Pregunta 1

Tres firmas oligopólicas operan en un mercado con una función inversa de demanda dada por $P(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + q_2 + q_3$. Cada firma tiene un costo marginal de producir constante c y sin costos fijos. Las firmas escogen cuánto producir de la siguiente forma: 1) La firma 1 escoge $q_1 \geq 0$; 2) Las firmas 2 y 3 observan q_1 y deciden simultáneamente cuánto producir (escogen q_2 y q_3, respectivamente). Encuentre el ENPS.

- $P(Q) = a - Q = a - q_1 - q_2 - q_3$
- $\pi_i = (a - q_i - q_j - q_k - c) q_i$

Firmas 2 y 3 (simétrico):

$\max \pi_2 = (a - q_1 - q_2 - q_3 - c) q_2$ → Lo hacemos solo para la firma 2 pero es simétrico para la firma 3

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = (a - q_1 - q_2 - q_3 - c) + q_2(-1) = 0$$

$$\rightarrow a - q_1 - q_3 - c = 2q_2$$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{a - q_1 - q_3 - c}{2}$$ → Mejor respuesta de la firma 2

$$\Rightarrow q_3 = \frac{a - q_1 - q_2 - c}{2}$$ → Mejor respuesta de la firma 3

- El EN del subjuego está dado por la intersección de las mejores respuestas de firma 2 y firma 3:

$$q_2^* = \frac{a - q_1 - \left(\frac{a - q_1 - q_2 - c}{2}\right) - c}{2}$$

$$2q_2 = a - q_1 - c - \frac{(a - q_1 - c)}{2} + \frac{q_2}{2}$$

$$\frac{3}{2} q_2 = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

$$\Rightarrow q_2^* = \frac{a - q_1 - c}{3} = q_3^*$$

De este modo:

Firma 1 → $\max \pi_1 = (a - q_1 - q_2 - q_3 - c) q_1$ s.a $q_2^* = \frac{a - q_1 - c}{3} = q_3^*$

$$\pi_1 = \left(a - q_1 - \frac{2}{3}(a - q_1 - c) - c\right) q_1$$

$$\pi_1 = \frac{(a - q_1 - c)}{3} \cdot q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{a - q_1 - c}{3} + q_1\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a-c}{3} - \frac{q_1}{3} = \frac{q_1}{3}$$

$$\frac{a-c}{3} = \frac{2}{3} q_1$$

$$\Rightarrow q_1^* = \frac{a-c}{2}$$

$$\Rightarrow q_2^* = q_3^* = \frac{a-c}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{a-c}{2}\right) = \frac{1}{3}(a-c)(1 - 1/2) = \frac{a-c}{6}$$

$$\Rightarrow ENPS = \{(q_1^*, q_2^*, q_3^*)\}$$

Pregunta 2 (Tarea 4 2024)

Un propietario ausente es dueño de una granja y contrata a un trabajador para que le trabaje. La producción de la granja es $\sqrt{e}$, donde e es el nivel de esfuerzo del trabajador. El propietario no puede observar directamente el nivel de esfuerzo proporcionado por el trabajador, pero si puede escribir un contrato con anticipación, especificando la fracción β de la producción futura que será para el trabajador. Después de observar β, el trabajador puede elegir su nivel de esfuerzo e. El esfuerzo es costoso para el trabajador.

Dados β y e, la utilidad del propietario es $v(\beta,e) = (1-\beta)\sqrt{e}$ (la producción menos la participación del trabajador), y la utilidad del trabajador (que, en principio, podría ser negativa) es $u(\beta,e) = \beta\sqrt{e} - e$ (su parte de la producción menos su costo). Suponga que $0 \leq \beta \leq 1$ y $0 \leq e \leq 1$.

a. Utilice la inducción hacia atrás para encontrar el nivel β que establecerá el dueño y el nivel de esfuerzo e que esto inducirá.

- etapa 1: Propietario escoge β para maximizar $v(\beta, e)$
- etapa 2: Trabajador, dado β, escoge e para maximizar $u(\beta,e)$

Haciendo inducción hacia atrás:

① Trabajador maximiza $u(\beta,e) = \beta\sqrt{e} - e$

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \beta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{2\sqrt{e}} = 1 \Rightarrow \sqrt{e} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow e = \frac{\beta^2}{4}$$

} Función de reacción del trabajador dado β fijado por el propietario.

