



Proyecto Computacional: Macroeconomía II

Cristóbal Donoso Oliva¹, Roberto Flores², Francisco Medina³, Nicolás Moreno⁴,
Humberto Martínez⁵, Agustín Farias⁶, y Leonardo Siles⁷

1. Estudiantes (Autores) - 2. Profesor del Curso - 3-4 Ayudantes

7 de diciembre de 2025

Introducción

En el siguiente proyecto computacional se implementan 8 modelos. Para solucionar los sistemas no lineales se utilizó la herramienta Dynare [1].

El proyecto se divide en tres secciones principales. En la primera parte, se replican los modelos de ciclo real de negocios (RBC) propuestos por **Hansen y Wright** [4], analizando un modelo base y cuatro extensiones para comparar sus propiedades estadísticas.

La segunda sección se centra en la estimación de parámetros de un modelo RBC, siguiendo la metodología de **Christiano y Eichenbaum** [2] y utilizando datos de la economía estadounidense. Finalmente, la tercera parte evalúa dos reglas de política monetaria—una regla de Taylor simple y una con expectativas—dentro del marco Nekeynesiano introducido por **Galí** [3], con el fin de comparar su desempeño en la estabilización de la economía.

Tanto los datos utilizados como el código fuente desarrollado para este proyecto se encuentran disponibles públicamente en el repositorio de GitHub:

<https://github.com/cridonoso/Dynare-Macro-Replications.git>.

Se han utilizado herramientas de Inteligencia Artificial como apoyo auxiliar para la generación de documentación, revisión de sintaxis y depuración de código. Todo el contenido sugerido por estas herramientas ha sido revisado y validado por el equipo para garantizar su precisión.



Parte I. Real Business Cycle Models (50 Puntos)

En esta primera parte, vamos a replicar las extensiones del modelo RBC expuestas en Hansen and Wright (1992).¹ Este paper maneja un modelo básico de RBC, más 4 extensiones. Los siguientes pasos se deben realizar para cada uno de los cinco modelos.

1. Presentar el sistema no-lineal que describe la dinámica óptima de cada modelo

Con la finalidad de presentar ordenadamente la información solicitada, se entregará solo la información final de las ecuaciones. En la sección Anexos se presentará el desarrollo de estos.

1.1. Modelo Estándar

- a) **Restricción de tiempo:**

$$l_t = 1 - h_t \quad (1)$$

- b) **Producción:**

$$y_t = \exp(z_t) k_t^\theta h_t^{1-\theta} \quad (2)$$

- c) **Proceso AR(1) para la productividad:**

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_t \quad (3)$$

- d) **Acumulación de capital:**

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad (4)$$

- e) **Restricción de recursos:**

$$c_t + i_t = y_t \quad (5)$$

- f) **Ecuación de Euler (Capital):**

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \left(\exp(z_{t+1}) \theta k_{t+1}^{\theta-1} h_{t+1}^{1-\theta} + 1 - \delta \right) \right] \quad (6)$$

g) **Condición Intratemporal (Trabajo – CPO de h_t):**

$$\frac{A}{1 - h_t} = \frac{1}{c_t} \exp(z_t)(1 - \theta)k_t^\theta h_t^{-\theta} \quad (7)$$

1.2. Nonseparable leisure

El modelo de Ocio No Separable está caracterizado por el siguiente sistema de 8 ecuaciones que determinan la evolución de las variables $\{c_t, h_t, k_{t+1}, y_t, L_t, X_{t+1}, \mu_t, z_{t+1}\}$.

a) **Ecuación de Euler (Capital):**

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \left(\theta \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right] \quad (8)$$

b) **Condición Intratemporal (Trabajo):**

$$\frac{1}{c_t}(1 - \theta) \frac{y_t}{h_t} = \frac{Aa_0}{L_t} + \mu_t \quad (9)$$

c) **Ecuación de Euler (Stock de Ocio - μ_t):**

$$\mu_t = \beta E_t \left[\frac{A\eta(1 - a_0)}{L_{t+1}} + \mu_{t+1}(1 - \eta) \right] \quad (10)$$

d) **Definición del Servicio de Ocio (L_t):**

$$L_t = a_0(1 - h_t) + \eta(1 - a_0)X_t \quad (11)$$

e) **Ley de Movimiento del Stock de Ocio (X_t):**

$$X_{t+1} = (1 - \eta)X_t + (1 - h_t) \quad (12)$$

f) **Restricción de Recursos:**

$$c_t + k_{t+1} = y_t + (1 - \delta)k_t \quad (13)$$



g) Función de Producción:

$$y_t = \exp(z_t) k_t^\theta h_t^{1-\theta} \quad (14)$$

h) Proceso del Shock Tecnológico:

$$z_{t+1} = \rho z_t + \epsilon_{t+1} \quad (15)$$

1.3. Indivisible Labor

a) Ecuación de Euler (Consumo):

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \left(\theta \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right] \quad (16)$$

b) Condición Intratemporal (Oferta de Trabajo):

$$B c_t = (1 - \theta) \frac{y_t}{H_t} \quad (17)$$

c) Restricción de Recursos:

$$c_t + k_{t+1} = y_t + (1 - \delta) k_t \quad (18)$$

d) Función de Producción:

$$y_t = \exp(z_t) k_t^\theta H_t^{1-\theta} \quad (19)$$

e) Proceso del Shock Tecnológico (AR1):

$$z_{t+1} = \rho z_t + \epsilon_{t+1} \quad (20)$$



1.4. Gasto Gobierno

a) **Proceso del gasto público:**

$$\log(g_{t+1}) = (1 - \lambda) \log(\bar{g}) + \lambda \log(g_t) + \mu_t \quad (21)$$

b) **Restricción de tiempo:**

$$l_t = 1 - h_t \quad (22)$$

c) **Producción:**

$$y_t = \exp(z_t) k_t^\theta h_t^{1-\theta} \quad (23)$$

d) **Proceso AR(1) para la productividad:**

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_t \quad (24)$$

e) **Acumulación de capital:**

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad (25)$$

f) **Restricción de recursos:**

$$c_t + i_t + g_t = y_t \quad (26)$$

g) **Ecuación de Euler:**

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \left(\exp(z_{t+1}) \theta k_{t+1}^{\theta-1} h_{t+1}^{1-\theta} + 1 - \delta \right) \right] \quad (27)$$

h) **Condición intratemporal:**

$$\frac{A}{1 - h_t} = \frac{1}{c_t} \exp(z_t) (1 - \theta) k_t^\theta h_t^{-\theta} \quad (28)$$

1.5. Home production

a) Agregador de Consumo:

$$c_t = [\alpha c_{Mt}^e + (1 - \alpha) c_{Ht}^e]^{1/e} \quad (29)$$

b) Tiempo disponible:

$$l_t = 1 - h_{Mt} - h_{Ht} \quad (30)$$

c) Producción en el mercado:

$$f(z_{Mt}, k_{Mt}, h_{Mt}) = \exp(z_{Mt}) k_{Mt}^\theta h_{Mt}^{1-\theta} \quad (31)$$

d) Producción en el hogar:

$$g(z_{Mt}, k_{Mt}, h_{Mt}) = \exp(z_{Ht}) k_{H,t}^\eta h_{Ht}^{1-\eta} \quad (32)$$

e) Restricción de recursos en el mercado:

$$c_{Mt} + i_t = f(z_{Mt}, k_{Mt}, h_{Mt}) \quad (33)$$

f) Movimiento del capital :

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad (34)$$

g) Proceso AR(1) del shock en la producción en el mercado:

$$z_{M,t+1} = \rho_M z_{Mt} + \varepsilon_{M,t+1} \quad (35)$$

h) Proceso AR(1) del shock en la producción del hogar:

$$z_{H,t+1} = \rho_H z_{Ht} + \varepsilon_{H,t+1} \quad (36)$$



i) **Asignación de capital entre sectores:**

$$k_{M,t} = \phi k_t, \quad k_{H,t} = (1 - \phi)k_t \quad (37)$$

j) **Ecuación de Euler:**

$$\alpha c_{Mt}^{e-1} c_t^{1-e} \frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\alpha c_{M,t+1}^{e-1} c_{t+1}^{1-e} \frac{1}{c_{t+1}} \left(\theta \frac{c_{Mt}}{k_{Mt}} + (1 - \delta) \right) \right] \quad (38)$$

k) **Condición intratemporal entre mercado y hogar:**

$$\alpha c_{Mt}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \theta) \frac{c_{Mt}}{h_{Mt}} = (1 - \alpha) c_{Ht}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \eta) \frac{c_{Ht}}{h_{Ht}} \quad (39)$$

l) **Condición de oferta laboral:**

$$\frac{A}{l_t} = \frac{1}{2c_t} \left[\alpha c_{Mt}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \theta) \frac{c_{Mt}}{h_{Mt}} + (1 - \alpha) c_{Ht}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \eta) \frac{c_{Ht}}{h_{Ht}} \right] \quad (40)$$

2. Solucionar para el estado estacionario de las variables en cada modelo, y presentar los resultados

2.1. Modelo Estándar

a) **Shock tecnológico:** En estado estacionario el shock es constante, por lo que:

$$\bar{z} = 0 \quad (41)$$

b) **Inversión (\bar{i}):** Proveniente de la ecuación de acumulación de capital:

$$\bar{i} = \delta \bar{k} \quad (42)$$

c) **Ecuación de Euler:** La condición intertemporal para consumo implica:

$$1 = \beta \left(\theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{h}^{1-\theta} + 1 - \delta \right) \quad (43)$$

d) **Ocio (l):** Dado que el tiempo total es 1:

$$l = 1 - \bar{h} \quad (44)$$

e) **Identidad de recursos:** La producción se reparte entre consumo e inversión:

$$\bar{y} = \bar{c} + \bar{i} \quad (45)$$

f) **Condición intratemporal trabajo–consumo:** Relación entre consumo, trabajo y parámetros:

$$\frac{A}{1 - \bar{h}} = \frac{1}{\bar{c}} (1 - \theta) \bar{k}^\theta \bar{h}^{-\theta} \quad (46)$$

Resultados del Steady State

$$\begin{aligned} \bar{h} &= 1/3, & \bar{k} &= 12,6631, & y &= 1,2347 \\ \bar{i} &= 0,3166, & \bar{c} &= 0,9181, & A &= 1,7214 \\ \bar{z} &= 0 \end{aligned}$$

2.2. Nonseparable Leisure

En el estado estacionario, las variables son constantes y $z_{ss} = 0$. El sistema se resuelve secuencialmente fijando h_{ss} exógenamente.

a) **Variables de Ocio (X_{ss} y L_{ss}):** Dada la ley de movimiento y la definición de ocio, y sabiendo que los pesos suman 1:

$$X_{ss} = \frac{1 - h_{ss}}{\eta} \quad (47)$$

$$L_{ss} = 1 - h_{ss} \quad (48)$$

b) **Ratio Capital-Producto (k/y):** Determinado por la Ecuación de Euler:

$$\frac{k_{ss}}{y_{ss}} = \frac{\beta\theta}{1 - \beta(1 - \delta)} \quad (49)$$

c) **Niveles de Producción (y_{ss}) y Capital (k_{ss}):**

$$y_{ss} = \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} h_{ss} \quad (50)$$

$$k_{ss} = \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right) y_{ss} \quad (51)$$

d) **Consumo (c_{ss}):**

$$c_{ss} = y_{ss} - \delta k_{ss} \quad (52)$$

e) **Multiplicador del Ocio (μ_{ss}):** Relación derivada de la ecuación de Euler para el stock de ocio:

$$\mu_{ss} = \frac{\beta A \eta (1 - a_0)}{L_{ss} [1 - \beta(1 - \eta)]} \quad (53)$$

f) **Parámetro de Utilidad (A):** Despejado de la condición intratemporal del trabajo para cerrar la calibración. Sustituyendo la expresión de μ_{ss} en la CPO de trabajo:

$$A = \frac{(1 - \theta) \frac{y_{ss}}{h_{ss}} \frac{1}{c_{ss}}}{\frac{a_0}{L_{ss}} + \frac{\beta \eta (1 - a_0)}{L_{ss} [1 - \beta(1 - \eta)]}} \quad (54)$$

Resultados del Steady State

$$k_{ss} = 12,666, \quad y_{ss} = 1,235, \quad c_{ss} = 0,918, \quad i_{ss} = 0,316 \quad h_{ss} = 0,333, \quad l_{ss} = 0,667, \\ X_{ss} = 6,667, \quad L_{ss} = 0,667 \quad A = 1,831, \quad \mu_{ss} = 1,621, \quad \frac{k_{ss}}{y_{ss}} = 10,256$$

