



## Tarea Computacional: Macroeconomía

Cristobal Donoso Oliva<sup>1</sup>, Eduardo Engel<sup>2</sup> Agustin Farias<sup>3</sup> Miguel del Valle<sup>4</sup>  
María Jesús Negrete<sup>5</sup>

1. Estudiantes
2. Profesor
- 3-5. Ayudantes

May 17, 2025

Una firma arrienda capital  $k_t$  en un mercado competitivo a precio  $R$  por unidad de capital por unidad de tiempo  $t = 0, 1, 2, \dots$ , y su función de producción es  $z_t k_t^\theta$ . La tecnología evoluciona en tiempos discretos de acuerdo a  $\log z_t = \rho \log z_{t-1} + \epsilon_t$  con  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Una fracción  $\delta \in (0, 1)$  se deprecia cada periodo. La firma debe pagar un costo de ajuste para cambiar el stock de capital que arrienda. El problema de la firma es maximizar la suma del producto neto de costos, descontado a tasa  $\beta$ .

Consideramos dos diferentes supuestos sobre el tiempo-de-construcción y dos distintas formas de costos de ajuste. Usted debe resolver el problema de la firma en los cuatro casos y luego comparar los resultados.

Primero considere el tiempo-de-construcción [1]: (i) si la firma decide en el periodo  $t$  ajustar el stock de capital que arrienda, entonces la firma va a operar con su antiguo stock de capital en el periodo  $t$  y el nuevo stock va a estar operacional desde el periodo  $t + 1$ ;

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t.$$

(ii) Si la firma decide en el periodo  $t$  ajustar su stock de capital, entonces la firma va a operar con el nuevo stock inmediatamente desde el periodo  $t$ ;

$$K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + I_t.$$

En el primer caso el capital toma un periodo en ser instalado, mientras que en el segundo está "listo para usar".

Luego, consideremos los costos de ajuste. Están fijos, eso significa que, independientemente del tamaño del ajuste en el stock de capital la firma paga un costo fijo para cambiar su contrato de



arriendo. Consideramos dos modelos: (a) el costo de ajuste es una cantidad fija  $F$ ; (b) el costo fijo es una fracción  $P \in (0, 1)$  de la utilidad de la firma en el periodo  $t$ .

En cada uno de estos cuatro casos, la función valor de la firma puede ser escrita como el máximo sobre ajustar el stock de capital en una cantidad óptima y no ajustar. La ecuación de Bellman [2] del primer modelo (i.a) es:

$$V(k, z) = \max \left\{ \max_{k'} \{zk^\theta - kR - F + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k', z')]\}, zk^\theta - kR + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k, z')]\right\}.$$

1. Escriba la ecuación de Bellman para cada uno de los otros tres casos: (i.b), (ii.a) y (ii.b). Explique la diferencia entre los cuatro problemas. ¿Cuál forma de costos de ajuste considera más empíricamente relevante? ¿Por qué? Explique como los supuestos sobre el tiempo-de-construcción cambian los trade-offs intertemporales. Explique como los supuestos sobre la forma de los costos de ajuste interactúan con la heterogeneidad en la productividad. (Hint: ¿Son los costos de ajuste homogéneos entre las firmas?).

**Caso (i.a): Tiempo-de-construcción  $t + 1$ , Costo de ajuste fijo  $F$**

$$V(k, z) = \max \left\{ \underbrace{zk^\theta - Rk + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k, z')]}_{\text{No ajustar}}, \underbrace{\max_{k'} \{zk^\theta - Rk - F + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k', z')]\}}_{\text{Ajustar}} \right\}$$

**Caso (i.b): Tiempo-de-construcción  $t + 1$ , Costo de ajuste  $P \cdot \max(0, zk^\theta - Rk)$**

$$V(k, z) = \max \left\{ \underbrace{zk^\theta - Rk + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k, z')]}_{\text{No ajustar}}, \underbrace{\max_{k'} \{(1 - P)(zk^\theta - Rk) + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k', z')]\}}_{\text{Ajustar}} \right\}$$

**Caso (ii.a): Tiempo-de-construcción  $t$  (listo para usar), Costo de ajuste  $F$ .**

$$V(k_{\text{in}}, z) = \max \left\{ \underbrace{zk^{\theta} - Rk + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k, z')]}_{\text{No ajustar}}, \underbrace{\max_{k'} \{ zk'^{\theta} - Rk' - F + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k', z')] \}}_{\text{Ajustar}} \right\}$$

**Caso (ii.b): Tiempo-de-construcción  $t$  (listo para usar), Costo de ajuste  $P$**

$$V(k, z) = \max \left\{ \underbrace{zk^{\theta} - Rk + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k, z')]}_{\text{No ajustar}}, \underbrace{\max_{k'} \{ (1 - P)(zk'^{\theta} - Rk') + \beta \mathbb{E}_{z'} [V((1 - \delta)k', z')] \}}_{\text{Ajustar}} \right\}$$

Los cuatro casos se diferencian según dos aspectos clave: cuándo se puede usar el capital ajustado (es decir, si entra en funcionamiento en el mismo período o en el siguiente), y cómo se estructura el costo de ajuste (si es un monto fijo  $F$  o una fracción proporcional  $P$  de las utilidades).

**Diferencias entre los casos:** En los casos (i.a) y (i.b), el nuevo capital solo puede utilizarse desde el período siguiente, lo que significa que los beneficios del ajuste no se obtienen de inmediato. Esto reduce el incentivo a invertir frente a shocks temporales. En cambio, en los casos (ii.a) y (ii.b), el capital ajustado está disponible de forma inmediata, lo que permite a la firma aprovechar los beneficios del shock en el mismo período, haciendo que la inversión sea más reactiva ante cambios en la productividad.

Por otro lado, en los casos con **costo fijo**  $F$ , el costo de ajustar es el mismo para todas las firmas, sin importar cuán productivas sean. En cambio, con **costos proporcionales**  $P$ , el costo de ajuste depende de las utilidades, por lo que varía entre firmas: aquellas más productivas enfrentan un costo absoluto mayor, lo que introduce una dimensión adicional de heterogeneidad.