② Propietario maximiza $v(\beta,e) = (1-\beta)\sqrt{e}$ tomando en cuenta que el trabajador reaccionará escogiendo $e = \beta^2/4$

$$\max \quad v(\beta,e) = (1-\beta)\sqrt{e} \quad \text{s.a} \quad e = \beta^2/4$$

$$v(\beta,e) = (1-\beta)\cdot \beta/2$$

$$v(\beta,e) = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{1}{2} - \cancel{2}\cdot\frac{\beta}{\cancel{2}} = 0 \Rightarrow \beta^* = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ Dado $\beta^* = 1/2$: $\quad e^* = \dfrac{(\beta^*)^2}{4} = \dfrac{(1/2)^2}{4} = \dfrac{1/4}{4}$

$e^* = 1/16$

b. Suponga que un planificador social puede establecer e, el nivel de esfuerzo del trabajador. Suponga que el planificador apunta a maximizar la utilidad total $v(\beta,e)+u(\beta,e)$. ¿Qué nivel de e elegirá el planificador social?

Planificador: $\max\limits_{e} \quad v(\beta,e) + u(\beta,e) = (1-\beta)\sqrt{e} + \beta\sqrt{e} - e = \sqrt{e} - e$

$$\frac{\partial}{\partial e} = \frac{1}{2\sqrt{e}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{e}} = 1 \Rightarrow \sqrt{e} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^* = \frac{1}{4}$$

c. Suponga ahora que el planificador social todavía quiere maximizar laa utilidad total pero no puede especificar e (quizás porque el tampoco puede observar el esfuerzo), En cambio, el planificador social solo puede establecer β. ¿Qué nivel β establecerá el planificador social?

Planificador social escoge β tq maximice la utilidad total, pero tomando en consideración que el trabajador definirá su esfuerzo ante el β escogido (lo que afecta la utilidad total)

$$\max \quad v(\beta,e) + u(\beta,e) = \sqrt{e} - e \quad \text{s.a} \quad e = \beta^2/4$$

$$= \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{1}{2} - \frac{2\beta}{4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta^* = 1$$

$e^* = 1/4$

Pregunta 3 (Examen 2024)

Considere el juego secuencial descrito a continuación. Hay 3 jugadores.

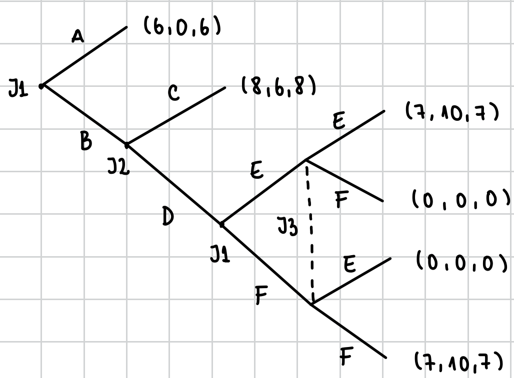
El jugador 1 mueve A o B. Si elige *A*, el juego termina con pagos (6,0,6) (el orden en que se entregan los pagos es siempre (pago J1, pago J2, pago J3)). Si elige B, el juego continúa a una segunda etapa.

En la segunda etapa el jugador elige C o D. Si elige C, el juego termina con pagos (8,6,8). Si elige D, el juego continúa a una tercera etapa.

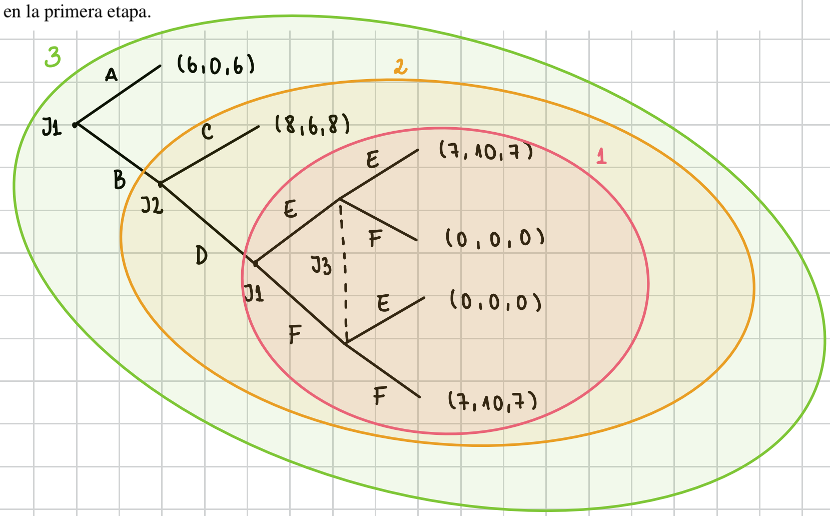
En la tercera etapa los jugadores 1 y 3 realizan un juego simultáneo de coordinación descrito por la matriz de pagos (los pagos dados son para los tres jugadores, aunque J2 no es activo en este subjuego).

		Jugador 3	
		E	F
	E	(7,10,7)	(0,0,0)
Jugador 1	F	(0,0,0)	(7,10,7)

a. Dibuje el árbol que representa este juego.



b. Demuestre que en cada ENPS (incluídos aquellos en que se juegan estrategias mixtas), el J1 juega B en la primera etapa.