2.3. Indivisible Labor

La estrategia de calibración fija las horas trabajadas exógenamente ($H_{ss} = 1/3$) y despeja el parámetro de desutilidad B endógenamente.

a) **Proceso del shock tecnológico**

$$z_{ss} = \rho z_{ss} \implies z_{ss}(1 - \rho) \implies z_{ss} = 0 \quad (55)$$

- b) **Ratio Capital-Producto (k/y):** Se obtiene de la Ecuación de Euler, donde el retorno neto del capital iguala la tasa de impaciencia.

$$\frac{k_{ss}}{y_{ss}} = \frac{\beta\theta}{1 - \beta(1 - \delta)} \quad (56)$$

- c) **Nivel de Producción (y_{ss}):** Sustituyendo el ratio k/y en la función de producción Cobb-Douglas.

$$y_{ss} = \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} H_{ss} \quad (57)$$

- d) **Nivel de Capital (k_{ss}):** Se recupera utilizando el nivel de producción y el ratio calculado en (1).

$$k_{ss} = \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right) y_{ss} \quad (58)$$

- e) **Consumo (c_{ss}) e Inversión (i_{ss}):** De la restricción de recursos, sabiendo que en estado estacionario la inversión solo cubre la depreciación ($i_{ss} = \delta k_{ss}$).

$$c_{ss} = y_{ss} - \delta k_{ss} \quad (59)$$

- f) **Parámetro de Desutilidad (B):** Se despeja de la condición intratemporal del trabajo para asegurar que el modelo replique el H_{ss} observado.

$$B = (1 - \theta) \frac{y_{ss}}{H_{ss}} \frac{1}{c_{ss}} \quad (60)$$

Resultados del Steady State

$$\begin{aligned} k_{ss} &= 12,666, & y_{ss} &= 1,235, & c_{ss} &= 0,918, & i_{ss} &= 0,317 \\ h_{ss} &= 0,333, & l_{ss} &= 0,667, & \frac{k_{ss}}{y_{ss}} &= 10,256, & B &= 2,582 \end{aligned}$$



2.4. Gasto Gobierno

a) Del proceso del gasto público:

$$\bar{g} = \hat{g}.$$

b) De la restricción de tiempo:

$$l = 1 - \bar{h}.$$

c) De la acumulación de capital:

$$\bar{k} = (1 - \delta)\bar{k} + \bar{i} \Rightarrow \bar{i} = \delta\bar{k}.$$

d) De la producción:

$$\bar{y} = \exp(\bar{z}) \bar{k}^\theta \bar{h}^{1-\theta} = \bar{k}^\theta \bar{h}^{1-\theta}.$$

e) De la restricción de recursos:

$$\bar{c} + \bar{i} + \bar{g} = \bar{y}.$$

f) De la ecuación de Euler (Capital):

$$1 = \beta (\theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{h}^{1-\theta} + 1 - \delta).$$

g) De la condición intratemporal (Trabajo):

$$\frac{A}{1 - \bar{h}} = \frac{1}{\bar{c}} (1 - \theta) \bar{k}^\theta \bar{h}^{-\theta}.$$

Resultados del Steady State

$$\bar{k} = 12,6631, \quad \bar{h} = \frac{1}{3}, \quad l = \frac{2}{3}, \quad \bar{y} = 1,2347 \quad \bar{i} = 0,3166, \quad \bar{g} = 0,2716, \\ \bar{c} = 0,6465, \quad A = 2,4445$$



2.5. Home production

En el estado estacionario, todas las variables determinísticas son constantes y los shocks se eliminan:

$$z_{Mt} = z_{Ht} = 0, \quad k_{t+1} = k_t = k, \quad i_t = \delta k.$$

a) De la ecuación de movimiento del capital:

$$k = (1 - \delta)k + i \quad \Rightarrow \quad i = \delta k.$$

b) Del balance de producción del mercado y el hogar:

$$c_M + i = f(k_M, h_M) = k_M^\theta h_M^{1-\theta}, \quad c_H = g(k_H, h_H) = k_H^\eta h_H^{1-\eta}.$$

c) Asignación de capital entre sectores

$$k_M = \phi k, \quad k_H = (1 - \phi)k.$$

d) Consumo agregado

$$c = [\alpha c_M^e + (1 - \alpha)c_H^e]^{1/e}.$$

e) Horas trabajadas y ocio:

$$l = 1 - h_M - h_H.$$

f) Relación entre horas de mercado y hogar:

$$\alpha(1 - \theta) \frac{c_M^e}{h_M} = (1 - \alpha)(1 - \eta) \frac{c_H^e}{h_H}$$

g) Condición de consumo vs ocio:

$$\frac{A}{l} = \frac{1}{2} \left[\alpha(1 - \theta) \frac{c_M^e}{h_M} + (1 - \alpha)(1 - \eta) \frac{c_H^e}{h_H} \right]$$



Resultados del Steady State

$$\begin{aligned}k &= 12,45, & k_M &= 11,02, & k_H &= 1,43, & \phi &= 0,885 \\y_M &= 1,082, & y_H &= 0,271, & c_M &= 0,782, & c_H &= 0,271 \\i &= 0,311, & c &= 0,894, & A &= 2,84, & \alpha &= 0,344 \\h_M &= 0,330, & h_H &= 0,280, & l &= 0,390\end{aligned}$$

3. Estructurar el archivo .mod de Dynare utilizando la calibración que sugieren los autores.

Todos los modelos se encuentran en la carpeta `/modfiles/p1`.

- 1.mod: Standard RBC Model** Modelo base con preferencias separables entre consumo y ocio. ^a
- 2.mod: Non-Separable Preferences** Introduce utilidad marginal del ocio dependiente del consumo (preferencias no separables).
- 3.mod: Indivisible Labor** Asume trabajo indivisible (Hansen, 1985), amplificando la volatilidad de las horas trabajadas. ^b
- 4.mod: Government Spending** Incorpora gasto público estocástico en la restricción de recursos como fuente de volatilidad. ^c
- 5.mod: Home Production** Añade producción doméstica, permitiendo la sustitución entre trabajo de mercado y trabajo en el hogar.

Puede consultar la versión completa del código fuente en el siguiente repositorio:

<https://github.com/cridonoso/Dynare-Macro-Replications/.../modfiles/p1>

^aPara realizar este .mod, nos ayudamos del archivo ya hecho de Johannes Pfeifer. ([Archivo](#)). Le pasamos este archivo y la resolución teórica en latex a ChatGPT, para que él generara el código.

^bPara realizar este .mod, nos ayudamos del archivo ya hecho de Johannes Pfeifer. ([Archivo](#))

^cPara realizar este .mod le pasamos el mod de Standard RBD Model y la resolución teórica en latex a chatgpt, para que él generara el código.

4. Solucionar el modelo estocástico para 200 periodos.

En el Código.

5. Simular 10.000 series de tiempo (de 200 periodos cada una) de las variables de los modelos. En cada iteración calcular las estadísticas de la Tabla 3 del paper.

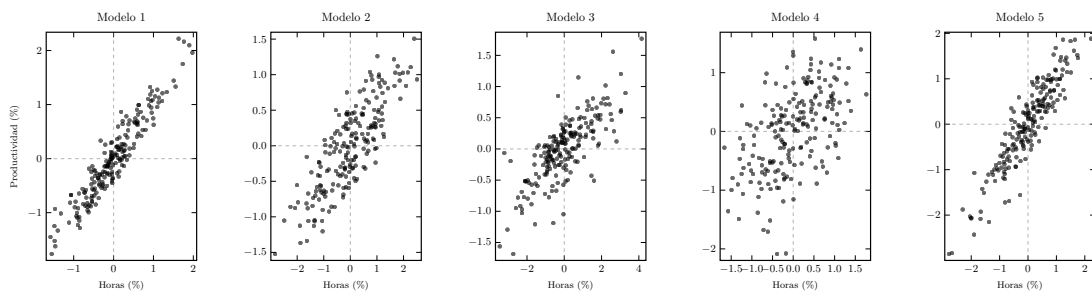


Figura 1: Diagramas de dispersión de Horas Trabajadas vs. Productividad Laboral (Componentes Cíclicos). La figura muestra las desviaciones porcentuales respecto a la tendencia (filtro HP) de una simulación de 200 periodos para cada uno de los cinco modelos. Se observa cómo el Modelo 1 (Estándar) genera una correlación casi perfecta, mientras que los Modelos 4 (Gasto de Gobierno) y 5 (Producción Doméstica) logran generar una dispersión (“nube”) más cercana a la observada en los datos reales.

En [Tabla 1](#) se presentan las propiedades cíclicas de nuestros modelos respecto a los datos de Estados Unidos. El modelo estándar falla principalmente en replicar la volatilidad de las horas de trabajo respecto al salario y la correlación entre las horas de trabajo y la productividad. De acuerdo al modelo, la volatilidad de las horas de trabajo es menor que la productividad y la correlación entre estas variables es cercana a 1, mientras que en los datos vemos que las horas son mucho más volátiles que la productividad y que la correlación es cercana a 0. En base a lo que vimos en clases, la falla en replicar la volatilidad es debido a que la elasticidad de la oferta laboral debe ser alta, es decir, deberíamos esperar que ante shocks, exista una mayor propensión por parte de los hogares a sustituir ocio por trabajo. Respecto a la falla en la correlación, esto se da por el tipo de shock, ya que al incluir únicamente shocks de productividad, la oferta laboral es estable mientras que la demanda por trabajo es la que está recibiendo

los shocks. Esto se puede ver reflejado en el gráfico del modelo estándar presentado en [Figura 1](#). Debido a esto, los autores presentan extensiones al modelo original para solucionar los problemas presentados.

La primera variante del modelo es el preferencias no separables, el cual introduce la idea de que la utilidad no solo depende del ocio actual, sino que también depende del promedio entre ocio presente y pasado. La interpretación que se le da a esto es que los individuos necesitan tiempo para realizar diversas actividades de la casa y, luego de eso, pueden trabajar más por un tiempo hasta que estas actividades sean requeridas de nuevo. La introducción de esta “acumulación” de ocio, es que los hogares estarán más dispuestos, dependiendo de su situación, a cambiar ocio intertemporalmente, aumentando la elasticidad de la oferta de trabajo. En [Tabla 1](#), podemos notar como el modelo 2 logra aumentar la volatilidad de las horas respecto a la productividad.

El modelo 3 introduce el concepto de trabajo no indivisible, el cual restringe a los hogares a trabajar 0 o \hat{h} horas. Esto busca capturar la idea de que los procesos de producción tienen no convexidades o costos fijos que hacen más eficientes cambiar la cantidad de trabajadores que la cantidad de horas de trabajo. Este modelo también logra aumentar la elasticidad de las horas de trabajo respecto a la productividad, es decir, hay una mayor volatilidad de las horas de trabajo. La interpretación que le damos es que antes todos los individuos trabajaban lo mismo. Como el trabajo tiene rendimientos decrecientes, entonces los shocks no inducían a trabajar mucho más. Ahora, hay individuos que pasan de no trabajar nada a trabajar, por lo que esas “primeras horas de trabajo” generan mucha utilidad.

El modelo 4 introduce el gasto de gobierno en forma de shocks, la idea de esta extensión es generar un shock el cual afecta los ingresos de los individuos y, por ende, la demanda por ocio. Esto se traduce en un desplazamiento de la oferta laboral a lo largo de la demanda laboral. En la tabla, podemos ver que si bien no soluciona el problema de la volatilidad de las horas de trabajo respecto a la productividad, si soluciona el problema de la correlación entre estas variables, ya que baja considerablemente a 0.51. En la [Figura 1](#) podemos notar que ahora el modelo 4 presenta una mayor dispersión de los puntos, esto es debido a los shocks que afectan a la oferta y demanda de trabajo.

Por último, el modelo 5 introduce la producción en el hogar, donde ahora el consumo está en función del consumo de bienes producidos en el mercado y los bienes producidos en el hogar. De acuerdo a la teoría, este modelo debería mostrar que hay una mayor volatilidad de las horas respecto a la productividad porque hay sustitución entre trabajo de mercado por trabajo en el hogar. Por otra parte debería disminuir la correlación entre las horas y la productividad debido a la introducción de otra fuente de shock, los shocks a los bienes producidos en el hogar. Sin embargo, en la tabla podemos notar que esto no se ve reflejado, ya que se mantiene similar al caso estándar de RBC.

Cuadro 1: Propiedades Cíclicas: Comparación de Modelos vs Datos EE.UU.

