Examen Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Gabriela Denis, Pedro Schilling

Pregunta 1: (35 puntos)

Tres individuos $I = \{1, 2, 3\}$ deben votar por uno de dos candidatos, A o B. El candidato con más votos gana. Si gana el candidato A, la utilidad de los votantes 1 y 2 es 1 y la utilidad del votante 3 es 0; mientras que si gana el candidato B, la utilidad de los votantes 1 y 2 es 0 y la utilidad del votante 3 es 1.

1. (10 puntos) Escriba este juego en forma normal.
2. (10 puntos) Encuentre todos los equilibrios de este juego.
3. (10 puntos) Encuentre las estrategias débilmente dominadas para cada jugador.
4. (5 puntos) Si los jugadores sólo juegan estrategias que no están débilmente dominadas, ¿hay algún equilibrio en que salga electo B?

Respuesta

1. Los jugadores son $I = \{1, 2, 3\}$, los espacios de estrategias son $S_i = \{A, B\}$. A continuación vemos dos maneras de representar los pagos. La primera es definir las funciones de pago como $u_1(s) = u_2(s) = 1 - u_3(s)$, con

$$u_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in \{(A,A,A), (A,A,B), (B,A,A), (A,A,B)\} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Otra forma de representar los pagos es, con (u_1, u_2, u_3) en cada celda,

Si $s_3 = A$:

Jug. 1 \ Jug. 2	A	B
A	$(1,1,0)$	$(1,1,0)$
B	$(1,1,0)$	$(0,0,1)$

Si $s_3 = B$:

Jug. 1 \ Jug. 2	A	B
A	$(1,1,0)$	$(0,0,1)$
B	$(0,0,1)$	$(0,0,1)$

2. Los equilibrios son $(A, A, A), (A, A, B)$ y (B, B, B): a nadie le va mejor desviándose (en los casos (A, A, A) y (B, B, B) porque no cambiaría nada, en el caso (A, A, B) porque 1 y 2 están jugando su mejor respuesta y 3 también). Los otros perfiles de estrategias no son equilibrios de Nash. En efecto, si sale A electo, es porque 3 lo está votando y podría cambiar el resultado; si B sale electo, 1 o 2 podrían cambiar el resultado.

3. Para los jugadores 1 y 2 la estrategia B está débilmente dominada (hacemos la prueba solamente para J1, dado que J2 tiene los mismos pagos),

$$u_1(A, A, B) > u_1(B, A, B), u_1(A, B, A) > u_1(B, B, A)$$
$$u_1(A, A, A) = u_1(B, A, A), u_1(A, B, B) = u_1(B, B, B)$$

Para J3 la estrategia A está débilmente dominada:

$$u_3(A, A, B) = u_3(A, A, A), u_3(A, B, B) > u_3(A, B, A)$$
$$u_3(B, A, B) > u_3(B, A, A), u_3(B, B, B) = u_3(B, B, A)$$

Otra forma de resolver esta parte es indicar las mejores respuestas en las matrices de pago:

Jug. 1 \ Jug. 2	A	B
A	$(1, 1, 0)$	$(1, 1, 0)$
B	$(1, 1, 0)$	$(0, 0, 1)$

Si $s_3 = A$

Jug. 1 \ Jug. 2	A	B
A	$(1, 1, 0)$	$(0, 0, 1)$
B	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$

Si $s_3 = B$

Y así también podemos concluir que los equilibrios son $(A, A, A), (A, A, B)$ y (B, B, B).

4. Por la parte anterior, el único perfil de estrategias en que nadie juega estrategias dominadas es (A, A, B), es un equilibrio, y no se elige a B.

Pregunta 2: (25 puntos)

Imagina un barco pirata con una tripulación de tres temibles piratas perfectamente racionales y un tesoro de 100 monedas de oro para dividir entre ellos.

El procedimiento de división del tesoro pirata es el siguiente: los piratas están ordenados linealmente por rango, con la Capitana, el Teniente y el pirata marinero. Nos referiremos a ellos como Pirata 1, Pirata 2 y Pirata 3 respectivamente. Todos los piratas se reúnen en cubierta y el pirata de menor rango sube al tablón. Frente a los otros piratas, propone una división particular del oro. Luego, los piratas votan sobre el plan, incluido el pirata en el tablón, y si una *mayoría estricta* de los piratas aprueba el plan, entonces se adopta y así es como se divide el oro. Pero si el plan del pirata no es aprobado por una mayoría de piratas, entonces, lamentablemente, debe caminar por el tablón hacia el mar (y su muerte) y el procedimiento continúa con el siguiente pirata de menor rango.

