Humberto Martínez

Macro II, **Primavera 2025**
Guía # 1
Fecha de Entrega: Lunes, Agosto 11 - medianoche
Por Canvas

Pregunta I. Considere, de nuevo, la economía a la Robinson Crusoe vista en clase. El objetivo de este ejercicio es verificar que la función de valor encontrada en la clase genera una secuencia que soluciona el Problema Secuencial.

$$\underset{\{c_s,k_{s+1}\}_{s=t}^{\infty}}{Max} \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} log(c_s)$$

$$\text{sujeto a } k_s^{\alpha} \geq c_s + k_{s+1} \ for \ s \geq t, \quad k_0 > 0$$

1. Muestre a través del método *Guess and Verify* que la solución a la Ecuación de Bellman son la función de valor

$$V(k) = \frac{1}{1-\beta}\left[log(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}log(\alpha\beta)\right] + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}log(k)$$

   y las policy functions

$$k'(k) = \alpha\beta k^{\alpha}, \quad c(k) = (1-\alpha\beta)k^{\alpha}$$

2. Utilice las policy functions para construir la secuencia candidata $\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$. Verifique que esta secuencia satisface la restricción en cualquier periodo t. Luego, utilice esta secuencia para escribir $log(k_t)$ y $log(c_t)$ en términos de k_0

3. Muestre que las sumas parciales $\{\sum_{t=0}^{T} \beta^t log(c_t)\}_{T=0}^{\infty}$ convergen y tienden a $V(k_0)$

4. ¿Esta secuencia candidata satisface la Ecuación de Euler para todo t? Demuestre su respuesta

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})f'(k_{t+1}) \ \forall \ t = 0, 1, 2, ...$$

5. ¿Esta secuencia candidata satisface la condición de transversalidad? Demuestre su respuesta

$$\beta^T u'(c_T)k_{T+1} \to 0$$

Pregunta II. Considere el *Cake Eating Problem*. Suponga que en el periodo inicial ($t = 0$), un consumidor tiene una torta de tamaño $W_0 > 0$. El consumidor debe escoger una secuencia no negativa de $\{c_t, W_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar

$$\underset{\{c_t, W_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{c_t}$$

$$\text{sujeto a } W_t = c_t + W_{t+1} \ for \ t \geq 0, \ W_0 > 0 \ dado$$

1. Utilice el Método Langrange para encontrar la secuencia óptima $\{c_t, W_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$. Muestre que esta secuencia cumple con la ecuación de Euler y la condición de transversalidad. Utilice esta secuencia para encontrar el valor máximo de utilidad en función de W_0.

2. Escriba la Ecuación de Bellman del problema. ¿Cuál es la variable Estado? ¿Y la variable control?

3. Encuentre de manera analítica la solución de la Ecuación de Bellman y las policy functions para c y W' en función de W. (Ayuda: La policy function para consumo es $c(W) = (1 - \beta^2)W$)

4. Programar en Matlab o Python el value iteration para el Cake Eating Problem (Suba a Canvas los códigos). Sea β igual a 0.98, y $W \ \epsilon \ \big[0.001, 10\big]$. Escriba el proceso de value Iteration para este problema.

5. Grafique varias iteraciones del proceso contra la función de valor obtenida en el punto anterior.

6. Grafique las policy function para $c(W)$ y $W'(W)$

Pregunta III. Value Function Iteration. El objetivo de esta pregunta es programar en Matlab o Python el value iteration para el Cake Eating Problem de la Pregunta II - versión estocástica.

1. Retome el Cake eating Problem de la Pregunta II. Suponga que la torta sigue un proceso estocástico. Es decir, en cada periodo, en lugar de W, la torta tiene el tamaño de ϵW. La variable aleatoria ϵ puede tomar los valores $\big[0.9, 1.1\big]$ y sigue un proceso Markov con la siguiente matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

   En nuevos archivos de Matlab o Python, incluya este proceso estocástico en el proceso de iteración de valor. Vuelva a graficar el proceso de iteración y las policy function. (Ayuda: Note que hay dos policy function para c y dos para W')