**¿Qué forma de costo parece más realista?** En la práctica, los costos de inversión tienden a crecer con la escala del proyecto o el tamaño de la firma. Por eso, los costos proporcionales capturan mejor esa realidad, ya que permiten que firmas grandes enfrenten costos mayores al ajustar, mientras que para firmas pequeñas el ajuste puede ser menos costoso. Además, reflejan mejor la diversidad que se observa en la inversión entre firmas.



**¿Cómo cambia el análisis con el tiempo de construcción?** Cuando el capital nuevo entra en uso recién al siguiente período (casos **(i)**), el beneficio del ajuste llega más tarde, pero el costo se paga hoy. Esto hace que la decisión de ajustar sea más difícil de justificar. En cambio, si el capital está listo para usarse de inmediato (casos **(ii)**), el beneficio y el costo ocurren en el mismo período, lo que favorece ajustes más frecuentes.

**¿Cómo influye esto en la heterogeneidad entre firmas?** Con costos proporcionales, firmas con mayor productividad —y por ende, mayores utilidades— enfrentan también costos de ajuste más altos. Esto significa que el incentivo a invertir no es el mismo para todas, lo que genera diferencias en las decisiones óptimas de capital entre firmas. En cambio, con costos fijos, todas enfrentan el mismo umbral, lo que simplifica la decisión pero no refleja bien esa diversidad.

**2. Calibre el modelo con los siguientes parámetros:**  $\beta = 0.9$ ,  $R = 0.04$ ,  $\theta = 1/3$ ,  $\rho = 0.85$ ,  $\sigma = 0.05$ ,  $\delta = 0$ ,  $F = 0.03$  y  $P = 0.02$ . **Discretice el espacio-estado usando 12 puntos para  $\log z$  y 300 puntos para  $k$  separados de forma homogénea entre 0.1 y 90. Use el método Tauchen [3] para obtener los puntos para  $\log z$ . Resuelva numéricamente para la función valor y función política separadamente para cada caso.**

Para comenzar, resolvimos numéricamente el modelo utilizando una calibración base que se mantendrá constante en los ejercicios siguientes. Esta configuración representa una firma que opera con una tecnología Cobb-Douglas sin depreciación del capital y que enfrenta shocks de productividad que siguen un proceso AR(1), discretizado con el método de Tauchen. El objetivo es obtener la función valor y la política óptima de inversión bajo distintos escenarios de costos de ajuste, para distintos niveles de capital y productividad.

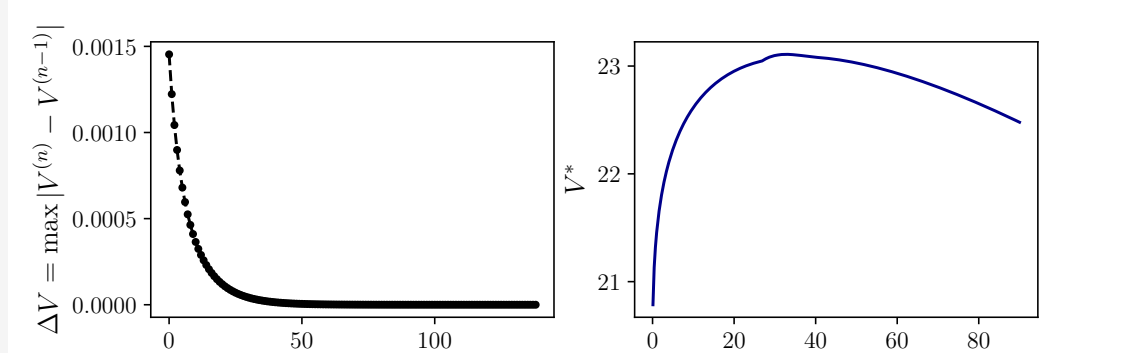


Figure 1: Convergencia del algoritmo de iteración sobre la función valor (izquierda) y perfil de la función valor óptima  $V^*(k)$  en función del capital (derecha). Se observa una rápida convergencia y un comportamiento coherente con rendimientos decrecientes del capital.

La Figura 1 muestra dos aspectos clave del proceso de solución. En el gráfico de la izquierda se puede ver cómo la función valor converge rápidamente: la diferencia máxima entre iteraciones sucesivas cae por debajo del umbral de tolerancia en menos de 100 pasos. Esto indica que el algoritmo es estable y eficiente.

En el gráfico de la derecha se muestra cómo varía el valor máximo alcanzado por la firma según el nivel de capital. Como era de esperar, el valor de la firma aumenta inicialmente con  $k$ , alcanza un punto máximo, y luego comienza a disminuir. Este patrón refleja los rendimientos decrecientes de la función de producción, junto con el hecho de que no hay depreciación en esta calibración [4]. En conjunto, estos resultados validan tanto la implementación como los supuestos básicos del modelo.

3. La política óptima va a ser de la forma de una "banda" de dos dimensiones. Dado  $z$ , para valores suficientemente pequeños de  $k$  la firma va a elegir ajustar a algún target  $k^* > k$ , y para valores suficientemente altos de  $k$  la firma va a elegir ajustar a  $k^* < k$ . Entre estos valores, la firma va a escoger óptimamente no ajustar para no tener que incurrir en el costo de ajuste. En el espacio  $(z, k)$  grafique para cada caso por separado, las funciones de umbral que separan las tres regiones, junto con la función  $k^*(z)$ .<sup>1</sup>

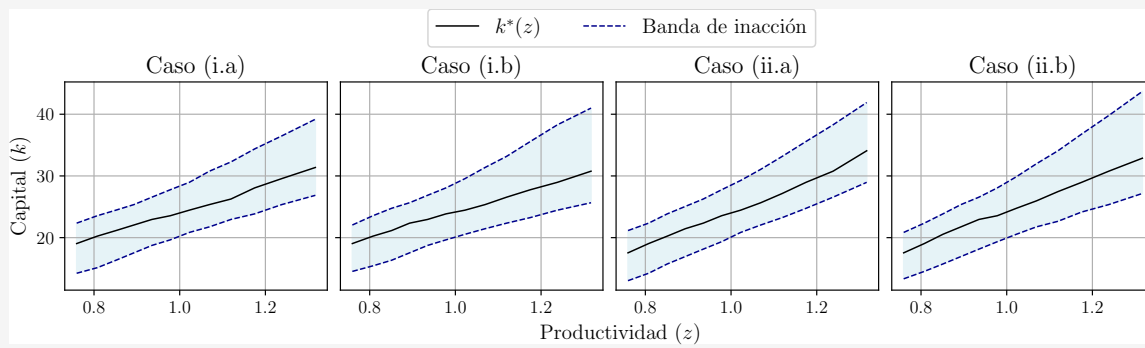


Figure 2: Curvas de política óptima y bandas de inacción para diferentes escenarios. Se muestra el nivel de capital óptimo objetivo (línea continua negra) y las bandas de inacción (líneas discontinuas azules) en función de la productividad ( $z$ ) para los cuatro casos analizados: (i.a) Tiempo de construcción de un periodo, costo de ajuste fijo; (i.b) Tiempo de construcción de un período, costo de ajuste proporcional; (ii.a) Ajuste inmediato del capital, costo de ajuste fijo; (ii.b) Ajuste inmediato del capital, costo de ajuste proporcional.