Además, es de *conocimiento común* entre los piratas que todos comparten el mismo sistema de valores piratas, es decir, que todos tienen las mismas preferencias: todos prefieren quedarse con la mayor cantidad de oro posible, pero todos prefieren seguir vivos (incluso con 0 monedas de oro) a morir obteniendo cualquier cantidad de monedas de oro. Además, disfrutan de ver morir a los otros piratas. En resumen, sus lista de preferencias estrictamente ordenadas es:

(i) Vivir

(ii) Conseguir oro (cuanto más mejor)

(iii) Provocar la muerte de otros piratas

Suponga que usted es el Pirata 3: ¿qué plan propone?

NOTA: *Mayoría estricta* significa que si exactamente la mitad de los piratas vota por un plan, el plan es rechazado.

Respuesta

Los piratas considerarán el plan del Pirata 3 a la luz de la alternativa, que será el plan propuesto por el Pirata 2, que se comparará con el plan del Pirata 1. Por lo tanto, debemos propagar nuestro análisis desde abajo, trabajando hacia atrás a partir de lo que sucede con un número menor de piratas.

- **Un pirata.** Si solo hay un pirata, la capitana, entonces ella sube al tablón, y claramente debería proponer "Pirata 1 se queda con todo el oro", y debería votar a favor de este plan, y así Pirata 1 se queda con todo el oro.
- **Dos piratas**. Si hay exactamente dos piratas, entonces el Pirata 2 montará el tablón y necesita la mayoría de los dos piratas, lo que significa que debe lograr que la capitana vote por su plan. Pero no importa qué plan proponga, incluso si es que todo el oro debe ir a la capitana, la capitana votará en contra del plan, ya que si el Pirata 2 muere, entonces la capitana obtendrá todo el oro de todos modos, y debido al sistema de valores pirata, ella preferiría que el Pirata 2 fuera eliminado. Entonces, el plan del Pirata 2 no será aprobado por la capitana y, desafortunadamente, el Pirata 2 caminará por el tablón.
- **Tres piratas**. El Pirata 3 solo necesita dos votos, y uno de ellos será el suyo. Así que debe convencer al Pirata 1 o al Pirata 2 para que voten por su plan. Pero en

realidad, Pirata 2 tendrá un fuerte incentivo para votar por el plan, ya que de lo contrario Pirata 2 estará en la situación del caso de los dos piratas, que terminó con la muerte del Pirata 2. Así que el Pirata 3 siempre puede contar con el voto del Pirata 2, por lo que el Pirata 3 propondrá: ¡El Pirata 3 se queda con todo el oro! Esto será aprobado tanto por el Pirata 2 como por el Pirata 3, una mayoría, y así el Pirata 3 se queda con todo el oro.

En definitiva la asignación final de monedas de oro será $(0, 0, 100)$ y ningún pirata caminará por el tablón.

Pregunta 3: (40 puntos)

Considere el siguiente juego G (Dilema del Prisionero):

	C	D
C	$(4,4)$	$(-1,5)$
D	$(5,-1)$	$(1,1)$

El objetivo de este ejercicio es demostrar que es posible obtener un pago de aproximadamente $(2, 2)$ a través de un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.

Considere el siguiente perfil de estrategias.

- Jugador 1
  - En el periodo $t = 1$, jugar D
  - En cada periodo t, con t par, jugar C si y solo si la historia del juego hasta el momento ha sido $(D, C), (C, D), (D, C)$.... Si no fue así, jugar D.
  - En cada periodo t con t impar, jugar D
- Jugador 2
  - En el periodo $t = 1$, jugar C
  - En cada periodo t con t par, jugar D
  - En cada periodo t, con t impar, jugar C si y solo si la historia del juego hasta el momento ha sido $(D, C), (C, D), (D, C)$.... Si no fue así, jugar D.

1. (10 puntos) Demostrar que los pagos promedios descontados cuando se juega este perfil de estrategias son respectivamente

$$u_1 = \frac{5-\delta}{1+\delta} \qquad u_2 = \frac{-1+5\delta}{1+\delta}.$$

¿A qué convergen u_1 y u_2 cuando $\delta \to 1$?

En lo que sigue queremos estudiar si el perfil de estrategias propuesto es un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos. Se hará el estudio sólo desde el punto de vista del Jugador 1, pues el estudio para el Jugador 2 es análogo.

2. (10 puntos) ¿Para que valores de $\delta \in [0,1]$ el Jugador 1 **no** tiene incentivo a desviar en un periodo par?
3. (10 puntos) ¿Para que valores de $\delta \in [0,1]$ el Jugador 1 **no** tiene incentivo a desviar en un periodo impar?
4. (10 puntos) Suponga que hubo un desvío y el juego entró en la fase de castigo. ¿Tiene el Jugador 1 incentivo a desviar?

