Guia 1: Macroeconomia II

Cristobal Donoso Oliva[1], Humberto Martínez [2], Agustin Farias [3], y Leonardo Siles [4]

1. Estudiantes de Magíster en Economía
2. Profesor
3-4 Ayudantes

12 de agosto de 2025

Pregunta I. Considere, de nuevo, la economía a la Robinson Crusoe vista en clase. El objetivo de este ejercicio es verificar que la función de valor encontrada en la clase genera una secuencia que soluciona el Problema Secuencial.

$$\max_{\{c_s,k_{s+1}\}_{s=t}^{\infty}} \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} \log(c_s)$$
$$\text{sujeto a } k_s^{\alpha} \geq c_s + k_{s+1} \text{ for } s \geq t, \qquad k_0 > 0$$

1. Muestre a través del método *Guess and Verify* que la solución a la Ecuación de Bellman son la función de valor

$$V(k) = \frac{1}{1-\beta}\left[\log(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\log(\alpha\beta)\right] + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\log(k)$$

y las policy functions

$$k'(k) = \alpha\beta k^{\alpha}, \quad c(k) = (1-\alpha\beta)k^{\alpha}$$

La ecuación de Bellman asociada a este problema es

$$V(k) = \max_{c,k'}[\log(c) + \beta V(k')] \tag{1}$$
$$\text{sujeto a, } k^{\alpha} \geq c + k'$$

Donde k es el capital en el periodo actual y k' es el capital del siguiente periodo. Es importante notar que el tiempo se vuelve una variable irrelevante para la decisión óptima en un momento dado, lo único importante son las condiciones iniciales.
Guess and Verify: Suponemos que la función de valor tiene la forma lineal en loga-

ritmos

$$V(k) = F + G\log(k)$$

donde F y G son coeficientes indeterminados que buscaremos.
Ahora sustituimos la forma propuesta en la ecuación de Bellman

$$V(k) = \max_{c,k'} \log(c) + \beta(F + G\log(k')) \tag{2}$$
$$\text{sujeto a: } k^\alpha \geq c + k'$$

Dado que la función es estrictamente creciente, la restricción de recursos se cumplirá con igualdad en el óptimo

$$c = k^\alpha - k'$$

Ahora reemplazando c en el problema de maximización

$$V(k) = \max_{k'} \log(k^\alpha - k') + \beta(F + G\log(k'))$$

Tomando la CPO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(k)}{\partial k'} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{k^\alpha - k'} + \beta G\frac{1}{k'} &= 0\\
\frac{\beta G}{k'} &= \frac{1}{k^\alpha - k'}\\
\beta G(k^\alpha - k') &= k'\\
\beta G k^\alpha &= k'(1+\beta G)\\
k' &= \frac{\beta G}{1+\beta G}k^\alpha
\end{aligned}$$

Utilizando la restricción de consumo y reemplazando el valor de k'

$$c^* = k^\alpha - k' \;\; = \;\; k^\alpha - \frac{\beta G}{1+\beta G}k^\alpha = k^\alpha\left[1 - \frac{\beta G}{1+\beta G}\right] = k^\alpha\left(\frac{1}{1+\beta G}\right)$$

Ahora sustituimos las funciones óptimas c^* y k'^* en la ecuación de Bellman

$$
\begin{aligned}
V(k) &= \log\left(k^\alpha \frac{1}{1+\beta G}\right) + \beta\left(F + G\log\left(\frac{\beta G}{1+\beta G}k^\alpha\right)\right) \\
&= \alpha\log(k) + \log\left(\frac{1}{1+\beta G}\right) + \beta F + \beta G\left[\log\left(\frac{\beta G}{1+\beta G}\right) + \alpha\log(k)\right] \\
&= \log(k)[\alpha + \alpha\beta G] + \beta F + \beta G\log(\beta G) - (1+\beta G)\log(1+\beta G) \\
&= \beta F + \beta G\log(\beta G) - (1+\beta G)\log(1+\beta G) + (\alpha + \alpha\beta G)\log(k)
\end{aligned}
$$

Igualando los coeficientes de $\log(k)$

$$
\begin{aligned}
G &= \alpha(1+\beta G) \\
G &= \alpha + \alpha\beta G \\
G(1-\alpha\beta) &= \alpha \\
G &= \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

Igualando los términos constante

$$
\begin{aligned}
F &= \beta F + \beta G\log(\beta G) - (1+\beta G)\log(1+\beta G) \\
F(1-\beta) &= \beta G\log(\beta G) - (1+\beta G)\log(1+\beta G) \\
F &= \frac{\beta G\log(\beta G) - (1+\beta G)\log(1+\beta G)}{1-\beta}
\end{aligned}
$$