En la Figura 2 se muestran las políticas óptimas de inversión para los cuatro casos del modelo, destacando la estructura de "banda" característica de este tipo de problemas. Cada gráfico representa, en función del nivel de productividad  $z$ , tres zonas bien definidas en el espacio  $(z, k)$ : una región de no-ajuste (la banda de inacción), y dos regiones de ajuste hacia arriba o hacia abajo.

La línea negra representa el capital objetivo  $k^*(z)$ , es decir, el nivel óptimo al que la firma ajustaría su capital si decide invertir o desinvertir. Como el costo fijo de ajuste es un gasto

<sup>1</sup>Dado que el costo fijo, una vez pagado, está hundido, el nivel óptimo del capital luego de ajustar solo depende del nivel de tecnología, no en el nivel pasado de  $k$ , luego puede graficar  $k^*$  como función de  $z$ . Esto es, la función política no tiene memoria.

hundido, una vez que la firma decide ajustar, lo hace completamente hacia ese valor óptimo que depende solo de  $z$ , no del capital anterior. Por eso la política no tiene memoria.

Las líneas punteadas azules muestran los umbrales que delimitan la banda de inacción. Cuando el capital actual  $k$  se encuentra dentro de esta banda, la firma prefiere no ajustar, ya que los beneficios de invertir no compensan el costo de ajuste. Sin embargo, si  $k$  es suficientemente bajo o alto respecto de  $k^*(z)$ , entonces sí conviene pagar el costo y moverse directamente al capital objetivo.

Comparando los distintos casos, se observa que las bandas son más anchas cuando hay tiempo de construcción (casos (i.a) y (i.b)), ya que el nuevo capital solo entra en operación en el siguiente período, reduciendo el incentivo a ajustar. En cambio, cuando el ajuste es inmediato (casos (ii.a) y (ii.b)), la banda se estrecha, especialmente para altos niveles de  $z$ , porque el capital nuevo se puede utilizar de inmediato y capturar los beneficios actuales.

Finalmente, la forma del costo de ajuste también influye: con costos proporcionales (casos (i.b) y (ii.b)), la banda de inacción es más sensible a la productividad, ya que el costo mismo depende de  $z$ . Esto genera bandas menos simétricas y una política óptima más dispersa, en comparación con los casos con costo fijo.

**4. Ahora, manteniendo el resto de los parámetros fijos, calibre  $\rho = 0$ . Para cada uno de los cuatro casos, grafique las funciones de umbral. Comente en la forma de la banda óptima, definida por las funciones, específicamente en: (i) su pendiente como función de  $z$ , (ii) el ancho de la región de inacción como función de  $z$ . Para comprender la forma de la banda óptima/región de inacción es crucial entender los tradeoffs intertemporales: ¿Por qué la firma está dispuesta a ajustar su stock de capital hoy? ¿Es por ganancias inmediatas o futuras?. También es importante considerar que las firmas con distintos niveles de productividad  $z$  van a tener tanto diferentes ganancias por ajustar como, en el caso (b), diferencias en los costos de ajustar.**

En la Figura 3 se muestran los resultados del ajuste del modelo cuando  $\rho = 0$ . Para entender el efecto, considere el proceso que describe la evolución de la tecnología<sup>a</sup>,

$$\begin{aligned}\log z_t &= \rho \log z_{t-1} + \epsilon_t \\ \log z_t &= \epsilon_t \quad (\text{con } \rho = 0)\end{aligned}$$

donde  $z_t$  es la tecnología en el periodo  $t$ , y  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, (0,05)^2)$  es un ruido blanco. En este escenario, los shocks de productividad no presentan correlación temporal y son independientes entre sí, lo que implica que no contienen información sobre la productividad futura. Es decir,  $\mathbb{E}[\log z_{t+1} \mid \log z_t] = 0$ , por lo que el valor actual de la productividad no permite anticipar su evolución. En consecuencia, los beneficios esperados de ajustar el capital son más inciertos y menos persistentes, lo que lleva a una menor frecuencia de ajuste.

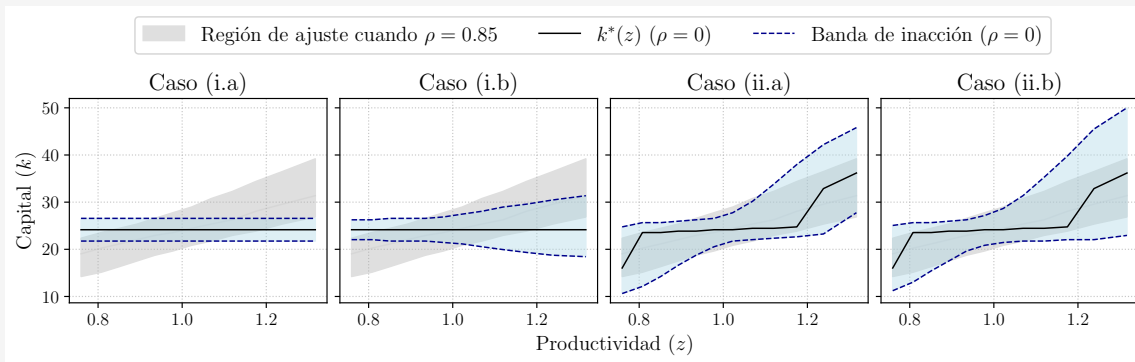


Figure 3: Regiones de inacción y política de inversión óptima para cada uno de los cuatro casos considerados en la pregunta 4, con  $\rho = 0$ . Se grafican las funciones umbral inferior y superior que delimitan la banda de inacción en el espacio  $(z, k)$ , así como la función objetivo  $k^*(z)$  a la que la firma ajusta cuando decide invertir. Los casos corresponden a: (i.a) Tiempo de construcción de un periodo, costo de ajuste fijo; (i.b) Tiempo de construcción de un período, costo de ajuste proporcional; (ii.a) Ajuste inmediato del capital, costo de ajuste fijo; (ii.b) Ajuste inmediato del capital, costo de ajuste proporcional.