Respuesta

1. Al seguir este perfil de estrategias, la secuencia de acciones es

$$(D,C),(C,D),(D,C),(C,D),(D,C)...,$$

por lo tanto la secuencia de pagos del Jugador 1 es 5,-1,5,-1,.... Su promedio descontado es

$$u_1 = (1-\delta)\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{2k}(5+\delta(-1)) = (1-\delta)\frac{5-\delta}{1-\delta^2} = \frac{5-\delta}{1+\delta}.$$

Análogamente, la secuencia de pagos del Jugador 2, es -1,5,-1,5,... por lo que su promedio descontado es

$$u_2 = (1-\delta)\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{2k}(-1+\delta 5) = (1-\delta)\frac{-1+\delta 5}{1-\delta^2} = \frac{-1+5\delta}{1+\delta}.$$

Cuando $\delta \to 1$, ambos valores convergen a 2.

2. En los períodos pares, el Jugador 1 juega siempre C, entonces desviar implica jugar D en un periodo par y luego entrar en una etapa de castigo infinita donde ambos jugarán siempre D. J1 recibe entonces 1 en lugar de -1 en el periodo que desvía y luego recibe siempre 1. Por otro lado, los pagos que recibe a partir de un periodo par si **no** desvía, son $-1,5,-1,5,....$ Debemos comparar entonces

$$\frac{-1+5\delta}{1+\delta} \geq (1-\delta)\sum_{k=0}^{\infty} 1\delta^k = 1 \Longrightarrow -1+5\delta \geq 1+\delta \Longrightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$$

3. En los períodos impares, el Jugador 1 juega siempre D si no han habido desvíos. Entonces desviar implica jugar C en un periodo impar y luego entrar en una etapa de castigo infinita donde ambos jugarán siempre D. J1 recibe entonces 4 en lugar de 5 en el periodo que desvía y luego recibe siempre 1. Por otro lado, los pagos que recibe a partir de un periodo par si **no** desvía, son $5, -1, 5, -1, ...$ Debemos comparar entonces

$$\frac{5-\delta}{1+\delta} \geq (1-\delta)\left(4+\sum_{k=1}^{\infty} 1\delta^k\right) = (1-\delta)(4+\delta)$$

La desigualdad anterior es válida para todo $\delta \in [0,1]$. En efecto,

$$\begin{aligned} 5-\delta &\geq (1-\delta^2)(4+\delta) = 4+\delta-4\delta^2-\delta^3 \\ 1-\delta &\geq \delta-4\delta^2-\delta^3 = \delta[(1-2\delta+\delta^2)-2\delta-2\delta^2] = \delta[(1-\delta)^2-2\delta-2\delta^2] \end{aligned}$$

Para ver que la expresión anterior se cumple para todo valor de $\delta \in [0,1]$, hacemos,

$$\begin{aligned} & 1-\delta \leq 1 \Rightarrow 1-\delta \geq (1-\delta)^2 \geq (1-\delta)^2-2\delta-2\delta^2 \\ \Rightarrow \quad & 1-\delta \geq \delta[(1-\delta)^2-2\delta^2] \qquad \text{pues } \delta \leq 1. \end{aligned}$$

4. En la etapa de castigo se juega un EN del juego de etapa en cada etapa. Por eso, el Jugador 1 no tiene incentivo a desviar. (Tampoco el Jugador 2).

Pregunta 4 (30 puntos) Juego de entrada.

Considere un juego de dos períodos. En el primer período, un monopolista establecido (Jugador 1) fija el precio de su producto. En el segundo período, un participante potencial (Jugador 2) podría ingresar al mercado o permanecer fuera. El Jugador 1 sabe que es de costo bajo o de costo alto. El Jugador 2 no sabe cuál es el costo del Jugador 1, pero es conocimiento común que el Jugador 1 es de costo bajo o alto con igual probabilidad.

En el primer período, si el Jugador 1 elige tener un precio alto, gana 200 si es de bajo costo o 100 si es de alto costo. Si elige un precio bajo, gana 150 si es de bajo costo o 0 si es de alto costo. Si bien perjudica las utilidades en el primer período, establecer un precio bajo podría potencialmente desalentar la entrada y aumentar las utilidades en el segundo período.

