Teoría de Juegos

Adriana Piazza

Microeconomía I

Otoño 2025

Agenda de las primeras clases

- Definición de juego (por ahora solo juegos estáticos)

- Dos conceptos de solución de los juegos estáticos:
  - Estrategias dominantes
  - Equilibrios de Nash

- Relación entre los dos conceptos de solución

- Estrategias mixtas

- Teorema de Nash (existencia de equilibrio de Nash)

¿Qué es un juego?

Un juego es cualquier situación tal que:

- hay al menos dos jugadores
- cada jugador tiene una lista de movimientos que puede hacer (estrategias)
- hay una regla clara para obtener el resultado final y los pagos a cada jugador a partir de las estrategias

Ingredientes del juego: notación

- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores.
- i, j denotan jugadores ($i, j \in N$).
- S_i el conjunto de todas las estrategias del jugador i
- s_i una estrategia particular de i
- $s = (s_1, \ldots, s_n)$ un perfil de estrategias.
- s_{-i} una elección de estrategia para todos los jugadores excepto el jugador i
- $u_i(s_i, s_{-i})$ denota la utilidad/recompensa para el jugador i si los jugadores eligen estrategias (s_i, s_{-i})

Juego con 2 jugadores y 2 estrategias cada uno

Esta es una nueva forma de corregir la Tarea 2:

Todos elijan una estrategia: a o b:

- Su estrategia se comparará con la de otro compañero elegido al azar.
- Si usted eligió a y el oponente elige b, usted obtiene 7 y el otro obtiene 1.
- Si ambos ponen a, ambos obtienen 4.
- Si usted pone b y el otro elige a, usted obtiene 1 y el otro obtiene 7.
- Si ambos ponen b, ambos obtienen 5

Juego con 2 jugadores y 2 estrategias cada uno

La matriz de pagos es entonces:

		J2	
		a	b
J1	a	$4, 4$	$7, 1$
	b	$1, 7$	$5, 5$

Observación: Nunca deberías elegir *b*.

- Si tu oponente elige *b*, es mejor que elijas *a*
- Si tu oponente elige *a*, es mejor que elijas *a*

Estrategias dominantes y dominadas

Decimos que a domina fuertemente a b.

Definición: Una estrategia domina fuertemente a la otra si la recompensa de una es mayor que la recompensa de la otra, independientemente de las estrategias de los demás.

Matemáticamente: s_i domina a s_i' si y solo si

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \text{ para todo } s_{-i}.$$

Matemáticamente: s_i domina débilmente a s_i' si y solo si

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \text{ para todo } s_{-i},$$
$$u_i(s_i, s_{-i}^*) > u_i(s_i', s_{-i}^*) \text{ para algún } s_{-i}^*.$$

Juego con 2 jugadores y 2 estrategias cada uno

- **Observación:** Nunca deberías elegir b.
- **El oponente nunca debería elegir b.**
- Ambos obtienen 4.

Moraleja: el juego racional puede conducir a malos resultados

Juego: dilema del prisionero, colusión, tragedia de los comunes, ...

Juego (2x2) con otra matriz de pagos

Jugador Altruista (ángel indignado):

- El jugador valora menos sacarse un 7, pues significa que alguien obtuvo 1. (ángel)
- Y también valora menos sacarse un 1, porque significa que alguien en la clase no fue altruista (indignado)
- Entonces cambian sus pagos.

Un ejemplo de una matriz de pagos cuando 2 jugadores altruistas se enfrentan es:

	a	b
a	4 , 4	3, -1
b	-1 , 3	5 , 5

¿Qué debo elegir? No hay estrategias dominantes, este concepto de solución no me permite resolver el juego.

Altruista vs. Egoísta

- ¿Qué pasa si soy altruista (ángel indignado) pero sé que mi oponente es egoísta?
- En este caso la matriz de pago es:

		J2 a	J2 b
J1	a	$4, 4$	$3, 1$
	b	$-1, 7$	$5, 5$

Si no tienes una estrategia que domine a todas las demás, debes ponerte en el lugar de tus oponentes para tratar de predecir lo que harán.

Por ejemplo, en su lugar, no elegirías una estrategia dominada.