Cuando  $\rho = 0.85$  el comportamiento de ajuste tiene pendiente positiva en todos los casos (ver sombra gris en la Figura 3). Esto se debe a la persistencia del shock a  $z_t$ , y por ende las firmas anticipan mayores beneficios futuros ya que se espera que, si la productividad es alta hoy, mañana lo siga siendo. En cambio cuando no hay persistencia ( $\rho = 0$ ) entonces el incentivo a ajustar se reduce fuertemente, el ajuste no depende de  $z$  por lo que  $k^*(z) \simeq c$  el capital óptimo tiende a ser constante la mayor parte del tiempo.

En los casos donde el capital se vuelve operativo inmediatamente (ii.a y ii.b) el capital genera beneficios inmediatos que justifican el ajuste. Dicho de otra forma, aunque el shock sea transitorio la firma puede aprovechar ese shock en el presente. Si  $z_t$  es muy alto entonces





vale la pena aumentar  $k$  y capturar esas ganancias en el presente. Si  $z_t$  es muy bajo vale la pena reducir  $k$  para evitar pérdidas. Solo en los extremos, donde los beneficios o pérdidas son suficientemente grandes para compensar el costo de ajuste, vemos esa respuesta en  $k^*(z)$ . Por último, es importante mencionar que, en los casos con costos de ajuste proporcionales al capital (i.e., casos (i.b) y (ii.b)), el ancho de la banda de inacción (líneas punteadas azules en la Figura 3) aumenta con el nivel de productividad  $z$ , particularmente para valores mayores a  $z = 1$ .

Este fenómeno se explica por el hecho de que el costo de ajuste depende de las utilidades del periodo actual, las cuales crecen con  $z$ . En el caso (i.b), donde el capital ajustado entra en operación recién en el periodo  $t + 1$ , la firma no puede capturar los beneficios del shock de productividad actual, pero sí enfrenta un mayor costo de ajuste cuando  $z$  es alto. Como además la productividad no es persistente ( $\rho = 0$ ), no existen beneficios futuros esperados que compensen el costo actual. Esto hace que la firma prefiera no ajustar, ampliando la región de inacción a medida que  $z$  crece.

---

<sup>a</sup>Note que esto está dado en la definición del problema, no hay nada nuevo.

**5. Para cada uno de los cuatro casos, duplique el costo de ajuste:  $F = 0.06$  y  $P = 0.04$ . ¿Cómo cambian las regiones de inacción? Explique.**

En este caso se duplican los costos de ajuste ( $F$  y  $P$ ), manteniendo constante el resto de los parámetros (ver problema 2). Los resultados de este experimento se muestran en la Figura 4.

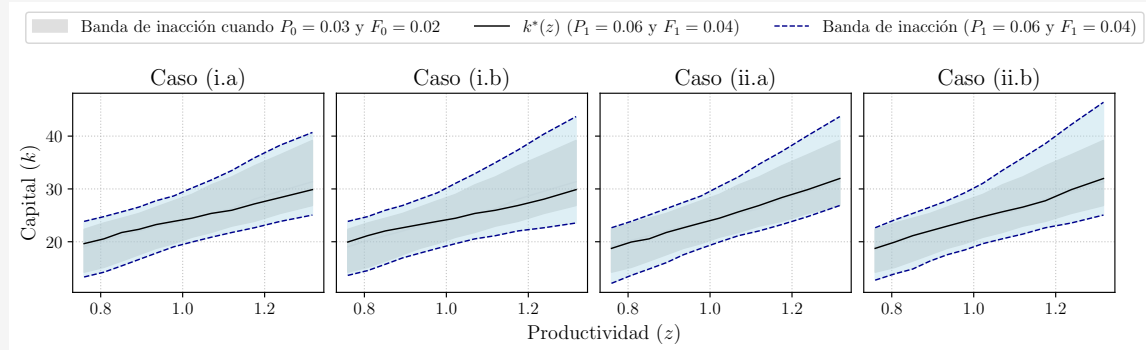


Figure 4: Comparación de bandas de inacción y políticas  $k^*(z)$  con costos de ajuste bajos ( $P_0 = 0.02$ ,  $F_0 = 0.03$ ) y altos ( $P_1 = 0.04$ ,  $F_1 = 0.06$ ). Se muestran los cuatro casos: (i.a) capital operativo en  $t + 1$ , costo fijo; (i.b) capital operativo en  $t + 1$ , costo proporcional; (ii.a) capital operativo en  $t$ , costo fijo; (ii.b) capital operativo en  $t$ , costo proporcional.

Como es de esperar, un aumento en los costos de ajuste no cambia la trayectoria del capital óptimo. En otras palabras,  $k^*(z)$  conserva su pendiente, independientemente del nivel del costo de ajuste y del caso considerado. Sin embargo, el ancho de las bandas de inacción aumenta.

Un mayor costo de ajuste afecta la decisión de inversión al elevar el umbral necesario para que el ajuste sea rentable. Como resultado, la firma tolera desviaciones más amplias entre su capital actual y el capital deseado antes de incurrir en el nuevo costo, más elevado.

