CONTROL I - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2024

[1] Considere una economía de intercambio estática con dos mercancías perfectamente divisibles y dos consumidores, A y B. Los consumidores son caracterizados por las siguientes funciones de utilidad y asignaciones iniciales de recursos:

$$u^A(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad w^A = (2,1);$$
$$u^B(x,y) = \min\{x,y\}, \qquad w^B = (1,2).$$

Justificando detalladamente sus argumentos, encuentre los equilibrios Walrasianos de esta economía.

Como A tiene preferencias estrictamente monótonas, los precios de equilibrio $p = (p_x, p_y)$ deben ser estrictamente positivos. Además, la homogeneidad de grado cero de las restricciones presupuestarias nos permite asumir que $p_x + p_y = 1$. Las condiciones de primer orden del problema del consumidor A aseguran que su demanda Marshalliana a precios p, denotada por (x^A, y^A), cumple las siguientes propiedades:

$$\frac{1}{2\sqrt{x^A}} = \lambda p_x, \qquad \frac{1}{2\sqrt{y^A}} = \lambda p_y,$$

donde $\lambda > 0$ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria.[1] Así, $\sqrt{y^A/x^A} = p_x/p_y$, lo cual implica que $y^A/x^A = p_x^2/p_y^2$. Como $p_x + p_y = 1$ y $p_x x^A + p_y y^A = p \cdot w^A$, tenemos que:

$$\frac{p_y y^A}{p_x x^A} = \frac{p_x}{p_y} \implies \frac{p_y y^A}{p_x x^A} + 1 = \frac{p_x}{p_y} + 1 \implies \frac{p \cdot w^A}{p_x x^A} = \frac{1}{p_y} \implies \frac{1 + p_x}{p_x x^A} = \frac{1}{1 - p_x}.$$

Por lo tanto,

$$(x^A, y^A) = \left(\frac{1 - p_x^2}{p_x}, \frac{p_x + p_x^2}{1 - p_x}\right).$$

Como B tiene preferencias Leontief y $p \cdot w^B = 1 + p_y$, su demanda Marshalliana a precios p queda caracterizada por $(x^B, y^B) = (2 - p_x, 2 - p_x)$. Dado que en equilibrio debemos tener que $x^A + x^B = 3$, el precio p_x debe ser una solución de la ecuación $2p_x^2 + p_x - 1 = 0$, lo cual implica que $p_x = 1/2$. Concluimos que, salvo normalización de precios, la economía tiene un único equilibrio:

$$\Big[(p_x, p_y); (x^A, y^A); (x^B, y^B)\Big] = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right].$$

□

[2] Para la economía descrita en el pregunta anterior, encuentre la curva de contrato y el núcleo. Justifique detalladamente sus argumentos.

La curva de contrato es caracterizada por las distribuciones de recursos $((x^A, y^A), (x^B, y^B))$ que son Pareto eficientes. Note que en toda distribución Pareto eficiente tendremos que $x^B = y^B$. Efectivamente, caso $x^B > y^B$ podemos transferir $x^B - y^B > 0$ unidades de la primera mercancía del individuo B al individuo A, sin perjudicar al primero y mejorando el bienestar del segundo (pues u^A es estrictamente creciente). Análogamente, se puede ver que $x^B < y^B$ es incompatible con la Pareto eficiencia.

