** Las aristas laterales de un prisma son paralelas y congruentes.
- 12.2** Dado un prisma con caras laterales rectangulares, si la altura del prisma es h y las bases tienen área B y perímetro p , entonces el área S está dada por la fórmula $S = hp + 2B$.
- 12.3** Dada una pirámide regular con altura inclinada ℓ y una base con área B y perímetro p , el área S está dada por la fórmula $S = \frac{1}{2}\ell p + B$.
- 12.4** El volumen de cualquier prisma es el producto de la altura por el área de la base.
- 12.5** Dada una pirámide con base B y altura h , si A es una sección transversal paralela a la base y la distancia desde el vértice a la sección transversal es K , entonces $\frac{\text{área } A}{\text{área } B} = \left(\frac{K}{h}\right)^2$.
- 12.6** Dos pirámides con alturas iguales y bases de igual área tienen el mismo volumen.
- 12.7** Dada una pirámide con altura h y área de la base B , el volumen está dado por la fórmula $V = \frac{1}{3}hB$.
- 12.8** Dado un cilindro circular recto con altura h , si la circunferencia de la base es C y el área de la base es B , entonces el área está dada por la fórmula $S = Ch + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
- 12.9** Dado un cilindro circular recto con área de la base B y altura h , el volumen está dado por la fórmula $V = Bh = \pi r^2 h$.
- 12.10** Dado un cono circular recto con altura inclinada ℓ , si la circunferencia de la base es C y el área de la base es B , entonces el área S está dada por la fórmula $S = \frac{1}{2}\ell C + B = \pi r\ell + \pi r^2$.
- 12.11** Dado un cono circular recto con altura h y área de la base B , el volumen está dado por la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- 12.12** Dada una esfera de radio r , el volumen está dado por la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
- 12.13** Dada una esfera con radio r , el área S está dada por la fórmula $S = 4\pi r^2$.
- 12.14** Hay exactamente cinco poliedros regulares que son sólidos convexos.

Transformaciones y simetría

- 13.1** Dada una reflexión sobre una recta:
- la imagen reflejada de un segmento es un segmento de igual longitud;
 - la imagen reflejada de un ángulo es un ángulo de igual medida.
- 13.2** Si las rectas r y s son paralelas, entonces una reflexión sobre la recta r seguida por una reflexión sobre la recta s es una traslación. Además, si A'' es la imagen de A , entonces
- $AA'' \perp r$;
 - $AA'' = 2d$, donde d es la distancia entre las rectas r y s .
- 13.3** Si las rectas r y s se intersecan en un punto O , entonces una reflexión sobre r , seguida de una reflexión sobre s , es una rotación. El punto O es el centro de rotación y el ángulo de rotación es 2α , donde α es la medida del ángulo agudo o recto que está entre las rectas r y s .

Geometría de coordenadas

- 14.1** Si las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$ son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , entonces las coordenadas del punto medio de $\overline{P_1P_2}$ son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
- 14.2** El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es -1 .
- 14.3** Las pendientes de dos rectas paralelas son iguales.
- 14.4** **La fórmula de la distancia.** Si A tiene coordenadas (x_1, y_1) y B tiene coordenadas (x_2, y_2) , entonces $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- 14.5** Cualquier línea recta en un plano de coordenadas que no sea paralela al eje de las y , puede representarse con la ecuación $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el punto en que cruza al eje de las y .
- 14.6** La gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es un círculo con radio r y centro en el origen.
- 14.7** La gráfica de la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es un círculo con radio r y centro en el punto (h, k) .

Glosario

- afirmación de la hipótesis** Forma de razonamiento que se representa como sigue: Siempre que $p \rightarrow q$ sea verdad y p sea verdad, se concluye que q es verdad. (Pág. 64)
- altura de una pirámide** Un segmento que va desde vértice a la base y es perpendicular a ésta. (Pág. 434)
- altura de un paralelogramo** Un segmento perpendicular a un par de lados, paralelos con extremos en esos lados paralelos. (Pág. 399)
- altura de un prisma** Un segmento entre las bases y perpendicular a ellas. (Pág. 435)
- altura de un trapecio** Un segmento perpendicular a los lados paralelos (Pág. 403)
- altura de un triángulo** Un segmento desde un vértice hasta un punto sobre el lado opuesto (quizá extendido) y perpendicular a ese lado opuesto. (Pág. 199)
- altura inclinada de un cono** Un segmento que une al vértice con un punto sobre la circunferencia de la base. (Pág. 456)
- ángulo** La unión de dos rayos no colineales, los cuales tienen el mismo extremo. (Pág. 17)
- ángulo agudo** Un ángulo que mide menos de 90° . (Pág. 21)
- ángulo central** Un ángulo con vértice en el centro de un círculo. (Pág. 343)
- ángulo exterior de un triángulo** Un ángulo que forma un par lineal con uno de los ángulos del triángulo. (Pág. 154)
- ángulo inscrito** Un ángulo con vértice en un círculo y con lados que contienen cuerdas del círculo. (Pág. 343)
- ángulo obtuso** Un ángulo que mide más de 90° . (Pág. 21)
- ángulo recto** Un ángulo que mide 90° . (Pág. 21)
- ángulos alternos exteriores** Dos ángulos exteriores con diferentes vértices en lados opuestos de una transversal. (Pág. 171)
- ángulos alternos interiores** Dos ángulos interiores con diferentes vértices en lados opuestos de una transversal. (Pág. 171)

- ángulos complementarios** Dos ángulos cuyas medidas suman 90° . (Pág. 144)
- ángulos congruentes** Ángulos que tienen la misma medida. (Pág. 20)
- ángulos correspondientes** Dos ángulos que están en el mismo lado de una transversal. Uno de ellos es un ángulo exterior, y el otro, un ángulo interior. (Pág. 171)
- ángulos interiores no contiguos** Los dos ángulos de un triángulo, con respecto a un ángulo exterior, que no son adyacentes al ángulo externo. (Pág. 154)
- ángulos suplementarios** Dos ángulos cuyas medidas suman 180° . (Pág. 144)
- ángulos verticales** Dos ángulos formados por dos rectas que se intersecan pero que no son un par lineal de ángulos. (Pág. 150)
- apotema de un polígono regular** La distancia desde su centro a un lado. (Pág. 408)
- arco** Una parte continua de un círculo. (Pág. 343)
- arco interceptado** Un arco con extremos sobre los lados de ángulos inscritos o centrales. (Pág. 343)
- arco mayor** Un arco que no está en el interior de un ángulo central. La medida de un arco mayor es 360° , menos la medida de su arco menor asociado. (Pág. 346)
- arco menor** Un arco que está en el interior de un ángulo central. La medida de un arco menor es la medida de un ángulo central asociado. (Pág. 346)
- arcos congruentes** Dos arcos de un círculo que tienen la misma medida (Pág. 347)
- área de un círculo** El número al que se aproximan las áreas de los polígonos regulares inscritos de n lados a medida que n aumenta. (Pág. 420)
- arista de un poliedro** Véase poliedro
- bisectriz de un ángulo** La bisectriz de $\angle ABC$ es un rayo BD en el interior de $\angle ABC$, de manera que $\angle ABD \equiv \angle DBC$. (Pág. 24)

bisectriz de un segmento Cualquier punto, segmento, rayo, recta o plano que contiene al punto medio del segmento. (Pág. 24)

bisectriz perpendicular de un segmento Una recta perpendicular al segmento que contiene a su punto medio. (Pág. 29)

cara de un poliedro Véase poliedro

catetos de un triángulo rectángulo Los lados que incluyen al ángulo recto de un triángulo rectángulo. (Pág. 199)

cilindro circular Un sólido con dos bases congruentes en planos paralelos. Las bases son regiones circulares congruentes. (Pág. 542)

cilindro recto Un cilindro con sus ejes perpendiculares a ambas bases. (Pág. 452)

círculo El conjunto de todos los puntos en un plano que están a una distancia fija de un punto dado en el plano. (Pág. 17)

círculo circunscrito Un círculo que contiene los tres vértices de un triángulo. El centro del círculo es el punto de intersección de las bisectrices perpendiculares de los lados del triángulo. (Pág. 238)

círculo inscrito Un círculo que toca cada lado de un triángulo exactamente en un punto. El centro del círculo es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo. (Pág. 238)

círculo máximo La intersección de una esfera y un plano que contiene al centro de la esfera. (Pág. 460)

círculos congruentes Círculos con radios de igual longitud. (Pág. 347)

circunferencia de un círculo El número al que se aproximan los perímetros de los polígonos regulares inscritos conforme se incrementa el número de lados de los polígonos regulares. (Pág. 416)

cono circular Un sólido con una base circular y un vértice que no está sobre el plano que contiene a la base. (Pág. 456)

cono recto Un cono con sus ejes perpendiculares a su base. (Pág. 456)

contraejemplo Un sólo ejemplo que muestra que una generalización es falsa. (Pág. 48)

contrarrecíproca de una proposición La contrarrecíproca de la proposición $p \rightarrow q$ es la proposición $\sim q \rightarrow \sim p$. (Pág. 60)

coordenada de un punto en una recta Un número real asociado con el punto. (Pág. 14)

coordenadas de un punto en un plano Un par de números (x, y) que denotan la ubicación del punto. El primer punto es la coordenada x y el segundo es la coordenada y . (Pág. 505)

coordenada x Una recta que corta al eje de las x en un punto $(a, 0)$ tiene el cruce a en x . (Pág. 505)

coordenada y Una recta que corta al eje de las y en un punto $(0, b)$ tiene el cruce b en y . (Pág. 505)

cuadrado Un rectángulo con cuatro lados congruentes. (Pág. 261)

cuadrilátero La unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos de los cuales no hay tres que sean colineales. Los segmentos se intersecan sólo en sus extremos. (Pág. 17)

cuerda de un círculo Un segmento con extremos sobre el círculo. (Pág. 342)

demonstración o prueba indirecta Suponer la negación de lo que debe demostrarse y después mostrar que esta suposición lleva a una contradicción. (Pág. 158)

diagonal de un polígono Un segmento que une un par de vértices no consecutivos cualesquiera de un polígono. (Pág. 32)

diámetro de un círculo Una cuerda que contiene al centro del círculo (Págs. 17 y 342)

distancia de un punto a una recta La longitud del segmento que parte del punto y es perpendicular a la recta. (Pág. 29)

distancia entre dos puntos Los puntos sobre una recta pueden aparecerse biunívocamente con los números reales de manera que la distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia entre los números asociados. (Pág. 72)

ecuación de la recta Cualquier línea recta en el plano de coordenadas, que no sea paralela al eje de las y , puede representarse con la ecuación $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el punto en que se cruza el eje de las y . (Pág. 524)

ecuación del círculo La gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es un círculo con radio r y centro en el origen. La gráfica de la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es un círculo con radio r y centro en el punto (h, k) . (Págs. 528 y 529)

eje de un cilindro Un segmento que une el centro de las dos bases (Pág. 452)

eje de un cono El segmento que une el vértice al centro de la base. (Pág. 456)

«entre» puntos El punto B está entre A y C si, y sólo si, A , B y C son colineales y $AB + BC = AC$. (Págs. 12 y 72)

«entre» rayos \overrightarrow{BC} está entre \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BD} si, y sólo si, \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BD} son coplanares y $m\angle ABC + m\angle CBD = m\angle ABD$. (Pág. 73)

esfera El conjunto de todos los puntos que están a una distancia determinada de un punto dado. (Pág. 460)

espacio El conjunto de todos los puntos. (Pág. 11)

figura espacial Una figura que tiene puntos que no están todos en un solo plano. (Pág. 16)

figura plana Una figura con todos sus puntos en un sólo plano, pero no todos en una sola línea. (Pág. 16)

fórmula de la distancia Si A tiene coordenadas (x_1, y_1) y B tiene coordenadas (x_2, y_2) , entonces $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. (Pág. 520)

generalización Una conclusión a la que se llega a través del razonamiento inductivo. (Pág. 44)

heptágono Un polígono con siete lados. (Pág. 32)

hexágono Un polígono con seis lados. (Pág. 32)

hipotenusa El lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo. (Pág. 199)

imagen Una figura resultante de una transformación. (Pág. 476)

interior de un ángulo El interior de $\triangle ABC$ es la intersección de los puntos del lado A de BC con los del lado C de AB . (Pág. 17)

inversa de una proposición La inversa de una proposición $p \rightarrow q$ es la proposición $\sim p \rightarrow \sim q$. (Pág. 60)

línea de reflexión Véase reflexión

línea de simetría Véase simetría reflexiva

línea o recta auxiliar Una recta introducida a una figura para ayudar a resolver el problema. (Pág. 157)

media geométrica Un número x es una media geométrica entre dos números a y b si $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, $x \neq 0$, $b \neq 0$. (Pág. 322)

mediana de un triángulo Un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. (Pág. 239)

medida en grados El número real entre 0 y 180 que se asigna a un ángulo. (Pág. 20)

negación de la conclusión Forma de razonamiento que se representa como sigue: Siempre que $p \rightarrow q$ sea verdad y q sea falso, se concluye que p es falso. (Pág. 65)

octágono Un polígono con ocho lados. (Pág. 32)

origen La intersección del eje de las x con el eje de las y en un plano de coordenadas. (Pág. 504)

paralelogramo Un cuadrilátero con ambos pares de lados paralelos. (Pág. 261)

par lineal de ángulos Un par de ángulos con un lado en común de manera que la unión de los otros lados es una recta. (Pág. 144)

pendiente de una recta Si P_1 y P_2 tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , respectivamente, entonces la pendiente m de $\overline{P_1P_2}$ es $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. (Págs. 512 y 516)

pentágono Un polígono con cinco lados. *have no point*

perímetro de un polígono La suma de las longitudes de los lados del polígono. (Pág. 408)

perpendiculares a un plano Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a cada recta del plano que interseque a la recta. (Pág. 28)

pi (π) La razón $\frac{C}{d}$, que es el mismo número real para cualquier círculo. (Pág. 417)

pirámide Un poliedro en el cual todas las caras, menos una, tienen un vértice común. (Pág. 434)

pirámide regular Una pirámide con un polígono regular como base y aristas laterales de igual longitud. (Pág. 434)

planos paralelos Planos que no tienen puntos comunes. (Pág. 170)

planos perpendiculares Dos planos son perpendiculares si hay una recta en un plano que sea perpendicular al otro plano. (Pág. 28)

poliedro Un número finito de regiones poligonales llamadas caras. Cada arista de una región es la arista de exactamente otra región. Si dos regiones se intersecan, lo hacen en una arista o en un vértice. (Pág. 434)

poliedro regular Un poliedro cuyas caras son polígonos regulares con el mismo número de aristas y cuyos vértices están rodeados por el mismo número de caras. (Pág. 464)

polígono La unión de segmentos que se tocan sólo en los extremos, de manera que 1) como máximo dos segmentos se tocan en un punto y 2) cada segmento toca exactamente a otros dos segmentos. (Pág. 32)

polígono convexo Un polígono es convexo si todas sus diagonales están en el interior del polígono. (Pág. 32)

polígono regular Un polígono con todos sus ángulos y todos sus lados congruentes. (Pág. 33)

polígonos semejantes Dos polígonos son semejantes si hay correspondencia entre los vértices de manera que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales. (Pág. 312)

postulado Una generalización básica aceptada sin demostración. (Pág. 52)

prisma Un poliedro tal que 1) hay un par de caras congruentes que están en planos paralelos y 2) todas las demás caras son paralelogramos. (Pág. 435)

prisma recto Un prisma que tiene sus caras laterales perpendiculares a ambas bases. (Pág. 435)

proporción Una igualdad entre dos razones.

Las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. (Pág. 304)

proposición si-entonces Una proposición de la forma si p , entonces q , donde p y q son proposiciones sencillas. p es la *hipótesis* y q es la *conclusión*. El símbolo $p \rightarrow q$ (léase p implica a q) se usa para representar una proposición si-entonces. (Pág. 56).

punto medio de un segmento El punto medio del segmento \overline{AB} es un punto C sobre A y B tal que $AC \cong CB$. (Págs. 24 y 508)

radio de un círculo Un segmento cuyos extremos son el centro del círculo y un punto sobre su circunferencia. (Págs. 17 y 342)

rayo Un rayo \overrightarrow{AB} es un subconjunto de una recta. Contiene un punto dado A y todos los puntos sobre el mismo lado de A que B . (Pág. 16)

razonamiento deductivo Se empieza con una hipótesis y se usan la lógica y definiciones, postulados o teoremas demostrados con anterioridad para justificar una serie de proposiciones o pasos que llevan a la conclusión deseada. (Pág. 52)

razonamiento inductivo Observar que un suceso da el mismo resultado varias veces sucesivas, y luego concluir que el suceso siempre tendrá el mismo resultado. (Pág. 44)

razón del coseno El coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón

$$\frac{\text{longitud del lado adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \quad (\text{Pág. 330})$$

razón de la tangente La tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón

$$\frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud del lado adyacente}} \quad (\text{Pág. 330})$$

recíproca de una proposición La recíproca de una proposición $p \rightarrow q$ es la proposición $q \rightarrow p$. (Pág. 91)

rectángulo Un paralelogramo con cuatro ángulos rectos. (Pág. 390)

rectas alabeadas Dos rectas que no se intersecan y que no están en el mismo plano. (Pág. 261)

rectas concurrentes Tres o más rectas coplanares que tienen un punto en común. (Pág. 13)

rectas intersecantes Dos rectas con un punto en común. (Pág. 13)

rectas paralelas Rectas en el mismo plano y que no se intersecan. (Págs. 13 y 174)

rectas perpendiculares Dos rectas que al intersecarse forman ángulos rectos. (Pág. 28)

recta y plano paralelos Una recta y un plano que no tienen puntos en común. (Pág. 170)

reflexión Una transformación, en un plano, sobre la recta ℓ que marca cada punto P del plano en el punto P' como sigue:

- Si P está sobre ℓ , $P' = P$.
- Si P está sobre ℓ , entonces ℓ es la bisectriz perpendicular de PP' .

A P' se le llama *imagen* de P y P es la *preimagen* de P' . (Pág. 476)

región poligonal Un subconjunto de un plano limitado por un polígono (o polígonos). (Pág. 394)

regla de cadena Una forma de razonamiento representado como sigue: Siempre que $p \rightarrow q$ sea verdad y $q \rightarrow r$ sea verdad, se concluye que $p \rightarrow r$ es verdad. (Pág. 65)

rombo Un paralelogramo con cuatro lados congruentes. (Pág. 261)

rotación Una transformación con centro O y ángulo α que marca cada punto P del plano en un punto P' como sigue:

- Si P es el punto central O , $P' = P$.
- Si $P \neq O$, entonces $P'O = PO$ y $m\angle POP' = \alpha$.

A P' se le llama la *imagen de rotación* del punto P . (Pág. 488)

secante de un círculo Una recta que interseca al círculo exactamente en dos puntos. (Pág. 343)

sección transversal de un sólido Una región común al sólido y a un plano que interseca al sólido. (Pág. 445)

sector de un círculo Una región limitada por un ángulo central y su arco interceptado. (Pág. 421)

segmento Un segmento, \overline{AB} , es el conjunto de puntos A y B y todos los puntos entre A y B . (Pág. 16)

segmentos congruentes Segmentos que tienen la misma longitud. (Pág. 20)

semiplano Para una recta en un plano, los puntos del plano que no están sobre la recta forman dos semiplanos. Cada mitad es un conjunto convexo. (Pág. 69)

simetría Véanse simetría reflexiva y simetría rotacional.

simetría reflexiva Una figura F tiene simetría reflexiva si hay una recta ℓ tal que la imagen de reflexión sobre ℓ de cada punto P de F es también un punto de F . La recta ℓ es la línea de simetría. (Pág. 494)

simetría rotacional Una figura F tiene simetría rotacional si hay una rotación alrededor de un centro A tal que la imagen de rotación de cada punto P de la figura F sea también un punto de F . El centro, A , de la rotación se llama centro de simetría de F . (Pág. 495)

superficie El área de prismas y pirámides es la suma de las áreas de las caras laterales más el área de las bases. (Pág. 440)

sólido rectangular Un prisma con bases rectangulares cuyas aristas son perpendiculares a las bases. (Pág. 444)

tangente a un círculo Una recta que interseca al círculo en un punto exactamente. (Pág. 349)

teorema Una generalización que puede demostrarse que es verdadera usando definiciones, postulados y la lógica del razonamiento deductivo. (Pág. 52)

teorema de Pitágoras Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. (Pág. 226)

transformación Una regla u operación que cambia una figura. La figura, antes del cambio, se llama *preimagen*, y la figura que resulta del cambio se llama *imagen*. (Págs. 476-495)

transversal Una recta que interseca a dos rectas coplanares en dos puntos distintos. (Págs. 171 y 174)

trapecio Un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos. (Pág. 261)

traslación Dada una flecha AA' , la imagen de traslación de un punto P para la flecha AA' es el punto P' , donde:

- $AA' = PP'$, y
- las flechas AA' y PP' tienen la misma dirección. (Pág. 484)

triángulo La unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales. (Págs. 17 y 32)

triángulo acutángulo Un triángulo con tres ángulos agudos. (Pág. 198)

triángulo equiángulo Un triángulo con tres ángulos congruentes. (Pág. 199)

triángulo equilátero Un triángulo con todos sus lados congruentes entre sí. (Págs. 33, 198, 203 y 209)

triángulo escaleno Un triángulo que no tiene lados congruentes. (Pág. 198)

triángulo isósceles Un triángulo con dos lados congruentes entre sí. (Págs. 33, 198 y 202)

triángulo obtusángulo Un triángulo con un ángulo obtuso. (Pág. 199)

triángulo rectángulo Un triángulo con un ángulo recto. (Págs. 199 y 226)

triángulos congruentes Dos triángulos son congruentes si hay una correspondencia entre los vértices de manera que cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes. (Págs. 84 y 90)

unidad cuadrada Una región cuadrada en la que la longitud de un lado es una unidad de longitud. (Pág. 261)

vértice de un ángulo El extremo de los dos rayos no colineales que determinan al ángulo. (Pág. 17)

vértice de un polígono El extremo de un lado del polígono. (Pág. 32)

volumen Una medida de la cantidad de espacio que ocupa un sólido. A cada sólido se asigna un número real positivo único que es su volumen. (Pág. 444).

Respuestas seleccionadas

Se dan las respuestas a la mayoría de los ejercicios impares y a todos los de «Solución de problemas». Se incluyen todas las respuestas a los resúmenes de capítulo y a los resúmenes globales. No se dan las respuestas a los exámenes de los capítulos.