Data/Model	% S.D.	Variable vs. Output				Hours vs. Productivity	
	Output	Cons	Inv	Hours	Prod	Rel SD	Corr
	σ_y	σ_c/σ_y	σ_i/σ_y	σ_h/σ_y	$\sigma_{y/h}/\sigma_y$	$\sigma_h/\sigma_{y/h}$	$\text{corr}(h, y/h)$
U.S. Data (Household)	1.92	0.45	2.78	0.78	0.57	1.37	0.07
Modelo 1	1.33	0.31	3.14	0.49	0.53	0.93	0.93
Modelo 2	1.55	0.29	3.22	0.65	0.40	1.63	0.81
Modelo 3	1.78	0.29	3.24	0.76	0.29	2.64	0.77
Modelo 4	1.27	0.52	3.06	0.54	0.61	0.90	0.51
Modelo 5	1.76	0.29	3.44	0.49	0.52	0.94	0.92

Nota: Resultados promedio de 10,000 simulaciones de 200 periodos.

6. Construir y presentar histogramas para las estadísticas calculadas en el punto anterior. Comparar y discutir estos histogramas con los resultados expuestos en la Tabla 3.

En la [Figura 2](#) se presenta las distribuciones de densidad de los momentos cíclicos simulados en 10000 series de tiempo. Sobre la volatilidad del producto, podemos notar que la distribución que tiene la menor volatilidad media del producto es el modelo 4, lo que concuerda con lo que aparece en la tabla 3. El modelo 3 y 5 tienen una distribución muy parecida, lo que concuerda con la tabla 3 ya que ambos presentan resultados similares. Por último, el modelo 2 se encuentra en medio de todos los modelos.

Sobre la volatilidad relativa del consumo sobre el producto, en la tabla 3 tenemos que el modelo 1,2 y 3 presentan una volatilidad similar y que en los modelos de gasto de gobierno y de producción tienen una volatilidad de casi el doble que los primeros



modelos. Sin embargo, en nuestros resultados podemos ver que el modelo 5 no aumenta la volatilidad del consumo. Además, este es el que presenta una mayor varianza respecto a los demás

Sobre la volatilidad de la inversión, el modelo 5, de acuerdo a la tabla 3, debería tener la menor volatilidad en comparación al resto de los modelos. Sin embargo, esto ocurre al revés en nuestros resultados, ya que este modelo es el que presenta la mayor volatilidad de la inversión. El resto de los modelos presentan resultados consistentes con que se muestra en la tabla 3.

Sobre la volatilidad de las horas respecto al producto, el modelo 5 debiera ser uno de los modelos con mayor volatilidad de las horas sobre los otros modelos, pero esto en nuestros resultados no se da así, ya que tiene el valor más bajo junto con el modelo estándar. El resto de resultados son similares.

Respecto a la volatilidad de la productividad sobre el producto, el modelo 1,2,3 y 4 presentan valores idénticos a los presentados en el documento, mientras que el modelo 5 presenta un valor mayor que el que se muestra en la tabla 3.

En términos generales, se observa que el modelo 4 (gasto de gobierno) tiene una mayor dispersión (densidad más ancha) de estas estadísticas a lo largo de las simulaciones. La interpretación que le damos es que este modelo tiene una persistente mayor a otros modelos ($\lambda = 0,96$) mientras que el resto de modelos la persistencia suele venir de $\rho = 0,95$; sumado a una desviación estándar considerable en el shock secundario (0,021 frente a 0,007 del modelo de gasto de gobierno).

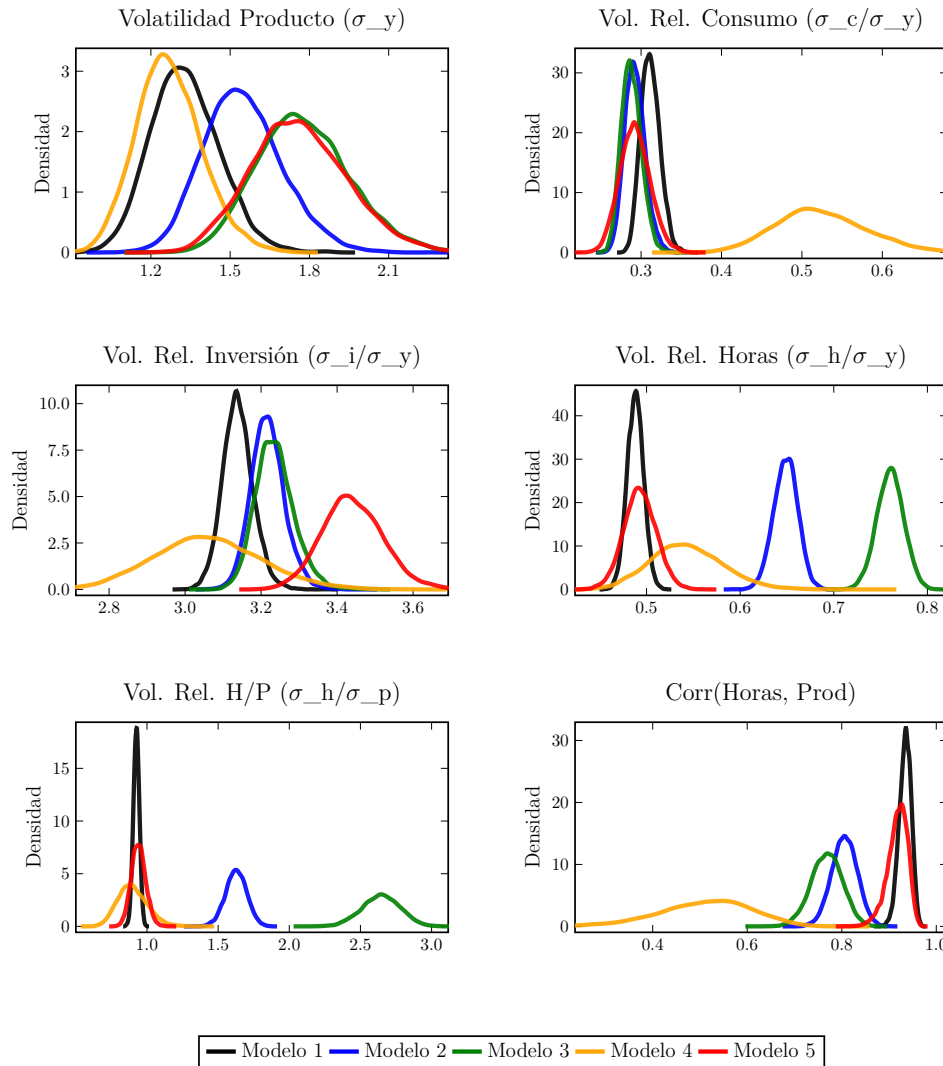


Figura 2: Distribuciones de densidad (Kernel) de los momentos cíclicos simulados. La figura compara las distribuciones de frecuencia de seis estadísticos clave obtenidas mediante 10,000 simulaciones de Montecarlo para cada uno de los cinco modelos analizados (Modelo 1: Estándar, 2: Ocio No Separable, 3: Trabajo Indivisible, 4: Gasto de Gobierno, 5: Producción Doméstica). Las densidades han sido estimadas utilizando un kernel gaussiano.



Parte II. Real Business Cycle Models - Estimación de parámetros (30 Puntos)

En esta segunda pregunta, vamos a replicar una parte del paper de Christiano y Eichenbaum (1992).² Este paper establece el proceso para estimar los parámetros del modelo RBC. Nos vamos a concentrar en la versión del modelo con $\alpha = 1$ y “*Divisible Labor*”.

1. Presentar el sistema no-lineal que describe la dinámica óptima del modelo

El modelo base asume una economía poblada por un gran número de agentes idénticos y un planificador social que maximiza la utilidad esperada del agente representativo.

En la siguiente Sección 2.5.1 se presenta la definición del modelo, los supuestos y transformaciones. **El sistema no lineal que describe la dinámica óptima del modelo se encuentra en la Sección 2.5.2.**

2.5.1. Problema del Planificador Social

El planificador elige las secuencias de consumo y trabajo para maximizar la siguiente función de utilidad:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \ln(c_t) + \gamma \ln(N - n_t) \}$$

Sujeto a la restricción de recursos y la tecnología de producción:

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t &= y_t \\ y_t &= (z_t n_t)^{1-\theta} k_t^\theta \end{aligned}$$

Donde se asume $\alpha = 1$, lo que implica que el consumo privado (c_t^p) y el gasto de gobierno (g_t) son sustitutos perfectos, tal que el consumo efectivo es $c_t = c_t^p + g_t$.

Un resumen de las variables del modelo se encuentran en el Cuadro 2.



Cuadro 2: Definición de Variables y Parámetros del Modelo

Símbolo	Descripción
<i>Variables Endógenas</i>	
c_t	Consumo efectivo per cápita en t
n_t	Horas trabajadas en t
k_t	Stock de capital per cápita al inicio del periodo t
y_t	Producto per cápita
<i>Variables Exógenas (Shocks)</i>	
z_t	Nivel de tecnología (shock tecnológico)
g_t	Gasto de gobierno (shock de demanda)
<i>Parámetros</i>	
β	Factor de descuento subjetivo ($0 < \beta < 1$)
γ	Ponderación del ocio en la utilidad
N	Dotación total de tiempo disponible
θ	Participación del capital en la producción
δ	Tasa de depreciación del capital

Sistema No Lineal

La dinámica óptima del modelo está descrita por el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, derivadas de las condiciones de primer orden del problema del planificador:

a) Ecuación de Euler (Acumulación de Capital):

$$E_t \left\{ \beta^{-1} - \left[\theta \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + (1 - \delta) \right] \frac{c_t}{c_{t+1}} \right\} = 0$$

b) Ecuación Intratemporal (Oferta Laboral):

$$\frac{\gamma c_t}{N - n_t} = (1 - \theta) \frac{y_t}{n_t}$$

c) Restricción de Factibilidad:

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = (z_t n_t)^{1-\theta} k_t^\theta$$

Como se introduce en el Cuadro 2, el modelo introduce incertidumbre a través de dos variables exógenas que evolucionan en el tiempo de acuerdo con los siguientes procesos:

1. Shock Tecnológico (z_t) La tecnología evoluciona según un camino aleatorio con deriva geométrica:

$$z_t = z_{t-1} \exp(\lambda_t)$$

Donde λ_t representa la tasa de crecimiento de la tecnología y se asume que es un proceso independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.) con media λ y desviación estándar σ_λ :

$$\lambda_t \sim i.i.d.(\lambda, \sigma_\lambda^2)$$

2. Shock de Gasto de Gobierno (g_t) Se define una variable estacionaria (sin tendencia) para el gasto público, denotada como $\bar{g}_t = g_t/z_t$. Se asume que el logaritmo de esta variable sigue un proceso autorregresivo de orden 1 (AR(1)). Se debe tener en cuenta que para la especificación solicitada en esta tarea, este shock no es relevante.

$$\ln(\bar{g}_t) = (1 - \rho) \ln(\bar{g}) + \rho \ln(\bar{g}_{t-1}) + \mu_t$$

Donde:

- \bar{g} es el valor de estado estacionario (media incondicional) de \bar{g}_t .
- ρ es el coeficiente de persistencia, con $|\rho| < 1$.
- μ_t es la innovación al gasto de gobierno (el shock propiamente tal), con media cero y desviación estándar σ_μ .

2.5.2. Sistema No Lineal

Dado que la tecnología z_t sigue un camino aleatorio, las variables en niveles no son estacionarias. Para estimar el modelo, se reescribe el sistema en términos de variables transformadas (detrended), dividiendo por z_t .

Definimos $\bar{c}_t = c_t/z_t$, $\bar{y}_t = y_t/z_t$ y $\bar{k}_{t+1} = k_{t+1}/z_t$. El sistema estacionario resultante que describe la dinámica óptima es:

1. Ecuación de Euler Transformada La tasa de descuento efectiva ahora incluye el crecimiento de la tecnología (λ_{t+1}), lo que refleja que consumir en el futuro es “más barato” en términos de utilidad relativa debido al crecimiento:

$$E_t \left\{ \beta^{-1} - \left[\theta \frac{\bar{y}_{t+1}}{\bar{k}_{t+1}} \exp(\lambda_{t+1}) + 1 - \delta \right] \frac{\bar{c}_t}{\bar{c}_{t+1}} \exp(-\lambda_{t+1}) \right\} = 0$$

Simplificando los términos de crecimiento:

$$E_t \left\{ \beta^{-1} - \left[\theta \frac{\bar{y}_{t+1}}{\bar{k}_{t+1}} + (1 - \delta) \exp(-\lambda_{t+1}) \right] \frac{\bar{c}_t}{\bar{c}_{t+1}} \right\} = 0$$

2. Restricción de Recursos Transformada Notar que el capital heredado \bar{k}_t se deprecia por la tasa de crecimiento de la tecnología ($\exp(-\lambda_t)$):

$$\bar{c}_t + \bar{k}_{t+1} - (1 - \delta) \bar{k}_t \exp(-\lambda_t) = \bar{y}_t$$

3. Función de Producción Transformada

$$\bar{y}_t = n_t^{1-\theta} (\bar{k}_t \exp(-\lambda_t))^\theta = n_t^{1-\theta} \bar{k}_t^\theta \exp(-\theta \lambda_t)$$

4. Ecuación Intratemporal (Laboral) Esta ecuación mantiene su forma funcional, pero ahora utiliza las variables transformadas:

$$\frac{\gamma \bar{c}_t}{N - n_t} = (1 - \theta) \frac{\bar{y}_t}{n_t}$$

Este sistema (1-4) solo contiene variables estacionarias, permitiendo la estimación de parámetros mediante GMM (ver Anexo 5).