Afirmamos que para cada $\beta \in [0,3]$ la distribución de recursos $((3-\beta, 3-\beta), (\beta, \beta))$ es Pareto eficiente. Note que la única forma en la cual A puede obtener una utilidad mayor a $u^A(3-\beta, 3-\beta)$ es aumentando el consumo de al menos una de las mercancías, lo cual disminuiría el bienestar de B. Análogamente, la única forma en la cual B puede obtener

[1] Las restricciones de no-negatividad del consumo nunca son activas en el óptimo, pues u^A cumple las *condiciones de Inada*. Esto es, para cada $(\overline{x}, \overline{y}) \gg (0,0)$ tenemos que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\partial u^A}{\partial x}(x, \overline{y}) = +\infty$ y $\lim_{y \to 0^+} \frac{\partial u^A}{\partial y}(\overline{x}, y) = +\infty$.

una utilidad mayor a $u^B(\beta,\beta)$ es aumentando el consumo de *ambas* mercancías, lo cual disminuiría el bienestar de A. Concluimos que la curva de contrato queda caracterizada por las distribuciones de recursos $((3-\beta,3-\beta),(\beta,\beta))$, donde $\beta\in[0,3]$ (i.e., la diagonal de la Caja de Edgeworth de dimensiones 3×3).

El núcleo es el conjunto de distribuciones de recursos que no pueden ser bloqueadas por ninguna coalición. Para una economía con dos agentes, este conjunto coincide con la familia de distribuciones de recursos Pareto eficientes en las cuales cada agente tiene una utilidad al menos tan alta cuanto la que obtiene al consumir su asignación inicial. Esto es, el núcleo es dado por el conjunto de distribuciones $((3-\beta,3-\beta),(\beta,\beta))$ tales que $\beta\in[0,3]$, $u^A(3-\beta,3-\beta)\geq u^A(2,1)$ y $u^B(\beta,\beta)\geq u^B(1,2)$. Esto es, $2\sqrt{3-\beta}\geq\sqrt{2}+1$ y $\beta\geq 1$, lo cual nos asegura que $((3-\beta,3-\beta),(\beta,\beta))$ está en el núcleo si y solamente si $\beta\in[1,\frac{9-2\sqrt{2}}{4}]$. □

[3] Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio estática con m mercancías perfectamente divisibles y un conjunto finito N de consumidores. Cada agente $i\in N$ es caracterizado por una función de utilidad $u^i:\mathbb{R}^m_+\to\mathbb{R}$ continua, estrictamente cuasi-cóncava y sin máximos locales en $\mathbb{R}^m_+$, junto con una asignación inicial $w^i\in\mathbb{R}^m_+$ tal que $w^i\neq(0,\ldots,0)$. Sea $\mathcal{A}=\{i\in N:\ u^i \text{ es estrictamente creciente}\}$. Asumiendo que $\mathcal{A}$ es diferente de vacío y $\sum_{i\in\mathcal{A}}w^i\gg 0$, demuestre que $\mathcal{E}$ tiene al menos un equilibrio Walrasiano.

Se puede hacer una demostración de equilibrio muy similar a la que se estudió para economías en las cuales *todos* los consumidores tienen preferencias estrictamente monótonas.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $\mathcal{E}_n$ una economía que coincide con $\mathcal{E}$ excepto en las asignaciones iniciales, las cuales vienen dadas por $w^i_n=w^i+\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathcal{A}}w^k$ para cada $i\in N$. Como $\sum_{k\in\mathcal{A}}w^k\gg 0$, sigue del Teorema de Existencia de Equilibrio visto en clases (el caso en que todos los consumidores tienen asignaciones iniciales interiores) que $\mathcal{E}_n$ tiene al menos un equilibrio Walrasiano, el cual denotaremos por $(p_n,(x^{i,n})_{i\in N})$. Note que la homogeneidad de grado cero de las restricciones presupuestarias nos permite asegurar que la secuencia $\{(p_n,(x^{i,n})_{i\in N})\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en el conjunto compacto $\Delta\times[0,2\sum_{i\in N}w^i]^N$.[2] Por lo tanto, existe $(\overline{p},(\overline{x}^i)_{i\in N})\in\Delta\times[0,2\sum_{i\in N}w^i]^N$ que es límite de alguna subsecuencia de $\{(p_n,(x^{i,n})_{i\in N})\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Como $(\overline{p},(\overline{x}^i)_{i\in N})$ es límite de equilibrios competitivos y $\lim\limits_{n\to+\infty}w^i_n=w^i$ para todo $i\in N$, concluimos que $\sum_{i\in N}(\overline{x}^i-w^i)\leq 0$ y $\overline{p}\cdot\sum_{i\in N}(\overline{x}^i-w^i)=0$. Así, para asegurar que $(\overline{p},(\overline{x}^i)_{i\in N})$ es un equilibrio de $\mathcal{E}$ hay que demostrar que, para cada agente $i\in N$, la canasta $\overline{x}^i$ es su demanda Marshalliana a precios $\overline{p}$ cuando su asignación inicial es w^i. Para cada $i\in N$ y $x^i\in\mathbb{R}^m_+$, tenemos que probar que $u^i(x^i)>u^i(\overline{x}^i)$ implica que $\overline{p}\cdot x^i>\overline{p}\cdot w^i$.