CAPITULO 1

páginas 14 y 15

3. $A, F, C; A, E, D; B, F, E; B, C, D.$
5. Ejemplo: A, F, D, B . 7. $r, t, q.$
11. $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BG}$ o \overrightarrow{BF} . 13. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{GD}.$
15. 12; $ABCD, ADHE, CDHG, ABFE, BCGF, EFGH, ADFG, BCEH, ABGH, CDEF, BFHD, AEGC.$
17. Todas son posibles excepto 2; el máximo es 6.

páginas 18 y 19

13. $\angle ABC, \angle CBA.$ 15. $\angle ACB, \angle BCA.$
19. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}.$
21. $\overrightarrow{AB}, p.$ 23. $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}.$
25. $\angle ABC, \angle ACB, \angle ACD, \angle ADC, \angle CAD, \angle CAB.$
27. Sí, los segmentos tienen los mismos extremos.
29. Tres rectas; no; los lados de un triángulo son segmentos.
31. Dibújese el segmento $EI.$

Solución de problemas Fórmese una pirámide con una base triangular.

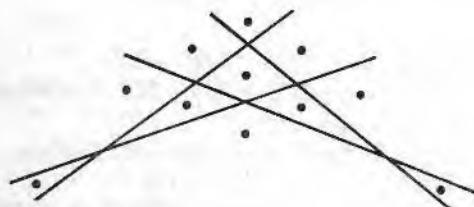
páginas 22 y 23

1. 4 cm.
3. $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{MN} \not\cong \overline{XY}, \overline{JK} \cong \overline{EF}.$
5. $140^\circ.$ 7. $90^\circ.$

11. $\angle EOF, \angle FOM, \angle LOH, \angle JOD.$

19. $67\frac{1}{2}^\circ.$

Solución de problemas



páginas 26 y 27

5. Sí. 17. 43.

páginas 30 y 31

1. $j \perp k.$
7. $ABCD, ABFE; ABCD, BCGF; ABCD, CDHG; ABCD, ADHE.$
13. Una recta contenida en un plano debe ser perpendicular al segundo plano.
15. Constrúyase una perpendicular de A al punto C de manera que el río pase por el punto medio de \overline{AC} . Sea M la intersección de \overline{CB} y el río. Entonces, $AM + MB$ es el mínimo.

Solución de problemas A y D.

páginas 34 y 35

- 1b. Cada segmento no toca exactamente a otros dos segmentos.
- 3a. Igual que el ejercicio 1.
5. 2c, 3c. 9a. Regular. 9d. Regular.
11. $\triangle AFB, \triangle CGB, \triangle AJE, \triangle EID, \triangle DHC, \triangle FBG, \triangle GCH, \triangle HDI, \triangle JIE, \triangle AFJ.$
13. Número par de aristas.

15. *HIJ, ACEG, JIDEF, CEGJHA, BHIJFGA, CIDEGJHA, ABHICEFJG, AHBCIDEFJG.*

Solución de problemas $\frac{7\frac{1}{5}}{360} = \frac{500}{x}$; 25 000 millas.

página 37 Capítulo 1 Resumen

- 2a. Falso. 2b. Falso. 2c. Falso.
- 2d. Verdadero. 2e. Falso. 2f. Verdadero.
3. Ninguno; uno; dos.
4. Sí, ambos segmentos tienen los mismos extremos.
11. Planos: *ABCD, GHFE, BCFH, ADEG*; o *CDEF, BAGH*.
12. Recta: *DE, CF, AG* o *BH*.
13. Recta: *AB* o *GH*, *AH* o *BG*.
14. Recta *CB*.

página 39 Técnicas para la solución de problemas

1. 10. 2. 9 ó 21. 3. 20. 4. 26.
5. 19 pies. 6. Una calle al sur.

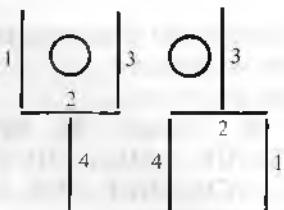
CAPÍTULO 2

páginas 46 y 47

1. \overline{CB} , \overline{GF} , \overline{XZ} ; el más largo.
3. Tres iguales. 5. $h = a + b + c$.

Solución de problemas

1. Muévase el palillo #2 hacia la derecha.
2. Muévase el palillo #1 abajo a la derecha.



páginas 50 y 51

1. Falso. 3. a.
5. Falso; úsese un triángulo obtusángulo.

Solución de problemas

- | | | | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|----|---|
| 1. | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 |
2. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., 2^{n-1} , donde n es el número de la fila.
 3. $a^2 + 2ab + b^2$, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Los coeficientes son los mismos que los números de cada fila del triángulo de Pascal.

páginas 54 y 55

1. Superficie, llana, plana.
3. Sí. La definición de plano requiere más términos básicos.
7. Los ángulos verticales son congruentes.
9. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.

Solución de problemas $(30 - 3) - 2 = 25$ ó $25 + 2 + 3 = 30$ son correctos. $(30 - 3) + 2$ no es correcto.

páginas 58 y 59

1. (p) Lisa tiene 15 años. (q) Lisa es demasiado joven para votar en las elecciones de Puerto Rico. Verdadero.
3. (p) Algunas manzanas son rojas. (q) Los caballos tienen cuatro patas. Verdadero.
5. (p) Dos rectas se intersecan. (q) Esas dos rectas no son paralelas. Verdadero.
7. (p) $\triangle ABC$ es isósceles. (q) $\triangle ABC$ es equilátero. Falso.
9. Si un hombre vive en San Juan, entonces vive en Puerto Rico.
11. Sí dos rectas son perpendiculares, entonces se intersecan para formar ángulos rectos congruentes.

13. Si dos rectas son paralelas, entonces no se intersecan.
15. (p) Termina en 2. (q) El número es par. Si un número termina en dos, entonces es un número par.
17. (p) Un triángulo equiángulo. (q) Debe ser equilátero. Si una figura es un triángulo equiángulo, entonces debe ser equilátero.
19. (p) Haz como te digo. (q) Serás rico. Si haces lo que yo te digo, entonces serás rico.
21. (p) Dos de sus ángulos son congruentes. (q) Un triángulo es isósceles. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.
23. (p) $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. (q) B es el punto medio de \overline{AC} . Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces B es el punto medio de \overline{AC} .

Solución de problemas Nueve viajes de ida y ocho de regreso.

páginas 62 y 63

1. Si una persona está mojada, entonces está nadando.
3. Si una persona no tiene mucho dinero, entonces es pobre.
5. Si una persona no roba, entonces no es deshonesta.
7. Si un equipo no gana cuatro juegos de la Serie Mundial, entonces no gana la Serie.
9. Si una persona no tiene 16 años o más, entonces no conduce un automóvil legalmente.
11. Si no se gana el partido de esta noche, entonces no se ganará el campeonato.
13. Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo. Si un triángulo es equiángulo, entonces es equilátero.
15. Si dos rectas en un plano son paralelas, entonces no tienen puntos en común. Si dos rectas en un plano no tienen puntos en común, entonces son paralelas.
17. Si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces tiene dos pares de lados paralelos. Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados paralelos, entonces es un paralelogramo.

Solución de problemas Alicia.

páginas 66 y 67

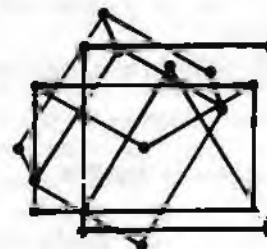
1. Ella votó a Armando Amigable.
3. No está nevando. 5. No son paralelas.
7. El punto C está sobre la bisectriz perpendicular.
9. Un ángulo con medida mayor de 90° es un ángulo obtuso.
11. 1. Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $\angle C$ como ángulo recto, entonces $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ y $m\angle C = 90$.
3. Si $m\angle A + m\angle B = 90$, entonces $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.

Solución de problemas León es el encargado, Martínez es el cajero y Nieves es la administradora.

páginas 70 y 71

1. Recta, dos puntos, recta, postulado del plano.
3. Recta, postulado de la recta y el plano.
5. Recta, postulado de la perpendicular.
7. Recta, postulado de la perpendicular.
9. Postulado de la intersección de planos.
11. Postulado de la perpendicular.
13. Postulado del punto y el plano.
15. Postulado de la perpendicular.
17. Postulado del punto y el plano.
19. 4.

Solución de problemas



páginas 74 y 75

1. 3. 3. 9. 5. 8. 7. 11. 9. 19.
11. 8. 13. 40. 15. 155. 17. 80.
19. C. 21. B.

23. Definición de «entre», postulado de la regla.
 25. 28, 35.
 27. $BC = 14$, $CA = 42$ ó 14. 29. 4 ó 24.
 31. 96. 33. 20.

Solución de problemas $A = 0.010$, $B = 0.540$, $C = 0.249$, $D = 0.882$, $E = 1.1555$.

página 77 Capítulo 2 Resumen

1. Triángulo equilátero; triángulo equilátero.
- 2a. Una cometa o un rombo sin ángulos rectos.
- 2b. Un rectángulo con lados adyacentes no congruentes.
3. Un postulado es una proposición que se acepta como verdadera sin necesidad de demostrarla. Un teorema es una proposición que se puede demostrar.
- 4a. Falso. 4b. Verdadero. 4c. Falso
- 4d. Falso. 5. 16. 6. 30.
- 7a. (Hip) no se intersecan (con) dos rectas son paralelas.
- 7b. (Hip) todos son cuadrados (con) todos son rectángulos.
- 8a. Si una figura tiene cuatro ángulos rectos, entonces es un cuadrado.
- 8b. Si una figura no es un cuadrado, entonces no tiene cuatro ángulos rectos.
- 8c. Si una figura no tiene cuatro ángulos rectos, entonces no es un cuadrado.
- 8d. Rectángulo (a y b).
9. Las diagonales de la figura $ABCD$ son congruentes.
10. \overline{AB} y \overline{CD} están en el mismo plano.

página 79 Repaso de álgebra

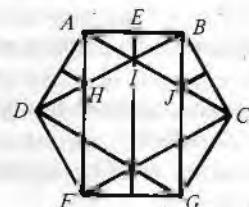
1. A. 3. D. 5. C. 7. F. 9. 32.
11. 26. 13. 1. 15. -32. 17. 12.
21. $x \geq -18$. 23. $x > 22$. 25. $x > 20$.
27. -9,9. 29. 3, -5. 31. 37, -37.
33. 6, -7. 35. 8, -8. 37. 11. 39. 20.
41. -12.

CAPÍTULO 3

páginas 86 a 89

1. No son congruentes. 3. Congruente.
5. b. 7. b. 9a. $\overline{BC} \cong \overline{DE}$.
- 9b. $\overline{AB} \cong \overline{EF}$. 9c. $\angle C \cong \angle D$.
11. $\angle C \cong \angle D$, $\angle A \cong \angle O$, $\angle T \cong \angle G$, $\overline{CA} \cong \overline{DO}$, $\overline{AT} \cong \overline{OG}$, $\overline{CT} \cong \overline{DG}$.
13. a, c. 15. APR, BTJ.
17. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
19. $\triangle ABC \cong \triangle BAC$, $\triangle ABC \cong \triangle ACB$, $\triangle ABC \cong \triangle ABC$, $\triangle ABC \cong \triangle CAB$, $\triangle ABC \cong CBA$.
21. $\triangle ABD \cong \triangle DCA$, $\triangle BAE \cong \triangle CDE$.
23. $\triangle AEB \cong \triangle ADC$, $\triangle DBC \cong \triangle ECB$.

Solución de problemas b, e; c, g; d, f.
 Triángulos congruentes: ADI , BCI ; ADB , BCA ; ADH , BCJ ; AFC , BDG ; AHI , BJI ; AEI , BEI .



páginas 92 a 95

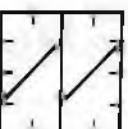
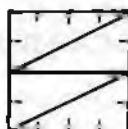
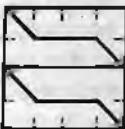
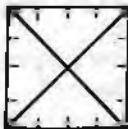
1. $\triangle LMN$. 5. $\angle DBC$. 7. \overline{BD} .
 9. $\angle BDC$. 11. LAL. 13. ALA. 15. LLL.
 17. No hay suficiente información.
 19. No hay suficiente información.
 21. No hay suficiente información.
 23. LLL. 25. No congruente.
 27. No congruente.
 31. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, $\triangle ACD \cong \triangle ACB$, LAL, definición de triángulos congruentes.
 33. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, ALA.
 35. $\triangle ABE \cong \triangle CBD$, LAL.
 37. $\triangle DBA \cong \triangle EBC$, ALA.
- Solución de problemas** 8, 27, 64.

páginas 98 y 99

1. LAL . 3. ALA .
 5. $\overline{BD} \cong \overline{DB}$, un segmento es congruente consigo mismo; ALA .
 7. LAL . 9. ALA . 11. $\angle B \cong \angle B$; ALA .
- Solución de problemas** Todos menos el modelo medio.

páginas 102 y 103

1. $\angle ZXZM \cong \angle YXM$. 3. $\overline{AN} \cong \overline{BN}$.
 5. $\overline{PV} \cong \overline{QV}$, $\overline{SV} \perp \overline{PQ}$, $\angle PVS$ y $\angle QVS$ son ángulos rectos.
 7. $\overline{OT} \cong \overline{ST}$.
 9. Definición de bisectriz del ángulo.
 11. Definición de punto medio.
 13. Definición de bisectriz perpendicular.
- Solución de problemas**

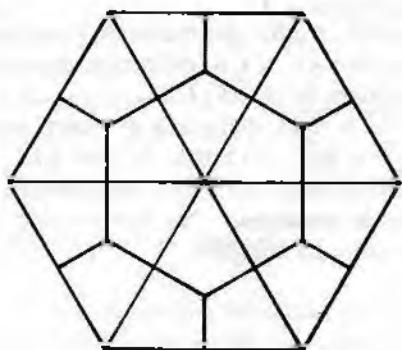
**páginas 106 a 109**

1. LLL . 3. ALA .
5. 2. Dado.
3. Definición de rectas perpendiculares
4. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$. 5. LAL .
7. 2. $\angle 3 \cong \angle 4$. 3. Dado.
4. Definición de bisectriz del ángulo.
5. Un segmento es congruente consigo mismo. 6. ALA .
9. $\overline{XM} \cong \overline{XM}$; LAL .
11. $\overline{NQ} \cong \overline{NQ}$; LLL .
13. $\angle RAD \cong \angle EAH$; ALA .

15. $\overline{AN} \cong \overline{EN}$, definición de punto medio; ALA .
 17. $\overline{ES} \cong \overline{NS}$, definición de bisectriz del segmento; LAL .
 19. $\angle ABF \cong \angle CBF$, definición de bisectriz del ángulo; $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, definición de pentágono regular; $\overline{BF} \cong \overline{BF}$; LAL .
 21. $\overline{AM} \cong \overline{CM}$, definición de punto medio; $\overline{MB} \cong \overline{MB}$, $\triangle AMB \cong \triangle CMB$, LLL ; definición de triángulos congruentes.
- Solución de problemas** No hay solución única; 7, 8 y 9 son una solución.

páginas 112 a 115

1. $\triangle ABD$, $\triangle ACD$.
3. $\triangle EFG$, $\triangle EIH$, $\triangle EFH$, $\triangle EIG$.
5. $\triangle JNK$, $\triangle LNK$; $\triangle JNM$, $\triangle LNM$.
7. 1. Dado. 2. $\overline{MO} \cong \overline{MO}$; un segmento es congruente consigo mismo. 3. LLL .
4. $\angle PMO \cong \angle NMO$. 5. Definición de bisectriz del ángulo.
9. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$; $\triangle ACB \cong \triangle ACD$, ALA ; $PCTCC$.
11. $\angle E \cong \angle B$, $\overline{AE} \cong \overline{AB} \cong \overline{ED} \cong \overline{BC}$; definición de polígono regular; definición de isósceles: $\triangle AED \cong \triangle ABC$, LAL ; $\overline{AD} \cong \overline{AC}$, $PCTCC$.
13. $\overline{CD} \cong \overline{ED}$, definición de bisectriz del segmento; $\triangle BCD \cong \triangle FED$, ALA ; $PCTCC$.
15. $AP = BP$ y $AN = BN$, dado que los puntos P y N en el plano de la red están a una distancia igual de las líneas de la base; $\overline{PN} \cong \overline{PN}$; $\triangle APN \cong \triangle BPN$, LLL ; $\angle PNA \cong \angle PNB$, $PCTCC$; $\angle PNA$ y $\angle PNB$ son suplementos con medidas que suman 180° ; cada uno tiene una medida de 90° ya que los ángulos son iguales; $\angle PNA$ y $\angle PNB$ son ángulos rectos y \overline{PM} es perpendicular a \overline{AB} .
17. $\triangle AFE \cong \triangle BCD$, LAL ; $\overline{AE} \cong \overline{BD}$, $PCTCC$; $\triangle AEB \cong \triangle DBE$, LLL ; $PCTCC$.
19. $\triangle DFG \cong \triangle CFG$, LAL ; $\overline{FD} \cong \overline{FC}$, $PCTCC$; $\triangle AEF \cong \triangle ABF$, LAL ; $\overline{EF} \perp \overline{BF}$, $PCTCCC$, LLL .

Solución de problemas**páginas 118 y 119**

1. $\triangle ABC, \triangle CDA; \triangle ABE, \triangle CDE$.
3. $\angle 1 \cong \angle 2; \overline{AC} \cong \overline{DF}, \angle 3 \cong \angle 4$, dado;
 $\triangle EFD \cong \triangle BCA, \text{ALA}; \overline{EF} \cong \overline{BC}, \text{PCTCC}$.
5. $\overline{CB} \cong \overline{BC}, \triangle ECB \cong \triangle DBC, \text{LAL}; \text{PCTCC}$.
7. $\triangle ACE \cong \triangle BDF, \text{ALA}, \text{PCTCC}$.
9. $\triangle QPV \cong \triangle QRT, \text{LAL}, \text{PCTCC}$.
11. $\angle AHG \cong \angle DHF; \triangle AHG \cong \triangle DHF, \text{ALA}; \text{PCTCC}$.

Solución de problemas A-36, B-36, C-24, D-8.

página 121

1. $\triangle PUQ \cong \triangle TUS, \text{ALA}; \overline{QU} \cong \overline{SU}, \text{PCTCC}$.
 $\overline{QR} \cong \overline{SR}$, definición de bisectriz del segmento; $\overline{UR} \cong \overline{UR}; \text{LLL}$.
3. $\triangle GFE \cong \triangle DEF, \text{LAL}; \overline{GE} \cong \overline{DF}, \text{PCTCC}$;
 $\triangle HGE \cong \triangle CDF, \text{LAL}; \text{PCTCC}$.
5. $\triangle AHB \cong \triangle DHE, \text{LAL}; \angle 4 \cong \angle 3, \text{PCTCC}$;
 $\triangle ACB \cong \triangle DFE, \text{ALA}; \text{PCTCC}$.

Solución de problemas 255; sea n = número de letras, $2^n - 1$.

página 123 Capítulo 3 Resumen

1. $\angle B \cong \angle Q, \angle A \cong \angle R, \angle C \cong \angle P$,
 $\overline{BA} \cong \overline{QR}, \overline{AC} \cong \overline{RP}, \overline{BC} \cong \overline{QP}$.
- 2a. **ALA.** 2b. **LLL.** 2c. **LAL.** 2d. **LAL.**

- 3a. $\angle ABC$ y $\angle ABD$ son ángulos rectos.
- 3b. $\overline{FE} \cong \overline{GE}$.
- 3c. $\angle ABD \cong \angle CBD; \angle ADB \cong \angle CDB$.
- 3d. Todos los ángulos y lados son congruentes.
4. $\angle QPM \cong \angle NPM, \angle QMP \cong \angle NMP$, definición de bisectriz del ángulo; $\overline{MP} \cong \overline{MP}, \triangle MQP \cong \triangle MNP, \text{ALA}, \text{PCTCC}$.
5. $\angle DBA \cong \angle EBC$, rectas perpendiculares forman ángulos rectos congruentes;
 $\triangle DBA \cong \triangle EBC, \text{LAL}; \text{PCTCC}$.
6. $\triangle ZQX \cong \triangle PYX, \text{LAL}; \text{PCTCC}$.

página 125 Resumen global capítulos 1 a 3

- 1a. Falso. 1b. Falso. 1c. Verdadero
3. Deductivo. 4. Inductivo.
5. No hay conclusión. 6. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
- 7a. Si dos rectas no son perpendiculares, entonces son paralelas.
- 7b. Si dos rectas no son paralelas, entonces son perpendiculares.
- 7c. Si dos rectas son perpendiculares, entonces no son paralelas.
- 7d. 7a, b; mostrar rectas intersecantes que no sean paralelas.
8. $\overline{AC} \cong \overline{AC}; \text{LLL}$.
9. $\angle BAD \cong \angle CAD; \triangle BAD \cong \triangle CAD, \text{LAL}; \text{PCTCC}$.

CAPÍTULO 4**páginas 134 a 137**

5. Si dos rectas se intersecan, entonces forman dos pares de ángulos congruentes.
7. Si un segmento es la bisectriz de un ángulo del vértice de un triángulo equilátero, entonces el segmento es la bisectriz perpendicular de un lado.
9. Reflexiva.
11. Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

13. Si un triángulo es equilátero, entonces todos los ángulos son congruentes.
 15. Propiedad transitiva.
 17. $AB = AC$, transitiva; tres lados congruentes.
 19. $BE = BD$, $AD = BB$, $AD = BD$, $BE = AD$, transitiva; sustitución.
 21. $\bar{DB} \cong \bar{BD}$, reflexiva; *ALA*.
 23. $\angle AOB \cong \angle BOC$; $\angle BOC \cong \angle COD$; transitiva.
 25. $\bar{AB} \cong \bar{CD}$, teorema de la página 198;
 $\angle A \cong \angle D$, $\bar{AE} \cong \bar{DF}$, *PCTCC*; *LAL*.
 27. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, dado;
 $\angle A \cong \angle D$, $\angle D \cong \angle G$; $\angle A \cong \angle G$, transitiva,
 $\bar{AB} \cong \bar{DE}$, $\bar{DE} \cong \bar{GH}$; $\bar{AB} \cong \bar{GH}$, transitiva; completar el modelo para cuatro pares más.

Solución de problemas

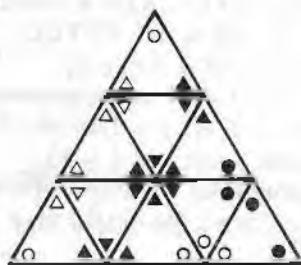
- a. 45, 66. b. Sí.

páginas 140 a 143

1. Transitiva. 3. Resta de ángulos iguales.
 5. Transitiva.
 7. Resta de segmentos iguales.
 9. $\bar{BE} = \bar{AC}$, transitiva, resta de segmentos iguales.
 11. 2. Propiedad reflexiva. 3. Suma de segmentos iguales.
 13. 3. Propiedad reflexiva. 4. Suma de segmentos iguales. 5. Propiedad transitiva.
 15a. 29.73 cm. 15b. 6.045 cm.
 15c. Suma y resta de segmentos iguales.
 17. Suma de ángulos iguales.
 19. $\triangle ABE \cong \triangle DCE$, *ALA*; $\bar{AB} = \bar{DC}$, *PCTCC*; $\bar{AC} = \bar{DB}$, suma de segmentos iguales.
 21. $AB = BC$; $m\angle ABF = m\angle CBG$, suma de ángulos iguales; $\triangle FBA \cong \triangle GBC$, *LAL*; $\angle F \cong \angle G$, $\triangle FBD \cong \triangle GBE$, *ALA*; *PCTCC*.
 23. $\bar{AC} \cong \bar{CD}$; $m\angle ACB = m\angle DCE$, suma de ángulos iguales; $\triangle ACB \cong \triangle DCE$, *ALA*; $\angle E \cong \angle B$, $\bar{EC} \cong \bar{BC}$, *PCTCC*; *ALA*.
 25. $\bar{AE} \cong \bar{DF}$, $\angle A \cong \angle D$, $\bar{AC} \cong \bar{DB}$, *PCTCC*; $AC - BC = DB - CB$; *LAL*.