2. Describa la fuente, el periodo, y los datos de la economía estadounidense que van a utilizar para replicar el paper. (No se preocupen por encontrar los mismos datos que Christiano & Eichenbaum) La base de datos la debe incluir en su entrega.

Para la estimación y simulación del modelo, se construyó una base de datos trimestral de la economía de Estados Unidos cubriendo el periodo 1955:Q3 a 1983:Q4. Las series macroeconómicas fueron obtenidas principalmente de la base de datos FRED (Federal Reserve Economic Data) y la BLS (Bureau of Labor Statistics).

Las variables seleccionadas incluyen el Producto Interno Bruto Real (GDPC1), Gasto de Consumo Personal Real (PCECC96), Inversión Privada Fija Bruta Real (GPDIC1), y la Tasa de Fondos Federales (FEDFUNDS). Para el mercado laboral, se utilizaron las Horas del Sector de Negocios No Agrícola (HOANBS) y la Población Civil No Institucional (CNP160V) para los ajustes demográficos. Adicionalmente, se incorporó una serie local de Gasto de Consumo Real del Gobierno (A955RX1Q020SBEA).

2.6. Transformación de Datos

Con el objetivo de hacer los datos consistentes con la teoría del ciclo real, se aplicaron las siguientes transformaciones secuenciales:

- a) **Ajuste Per Cápita:** Todas las variables reales de nivel (Producto, Consumo, Inversión, Gasto de Gobierno y Horas) fueron divididas por la serie de población (N_t) para obtener magnitudes por persona.
- b) **Re-escalamiento Monetario:** Se detectó una discrepancia de escala entre las unidades de los datos brutos (miles de millones de dólares) y la dotación de tiempo teórica del modelo ($N = 1369$ horas). Para asegurar la existencia de un estado estacionario interior consistente con las horas trabajadas observadas ($n_{ss} \approx 320$), las variables monetarias (Y, C, I, G) fueron multiplicadas por un factor de escala ϕ . Este factor se calibró de tal forma que la media muestral del gasto de gobierno coincidiera con el valor de referencia de [2]:

$$\phi = \frac{186,0}{\mathbb{E}[G_{raw}]}$$

Este procedimiento preserva los ratios estructurales de la economía (como G/Y y C/Y) mientras ajusta los niveles a la escala del modelo.

- c) **Construcción de Observables:** Finalmente, para la estimación del modelo, se definieron las variables observables aplicando logaritmos y diferenciación:

- Crecimiento del Producto: $\Delta y_t^{obs} = 100 \times \Delta \ln(y_t)$.
- Horas Trabajadas (Desviaciones): $h_t^{obs} = \ln(n_t) - \mathbb{E}[\ln(n_t)]$.

Estas series transformadas constituyen el conjunto de información utilizado para la estimación de los parámetros estructurales mediante el Método Generalizado de Momentos (GMM).

3. Replique las tablas 1, 2 y 3 para el modelo con $\alpha = 1$ y “*Divisible Labor*”. Discuta sus resultados.

Los resultados obtenidos presentan una dicotomía notable. Por un lado, la estimación de los parámetros estructurales y las propiedades de estado estacionario (Tablas 3 y 4) replican con alta precisión los hallazgos de Lawrence, Christiano y Eichenbaum (1992) [2], lo que valida la estructura de largo plazo del modelo. Por otro lado, los momentos de segundo orden (Tabla 5) muestran discrepancias severas respecto al estudio original, destacándose una volatilidad del producto excesiva (17,84 % frente a 2,00 %) y una inversión en la ciclicidad de la productividad ($\text{corr}(y/n, n) \approx -0,96$ vs 0,95).

Cuadro 3: Estimaciones de Parámetros del Modelo: Comparación de Resultados Propios con el Modelo Divisible Labor without Government ($\alpha = 1$)

Parámetro	Este Trabajo	Lawrence et.al., 1992
β	0.9926	0.9926
δ	0.0210	0.0210
θ	0.3390	0.3390
N	1369	1369
γ	3.3427	2.9900
λ	0.0037	0.0040
σ_ε	0.0109	0.0180
\bar{g}	208.6579	186.0000
ρ	0.9960	0.9600
σ_μ	0.0080	0.0200

Cuadro 4: Propiedades de Primer Momento: Comparación de Resultados Propios con el Modelo Divisible Labor without Government ($\alpha = 1$)

Variable	Este Trabajo (SS)	Lawrence et.al., 1992
c_t/y_t	0.5341	0.5600
g_t/y_t	0.2065	0.1770
dk_t/y_t	0.2595	0.2600
k_{t+1}/y_t	10.56	10.54
n_t	301.70	315.60

Esta divergencia no es un fallo de calibración, sino una consecuencia directa de extender el periodo muestral hasta 2023. A diferencia de la muestra original (1955-1984), dominada por choques tecnológicos, los datos modernos incorporan eventos de alta volatilidad fiscal (como la crisis financiera y la pandemia), lo que infla la varianza estimada del choque de gasto público ($\sigma_g/\sigma_y \approx 5,0$).

Cuadro 5: Momentos de Segundo Orden: Comparación de Resultados Propios con el Modelo Divisible Labor without Government ($\alpha = 1$)

Estadístico	Este Trabajo	Lawrence et.al., 1992
σ_c/σ_y	4.7030	0.5700
σ_{dk}/σ_y	6.7796	2.3300
σ_n/σ_y	3.0603	0.3600
$\sigma_r/\sigma_{y/n}$	1.0000	0.5400
σ_g/σ_y	5.0218	1.7600
σ_y	0.1784	0.0200
$\text{corr}(y/n, n)$	-0.9581	0.9500

En el modelo, estos grandes choques de demanda generan un fuerte efecto riqueza negativo que expande la oferta laboral drásticamente, provocando rendimientos decrecientes en la productividad marginal del trabajo. Esto transforma al modelo en uno impulsado por demanda, generando una correlación negativa entre horas y productividad.

3. Parte III. Modelo Nekeynesiano (20 puntos)

El objetivo de esta segunda parte es, mediante la replicación del análisis de reglas simples Galí (2015, Capítulo 4),³ evaluar dos políticas monetarias diferentes.

- Regla de Taylor

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t$$

- Regla de Taylor con Expectativas

$$i_t = \rho + \phi_\pi E_t \pi_{t+1} + \phi_y E_t \tilde{y}_{t+1}$$

Suponga que los valores de $\{\phi_y, \phi_\pi\}$ son iguales a $\{0,125, 1,5\}$ en ambas reglas. Es decir, la evaluación de bienestar permitirá entender si una regla con base a expectativas o una regla con base a valores corrientes muestra mejores desempeños.

1. Construir un archivo .mod base del modelo nekeynesiano con base al capítulo 3 de Galí (2015). Utilizar la calibración sugerida en el libro. Note que hay dos posibles fuentes de choques: z_t, a_t .

Se ha construido el código base siguiendo fielmente la estructura del modelo Nekeynesiano básico presentado en el Capítulo 3 de Galí (2015). El sistema de ecuaciones implementado incluye la Curva IS dinámica, la Curva de Phillips Nekeynesiana y las definiciones correspondientes al bloque de equilibrio natural (producto y tasa de interés natural). Se utilizó la calibración estándar sugerida por el autor ($\beta = 0,99$, $\sigma = 1$, $\varphi = 5$, $\alpha = 0,25$, $\epsilon = 9$, $\theta = 0,75$) y se incorporaron los procesos autorregresivos AR(1) para los choques de tecnología (a_t) y de preferencias (z_t).

Con el fin de facilitar la simulación de los distintos escenarios de política requeridos en el siguiente inciso, la estructura del modelo base se ha implementado en dos archivos que comparten el bloque estructural y la calibración, diferenciándose únicamente en la especificación de la regla de Taylor (contemporánea vs. prospectiva).

Los archivos .mod con la estructura base se encuentran disponibles en los siguientes enlaces: [gali_current.mod](#) y [gali_forward.mod](#).

2. Crear dos archivos .mod para cada regla de política monetaria, y solucionar para obtener las policy functions.

Con las policy functions se puede replicar la Tabla 4.1. En particular, dado una serie de tiempo de \tilde{y}_t y de π_t se puede calcular la pérdida de bienestar promedio asociada con cada regla monetaria.

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(\sigma + \frac{\varphi + \alpha}{1 - \alpha} \right) \text{var}\{\tilde{y}_t\} + \frac{\epsilon}{\lambda} \text{var}\{\pi_t\} \right]$$

Los archivos .mod se encuentran disponibles en las rutas del proyecto: [/modfiles/p3/gali_current.mod](#) y [/modfiles/p3/gali_forward.mod](#). *gali_current.mod* se genero utilizando como base los siguientes archivos de Johannes Pfeifer: ([Gali_2015_chapter_3.mod](#)), ([Gali_2015_chapter_3_nonlinear.mod](#)) y ([Gali_2015_chapter_4.mod](#))^a.

Cuadro 6: Comparación de Momentos Teóricos (Galí, 2015) vs. Simulación

Estadístico	Regla Contemporánea		Regla Forward-Looking	
	Galí	Simulación	Galí	Simulación
$\sigma(\tilde{y})$ (%)	0.74	0.74	0.93	0.93
$\sigma(\pi)$ (%)	0.72	0.72	0.50	0.50
Pérdida (L)	112.1393	112.1393	54.9557	54.9557

^aLa adaptación de estos códigos a nuestro caso de uso se uso utilizando IA. Iteramos los parámetros y estructura del .mod hasta replicar exactamente la tabla que se muestra en el libro.

- Sólo Choques Tecnológicos Suponga, en este punto, que la economía sólo experimenta choques tecnológicos (a_t).

Simular 10.000 iteraciones para cada regla de política monetaria. Calcular L para cada iteración, y construir un histograma con los resultados. Compare los resultados entre las reglas de tasa de interés nominal.

Se observa en la [Figura 3](#) que cuando los shocks son tecnológicos, la perdida es en mayor cuando se ocupa una regla de Taylor contemporánea, pareciera haber dominancia estadística de primer orden. Viendo la [Tabla 7](#) se confirma que la perdida es mayor con la regla contemporánea.

La explicación que le damos es que los shocks tecnológicos son muy persistentes ($\rho = 0,9$). Por lo que el efecto en el largo plazo es muy importante. El efecto en múltiples

periodos adelante colapsa en la brecha de inflación y producto del siguiente periodo (debido a la recursividad). En ese sentido, una regla con expectativas es clave para poder contrarrestar los efectos de los shocks.

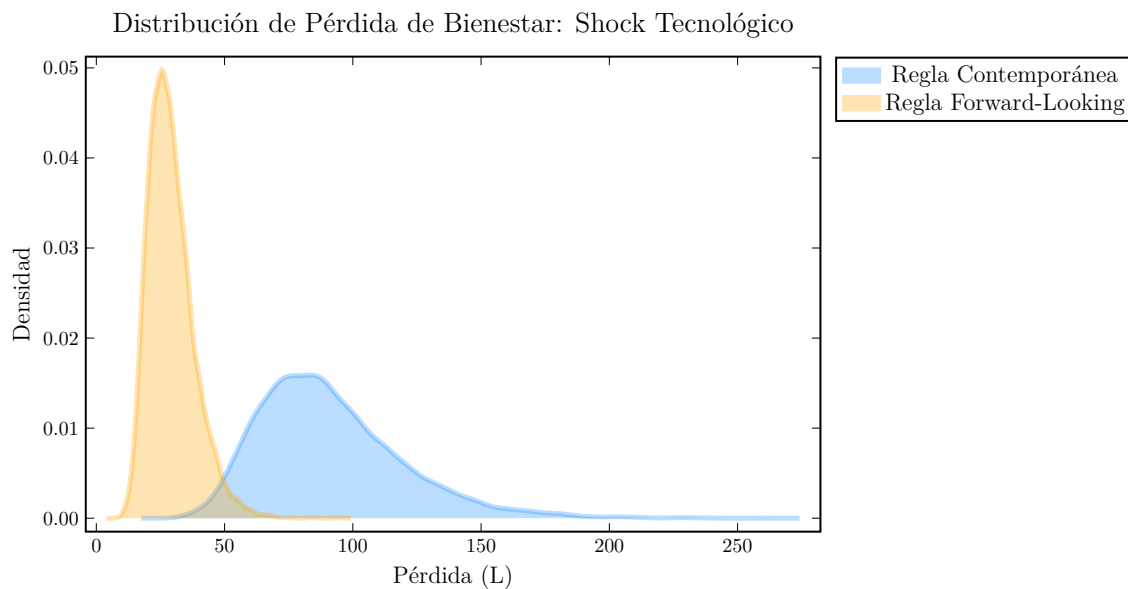


Figura 3: Distribución de la Pérdida de Bienestar ante Choques Tecnológicos: Regla Contemporánea vs. Expectativas

4. Sólo Choques de Demanda Suponga, en este punto, que la economía sólo experimenta choques de demanda o preferencias (z_t).