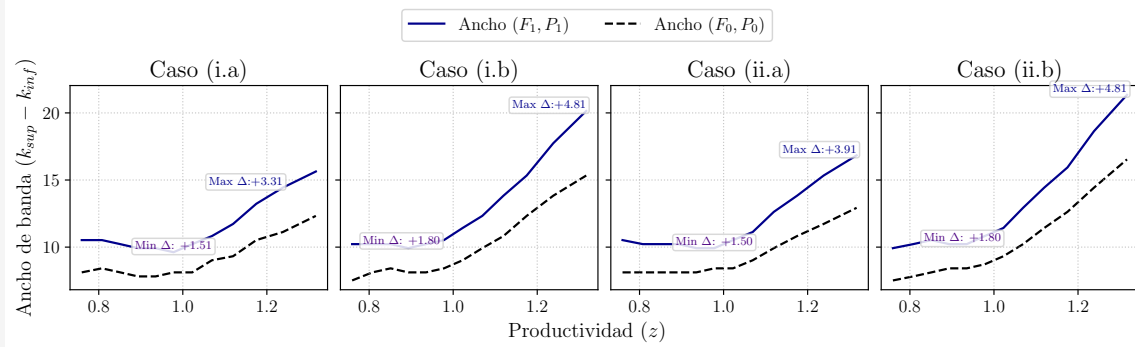


Figure 5: Diferencia en el ancho de la banda de inacción entre costos de ajuste altos ( $F_1 = 0.06$ ,  $P_1 = 0.04$ ) y bajos ( $F_0 = 0.03$ ,  $P_0 = 0.02$ ), para cada caso: (i.a), (i.b), (ii.a) y (ii.b), con  $\rho = 0$ .

La diferencia entre ambos escenarios se muestra en la Figura 5. Se evidencia un aumento del ancho de la banda de inacción en todos los casos analizados. En particular, las diferencias alcanzan hasta 4.8 unidades de capital en los casos (i.b) y (ii.b), lo que confirma que una mayor penalización por ajustar reduce la frecuencia de ajuste, sin alterar cualitativamente la forma de la política óptima.

**6. Para cada uno de los cuatro casos, aumente  $\sigma$  a 0.15. ¿Cómo afecta esto a la región de inacción? ¿Espera que la frecuencia de ajuste aumente o disminuya? Explique.**

Un primer efecto de aumentar la volatilidad  $\sigma$  se observa en el eje de la productividad (ver Figura 6). En este caso, al incrementar la desviación estándar del shock, la dispersión de los valores de  $z$  generados por el proceso estocástico también se amplía. Como resultado, el rango de productividad observado en equilibrio aumenta, lo que se materializa en un rango más amplio de valores de  $z$  en los gráficos de las políticas óptimas.

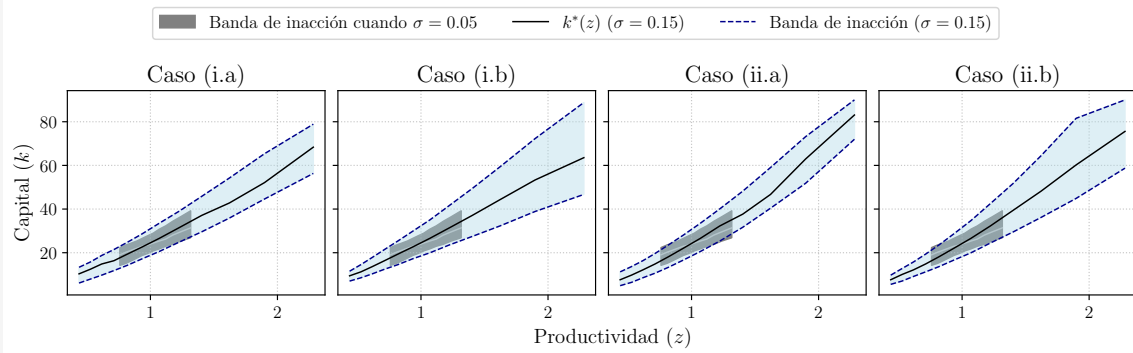


Figure 6: Comparación de bandas de inacción y políticas  $k^*(z)$  bajo dos niveles de volatilidad del shock de productividad:  $\sigma = 0.05$  y  $\sigma = 0.15$ , con  $\rho = 0.85$ . Se muestran los cuatro casos: (i.a), (i.b), (ii.a) y (ii.b).

Por otro lado, existen diferencias en las pendientes de ambas políticas  $k^*(z)$ . Como se ve en la Figura 7 Al aumentar la volatilidad  $\sigma$ , la política de capital óptimo  $k^*$  se vuelve más sensible a la productividad  $z$ , reflejando un mayor grado de convexidad y una pendiente promedio mayor. Este efecto se debe a que, con mayor incertidumbre y persistencia ( $\rho = 0.85$ ), las firmas responden más agresivamente a shocks grandes de productividad, anticipando que estos se mantendrán. Como resultado, el capital deseado crece más rápidamente con  $z$ , lo cual es visible en el aumento de la pendiente de  $k^*(z)$

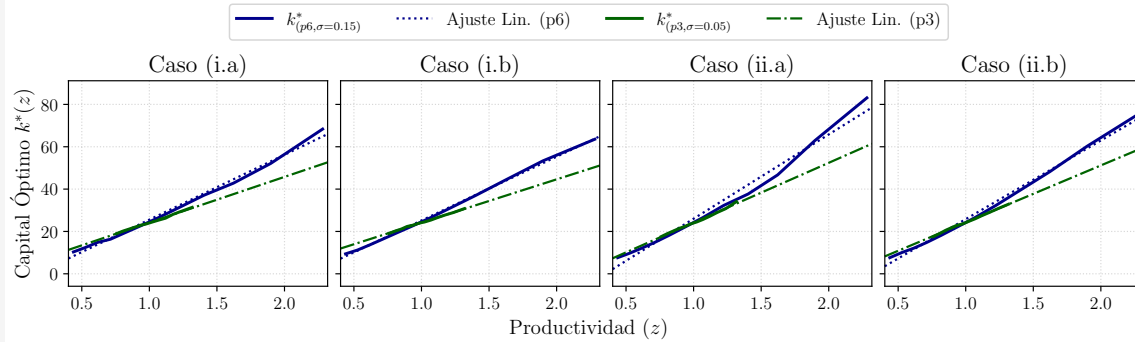


Figure 7: Comparación de las políticas óptimas de capital  $k^*(z)$  para dos niveles de volatilidad del shock de productividad:  $\sigma = 0.05$  (ejercicio 3) y  $\sigma = 0.15$ , con  $\rho = 0.85$ . Se observa que, en todos los casos, la pendiente de  $k^*(z)$  es mayor cuando la volatilidad es más alta, lo que refleja una mayor sensibilidad del capital deseado ante shocks persistentes y más extremos.

