Pregunta 1: modelo de Romer

a. max $L(t)^{1-\alpha}\int_0^{A(t)} x_i(t)^{\alpha}\,di - p_i(t)\int_0^{A(t)} x_i(t)\,di - w(t)L(t)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(t)} = L(t)^{1-\alpha}\cdot \alpha\, x_i(t)^{\alpha-1} - p_i(t) = 0 \rightarrow x_i(t) = \left[\frac{p_i(t)}{\alpha L(t)^{1-\alpha}}\right]^{1/\alpha-1}$$

b. max $\pi_i(t) = (p_i(t)+s)\,x_i(t) - x_i(t)$ s.a. $x_i(t) = \left[\frac{p_i(t)}{\alpha L(t)^{1-\alpha}}\right]^{1/\alpha-1}$

$$\max\ (p_i(t)+s)\left[\frac{p_i(t)}{\alpha L(t)^{1-\alpha}}\right]^{1/\alpha-1} - \left[\frac{p_i(t)}{\alpha L(t)^{1-\alpha}}\right]^{1/\alpha-1}$$

$$p_i(t)\,\frac{p_i(t)^{1/\alpha-1}}{\alpha^{1/\alpha-1}L(t)^{-1}} - (1-s)\,\frac{p_i(t)^{1/\alpha-1}}{\alpha^{1/\alpha-1}L(t)^{-1}}$$

$$p_i(t)^{1+1/\alpha-1}\cdot \alpha^{1/1-\alpha}\cdot L(t) - (1-s)\,p_i(t)^{1/\alpha-1}\cdot \alpha^{1/1-\alpha}\cdot L(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i(t)} = \left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)p_i(t)^{1/\alpha-1}\cdot\alpha^{1/1-\alpha}L(t) - (1-s)\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)p_i(t)^{1/\alpha-1-1}\cdot\alpha^{1/1-\alpha}L(t) = 0$$

$$\left(\frac{\cancel{\alpha-1+1}}{\cancel{\alpha-1}}\right)p_i(t)^{1/\alpha-1}\,\cancel{\alpha^{1/1-\alpha}L(t)} - (1-s)\left(\frac{1}{\cancel{\alpha-1}}\right)p_i(t)^{\frac{1-\alpha+1}{\alpha-1}}\cdot\cancel{\alpha^{1/1-\alpha}L(t)}$$

$$\alpha\,p_i(t)^{1/\alpha-1} - (1-s)\,p_i(t)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} = 0$$

$$\alpha\,p_i(t)^{1/\alpha-1} = (1-s)\,p_i(t)^{2-\alpha/\alpha-1}$$

$$\alpha = (1-s)\,p_i(t)^{1-\alpha/\alpha-1}$$

$$\alpha = \frac{(1-s)}{p_i(t)} \rightarrow p_i(t) = \frac{(1-s)}{\alpha}$$

$$x_i(t) = \left[\frac{p_i(t)}{\alpha L(t)^{1-\alpha}}\right]^{1/\alpha-1} = \left[\frac{(1-s)}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha L(t)^{1-\alpha}}\right]^{1/\alpha-1}$$

$$= (1-s)^{1/\alpha-1}\cdot\alpha^{2/1-\alpha}\cdot L$$

$$\pi_i(t) = \left[\left(\frac{1-s}{\alpha}\right)+s-1\right](1-s)^{1/\alpha-1}\cdot\alpha^{2/1-\alpha}\,L(t)$$

$$= \left[\frac{(1-s)}{\alpha} - (1-s)\right](\ \text{"}\quad\text{"}\ )$$

$$= (1-s)(1/\alpha-1)(\ \text{"}\quad\text{"}\ )$$

$$= \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(1-s)(1-s)^{1/\alpha-1}\cdot\alpha^{2/1-\alpha}\cdot L(t)$$

$$= (1-\alpha/\alpha)\,(1-s)^{\alpha/\alpha-1}\cdot\alpha^{2/1-\alpha}\,L(t)$$

c. $\dot{A}(t) = \lambda R(t)$, $\lambda>0$ y $R(t)$: cantidad del bien final utilizado en investigación
libre entrada en el sector, y es perfectamente competitivo

Sabemos que para que haya inversión en I+D, VP. utilidad esperada ≥ costos I+D, por libre entrada: VP ut. esperada = costos de I+D