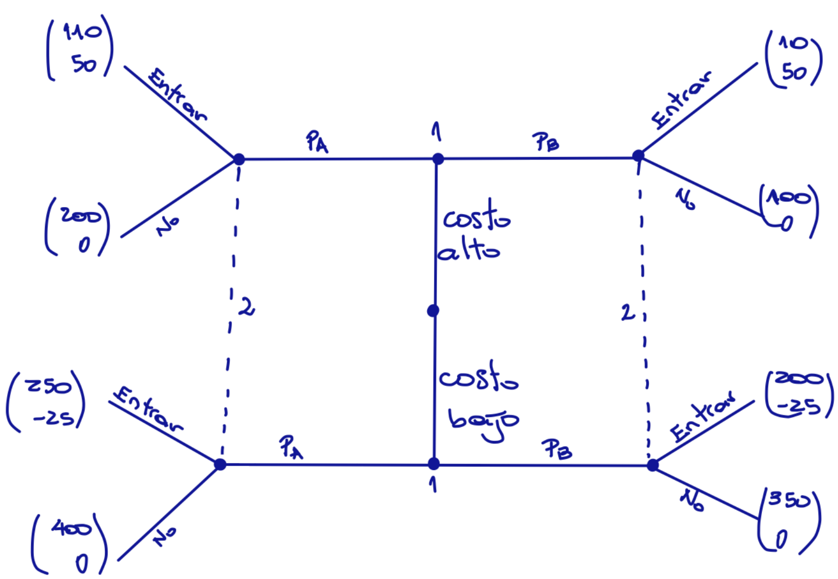
En el segundo período, si no hay entrada, el Jugador 1 obtendrá 200 si es de costo bajo o 100 si es de costo alto. Sin embargo, si hay entrada, la competencia obligará al Jugador 1 a obtener solo 50 si es de bajo costo y solo 10 si es de alto costo. El Jugador 2 debe hacer una inversión irrecuperable si decide ingresar al mercado. Sus ganancias son -25 si el Jugador 1 es de bajo costo y 50 si el Jugador 1 es de alto costo.

El Jugador 1 decide el precio del primer período. El Jugador 2, observa el precio fijado, y decide si entrar o no en el segundo período del juego.

1. (10 puntos) Escriba el árbol de juego. Identifique claramente los conjuntos de información y los pagos.
2. (5 puntos) ¿Cuáles son los conjuntos de estrategias de cada Jugador?
3. (15 puntos) Demuestre que el perfil de estrategias, donde el Jugador 1 fija precio alto si es de costo alto y precio bajo si es de costo bajo y el Jugador 2, decide entrar si y solamente si observa precio alto es un equilibrio del juego. ¿Cuál es la creencia que tiene el Jugador 2 sobre el tipo del Jugador 1 al ver cada precio?

Respuesta

1.



2. Las estrategias del Jugador 1 deben indicar qué acción jugará el Jugador 1 si es de tipo Alto y de tipo Bajo. Es decir, el conjunto de estrategias, es

$$S_1 = \{P_A P_A, P_A P_B, P_B P_A, P_B P_B\}.$$

El jugador 2, observa el precio que fija el Jugador 1 antes de decidir que hacer. Por lo tanto, las estrategias del Jugador 2, deben indicar que acción jugar para cada acción posible del Jugador 1. Es decir, el conjunto de estrategias del Jugador 2 es

$$S_2 = \{E\ E, E\ NO, NO\ E, NO\ NO\}.$$

3. Para comprobar que es un equilibrio tenemos que verificar que ningún jugador tiene incentivo a desviar.

   Empezamos por el Jugador 1. Si el Jugador 1 es de tipo alto, y juega P_A estará obteniendo 100 en la primera etapa y solo 10 en la segunda, dado que el Jugador 2 observará el precio alto y decidirá entrar. El pago total del Jugador 1 de tipo alto es 110. Sin embargo, si decide desviar y jugar P_B, obtendrá 0 en la primera etapa y 100 en la segunda etapa, dado que el Jugador 2, observará precio bajo y decidirá no entrar. El pago total del Jugador 1 de tipo alto si decide desviar es 100, por lo que no tiene incentivo a desviar.

   Análogamente, si el Jugador 1 es de tipo bajo y juega P_B, obtendrá 150 en la primera etapa y 200 en la segunda etapa. Su pago total es de 350. Sin embargo, si decide desviar y jugar P_A en la primera etapa, obtendrá 200 en la primera etapa y solo 50 en la segunda, dado que el Jugador 2, observará precio alto y decidirá entrar al mercado. Su pago total es de 250, por lo que no tiene incentivo a desviar.

   La creencia del Jugador 2 es que el Jugador 1 jugará P_A si es de tipo Alto y P_B si es de tipo bajo que es coherente con el comportamiento del Jugador 1 en equilibrio.

   Por lo tanto, si el Jugador 2 observa un precio bajo y sigue la estrategia propuesta, decidirá no entrar y su pago será 0. No tiene incentivo a desviar, dado que si observa un precio bajo, su creencia es que el Jugador 1 es de tipo bajo y que su pago será -25 si decide entrar.

   Si observa un precio alto, decide entrar y su pago es 50. No tiene incentivo a desviar, dado que si no entra al mercado su pago será 0.