27. $\triangle ABE \cong \triangle DCE$, *LAL*; $\angle AEB \cong \angle DEC$, *PCTCC*; $m\angle EAF = m\angle EDG$, resta de ángulos iguales; $\triangle AEF \cong \triangle DEG$, *ALA*; $\bar{FE} \cong \bar{GE}$, *PCTCC*.

Solución de problemas Obsérvese que se pueden colocar 9 triángulos para formar un triángulo con 6 símbolos en el centro.

**páginas 148 y 149**

1. $\angle COB$. 3. $\angle 1$ o bien $\angle 2$.
 5. Complementos de ángulos congruentes.
 7. $\angle COF$, $\angle EOD$. 9. $\angle HOA$, $\angle FOD$.
 11. Complementos del mismo ángulo, $\angle AOC$.
 13. Complementos del mismo ángulo, $\angle COE$.
 15. $90 - x$. 17. $x + 4x = 180$; 36, 144.
 19. $\angle BAD \cong \angle BCD$, suplementos congruentes; *ALA*.
 21. $BW = BX = YD = DZ$; $\angle WBX \cong \angle ZDY$, suplementos congruentes; *LAL*.
 23. $\angle EBC \cong \angle EDC$, complementos congruentes; $\angle BEC \cong \angle DEC$, suplementos congruentes; *ALA*.
 25. Empléese el diagrama de la página 217 con $\angle D \cong \angle C$, $\angle A$ es complementario de $\angle C$, $\angle B$ es complementario de $\angle D$; $m\angle A + m\angle C = 90$, $m\angle B + m\angle D = 90$; $m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle D$, sustitución; $m\angle A = m\angle B$, resta; $\angle A \cong \angle B$.

Solución de problemas $x \doteq 1.618$; $y \doteq 0.618$;

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}; x^2 - x - 1 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; x \doteq 1.618.$$

páginas 152 y 153

1. $\angle COE, \angle BOF; \angle BOC, \angle FOE.$
 3. Ejemplo: $\angle AOC, \angle FOD.$
 5. 145. 7. 145. 9. 40. 11. 50.
 13. $CO = DO, \angle COA \cong \angle DOB$, ángulos verticales; **ALA**.
 15. $\angle AEB \cong \angle DEC, \triangle AEB \cong \triangle DEC, LAL.$
 17. $\angle AEB \cong \angle DEC, \triangle AEB \cong \triangle DEC, LAL; \angle A \cong \angle D, \overline{AB} \cong \overline{DC}, PCTCC;$
 $AE + EC = DE + EB; LAL.$
 19. $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios, dado; $m\angle 1 + m\angle 2 = 180; 2m\angle 1 = 180$, sustitución, suma; $m\angle 1 = 90.$
- Solución de problemas** Dibújese \overline{AM} y \overline{DM} . $AB = 2a; m\angle AMD = 90; AM = DM = a\sqrt{5}.$

páginas 156 y 157

1. Seis; ángulos $ICB, FCA, CAD, HAB, ABG, EBC.$
3. $\angle ACB, \angle ABC.$
5. No, no forma par lineal con $\angle CAB.$
7. Ángulo vertical. 9. Ángulo exterior.
11. $m\angle 3 > m\angle 1; m\angle 1 > m\angle 4$, ángulo exterior, transitiva.
13. $m\angle ABD > m\angle BDC; m\angle BDC = m\angle EDF.$
15. $m\angle RCB > m\angle B; m\angle RCB > 90.$
17. En $\triangle XYZ, \angle 2$ es un ángulo obtuso.



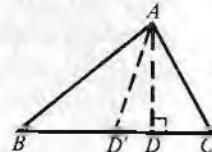
dado; $m\angle 2 > 90$, definición de ángulo obtuso;
 $m\angle 1 + m\angle 2 = 180; 90 > m\angle 1$;
 $m\angle 1 > m\angle Z, m\angle 1 > m\angle Y$, teorema del ángulo exterior; $90 > m\angle Z, 90 > m\angle Y$, transitiva.

19. Usese el diagrama del ejercicio 17; en $\triangle XYZ$, sea $\angle 2$ un ángulo recto, dado; $m\angle 1 > m\angle Z, m\angle 1 > m\angle Y$, teorema del ángulo exterior; $\angle 1$ es un ángulo recto, resta; $90 > m\angle Z, 90 > m\angle Y$,

definición de ángulo recto, sustitución; ni $\angle Z$ ni $\angle Y$ son ángulos obtusos (Ejercicio 16); en $\triangle XYZ$, sea $\angle 2$ un ángulo obtuso, dado; $90 > m\angle Z, 90 > m\angle Y$ (Ejercicio 17); ni $\angle Z$ ni $\angle Y$ son ángulos rectos.

Solución de

problemas Si el triángulo no es isósceles, el punto medio de \overline{BC} y el pie de la perpendicular son dos puntos distintos.



páginas 160 a 163

1. $t \not\perp m$; los ángulos formados no son ángulos rectos.
3. Los lados adyacentes son paralelos. Los lados adyacentes no se intersecan.
5. $\overline{AB} \not\cong \overline{CD}; AB \neq CD.$
7. $\angle A$ no es un ángulo agudo. $m\angle A \geq 90.$
9. $\triangle ABC$ no es un triángulo isósceles. $AB \neq BC \neq AC.$
11. No es una contradicción.
13. Forma una contradicción.
15. Forma una contradicción. 17. c.
19. $m\angle A + m\angle B \neq 90$ (Ejercicios 19 a 27, las respuestas pueden variar).
21. $\triangle ABC \not\cong \triangle XYZ.$
23. $m\angle A \neq 117.$
25. $AB + EF = CD + EF.$
27. $m\angle 1 + m\angle 2 \neq 180.$
29. 1. Suposición de la prueba indirecta.
 2. Dado. 4. Propiedad reflexiva.
 5. Postulado **LAL**. 6. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, **PCTCC**. 7. $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$, dado.
 8. $\overline{BD} \not\cong \overline{DC}$, lógica de la demostración indirecta.
31. Un abogado descubre que un cliente suyo, acusado de un delito en Ponce, estaba en la ciudad de San Juan cuando se cometió el delito. El abogado hace la siguiente proposición: Si mi cliente estaba en San Juan, entonces no cometió el delito. El abogado usa este razonamiento: Supóngase

que mi cliente cometió el delito. El delito se cometió en Ponce. Mi cliente estaba en San Juan. No pudo haber estado en Ponce y en San Juan al mismo tiempo. Por tanto, mi cliente no cometió el delito.

- | | | |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 33. | <p>1. Supóngase que $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos verticales.</p> <p>2. $\angle A \cong \angle B$.</p> <p>3. $\angle A \not\cong \angle B$. (contradicción).</p> <p>4. $\angle A$ y $\angle B$ no son ángulos verticales.</p> | <p>1. Suposición de la demostración indirecta.</p> <p>2. Definición de ángulos verticales.</p> <p>3. Dado.</p> <p>4. Lógica de la demostración indirecta.</p> |
| 35. | <p>1. Supóngase que $BC = QR$.</p> <p>2. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.</p> <p>3. $\angle A \cong \angle P$.</p> <p>4. $\angle A \not\cong \angle P$ (contradicción)</p> <p>5. $BC \neq QR$.</p> | <p>1. Suposición de la demostración indirecta.</p> <p>2. LLL.</p> <p>3. $PCTCC$.</p> <p>4. Dado.</p> <p>5. Lógica de la demostración indirecta.</p> |

Solución de problemas Si se supone que Ana está diciendo la verdad, puede llegarse a una contradicción. Si se supone que Isa o Ive dicen la verdad, también se llega a una contradicción. Si se supone que Leo está diciendo la verdad, no se llega a una contradicción. Por tanto, Ana es la culpable.

página 165 Capítulo 4 Resumen

- 1a. Verdadero. 1b. Falso. 1c. Verdadero.
- 4a. $x = 22.5^\circ$, $3x = 67.5^\circ$. 4b. 56.
- 4c. 100, 80. 5. 45.
6. $\angle BCA \cong \angle DCE$; empléese ALA .
7. Empléese la suma de ángulos iguales.
8. $\triangle ABC \cong \triangle AED$, ALA ; $\angle 3 \cong \angle 4$, $PCTCC$, empléense los suplementos de ángulos congruentes.

- 9a. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. 9b. $\angle A$ y $\angle B$ no son suplementarios.

página 167 Técnicas de solución de problemas

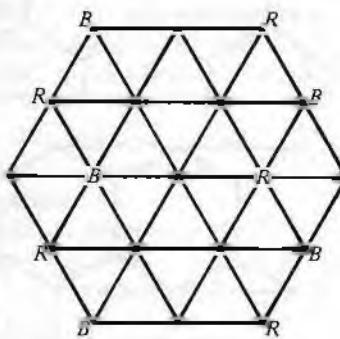
1. 1296. 2. 35. 3. 45.

CAPÍTULO 5

páginas 172 y 173

1. Ejemplo \overrightarrow{EH} , \overrightarrow{FG} , \overrightarrow{CG} , \overrightarrow{DH} .
3. $EFGH$ y $ABCD$, $BCGF$ y $ADHE$, $ABFE$ y $DCGH$.
5. $\angle 2$ y $\angle 7$, $\angle 1$ y $\angle 8$.
7. ABG y DJK , AGL y CDJ , ABC y JKL .
9. \overline{CD} y \overline{EF} ; \overline{AE} .
11. $\angle 14$ y $\angle 17$, $\angle 14$ y $\angle 11$.

Solución de problemas

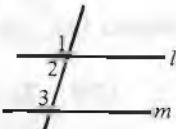


páginas 176 a 179

- 1a. a y c , 5.1. 1b. a y b , 5.2.
- 1c. b y c , 5.4. 1d. a y c , 5.2.
- 1e. b y c , 5.1. 1f. a y b , 5.3.
3. Teoremas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4.
5. $\angle 2$ y $\angle 3$.
7. $\angle 8$ y ($\angle 4$ y $\angle 5$); $\angle 7$ y ($\angle 5$ y $\angle 6$).
9. LLL ; $\angle 3 \cong \angle 2$, $PCTCC$; teorema 5.2.
11. $AF + FC = DC + CF$; $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, LLL ; $\angle ACB \cong \angle DFE$; teorema 5.2.

13. Empléese el teorema 5.4.

15. $\angle 2$ es suplementario de $\angle 3$, dado; $\angle 2$ es suplementario de $\angle 1$, par lineal; $\angle 1 \cong \angle 3$, suplementos congruentes; $t \parallel m$, teorema 5.1.



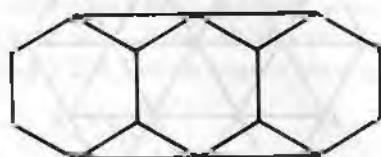
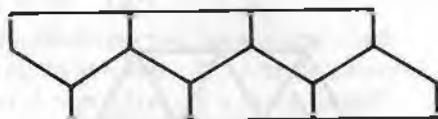
17. $\frac{1}{2}m\angle ABC = \frac{1}{2}m\angle BCD$, $\angle 2 \cong \angle 3$; teorema 5.2.

19. $(m\angle 2 + m\angle 3) + m\angle 1 = 180$; $m\angle 1 = m\angle 5$; $m\angle 1 = m\angle 4$; teorema 5.1.

21. Dibújense \overline{DM} y \overline{CM} . Pruébese que $\triangle AMD \cong \triangle BMC$, LAL; $\overline{DM} \cong \overline{CM}$, $\angle DMA \cong \angle CMB$, PCTCC; $\angle DMP \cong \angle CMP$, $\triangle DMP \cong \triangle CMP$, LAL; $\angle DPM \cong \angle CPM$. Empléese el teorema 5.4.

23. La plomada es paralela a las puertas, ventanas y esquinas de las paredes.

Solución de problemas



páginas 182 y 183

- 3a. Verdadero. 3b. Verdadero.

- 3c. Verdadero. 3d. Verdadero.

5. No paralelas.

7. $q \parallel p$, teorema 5.4, $q \parallel r$, teorema 5.4; teorema 5.5.

9. Usese el teorema 5.1 o el 5.2.

11. $\overline{AB} \perp \overline{BG}$, $\overline{HG} \perp \overline{BG}$; $\overline{BA} \parallel \overline{HG}$; $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$; úsese el teorema 5.5.

Solución de problemas Sea E la intersección de \overline{AB} y \overline{CD} ; $\overline{AE} = \overline{BE}$, $\overline{CE} = \overline{DE}$; $\angle AEC \cong \angle BED$; $\triangle AEC \cong \triangle BED$, LAL; $\angle EDB \cong \angle ECA$, PCTCC; ángulos alternos interiores.

páginas 186 a 189

1. 125. 3. 125. 5. 55. 7. 125.

9. 37. 11. 37. 13. 110. 15. 28.

17. 70. 19. 70. 21. 42.

23. $m\angle ABC = m\angle CDA = 110$, $m\angle DAB = 70$.

25. $m\angle 1 = m\angle 5 = 78$; $m\angle 2 = 102$.

27. $t \parallel m$; $\angle 1 \cong \angle 3$, teorema 5.8;

$\angle 2$ es suplementario de $\angle 3$, par lineal;

$\angle 2$ es suplementario de $\angle 1$; sustitución.



29. Un ángulo interior formado por r y t es 90° , teorema 5.6; definición de perpendicular.

31. $m\angle 1 = m\angle 11$, $m\angle 11 = m\angle 7$, $m\angle 1 = m\angle 7$, transitiva; $m\angle 2 = m\angle 4$, $m\angle 4 = m\angle 9$, $m\angle 2 = m\angle 9$, transitiva.

33. $\angle 9$ es suplementario de $\angle 6$, teorema 5.9; $\angle 1 \cong \angle 6$, suplementos de ángulos congruentes; úsese el teorema 5.2.

35. $\angle B \cong \angle DEF$, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, ALA.

37. $\angle 4 \cong \angle 2$, teorema 5.8; $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$, teorema 5.9; $m\angle 1 + m\angle 4 = 180$, sustitución.

39. $\angle B$ es suplemento de $\angle A$, $\angle D$ es suplemento de $\angle A$, teorema 5.9; suplemento de ángulos congruentes.

41. Los bordes del papel tapiz deben ser paralelos de tal manera que

$\angle A \cong \angle C$; dado que el

piso es paralelo al techo,

$\angle B \cong \angle C$. Por tanto,

$\angle A \cong \angle B$.

Solución de problemas

1. Dado que \overline{AB} sufre la misma inclinación al entrar que al salir, se forma un par de ángulos



correspondientes congruentes al hacer que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

2. Usese el teorema 5.5.

página 191 Capítulo 5 Resumen

- 1a. $\angle 3$ y $\angle 6$, $\angle 4$ y $\angle 5$.
- 1b. $\angle 2$ y $\angle 7$, $\angle 1$ y $\angle 8$.
- 1c. $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 3$ y $\angle 7$, $\angle 4$ y $\angle 8$.
- 2a. Verdadero. 2b. Falso.
- 2c. Verdadero. 3a. $\triangle ABE$ y $\triangle DCF$.
- 3b. \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{FD} , \overrightarrow{AD} y \overrightarrow{FC} .
4. No. 5. 55. 6. 78.
7. $\angle 8 \cong \angle 11$, teorema 5.6. $\angle 10$ y $\angle 11$ son suplementarios. Usese el teorema 5.4.
8. $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DC}$, teorema 5.1. Usese el teorema 5.8.

página 193 Repaso de álgebra

1. 4. 3. $-\frac{5}{2}$ 5. -8 . 7. 2.
9. $\frac{4}{5}$ 11. $x < 5$. 13. $x < \frac{14}{3}$
15. $x > 36$. 17. $-5 < x < 5$. 19. $2\sqrt{2}$.
21. $4\sqrt{3}$. 23. $3\sqrt{3}$. 25. $\frac{7}{8}$ 27. $\frac{11\sqrt{2}}{4}$
29. $(-10, 34)$. 31. $(4, 2)$. 33. $(14, -4)$.
35. $(7, 14)$. 37. 3, 9.

CAPÍTULO 6

páginas 200 y 201

- 1a. Escaleno. 1b. Equilátero.
- 1c. Isósceles. 1d. Escaleno.
- 3a. $\angle N$. 3b. $\overline{MN}, \overline{PN}$. 3c. \overline{MP} .
- 3d. $\overline{MN}, \overline{PN}$.
9. Un triángulo equilátero debe ser un triángulo acutángulo.
11. $\triangle XYZ$, alturas XZ , \overline{YZ} , \overline{ZP} ; $\triangle ZPY$, \overline{ZP} , \overline{PQ} , \overline{YP} ; $\triangle PQY$, \overline{PQ} , \overline{QW} , \overline{YW} ; $\triangle Xpz$, \overline{XP} , \overline{ZP} ; $\triangle PQZ$, \overline{PQ} , \overline{ZQ} .
13. $\triangle HAB$, $\triangle CBA$.
15. Triángulos equiláteros ABC , DEF ; triángulos escalenos DEA , FDC , EFB .
17. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{AE} \perp \overline{BC}$; $\angle CDB \cong \angle AEB$;

$\angle B \cong \angle E$; $AB = AD = CB = CE$, $DB = EB$; $\triangle BAE \cong \triangle BCD$, ALA.

Solución de problemas 16 triángulos como $\triangle MON$; también los triángulos AJC , BKD , CLE , FMH , GNI , JOL , AMD , BNE , FOI , JLC , AOE .

páginas 204 a 207

1. $\angle B \cong \angle E$; $\angle ACD \cong \angle ADC$.
 3. $\angle MNL$, $\angle MLN$; $\angle KNL$, $\angle KLN$.
 5. $\triangle AEB$, $\triangle DEC$, $\triangle DEA$, $\triangle CEB$.
 7. 50. 9. 31.
 11. 14. 13. 30.
 15. $m\angle X = m\angle Z = 72$; $m\angle Y = 36$.
 17. $m\angle ABC = m\angle 3 = m\angle ACB = m\angle 4$.
 19. $\angle ACD \cong \angle ADC$; $\angle ACB \cong \angle ADE$, suplementos de ángulos congruentes; $\angle ACB \cong \angle ADE$, LAL; $\overline{AB} \cong \overline{AE}$.
 21. $\angle ABC \cong \angle ACB$; $m\angle EBC = m\angle DCB$; $\overline{BC} \cong \overline{CB}$; $\triangle DBC \cong \triangle ALA$.
 23. $\angle ABC \cong \angle ACB$; $m\angle 3 = m\angle 4$; $\overline{DC} \cong \overline{DB}$.
 25. $\angle D$ y $\angle ABD$ son suplementarios de $\angle ABC$; $\angle D \cong \angle ABD$; $\overline{AD} \cong \overline{AB}$.
 27. $\triangle ABC \cong \triangle BAE$, LAL; $\angle CAB \cong \angle EBA$, PCTCC.
 29. En el triángulo equilátero ABC , $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle C$, teorema 6.1; $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$; transitiva.
 31. $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; sea el punto D la intersección de \overline{BC} y la bisectriz de $\angle A$; $\angle BAD \cong \angle CAD$; $\triangle BAD \cong \triangle CAD$, LAL; $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, $\angle ADB \cong \angle ADC$, CPCTC; $\angle ADB$ y $\angle ADC$ son ángulos rectos, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.
 33. $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, \overline{BD} biseca a $\angle ABC$, \overline{CE} biseca a $\angle ACB$, dado; $\angle ABC \cong \angle ACB$, ángulos de la base; $m\angle DBC = m\angle ECB$, mitades de iguales; $\triangle DBC \cong \triangle ECB$, ALA; $\overline{EC} \cong \overline{DB}$, PCTCC.
 35. $\overline{XB} \cong \overline{YC}$; $\angle BXW \cong \angle CYZ$; $\angle ABC \cong \angle ACB$; $\triangle XBW \cong \triangle YCZ$, ALA.
 37. $m\angle EAP = m\angle DBP$, resta; $\overline{AP} \cong \overline{BP}$; $\angle EPA \cong \angle DPB$; $\triangle EPA \cong \triangle DPB$, ALA; $\overline{EP} \cong \overline{DP}$.
- Solución de problemas** 29, 16.

páginas 210 y 211

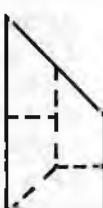
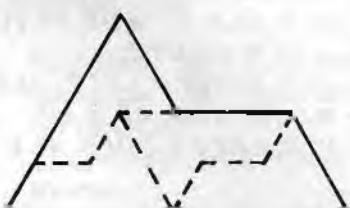
1. 54. 3. 110. 5. 55. 7. 60.
 9. 110. 11. 55, 40, 85.
 13. $180 - 90 = 90$; $\frac{90}{2} = 45$.
 15. En el triángulo isósceles XZY , $m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180$; $2m\angle X + m\angle Z = 180$; $m\angle X + \frac{1}{2}m\angle Z = 90$; $m\angle X < 90$; empleese la definición de ángulo agudo.
 17. En el triángulo rectángulo ABC con ángulo recto B , $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$; $m\angle B = 90$; $m\angle A + m\angle C = 90$, resta; úsese la definición de ángulos complementarios.
 19. $\angle DCE \cong \angle ECB$; $\angle A \cong \angle B$; úsese el teorema 6.6; $\angle ECB \cong \angle B$.
 21. Dibújese \overline{AC} . $m\angle 1 + m\angle DAC = m\angle B + m\angle ACB$. $m\angle 2 = m\angle DAC + m\angle DCA$. Sumar.
- 23.
-

$$\begin{aligned}1. m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 &= 180. \\2. m\angle 1 + m\angle 4 &= 180.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. m\angle 2 + m\angle 3 + \\+ (180 - m\angle 1) &= 180. \\4. m\angle 2 + m\angle 3 &= m\angle 1.\end{aligned}$$

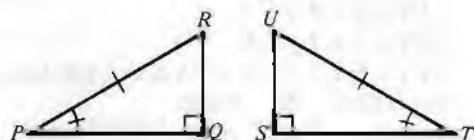
1. Teorema 6.4.
2. Par lineal; def. de suplementos.
3. Sustitución.
4. Algebra.

Solución de problemas



páginas 214 y 215

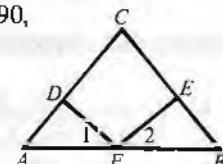
1. HA . 3. ALA . 4. HA .
7. $\angle CDA \cong \angle CDB$; $\overline{AC} \cong \overline{BC}$; HA .
9. AAL .
11. $BE + EC = FC + CE$; AAL .
- 13.