Sustituimos $G = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$ en las funciones de política para $k'(k)$ y $c(k)$:

Para $k'(k)$:

$$\begin{aligned}
k'(k) &= \frac{\beta\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right)}{1+\beta\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right)}k^{\alpha} \\
&= \frac{\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}}{\frac{1-\alpha\beta+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}}k^{\alpha} \\
&= \frac{\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}}{\frac{1}{1-\alpha\beta}}k^{\alpha} \\
k'(k) &= \alpha\beta k^{\alpha}
\end{aligned}$$

Para $c(k)$:

$$\begin{aligned}
c(k) &= \frac{1}{1+\beta G}k^{\alpha} \\
&= \frac{1}{1+\beta\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right)}k^{\alpha} \\
&= \frac{1}{\frac{1-\alpha\beta+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}}k^{\alpha} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{1-\alpha\beta}}k^{\alpha} \\
c(k) &= (1-\alpha\beta)k^{\alpha}
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos $G = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$ en la expresión para F:

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{1-\beta}\left[\beta\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right)\log\left(\beta\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right) - \left(1+\beta\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right)\log\left(1+\beta\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right)\right] \\
F &= \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\log\left(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right) - \frac{1}{1-\alpha\beta}\log\left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)\right] \\
F &= \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}(\log(\alpha\beta)-\log(1-\alpha\beta)) - \frac{1}{1-\alpha\beta}(-\log(1-\alpha\beta))\right] \\
F &= \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\log(\alpha\beta) - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\log(1-\alpha\beta) + \frac{1}{1-\alpha\beta}\log(1-\alpha\beta)\right] \\
F &= \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\log(\alpha\beta) + \left(\frac{1-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right)\log(1-\alpha\beta)\right] \\
F &= \frac{1}{1-\beta}\left[\log(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\log(\alpha\beta)\right]
\end{aligned}
$$

Los valores derivados para F, G, $k'(k)$, y $c(k)$ coinciden exactamente con las funciones de valor y de política proporcionadas en la pregunta, demostrando su validez a través del método "Guess and Verify".

2. Utilice las policy functions para construir la secuencia candidata $\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$. Verifique que esta secuencia satisface la restricción en cualquier periodo t. Luego, utilice esta secuencia para escribir $\log(k_t)$ y $\log(c_t)$ en términos de k_0.

Para verificar que las policy functions encontradas solucionan el problema secuencial expresamos k_t en función de k_0.

- Para $t = 0$: $k_1 = \alpha\beta k_0^{\alpha}$
- Para $t = 1$: $k_2 = \alpha\beta k_1^{\alpha} = \alpha\beta(\alpha\beta k_0^{\alpha})^{\alpha} = \alpha\beta(\alpha\beta)^{\alpha}k_0^{\alpha^2} = (\alpha\beta)^{1+\alpha}k_0^{\alpha^2}$
- Para $t = 2$: $k_3 = \alpha\beta k_2^{\alpha} = \alpha\beta\left[(\alpha\beta)^{1+\alpha}k_0^{\alpha^2}\right]^{\alpha} = (\alpha\beta)^{1+\alpha+\alpha^2}k_0^{\alpha^3}$

generalizando,

$$k_t = (\alpha\beta)^{1+\alpha+\ldots+\alpha^{t-1}}k_0^{\alpha^t} = (\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}}k_0^{\alpha^t}$$

Ahora para obtener la secuencia de consumo, sustituimos la expresión de k_t en la policy function:

$$
\begin{aligned}
C(k) &= (1-\alpha\beta)k^{\alpha} \\
C_t &= (1-\alpha\beta)\left[(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}}k_0^{\alpha^t}\right]^{\alpha} \\
&= (1-\alpha\beta)(\alpha\beta)^{\frac{\alpha(1-\alpha^t)}{1-\alpha}}k_0^{\alpha^{t+1}}
\end{aligned}
$$

La restricción de recursos en la economía Robinson Crusoe es

$$k_t^{\alpha} \geq c_t + k_{t+1}$$

Para que la solución sea óptima la restricción debe cumplirse con igualdad. Solo así se garantiza no desperdiciar recursos que, en la practica, aumentan la utilidad. Sustituyendo las policy functions:

$$
\begin{aligned}
k_t^{\alpha} &= c_t + k_{t+1} \\
k_t^{\alpha} &= (1-\alpha\beta)k_t^{\alpha} + \alpha\beta k_t^{\alpha} \\
k_t^{\alpha} &= (1-\alpha\beta+\alpha\beta)k_t^{\alpha} \\
k_t^{\alpha} &= k_t^{\alpha}
\end{aligned}
$$