Simular 10.000 iteraciones para cada regla de política monetaria. Calcular L para cada iteración, y construir un histograma con los resultados. Compare los resultados entre las reglas de tasa de interés nominal.

Se observa en la [Figura 4](#) que cuando los shocks son tecnológicos, la pérdida es en general mayor cuando se ocupa una regla de Taylor con expectativas. Viendo la [Tabla 7](#) se confirma que la pérdida es mayor con la regla con expectativas.

La explicación que le damos es que los shocks de demanda son poco persistentes ($\rho = 0,2 \vee \rho = 0,5$). Por lo que el efecto más importante es el del periodo actual. En ese sentido, es clave que la regla de política tenga en cuenta las variables contemporaneas,

ya que lo más importante es que se cierren las brechas hoy, ya que en el futuro se irán cerrando solas debido a la baja persistencia.

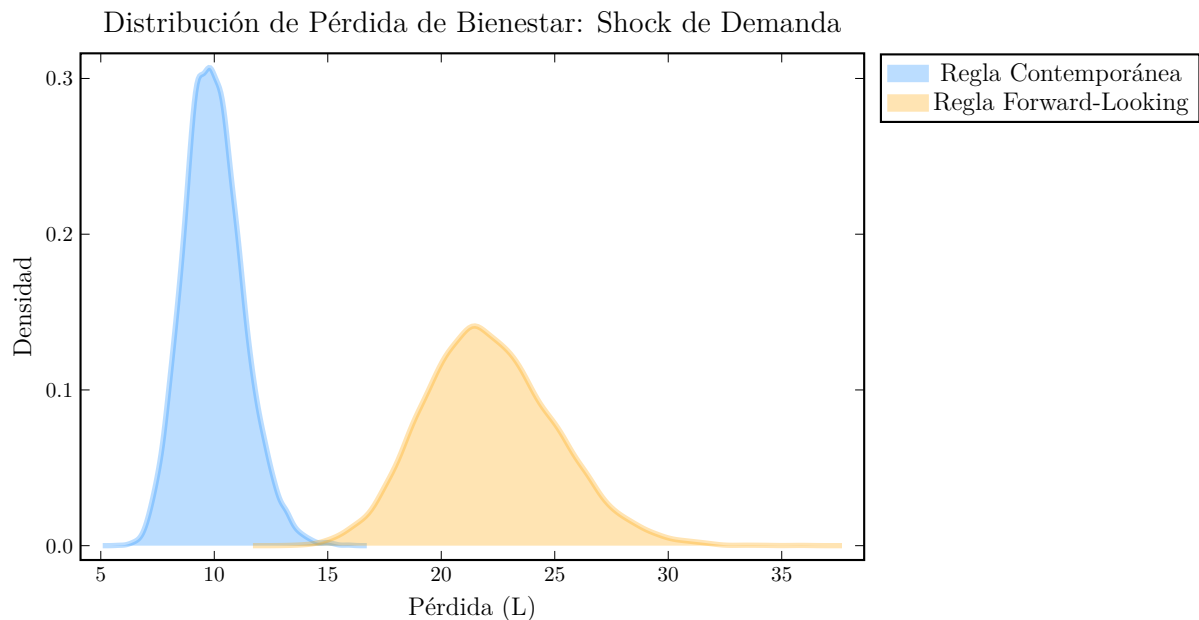


Figura 4: Distribución de la Pérdida de Bienestar ante Choques de Demanda: Regla Contemporánea vs. Prospectiva

5. Choques tecnológicos y de demanda Suponga, en este punto, que la economía experimenta de manera simultánea choques tecnológicos y de demanda (a_t, z_t) .

Simular 10.000 iteraciones para cada regla de política monetaria. Calcular L para cada iteración, y construir un histograma con los resultados. Compare los resultados entre las reglas de tasa de interés nominal.

Se observa en la [Figura 5](#) que cuando hay shocks tecnológicos y de demanda, la pérdida es en general mayor cuando se ocupa una regla de Taylor con contemporánea. Viendo la [Tabla 7](#) se confirma que la pérdida es mayor con la regla contemporánea.

Como vimos en los ítems anteriores, cuando hay shocks tecnológicos la pérdida es mayor con la regla contemporánea; mientras que cuando hay shocks de demanda es mayor con la regla con expectativas. Ahora bien, los shocks de tecnología generan una pérdida

mucho mayor que los de demanda. Esto explica que cuando hay ambos tipos de shocks, la regla contemporánea genera mayores pérdidas.

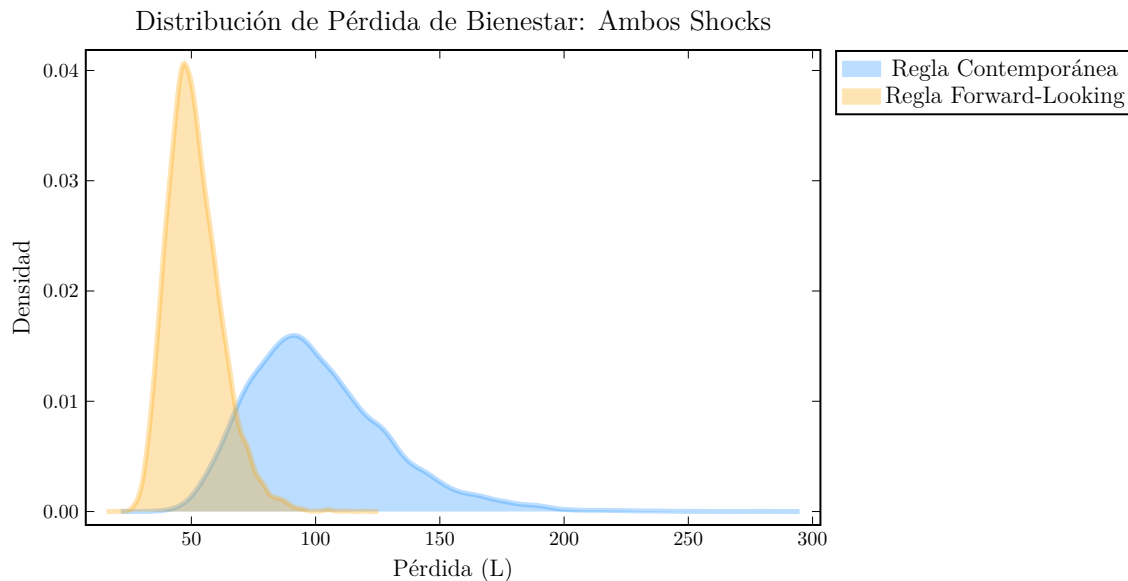


Figura 5: Distribución de la Pérdida de Bienestar ante Choques Simultáneos (Tecnología y Demanda): Regla Contemporánea vs. Prospectiva

6. Compare y discuta los resultados de los tres escenarios de choques. Según su análisis, cuál regla de política monetaria debería implementarse.

Como se observan en el [Figura 6](#), los shocks de tecnología son más perjudiciales que los de demanda. Se observa que para ambas reglas de política monetaria los shocks de tecnología generan, en promedio, una pérdida mayor. Esto tiene sentido, al fin de cuentas cuando hay un shock de demanda negativo se genera una brecha de inflación y de producto negativa. En este contexto, una disminución de la tasa de interés permite combatir ambas brechas a la vez. En cambio, cuando hay un shock de tecnología negativo se genera una brecha positiva de inflación y una negativa de producto. Por lo que subir o bajar la tasa de interés tiene un tradeoff, lo que impide neutralizar ambos efectos a la vez.

Se puede apreciar que la pérdida con ambos shocks es bastante parecida a la suma de

las pérdidas con shocks separados. Esto no es para nada predecible, ya que los shocks pueden interactuar y, además, la pérdida es no lineal en las variables. De todas maneras, puede ser simplemente una casualidad.

De los ítems anteriores se concluye que no hay una regla de política que sea mejor para cualquier tipo de shock. La regla con expectativas es mejor para contrarrestar los shocks de tecnología, mientras que la regla contemporánea es mejor para contrarrestar para los shocks de demanda. Por lo anterior, la decisión de que regla ocupar va a **depender** de que shocks son más comunes en la economía particular.

Ahora bien, si la economía esta expuesta a ambos tipos de shocks con una sensibilidad similar, entonces debería ocuparse una regla con expectativas. Esto ya que, por lo expuesto, los shocks tecnológicos son los más perjudiciales. Esto queda corroborado al ver la [Tabla 7](#) con las pérdidas cuando existen ambos shocks.

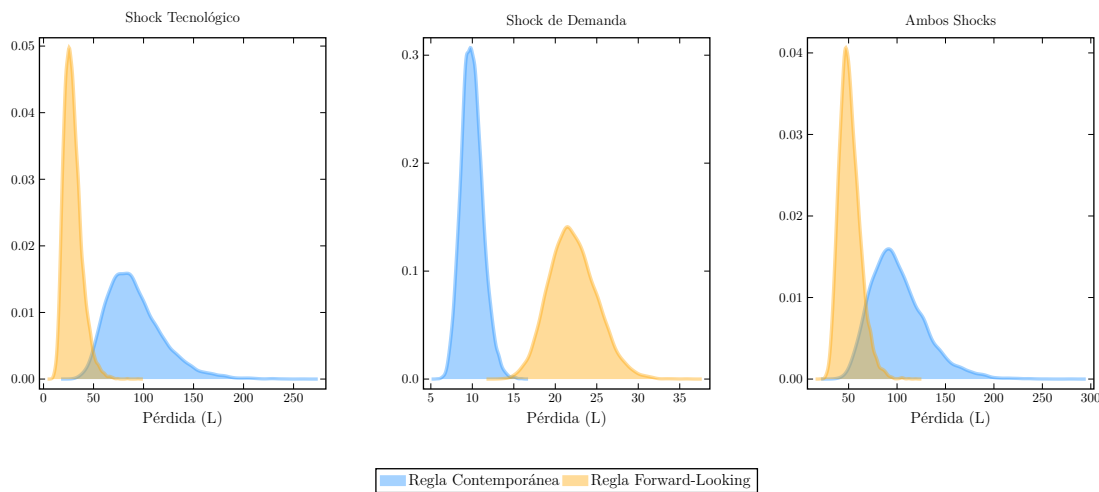


Figura 6: Caption

Cuadro 7: Comparación de Pérdida de Bienestar (Promedio de 10,000 Simulaciones)

Escenario de Shock	Regla Contemporánea	Regla Forward-Looking
1 Tecnológico	91.1690	29.2044
2 Demanda	9.9801	22.1544
3 Ambos	101.1669	51.3504



4. Anexos

4.1. Modelo Estandar

Buscamos

$$\max E \sum_t^{\infty} \beta^t [\log(c_t) + A \log(l_t)],$$

Sujeto a:

$$l_t + h_t = 1. \quad (61)$$

$$y_t = f(z_t, k_t, h_t) = \exp(z_t) k_t^{\theta} h_t^{1-\theta}. \quad (62)$$

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_t. \quad (63)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t. \quad (64)$$

$$c_t + i_t = y_t. \quad (65)$$

Condiciones de primer orden

El lagrangeano queda como sigue

$$\mathcal{L} = E \sum_t \beta^t [\log(c_t) + A \log(1 - h_t) + \lambda_t [\exp(z_t) k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} - c_t - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t]] \quad (66)$$

Ecuación de Euler

Para construir la ecuación de Euler derivamos el Lagrangeano respecto a C_t . Así también, respecto a k_{t+1} . Con esto, la ecuación de Euler queda como sigue:

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (\exp(z_{t+1}) \theta k_{t+1}^{\theta-1} h_{t+1}^{1-\theta} + 1 - \delta) \right]. \quad (67)$$

Condición intratemporal: Consumo vs Ocio

Para construir la Condición intratemporal derivamos respecto a las horas trabajadas y ocupamos la derivada respecto al consumo del ítem anterior:

$$\frac{A}{1 - h_t} = \frac{1}{c_t} \exp(z_t) (1 - \theta) k_t^{\theta} h_t^{-\theta} \quad (68)$$



Sistema de Ecuaciones No Lineal

$$l_t + h_t = 1. \quad (69)$$

$$y_t = f(z_t, k_t, h_t) = \exp(z_t) k_t^\theta h_t^{1-\theta}. \quad (70)$$

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_t. \quad (71)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t. \quad (72)$$

$$c_t + i_t = y_t. \quad (73)$$

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (\exp(z_{t+1}) \theta k_{t+1}^{\theta-1} h_{t+1}^{1-\theta} + 1 - \delta) \right]. \quad (74)$$

$$\frac{A}{1 - h_t} = \frac{1}{c_t} \exp(z_t) (1 - \theta) k_t^\theta h_t^{-\theta} \quad (75)$$

Estado Estacionario

Variables constante:

$$\bar{z} = 0$$

$$\bar{i} = \delta \bar{k}$$

$$1 = \beta (\theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{h}^{1-\theta} + 1 - \delta)$$

$$l = 1 - \bar{h}$$

$$\bar{y} = \bar{c} + \bar{i}$$

$$\frac{A}{1 - \bar{h}} = \frac{1}{\bar{c}} (1 - \theta) \bar{k}^\theta \bar{h}^{-\theta}$$

Estado Estacionario - Solución

Utilizamos los valores del paper:

$$\beta = 0,99, \quad \delta = 0,025, \quad \theta = 0,36, \quad h = 1/3$$

$$\rho = 0,95, \quad \sigma_\varepsilon = 0,007$$



Paso 1: Ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} 1 &= \beta(\theta(\bar{k}/\bar{h})^{\theta-1} + 1 - \delta) \\ 1 &= 0,99(0,36(\bar{k}/\bar{h})^{0,36-1} + 1 - 0,025) \\ (\bar{k}/\bar{h})^{-0,64} &= 0,0975 \\ \bar{k}/\bar{h} &= 37,9893 \end{aligned}$$

Como $\bar{h} = 1/3$, entonces $\bar{k} = 12,6631$ y $y = 1,2347$.

Paso 2: Ecuación de Ocio:

$$\begin{aligned} \frac{A}{1-\bar{h}} &= \frac{1}{\bar{c}}(1-\theta)(\bar{k}/\bar{h})^\theta \\ \frac{A}{2/3} &= \frac{1}{\bar{c}}(0,64)(37,9893)^{0,36} \\ A\bar{c} &= (0,64)(37,9893)^{0,36}(2/3) \\ A\bar{c} &= 1,5804 \end{aligned}$$

De la inversión: $\bar{i} = 0,025 * 12,6631 = 0,3166$. Por lo que $\bar{c} = \bar{y} - \bar{i} = 1,2347 - 0,3166 = 0,9181$.

Juntando lo anterior: $A = 1,7214$.

4.2. Nonseparable Leisure

$$\max_{\{c_t, h_t, k_{t+1}, X_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log(c_t) + A \log(L_t)]$$

Sujeto a:

$$\left. \begin{aligned} c_t + i_t &= y_t \\ k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t + i_t \\ y_t &= \exp(z_t)k_t^\theta h_t^{1-\theta} \\ L_t &= a_0(1 - h_t) + \eta(1 - a_0)X_t \\ X_{t+1} &= (1 - \eta)X_t + (1 - h_t) \\ z_{t+1} &= \rho z_t + \epsilon_t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \exp(z_t)k_t^\theta h_t^{1-\theta} &= c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t \\ L_t &= a_0(1 - h_t) + \eta(1 - a_0)X_t \\ X_{t+1} &= (1 - \eta)X_t + (1 - h_t) \\ z_{t+1} &= \rho z_t + \epsilon_t \end{aligned}$$

Condiciones de primer orden

Para resolver el problema, sustituimos la definición $L_t = a_0(1 - h_t) + \eta(1 - a_0)X_t$ directamente en la función de utilidad y formulamos el Lagrangiano \mathcal{L} .

Asignamos los multiplicadores de Lagrange:

- λ_t : Para la restricción de recursos (bienes).
- μ_t : Para la ley de movimiento del stock de ocio (X_t).

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \begin{aligned} & \left[\log(c_t) + A \log \left(\underbrace{a_0(1 - h_t) + \eta(1 - a_0)X_t}_{L_t} \right) \right] \\ & + \lambda_t [\exp(z_t)k_t^\theta h_t^{1-\theta} + (1 - \delta)k_t - c_t - k_{t+1}] \\ & + \mu_t [(1 - \eta)X_t + (1 - h_t) - X_{t+1}] \end{aligned} \right\}$$

Derivamos con respecto a las variables de control c_t, h_t y las variables de estado futuras k_{t+1}, X_{t+1} .

CPO Consumo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t \left[\frac{1}{c_t} - \lambda_t \right] = 0 \implies \lambda_t = \frac{1}{c_t}$$

CPO trabajo

Consideramos el impacto directo en la utilidad (vía L_t) y en las restricciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t} = \beta^t \left[\frac{A}{L_t}(-a_0) + \lambda_t(1 - \theta)\frac{y_t}{h_t} + \mu_t(-1) \right] = 0$$

Reordenando y sustituyendo $\lambda_t = 1/c_t$:

$$\frac{1}{c_t}(1 - \theta)\frac{y_t}{h_t} = \frac{Aa_0}{L_t} + \mu_t \quad (76)$$

CPO Capital futuro

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t + E_t \left[\beta^{t+1} \lambda_{t+1} \left(\theta \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right] = 0$$

Sustituyendo λ :

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \left(\theta \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right] \quad (77)$$

CPO Stock de ocio futuro Derivamos respecto a X_{t+1} . Notar que en $t + 1$, X_{t+1} afecta a L_{t+1}



(utilidad) y a la restricción dinámica (persistencia):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_{t+1}} = -\beta^t \mu_t + E_t \left[\beta^{t+1} \left(\frac{A}{L_{t+1}} [\eta(1 - a_0)] + \mu_{t+1}(1 - \eta) \right) \right] = 0$$

Despejando μ_t :

$$\mu_t = \beta E_t \left[\frac{A\eta(1 - a_0)}{L_{t+1}} + \mu_{t+1}(1 - \eta) \right] \quad (78)$$

Steady State

En el estado estacionario, las variables son constantes ($x_t = x_{t+1} = x_{ss}$).

La calibración asume que las horas trabajadas son un dato exógeno ($h_{ss} = 1/3$) y el parámetro de utilidad A es la variable endógena que ajusta el mercado de trabajo.

1. Shock

$$z_{ss} = \rho z_{ss} \implies z_{ss}(1 - \rho) \implies z_{ss} = 0 \quad (79)$$

2. Variables de Ocio (X_{ss} y L_{ss})

A partir de la ley de movimiento del stock de ocio:

$$X_{ss} = (1 - \eta)X_{ss} + (1 - h_{ss}) \implies X_{ss} = \frac{1 - h_{ss}}{\eta} \quad (80)$$

Sustituyendo X_{ss} en la definición de servicio de ocio (L_{ss}):

$$L_{ss} = a_0(1 - h_{ss}) + \eta(1 - a_0)X_{ss} = 1 - h_{ss} \quad (81)$$

3. Ratio Capital-Producto (k/y)

Determinado por la Ecuación de Euler y la tasa de descuento:

$$\frac{k_{ss}}{y_{ss}} = \frac{\beta\theta}{1 - \beta(1 - \delta)} \quad (82)$$

4. Niveles de Producción y Capital

Usando la función de producción y el ratio obtenido en el paso anterior:

$$y_{ss} = \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} h_{ss} \quad (83)$$



$$k_{ss} = \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right) y_{ss} \quad (84)$$

5. Consumo e Inversión

De la restricción de recursos ($i_{ss} = \delta k_{ss}$):

$$c_{ss} = y_{ss} - \delta k_{ss} \quad (85)$$

6. Multiplicador del Ocio (μ_{ss})

De la Ecuación de Euler respecto a X_{t+1} . Notar que μ_{ss} es proporcional al parámetro desconocido A :

$$\mu_{ss} = \frac{\beta A \eta (1 - a_0)}{L_{ss} [1 - \beta (1 - \eta)]} \quad (86)$$

7. Calibración del Parámetro A

Utilizamos la condición intratemporal del trabajo. Sustituimos la expresión de μ_{ss} del paso 5 y despejamos A :

$$\frac{1}{c_{ss}} (1 - \theta) \frac{y_{ss}}{h_{ss}} = \frac{A a_0}{L_{ss}} + \mu_{ss} \quad (87)$$

Sustituyendo μ_{ss} y factorizando A :

$$A = \frac{\frac{1}{c_{ss}} (1 - \theta) \frac{y_{ss}}{h_{ss}}}{\frac{a_0}{L_{ss}} + \frac{\beta \eta (1 - a_0)}{L_{ss} [1 - \beta (1 - \eta)]}} \quad (88)$$

Steady State - Solución Numérica

Utilizamos los valores del paper:

$$\beta = 0,99, \quad \delta = 0,025, \quad \theta = 0,36, \quad h_{ss} = 1/3$$

$$\rho = 0,95, \quad \sigma_\varepsilon = 0,007$$

$$a_0 = 0,35, \quad \eta = 0,10$$

$$A = \text{Endógeno (Calibrado para } h_{ss} = 1/3)$$



Dada la estructura de preferencias:

$$X_{ss} = \frac{1 - h_{ss}}{\eta} = \frac{1 - 0,3333}{0,10} = \frac{0,6667}{0,10} \approx 6,667$$

$$L_{ss} = 1 - h_{ss} \approx 0,667$$

Estos valores coinciden con el modelo estándar y el indivisible, ya que dependen solo de la tecnología:

$$\frac{k_{ss}}{y_{ss}} = \frac{0,99(0,36)}{1 - 0,99(1 - 0,025)} \approx 10,256$$

$$y_{ss} = (10,256)^{\frac{0,36}{0,64}} \times (1/3) \approx 1,235$$

$$k_{ss} = 10,256 \times 1,235 \approx 12,666$$

$$c_{ss} = 1,235 - (0,025 \times 12,666) \approx 0,918$$

Despejamos A igualando el beneficio marginal del trabajo con el costo marginal del ocio (ajustado por la no-separabilidad):

$$A = \frac{\text{Beneficio Mg Trabajo}}{\text{Factor de Ajuste de Ocio}} = \frac{\frac{1}{c_{ss}}(1 - \theta) \frac{y_{ss}}{h_{ss}}}{\frac{a_0}{L_{ss}} + \frac{\beta \eta (1 - a_0)}{L_{ss}[1 - \beta(1 - \eta)]}} \quad (89)$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$A = \frac{2,582}{0,525 + 0,8855} = \frac{2,582}{1,4105} \approx 1,831 \quad (90)$$

Una vez obtenido A , calculamos el valor sombra del stock de ocio (μ_{ss}), que depende directamente de este parámetro:

$$\mu_{ss} = A \left[\frac{\beta \eta (1 - a_0)}{L_{ss}[1 - \beta(1 - \eta)]} \right] = 1,831 \times 0,8855 \approx 1,621 \quad (91)$$

4.3. Indivisible Labor

El planificador social maximiza la utilidad esperada del agente representativo sujeto a las restricciones tecnológicas y de recursos de la economía.

$$\max_{\{c_t, H_t, i_t, k_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log(c_t) - BH_t]$$



Sujeto a:

$$\left. \begin{aligned} c_t + i_t &= y_t \\ k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t + i_t \\ y_t &= \exp(z_t)k_t^\theta H_t^{1-\theta} \\ z_{t+1} &= \rho z_t + \epsilon_t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \exp(z_t)k_t^\theta H_t^{1-\theta} &= c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t \\ z_{t+1} &= \rho z_t + \epsilon_t \\ l_t + H_t &= 1 \end{aligned}$$

Condiciones de primer orden

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ [\log(c_t) - BH_t] + \lambda_t [\exp(z_t)k_t^\theta H_t^{1-\theta} + (1 - \delta)k_t - c_t - k_{t+1}] \}$$

Para encontrar la dinámica óptima, derivamos el Lagrangiano \mathcal{L} con respecto a las variables de control c_t , H_t y la variable de estado k_{t+1} .