Úsese el teorema AAL .

15. $\triangle EAB \cong \triangle BCA$, LAL ; $\angle AEB \cong \angle BCA$, $PCTCC$; $\angle EFA \cong \angle CFB$; AAL .

17. Triángulo isósceles ABC con $\angle A \cong \angle B$, $\overline{FD} \perp \overline{AC}$, $\overline{FE} \perp \overline{BC}$, $m\angle ADF = m\angle BEF = 90$, definiciones de rectas perpendiculares y de ángulos rectos;



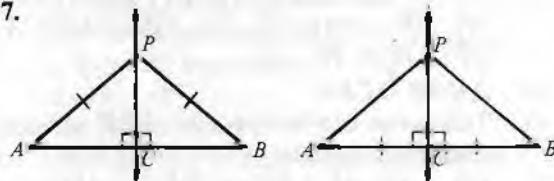
$$\begin{aligned}m\angle A + m\angle ADF + m\angle 1 &= m\angle B + \\+ m\angle BEF + m\angle 2, \text{ teorema 6.4, transitiva;} \\m\angle 1 &= m\angle 2, \text{ resta.}\end{aligned}$$

Solución de problemas 4.

páginas 218 y 219

1. HC . 3. HA . 5. ALA .
7. No congruentes; hágase $PQ = 2ST$, $PR = 2SU$, $QR = 2TU$.
9. LLL . 11. 35.
13. $\triangle ECB \cong \triangle DBC$, HA ; $\angle DBC \cong \angle ECB$, $PCTCC$.
15. $\triangle EFB \cong \triangle DFC$ (Ejercicio 14); $\overline{EF} \cong \overline{DF}$; $\angle DEF \cong \angle FDE$; $\angle DEA \cong \angle EDA$, sumas de ángulos.

- 17.



Si P no está sobre \overline{AB} , entonces constrúyase la perpendicular de P a \overline{AB} ; $\triangle ACP \cong \triangle BCP$, HC ; $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, PCTCC. (Si P está sobre \overline{AB} , entonces P es el punto medio.) Si P está sobre la bisectriz perpendicular, entonces $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ por LAL , $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, PCTCC.

Solución de problemas A, sí; B, no; C, sí; D, no.

página 221 Capítulo 6 Resumen

- 1a. Falso. 1b. Verdadero.
- 1c. Falso. 1d. Falso.
2. 70. 3. 80.
4. $m\angle CAB - m\angle DAB = m\angle CBA - m\angle DBA$.
5. $\overline{AB} \cong \overline{BA}$; $\triangle ADB \cong \triangle BCA$, AAL.
6. $\triangle ACD \cong \triangle ABD$, HA.
7. $\triangle CYA \cong \triangle AXC$, HC; $\angle YCA \cong \angle XAC$, PCTCC; $\overline{BC} \cong \overline{BA}$.
- 8a. Un ángulo exterior iguala la suma de dos ángulos interiores no contiguos.
- 8b. 45.
9. $\overline{KM} \cong \overline{KN}$; $\angle KMN \cong \angle KNM$; $\angle KMG \cong \angle KHN$, suplementos de ángulos congruentes; $\triangle KGM \cong \triangle KHN$, ALA; $\overline{KG} \cong \overline{KH}$.

página 225 Técnicas de solución de problemas

1. 37. 2. 28. 3. $T_5 = 15$, $T_6 = 21$, $T_{10} = 55$.
4. $P_5 = 35$, $P_6 = 51$, $P_{10} = 145$.
5. $H_3 = 18$, $H_4 = 34$, $H_{10} = 235$.

CAPÍTULO 7

páginas 228 a 231

1. Correcto. 3. Incorrecto. 5. Correcto.
7. 5. 9. 8. 11. $\sqrt{19}$.

13. 10. 15. $2\sqrt{2}$. 17. $\sqrt{5}$. 19. Sí.
 21. Sí. 23. No.
 25. $\sqrt{424} = 2\sqrt{106} \approx 20.6$.
 27. $4\sqrt{2}$ pies.
 31. Área del cuadrado 1 = área del cuadrado 2; $4(1/2ab) + c^2 = 4(1/2ab) + a^2 + b^2$; $c^2 = a^2 + b^2$.
 33. $\frac{\sqrt{1400}}{0.5} \approx 19$ líneas.
 35. 26.96 metros.
- Solución de problemas**
- 1a. 4. 1b. 3. 1c. 1. 1d. 2.
 - 2a. $\sqrt{521}$. 2b. 23 = $\sqrt{529}$.
 - 2c. $\sqrt{545}$. 2d. $\sqrt{565}$.

páginas 234 y 235

1. 2, $2\sqrt{2}$. 3. 5, 5. 5. 2, $\sqrt{3}$.
7. $2\sqrt{3}$, 2. 9. $8\sqrt{7}$, $8\sqrt{21}$. 11. 38, $19\sqrt{3}$.
13. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. 15. $3\sqrt{3}$ m.
17. En el triángulo 30-60-90, el lado opuesto al ángulo de 30° es $\frac{s}{2}$; el lado opuesto al ángulo de 60° es $\sqrt{3}$ veces la longitud del cateto más corto o bien $\frac{s\sqrt{3}}{2}$.

19. $\frac{s\sqrt{3}}{3}$.

Solución de problemas

1. $AB^2 + 1^2 = 2^2$, $AB = \sqrt{3}$.
2. $AD^2 + BD^2 = AB^2$; $AD = \sqrt{2}$.
3. No.

páginas 240 a 243

1. BX , BY , BZ . 3. 3. 5. 4.
13. Algunas veces.
13. Algunas veces. 17. Algunas veces.
19. Obtuso, fuera; recto, sobre; o agudo, dentro.

23. $\overline{AD} = \overline{DC}$, definición de mediana y de punto medio; $BA = BC$, definición de isósceles; $\angle A \cong \angle C$; $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, LAL ; $\angle ABD \cong \angle CBD$, $PCTCC$; \overline{BD} es la bisectriz del ángulo.
25. En el triángulo equilátero $\triangle XYZ$, M es el punto medio de XZ ; $\triangle XYM \cong \triangle ZYM$, LLL ; $\angle XMY$ y $\angle ZMY$ son congruentes y supplementarios, por tanto, ángulos rectos; YM es una altura.
27. $\triangle NCB \cong \triangle MBC$, ALA ; $\overline{MB} \cong \overline{CN}$, $\overline{MC} \cong \overline{NB}$, $PCTCC$; $\triangle MCN \cong \triangle NBM$, LAL ; $\angle NMC \cong \angle MNB$, $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.
29. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

31. En el triángulo equilátero $\triangle ABC$, \overline{AD} , \overline{BE} y \overline{CF} son medianas; $AF = BF$, definiciones de mediana y de punto medio; $\triangle AFC \cong \triangle BFC$, LLL ; $\angle AFC$ y $\angle BFC$ son congruentes y supplementarios, y por tanto ángulos rectos; $\triangle AFX \cong \triangle BFX$, LAL ; dado que $\triangle ACF \cong \triangle BCF$, $\angle XCE \cong \angle XCD$; $CE = CD$, mitades de iguales; $\triangle ECX \cong \triangle DCX$, LAL ; repítase el modelo para \overline{AD} y \overline{BE} .

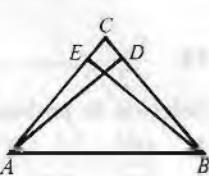
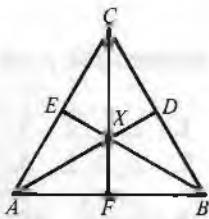
33. Triángulo isósceles $\triangle ABC$, $AC = BC$ con alturas \overline{BE} y \overline{AD} ; $\angle CEB \cong \angle CDA$, definiciones de altura y ángulo recto; $\triangle CEB \cong \triangle CDA$, AAL ; $\overline{BE} \cong \overline{AD}$, $PCTCC$.

Solución de problemas

- $A'B = 5 = PR$; úsase AAL .
- En $\triangle PQR$, $y^2 = RQ^2 + 5^2$; $y + RQ = x$; sustituir.

páginas 246 y 247

- Sí.
- No.
- Sí.
- Sí.
- Mayor que 2 y menor que 16.



11. Escoger C fuera de \overline{AB} ; $AC + CB > AB$.
13. $AD + AB > BD$ y $CD + BC > BD$. Sumar.
15. H está en la intersección de las diagonales. $DH + HB = 4$. Fórmese un triángulo rectángulo con AC como hipotenusa. $2^2 + (4 + 2\sqrt{3})^2 = AC^2$; $AC \doteq 7.7$; $DB = 4$; mínimo $\doteq 11.7$.

Solución de problemas Encuéntrese la longitud de la perpendicular que va de la parte superior de la figura al punto O (diagrama izquierdo), $\sqrt{2}$; encuéntrese AO . $(\frac{1}{2}AB)^2 + \sqrt{2}^2 = AO^2$; $AO = \frac{\sqrt{17}}{2}$; dado que la longitud del cordón es el doble de AO , longitud $= \sqrt{17}$.

páginas 250 y 251

- \overline{AB} , \overline{AC} .
- \overline{GH} , \overline{GL} .
- $AC < BC < AB$.
- $BC < AC < AB$.
- $m\angle C < m\angle B < m\angle A$.
- $CD < BC < BD < AB$ ($AD = AB$).
- En $\triangle ABD$, $BD < AB$; $CD = BD$; sustituir.
- Usese el ejercicio 14.
- Possible, no.
- Possible, no.
- Possible, si.
- No es posible.
- No es posible.

Solución de problemas

$$\sqrt{3^2 - (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{2^2 - (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{2}; \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \doteq 1.3 \text{ m.}$$

página 253 Capítulo 7 Resumen

- Falso.
- Verdadero.
- Verdadero.
- Verdadero.
- \overline{CD} .
- $2\sqrt{2}$.
- En el triángulo 30° - 60° - 90° $\triangle ABE$, \overline{AE} es el ángulo opuesto de 60° . $AE = \sqrt{3}$; $AC = 2\sqrt{3}$.
- Fórmese un triángulo. Constrúyanse dos bisectrices perpendiculares cualesquiera.

7. 16. 8. 12.
 9. Dibújese \overline{XZ} . En $\triangle XYZ$,
 $m\angle YXZ > m\angle YZX$. En $\triangle XWZ$,
 $m\angle ZXW > m\angle XZW$. Sumar.

página 255 Resumen global, capítulos 4 a 7

1. Ejemplo \overline{DF} . 1b. Ejemplo \overline{FE}
 1c. Ejemplo \overline{ABEH} . 1d. \overline{HB} .
 1e. $DGHA$. 2a. 75. 2b. $113\frac{1}{3}, 66\frac{2}{3}$
 2c. $123\frac{1}{3}, 56\frac{2}{3}$
 3. $\overline{AB} \cong \overline{AE}$; úsese ALA .
 4. $BC + CD = ED + DC$; $\angle 5 \cong \angle 6$:
 úsese LAL .
 10a. 88. 10b. 75. 10c. 163.
 11. $\overline{CD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{AD}, \overline{AB}$.

CAPITULO 8

páginas 262 y 263

1. \overline{DC} . 3. $\overline{DC}, \overline{AB}$.
 5. Verdadero. 7. Falso.
 9. Verdadero. 11. Verdadero.
 19. Rombo. 21. 5.4 cm, 10.6 cm.
 23. c.

Solución de problemas $ABGI, DEGJ, HCID, HEGB, BJDH, JIEF, HFGG, CEDA, AJGC$.

páginas 266 a 269

1. $\overline{AB}, \overline{DC}; \overline{AD}, \overline{BC}$.
 3. $\angle A, \angle D; \angle D, \angle C; \angle C, \angle B; \angle B, \angle A$.
 5. 132. 7. 90. 9. 132. 11. 4 cm.
 13. 122. 15. 58.
 17. Si los lados opuestos de un cuadrilátero no son congruentes, entonces el cuadrilátero no es un paralelogramo.
 19. Rombo o trapecio con 3 lados congruentes.
 21. No es un paralelogramo, contrapositiva del teorema 8.1.
 23. No es un paralelogramo, contrapositiva del teorema 8.1.
 25. $17^\circ, 163^\circ$. 27. 17. 29. 85.

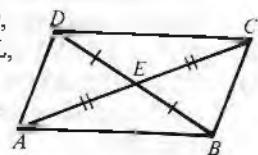
31. $\overline{CD} \parallel \overline{BA}$; $\angle CDB \cong \angle ABD$; ángulos verticales; $\triangle BEG \cong \triangle DEF$, ALA : $\overline{FE} \cong \overline{GE}$.
 33. $\overline{DC} \cong \overline{BA}$, $\angle D \cong \angle B$. $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $AD - AE = CB - CF$; $\triangle DEC \cong \triangle BFA$, LAL , $PCTCC$.
 35. Paralelogramo $ABCD$ con ángulo recto A , dado; $m\angle A = m\angle C = 90$, ángulos opuestos; $\angle D$ es suplemento de $\angle A$: $m\angle D = 90$; $m\angle D = m\angle B = 90$, úsese la definición de rectángulo.
 37. $\angle A \cong \angle CBF$, teorema 5.8; $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, úsese HA ; $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$, úsese el ejercicio 35.
 39. Úsese la definición de paralelogramo y el teorema 5.9.
 41. 90. 43. 40.
 45. $\overline{KJ} \cong \overline{XY}$; $\overline{AB} \cong \overline{KJ}$; transitiva.
 47. $\overline{BC} \cong \overline{PQ}$, teorema 8.2; $\overline{BC} \cong \overline{KJ}$, definición de polígono regular;
 $\overline{KJ} \cong \overline{XY} \cong \overline{PS}$, teorema 8.2; $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$, sustitución.

Solución de problemas

1. La sección transversal corta por lo menos un par de planos paralelos.
 2. Cualquier conjunto de cinco caras del cubo debe contener dos pares de aristas paralelas.

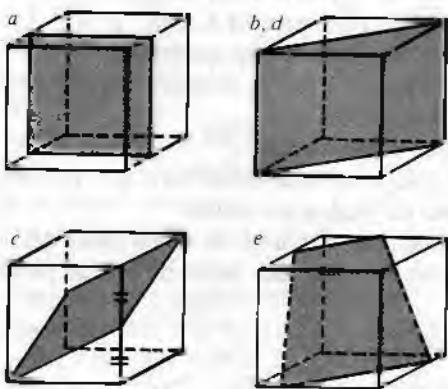
páginas 272 a 275

1. Si. 3. Si. 5. No. 7. 14 mm.
 9. 60° . 11. $81\frac{1}{3}$, 8.
 13. X_1X_2 e $\overline{Y_1Y_2}$ son congruentes y paralelas. $X_1X_2Y_2Y_1$ es un paralelogramo.
 $X_1Y_1 \parallel X_2Y_2$.
 15. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{FE}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{FE} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{FE}$; úsese el teorema 8.5.
 17. $\triangle HAE \cong \triangle FCG$, $\triangle DHG \cong \triangle BFE$, LAL , $\overline{HE} \cong \overline{FG}$, $\overline{HG} \cong \overline{FE}$, $PCTCC$; úsese el teorema 8.4.
 19. $\frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB$; $\overline{DF} \parallel \overline{AE}$; úsese el teorema 8.5.
 21. $AE = EC$, $DE = EB$, dado; $\triangle AEB \cong \triangle CED$, $\triangle DEA \cong \triangle BEC$, LAL , $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $PCTCC$, úsese el teorema 8.4.



23. $AEGD$ y $ABFH$ son paralelogramos, teorema 8.5; $\overline{GE} \parallel \overline{DA}$, $\overline{HF} \parallel \overline{AB}$; úsese la definición de paralelogramo.
25. $\triangle AED \cong \triangle CDE$, LAL ; $\angle CED \cong \angle ADE$; $\triangle AED$ y $\triangle CDE$ son isósceles; $m\angle EAD = 36$, suma de triángulo de 180; $m\angle EFD = 108$, suma de triángulo de 180; $m\angle BAF = m\angle BCF = 72$; $ABCF$ es un paralelogramo, teorema 8.6; $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.
27. Dibújese FB ; $\triangle EBF \cong \triangle CBF$, HC ; $EF = FC$; $\angle BDC \cong \angle DBC$, ángulos base; $\angle DFE \cong \angle DBC$, $180 - m\angle EFC$; $\angle BDC \cong \angle DFE$.
29. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, ángulos correspondientes; úsese el teorema 8.5.

Solución de problemas a, b, c, d, e



páginas 284 a 281

1. 4. 3. 10. 5. 34. 7. 5. 9. 7.5.
11. 8, 16. 13. 20. 15. $b = 7$.
17. $a = 31.5$. 19. 5, 10. 21. No.
23. Usese teorema 8.7, $\overline{FD} \parallel \overline{AE}$, $\overline{DE} \parallel \overline{AF}$.
25. $ABDE$ es paralelogramo; $\overline{AE} \cong \overline{BD}$, $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$; obténgase $YX = ZW$, $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$.
27. $WZYX$ es un paralelogramo, teorema 8.8; las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.
29. $WZ \parallel \overline{AB}$, $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, teorema 8.7.
31. $WG = GY$, $XG = GZ$, diagonales de paralelogramo; úsese la propiedad transitiva.

33. $YX = \frac{1}{2}DB$, $ZW = \frac{1}{2}DB$, $YX = ZW$; $\overline{YX} \parallel \overline{DB}$, $\overline{ZW} \parallel \overline{DB}$, $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$; úsese el teorema 8.5.
35. En $\triangle AOB$, A' y B' son puntos medios de los lados, en $\triangle DOC$, D' y C' también son puntos medios; úsense los teoremas 8.7 y 8.5.

Solución de problemas

1. Pruébese que los triángulos rectángulos son congruentes con \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{AD} como partes correspondientes.

2. $1^2 + (\frac{1}{2})^2 = \text{longitud}^2$; longitud = $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

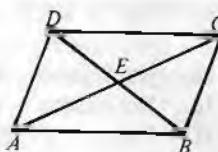
3. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

páginas 284 a 287

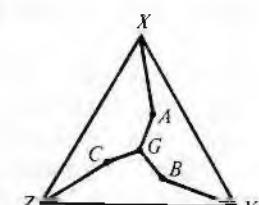
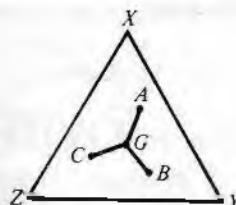
1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, $\overline{DB} \cong \overline{AC}$, $\overline{DE} \cong \overline{EB}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$, $\overline{DE} \cong \overline{EC}$, $\overline{DE} \cong \overline{AE}$, $\overline{AE} \cong \overline{EB}$, $\overline{CE} \cong \overline{BE}$.
3. $\angle DEA$, $\angle DEC$, $\angle CEB$, $\angle BEA$.
5. No. 7. Sí. 9. No. 11. Sí.
13. No. 15. Falso. 17. Verdadero.
19. Falso. 21. Rectángulo.
23. No es posible. 25. Cuadrado.
27. $4x + 10 = 90$; $x = 20$; 116.
29. $DB = AC$, $BE = AC$; $DB = BE$, transitiva.
31. Pruébese que cuatro triángulos son congruentes con EF , FG , GH y HE por PCTCC; $m\angle DHG + m\angle GHE + m\angle AHE = 180$; $\angle DHG \cong \angle AEH$, PCTCC; $\triangle AEH$ y $\triangle AHE$ son complementarios, $\angle DHG$ y $\angle AHE$ son complementarios, sustitución; $\angle GHE$ es un ángulo recto.
33. $ZV = XV$, $WV = YV$; $ZX \perp WY$; úsese LAL.
- 35a. Si las diagonales son congruentes, entonces la figura es un rectángulo.
37. Dibújese $GFEH$; $\triangle DGH$ $\triangle DGH \cong \triangle CFG \cong \triangle BEF \cong \triangle AHE$, LAL ; $GF \cong FE \cong EH \cong HG$ teorema 8.10.

39. 1. Si cada diagonal biseca a un par de ángulos opuestos, entonces un paralelogramo es un rombo;

$\angle DAB \cong \angle DCB$, $\angle DCA \cong \angle DAC$, dado, mitades de ángulos iguales; $\overline{AD} \cong \overline{DC}$; dado que los lados opuestos también son congruentes, entonces todos los lados son congruentes. 2. Si un paralelogramo es un rombo, entonces cada diagonal biseca a un par de ángulos opuestos; $\triangle DCE \cong \triangle BCE$, HC ; $\angle DCE \cong \angle BCE$, $PCTCC$; obténgase $\angle DAE \cong \angle BAE$.



3.



Trácese la figura con forma de Y en el centroide del triángulo de manera que (1) $AG = BG = CG$, (2) $m\angle AGB = m\angle BGC = m\angle AGC = 120^\circ$, (3) \overline{AG} no está sobre una altura. Completense la figura dibujando \overline{AX} , \overline{BY} y \overline{CZ} . $XAGCZ$, $YBGAX$ y $ZCGBY$ son pentágonos congruentes.

Solución de problemas

1. $\frac{1}{2}$. 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. 12.

páginas 290 y 291

1. 33.5. 3. 36. 5. 17.15.
7. 21. 9. 18.
11. $\angle DAP \cong \angle PAB$, bisectriz del ángulo;
 $\angle DPA \cong \angle PAB$, ángulos alternos internos.
13. Trácense las perpendiculares de D a \overline{AB} que se intersecan en E y de C a \overline{AB} que se intersecan en F ; $\triangle DEA \cong \triangle CFB$, HC ;
 $\angle DAB \cong \angle CBA$, sup. congruente;
 $\triangle DAB \cong \triangle CBA$, LAL .
15. Dibújese $DE \parallel CB$ con E sobre \overline{AB} ; $DEBC$ es un paralelogramo; $\overline{DE} \cong \overline{CB}$; $\overline{DE} \cong \overline{DA}$;
 $\angle A \cong \angle DEA$; $\angle DEA \angle B$, ángulos correspondientes; $\angle A \cong \angle B$, transitiva.

Solución de problemas

- 1a.
1b.
1c.
2.

páginas 294 y 295

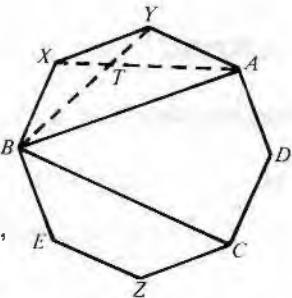
1. 8. 3. $x - 2$. 5. 1800° . 7. 6120° .
9. $(p - 2)180^\circ$. 11. 13. 13. 12.

15. 21. 17. 140° . 19. 156° .

21. 176.4° . 23. $45^\circ, 30^\circ$. 25. 5.10.

27. $60^\circ + 128\frac{4}{7}^\circ + 171\frac{3}{7}^\circ = 360^\circ$.