La verificación demuestra que la secuencia candidata satisface la restricción de recursos con igualdad en cualquier periodo t, lo cual es consistente con un comportamiento óptimo dado que la función de utilidad es estrictamente creciente.
La verificación demuestra que la secuencia candidata satisface la restricción de recursos con igualdad en cualquier periodo t.

$$
\begin{aligned}
\log(k_{t+1}) &= \log(\alpha\beta k_t^{\alpha}) \\
&= \log(\alpha\beta) + \alpha\log(k_t)
\end{aligned}
$$

haciendo $X_t = \log(k_t)$ logramos,

$$X_{t+1} = \log(\alpha\beta) + \alpha X_t$$

En estado estacionario $X_t = X_{t+1} = X_{ss}$, entonces

$$X_{ss} = \log(\alpha\beta) + \alpha X_{ss}$$

$$X_p = X_{ss} = \frac{\log(\alpha\beta)}{(1-\alpha)} \qquad \Big\} \text{Solución Particular}$$

Para encontrar la solución homogenea hacemos 0 la constante

$$X_h = X_{ss} = \alpha X_{ss}$$

Esta ecuación nos dice que cada término es el anterior multiplicado por α. La solución homogénea es $X_{ht} = A \cdot \alpha^t$ donde A es una constante.
Sumando la solución particular y homogenea obtenemos

$$X_t = \frac{\log(\alpha\beta)}{1-\alpha} + A\alpha^t$$

Dada la condición inicial con $t = 0$

$$X_0 = \frac{\log(\alpha\beta)}{1-\alpha} + A \Rightarrow A = X_0 - \frac{\log(\alpha\beta)}{1-\alpha}$$

finalmente,

$$X_t = \frac{\log(\alpha\beta)}{1-\alpha} + \left(X_0 - \frac{\log(\alpha\beta)}{1-\alpha}\right)\alpha^t$$

Reagrupando términos,

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha^t X_0 + \frac{\log(\alpha\beta)}{1-\alpha} - \frac{\log(\alpha\beta)}{1-\alpha}\alpha^t \\
X_t &= \alpha^t X_0 + \frac{\log(\alpha\beta)(1-\alpha^t)}{1-\alpha} \\
X_t &= \alpha^t X_0 + \log(\alpha\beta)\left(\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Volviendo a la variable original

$$\log(k_t) = \alpha^t \log(k_0) + \log(\alpha\beta)\left(\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}\right)$$

Luego de manera análoga para el consumo:

$$\begin{aligned}\log(c_t) &= \log((1-\alpha\beta)k_t^{\alpha}) \\ \log(c_t) &= \log(1-\alpha\beta) + \alpha\log(k_t)\end{aligned}$$

sustituyendo $\log(k_t)$ obtenemos

$$\log(c_t) = \log(1-\alpha\beta) + \alpha^{t+1}\log(k_0) + \alpha\log(\alpha\beta)\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}$$

3. Muestre que las sumas parciales $\{\sum_{t=0}^{T}\beta^t\log(c_t)\}_{T=0}^{\infty}$ convergen y tienden a $V(k_0)$.

Para demostrar que las sumas parciales convergen y tienden a $V(k_0)$ partiremos por la Ecuación de Bellman definida anteriormente,

$$V(k_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \log c_t + \beta V(K_{t+1})$$

Dado que las policy function y la función de valor son las soluciones óptimas, esta ecuación se cumple con igualdad para los valores óptimos c_t^* y K_t^*.

$$\begin{aligned}V(k_t) &= \log(c_t^*) + \beta V(k_{t+1}^*) \\ \log(c_t^*) &= V(k_t) - \beta V(k_{t+1}^*)\end{aligned}$$

Ahora considerando las sumas parciales de la utilidad descontada hasta el tiempo T

$$\sum_{t=0}^{T}\beta^t\log(c_t^*)$$

y reemplazando $\log(c_t^*)$

$$\sum_{t=0}^{T}\beta^t[V(k_t) - \beta V(k_{t+1}^*)]$$

Notemos que

$$\left.\begin{array}{ll} t=0 & \beta^0 V(k_0)-\beta^1 V(k_1) \\ t=1 & \beta^1 V(k_1)-\beta^2 V(k_2) \\ t=2 & \beta^2 V(k_2)-\beta^3 V(k_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Para } t=T: \beta^T V(k_T)-\beta^{T+1} V(k_{T+1})$$