Juego: $\frac{2}{3}$ del Promedio

- Todos elijan un número natural entre 1 y 100.
- El jugador cuyo número es más cercano a $\frac{2}{3}$ del promedio **gana el juego**.
- Pagos:
  - El ganador obtiene \$ 1.000
  - Si hay empate entre k jugadores, cada uno obtiene $\frac{\$1.000}{k}$.
  - Los demás obtienen 0.

¿Hay alguna estrategia dominada?

Estrategias iterativamente dominadas

> 67 dominadas débilmente por 67	racionalidad (R)
$67 \geq s_i > 45$ dominadas débilmente después de eliminar las $s_j > 67$	racionalidad + saber que los otros son racionales (CR)
$45 \geq s_i > 30$ dominadas débilmente después de eliminar las $s_j > 45$	(R) + (CR) + saber que los otros saben que todos son racionales (CCR)
$\vdots$ $\vdots$ 1	$\vdots$ $\vdots$ **CONOCIMIENTO COMÚN**

Si jugamos de vuelta?

Juguemos a este juego de nuevo

- Escriba un número entre 1 y 100.
- ¿Escribiría un número menor que la última vez?
- ¿Por qué?

- Las estrategias para el juego se hicieron de conocimiento común:
    - Todos conocen las estrategias dominadas.
    - Todo el mundo sabe que todo el mundo conoce las estrategias dominadas.
    - Todo el mundo sabe que todo el mundo sabe que todo el mundo conoce las estrategias dominadas.

    ...

Conocimiento común

Información completa: cada jugador conoce su función de utilidad, la función de utilidad de los otros jugadores y las reglas del juego.

Información incompleta: hay al menos un jugador que no conoce uno o todos los puntos detallados arriba.

Conocimiento común: Información completa + *conciencia*.
(todos los jugadores deben ser conscientes de la conciencia de los otros jugadores en cuanto a las reglas y funciones de utilidad de cada uno. Además, cada jugador debe ser consciente de que cada jugador es consciente que cada jugador es consciente, y así sucesivamente.)

Volvamos al caso de dos jugadores altruistas

- La matriz de pagos es:
- El concepto de estrategias dominadas, no me permite resolver el juego.

		Oponente: a	Oponente: b
Yo	a	4 , 4	3, -1
	b	-1 , 3	5 , 5

Necesitamos un nuevo concepto de solución: *Equilibrio de Nash (EN)*

(este juego tiene 2 EN)

Equilibrio de Nash

Un perfil de estrategia $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash (en estrategias puras) si

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \; \forall s_i \in S_i \quad \forall i$$

- Si todos los demás jugadores fijan sus estrategias, el equilibrio de Nash es lo mejor que puedes hacer.
- Lo mismo ocurre con los otros jugadores.
- Puede haber otros resultados que sean preferibles y no sean equilibrios (dilema del prisionero)
- Puede no ser único.

Cachipún

	Rock	Paper	Scissors
Rock	0,0	-1,1	1,-1
Paper	1,-1	0,0	-1,1
Scissors	-1,1	1,-1	0,0

- No tiene estrategias dominadas.
- No hay EN... en estrategias puras.
- Sí existe EN en estrategias *mixtas*

Definición: Una *estrategia mixta* σ_i es una distribución de probabilidad sobre estrategias puras.

Si $\#S_i = I$, entonces $\sigma_i = (p_1, \ldots, p_I)$ tal que $\sum_{j=1}^{I} p_j = 1$ y $p_j \geq 0$ para todo j.