29. Trácense \overline{XA} e \overline{YB} con intersección en T ;
 $\triangle XYB \cong \triangle YXA$, LAL ; $\overline{XA} = \overline{YB}$, $PCTCC$;
 $\triangle XAB \cong \triangle YBA$, LLL ;
 $\angle XAB \cong \angle YBA$, $PCTCC$; $\overline{TB} \cong \overline{TA}$, lados opuestos de ángulos congruentes; $\triangle TXY \cong \triangle TYX$, resta; $\triangle BTA$ y $\triangle XTY$ son isósceles; $\angle TXY \cong \angle TYX$, $\angle TBA \cong \angle TAB$, ángulos base; $\angle XTY \cong \angle ATB$, ángulos verticales; $\angle TXY \cong \angle TAB$, suma de ángulos del triángulo, resta; $\overline{XY} \parallel \overline{BA}$; $\angle XBA$ es suplemento de $\angle BXY$, teorema 5.9; $m\angle BXY = 135^\circ$, octágono regular; $m\angle XBA = 45^\circ$; $m\angle EBC = 45^\circ$ (mismo modelo que el anterior); $m\angle ABC = 135^\circ - 2(45^\circ) = 45^\circ$.



Solución de problemas

1. 56. 2. 50.

página 297 Capítulo 8 Resumen

- 1a.** Falso. **1b.** Falso. **1c.** Verdadero.
1d. Falso. **2.** 40.
3. $\overline{DA} \cong \overline{CB}$; $\overline{EF} \cong \overline{CB}$; $\overline{DA} \parallel \overline{CB}$; $\overline{EF} \parallel \overline{CB}$;
 úsese el teorema 8.5.
4. $m\angle 3 = m\angle 1 = 60^\circ$; $\angle 4 \cong \angle ADE$;
 $m\angle 4 = \frac{(180^\circ - 60^\circ)}{2} = 60^\circ$; $\angle A \cong \angle B$.
5. $\angle 3 \cong \angle 1$, ángulos correspondientes;
 $\angle 4 \cong \angle 3$, transitiva.
6. $EFGH$ es un paralelogramo por el teorema
 8.7; $m\angle EHG = 100^\circ$; $m\angle EFG = 100^\circ$.
7. 20. **8.** 150. **9.** 100° . **10.** 6.5.

página 299 Repaso de álgebra

- 1.** 4. **3.** 7. **5.** 12. **7.** 9. **9.** ± 3 .
11. $(0, -5)$. **13.** $(-\frac{3}{2}, 2)$. **15.** $(-3, 3)$.
17. $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$. **18.** 81. **21.** 7.
23. -2 . **25.** $-2, 5$. **27.** 5. **29.** 4, -3 .
31. 36° , 54° , 90° .

CAPITULO 9**páginas 306 y 307**

- 1a.** Teorema 9.4. **1b.** Teorema 9.2.

1c. Teorema 9.3. **3a.** $\frac{3}{2} - \frac{6}{4}$.

3b. $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$. **3c.** $\frac{2}{3} = \frac{XY}{MN}$.

3d. $\frac{AB}{EF} = \frac{GH}{CD}$.

5a. Si $ad \neq bc$, entonces $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.

7. \$70. **9.** 67.5, 112.5.

11. $12\frac{1}{2} \times 17\frac{1}{2}$. **13.** 3, 5.

Solución de problemas

- 1.** 128 pies NS, 133 pies EW.
2. NS: $\frac{32 \text{ pies}}{19 \text{ mm}} = \frac{x \text{ pies}}{76 \text{ mm}}$; EW: $\frac{32 \text{ pies}}{19 \text{ mm}} = \frac{y \text{ pies}}{79 \text{ mm}}$.
3. Aproximadamente \$7000.

páginas 310 y 311

- 1a.** Verdadero. **1b.** Verdadero.
1c. Verdadero. **1d.** Falso. **1e.** Verdadero.
1f. Falso. **3.** $2\frac{2}{3}$. **5.** 2.4. **7.** 10.
9. Teorema 9.6. **11.** 6, 24. **13.** 42 cm.
15. $7\frac{1}{5}$, $10\frac{4}{5}$.
Solución de problemas $\frac{12}{5}$, $\frac{18}{5}$.

páginas 314 y 315

- 1.** Sí. **3.** No.
5. $\angle I \cong \angle I'$, $\angle J \cong \angle J'$, $\angle H \cong \angle H'$.
7. $6\frac{6}{7}$, $10\frac{2}{7}$.
9. $\angle A \cong \angle A$, $\angle ADE \cong \angle B$, $\angle AED \cong \angle C$;
 úsese la definición de polígonos semejantes.
11. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$; $\angle ADE \cong \angle ABC$,
 $\angle AED \cong \angle ACB$, $\angle A \cong \angle A$.
13. Hágase la hipotenusa de 2 unidades de
 largo.
15. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, AA; $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$;
 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$; $\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$;
 $1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$; $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$.
Solución de problemas 13, 4s + 1, 41.

páginas 318 a 321

- 1.** $\triangle XYZ$. **3.** $\triangle YZX$.
5. Cada uno contiene dos pares de ángulos
 congruentes.
7. 10. **9.** $3\frac{3}{8}$.
11. No, ángulos agudos diferentes.
13. Sí, AAA.
15. $\angle ALB \cong \angle A'LB'$. $\angle B' \cong \angle B$.
17. $\angle 3 \cong \angle 4$, ángulos verticales;
 $\triangle ABC \sim \triangle EDC$, teorema 9.8.
19. $\triangle AED \cong \triangle CEB$, ángulos verticales $\angle EBC$
 $\cong \angle EDA$, ángulos alternos internos; AA.

21. $\angle B \cong \angle E$, $m\angle BGA = m\angle EHD = 90^\circ$, $\angle BGA \cong \angle EHD$; $\triangle BGA \sim \triangle EHD$. AA; úsese la definición de triángulos semejantes.
23. Fórmense paralelogramos; $\angle E \cong \angle LEH$, ángulos opuestos; $\angle A \cong \angle HNY$, AA.
- 25a. $\angle R \cong \angle R$; $\angle S \cong \angle RUS$; AA.
- 25b. $\overline{RS} \parallel \overline{UV}$, $\angle R \cong \angle VUT$, $\angle 1 \cong \angle 2$; AA.
27. $m\angle BAD = m\angle FEH$, mitades de ángulos iguales; $\triangle ABD \sim \triangle EFH$, AA.
29. Trácese \overline{BG} intersecando a \overline{CF} en H ; úsese el teorema fundamental de la proporcionalidad $\frac{BC}{CD} = \frac{BH}{HG}$ y $\frac{BH}{HG} = \frac{EF}{FG}$; úsese la propiedad transitiva.
31. $\triangle AFC \sim \triangle AEB$, $\triangle BDA \sim \triangle BFC$, $\triangle CDA \sim \triangle CEB$; $\frac{AF}{AE} = \frac{FC}{EB}$, $\frac{BD}{BF} = \frac{DA}{FC}$, y $\frac{CE}{CD} = \frac{EB}{DA}$; $\frac{AF}{AE} \cdot \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CE}{CD} = \frac{FC}{EB} \cdot \frac{DA}{FC} \cdot \frac{EB}{DA} = 1$.
33. $\triangle ACB \sim \triangle ABD$, AA; $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$.

Solución de problemas

1. $\frac{x}{20} = \frac{AB}{A'B'}$; $A'B' = \frac{20AB}{x}$.

2. Se duplica $A'B'$.

páginas 324 y 325

1. 6. 3. $2\sqrt{5}$. 5. AD y DB .
 7. AB y AD . 9. 6. 11. 16. 13. 15.
 15. $\frac{60}{13}$ 17. 2.
 19. $EG = 12$; $HE = 6\sqrt{5}$; $72\sqrt{5}$. 21. $\frac{7}{5}$
 23. En $\triangle CDA$, $BD^2 = BC \cdot BA$, $BD = \sqrt{BC \cdot BA}$. En $\triangle ADE$, $DF^2 = AF \cdot FE$, $DF = \sqrt{AF \cdot FE}$; $BD \cdot DF = \sqrt{BC \cdot BA \cdot AF \cdot FE}$.
 25. $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AC}$; $\frac{BC + AB}{AB} = \frac{AB + AC}{AC}$, $\frac{AC}{AB} = \frac{AC + CD}{AC}$.
 $\frac{AB}{AC} = \frac{AC + CD}{AC}$.

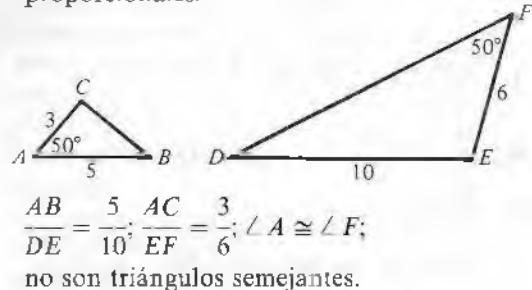
Solución de problemas

$AF + CX = \frac{AF}{CX} \cdot CX + XB = \frac{CX}{XB}$;
 $AF^2 = AF \cdot CX + CX^2$; $CX^2 = CX \cdot XB + XB^2$, $CX^2 = AF \cdot CX$, sumar; $2CX^2 = 2AF \cdot XB$. Usese el teorema de Pitágoras, $2CX^2 = EX^2$, $2AF^2 = AE^2$, $2XS^2 = XY^2$, $AE^2 \cdot XY^2 = 2AF^2 \cdot 2XB^2 = 4AF^2 \cdot XB^2$ o $AE \cdot XY = 2AF \cdot XB$, $EX^2 = AE \cdot XY$, sustitución.

páginas 328 y 329

1. Sí, LLL. 3. No. 5. $\frac{4}{7}$
 7. $\angle DOC \cong \angle AOB$, ángulos verticales; $\angle CAB \cong \angle DCA$, ángulos alternos interiores; AA.
 9. $\frac{JK}{NM} = \frac{KL}{MP} = \frac{\frac{1}{2}KL}{\frac{1}{2}MP} = \frac{KI}{MO}$, / $K \cong L$; $\triangle KJI \sim \triangle MNO$, LAL semejanza; partes proporcionales.

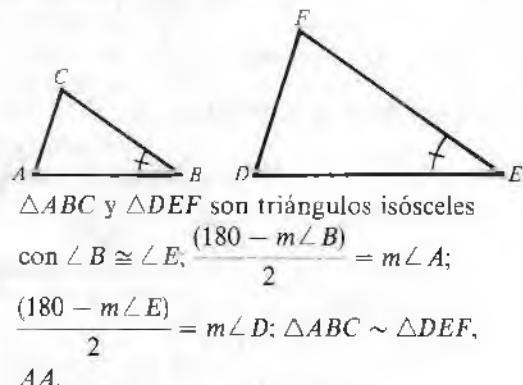
11.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{5}{10}; \frac{AC}{EF} = \frac{3}{6}; \angle A \cong \angle F;$$

no son triángulos semejantes.

13.



$\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son triángulos isósceles con $\angle B \cong \angle E$, $\frac{(180 - m\angle B)}{2} = m\angle A$; $\frac{(180 - m\angle E)}{2} = m\angle D$; $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, AA.

Solución de problemas Algunas respuestas posibles son: pentágono $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$;

estrella con los puntos $ABCDE \sim$ estrella con los puntos $A'B'C'D'E'$; triángulo obtusángulo, $AA'B \sim A'BB'B'$; triángulo acutángulo, $AE'B \sim A'A''B'$; triángulo isósceles, $AE'A' \sim A'A''B''$, $AEB \sim A'E'B'$, $C'CD \sim C'D'D'$; rombo, $ABC'E \sim E'A'C'D'$; trapecio isósceles, $ABC'D' \sim E'A'C'D''$, $ABCE \sim A'B'C'E'$.

páginas 332 y 333

1. $\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}$ 3. 0.2924. 5. 0.3839.
 7. 0.7002. 9. 37° . 11. 17° . 13. 4° .
 15. $10 \operatorname{sen} 40^\circ = 6.4$. 17. $25, 24, \frac{24}{7}$
 19. $53^\circ, 37^\circ$. 21. 35.7 m. 23. 0.42 cm.

Solución de problemas $\tan 40^\circ = \frac{DC}{200 + BC}$,
 $\tan 60^\circ = \frac{DC}{BC}$; 325.5 m.

página 335

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. $\sqrt{3}$. 5. $\frac{1}{2}$.
 9. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ó $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 11. $\sqrt{3}$. 13. 30° .
 15. $2 \operatorname{sen} 30^\circ = 2(\frac{1}{2}) = 1$;
 $2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 $\operatorname{sen}(2 \cdot 30^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 $2 \operatorname{sen} A \cos A = \operatorname{sen} 2A$.
 17. $\tan 2(30^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$; $2 \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;
 $\frac{2 \tan 30}{1 - (\tan 30)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$;
 $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - (\tan A)^2}$.

19. $\frac{50\sqrt{3}}{3}$. 21. $4\sqrt{3}$.

página 337 Capítulo 9 Resumen

- 1a. Verdadero. 1b. Verdadero.
 1c. Falso. 1d. Verdadero. 1e. Verdadero.
 2a. $12\frac{1}{2}$. 2b. $3\frac{3}{5}$. 2c. $2\frac{4}{7}$. 2d. 6.
 3. $\triangle ABC \sim \triangle DCE$, AA; $\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CE}$.
 4a. $\frac{16}{3}$. 4b. 9. 4c. 9.
 5a. $\frac{8}{15}$. 5b. $\frac{40}{41}$. 5c. $\frac{4}{5}$.
 6. 67.5 pies.
 7a. $\angle EDF \cong \angle ECB$, teorema 5.8; AA.
 7b. $\angle EFD \cong \angle BFA$, ángulos verticales;
 $\angle DEF \cong \angle ABF$, teorema 5.7; AA.
 7c. $\angle A \cong \angle C$, ángulos opuestos;
 $\angle CEB \cong \angle ABF$; AA.

página 339 Técnicas para la solución de problemas

- 1a. Recto. 1b. Sí. 1c. DF .
 1d. $EF = CF$, $AF = 6$.
 2. $EF = 4.2$. 3b. 90.
 3c. $m\angle C = 90^\circ$,
 $m\angle 2 + m\angle 4 = 90^\circ$, $m\angle 1 + m\angle 3 = 90^\circ$;
 $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 180^\circ$;
 $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle DEF = 180^\circ$,
 $m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle GFE = 180^\circ$, sumar;
 $180^\circ + m\angle DEF + m\angle GFE = 360^\circ$; $\angle DEF$ y $\angle GFE$ son suplementarios.

CAPÍTULO 10

páginas 344 y 345

1. \overline{AE} , \overline{AD} , \overline{BC} , \overline{BE} . 3. \widehat{AE} , \widehat{BC} , \widehat{CD} , \widehat{AB} .
 11. $\angle CAD$, $\angle ACD$, $\angle CDA$, $\angle CDB$, $\angle ADB$.
 13. $\angle AOB$, $\angle BOF$, $\angle FOE$, $\angle EOB$, $\angle AOF$.
 21. El arco más corto es la circunferencia máxima.

Solución de problemas

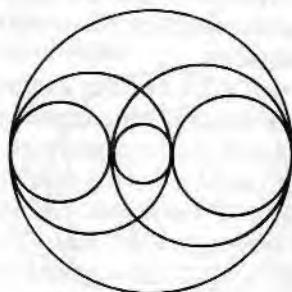
3. Son los mismos que los de la lista del número 1.

páginas 348 y 349

1. Sí, no. 3a. 90. 3b. 150. 3c. 270.
- 3d. 210. 5a. 70. 5b. 50. 5c. 310.
7. $\overarc{AB} \cong \overarc{EF}$, $\overarc{BC} \cong \overarc{FG}$, $\overarc{CD} \cong \overarc{DE}$.
9. $\overarc{AB} \cong \overarc{CD}$, $\overarc{AC} \cong \overarc{BD}$. 11. Sí.
13. Fórmense triángulos congruentes, *LLL*; ángulos centrales congruentes; definición de arco menor.
15. $m\widehat{EA} + m\widehat{AS} = m\widehat{AS} + m\widehat{SY}$; $m\widehat{EA} = m\widehat{SY}$.
17. $m\widehat{ACB} \cong m\widehat{DAC}$;
 $m\widehat{DA} + m\widehat{AC} = m\widehat{BC} + m\widehat{AC}$;
 $m\widehat{DA} = m\widehat{BC}$; $DA = BC$, teorema 10.2;
 $m\widehat{ACB} = m\widehat{DBC}$;
 $m\widehat{AC} + m\widehat{CB} = m\widehat{DB} + m\widehat{BC}$;
 $m\widehat{AC} = m\widehat{DB}$; $AC = DB$, teorema 10.2;
úse el teorema 8.4.
19. $\triangle SOR$ es isósceles, $\angle 1 \cong \angle 3$, $\angle 3 \cong \angle 4$, $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 4 \cong \angle 2$, transitiva.

Solución de problemas

2. Cuatro.



3. Prolónguese el segmento que une los centros de C_1 y C_2 hasta el punto más lejano de cada círculo. Biséquese el segmento. Use el centro como un nuevo radio.

páginas 352 y 353

1. 3, teorema 10.3.
3. $\overline{OM} \cong \overline{ON}$, teorema 10.3; $\frac{(180 - 150)}{2} = 15$.
5. Teorema 10.4.
7. $\overline{OX} \cong \overline{OY}$, lados opuestos de ángulos congruentes; teorema 10.4.
9. Teorema 10.3.

11. $\triangle XOZ \cong \triangle YOZ$, HA ; $\overline{OX} \cong \overline{OY}$, *PCTCC*; teorema 10.4.

Solución de problemas Use la figura de la página 533; cuerdas iguales son equidistantes del centro; trácese un segmento perpendicular desde el centro a cada cuerda; el segmento perpendicular interseca a la cuerda en su punto medio; empléense los triángulos congruentes para demostrar que los segmentos perpendiculares son radios iguales; radios iguales determinan un círculo.

páginas 356 a 359

3. $m\widehat{AC} = m\widehat{CB}$, teorema 10.6.
5. Teorema 10.6.
7. Teorema 10.5. 9. 5. 11. 3 cm.
13. $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, teorema 10.7;
 $AO^2 = AM^2 + OM^2$; 8.
15. 2.
17. $OB = 4$; x = distancia; $4 = x\sqrt{2}$; $x = 2\sqrt{2}$.
19. Trácense dos cuerdas del arco; constrúyanse bisectrices perpendiculares para cada cuerda; la intersección da el centro.
21. $\overline{AB} \perp \overline{XY}$, $\overline{CD} \perp \overline{XY}$, teorema 10.7; dos rectas perpendiculares a la misma recta son paralelas.
23. Encuéntrese la distancia de O a \overline{AB} , $x^2 = 10^2 - 8^2$, $x = 6$; la distancia de F al punto medio \overline{CD} también es 6; 15.
25. $\angle MOQ \cong \angle MOP$; arcos congruentes tienen ángulos centrales congruentes.
27. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, teorema 10.2; $\overline{OA} \cong \overline{OB}$; úse el teorema 6.10.

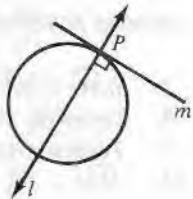
Solución de problemas $DC = AC$, $DB = AB$; *LLL*.**páginas 362 y 363**

3. 39.
5. $\overline{PB} \perp \overline{OB}$, $\overline{PA} \perp \overline{OA}$, teorema 10.9;
 $\overline{PA} \parallel \overline{BO}$, $\overline{PB} \parallel \overline{AO}$, teorema 5.4;
 $AOPB$ es un paralelogramo; $OA = OB = 4$;

lados opuestos congruentes;

$\angle P$ es un ángulo recto.

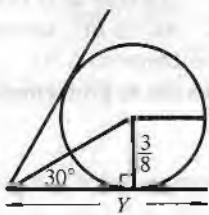
7. $\overline{OA} \perp \overline{AP}$, $\overline{OB} \perp \overline{BP}$; teorema 10.9;
 $\triangle OAP \cong \triangle OBP$, HC; PCTCC.
9. $\triangle PAO \cong \triangle PBO$, HC; $\overline{PA} \cong \overline{PB}$; $\overline{AO} \cong \overline{OB}$; teorema 6.10.
11. Trácese \overline{OB} ; $2m\angle OCB + m\angle COB = 180$,
 $2m\angle AOP + m\angle COB = 180$;
 $\angle AOP \cong \angle OCB$; teorema 5.1.
13. $\ell \perp m$ en P , dado;
supóngase que ℓ no contiene al centro del círculo; trácese el radio del centro O al punto P ; $\overline{OP} \perp m$, teorema 10.9; hay exactamente una recta que pasa por P perpendicular a m , la recta ℓ contiene al centro del círculo.



Solución de problemas Unase D con el punto de tangencia sobre \overline{BC} ; muéstrese que los tres triángulos son congruentes por HC.

páginas 366 y 367

1. 5 cm. 3. 10 cm. 5. 20.
7. Denóminese x a la distancia de A al círculo; y a la distancia de B al círculo; z a la distancia de C al círculo; $x + y = 6$; $x + z = 10$; $y + z = 8$; $y = 2$, $OX = 2$.
9. E es el punto de intersección de \overline{AB} y \overline{CD} ; $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ y $\overline{BE} \cong \overline{CE}$, $AE + BE = ED + CE$.
11. $Y = \frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{3}{8} \doteq 1.025$.
 $X = 2Y + 3$.
 $X \doteq 5.05$.



Solución de problemas Trácese una recta perpendicular de A a ℓ que interseque a ℓ en D ;

$\triangle ADB$ es un triángulo 30-60-90 con $AB = \frac{d}{2}\sqrt{3}$.

páginas 370 a 373

1. 25. 3. 65.
5. $m\angle A = 80$, $m\angle B = 55$, $m\angle C = 45$.
7. 100, 120, 140. 9. 80. 13. 40.
15. 10. 17. 120. 19. 87.
- 21a. 50. 21b. 40. 21c. 50. 21d. 80.
23. $\angle AEB$ y $\angle CED$, vertical; $\angle ABE$ y $\angle ECD$ interceptan al mismo arco; $\angle BAE$ y $\angle EDC$ interceptan al mismo arco.
25. $m\angle E = m\angle D = 90$; $\angle ABE \cong \angle CBD$, ángulos verticales.
27. Trácese un segmento de P al centro del círculo dado; biséquese el segmento; úsese la mitad de este segmento como radio, úsese el centro como punto medio del segmento, constrúyase el círculo; los puntos de intersección con el círculo dado son puntos de tangencia.
29. Suma de los arcos interceptados por vértices opuestos $= 360^\circ$; $\frac{1}{2} \cdot 360 = 180$.
31. Los ángulos opuestos son congruentes y suplementarios.
33. $\angle CAD \cong \angle ADB$. ángulos alternos interiores; ángulos congruentes inscritos interceptan a arcos congruentes.
35. $\widehat{AD} \cong \widehat{BC}$; $m\widehat{DA} + m\widehat{AB} + m\widehat{BC} + m\widehat{CD} = 360$; $\angle ADC$ intercepta \widehat{AB} más \widehat{BC} , $\angle DAB$ intercepta a \widehat{BC} más \widehat{CD} ; $m\angle ADC + m\angle DAB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{BC} + m\widehat{BC} + m\widehat{CD}) = 180$; $\angle ADC$ y $\angle DAB$ son suplementarios; $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Solución de problemas MP del círculo Q es congruente con MN del círculo O ; $m\widehat{MP} = m\widehat{MN} = t$; $\angle MAP$ es un ángulo inscrito, así que $m\angle MAP = \frac{1}{2}t$, teorema 10.12.