Esta es una suma telescópica, la cual cancela la mayoría de los términos quedando:

$$\sum_{t=0}^{T}\left[\beta^t V(k_t)-\beta^{t+1} V(k_{t+1}^*)\right]=V(k_0)-\beta^{T+1} V(k_{T+1}^*)$$

Para ver la convergencia evaluamos,

$$\lim_{T\to\infty}\left[V(k_0)-\beta^{T+1} V(k_{T+1})\right]=V(k_0)-\lim_{T\to\infty}\beta^{T+1} V(k_{T+1}) \tag{3}$$

Sabemos que la función de valor es $V(k)=F+G\log(k)$, donde $G=\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$. Por otro lado, la función de política para el capital es $k_{t+1}=\alpha\beta k_t^\alpha$.
Como $0<\alpha<1$ (Cobb-Douglas) y $0<\alpha\beta<1$ el nivel de capital converge a un valor $\bar{k}$ cuando $t\to\infty$. Osea en estado estacionario:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \alpha\beta\bar{k}^\alpha \\ \bar{k}^{1-\alpha} &= \alpha\beta \Rightarrow \bar{k}=(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty} k_{t+1}=(\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}=\bar{k}$$

Como $\bar{k}$ es finito, entonces $V(k_{T+1})$ también converge a un valor finito a medida que crece T. Finalmente

$$\lim_{T\to\infty}\beta^{T+1} V(k_{T+1})=V(\bar{k})\lim_{T\to\infty}\beta^{T+1}=V(\bar{k})\cdot 0=0$$

Reemplazando este valor en la Ecuación 3 queda demostrado que,

$$\lim_{T\to\infty}\left[V(k_0)-\beta^{T+1} V(k_{T+1})\right]=V(k_0)$$

la suma presente del valor descontado tiende a $V(k_0)$ en estado estacionario $\blacksquare$.

4. ¿Esta secuencia candidata satisface la Ecuación de Euler para todo t? Demuestre su respuesta

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) f'(k_{t+1}) \quad \forall t = 0, 1, 2, \ldots$$

Derivando la utilidad logarítmica $\log(c_t)$ y reemplazando en la Ecuación de Euler,

$$\frac{1}{c_t} = \beta \frac{1}{c_{t+1}} f'(k_{t+1}) \tag{4}$$

Sabemos que $c_t = (1 - \alpha\beta)k_t^\alpha$. Por lo tanto, $c_{t+1} = (1 - \alpha\beta)k_{t+1}^\alpha$. La Ecuación 4 queda,

$$\frac{1}{(1-\alpha\beta)k_t^\alpha} = \beta \frac{1}{(1-\alpha\beta)k_{t+1}^\alpha} f'(k_{t+1})$$

Podemos cancelar $(1 - \alpha\beta)$ de ambos lados, ya que es una constante positiva:

$$\frac{1}{k_t^\alpha} = \beta \frac{1}{k_{t+1}^\alpha} f'(k_{t+1}) = \beta \frac{1}{k_{t+1}^\alpha} (\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}) = \beta\alpha k_{t+1}^{\alpha-1-\alpha} = \frac{\alpha\beta}{k_{t+1}}$$

Sabemos que $k_{t+1} = \alpha\beta k_t^\alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_t^\alpha} &= \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta k_t^\alpha} \\ \frac{1}{k_t^\alpha} &= \frac{1}{k_t^\alpha} \end{aligned} \tag{5}$$

Dado que la igualdad en la Ecuación 5 se cumple para cualquier $k_t > 0$, la secuencia candidata satisface la Ecuación de Euler para todo t ■.

5. ¿Esta secuencia candidata satisface la condición de transversalidad? Demuestre su respuesta

$$\beta^T u'(c_T) k_{T+1} \to 0$$

Desde la condición de transversalidad

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T u'(c_T^*) K_{T+1}^* = 0$$

donde

$$u'(c_T^*) = \frac{1}{(1-\alpha\beta)k_T^{*\alpha}}$$

Sustituyendo,

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \left(\frac{1}{(1-\alpha\beta)k_T^{*\alpha}}\right) K_{T+1}^* = \lim_{T\to\infty} \beta^T \frac{K_{T+1}^*}{(1-\alpha\beta)k_T^{*\alpha}}$$

utilizando el valor de $k_{T+1}^* = \alpha\beta k_T^{*\alpha}$

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \frac{\alpha\beta k_T^{*\alpha}}{(1-\alpha\beta)k_T^{*\alpha}} = \lim_{T\to\infty} \beta^T \underbrace{\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}}_{\text{constante}} = 0$$

La satisfacción del TVC asegura que el Agente no está sobre-ahorrando y el valor del capital en el muy largo plazo, descontado, se vuelve insignificante permitiendo la convergencia.

