CONTROL IV – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: DIEGO FICA - NICOLÁS SUÁREZ

PREGUNTA 2

Un planificador central tiene un objeto de colección que puede ser del interés de n individuos. Cada individuo tiene una valoración $\hat{\theta}_i \in \mathbb{R}$ por el objeto. Aunque no observa las valoraciones, el planificador central quiere asignarle el objeto al individuo que más lo valora. Por esta razón, diseña un mecanismo directo que, dado un perfil de valoraciones $\theta \in \mathbb{R}^n$, entrega el objeto al individuo $i(\theta)$ con menor índice y mayor valoración.[1] Para evitar que los individuos mientan sobre la verdadera valoración que le dan al objeto, el mecanismo directo también determina transferencias monetarias $(t_1(\theta), \ldots, t_n(\theta)) \in \mathbb{R}^n$, que dependen de las valoraciones *reportadas* por los individuos. Asuma que la utilidad del individuo i cuando se reportan valoraciones $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ viene dada por $\hat{\theta}_i x_i(\theta) - t_i(\theta)$, donde $x_i(\theta) \in \{0, 1\}$ es igual a uno si y solamente si i se lleva el objeto.

(i) Considere el mecanismo directo que, dadas valoraciones $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ reportadas por los individuos, adjudica el objeto a $i(\theta)$ y cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ recibe/paga la transferencia monetaria

$$t_i(\theta) = \begin{cases} h_i(\theta_{-i}) + \max\limits_{k \neq i(\theta)} \theta_k, & \text{cuando } i = i(\theta), \\ h_i(\theta_{-i}), & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

donde h_i sólo depende de $\theta_{-i} := (\theta_k)_{k \neq i}$. Demuestre que este mecanismo es compatible con incentivos en estrategias dominantes y adjudica el objeto al individuo que más lo valora.

Por construcción, si hay compatibilidad de incentivos el objeto siempre se adjudicará al individuo que más lo valora. Para probar la compatibilidad de incentivos, denote por $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)$ el vector de verdaderas valoraciones de los individuos por el objeto de colección. Fije un individuo i y suponga que los otros reportan valoraciones θ_{-i}. Entonces, cuando i reporta su verdadera valoración su utilidad viene dada por

$$u_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) = \begin{cases} -h_i(\theta_{-i}) + \left[\hat{\theta}_i - \max\limits_{k \neq i} \theta_i\right], & \text{cuando } i = i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \\ -h_i(\theta_{-i}), & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

Por lo tanto, si $i = i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$, el individuo i no gana nada con mentir pues puede perder una transferencia no-negativa (aquella que está entre paréntesis cuadrados). Alternativamente, si $i \neq i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$, si miente el individuo i puede terminar con el objeto en la mano y su utilidad puede disminuir (el término entre paréntesis cuadrados es no-positivo en este caso). Esto es, independiente de las valoraciones reportadas por los otros individuos θ_{-i}, la estrategia óptima del individuo i es reportar la verdadera valoración. □

(ii) Demuestre que el tipo de mecanismo descrito en el ítem anterior es el único que es compatible con incentivos y adjudica el objeto al individuo que más lo valora.

Sea $(x(\theta), \tau_1(\theta), \ldots, \tau_n(\theta))$ un mecanismo directo que es compatible con incentivos y adjudica el objeto al individuo que más lo valora, donde $\tau_i(\theta) \in \mathbb{R}$ es la transferencia asociada al individuo i. Para demostrar

[1] Esto es, $i(\theta) = \min\{j \in \{1, \ldots, n\} : \theta_j \geq \theta_k, \forall k \in \{1, \ldots, n\}\}$.

que este mecanismo es del tipo descrito en el ítem (a) es necesario y suficiente probar que se cumplen las siguientes propiedades:

(1) Dado $\theta_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $[\, i = i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) \ \wedge \ i = i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i})\,] \implies \tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) - \tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}) = 0$.

(2) Dado $\theta_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $[\, i \neq i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) \ \wedge \ i \neq i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i})\,] \implies \tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) - \tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}) = 0$.

(3) Dado $\theta_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $[\, i = i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) \ \wedge \ i \neq i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i})\,] \implies \tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) - \tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}) = \max\limits_{k \neq i} \theta_k$.