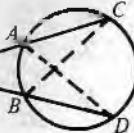
páginas 376 y 377

1. 25. 3. 60. 5. 55, 110.
7. 55, 55, 75, 50, 20.
9. O es la intersección de \overline{AB} y \overline{CD} ;
 $m\angle AOD = \frac{1}{2}(m\widehat{AD} + m\widehat{BC})$;
 $m\angle AOC = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BD})$.
11. $90 = \frac{1}{2}(m\widehat{AE} + m\widehat{CD})$, $90 = \frac{1}{2}(m\widehat{AE} + m\widehat{BC})$, $m\widehat{AE} + m\widehat{CD} = m\widehat{AE} + m\widehat{BC}$.

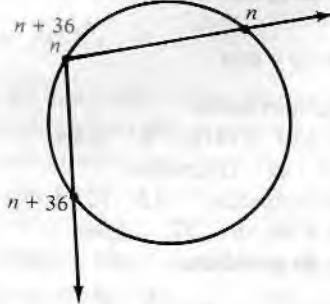
Solución de problemas 36, 60, 84, 108, 132.

páginas 382 a 385

1. 120. 3. $22\frac{1}{2}$. 5. 20. 7. 3.
 9. 8. 11. 23. 13. 30. 15. 85.
 17. 30. 19. 110, 100.
 21. $6^2 = x(x + 9)$; $x = 3$; $6^2 = 4(4 + y)$; $y = 5$.
 23. 40. 25. 20. 27. 70.
 29. No, $\angle 1$ y $\angle 2$ no son suplementarios.
 31. 7, 8.
 33. Sea X el punto de intersección de \overline{AB} y ℓ_2 ; los ángulos verticales en X son congruentes; los arcos mayores son congruentes; los ángulos alternos interiores son congruentes.
 35. $m\angle 3 = \frac{1}{2}y$; $m\angle 2 = \frac{1}{2}x$; $m\angle P + m\angle 2 = m\angle 3$, ángulo externo; $m\angle P = \frac{1}{2}(x - y)$.
 37. $\angle PCB \cong \angle PDA$; los ángulos inscritos interceptan a \overline{AB} : $\triangle PCB \sim \triangle PDA$, AA;
 $\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC}$; $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.



Solución de problemas



Se traza un rayo a partir de cada n roja a través de la n negra para cada entero 0, 1, 2, ..., 71. Dado que los numerales rojos mantienen un espacio de 10° , un numeral rojo n , $0 \leq n \leq 35$, y una n roja + 36 designan al mismo punto. ¿Qué relación existe entre los números n negros y los $n + 36$? El punto con n negra + 36 está 180° alrededor del círculo a partir del punto n . El resultado se desprende del teorema 10.13.

página 387 Capítulo 10 Resumen

1. Verdadero. 2. Falso. 3. Falso.
 4. Verdadero.

- 5a. 60. 5b. 30. 5c. 75. 5d. 90.
 6. Trácese \overline{AC} ; $\angle BAC \cong \angle DCA$, arcos menores congruentes; ángulos alternos interiores.
 7a. 20. 7b. 110. 7c. 40. 7d. 70. 7e. 20.
 8a. 4. 8b. 24. 9. 17 cm.
 10. $\sqrt{51}, 12$.

página 389 Resumen global Capítulos 8 a 10

- 1a. Verdadero. 1b. Falso.
 1c. Verdadero. 1d. Falso.
 2a. $4\sqrt{2}$. 2b. 4 ó 9. 2c. $\frac{144}{13}$. 2d. AA.
 3. 144. 4a. 100. 4b. 50. 4c. 30. 4d. 80.
 5. $\triangle ANB \sim \triangle CND$, AA; $\frac{NA}{NC} = \frac{NB}{ND}$.
 6. 40.
 7. $AB = \frac{1}{2}MP$, $DC = \frac{1}{2}MP$, $BC = \frac{1}{2}QN$, $AD = \frac{1}{2}QN$.

Teorema del segmento medio; $DC = AB$, $AD = BC$; $ABCD$ es un paralelogramo. lados opuestos congruentes; $AB = AD = DC = BC$ dado que $MP = QN$.

CAPITULO 11

páginas 396 y 397

3. No. 5. Postulado del área.
 7. Triángulo con base 20, altura 7; rectángulo con longitud 10, ancho 7.
 9. 630. 11. 6. 13. 3. 15. $3\frac{1}{2}$. 17. 720.
 19. $2(32 \cdot 10\sqrt{2}/32) \cdot 1.1 = 31.1$; 32 hojas.
 21. $A(\triangle ACE) = A(\triangle AGE)$;
 $A(\triangle AHI) + A(HIFG) + A(\triangle FIE) = A(\triangle ABI) + A(BCDI) + A(\triangle IDE)$;
 $A(\triangle AHI) = A(\triangle ABI)$, $A(\triangle FIE) = A(\triangle IDE)$; restar.

Solución de problemas $\frac{9}{4}$, no.

páginas 400 y 401

1. 147. 3. $90\frac{3}{4}$. 5. 12.
 7. $14 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3} = 35\sqrt{3}$.

9. $12 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$. 11. $\frac{8}{3}$

13. Cuadruplicado. 15. Igual. 17. 13.

Solución de problemas 1. Sí. 2. No.

páginas 404 a 407

1. 429. 3. 264. 5. 425.
7. 198. 9. $512\frac{1}{2}$
11. 8.75. 13. 5 pies. 15. 12.5. 17. 30.
19. Sea h = distancia entre \overline{AB} y \overline{CD} ;
 $A(AECD) = \frac{1}{2}h(AE + DC)$;
 $A(EBCD) = \frac{1}{2}h(EB + DC)$; $AE = EB$.
21. $\triangle ABD$ y $\triangle BDC$ tienen la misma altura y bases iguales, \overline{AD} y \overline{CD} .
23. $A(ABCD) = (h_1 + h_2)AB$; $A(\triangle CDX) = \frac{1}{2}h_1AB$; $A(\triangle ABX) = \frac{1}{2}h_2AB$;
 $A(\triangle CDX + \triangle ABX) = \frac{1}{2}h_1AB + \frac{1}{2}h_2AB = \frac{1}{2}AB(h_1 + h_2)$.
25. $A(\triangle BAA') = A(\triangle CAA')$, tienen la misma altura y bases iguales; sea H el centroide de $\triangle ABC$; $A(\triangle BHA') = A(\triangle CHA')$;
 $A(\triangle AHB) = A(\triangle AHC)$, resta;
 $A(\triangle BHC) = A(\triangle AHC) = A(\triangle AHB) = A(\triangle CHB')$;
repítase el procedimiento con
 $A(\triangle BAB') = A(\triangle CBB')$ como primer paso.
27. $A(ABCD) = \frac{1}{2}h(AB + DC)$; $A(\triangle ADE) = A(ABCD) + (A(\triangle DCE) + A(\triangle ABE))$;
trácense las perpendiculares de E a \overline{DC} y de E a \overline{AB} ; longitudes de estas alturas = $= \frac{1}{2}h$; $A(\triangle ADE) = \frac{1}{2}h(AB + DC) - (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}hDC + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}hAB) = \frac{1}{4}h(AB + DC)$;
 $\frac{1}{2}A(ABCD)$.
29. Usese el ejercicio 25; suma de áreas.

31. $x\sqrt{2} = 3 - 2x$; $x = \frac{3}{2 + \sqrt{2}}$

33. En el triángulo 30-60-90, $CG = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$$A(\triangle CFG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Solución de problemas

1. $\sqrt{2}$. 2. $\sqrt{3}$. 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4. $\sqrt{2}$. 5. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

páginas 410 y 411

1. 102. 3. 104. 5. 72. 7. $\frac{5\sqrt{3}}{3}, 25\sqrt{3}$.

9. 11, 484. 11. $20k$.

13. $20\sqrt{3}$ m, $50\sqrt{3}$ m².

15. $20\sqrt{3}$ pies, 5 pies.

17. 2, 96; 5, 225; 10, 400; 15, 525; 20, 600;
25, 625; encerrar un cuadrado.

Solución de problemas $10 + 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$;

$4 + 3\sqrt{5} + \sqrt{17}$;

$3\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$.

páginas 414 y 415

1. 1:2. 3. 13:20. 5. 3:4.

7. 200, 72; $25x + 9x = 272$.

9. $\frac{YZ}{BC} = \frac{1}{2}; \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

11. 2:1. 13. $\sqrt{288} = 17$.

Solución de problemas 1:16.

páginas 418 y 419

1. Circunferencia.

3. $3\frac{1}{4}, 3.14, 3.1416$. 5. 3, 6π .

7. 4, 8. 8. Diámetro.

11. 36π pulgadas². 13. $(32 + 4\pi)$ pies.

15. $(10 + 4\pi)$ m. 17. 6 pies.

Solución de problemas $AD^2 + OD^2 = AO^2$;

$$OD^2 = 1 - \frac{s^2}{4}; OD^2 = \frac{4}{4} - \frac{s^2}{4}, OD = \frac{\sqrt{4 - s^2}}{2};$$

$$CD = 1 - \frac{\sqrt{4 - s^2}}{2}; x^2 = CD^2 + AD^2;$$

$$x^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{4 - s^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2;$$

$$x^2 = 2 - \sqrt{4 - s^2}.$$

páginas 422 a 425

1. $4\pi, \frac{121}{4}\pi, \pi^3, 3\pi$.

3. $\pi, 9\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{25}{\pi}$. 5. 18π cm².

7. $\frac{25\pi}{24} \text{ cm}^2$. 9a. 3.93 cm^2 . 9b. 5.89 m^2 .

9c. 13.08 pulgadas^2 . 11. $16:25$.

13. $2\sqrt{2}:\sqrt{5}$. 15. $9 - \frac{9}{4}\pi$.

17. $9 - \frac{9}{4}\pi$. 19. $12\pi - 9\sqrt{3}$.

21. 21.5% ; $\frac{(9 - \frac{9}{4}\pi)}{9}$.

23. $\frac{1}{2}\pi(\frac{3}{2}AB)^2 - \frac{1}{2}\pi AB^2 + \frac{1}{2}(\pi(\frac{1}{2}AB)^2) = \frac{3}{4}\pi AB^2$
sombreada; la fracción del círculo es $\frac{1}{3}$.

25. Teorema de Pitágoras, $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{\pi}{8}(c^2) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$.

27. $A_1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{BC}{2}\right)^2$,
 $A_1 = \frac{\pi((AC + BC)^2 - AC^2 - BC^2)}{8}$,

$A_1 = \frac{\pi AC \cdot BC}{4}$; $A_2 = \pi\left(\frac{CD}{2}\right)^2$,

$CD^2 = AC \cdot BC$, $A_2 = \frac{\pi AC \cdot BC}{4}$.

29. Área del cuadrado — área de cuatro cuartos de círculo — área del círculo pequeño = área sombreada; sea $2x$ = longitud de un lado del cuadrado; dibújese un triángulo 30-60-90 con vértice en el centro y longitudes x , x , $x\sqrt{2}$; radio del círculo pequeño = $x\sqrt{2} - x$; $(2x)^2 - \pi x^2 - \pi(x\sqrt{2} - x)^2 = 4x^2 - 4\pi x^2 + 2\pi x^2\sqrt{2}$; razón del área sombreada con el área del círculo = $\frac{4}{\pi} - 4 + 2\sqrt{2}$ ó 10% .

Solución de problemas $\frac{1}{1}$

página 427 Capítulo 11 Resumen

1a. $5\sqrt{2}$. 1b. 40. 1c. $5\sqrt{119}$. 1d. 50.

2a. 3. 2b. $\frac{27}{4}$. 3. 2:1. 4. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.

5. \overline{AD} .

6. Triángulo 30-60-90, $OB = 2$, $OA = 1$, $BA = \sqrt{3}$, $\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi - 3\sqrt{3}$.
7. 1:4. 8. 4π .

página 429 Repaso de álgebra

1. 24 cm^2 . 3. 87.92 cm .
5. $3658.7\pi \text{ cm}^3$ ó $11\,488.2 \text{ cm}^3$.
7. $h = 3.6 \text{ cm}$.
9. $A = 58.5\pi \text{ pulgadas}^2$ ó $183.69 \text{ pulgadas}^2$.
11. $-2, 3$. 13. -2 . 15. $-3, -2$.
17. $10, -9$. 19. $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$. 21. $2, 3$.
23. 7900 yardas^2 . 25. 93.75 cm^2 .
27. 486 mm^2 . 29. 2 m .

CAPITULO 12

páginas 436 a 439

1. b. 3. \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{AE} .
5. $\triangle FBC$, $\triangle FAB$, $\triangle FAE$, $\triangle FDE$, $\triangle FDC$.
7. \overline{EF} , \overline{HG} , \overline{IJ} , \overline{LK} , \overline{AB} , \overline{DC} .
9. Misma.
11. $EFGH$, \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CG} , \overline{DH} .
13. $ADHE$. 15. 5. 17. 6.
19. \overline{BH} , \overline{AG} , \overline{CE} , \overline{DF} .
23. $15^2 + 8^2 = 289 = 17^2$. 25. $2\sqrt{33}$.
27. $5\sqrt{3}$. 29. 6.
31. \overline{AF} , \overline{FC} y \overline{AC} son diagonales congruentes y forman la base de un triángulo equilátero; \overline{FB} , \overline{CB} y \overline{AB} son aristas congruentes y forman aristas laterales congruentes.
33. 8; $BDEA$, $ACFB$, $BDGC$, $ACHD$, $AFHE$, $BEGF$, $CFHG$, $DEGH$.
35. Las diagonales del paralelogramo $AHGB$ se bisecan entre sí.
37. En el paralelogramo $ABGH$, O es el punto medio de \overline{AG} y \overline{BH} (Ejercicio 35); en el paralelogramo $ACGE$, las diagonales \overline{AG} y \overline{CE} se intersecan en el punto medio; el punto medio de \overline{AG} es O .
39. Sea E la esquina interior; $CABE$ y $ABDE$ son paralelogramos, definición; $CE = ED = 9\sqrt{2}$, lados opuestos congruentes; sumar.

Solución de problemas Método 1, 32; Método 2, $\sqrt{544} \approx 23.3$.

páginas 442 y 443

1. c. 3. 24. 5. 120. 7. $12 + 2\sqrt{3}$.

9. $72\sqrt{3} + \frac{81}{2}\sqrt{3} = 112.5\sqrt{3}$.

11. 6 cm, 12 cm.

13. Determíñese la arista, $x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = c^2$,

$$c^2 = \frac{5}{4}x^2; \frac{5}{4}x^2 + (2\sqrt{2})^2 = \text{altura}^2;$$

$$\text{altura} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

15. Cada molde necesita 880 cm^2 ,

$$880 \text{ cm}^2 \times \frac{1 \text{ m}^2}{10000 \text{ cm}^2} = 0.088 \text{ m}^2,$$

$$\frac{100 \text{ m}^2 \cdot x \text{ moldes}}{0.088 \text{ m}^2} = 1136 \text{ moldes.}$$

Solución de problemas

1. Muévase el cubo de arriba de la derecha un espacio hacia adentro.

2. Muévase el cubo inferior delantero de la esquina hacia arriba y hacia atrás.

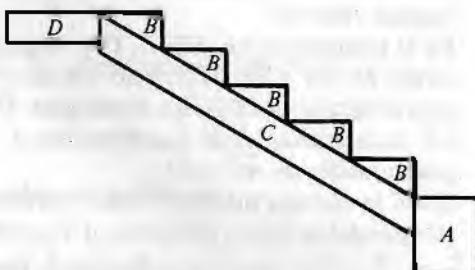
páginas 446 y 447

1. 24 cm^3 . 3. 64.6 cm^3 . 5. 2 cubos.

7. 42 cubos. 9. 60. 11. $432\sqrt{3}$.

13. Ocho veces. 15. 102 cm^3 . 17. 5 pies.

19. $\frac{1}{2}(8 \text{ pies})(30 \text{ pies} + 14 \text{ pies}) \times 620 \text{ pies} \times \frac{1 \text{ yarda}^3}{27 \text{ pies}^3} \times \frac{\$1.50}{\text{yardas}^3} = \6062.22 ;
 $\$6062.22 \times 1.1 = \6668.44 .

Solución de problemas

A. $1' \times 4'7\frac{1}{2}'' \times 4\frac{1}{2}' = 1 \times \frac{37}{8} \times \frac{9}{2} = \frac{333}{16} = 20.81 \text{ pies}^3$.

B. $\frac{1}{2} \times 5 \times 1' \times \frac{9'}{2} \times \frac{15'}{24} = \frac{225}{32} = 7.03 \text{ pies}^3$.

C. $5\frac{11}{12}' \times \frac{1'}{2} \times \frac{9'}{2} = \frac{71}{12} \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{213}{16} = 13.31 \text{ pies}^3$.

D. $\frac{1'}{3} \times \frac{5'}{2} \times \frac{9'}{2} = \frac{45}{12} = 3.75 \text{ pies}^3$.

$$20.81 + 7.03 + 13.31 + 3.75 = 44.90 \text{ pies}^3$$

$$44.90 \div 27 = 1.66 \text{ yardas}^3$$

páginas 450 y 451

1. Verdadero. 3. Falso. 5. Falso.

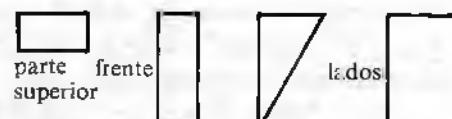
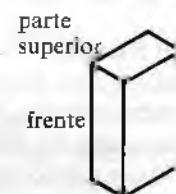
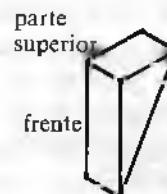
7. $26\frac{2}{3}$ 9. $4583\frac{1}{3}$

11. $3456\sqrt{3}$. 13. 9:4.

15. $\frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 5 = 129$.

17. $40^2 = 8^2 + h^2; h = \sqrt{1536}; V = 2\sqrt{1536}$;

$$2\sqrt{1536} \text{ m}^3 \times \frac{1000\ell}{1 \text{ m}^3} \times \frac{1 \text{ min}}{50\ell} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \approx 26.1 \text{ h.}$$

Solución de problemas**páginas 454 y 455**

1. 768π unidades cuadradas, 2880π unidades cúbicas.

3. 300π unidades cuadradas, 625π unidades cúbicas.

5. $\frac{1700\pi}{27} \approx 197.8 \text{ yardas}^3$. 7. 5.1 cm.

9. $512 - 128\pi$ pulgadas³; $384 - 32\pi + 64\pi$ pulgadas².

11. r = radio de la lata; h = profundidad de la caja; volumen de las latas = $6\pi r^2 h$; volumen de la caja = $24r^2 h$; razón $4:\pi$.

Solución de problemas $\frac{54\pi}{16} + \frac{27}{32}$ pulgadas³;

$$\frac{228\pi}{16} + \frac{9}{8} + \frac{9\sqrt{5}}{8} \text{ pulgadas}^2.$$

Páginas 458 y 459

1. 320π ; 200π . 3. $\frac{25\pi\sqrt{119}}{3}$; 85π . 5. 6.
 7. $36\pi + 4\pi\sqrt{10}$ cm³.
 9. $8\pi\sqrt{113} + 16\pi\sqrt{165}$.
 11. 0.001 pulgadas³.
 13. $3:2; \frac{3\sqrt{13+9}}{2\sqrt{13+4}}$

Solución de problemas 1-4, 2-5, 3-3, 4-6, 5-1, 6-2.

Páginas 462 y 463

1. 972π cm³. 3. $\frac{32\pi^4}{3}$. 5. 3. 7. $\sqrt{2}$.
 9. $1800\pi + \frac{4000}{3}\pi$.
 11. 228π unidades cúbicas. 13. 3 pies.
 15. Sea r = radio de la esfera; sea $h = 2r$; área lateral = $2\pi rh = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2$.

17. 1:2.

Solución de problemas Volumen de la esfera = $= 972\pi$; determinese la altura del cilindro, $9^2 = 3^2 + h_1^2$,

$h_1 = 6\sqrt{2}$, altura = $12\sqrt{2}$;
 volumen del cilindro = $\pi \cdot 9 \cdot 12\sqrt{2} = 108\pi\sqrt{2}$;
 $h = 9 - 6\sqrt{2} \approx 0.515$;
 volumen del casquete = $\frac{1}{2}\pi \cdot 9(0.515) +$
 $+ \frac{1}{6}\pi(0.515)^3 \approx 7.35$; volumen del sólido = $= 972\pi - 108\pi\sqrt{2} - 2(7.35) \approx 2559$ cm³.

Páginas 466 y 467

1. Tetraedro regular; octaedro regular, icosaedro regular.
 3. Los «tejados» no se juntan.
 5. Tetraedro. 13. Sí. 15. Sí.
Solución de problemas 1. 12. 2. 30.
 3. 30. 4. 20.

Página 469 Capítulo 12 Resumen

1. $96 \text{ cm}^2; 64 \text{ cm}^3$. 2a. 156 cm^2 .
 2b. $72 + 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 3a. $\frac{200}{3} \text{ cm}^3$.
 3b. $32\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 4. $60\pi \text{ cm}^2$.
 5. $90\pi \text{ cm}^3$. 6. 8. 7. $36\pi \text{ cm}^3$.
 8. El volumen se duplica.
 9. 3 cm. 10. $400\pi \text{ cm}^2$.

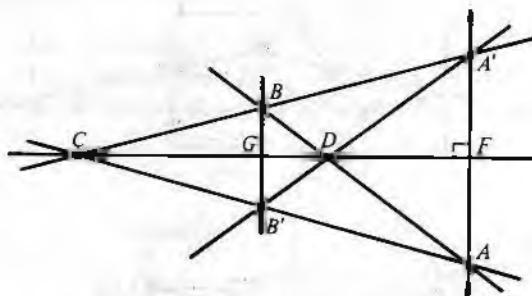
Página 471 Técnicas para la solución de problemas

1. 7 veces. 2. 5 veces. 3. $\frac{1}{3}$. 4. 23 min.

CAPÍTULO 13

Páginas 478 y 479

- 1a. A. 1b. D. 1c. I. 1d. G.
 15. Las diagonales de un rombo son bisectrices perpendiculares entre sí.
 17.



