Instituto Tecnológico Autónomo de México

DIPLOMADO

MÓDULO 4, Tarea 2

presenta

DANIEL MARTÍNEZ DE LA ROSA

Ciudad de México, 28 de abril de 2020

Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función definida como

$$E(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (t_n - f(x))^2$$

donde $f(x) = \sum_{r=1}^{R} C_r \mathbb{1}(x \in R_r)$, demuestre que si $\frac{\partial E}{\partial C_k} = 0$ entonces

$$\hat{C}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{\{n \mid x_n \in R_r\}} t_n$$

Demostración

El problema radica en obtener las derivadas parciales de $E(x)$ e igualarlas a cero.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(x)}{\partial C_1} &= \frac{\partial}{\partial C_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{N} (t_n - f(x))^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial C_1} (t_n - f(x))^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial C_1} \left(t_n^2 - 2 t_n f(x) + f^2(x) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left[\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial C_1} t_n^2} - 2 t_n \frac{\partial}{\partial C_1} f(x) + \frac{\partial}{\partial C_1} f^2(x) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left[-2 t_n \frac{\partial}{\partial C_1} f(x) + \frac{\partial}{\partial C_1} f^2(x) \right]
\end{aligned} \tag{1}$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial C_1} f(x) &= \frac{\partial}{\partial C_1} \sum_{r=1}^{R} C_r \mathbb{1}(x \in R_r) \\
&= \frac{\partial}{\partial C_1} \left[C_1 \mathbb{1}(x \in R_1) \right] + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial C_1} \left[\sum_{r \neq 1}^{R} C_r \mathbb{1}(x \in R_r) \right]} \\
&= \mathbb{1}(x \in R_1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[-2t_n\frac{\partial}{\partial C_1}f(x)+\frac{\partial}{\partial C_1}f^2(x)\right] &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[-2t_n\cdot \mathbb{1}(x\in R_1)+2f(x)\cdot\frac{\partial}{\partial C_1}f(x)\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[-2t_n\cdot \mathbb{1}(x\in R_1)+2f(x)\cdot \mathbb{1}(x\in R_1)\right]\\
&= \sum_{n=1}^{N}\left[-t_n\cdot \mathbb{1}(x\in R_1)+f(x)\cdot \mathbb{1}(x\in R_1)\right]\\
&= \sum_{n=1}^{N}\left[-t_n\cdot \mathbb{1}(x\in R_1)+C_1\right]\\
&= \sum_{n=1}^{N}\left[-t_n\cdot \mathbb{1}(x\in R_1)\right]+N\cdot C_1\\
&= -\sum_{n=1}^{N}\left[t_n\cdot \mathbb{1}(x\in R_1)\right]+N_1\cdot C_1 = 0\\
&\Leftrightarrow N_1\cdot C_1 = \sum_{n=1}^{N}\left[t_n\cdot \mathbb{1}(x\in R_1)\right] \Longleftrightarrow C_1 = \frac{\sum_{n=1}^{N} t_n}{N_1}
\end{aligned}
$$

Sin pérdida de generalidad, el cálculo se puede generalizar para cualquier $k \in \mathbb{N}$ por lo que concluimos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E\,(x)}{\partial C_k} &= -\sum_{n=1}^{N}\left[t_n\cdot \mathbb{1}(x\in R_k)\right]+N_k\cdot C_k = 0\\
&\Leftrightarrow N_k\cdot C_k = \sum_{n=1}^{N}\left[t_n\cdot \mathbb{1}(x\in R_k)\right]\\
&\Leftrightarrow C_k = \frac{\sum_{n=1}^{N} t_n}{N_k}
\end{aligned}
$$

Como la función es cuadrática con término principal positivo, entonces la función $E(x)$ tiene un mínimo en $(C_k, E(C_k))$