Estrategias mixtas

Oponente

		a	b
Yo	a	4 , 4	3, -1
	b	-1 , 3	5 , 5

- Yo juego $\sigma_1 = (1/4, 3/4)$
- Mi oponente juega $\sigma_2 = (2/3, 1/3)$

$$\begin{aligned}
u_1(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{4}\frac{2}{3}u_1(a,a) + \frac{1}{4}\frac{1}{3}u_1(a,b) + \frac{3}{4}\frac{2}{3}u_1(b,a) + \frac{3}{4}\frac{1}{3}u_1(b,b) \\
&= \frac{1}{4}\frac{2}{3}4 + \frac{1}{4}\frac{1}{3}3 + \frac{3}{4}\frac{2}{3}(-1) + \frac{3}{4}\frac{1}{3}5 = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{4}\frac{2}{3}u_2(a,a) + \frac{1}{4}\frac{1}{3}u_2(a,b) + \frac{3}{4}\frac{2}{3}u_2(b,a) + \frac{3}{4}\frac{1}{3}u_2(b,b) \\
&= \frac{1}{4}\frac{2}{3}4 + \frac{1}{4}\frac{1}{3}(-1) + \frac{3}{4}\frac{2}{3}3 + \frac{3}{4}\frac{1}{3}5 = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Estrategias mixtas: notación

Sea un juego $G = (N, (S_i), u_i)$.

- $\Delta(S_i)$ conjunto de distribución de probabilidades sobre S_i (también se usa Σ_i)
- Cada $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ es una estrategia mixta.

- $\Delta = \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_n)$.
- $\sigma \in \Delta$ es un perfil de estrategias mixtas

- $u_i : \Delta \to \mathbb{R}$,
- $u_i(\sigma)$ es la utilidad esperada de la **lotería** definida por las probabilidades σ.

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \Big(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \Big) u_i(s)$$

donde $\sigma_j(s_j)$ es la probabilidad que el jugador j juegue la estrategia pura s_j (la estrategia pura s_j es la "coordenada" j del perfil de estrategias puras s).

Propiedades: u_i es lineal con respecto a σ_i y continua con respecto a σ

Equilibrio de Nash mixto

Proposición: Sea $G = (N, (S_i), (u_i))$ un juego finito.

$\sigma^* \in \Delta$ es un EN de G si y solo si para todo jugador $i \in N$, toda estrategia pura con probabilidad positiva en σ_i^* es una mejor respuesta a σ_{-i}^*.

Este resultado permite caracterizar los equilibrios de Nash. Como veremos en el ejemplo que sigue.

Estrategias mixtas

		Oponente	
		a	b
Yo	a	4 , 4	3, -1
	b	-1 , 3	5 , 5

Ejercicio propuesto:

- Encontrar todos los equilibrios de Nash.

Resp: EN=$\{(a,a),(b,b),(\sigma,\sigma)\}$ donde $\sigma = (2/7, 5/7)$.

Equilibrio de Nash

Teorema de Nash (1950) Todo juego finito tiene al menos un equilibrio en estrategias mixtas.

- Juego **finito**: # jugadores finito y # estrategias puras finito.
- Se consideran los equilibrios en estrategias puras como casos particulares de estrategias mixtas.
- Pueden existir muchos equilibrios.

Otras definiciones

Correspondencia de mejor respuesta del jugador i

B_i: correspondencia que entrega las mejores respuestas del jugador i a la estrategia σ_{-i}.

$$\sigma_i^* \in B(\sigma_{-i}) \text{ si y solo si } u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \text{ para todo } \sigma_i \in \Delta(S_i)$$

Correspondencia de mejor respuesta

$$B(\sigma) = (B_1(\sigma_{-1}), \ldots, B_n(\sigma_{-n}))$$

Observación

$$\sigma^* \text{ es equilibrio de Nash si y solamente si } \sigma^* \in B(\sigma^*).$$

Equilibrio de Nash

Teorema de Nash (1950) Todo juego finito tiene un equilibrio en estrategias mixtas.

La demostración se basa en encontrar un **punto fijo de la correspondencia de mejor respuesta** $B : \Delta \to \Delta$ usando el:

Teorema de Punto Fijo de Kakutani
Sea $\Delta \in \mathbb{R}^d$ un subconjunto no vacío, compacto y convexo. $B : \Delta \to \Delta$ es una correspondencia semi-continua superior y tal que $B(\sigma)$ es no-vacío y convexo para todo $\sigma \in \Delta$. Entonces B tiene un punto fijo.