Finalmente, si nos fijamos en las bandas de inacción, veremos que en el caso donde  $z$  es más volátil el ancho de la banda es mayor. Esto se aprecia claramente en la Figura ??, donde se muestra que, para los cuatro casos considerados, la diferencia en el ancho de las bandas entre los escenarios con  $\sigma = 0.05$  y  $\sigma = 0.15$  es significativa. Esta ampliación refleja que, ante shocks más extremos y persistentes, la firma opta por esperar más antes de ajustar, ampliando el rango de tolerancia alrededor del capital óptimo.

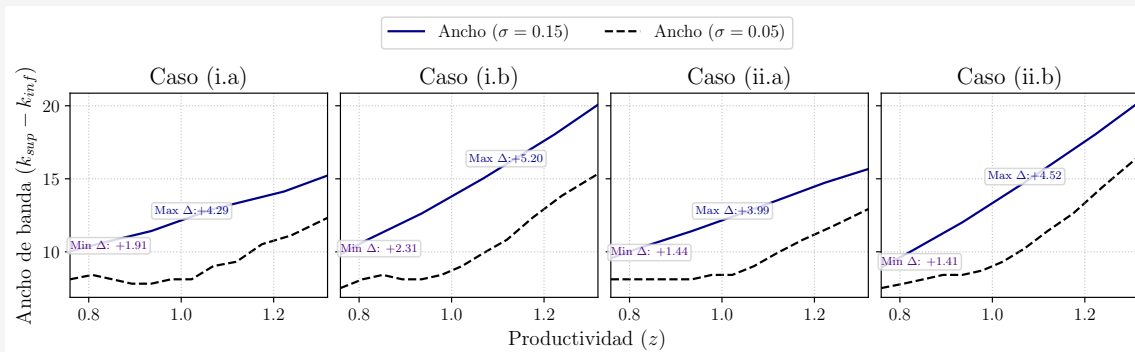


Figure 8: Comparación del ancho de las bandas de inacción entre los casos con baja ( $\sigma = 0.05$ ) y alta volatilidad ( $\sigma = 0.15$ ) del shock de productividad, con  $\rho = 0.85$ . Se observa un aumento en el ancho de la banda en todos los casos.

7. Considere ahora el caso de los parámetros de la parte (2), excepto que  $\delta = 0.3$ . Muestre que la región de inacción se ve afectada si subimos  $\sigma$  desde 0.05 a 0.15. ¿Por qué deberíamos esperar que el tamaño de la banda  $S_s$  sea más sensible a  $\sigma$  cuando  $\delta$  es bajo relativo a cuando es alto? Explique.

Ahora analizamos cómo cambia la banda de inacción al aumentar la volatilidad  $\sigma$  del shock de productividad, manteniendo una tasa de depreciación elevada ( $\delta = 0.3$ ).

En primero lugar, deberíamos esperar que la banda sea más sensible a  $\sigma$  cuando  $\delta$  es baja porque, al no depreciarse rápidamente el capital, la firma puede postergar ajustes y esperar shocks más favorables (ver Figura 4).

Un aumento en la volatilidad amplía el valor de esa opción de espera, expandiendo la banda. En cambio, con  $\delta$  alta, el capital se erosiona más rápido y la firma se ve obligada a ajustar con mayor frecuencia, lo que reduce la sensibilidad del tamaño de la banda frente a cambios en  $\sigma$ .

Antes de analizar el efecto de aumentar la volatilidad  $\sigma$ , se comparó la situación con  $\delta = 0.3$  frente al caso base sin depreciación (ver enunciado del Ejercicio 2).

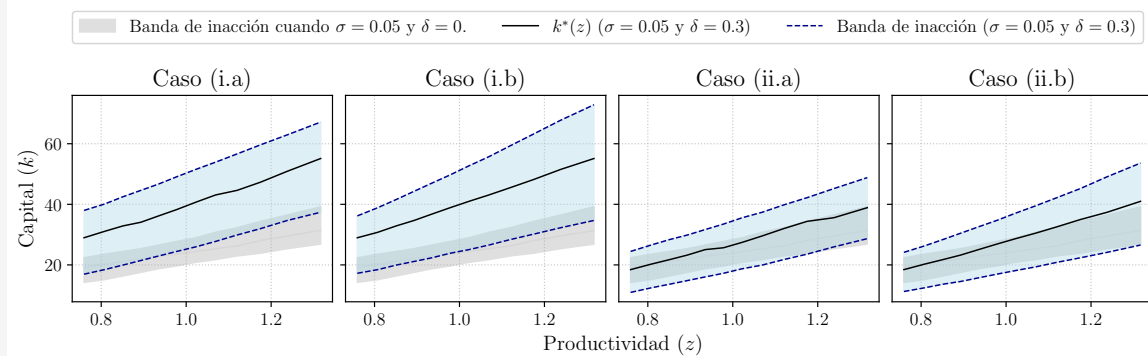


Figure 9: Bandas de inacción y políticas  $k^*(z)$  con  $\delta = 0.3$  y  $\sigma = 0.05$ . En comparación con el caso sin depreciación, las bandas se amplían significativamente, reflejando que una mayor tasa de depreciación lleva a ajustes más intensos pero menos frecuentes.

Como muestra la Figura 9, las bandas de inacción se amplían significativamente en todos los casos analizados. Esto ocurre porque, al depreciarse el capital, la firma debe realizar ajustes más intensos para mantener niveles eficientes de capital, lo que conduce a decisiones de inversión más espaciadas pero con cambios de mayor magnitud.

Sin embargo, en los casos (ii), donde el capital ajustado entra en operación de forma inmediata, el efecto de la depreciación está incorporado directamente en los beneficios actuales. Por ello, la diferencia con respecto al caso sin depreciación es menor en comparación con los casos (i), donde el capital ajustado se usa recién en el periodo siguiente.

Luego, al mantener  $\delta = 0.3$  y aumentar la volatilidad del shock desde  $\sigma = 0.05$  a  $\sigma = 0.15$ , se observa un patrón mixto, resumido en la Figura 10. Por un lado, el *ancho mínimo* de la banda disminuye con  $\sigma$ , indicando que en zonas intermedias de productividad la firma ajusta más seguido. Por otro lado, el *ancho máximo* se expande, especialmente en los extremos de  $z$ , lo que refleja que cuando se decide ajustar, el salto de capital es más grande. En conjunto, esto sugiere que con alta depreciación y mayor incertidumbre, la banda Ss se vuelve más sensible a la volatilidad: se estrecha donde los shocks son moderados, pero se amplía en presencia de shocks extremos.