Trácese $\overrightarrow{A'A}$, \overrightarrow{AB} interseca a la recta de la base en D , $\overrightarrow{A'B}$ interseca a la recta de la base en C ; la intersección de \overrightarrow{AD} y \overrightarrow{AC} es

B' ; es necesario mostrar que B' es la reflexión de B sobre la recta de la base; $\triangle A'FD \cong \triangle AFD$, LAL; $\overline{A'D} \cong \overline{AD}$, $\angle FA'D \cong \angle FAD$, $\angle A'DF \cong \angle ADF$, PCTCC; $\angle BDF \cong \angle B'DF$, ángulos verticales y suma; $\triangle A'FC \cong \triangle AFC$, LAL; $\overline{A'C} \cong \overline{AC}$, PCTCC; $\angle FA'C \cong \angle FAC$, PCTCC; $\angle CA'D \cong \angle CAD$, resta de ángulos; $\triangle CAD \cong \triangle CAD$, LAL; $\angle A'CD = \angle ACD$, PCTCC; $\triangle BDA \cong \triangle B'DA$, ALA; $\overline{BD} \cong \overline{B'D}$, PCTCC; dado que $\angle BDF \cong \angle B'DF$, $\angle BDC \cong \angle B'DC$, $\triangle BDG \cong \triangle B'DG$, LAL; $\overline{BG} \cong \overline{B'G}$, PCTCC; $\angle BGD$ y $\angle B'GD$ son ángulos rectos, congruentes y supplementarios; $\overline{BG} \perp \overline{CF}$; B' es la reflexión de B sobre \overline{CF} .

19. Teorema 13.1a.

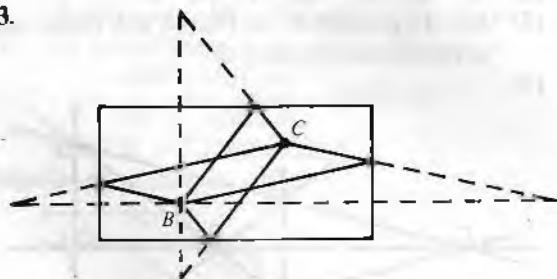
Solución de problemas

- La razón de que este mensaje parezca tan extraño es que se escribió usando un espejo.
- Nueve + uno + ocho = dieciocho.

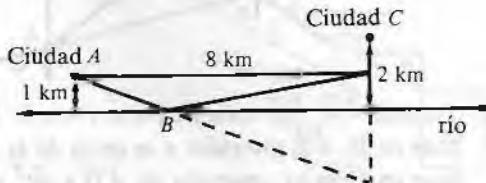
páginas 482 y 483

1. 31 103 134
 44 78 122
 61 59 120
 78 40 118
 99 22 121

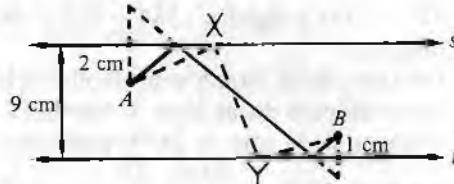
3.



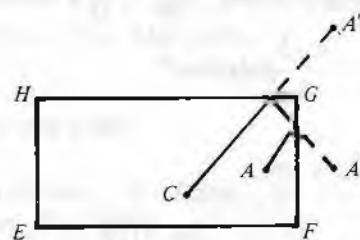
5.



7.



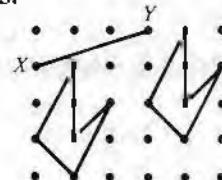
9.



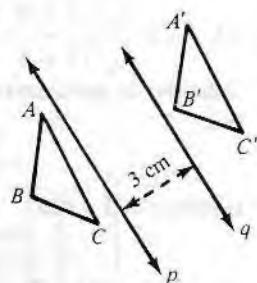
páginas 486 y 487

- 1a. F. 1b. H. 1c. G. 1d. E.

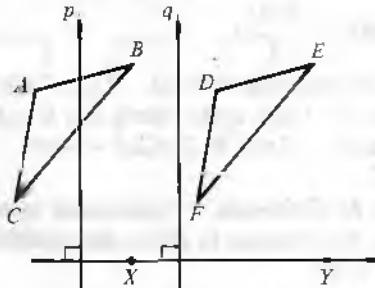
3.



5.



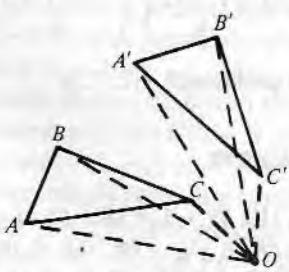
7.



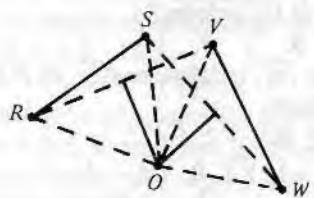
Solución de problemas La región formada por los cuadrados 1, 2 y 3 está sombreada en $\frac{1}{3}$ de su área. La región formada por los cuadrados 4, 5 y 6, está sombreada en $\frac{1}{3}$ de su área, etc. Por tanto, está sombreado $\frac{1}{3}$ del total de la región.

páginas 490 a 493

1. E. 3. H.
7.

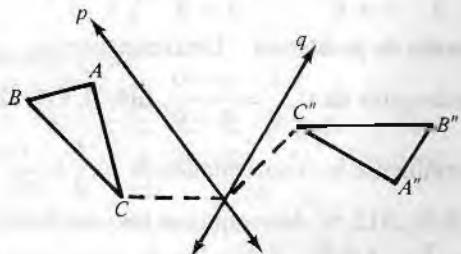


9. d.
11.

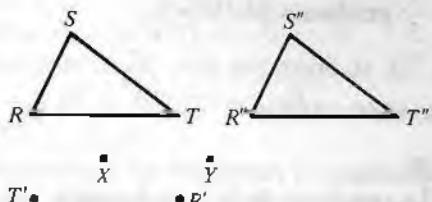


Encuéntrese la intersección de las bisectrices perpendiculares de \overline{RV} y \overline{SW} ; $m\angle ROV = 95^\circ$.

13.



15. Una mitad del ángulo de rotación.
17a.



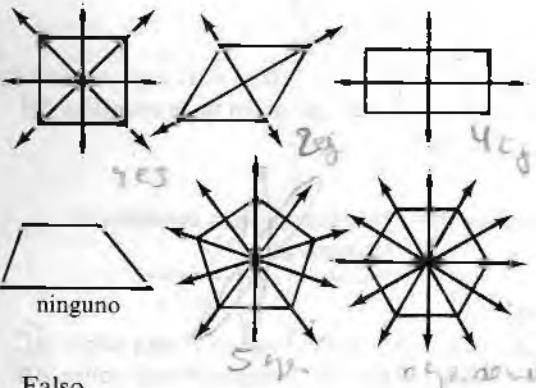
- 17b. Una traslación a lo largo de \overrightarrow{XY} de doble longitud que \overrightarrow{XY} .

Solución de problemas

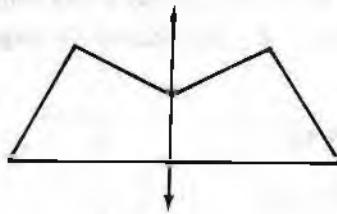
1. $120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$.
2. $120^\circ, 240^\circ; 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

páginas 496 y 497

1. Sí. 3. Sí. 5. Sí.
7.



9. Falso.
11.

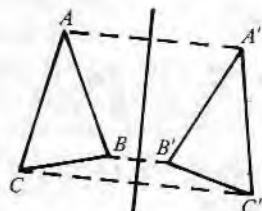


13. No es posible. 15. Círculo.
17. Ejemplo: un pentágono regular.
19. p y r .

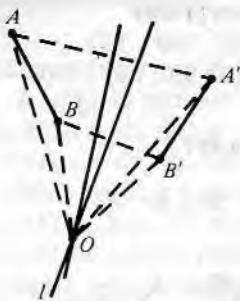
Solución de problemas Girar cada tarjeta 180° .

página 499 Capítulo 13 Resumen

- 1a. Verdadero. 1b. Verdadero.
1c. Verdadero. 1d. Falso. 1e. Falso.
2. H, X, I . 3. N, S y Z . 4. 8.
5.



6.



$m\angle BOB' = m\angle AOA' = 57$, rotación en la dirección en que giran las manecillas del reloj.

página 501 Técnicas para la solución de problemas

1. Sí.
2. $PA + PC = PB$ cuando P está sobre \widehat{AC} .
 $PA + PB = PC$ cuando P está sobre \widehat{AB} .
 $PB + PC = PA$ cuando P está sobre \widehat{BC} .
3. $2\sqrt{3}$ cm. 4. Intersección de diagonales.

CAPÍTULO 14

páginas 506 y 507

9. Obtuso. 11. Recto. 17. (5, 3).
19. (3, -3). 21. (0, 2).
23. (3, -1), (-3, -1), (5, 3).
27. -6.

Solución de problemas

1. $(3, 3\sqrt{3})$; $(3, -3\sqrt{3})$.
2. $(0, 6)$, $(6, 6)$; $(0, -6)$, $(6, -6)$; $(3, 3)$, $(3, -3)$.
3. Ejemplo: $(1, 4)$, $(7, 4)$.

páginas 510 y 511

- 1a. $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. 1b. $(2, -\frac{1}{2})$. 1c. $(\frac{1}{2}, -2)$.
 1d. $(-2, 0)$. 3. (1, 0). 5. $(-5, -\frac{7}{2})$.
 7. $(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$.
 9. $(\frac{7}{2}, 4)$, $(7, -\frac{1}{2})$, $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-2, 4)$, paralelogramo.

11. $(-2, 8)$. 13. $(4, -3)$. 15. $(7, 6)$.

17. $(-1, -\frac{3}{2})$.

19. $\left(\frac{x_1 + x_2}{3}, \frac{y_1 + y_2}{3}\right)$, $\left(\frac{2(x_1 + x_2)}{3}, \frac{2(y_1 + y_2)}{3}\right)$.

Solución de problemas (2, 2, 2).

páginas 514 y 515

- 1a. (13, 2), (10, 5); -1. 1b. (0, 5), (8, 10); $\frac{5}{8}$

- 1c. (13, 2), (9, 3); $-\frac{1}{4}$

- 1d. (4, 3), (9, 3); 0.

- 1e. (4, 0), (9, 0); 0.

- 1f. (2, 4), (0, 1); $\frac{3}{2}$

- 1g. (0, 5), (4, 0); $-\frac{5}{4}$

- 1h. (4, 3), (10, 5); $\frac{1}{3}$

- 1i. (4, 3), (4, 0); indefinido.

3. $-\frac{1}{2}$. 5. $\frac{7}{2}$. 7. 1.

9. \overline{EF} , 0; \overline{FG} , indefinido; \overline{GH} , 0; \overline{HE} ,

indefinido.

11. \overline{AB} , $\frac{4}{5}$; \overline{BC} , -2 ; \overline{CA} , 5.

- 13a. \overline{XY} , $-\frac{1}{4}$; \overline{YX} , 0; \overline{XZ} , $-\frac{1}{2}$

- 13b. Mediana de \overline{XY} , indefinido; mediana de \overline{ZX} , $-\frac{1}{6}$; mediana de \overline{YZ} , $-\frac{1}{3}$

15. $\frac{1}{2}$

17. $\frac{1}{2} = \frac{y+3}{x+6}$, $-2 = \frac{y+4}{x-8}$; $A\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Solución de problemas Determinense las coordenadas de G , $\frac{1}{2} = \frac{y-0}{4-0}$, $G(4, 2)$, $F(6, 2)$;

determinense las coordenadas de K , $\frac{1}{2} = \frac{y-0}{10-0}$,

$K(10, 5)$, $J(15, 5)$; determinense las coordenadas de P , $\frac{1}{2} = \frac{y-0}{18-0}$, $P(18, 9)$, $N(27, 9)$; pendiente de

$\overline{FJ} = \frac{1}{3}$; pendiente de $\overline{JN} = \frac{1}{3}$.

páginas 518 y 519

1. Sí.

3. La pendiente de la recta formada por $(3, 9)$ y $(7, 5)$ es igual a la pendiente formada por $(4, -1)$ y $(0, 3)$, la pendiente de la recta formada por $(3, 9)$ y $(0, 3)$ es igual a la pendiente de la recta formada por $(7, 5)$ y $(4, -1)$.

5. La recta que contiene a los puntos $(4, 5)$ y $(1, -3)$ es paralela a la recta que contiene a $(-3, 7)$ y $(-6, -1)$; la recta que contiene a $(4, 5)$ y $(-3, -7)$ es paralela a la recta que contiene a $(1, -3)$ y $(-6, -1)$.
7. El producto de las pendientes de la recta que contiene a $(7, 9)$ y $(10, -3)$ y la recta que contiene a $(2, -5)$ y $(10, -3)$ es -1 .
9. Paralelogramo, la recta que contiene a $(-3, -3)$ y $(-1, -7)$ es paralela a la recta que contiene a $(-1, -2)$ y $(1, -6)$; la recta que contiene a $(-3, -3)$ y $(-1, -2)$ es paralela a la recta que contiene a $(-1, -7)$ y $(1, -6)$; empleese el teorema 14.2.
11. $-1, -5, 1; 1, \frac{1}{3}, -1$.
13. $\frac{1}{3}$ 15. -8 . 17. $C(\frac{12}{5}, 0)$.
19. Encuéntrese la pendiente de \overline{AD} y \overline{CD} ; empleese $D(x, y)$; empleese la definición de pendiente doble para formar dos ecuaciones; resuélvase; $D(6, -1)$.

Solución de problemas $C(8, 0)$; altura = 4;
 $A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$.

páginas 522 y 523

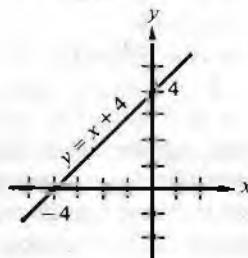
1. 10. 3. $7\sqrt{2}$. 5. $2\sqrt{13}$. 7. $\sqrt{74}$.
9. $BC = AC = 5$, isósceles. 11. Escaleno.
13. $\sqrt{225^2} = \sqrt{45^2} + \sqrt{180^2}$; si.
15. Definición de pendiente.
17. Punto medio $(1, 1)$; $\sqrt{26}$.
19. $\sqrt{34} + \sqrt{117} \neq \sqrt{227}$, no.
21. $10 = \sqrt{(1-x)^2 + (2-8)^2}$;
 $100 = x^2 - 2x + 37$; $x = 9$ ó -7 .
23. Pendiente de $\overline{BC} = \frac{1}{2}$; pendiente de $\overline{AC} = -2$, $\overline{BC} \perp \overline{AC}$; $BC = 4\sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{5}$; 20.
25. Encuéntrense las bisectrices perpendiculares de dos segmentos; el punto de intersección es $(2, 4)$.
27. El doble de la distancia de $(-3, 7)$ a $(0, y)$ es igual a la distancia de $(6, 1)$ a $(0, y)$;
 $2\sqrt{(-3)^2 + (7-y)^2} = \sqrt{6^2 + (1-y)^2}$;
 $y = 5$ ó 13 ; $(0, 5)$, $(0, 13)$.

Solución de problemas

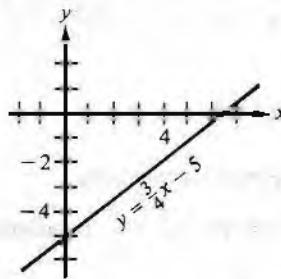
1. $4\sqrt{3}$.
2. $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

páginas 526 y 527

1. $y = 2x + 3$. 3. $y = -\frac{3}{4}x + 5$.
5. $y = 10x - 4$.
- 7.



9.



11. $m = -2, b = 4$. 13. $m = \frac{3}{2}, b = -2$.
15. $m = -\frac{3}{2}, b = \frac{5}{2}$. 17. $y = 2x - 5$.
19. $y = \frac{2}{3}x$. 21. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
23. $= \frac{3}{4}x$. 25. $y = x$. 27. $y = 2$.
29. $m = \frac{1}{2}$. 31. $m = \frac{5}{2}$. 33. $(4, 1)$.
35. $\frac{25}{2}$. 37. $y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x - 2$.
39. $y = -x + 4$. 41. $y = -\frac{5}{3}x + 4$.
43. Fórmese el triángulo 45-45-90; $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.
45. Grafíquese; los $\frac{4}{3}$ de la distancia entre $(0, 0)$ y el punto medio $(12, 6)$ es $(8, 4)$.

Solución de problemas Encuéntrese la intersección de la recta dada con la ecuación $3y = 4x + 11$ dando $(\frac{44}{25}, \frac{33}{25})$; úsese la fórmula de la distancia, $\frac{2}{3}$.

páginas 530 y 531

1. $x^2 + y^2 = 25$.
3. $x^2 + y^2 = 36$.
5. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 36$.
7. $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 2$.
9. $x^2 + (y + 4)^2 = 25$.
11. $(0, 0)$; 6.
13. $(-3, 4)$; 5.
15. $(0, 3)$; $2\sqrt{3}$.
17. $(-2, -4)$; 6.
19. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
21. $(x + 1)^2 + y^2 = 9$.
23. $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 34$.
25. $y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$
27. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

29. Grafíquese; encuéntrese la ecuación del radio perpendicular a la recta tangente; resuélvase el sistema de dos ecuaciones para el punto de intersección; $(0, 4)$; $r = \sqrt{10}$; $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 10$.

Solución de problemas $x^2 + y^2 + z^2 = 48$; $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 35$.

páginas 534 y 535

1-5. Las respuestas variarán.

7. Pendiente de $\overline{AC} = \frac{b}{c}$; pendiente de

$$\overline{BD} = \frac{b}{c - 2a};$$

$$AD = \sqrt{(c - a)^2 + b^2}, AB = \sqrt{a^2},$$

$$\sqrt{(c - a)^2 + b^2} = \sqrt{a^2}, \text{ despéjese } a,$$

$$a = \frac{c^2 - b^2}{2c};$$

sustitución en la pendiente de \overline{BD} ; $\frac{c}{b}$.

9. Punto medio de $\overline{AB} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$; pendiente de $\overline{AB} = -1$; $y = x$ contiene a $(0, 0)$.

11. $AC = \sqrt{c^2 + b^2}$; $BD = \sqrt{(-c)^2 + b^2}$.

13. $AC = \sqrt{c^2 + b^2}$; $BD = \sqrt{(c - 2a)^2 + b^2}$; $\sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{c^2 - 4ac + 4a^2 + b^2}$,

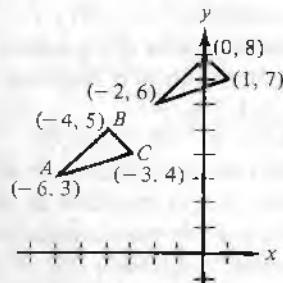
encuéntrese $c, c = a$; dése nuevo nombre a $D(0, b), C(a, b)$.

15. En $\triangle ABC$, $A(0, 0)$, $B(2a, 0)$, $C(2b, 2c)$; $D(b, c)$ es punto medio de \overline{AC} ; $E(b + a, c)$ es punto medio de \overline{BC} ; $DE = \sqrt{a^2} = a$; $DE = \frac{1}{2}AB$; pendiente de $\overline{DE} = 0$, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

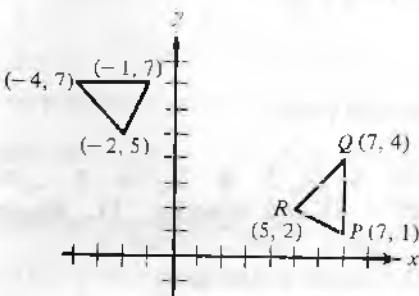
Solución de problemas 5 caras.

página 537

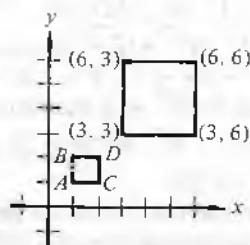
1.



3.

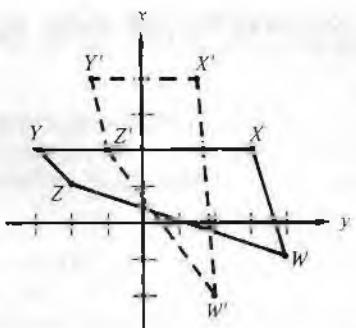


5.



Las longitudes de los lados de $\square ABCD$ son $\frac{1}{3}$ de la longitud de la magnificación.

7. Se «encoge» horizontalmente y se «estira» verticalmente; igual



página 539 Capítulo 14 Resumen

- 1a. $2\sqrt{13}$. 1b. 10. 1c. 6. 2a. $\frac{3}{2}$
 2b. $-\frac{3}{4}$ 2c. 0. 3a. (3, 5). 3b. (1, 1).
 3c. (-1, -2). 4. $y = -3x + 2$.
 5. $y = -\frac{3}{4}x + 4$.
 6. La recta que contiene a los puntos (5, 7) y (8, -5) es perpendicular a la recta que contiene a los puntos (0, -7) y (8, -5).

7. $x = -\frac{71}{2}$ 8. $x = -26$.
 9. $(2, -3); 2\sqrt{6}$. 10. $x^2 + y^2 = 25$.
 11. La pendiente de \overline{AC} es 1; la pendiente de \overline{BD} es -1; el producto de las pendientes es -1.
 12. $WX = a$; $YZ = a$; la pendiente de WX es 0; la pendiente de YZ es 0; $WX \parallel YZ$; teorema 5.8.

página 541 Resumen global Capítulos 11 a 14

1. 50 cm^2 . 2. 12 cm^2 . 3. $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
 4. 4:1. 5. $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
 6. 72 m^3 . 7. 21 m^3 .
 8. 150.72 cm^2 . 9. 125.60 cm^2 .
 10. (-3, 5), (-5, -2), (4, 3).
 11. (4, 2), (-3, 7), (1, -6).
 12. $y = x$; $y = -x + 6$; $y = 3$, $x = 3$.
 13. (-2, -6).
 14. $\sqrt{221}$. 15. $y = -\frac{3}{2}x - 3$.