Pregunta II. Considere el *Cake Eating Problem*. Suponga que en el periodo inicial ($t = 0$), un consumidor tiene una torta de tamaño $W_0 > 0$. El consumidor debe escoger una secuencia no negativa de $\{c_t, W_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar

$$\underset{\{c_t, W_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{c_t}$$

sujeto a $W_t = c_t + W_{t+1}$ for $t \geq 0$, $W_0 > 0$ dado.

1. Utilice el Método Lagrange para encontrar la secuencia óptima $\{c_t, W_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$. Muestre que esta secuencia cumple con la ecuación de Euler y la condición de transversalidad. Utilice esta secuencia para encontrar el valor máximo de utilidad en función de W_0.

Escribimos el Lagrangiano (tiempo presente)

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{c_t} + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (W_t - c_t - W_{t+1})$$

Donde λ_t son los multiplicadores de Lagrange para cada periodo t.

Ahora calculando las CPO con respecto al consumo y tamaño de la torta futuro

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t \frac{1}{2\sqrt{c_t}} - \lambda_t = 0 \Rightarrow \lambda_t = \beta^t \frac{1}{2\sqrt{c_t}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} = 0 \Rightarrow \lambda_t = \lambda_{t+1} \tag{2}$$

Desde la ecuación (2) se verifica que el valor sombra λ es constante a traves del tiempo. Ahora reemplazando (1) en (2)

$$\begin{aligned} \beta^t \frac{1}{2\sqrt{c_t}} &= \beta^{t+1} \frac{1}{2\sqrt{c_{t+1}}} \\ \frac{1}{\sqrt{c_t}} &= \beta \frac{1}{\sqrt{c_{t+1}}} \Rightarrow c_{t+1} = \beta^2 c_t \end{aligned}$$

el consumo disminuye a una tasa β^2. Ahora, recursivamente podemos encontrar cualquier valor para C_t en función de C_0 el consumo inicial. Así,

$$\begin{aligned} t = 0: &\quad C_1 = \beta^2 * C_0 \\ t = 1: &\quad C_2 = \beta^2 * C_1 = \beta^2(\beta^2 * C_0) = \beta^4 * C_0 \\ t = 2: &\quad C_3 = \beta^2 * C_2 = \beta^2(\beta^4 * C_0) = \beta^6 * C_0 \end{aligned}$$

En terminos generales,

$$C_t = (\beta^2)^t C_0 \tag{3}$$

La restricción presupuestaria implica que la riqueza inicial se consume por completo a lo largo del tiempo, osea

$$W_0 = \sum_{t=0}^{\infty} C_t \tag{4}$$

Reemplazando (3) en (4) y considerando que $0 < \beta^2 < 1$

$$W_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} C_0 = C_0 \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right)$$

Despejando el consumo inicial

$$C_0 = (1 - \beta^2) W_0 \Rightarrow C_t = \beta^{2t}(1 - \beta^2) W_0$$

Hemos encontrado la secuencia óptima de C_t el consumo. Para la secuencia óptima de la riqueza (tamaño de la torta) usamos

$$W_{t+1} = W_t - C_t$$

Para $t = 0$ y reemplazando C_t

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 - (1-\beta^2)W_0 \\ W_1 &= \beta^2 W_0 \end{aligned}$$

Para $t = 1$

$$\begin{aligned} W_2 &= W_1 - C_1 \\ &= \beta^2 W_0 - (\beta^2(1-\beta^2)W_0) \\ &= \beta^2 W_0(1-(1-\beta^2)) = \beta^4 W_0 \end{aligned}$$

Es claro ver que para cualquier t,

$$W_t = \beta^{2t} W_0$$

Finalmente, tomando el limite,

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t) W_{t+1} = 0$$

Sustituyendo $u'(c_t) = \frac{1}{2\sqrt{c_t}}$ y las secuencias óptimas para C_t el consumo y W_{t+1} la riqueza en el periodo $t+1$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{1}{2\sqrt{(1-\beta^2)W_0\beta^{2t}}} \beta^{2(t+1)} W_0 &= \lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{\beta^{2t+2} W_0}{2\sqrt{(1-\beta^2)W_0}\beta^t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\beta^{2t+2} W_0}{2\sqrt{(1-\beta^2)W_0}} \end{aligned}$$

Dado $0 < \beta < 1$ el termino β^{2t+2} tiende a 0 a medida que $t \to \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t) W_{t+1} = 0$$

la TVC se cumple ■.