* 1^{er} subjuego: 3ra etapa

		J3 E	J3 F	
J1	E	(7,10,7)	(0,0,0)	p
	F	(0,0,0)	(7,10,7)	$1-p$
		q	$1-q$	

$\Rightarrow$ EN puras = $\{(E,E),(F,F)\}$

↱ J1 y J3 juegan E en 3ra etapa

↳ J1 y J3 juegan F en 3ra etapa

EN mixtas: $\sigma_1 = (p, 1-p)$; $\sigma_3 = (q, 1-q)$

* $u_1(E) = u_1(F)$

$$7q + 0(1-q) = 0q + 7(1-q)$$
$$7q = 7(1-q)$$
$$2q = 1$$
$$q^* = 1/2 \Rightarrow \sigma_3^* = (1/2, 1/2)$$

* $u_3(E) = u_3(F)$

$$7p + 0(1-p) = 0p + 7(1-p)$$
$$7p = 7(1-p)$$
$$2p = 1$$
$$p^* = 1/2 \Rightarrow \sigma_1^* = (1/2, 1/2)$$

$\therefore$ EN mixtas $= \{(\sigma_1^*, \sigma_3^*)\}$

con pagos esperados: $u_1(\sigma_1^*, \sigma_3^*) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 7 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 7 = \frac{7}{4} + \frac{7}{4} = \frac{7}{2} = 3.5$

$u_3(\sigma_1^*, \sigma_3^*) = 3.5$

$u_2(\sigma_1^*, \sigma_3^*) = 1/2\cdot 1/2\cdot 10 + 1/2\cdot 1/2\cdot 0 + 1/2\cdot 1/2\cdot 0 + 1/2\cdot 1/2\cdot 10 = 10/4 + 10/4 = 10/2 = 5$

* 2^{do} subjuego: 2da etapa

3 casos a analizar → se juega (E,E) en 3ra etapa ⎫
↳ se juega (F,F) en 3ra etapa ⎭ simétricos
↳ se juega (σ_1^*, σ_3^*) en 3ra etapa

① Si se juega (E,E) o (F,F) en 3ra etapa:

J2: C → (8,6,8) ; D → (7,10,7)

$\Rightarrow$ EN = $\{(E,D,E), (F,D,F)\}$

② Si se juega (σ_1^*, σ_3^*) en 3ra etapa:

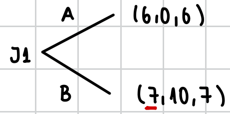
J2: C → (8,6,8) ; D → (3.5, 5, 3.5)

$\Rightarrow$ EN = $\{(\sigma_1^*, C, \sigma_3^*)\}$

* 3er subjuego: todo el juego

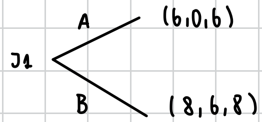
3 casos ⟶ (E,D,E), (F,D,F) y (σ_1^*, C, σ_3^*)

① (E,D,E) o (F,D,F) en 2da etapa:



⟹ EN = {((B,E),D,E), ((B,F),C,F)

② (σ_1^*, C, σ_3^*) en 2da etapa:



⟹ EN = {((B,σ_1^*), C, σ_3^*)}

∴ ENPS = {((B,E),D,E), ((B,F),D,F), ((B,σ_1^*),C,σ_3^*)}

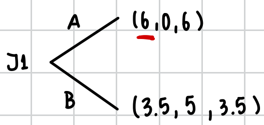
→ En todos J1 jugará B en la 1ra etapa

c. El J1 cree que en el subjuego de la tercera etapa se jugará el equilibrio en estrategias mixtas, pero a la vez, cree que el J2 está convencido de que se jugará un equilibrio en estrategias puras. ¿Qué acción elegirá J1 en la primera etapa?

Si las cosas ocurren como cree A:

- En la 3ra etapa se juega el equilibrio de estrategias mixtas ⟹ pagos son: (3.5, 5, 3.5)
- Si J2 cree que en la 3ra etapa se jugarán estrategias puras, jugará D en la 2da etapa.
  ↳ Como J2 juega D se pasa a la 3ra etapa, pero en esta se juegan estrategias mixtas ⟹ pagos son: (3.5, 2.5, 3.5)