Índice de materias

- afirmación de la hipótesis, 64
- agrimensura, 390, 391
- álgebra, repasos de, 79, 299, 429
- altura
 - de triángulos
 - equiláteros, 242
 - isósceles, 242
 - de una pirámide, 434
 - de un paralelogramo, 399
 - de un prisma, 435
 - de un trapecio, 403
 - de un triángulo, 199
- inclinada
 - de un cono, 456
 - de una pirámide, 441
- ángulo(s), 17
 - agudo, 21
 - alternos exteriores, 171
 - alternos interiores, 171
 - bisectriz de un, 24
 - central, 343
 - complementarios, 144
 - congruentes, 20
 - construcción de, 21
 - correspondientes, 171
 - de un polígono, 292, 293
 - de un triángulo, 44, 154, 208, 209
 - exteriores de un polígono, 293
 - exteriores de un triángulo, 154, 209
 - inscrito, 343
 - interior de un, 17
 - interiores no contiguos, 154, 209
 - lados del, 17
 - medida de, 20
 - medida en grados de, 20, 73
 - obtuso, 21
 - par lineal de, 144
 - recto, 21
 - resta de iguales, 138, 139
 - suma de iguales, 138
 - suplementarios, 144
 - trisección de, con *tomahawk*, 362, 363
 - verticales, 150
 - vértice del, 17
- apotema, 408
- arco(s), 343
 - congruentes, 347
- base(s),
 - ángulos base de un triángulo isósceles, 202
 - de conos, 456
 - de cilindros, 452
 - de paralelogramos, 399
 - de pirámides, 434
 - de prismas, 435
 - de trapecios, 261
 - de triángulos, 402
- bisectriz
 - de una cuerda, 354, 355
 - de un ángulo, 24, 148
 - de un segmento, 24
 - perpendicular, 29, 142, 217
- Bolyai, János, 181
- cadena, regla de la, 65
- cara, 434
 - lateral
 - de una pirámide, 434

- de un prisma, 435
- cardioide, 352, 359, 373
- centro
 - de rotación, 488
 - de una esfera, 460
 - de un círculo, 17
 - de un polígono, 408
- centroide de un triángulo, 242
- cilindro, 452, 453
 - área de un, 453
 - bases de un, 452
 - eje de un, 452, 453
 - recto, 452
 - volumen del, 452, 453
- círculo(s), 17, 341
 - ángulo central del, 343
 - ángulo inscrito en un, 343
 - ángulos formados por cuerdas del, 374, 375
 - ángulos formados por secantes del, 379
 - ángulos formados por tangentes a, 378
 - ángulos formados por tangente y cuerda del, 375
 - ángulos formados por tangente y secante del, 379
 - arco de un, 343
 - arco mayor del, 346
 - arco menor del, 346
 - área de un 420, 421
 - centro del, 17
 - circunferencia del, 416, 417
 - circunscrito, 238
 - congruentes, 347
 - cuerda del, 342
 - diametro del, 17, 342
 - ecuación del, 528, 529
 - inscrito, 238
 - máximo, 460
 - radio del, 17, 342
 - secante del, 343
 - sector del, 421
 - segmentos formados por tangente y secante del, 380, 381
 - tangente al, 343, 361-65
- cometa, 115, 207
- compás, 21
- conclusión, 56
- congruencia entre
 - ángulos, 20
 - arcos, 347
 - círculos, 347
 - cuerdas, 347, 350, 351
 - partes de triángulos, 110, 111
 - segmentos, 20
- triángulos, 84, 85, 90, 91
 - cónicas, 534
 - conjuntos, 16
 - cono, 456, 457
 - altura inclinada del, 456
 - área de un, 456, 457
 - base del, 456
 - circular, 456
 - eje del, 456, 457
 - recto, 456
 - vértice de un, 456
 - volumen del, 457
 - construcción(es), 21
 - con hojas de plástico, 30
 - de alturas de un triángulo, 241
 - de ángulos, 21
 - de bisectrices de los ángulos de un triángulo, 241
 - de bisectrices perpendiculares de los lados de un triángulo, 240
 - de bisectriz de ángulos, 25
 - de bisectriz perpendicular, 25
 - de círculo circunscrito, 240, 328
 - de cuadrados, 31
 - de la imagen de reflexión, 478, 479, 487
 - de la imagen de rotación, 490
 - de medianas de un triángulo, 241
 - de perpendiculares a una recta a través de un punto dado que no está sobre la recta, 29
 - de perpendiculares a una recta a través de un punto dado sobre la recta, 29
 - de polígonos
 - regulares, 34
 - semejantes, 314
 - de rectángulo aureo, 301
 - de rectángulos, 30, 263
 - de rectas paralelas, 178
 - de rombos, 263
 - de segmentos, 21
 - de un paralelogramo, 263
 - de un pentágono regular, 274
 - de un segmento dividido en segmentos congruentes, 23
 - de un trapecio, 263
 - de un triángulo, 31, 88, 94
- contraejemplo, 48, 49
- contrapositiva, 60
- conversa, 91
- coordenadas
 - de un punto en una recta, 74
 - de un punto en un plano, 505
- coordenada x, 505

coordenada y , 505
 cruce
 en x , 527
 en y , 524
 cuadrado(s), 261
 dividido en partes congruentes, 103
 en un sistema de coordenadas, 507
 líneas de simetría de un, 496
 propiedades del, 285
 cuadrilátero, 17, 32, 260
 cubo, 464
 en un sistema tridimensional de coordenadas, 511.
 523
 modelo de un, 464, 467
 secciones transversales del, 269, 275
 cuerda(s), 342
 bisectriz perpendicular de una, 354, 355
 congruentes, 347, 350, 351
 longitud de una, 381

deltaedro, 442
 deltoide, 384, 385
 Descartes, René, 505
 desigualdades
 entre números, 514
 entre triángulos, 45, 244, 248, 249
 diagonal de un polígono, 32
 diámetro de un círculo, 17, 342
 diseño interior, 40
 distancia
 de un punto a una recta, 29
 entre dos puntos, 72
 fórmula de la, 520
 domo geodésico, 126, 202

ecuación
 del círculo, 528, 529
 de la recta, 524
 eje
 de un cono, 456, 457
 de un cilindro, 452, 453
 elipse, 530, 534
 «entre»
 puntos, 12, 72
 rayos, 73
 Eratóstenes, 35
 esfera, 460, 461
 área de la superficie de una, 461
 centro de una, 460

circunferencia máxima de una, 460
 en un sistema de coordenadas, 531
 radio de una, 460
 volumen de una, 460
 espacio, 11
 Euler, fórmula de, 467
 extremo
 de un rayo, 16
 de un segmento, 16

figura(s)
 espacial, 16
 plana, 16
 rígidas, 119

Gauss, Karl Friedrich, 181
 generalización, 44
 falsa, 48, 49
 geometría en nuestro mundo.
 agrimensura, 390, 391
 arquitectura, 126, 127, 300, 301
 diseño interior, 40, 41
 fotografía, 80, 81
 gráficas por computador, 256, 257, 430, 431
 mineralogía, 194, 195
 navegación, 472, 473
 geometría no euclíadiana, 181
 gráfica
 de una recta, 524
 de un círculo, 528, 529
 por computador, 256, 430

heptágono, 32
 Herón, fórmula de, 452
 hexadiamante, 108
 hexágono, 32
 líneas de simetría de un hexágono regular, 496
 hipérbola, 534
 hipotenusa, 199
 hipótesis, 56

ilusiones ópticas, 136
 imagen, 476
 interior
 de un ángulo, 17
 de un polígono, 32

- intersección
 - de conjuntos, 16
 - de planos, 68
 - de rectas, 13
- inversa, 60
- lados
 - de un ángulo, 17
 - de un polígono, 32
 - de un triángulo, 17
- línea de simetría, 494
- línea o recta auxiliar, 157
- Lobachevsky, Nicolai Ivanovich, 181
- locus o lugar geométrico, 142, 148, 152
- longitud de un segmento, 20, 72
- media geométrica, 322
- medianas
 - de triángulos
 - equiláteros, 242
 - isósceles, 242
- medida en grados
 - de un ángulo, 20
 - de un arco, 346, 347
- mineralogía, 194
- modus ponens* (véase *afirmación de la hipótesis*)
- modus tollens* (véase *negación de la conclusión*)
- multiplicación de iguales, 138
- navegación, 472
- negación de la conclusión, 65
- números
 - hexagonales, 137
 - reales, propiedades de los, 130, 154
- octágono, 32
- origen, 504
- paralelepípedo, 437
- paralelogramo(s), 261
 - altura de un, 399
 - área de un, 398, 399
 - base de un, 399
 - diagonales de un, 267, 282
 - en un sistema de coordenadas, 507
 - propiedades del, 264, 265
- pantógrafo, 308, 310
- parábola, 534
- paralelo de ángulos, 144
- Pascal, triángulo de, 51
- pendiente
 - de rectas paralelas, 517
 - de rectas perpendiculares, 516
 - de una recta, 512, 513
- pentágono, 32
 - líneas de simetría de un pentágono regular, 496
- pentaminós, 94, 98, 102, 114
- perímetro, 408
 - de polígonos semejantes, 412, 413
- pi (π), 417
- pirámide(s), 434
 - altura de una, 434
 - altura inclinada de, 434
 - área de una, 441
 - arista de la base de una, 434
 - arista lateral de una, 434
 - modelos de, 439, 450
 - regular, 434
 - vértice de una, 434
 - volumen de una, 448, 449
- Pitágoras, teorema de, 226
- plano(s)
 - figura de un, 16
 - intersección de, 68
 - paralelos, 170
 - perpendiculares, 28
- poliedro(s), 434
 - caras de un, 434
 - modelos de, 99, 219, 234, 439, 446, 450, 466, 467
 - regulares, 464, 465
- polígono(s), 32
 - alrededor de puntos, colocación de, 280, 292
 - ángulos de, 292, 293
 - ángulos exteriores de un, 293
 - áreas de polígonos semejantes, 412, 413
 - centro de un, 408
 - con forma de estrella, 345, 374, 376, 377
 - convexo, 32
 - de n lados, 32
 - diagonal de un, 32
 - interior de un, 32
 - lados de un, 32
- polígono regular, 33
 - apotema de un, 408
 - área de un, 408, 409
 - centro de un, 408
 - en espejos, 478

- postulado(s), 52, 68
 - de Cavalieri, 445
 - de la suma de arcos, 346
 - de la suma de áreas, 395
 - de la suma de regiones congruentes, 395
 - de la suma de volúmenes, 445
 - de la congruencia
 - ALA, 91
 - LAL, 91
 - LLL, 91
 - de la desigualdad del triángulo, 244
 - de la existencia de puntos, 68
 - de la intersección de planos, 68
 - del área, 394
 - del rectángulo, 394
 - de la regla, 72
 - de la semejanza AAA, 316
 - de la separación del espacio, 69
 - de la separación de planos, 69
 - de las paralelas, 180
 - de las perpendiculares, 69
 - de los dos puntos, la recta y el plano, 69
 - del par lineal, 146
 - del punto y el plano, 68
 - del punto y la recta, 68
 - del transportador, 73
 - del volumen, 444
 - de un sólido rectangular, 444
- preimagen, 476
- principio de la sustitución, 138
- prisma(s), 435
 - altura de un, 435
 - área de un, 440, 441
 - aristas laterales de, 435
 - base de un, 435
 - caras laterales de, 435
 - modelos de, 446
 - recto, 435
 - volumen de un, 444, 445
- propiedad(es)
 - aditiva de las desigualdades, 154
 - de los números, 130, 138, 154
 - de multiplicación de las desigualdades, 154
 - de tricotomía, 154
 - reflexiva, 130
 - símétrica, 130
 - transitiva, 130
 - de las desigualdades, 154
- proporciones, 304, 305
 - en modelos a escala, 307, 313
 - en polígonos semejantes, 312, 313, 412, 413
- productos de, 307
- proposiciones
 - equivalentes, 61
 - si-entonces, 56, 57
 - si-entonces verdadera, 57, 60, 61
 - si, y sólo si, 61
- prueba(s),
 - a dos columnas, 96
 - afirmación de la hipótesis, 96
 - con el uso de coordenadas, 532, 533
 - con el uso de definiciones, 100, 101, 104, 105
 - con el uso de postulados, 90, 91, 104, 105
 - indirecta, 158, 159
 - pasos para una, 130-33, 158, 159
- punto medio de un segmento, 24
 - coordenadas del, 508
- punto(s), 10, 12
 - «entre», 12, 72
 - colineales, 13
 - coordenada(s) de, 74, 505
 - coplanares, 13
 - distancia entre, 72, 520
 - no colineales, 13
 - no coplanares, 13
- radio
 - de un círculo, 17, 342
 - de una esfera, 460
- rayo, 16
- razón
 - de la tangente, 330
 - del coseno, 330
 - del seno, 330
- razonamiento,
 - afirmación de la hipótesis, 64, 96
 - deductivo, 52, 53
 - inductivo, 44, 45
 - negación de la conclusión, 65
 - regla de la cadena, 65
- razones trigonométricas, 330, 331
 - identidades, 332
 - para ángulos especiales, 334, 335
 - tabla de valores, 331
- rectángulo(s), 261
 - área de un, 395
 - áureo, 300, 324
 - en un sistema de coordenadas, 507
 - líneas de simetría de, 496
 - propiedades del, 282, 283

- recta(s), 13
 - alabeadas, 170
 - auxiliares, 157
 - concurrentes, 13, 236-39
 - en un triángulo, 236-39
 - ecuación de la, 524
 - intersección, 13
 - paralela a un plano, 170
 - paralelas, 13, 174, 175
 - pendiente de una, 512, 513
 - perpendiculares, 28
 - a un plano, 28
- reflexión(es), 476
 - con hojas de plástico, 476, 478
 - de ángulos, 477
 - de segmentos, 477
 - en un sistema de coordenadas, 510, 514, 518
 - para la solución de problemas 480, 481
 - reflexión de una, 485, 489
- región poligonal, 394
- resta de iguales, 138
- rombo(s), 261
 - líneas de simetría de un, 496
 - propiedades del, 283
- rotación(es), 488, 489
 - como reflexión de una reflexión, 489

- secante, 343
- sección
 - áurea, 149
 - transversal, 445
- sector de un círculo, 421
- segmento(s), 16
 - bisectriz de un, 24
 - bisectriz perpendicular de un, 29, 142, 217
 - congruentes, 20
 - construcción de, 21
 - divididos en segmentos congruentes, 23, 286
 - longitud de un, 20, 72
 - punto medio de un, 24, 508
 - resta de iguales, 139
 - secante, 380
 - suma de iguales, 139
 - tangente, 380
- semiespacio, 69
- semiplano, 69
- simetría, 194, 195, 494, 495
 - centro de, 495
 - línea de 494
 - líneas de, en polígonos, 496

- reflexiva, 494
- rotacional, 495
- sistema de coordenadas, 504, 505
 - origen del, 504
 - polares, 522
 - tridimensional, 515, 523, 531
- sólidos, 434
 - rectangulares, 444
- subconjunto, 16
- superficie (o área)
 - de cilindros, 453
 - de conos, 457
 - de esferas, 461
 - de pirámides, 441
 - de prismas, 440, 441
- suma de iguales, 138

- tangente a un círculo, 349
- Tangram, rompecabezas, 7, 268
- técnicas para la solución de problemas,
 - dibujar un diagrama, 39
 - examinar casos especiales, 501
 - hacer una tabla I, 167
 - hacer una tabla II, 223
 - hacer un dibujo preciso, 471
 - trabajar hacia atrás, 339
- teodolito, 390
- teorema, 52
 - de la hipotenusa y el ángulo, 213
 - de la hipotenusa y el cateto, 216
 - de la semejanza
 - AA, 316
 - LAL, 327
 - LLL, 326
 - de los ángulos verticales, 150
 - de los complementos congruentes, 145
 - de los suplementos congruentes, 146
 - del ángulo exterior, 154
 - del segmento medio, 276
 - de Pitágoras, 226
 - fundamental de la proporcionalidad, 308
 - LAA, 212
 - pasos para demostrar un, 130-33
 - uso de la prueba indirecta, 158, 159
 - terminos indefinidos, 10, 11, 52
 - teselados, 40
 - trapecio(s), 261
 - altura de un, 403
 - área de un, 403
 - bases de un, 261
 - isósceles, 289

- propiedades del, 288, 289
 transformación(es), 476-95
 en un sistema de coordenadas, 536
 imagen de una, 476
 preimagen de una, 476
 reflexión, 476, 477
 rotación, 488, 489
 traslación, 484, 485
 transportador, 22
 transversal, 171, 174
 triángulo(s), 17
 acutángulo, 198
 altura de un, 199
 ángulos exteriores de un, 154, 209
 ángulos interiores no contiguos de un, 154
 área de un, 402, 403
 bisectrices de los ángulos de un, 45, 237
 centroide de un, 242
 congruentes, 84, 85, 90, 91
 demostración de congruencia entre, 96, 97, 104, 105,
 110, 111, 116, 117, 120, 121
 desigualdades del, 45, 244, 248, 249
 equiángulo, 199, 203
 equilátero, 33, 198, 203, 209
 en un sistema de coordenadas, 507
 medida de los ángulos de un, 209
 escaleno, 198
 isósceles, 33, 198, 202, 203
 propiedades del, 132, 202, 203
 lados de un, 17
 medianas de, 239
 obtusángulo, 199
 partes congruentes de, 110, 111
 partes correspondientes de, 85
 rectángulo, 199, 226, 227
 cateros de un, 199
 $45^\circ\text{-}45^\circ\text{-}90^\circ$, 232, 233
 hipotenusa de un, 199
 medias geométricas de un, 322, 323
 semejantes, 316, 317, 322, 323
 teoremas de congruencia para, 213, 216
 $30^\circ\text{-}60^\circ\text{-}90^\circ$, 232, 233
 semejantes, 316, 317, 326, 327
 suma de la medida de los ángulos de un, 44, 208
 teoremas de concurrencia de, 236-39
 $30^\circ\text{-}60^\circ\text{-}90^\circ$, 232, 233
 vértices de un, 17
 unidades cuadradas, 261
 unión de conjuntos, 16
 vértice(s)
 de un ángulo, 17
 de una pirámide, 434
 de un cono, 456
 de un polígono, 32
 de un triángulo, 17
 volumen, 444
 de una esfera, 460
 de una pirámide, 448, 449
 de un cono, 457
 de un cilindro, 453
 de un prisma, 444, 445

GEOMETRÍA

Se terminó de imprimir en abril de 1998
 en los talleres de Lasna Graphic, S.A. de C.V.
 Mixcoatl No. 452 Col. Santa Isabel Tola
 C.P. 07010 México, D.F.
 Se imprimieron 3 000 ejemplares

Reconocimientos

recta	2 ar. izq.	Lick Observatory/University of California	ab. izq.	Cortesía de Applicon, Inc.
al	ar. cent.	Grant Heilman Photography	ab. der.	Lockheed Missiles and Space Company, Inc.
an	ab. izq.	Grant Heil Photography	259	Joseph W. Molitor
ce	3 ar. izq.	George B. Fry III*	290	Bureau of Reclamation
ec	ar. der.	Jim Goldberg*	300	Michos Tzovoras/Editorial Photocolor Archives, Inc.
in	ab. izq.	George B. Fry III*	301, 303	Joseph W. Molitor
ip	ab. der.	Rene Burri/Magnum Photos	304 ar.	Bill Plummer*
p	9	Robert A. Isaacs	307 ab.	Cortesía de LeRoy Trover and Associates
p	14	George B. Fry III*	312 izq.	Chevrolet Motors Division, General Motors Corporation
p	17 ar. cent., ab.	George B. Fry III*	der.	Lockheed-California Company
p	33 ab. der.	George B. Fry III*	322, 325	Grant Heilman Photography
ref	43	George B. Fry III*	330	Julian E. Caraballo/Tom Stack & Associates
	44	B. C. con permiso de Johnny Hart y Field Enterprises	341	Robert A. Isaacs
	48	© copyright, 1980, Universal Press Syndicate. Todos los derechos reservados	350, 351	Illinois State University Photo Services
	50	Hale Observatories	369	Phiz Mezey*
	53	© 1961 United Feature Syndicate, Inc.	390 ar. izq.	Phiz Mezey*
	56	© 1961 United Feature Syndicate, Inc.	393	© 1979 Barrie Rokeach
re	64	© 1961 United Feature Syndicate, Inc.	403	U.S. Department of Interior
res	65 ar., ab.	© 1971 United Feature Syndicate, Inc.	408	U.S. Air Force
ro	83	Rene Burri/Magnum Photos	416	Foto cortesía de Hewlett-Packard Company
	84	Cortesía de General Motors	433	Robert A. Isaacs
	104	© 1980 United Feature Syndicate, Inc.	434 ar.	Scala/Editorial Photocolor Archives, Inc.
ro	118	Baron Wolman*	444	Baron Wolman*
	126 ar.	Tom Stack/Tom Stack & Associates	460	NASA
	ab.	Roger B. Smith/Editorial Photocolor Archives, Inc.	464 ar. izq.	David Scharf/Peter Arnold Inc.
	129	Robert A. Isaacs	ar. der.	Lester V. Bergman & Associates
se	130	© 1958 United Feature Syndicate	475	Robert A. Isaacs
se	143	<i>Games and Puzzles</i> , Num. 46 (marzo 1976), con permiso de EduGames (U.K.) Ltd.	476	Dibujo de W. Miller; © 1962, The New Yorker Magazine, Inc
s	150	Samuel Chamberlain	479 ab. der.	De Martin Gardner, <i>The Ambidextrous Universe</i> . Copyright © 1979 de Martin Gardner (Nueva York: Charles Scribner's Sons, 1979) Reimpreso con permiso de Charles Scribner's Sons.
s	158	B. C. con permiso de Johnny Hart y Field Enterprises	484	Dibujo de Charles Addams; © 1957 The New Yorker Magazine, Inc.
	162	Copyright © 1969 de Martin Gardner, Reimpreso con permiso de SIMON & SCHUSTER, una división de Gulf & Western Corporation.	494 ar., cent.	George B. Fry III*
	169	Robert A. Isaacs	503	Robert A. Isaacs
	170	© 1979 Steve Finberg	536	Robert E. Shaw/University of Connecticut
	181	Culver Pictures		
194 ar.	© Lester V. Bergman & Associates			
197	Jim Goldberg*			
202	Rene Burri/Magnum Photos			
225	Robert A. Isaacs			
236	© Leonard Freed/Magnum Photos			
244	Robert A. Isaacs			
256 ar.	Cortesía de The Perkin-Elmer Corporation			

* Fotografías proporcionadas expresamente para el editor. Las demás fotografías son de Wayland Lee, de la plantilla de Addison-Wesley.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
Biblioteca

3 800102 800758

Geometría con aplicaciones y solución de problemas es un texto que destaca la relación estrecha que existe entre los conceptos geométricos y sus aplicaciones en el mundo que nos rodea. Las ideas en que se basaron los autores para realizar esta obra son:

1. La geometría surge a partir de la observación de cosas simples y relaciones comunes.
2. La capacidad de redactar pruebas debe desarrollarse empezando con las situaciones más sencillas.
3. Los estudiantes de geometría deben desarrollar su capacidad en el marco del pensamiento crítico, el razonamiento lógico y la resolución de problemas.
4. El estudio de la geometría no debe aislarse del mundo ni de otras áreas de las matemáticas.

El texto resulta práctico para el estudio de la geometría pues su lenguaje es breve pero preciso, los ejercicios están clasificados en tres niveles de dificultad, se incluye la mayoría de las respuestas a los problemas impares y al final hay un glosario de términos.

El estudio de esta obra hará que el lector aumente su habilidad para resolver problemas y que vea un mundo físico más comprensible.

**OTRAS OBRAS DE INTERÉS PUBLICADAS POR
ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA:**

KEEDY/BITTINGER: *Álgebra y trigonometría* (03879)

ARIZMENDI/CARRILLO/LARA: *Cálculo, primer curso nivel superior* (64020)

THOMAS/FINNEY: *Cálculo con geometría analítica*, sexta edición

Volumen 1: capítulos 1 a 10 (64012)

Volumen 2: capítulos 11 a 18 (64014)

Edición completa (64011)



Addison Wesley Longman



Argentina • Chile • Costa Rica • Colombia • Ecuador • Perú • Uruguay • Estados Unidos
Méjico • Panamá • Puerto Rico • Holanda • Inglaterra • Venezuela

ISBN 968 444 306 4



9 789684 443068