2. Escriba la Ecuación de Bellman del problema. ¿Cuál es la variable Estado? ¿Y la variable control?

Para este problema la EB es

$$V(w) = \max_{c,w'}\{\sqrt{c} + \beta V(w')\} \tag{6}$$

Sujeto a,

$$w = c + w' \tag{7}$$

En esta nueva formulación recursiva solo nos interesa el estado presente w (tamaño torta actual) y el valor futuro w'.

- La variable de estado es w, el tamaño de la torta conocido al inicio de cada periodo.
- Las variables de control son el consumo y la cantidad de torta que se guarda/ahorra para el futuro (w').

3. Encuentre de manera analítica la solución de la Ecuación de Bellman y las policy functions para c y W' en función de W. (Ayuda: La policy function para consumo es $c(W) = (1-\beta^2)W$)

Utilizaremos Guess and Verify con una función de valor candidata

$$V(W) = A\sqrt{W} \tag{8}$$

donde A es un coeficiente indeterminado que necesitamos ENCONTRAR. Reemplazamos la conjetura de $V(W)$ en la EB:

$$A\sqrt{W} = \max_{w'}\{\underbrace{\sqrt{W - W'}}_{\text{desde la restricción}} + \beta A\sqrt{W'}\} \tag{9}$$

Ahora obtenemos las CPO:

$$\frac{\partial}{\partial w'}(\sqrt{w-w'}+\beta A\sqrt{w'})=0 \Rightarrow w'(w)=\frac{(\beta A)^2}{1+(\beta A)^2}W \tag{10}$$

Para el consumo, reemplazamos la politica optima encontrada para w'

$$\begin{aligned} c(W) &= W - W' \\ &= W - \frac{(\beta A)^2}{1+(\beta A)^2}W \Rightarrow c(W)=\frac{1}{1+(\beta A)^2}W \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora sustituimos $c(W)$ y $w'(w)$ en la EB para verificar:

$$A\sqrt{W}=\sqrt{\frac{1}{1+(\beta A)^2}W}+\beta A\sqrt{\frac{(\beta A)^2}{1+(\beta A)^2}W} \tag{12}$$

Asumiendo $W>0$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{1+(\beta A)^2}}+\frac{\beta A(\beta A)}{\sqrt{1+(\beta A)^2}} \\ A &= \frac{1+\beta^2A^2}{\sqrt{1+(\beta A)^2}} \\ A &= \sqrt{1+(\beta A)^2} \end{aligned}$$

Despejamos A

$$\begin{aligned} A^2 &= 1+(\beta A)^2 \\ A^2-\beta^2A^2 &= 1 \\ A^2 &= \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{13}$$

Ahora que tenemos el valor de A, lo sustituimos en las policy functions que encontramos anteriormente para obtener la solución final. Por simplicidad, primero calculamos el valor del término $(\beta A)^2$:

$$(\beta A)^2=\beta^2A^2=\beta^2\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)=\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

Sustituimos este resultado en la policy function para el consumo c(W):

$$\begin{aligned} c(W) &= \frac{1}{1+(\beta A)^2}W \\ &= \frac{1}{1+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}}W \\ &= \frac{1}{\frac{1-\beta^2+\beta^2}{1-\beta^2}}W \\ &= \frac{1}{\frac{1}{1-\beta^2}}W \\ &= (1-\beta^2)W \end{aligned}$$

Esta es la función de política óptima para el consumo la cual coincide con el *hint* de la pregunta.
Finalmente, para la riqueza del próximo periodo, W', utilizamos la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} W'(W) &= W - c(W) \\ &= W - (1-\beta^2)W \\ &= W - W + \beta^2 W \\ &= \beta^2 W \end{aligned}$$

Así, hemos encontrado las policy functions para el consumo y la riqueza del siguiente periodo en función de la riqueza actual.■

4. Programar en Matlab o Python el value iteration para el Cake Eating Problem (Suba a Canvas los códigos). Sea β igual a 0.98, y $W \in [0{,}001, 10]$. Escriba el proceso de value iteration para este problema.