Si (1) no se cumple, existen $\theta_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\hat{\theta}_i, \tilde{\theta}_i \in \mathbb{R}$ tales que $i = i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) = i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i})$ y $\tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) > \tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i})$. Por lo tanto, cuando los otros individuos anuncian valoraciones θ_{-i} e i tiene valoración $\hat{\theta}_i$ su estrategia óptima es mentir y anunciar una valoración $\tilde{\theta}_i$, pues con esta acción sigue recibiendo el objeto y reduce el costo de la transferencia monetaria. Esto contradice la compatibilidad de incentivos del mecanismo.

Si (2) no se cumple, existen $\theta_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\hat{\theta}_i, \tilde{\theta}_i \in \mathbb{R}$ tales que $i \notin \{i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}),\, i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i})\}$ y $\tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) > \tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i})$. Por lo tanto, si los otros individuos anuncian valoraciones θ_{-i} e i tiene valoración $\hat{\theta}_i$ su estrategia óptima es mentir y anunciar una valoración $\tilde{\theta}_i$, pues con esta acción reduce el costo de la transferencia monetaria. Esto contradice la compatibilidad de incentivos del mecanismo.

Por lo tanto, las propiedades (1) y (2) son satisfechas.

Para concluir, asuma que (3) no se cumple. Entonces, existen $\theta_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\hat{\theta}_i, \tilde{\theta}_i \in \mathbb{R}$ tales que $i = i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$, $i \neq i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i})\}$ y $\tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) - \tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}) = \max\limits_{k \neq i} \theta_k + \alpha$, con $\alpha \neq 0$. Defina $\breve{\theta}_i = 0.5\alpha + \max\limits_{k \neq i} \theta_k$. Suponga que $\alpha > 0$, entonces $i = i(\breve{\theta}_i, \theta_{-i})$ y la propiedad (a) nos asegura que $\tau_i(\breve{\theta}_i, \theta_{-i}) = \tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) = \tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}) + \max\limits_{k \neq i} \theta_k + \alpha$. Por lo tanto, si i tiene valoración $\breve{\theta}_i$ y los otros individuos anuncian valoraciones θ_{-i}, la utilidad que él obtiene al decir la verdad es $-\tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}) - 0.5\alpha$, mientras que la utilidad que obtiene al anunciar $\tilde{\theta}_i$ es $-\tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i})$. Esto es, obtiene mayor utilidad al mentir, lo cual contradice la compatibilidad de incentivos del mecanismo. Alternativamente, asuma que $\alpha < 0$, entonces $i \neq i(\breve{\theta}_i, \theta_{-i})$ y la propiedad (2) nos asegura que $\tau_i(\breve{\theta}_i, \theta_{-i}) = \tau_i(\tilde{\theta}_i, \theta_{-i}) = \tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) - \max\limits_{k \neq i} \theta_k - \alpha$. Por lo tanto, si i tiene valoración $\breve{\theta}_i$ y los otros individuos anuncian valoraciones θ_{-i}, la utilidad que él obtiene al decir la verdad es $-\tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) + \max\limits_{k \neq i} \theta_k + \alpha$, mientras que la utilidad que obtiene al anunciar $\hat{\theta}_i$ es $-\tau_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) + \max\limits_{k \neq i} \theta_k + 0.5\alpha$. Como $\alpha < 0$, esto muestra que obtiene mayor utilidad al mentir, lo cual contradice la compatibilidad de incentivos. □

(iii) Dentro de la familia de mecanismos descritos en el ítem (a) encuentre aquel en el cual a cada individuo se le imputa exactamente el costo que él genera a la sociedad al anunciar su valoración por el objeto. ¿Es este mecanismo presupuestariamente balanceado? Discuta brevemente las pertinencia de exigir esta propiedad.

El anuncio de un individuo i tendrá un costo social sólo si hace que el objeto se le adjudique a él, "quitándoselo" al individuo que era más competitivo, quien estaba dispuesto a pagar hasta $\max_{k \neq i} \theta_k$. Por lo tanto, entre los mecanismos descritos en el ítem (a), el que imputa a cada agente exactamente el costo que él general a la sociedad es caracterizado por $h_i = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto es, *una subasta a sobre sellado de segundo precio*. Este mecanismo siempre genera recursos para el vendedor del objeto, por lo cual no es presupuestariamente balanceado. Esta última propiedad, bastante natural en el contexto de provisión de un bien público por parte de un planificador central, deja de tener relevancia en un ambiente donde un individuo busca vender un objeto. Efectivamente, los "excedentes" que obtiene el vendedor luego de la subasta no son otra cosa que el valor de venta del bien. □