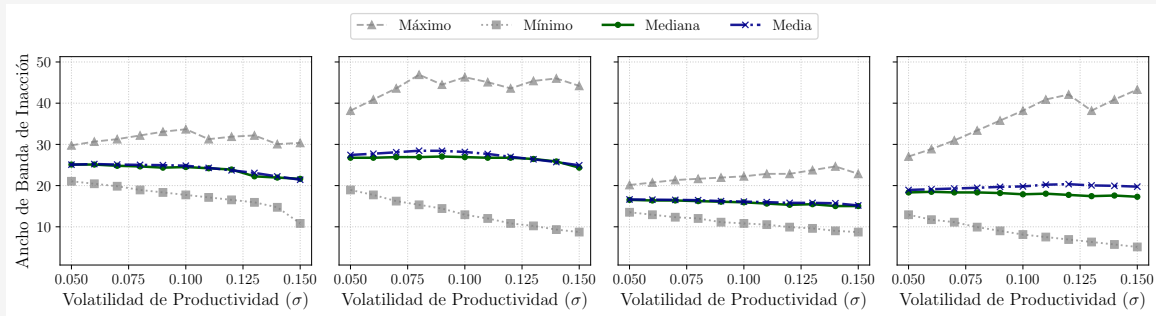


Figure 10: Evolución del ancho de la banda de inacción al aumentar la volatilidad  $\sigma$ , manteniendo fija la depreciación en  $\delta = 0.3$ . Se observa que el ancho mínimo disminuye con  $\sigma$ , mientras que el ancho máximo tiende a aumentar, especialmente en los extremos de productividad.

Finalmente se realizó un último experimento para comprobar empíricamente si la banda Ss es más sensible a  $\sigma$  cuando  $\delta$  es bajo relativo a cuando es alto. Para ello se ejecutaron experimentos con todas las combinaciones entre  $\sigma \in \{0.05, \dots, 0.16\}$  y  $\delta \in \{0.1, \dots, 0.9\}$ . Los resultados para cada uno de los casos se presentan en la Figura 11.

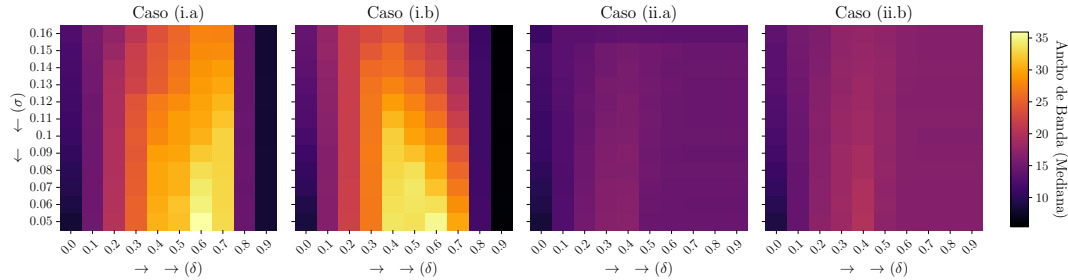


Figure 11: Mapa de calor del ancho mediano de la banda de inacción en función de la depreciación  $\delta$  y la volatilidad  $\sigma$ , para los cuatro casos del modelo. Las bandas son más sensibles a  $\sigma$  cuando el capital entra con rezago (casos (i)).

La Figura 11 muestra mapas de calor del ancho mediano de la banda de inacción para los cuatro casos del modelo, en función de la tasa de depreciación  $\delta$  (eje horizontal) y la volatilidad del shock de productividad  $\sigma$  (eje vertical). Los colores representan el tamaño de la banda: tonos más claros indican bandas más anchas.

**Casos (i.a) y (i.b):** Cuando el capital ajustado entra en operación con un periodo de rezago, se observa que la banda de inacción es más sensible a los cambios en  $\sigma$ . Específicamente, para valores intermedios de  $\delta$  (alrededor de 0.3 a 0.5), la banda alcanza su mayor tamaño. A medida que  $\sigma$  aumenta, también lo hace el ancho de la banda, reflejando un mayor valor de la opción de esperar en un contexto incierto. En cambio, para valores extremos de  $\delta$  (muy bajos o muy altos), la banda se reduce.

**Casos (ii.a) y (ii.b):** Cuando el capital ajustado está disponible inmediatamente, las bandas son sistemáticamente más angostas y menos sensibles a cambios en la volatilidad. Esto se debe a que los beneficios de ajustar se obtienen en el mismo período, lo que hace que la firma esté más dispuesta a actuar ante cambios en  $z$  sin necesidad de esperar.

**En resumen:** La banda  $S_s$  es más sensible a la volatilidad  $\sigma$  cuando  $\delta$  es moderada y el capital entra con rezago. En ese contexto, la incertidumbre amplía el valor de esperar. Cuando el capital se puede usar de inmediato, este valor disminuye, y las decisiones de ajuste son más reactivas y menos dispersas.





## Conclusión

En esta tarea se resolvió numéricamente un modelo de inversión dinámica con costos de ajuste, considerando distintos supuestos sobre el momento en que el capital ajustado entra en operación y sobre la forma de los costos. A partir de una calibración base, se analizaron las funciones valor y política en los cuatro escenarios posibles, explorando cómo varía la decisión óptima de inversión ante cambios en la productividad, la volatilidad y la depreciación.

Los resultados muestran que las bandas de inacción tienen una estructura típica tipo  $(S, s)$ : la firma decide ajustar su capital solo cuando se aleja suficientemente del nivel óptimo. Esta estructura se ve fuertemente influida por los supuestos del modelo. Cuando el capital entra con rezago, la política es más conservadora y las bandas de inacción se amplían. Cuando el capital está listo para usarse, las decisiones son más reactivas. Además, se observó que los costos proporcionales introducen heterogeneidad entre firmas al hacer que el costo de ajustar dependa de la productividad.

Los experimentos realizados muestran que tanto la volatilidad de la productividad como la tasa de depreciación tienen efectos importantes sobre el tamaño y la forma de la banda de inacción. En particular, se encontró que la sensibilidad de la política óptima a la incertidumbre depende del ritmo al que se deprecia el capital, siendo mayor cuando la depreciación es baja.