El codigo se puede encontrar en:

5. Grafique varias iteraciones del proceso contra la función de valor obtenida en el punto anterior.

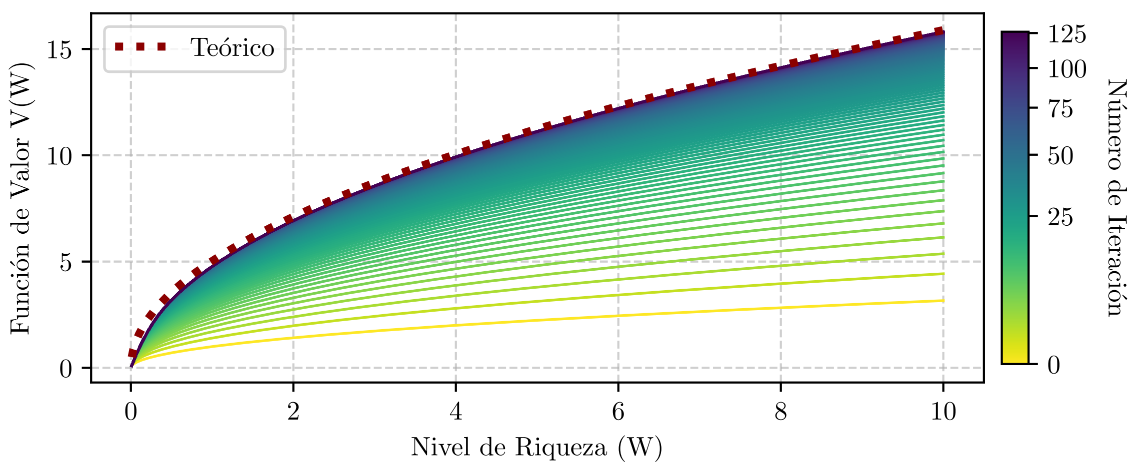

Figura 1: Convergencia de la Función de Valor mediante el método de Value Function Iteration. El eje vertical representa la Función de Valor $V(W)$ y el eje horizontal el Nivel de Riqueza (W) o tamaño de la torta. Las líneas de colores, que van del amarillo al púrpura oscuro, muestran cómo la función de valor calculada se aproxima a una solución estable a medida que aumenta el número de iteraciones. La función de valor final y convergente se alinea perfectamente con la solución teórica (línea de puntos roja), demostrando que el método numérico converge a la forma cóncava correcta

6. Grafique las policy function para $c(W)$ y $W'(W)$.

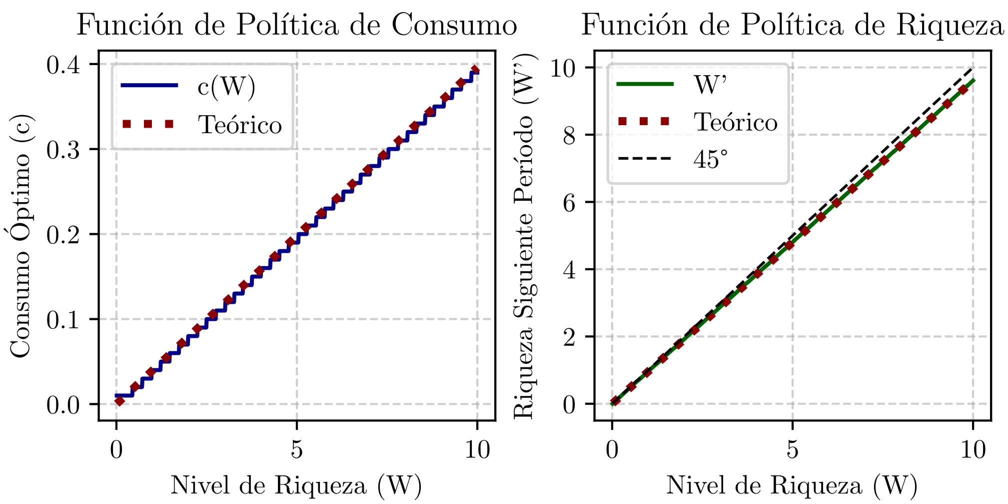

Figura 2: [Izquierda] Función de Política de Consumo ilustra que el consumo óptimo (c) aumenta linealmente con el nivel de riqueza (W). [Derecha] Función de Política de Riqueza muestra que la riqueza del siguiente período (W') también aumenta linealmente con la riqueza actual, pero se mantiene por debajo de la línea de 45, lo que indica que siempre se consume una parte de la riqueza en cada período. En ambos gráficos, la solución numérica (líneas continuas) coincide con la solución teórica (líneas de puntos).

Pregunta III. Value Function Iteration. El objetivo de esta pregunta es programar en Matlab o Python el value iteration para el Cake Eating Problem de la Pregunta II - versión estocástica.