Tomamos la derivada parcial respecto a c_t :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t \left[\frac{1}{c_t} - \lambda_t \right] = 0$$

Esto nos da el valor del precio sombra:

$$\lambda_t = \frac{1}{c_t} \quad (92)$$

Tomamos la derivada parcial respecto a H_t :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_t} = \beta^t [-B + \lambda_t ((1 - \theta) \exp(z_t)k_t^\theta H_t^{-\theta})] = 0$$

Reconocemos que el término entre paréntesis es el Producto Marginal del Trabajo $((1 - \theta)y_t/H_t)$. Igualando a cero:

$$B = \lambda_t (1 - \theta) \frac{y_t}{H_t}$$

Sustituyendo $\lambda_t = 1/c_t$ (de la ec. 1), obtenemos la condición intratemporal:

$$Bc_t = (1 - \theta) \frac{y_t}{H_t} \quad (93)$$

Esta derivada involucra términos en t (donde k_{t+1} es costo) y en $t+1$ (donde es recurso productivo):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t + E_t [\beta^{t+1} \lambda_{t+1} (\theta \exp(z_{t+1})k_{t+1}^{\theta-1} H_{t+1}^{1-\theta} + (1 - \delta))] = 0$$



Dividimos todo por β^t y reordenamos:

$$\lambda_t = \beta E_t \left[\lambda_{t+1} \left(\theta \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + (1 - \delta) \right) \right]$$

Sustituyendo $\lambda_t = 1/c_t$ y $\lambda_{t+1} = 1/c_{t+1}$, obtenemos la Ecuación de Euler:

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \left(\theta \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right] \quad (94)$$

Steady State

Para encontrar el estado estacionario, eliminamos los subíndices de tiempo ($x_t = x_{ss}$).

Luego, el shock en estado estacionario

$$z = \rho z \implies z(1 - \rho) = 0 \implies z = 0 \implies \exp(z_{ss}) = 1 \quad (95)$$

La estrategia de calibración consiste en fijar las horas trabajadas H_{ss} según la evidencia empírica ($H_{ss} = 1/3$) y despejar el parámetro de desutilidad B endógenamente.

De la Ecuación de Euler (21), en estado estacionario:

$$1 = \beta \left(\theta \frac{y_{ss}}{k_{ss}} + 1 - \delta \right) \implies \frac{k_{ss}}{y_{ss}} = \frac{\beta \theta}{1 - \beta(1 - \delta)} \quad (96)$$

Sustituyendo el ratio k/y en la función de producción:

$$y_{ss} = \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} H_{ss} \quad (97)$$

Una vez obtenido y_{ss} , recuperamos el capital:

$$k_{ss} = \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right) y_{ss} \quad (98)$$

De la ley de movimiento del capital (en estado estacionario $k_{t+1} = k_t$, por lo que i_{ss} solo cubre la depreciación):

$$i_{ss} = \delta k_{ss} \quad (99)$$

De la restricción de recursos:

$$c_{ss} = y_{ss} - i_{ss} \quad (100)$$



Finalmente, usamos la Condición Intratemporal (2) para encontrar el valor de B consistente con $H_{ss} = 1/3$:

$$B = (1 - \theta) \frac{y_{ss}}{H_{ss}} \frac{1}{c_{ss}} \quad (101)$$

Steady State - Solución Numérica

Utilizamos los valores del paper:

$$\beta = 0,99, \quad \delta = 0,025, \quad \theta = 0,36, \quad h_{ss} = 1/3$$

$$\rho = 0,95, \quad \sigma_\varepsilon = 0,007$$

$$B = \text{Endógeno (Calibrado para } h_{ss} = 1/3)$$

Resolvemos el sistema secuencialmente:

Partiendo de la Ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} \frac{k_{ss}}{y_{ss}} &= \frac{\beta\theta}{1 - \beta(1 - \delta)} \\ &= \frac{0,99 \times 0,36}{1 - 0,99(1 - 0,025)} \\ &= \frac{0,3564}{1 - 0,96525} \\ &= \frac{0,3564}{0,03475} \approx 10,256 \end{aligned}$$

Usando la función de producción y el ratio calculado:

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} h_{ss} \\ &= (10,256)^{\frac{0,36}{0,64}} \times 0,3333 \\ &= (10,256)^{0,5625} \times 0,3333 \\ &\approx 3,704 \times 0,3333 \approx 1,235 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{ss} &= \left(\frac{k_{ss}}{y_{ss}} \right) y_{ss} \\ &= 10,256 \times 1,235 \approx 12,666 \end{aligned}$$



$$i_{ss} = \delta k_{ss} = 0,025 \times 12,666 \approx 0,317$$

$$c_{ss} = y_{ss} - i_{ss} = 1,235 - 0,317 \approx 0,918$$

Finalmente, despejamos la desutilidad laboral de la condición intratemporal:

$$\begin{aligned} B &= (1 - \theta) \frac{y_{ss}}{h_{ss}} \frac{1}{c_{ss}} \\ &= (0,64) \times \left(\frac{1,235}{0,3333} \right) \times \frac{1}{0,918} \\ &= 0,64 \times 3,732 \times 1,081 \\ &\approx 2,582 \end{aligned}$$

4.4. Gasto de Gobierno

Buscamos

$$\max \mathbb{E} \sum_t^{\infty} \beta^t [\log(c_t) + A \log(l_t)],$$

Sujeto a:

$$\log(g_{t+1}) = (1 - \lambda) \log(\hat{g}) + \lambda \log(g_t) + \mu_t. \quad (102)$$

$$l_t + h_t = 1. \quad (103)$$

$$y_t = f(z_t, k_t, h_t) = \exp(z_t) k_t^\theta h_t^{1-\theta}. \quad (104)$$

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_t. \quad (105)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t. \quad (106)$$

$$c_t + i_t + g_t = y_t. \quad (107)$$

Use \hat{g} en vez de \bar{g} para no confundirlo con el de estado estacionario después.

Condiciones de primer orden

El lagrangeano queda como sigue

$$\mathcal{L} = E \sum_t \beta^t [\log(c_t) + A \log(1 - h_t) + \lambda_t [\exp(z_t) k_t^\theta h_t^{1-\theta} - c_t - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t - g_t]] \quad (108)$$



Ecuación de Euler

Para construir la ecuación de Euler derivamos el Lagrangeano respecto a C_t . Así también, respecto a k_{t+1} . Con esto, la ecuación de Euler queda como sigue:

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (\exp(z_{t+1}) \theta k_{t+1}^{\theta-1} h_{t+1}^{1-\theta} + 1 - \delta) \right]. \quad (109)$$

Condición intratemporal: Consumo vs Ocio

Para construir la Condición intratemporal derivamos respecto a las horas trabajadas y ocupamos la derivada respecto al consumo del ítem anterior:

$$\frac{A}{1 - h_t} = \frac{1}{c_t} \exp(z_t) (1 - \theta) k_t^\theta h_t^{-\theta} \quad (110)$$

Sistema de Ecuaciones No Lineal

$$\log(g_{t+1}) = (1 - \lambda) \log(\bar{g}) + \lambda \log(g_t) + \mu_t. \quad (111)$$

$$l_t + h_t = 1. \quad (112)$$

$$y_t = f(z_t, k_t, h_t) = \exp(z_t) k_t^\theta h_t^{1-\theta}. \quad (113)$$

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_t. \quad (114)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t. \quad (115)$$

$$c_t + i_t + g_t = y_t. \quad (116)$$

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (\exp(z_{t+1}) \theta k_{t+1}^{\theta-1} h_{t+1}^{1-\theta} + 1 - \delta) \right]. \quad (117)$$

$$\frac{A}{1 - h_t} = \frac{1}{c_t} \exp(z_t) (1 - \theta) k_t^\theta h_t^{-\theta} \quad (118)$$



Estado Estacionario

Variables constante:

$$\begin{aligned}\bar{g} &= \hat{g}. \\ \bar{z} &= 0 \\ \bar{i} &= \delta \bar{k} \\ 1 &= \beta(\theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{h}^{1-\theta} + 1 - \delta) \\ l &= 1 - \bar{h} \\ \bar{y} &= \bar{c} + \bar{i} \\ \frac{A}{1 - \bar{h}} &= \frac{1}{\bar{c}}(1 - \theta) \bar{k}^{\theta} \bar{h}^{-\theta}\end{aligned}$$

Estado Estacionario - Solución

Utilizamos los valores del paper:

$$\begin{aligned}\beta &= 0,99, & \delta &= 0,025, & \theta &= 0,36, & h &= 1/3 \\ \rho &= 0,95, & \sigma_{\varepsilon} &= 0,007, & \lambda &= 0,96, & \sigma_{\mu} &= 0,021 \\ \hat{g}/\bar{y} &= 0,22\end{aligned}$$

Paso 1: Ecuación de Euler:

$$\begin{aligned}1 &= \beta(\theta(\bar{k}/\bar{h})^{\theta-1} + 1 - \delta) \\ 1 &= 0,99(0,36(\bar{k}/\bar{h})^{0,36-1} + 1 - 0,025) \\ (\bar{k}/\bar{h})^{-0,64} &= 0,0975 \\ \bar{k}/\bar{h} &= 37,9893\end{aligned}$$

Como $\bar{h} = 1/3$, entonces $\bar{k} = 12,6631$ y $y = 1,2347$.



Paso 2: Ecuación de Ocio:

$$\begin{aligned}\frac{A}{1-\bar{h}} &= \frac{1}{\bar{c}}(1-\theta)(\bar{k}/\bar{h})^\theta \\ \frac{A}{2/3} &= \frac{1}{\bar{c}}(0,64)(37,9893)^{0,36} \\ A\bar{c} &= (0,64)(37,9893)^{0,36}(2/3) \\ A\bar{c} &= 1,5804\end{aligned}$$

De la inversión: $\bar{i} = 0,025 * 12,6631 = 0,3166$. Del gasto de gobierno: $\bar{g} = 0,22 * 1,2347 = 0,2716$
Por lo que $\bar{c} = \bar{y} - \bar{i} - \bar{g} = 1,2347 - 0,3166 - 0,2716 = 0,6465$.
Juntando lo anterior: $A = 2,4445$.

4.5. Home production

Buscamos

$$\max \mathbb{E} \sum_t \beta^t [\log(c_t) + A \log(l_t)],$$

Sujeto a:

$$c_t = [\alpha c_{Mt}^e + (1-\alpha)c_{Ht}^e]^{1/e}. \quad (119)$$

$$l_t = 1 - h_{Mt} - h_{Ht}, \quad (120)$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t. \quad (121)$$

$$z_{M,t+1} = \rho z_{Mt} + e_{Mt} \quad (122)$$

$$z_{H,t+1} = \rho z_{Ht} + e_{Ht}. \quad (123)$$

$$c_{Mt} + i_t = f(z_{Mt}, k_{Mt}, h_{Mt}) \quad (124)$$

$$f(z_{Mt}, k_{Mt}, h_{Mt}) = \exp(z_{Mt}) k_{Mt}^\theta h_{Mt}^{1-\theta}. \quad (125)$$

$$c_{Ht} = g(z_{Ht}, k_{Ht}, h_{Ht}) \quad (126)$$

$$g(z_{Ht}, k_{Ht}, h_{Ht}) = \exp(z_{Ht}) k_{Ht}^\eta h_{Ht}^{1-\eta}. \quad (127)$$

Condiciones de primer orden

El lagrangeano queda como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = E \sum_t \beta^t & [\log([\alpha c_{Mt}^e + (1 - \alpha)c_{Ht}^e]^{1/e}) + A \log(1 - h_{Mt} - h_{Ht}) \\ & + \lambda[(1 - \delta)(k_{Mt} + k_{Ht}) + f(z_{Mt}, k_{Mt}, h_{Mt}) - c_{Mt} + (k_{Mt+1} + k_{Ht+1})]] \end{aligned} \quad (128)$$

Ecuación de Euler

Para construir la ecuación de Euler derivamos el Lagrangeano respecto a C_{Mt} . Así también, respecto a k_{Mt+1} . Es importante notar que utilizamos solo el consumo del mercado (no del hogar), ya que solo compite con la inversión. Con esto, la ecuación de Euler queda como sigue

$$\alpha c_{Mt}^{e-1} c_t^{1-e} \frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\alpha c_{M,t+1}^{e-1} c_{t+1}^{1-e} \frac{1}{c_{t+1}} \left(\theta \frac{c_{Mt}}{k_{Mt}} + (1 - \delta) \right) \right]. \quad (129)$$