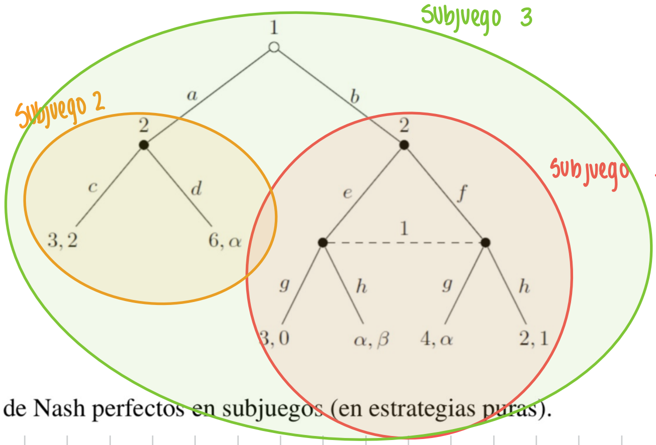
Por lo tanto, la decisión del J1 en la 1ra etapa se ve como:



⟹ J1 jugará A en la 1ra etapa ⟹ No se juega un ENPS

Pregunta 4

Dados parámetros estrictamente positivos (α, β), considere el siguiente juego dinámico de información completa e imperfecta.



Encuentre los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (en estrategias puras).

* Subjuego 1

		J2	
		e	f
J1	g	$(3,0)$	$(\underline{4},\underline{\alpha})$
	h	(α,β)	$(2,1)$

- Si J1 juega g $\rightarrow$ J2 juega f $(\alpha > 0)$
- Si J1 juega h $\rightarrow$ depende de β (valor crítico : 1)
- Si J2 juega e $\rightarrow$ depende de α (valor crítico : 3)
- Si J2 juega f $\rightarrow$ J1 juega g

$\Rightarrow$ (g,f) siempre es EN
(h,e) es EN si $\alpha \geq 3$ y $\beta \geq 1$

* Subjuego 2:

J2: c $\rightarrow$ $(3,2)$; d $\rightarrow$ $(6,\alpha)$

$\Rightarrow$ $\alpha \geq 2$: J2 elige d
$\alpha \leq 2$: J2 elige c
($\alpha = 2$: J2 indiferente entre c y d)

* Subjuego 3 (todo el juego)

- $\alpha < 2$ $\rightarrow$ en subjueg 2, J2 jugará c $\Rightarrow$ pagos $(3,2)$
  $\hookrightarrow$ en subjuego 3, se jugará (g,f) $\Rightarrow$ pagos $(4,\alpha)$

  J1: a $\rightarrow$ $(3,2)$; b $\rightarrow$ $(\underline{4},\alpha)$

  $\Rightarrow$ ENPS = $\{(bg, cf)\}$

- $\alpha = 2$ $\rightarrow$ en subjuego 2, J2 indiferente entre jugar c o d $\Rightarrow$ J1 obtiene pago 3 o 6
  $\hookrightarrow$ en subjuego 3 se jugará (g,f) $\Rightarrow$ J1 obtiene pagos de 4

  * Si J2 juega c :

    J1: a $\rightarrow$ $(3,2)$; b $\rightarrow$ $(\underline{4},\alpha)$

    $\Rightarrow$ ENPS = $\{(bg, cf)\}$

  * Si J2 juega d :

    J1: a $\rightarrow$ $(\underline{6},\alpha)$; b $\rightarrow$ $(4,\alpha)$

    $\Rightarrow$ ENPS = $\{(ag, df)\}$

▷ $2 < \alpha < 3$ → En subjuego 2, J2 jugará d ⇒ pagos: $(6,\alpha)$
↳ En subjuego 3 se jugará (g,f) ⇒ pagos $(4,\alpha)$

J1 — a — $(\underline{6},\alpha)$ ⇒ ENPS = $\{(ag, df)\}$
b — $(4,\alpha)$

▷ $\alpha \geq 3$ y $\beta < 1$ → En subjuego 2, J2 jugará d ⇒ pagos son $(6,\alpha)$
↳ En subjuego 3 se jugará (g,f) ⇒ pagos son $(4,\alpha)$

J1 — a — $(6,\alpha)$ ⇒ ENPS = $\{(ag, df)\}$
b — $(4,\alpha)$

▷ $3 \leq \alpha$ y $\beta \geq 1$ → En subjuego 2, J2 jugará d ⇒ pagos $(6,\alpha)$
↳ En subjuego 3 se jugará (g,f) o (h,e) ⇒ pagos $(4,\alpha)$ o (α,β)

* Jugando (g,f)

J1 — a — $(\underline{6},\alpha)$ ⇒ ENPS = $\{(ag, df)\}$
b — $(4,\alpha)$

* Jugando (h,e)

J1 — a — $(6,\alpha)$
b — (α,β)
} depende del valor de α

⇒ $3 \leq \alpha < 6$ y $\beta \geq 1$: ENPS = $\{(ag, df), (ah, de)\}$
⇒ $\alpha = 6$ y $\beta \geq 1$: ENPS = $\{(ag, df), (ah, de), (bh, de)\}$
⇒ $\alpha > 6$ y $\beta \geq 1$: ENPS = $\{(ag, df), (bh, de)\}$