1. Retome el Cake eating Problem de la Pregunta II. Suponga que la torta sigue un proceso estocástico. Es decir, en cada periodo, en lugar de W, la torta tiene el tamaño de ϵW. La variable aleatoria ϵ puede tomar los valores [0,9, 1,1] y sigue un proceso Markov con la siguiente matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix}$$

En nuevos archivos de Matlab o Python, incluya este proceso estocástico en el proceso de iteración de valor. Vuelva a graficar el proceso de iteración y las policy function. (Ayuda: Note que hay dos policy function para c y dos para W')

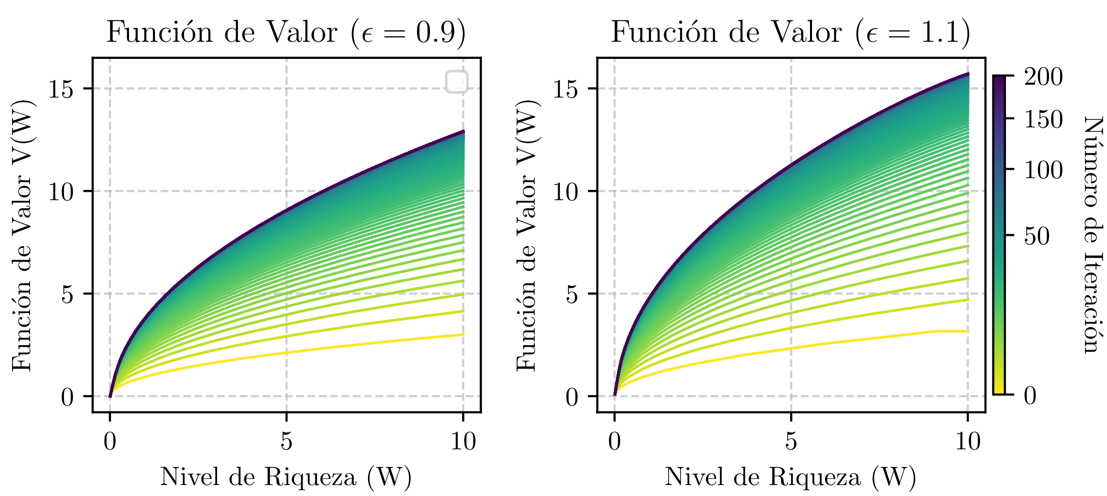

Figura 3: Convergencia de la Función de Valor $V(W)$ para [Izquierda] $\epsilon = 0{,}9$ y [Derecha] $\epsilon = 1{,}1$. En ambos casos, se muestra la Función de Valor en el eje vertical contra el Nivel de Riqueza en el eje horizontal. Las líneas de colores representan las sucesivas iteraciones del cálculo, mostrando cómo la función converge desde una estimación inicial hasta una forma final estable y cóncava.

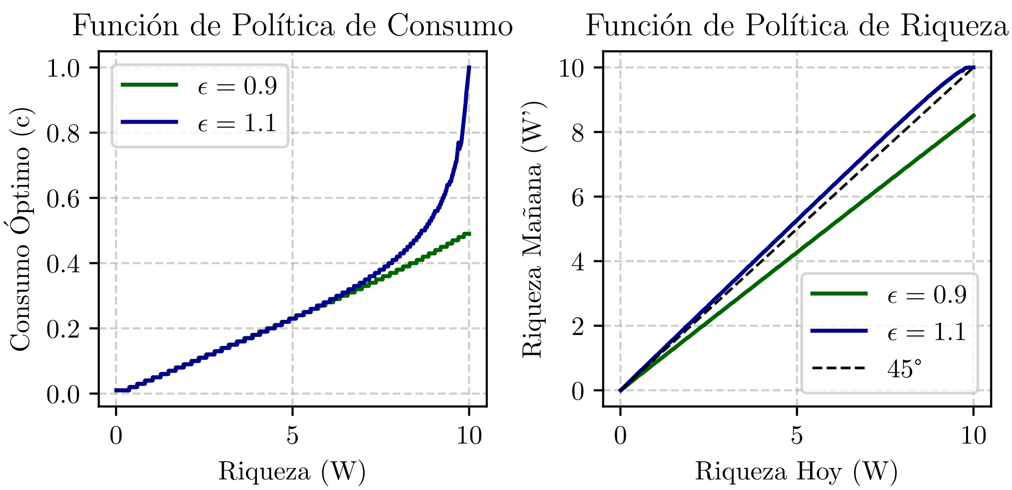

Figura 4: Funciones de política de consumo y riqueza ante un shock aleatorio (ϵ) que multiplica la riqueza. El panel de la izquierda muestra que un shock más alto ($\epsilon = 1{,}1$) aumenta el consumo óptimo. El panel de la derecha muestra que, como consecuencia, la cantidad de riqueza que se ahorra para el siguiente período (W') es menor en comparación con un shock más bajo ($\epsilon = 0{,}9$).