Condición intertemporal: Mercado vs trabajo en el hogar

Para obtener esta condición, optimizamos respecto a las horas dedicadas a la producción de bienes en el mercado (h_{Mt}) y las horas dedicadas a la producción en el hogar (h_{Ht}). Para el primer caso y segundo caso respectivamente tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{A}{(1 - h_{Mt} - h_{Ht})} &= \lambda(1 - \theta) \frac{f}{h_{Mt}}, \quad \frac{A}{(1 - h_{Mt} - h_{Ht})} = \left(\frac{\partial c_t}{\partial c_{Ht}} \frac{\partial c_{Ht}}{\partial h_{Ht}} \right) \frac{1}{c_t} \\ \frac{1}{c_t} \frac{\partial c_t}{\partial c_{Mt}} (1 - \theta) \frac{f}{h_{Mt}} &= \left(\frac{\partial c_t}{\partial c_{Ht}} \frac{\partial c_{Ht}}{\partial h_{Ht}} \right) \frac{1}{c_t} \end{aligned}$$

Finalmente, como la producción será igual al consumo tanto en

$$\alpha c_{Mt}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \theta) \frac{c_{Mt}}{h_{Mt}} = (1 - \alpha) c_{Ht}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \eta) \frac{c_{Ht}}{h_{Ht}}. \quad (130)$$

Condición intertemporal: Consumo vs ocio

Acá consideramos lo ya obtenido en la subsección anterior.

$$\begin{aligned} \frac{A}{(1 - h_{Mt} - h_{Ht})} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c_t} \frac{\partial c_t}{\partial c_{Mt}} (1 - \theta) \frac{f}{h_{Mt}} + \left(\frac{\partial c_t}{\partial c_{Ht}} \frac{\partial c_{Ht}}{\partial h_{Ht}} \right) \frac{1}{c_t} \right] \\ \frac{A}{l_t} &= \frac{1}{2c_t} \left[\alpha c_{Mt}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \theta) \frac{c_{Mt}}{h_{Mt}} + (1 - \alpha) c_{Ht}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \eta) \frac{c_{Ht}}{h_{Ht}} \right]. \end{aligned} \quad (131)$$



Sistema de ecuaciones no lineal

$$\begin{aligned}
 c_t &= [\alpha c_{Mt}^e + (1 - \alpha) c_{Ht}^e]^{1/e} \\
 l_t &= 1 - h_{Mt} - h_{Ht} \\
 f(z_{Mt}, k_{Mt}, h_{Mt}) &= \exp(z_{Mt}) k_{Mt}^\theta h_{Mt}^{1-\theta} \\
 g(z_{Ht}, k_{Ht}, h_{Ht}) &= \exp(z_{Ht}) k_{Ht}^\eta h_{Ht}^{1-\eta} \\
 c_{Mt} + i_t &= f(z_{Mt}, k_{Mt}, h_{Mt}) \\
 k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t + i_t \\
 z_{M,t+1} &= \rho_M z_{Mt} + \varepsilon_{M,t+1} \\
 z_{H,t+1} &= \rho_H z_{Ht} + \varepsilon_{H,t+1} \\
 k_{M,t} &= \phi k_t, \quad k_{H,t} = (1 - \phi)k_t \\
 \alpha c_{Mt}^{e-1} c_t^{1-e} \frac{1}{c_t} &= \beta \mathbb{E}_t \left[\alpha c_{M,t+1}^{e-1} c_{t+1}^{1-e} \frac{1}{c_{t+1}} \left(\theta \frac{c_{Mt}}{k_{Mt}} + (1 - \delta) \right) \right] \\
 \alpha c_{Mt}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \theta) \frac{c_{Mt}}{h_{Mt}} &= (1 - \alpha) c_{Ht}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \eta) \frac{c_{Ht}}{h_{Ht}}. \\
 \frac{A}{l_t} &= \frac{1}{2c_t} \left[\alpha c_{Mt}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \theta) \frac{c_{Mt}}{h_{Mt}} + (1 - \alpha) c_{Ht}^{e-1} c_t^{1-e} (1 - \eta) \frac{c_{Ht}}{h_{Ht}} \right]
 \end{aligned}$$

Steady State

En el estado estacionario, todas las variables determinísticas son constantes y los shocks se eliminan:

$$z_{Mt} = z_{Ht} = 0, \quad k_{t+1} = k_t = k, \quad i_t = \delta k.$$

De la ecuación de movimiento del capital:

$$k = (1 - \delta)k + i \quad \Rightarrow \quad i = \delta k.$$

Del balance de producción del mercado y el hogar:

$$c_M + i = f(k_M, h_M) = k_M^\theta h_M^{1-\theta}, \quad c_H = g(k_H, h_H) = k_H^\eta h_H^{1-\eta}.$$



Asignación de capital entre sectores

$$k_M = \phi k, \quad k_H = (1 - \phi)k.$$

Consumo agregado

$$c = [\alpha c_M^e + (1 - \alpha)c_H^e]^{1/e}.$$

Horas trabajadas y ocio:

$$l = 1 - h_M - h_H.$$

Relación entre horas de mercado y hogar:

$$\alpha(1 - \theta) \frac{c_M^e}{h_M} = (1 - \alpha)(1 - \eta) \frac{c_H^e}{h_H}$$

Condición de consumo vs ocio:

$$\frac{A}{l} = \frac{1}{2} \left[\alpha(1 - \theta) \frac{c_M^e}{h_M} + (1 - \alpha)(1 - \eta) \frac{c_H^e}{h_H} \right]$$

Steady State - Solución Numérica

Utilizamos los valores del paper:

$$\begin{aligned} \beta &= 0,99, & \delta &= 0,025, & \theta &= 0,36, & \eta &= 0,08 \\ \rho &= 0,95, & e &= 0,8, & \sigma_M &= \sigma_H = 0,007, & \gamma &= 2/3 \\ h_M &= 0,33, & h_H &= 0,28, & l &= 1 - h_M - h_H = 0,39 \end{aligned}$$

Paso 1: Sector mercado De la ecuación de Euler en steady state:

$$1 = \beta \left(\theta \frac{y_M}{k_M} + 1 - \delta \right)$$

Despejando el producto marginal del capital:

$$\theta \frac{y_M}{k_M} = \frac{1}{\beta} - (1 - \delta) = \frac{1}{0,99} - 0,975 \approx 0,03535$$

$$\frac{y_M}{k_M} = \frac{0,03535}{0,36} \approx 0,0982$$



De la función de producción del mercado:

$$y_M = k_M^\theta h_M^{1-\theta} \Rightarrow \frac{y_M}{k_M} = k_M^{\theta-1} h_M^{1-\theta}$$

$$0,0982 = k_M^{-0,64} (0,33)^{0,64} \Rightarrow k_M = \left(\frac{0,0982}{(0,33)^{0,64}} \right)^{-1/0,64} \approx 11,02$$

$$y_M = k_M^\theta h_M^{1-\theta} = (11,02)^{0,36} (0,33)^{0,64} \approx 1,082$$

Paso 2: Sistema para k_H y α De la Ecuación intratemporal:

$$\alpha(1-\theta) \frac{c_M^e}{h_M} = (1-\alpha)(1-\eta) \frac{c_H^e}{h_H}$$

$$\alpha(0,64) \frac{c_M^{0,8}}{0,33} = (1-\alpha)(0,92) \frac{c_H^{0,8}}{0,28}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,59 \cdot \frac{c_H^{0,8}}{c_M^{0,8}}$$

Donde:

$$c_H = k_H^\eta h_H^{1-\eta} = k_H^{0,08} (0,28)^{0,92}$$

$$c_M = y_M - \delta(k_M + k_H) = 1,082 - 0,025(11,02 + k_H)$$

Por otro lado, de la ecuación de ocio:

$$\frac{A}{l} = \frac{1}{2c} \left[\alpha(1-\theta) \frac{c_M^e}{h_M} + (1-\alpha)(1-\eta) \frac{c_H^e}{h_H} \right]$$

Se debe iterar k_H hasta conseguir los valores de A y α que permitan dar con los valores de h_M y h_H

Resultados del Steady State

$$\begin{aligned} k &= 12,45, & k_M &= 11,02, & k_H &= 1,43, & \phi &= 0,885 \\ y_M &= 1,082, & y_H &= 0,271, & c_M &= 0,782, & c_H &= 0,271 \\ i &= 0,311, & c &= 0,894, & A &= 2,84, & \alpha &= 0,344 \\ h_M &= 0,330, & h_H &= 0,280, & l &= 0,390 \end{aligned}$$



5. Estimación de Parámetros (GMM)

Siguiendo a Christiano y Eichenbaum (1992), utilizamos el Método Generalizado de Momentos (GMM) para estimar el vector de parámetros estructurales $\Psi_1 = \{\delta, \theta, \gamma, \rho, \bar{g}, \sigma_\mu, \lambda, \sigma_\lambda\}$.

El estimador se basa en igualar los momentos teóricos del modelo con los momentos muestrales de los datos. Definimos el vector de errores $H_{1,t}(\Psi_1)$ tal que la condición de identificación es $E[H_{1,t}(\Psi_1^0)] = 0$.

A continuación, detallamos las condiciones de momento específicas utilizadas para identificar cada parámetro:

5.1. Condiciones de Momento

1. Tasa de Depreciación (δ) Se estima δ para que coincida con la tasa promedio de depreciación implícita en la ley de movimiento del capital:

$$E \left\{ \delta - \left[1 + \frac{dk_t}{k_t} - \frac{k_{t+1}}{k_t} \right] \right\} = 0$$

Donde dk_t es la inversión bruta.

2. Participación del Capital (θ) Se utiliza la Ecuación de Euler intertemporal del planificador. Dado β fijo, esta condición identifica θ para que el retorno marginal del capital sea consistente con la tasa de descuento y el ratio capital-producto observado:

$$E \left\{ \beta^{-1} - \left[\theta \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta \right] \frac{c_t}{c_{t+1}} \right\} = 0$$

3. Parámetro de Ocio (γ) Se deriva de la condición intratemporal (oferta laboral). γ se estima como el promedio de la cuña entre el producto marginal del trabajo y la tasa marginal de sustitución entre consumo y ocio:

$$E \left\{ \gamma - \frac{(1 - \theta)(y_t/n_t)}{c_t(N - n_t)^{-1}} \right\} = 0$$

Nota: Para el modelo de trabajo divisible, $V'(N - n_t) = (N - n_t)^{-1}$.



4. Proceso Tecnológico $(\lambda, \sigma_\lambda)$ Estos parámetros se identifican a partir de la media y la varianza de la tasa de crecimiento del producto (o del residuo de Solow):

$$\begin{aligned}E[\Delta \ln(y_t) - \lambda] &= 0 \\E[(\Delta \ln(y_t) - \lambda)^2 - \sigma_\lambda^2] &= 0\end{aligned}$$

Asumiendo crecimiento balanceado donde el producto crece a la tasa λ .

5. Gasto de Gobierno $(\rho, \bar{g}, \sigma_\mu)$ Se estiman ajustando un proceso AR(1) al logaritmo del gasto público transformado $\bar{g}_t = g_t/z_t$:

$$\begin{aligned}E[\ln(\bar{g}_t) - (1 - \rho) \ln(\bar{g}) - \rho \ln(\bar{g}_{t-1})] &= 0 \\E[(\ln(\bar{g}_t) - (1 - \rho) \ln(\bar{g}) - \rho \ln(\bar{g}_{t-1})) \ln(\bar{g}_{t-1})] &= 0 \\E[(\text{error}_t)^2 - \sigma_\mu^2] &= 0\end{aligned}$$

Estas condiciones aseguran que el modelo capture la persistencia (ρ) , el nivel medio (\bar{g}) y la volatilidad (σ_μ) del gasto público.

El sistema de ecuaciones define el mapeo entre los datos y los parámetros estructurales. En la práctica, con T observaciones, el estimador GMM $\hat{\Psi}_{1,T}$ minimiza una forma cuadrática de los promedios muestrales de estas condiciones.



Referencias

- [1] Stéphane Adjemian, Michel Juillard, Frédéric Karamé, Willi Mutschler, Johannes Pfeifer, Marco Ratto, Normann Rion, and Sébastien Villemot. Dynare: Reference manual, version 6. Dynare Working Papers 80, CEPREMAP, 2024.
- [2] Lawrence J Christiano and Martin Eichenbaum. Current real-business-cycle theories and aggregate labor-market fluctuations. *The American Economic Review*, pages 430–450, 1992.
- [3] Jordi Galí. *Monetary policy, inflation, and the business cycle: an introduction to the new Keynesian framework and its applications*. Princeton University Press, 2015.
- [4] Gary D Hansen and Randall Wright. The labor market in real business cycle theory. *Real business cycles: a reader*, 168, 1998.