Fije $i\in N$ y $x^i\in\mathbb{R}^m_+$ tal que $u^i(x^i)>u^i(\overline{x}^i)$. Como u^i es continua y $\overline{x}^i$ es el límite de una subsecuencia de $\{x^{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que $u^i(x^i)>u^i(x^{i,n})$ para todo n suficientemente grande (en la subsecuencia que converge). Como $(p_n,(x^{i,n})_{i\in N})$ es un equilibrio de $\mathcal{E}_n$ y u^i no tiene máximos locales en $\mathbb{R}^m_+$, concluimos que $p_n\cdot x^i>p_n\cdot w^i_n$. Tomando el límite en n, llegamos a que $\overline{p}\cdot x^i\geq\overline{p}\cdot w^i$. Esto es, $u^i(x^i)>u^i(\overline{x}^i)$ implica que $\overline{p}\cdot x^i\geq\overline{p}\cdot w^i$.

Como $\overline{p}\in\Delta$ y $\sum_{i\in\mathcal{A}}w^i\gg 0$, existe $k\in\mathcal{A}$ tal que $\overline{p}\cdot w^k>0$. Sabemos del párrafo anterior que $u^k(x^k)>u^k(\overline{x}^k)$ implica que $\overline{p}\cdot x^k\geq\overline{p}\cdot w^k$. Suponga que $\overline{p}\cdot x^k=\overline{p}\cdot w^k$. Como u^k es continua, existe $\alpha\in(0,1)$ tal que $u^k(\alpha x^k)>u^k(\overline{x}^k)$ y el resultado del párrafo anterior implica que $\alpha\overline{p}\cdot x^k\geq\overline{p}\cdot w^k=\overline{p}\cdot x^k$. Como $\overline{p}\cdot w^k>0$, simplificando a ambos lados de la desigualdad obtenemos que $\alpha\geq 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $u^k(x^k)>u^k(\overline{x}^k)$ implica que $\overline{p}\cdot x^k>\overline{p}\cdot w^k$. Esto es, $\overline{x}^k$ es la demanda Marshalliana del agente $k\in\mathcal{A}$ a precios $\overline{p}$. Como u^k es estrictamente creciente, concluimos que $\overline{p}\gg(0,\ldots,0)$.

Fijado $i\in N\setminus\{k\}$, como $\overline{p}\gg(0,\ldots,0)$ y $w^i\neq(0,\ldots,0)$, tenemos que $\overline{p}\cdot w^i>0$. Así, dado que $u^i(x^i)>u^i(\overline{x}^i)$ implica que $\overline{p}\cdot x^i\geq\overline{p}\cdot w^i$, sigue de argumentos análogos a los del párrafo anterior que $\overline{x}^i$ es la demanda Marshalliana del agente i a precios $\overline{p}$. Con esto concluimos que $(\overline{p},(\overline{x}^i)_{i\in N})$ es un equilibrio Walrasiano de $\mathcal{E}$. □

[2]Como es usual, Δ es el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^m_+$ cuyas coordenadas suman uno.