Finalmente, cabe mencionar que toda la implementación computacional de esta tarea —incluyendo la solución del modelo, los algoritmos de iteración sobre la función valor y la generación de gráficos— se encuentra disponible en el repositorio: <https://github.com/cridonoso/bellman-firm.git>. Esto permite replicar los resultados y extender fácilmente el análisis a otros supuestos o parámetros.



## References

- [1] Finn E. Kydland and Edward C. Prescott. Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica*, 50(6):1345–1370, 1982.
- [2] Nancy L. Stokey, Robert E. Lucas, and Edward C. Prescott. *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1989.
- [3] George Tauchen. Finite state markov-chain approximations to univariate and vector autoregressions. *Economics Letters*, 20(2):177–181, 1986.
- [4] Hal R. Varian. *Microeconomic Analysis*. W. W. Norton Company, New York, 3rd edition, 1992.



## A Guía para la Ejecución de Experimentos Computacionales

Este apéndice describe el procedimiento para ejecutar los experimentos numéricos de la tarea computacional.

### A.1 Prerrequisitos

- **Software:** Matlab es necesario para correr los códigos de simulación.
- **Archivos del Proyecto:** Asegúrate de tener la carpeta completa del proyecto (`comp_homework/`), incluyendo:
  - `main.m`: Script principal para ejecutar los experimentos.
  - Carpeta `./config/`: Contiene los archivos de configuración de parámetros en formato JSON para cada problema (ej. `params_p3.json`).
  - Carpeta `./utils/`: Contiene funciones auxiliares Matlab.
  - `visualize.ipynb` y carpeta `./utils_plot/`: Para la visualización de resultados con Python (opcional para la ejecución, necesario para generar figuras).

### A.2 Estructura y Archivos Clave

- `main.m`: Orquesta la ejecución. Lee parámetros desde un archivo JSON en `./config/`, determina el experimento y llama a `run_model`.
- `./config/params_[problema].json`: Archivos de configuración (ej. `params_p3.json`). Contienen:
  - `exp_name`: Identificador del problema (ej. "p3", "p7").
  - Parámetros del modelo:  $\beta, R, \theta, \rho, \sigma, \delta, F, P$ .
  - Parámetros de discretización y numéricos: `logz_points`, `k_points`, `k_min`, `k_max`, `niter`, `tol`.
  - Configuración específica del problema: `cost_type`, `scenario`.
- `./utils/run_model.m`: Resuelve el problema de la firma para una configuración dada.



- `./utils/bellman_1.m`, `./utils/bellman_2.m`: Resuelven la ecuación de Bellman para diferentes escenarios.
- `./utils/save_results.m`: Guarda resultados en `./backup/[exp_name]/`.
- `./backup/`: Directorio de salida para los archivos `.mat` con resultados.

## A.3 Ejecución de los Experimentos

### A.3.1 Paso 1: Configuración de Parámetros

Modifica los archivos JSON en `./config/` para el experimento deseado.

- **Corridas estándar (ej. p3, p4, p5, p6):**  $\sigma$  y  $\delta$  (si aplica) deben ser escalares. Ejemplo parcial de `params_p3.json`:

```
1 {  
2   "exp_name": "p3",  
3   "sigma": 0.05,  
4   "delta": 0,  
5   // ... otros parametros ...  
6 }
```

Listing 1: Ejemplo de configuración escalar para p3

- **Problema 7 (variando  $\sigma$ ):** En `params_p7.json`,  $\sigma$  debe ser un vector. Ejemplo parcial de `params_p7.json`:

```
1 {  
2   "exp_name": "p7",  
3   "sigma": [0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14,  
4             0.15],  
5   "delta": 0.3, // delta es escalar  
6   // ... otros parametros ...  
7 }
```

Listing 2: Ejemplo de configuración vectorial para p7

- **Problema 8<sup>2</sup> (variando  $\sigma$  y  $\delta$ ):** En `params_p8.json`,  $\sigma$  y  $\delta$  deben ser vectores. Ejemplo parcial de `params_p8.json`:

---

<sup>2</sup>Este problema no existe en la tarea original.

```
1 {  
2   "exp_name": "p8",  
3   "sigma": [0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14,  
4           0.15, 0.16],  
5   "delta": [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0],  
6   // ... otros parametros ...  
}
```

Listing 3: Ejemplo de configuración vectorial para p8

### A.3.2 Paso 2: Ejecutar el Script Principal en Matlab

1. Abre Matlab.
2. Navega al directorio raíz del proyecto (`comp_homework/`).
3. Para ejecutar un experimento específico (ej. "p5"), modifica la siguiente línea en `main.m` para que apunte al archivo JSON deseado:

```
1 % str = fileread('./config/params_p3.json'); % Original o para p3  
2 str = fileread('./config/params_p5.json'); % Ejemplo para p5  
3 params_base = jsondecode(str);
```

Listing 4: Modificación en `main.m` para seleccionar el archivo de parámetros

4. Ejecuta `main.m` desde la ventana de comandos de Matlab:

```
>> main
```

El script `main.m` gestionará la carga de parámetros, iterará sobre vectores de `sigma` y/o `delta` si es el caso (para p7 y p8), y llamará a `run_model.m`. Los resultados se guardarán en subcarpetas dentro de `./backup/`.

### A.3.3 Paso 3: Revisión de Resultados

Los resultados se almacenan en archivos `.mat` en `./backup/[exp_name]/`. Para p7 y p8, se crearán subdirectorios adicionales por cada valor de parámetro (ej. `./backup/p7/sigma_0.05/`). Cada archivo `.mat` contiene variables como `value` (función de valor), `k_star` (política óptima), `k_lower`, `k_upper` (bandas de inacción), etc.



## A.4 Visualización de Resultados

Utiliza el notebook de Jupyter `visualize.ipynb` para generar gráficos.

- Requiere Python con librerías como `numpy`, `matplotlib`, `scipy`.
- Ejecuta las celdas del notebook para cargar los `.mat` y plotear.
- Las figuras se guardan, por defecto, en `./figuras/`.

## A.5 Notas Adicionales

- El script `main.m` añade `utils` al path de Matlab.
- La convergencia de la iteración de la función de valor se maneja en `check_convergence.m`.
- Las bandas de inacción se calculan mediante `extract_policy_bands.m`.