- Δ es no vacío, cerrado, acotado, convexo y es subconjunto de $\mathbb{R}^d$ para algún d finito.
- La correspondencia de mejor respuesta $B(\sigma)$ es no vacía para todo σ
- La correspondencia de mejor respuesta $B(\sigma)$ es convexa para todo σ
- La correspondencia de mejor respuesta $B(\sigma)$ es semi-continua superior (tiene grafo cerrado)

Equilibrio de Nash

Teorema de Nash para juegos con continuo de estrategias:

Dado un juego tal que

- $\#$ finito de jugadores,
- conjunto de estrategia S_i no vacío, compacto, convexo subconjunto de $\mathbb{R}^{d_i}$
- $u_i(s_i, s_{-i})$ continuas en $s = (s_i, s_{-i})$ y cuasi concavas en s_i

existe al menos un EN en estrategias puras.

Estrategias dominadas

Ahora que conocemos las estrategias mixtas podemos dar la definición más general de estrategias dominadas

σ_i domina a la estrategia pura s_i si y solo si

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \text{ para todo } s_{-i}.$$

σ_i domina débilmente a la estrategia pura s_i si y solo si

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \text{ para todo } s_{-i},$$
$$u_i(\sigma_i, s^*_{-i}) > u_i(s_i, s^*_{-i}) \text{ para algún } s^*_{-i}.$$

Observación: En la definición se caracterizan las estrategias **puras** dominadas... ¿que pasa con las estrategias mixtas?

Estrategias mixtas dominadas

¿Verdadero o falso?

1. Una estrategia mixta que asigna probabilidad positiva a una estrategia pura estrictamente dominada es estrictamente dominada.

2. Una estrategia mixta que solo asigna probabilidad positiva a estrategias puras que **no** son estrictamente dominadas, **no** es estrictamente dominada.

Dominancia estricta iterada

Jugador 2

JUGADOR 1		a	b	c	d	e	f
	a	5 5	1 9	2 8	3 7	4 6	5 5
	b	9 1	7 7	3 7	4 6	7 5	6 4
	c	8 2	9 3	4 4	4 5	6 4	7 3
	d	7 3	6 4	5 5	5 4	9 3	8 2
	e	6 4	5 7	4 6	3 9	5 5	9 1
	f	5 5	4 6	3 7	2 8	1 9	5 5

Dominancia estricta iterada

Algoritmo para eliminar estrategias estrictamente dominadas.

Dado un juego $G = (N, (S_i), (u_i))$

- Paso inicial $S_i^0 = S_i$ para todo i.

- Iteración: Dado S_i^n, conservo *únicamente* las estrategias que *no* son estrictamente dominadas:

  $$S_i^{n+1} = \{s_i \in S_i^n | \text{ no existe } \sigma_i \in \Delta(S_i^n) \text{ tal que } u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \forall s_{-i} \in S_{-i}^n\}$$

- El algoritmo para cuando **no** se pueden eliminar estrategias de ningún jugador.

  S_i^∞ es el conjunto de las estrategias puras que sobreviven al final.

Obs.: No importa el orden en que hagamos la eliminación.

¿Podemos hacer lo mismo con estrategias débilmente dominadas?

EN vs. Estrategias dominantes y dominadas

1. Si cada jugador tiene una estrategia dominante s_i^*, entonces $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un EN. Además es el único EN.

2. Si existe un único equilibrio de Nash, ¿existe una estrategia dominante para cada jugador? **NO**

3. Si existe un único equilibrio de Nash en estrategias puras, ¿existe una estrategia dominante para cada jugador? **NO**

	L	C	R
T	4, 4	2, 0	2, 0
M	0, 2	3, 0	0, 3
B	0, 2	0, 3	3, 0

Este juego tiene un único equilibrio de Nash (T,L) pero no tiene estrategias dominadas.

EN vs. Estrategias dominadas

4. Si σ^* es un EN, sólo puede asignar probabilidad positivas a estrategias puras que *no* son estrictamente dominadas. Estrategias estrictamente dominadas, *no* pueden ser parte de un EN (pues es irracional que un jugador las juegue).

5. Equivalentemente, si σ^* es un EN, todas las estrategias puras con probabilidad positiva en σ^* no son estrictamente dominadas.

6. Estrategias débilmente dominadas, sí podrían ser parte de un EN.

	L	C	R
T	10, 0	5, 1	4, -200
B	10, 100	5, 0	0, -100