VP. utilidad esperada de invertir en I+D = valor de c/ variedad · nº de nuevas variedades: $V(t)\dot{A}(t) = V(t)\lambda R(t)$

Costos de invertir en I+D = cantidad de bien final utilizado en I+D = $R(t)$

∴ Cond. de utilidad cero = $V(t)\lambda R(t) = R(t) \Rightarrow V(t) = 1/\lambda$

VP de una innovación en t es: $V(t) = \int_t^{\infty}\pi(\tau)e^{-r(\tau-t)}d\tau \Rightarrow V(t) = \pi\int_t^{\infty}\frac{e^{-r\tau}}{e^{-rt}}d\tau = \frac{\pi}{e^{-rt}}\int_t^{\infty}e^{-r\tau}d\tau = \frac{\pi}{e^{-rt}}\left(-\frac{e^{-r\tau}}{r}\right)\Big|_t^{\infty} = \frac{\pi}{e^{-rt}}\left(-\cancel{\frac{e^{-r\infty}}{r}}+\frac{e^{-rt}}{r}\right)$

$$V(t) = \pi/r$$

d. Sabemos que: $V(t) = 1/\lambda$ y que $V(t) = \frac{\pi}{r}$

$\therefore \frac{\pi}{r} = \frac{1}{\lambda} \rightarrow r = \lambda\pi \Rightarrow r = \lambda\left(1-\alpha/\alpha\right)(1-s)^{\alpha/\alpha-1} \cdot \alpha^{2/1-\alpha} L$

e. $PiB(t) = Y(t) - X(t)$ = output final − gasto realiza en la producción del bien intermedio (para evitar la doble contabilización).

- Podemos calcular $X(t) = \int_0^{A(t)} xi(t)\, di$ como calculamos en b), $xi(t)$ no depende de $i \rightarrow xi(t) = x \ \forall i,t$

$$X(t) = \int_0^{A(t)} x\, di = [x \cdot i]\Big|_0^{A(t)} = A(t)\,x \Rightarrow \dot{X}(t) = \dot{A}(t)\,x \ \Big/ \cdot 1/X(t) \Rightarrow \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$$

$$\frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = \frac{\dot{A}(t)\,x}{A(t)\,x}$$

- Ahora calculamos $Y(t) \rightarrow Y(t) = L^{1-\alpha}\int_0^{A(t)} xi(t)^{\alpha}\, di$

$$Y(t) = L^{1-\alpha}\int_0^{A(t)} x^{\alpha}\, di$$

$$Y(t) = L^{1-\alpha}\left[x^{\alpha} i\right]\Big|_0^{A(t)}$$

$$Y(t) = L^{1-\alpha} x^{\alpha} A(t)$$

$$\Rightarrow \dot{Y}(t) = \dot{A}(t) L^{1-\alpha} x^{\alpha} \ \Big/ \cdot 1/Y(t)$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{A}(t) L^{1-\alpha} x^{\alpha}}{A(t) L^{1-\alpha} x^{\alpha}} \Rightarrow \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$$

$$\therefore PiB(t) = Y(t) - X(t)$$
$$= L^{1-\alpha} x^{\alpha} A(t) - A(t)\,x$$
$$= A(t)\left[L^{1-\alpha} x^{\alpha} - x\right]$$

$$\Rightarrow \dot{PiB}(t) = \dot{A}(t)\left[L^{1-\alpha} x^{\alpha} - x\right] \ \Big/ \ 1/PiB(t) \Rightarrow \frac{\dot{PiB}(t)}{PiB(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$$

$$\frac{\dot{PiB}(t)}{PiB(t)} = \frac{\dot{A}(t)\left[L^{1-\alpha} x^{\alpha} - x\right]}{A(t)\left[L^{1-\alpha} x^{\alpha} - x\right]}$$

Ahora sabemos que: $\frac{\dot{PiB}}{PiB} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{A}}{A}$

Podemos definir PiB como: $PiB(t) = C(t) + R(t)$

Sabemos que: $\dot{A}(t) = \lambda R(t) \ \Big/ \cdot 1/A(t) \Rightarrow$ En el BGP: $\dot{A}/A = cte \therefore R$ y A crecen a igual tasa $\Rightarrow \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\lambda R(t)}{A(t)}$$

Si $PiB(t) = A(t)\left[L^{1-\alpha} x^{\alpha} - x\right] = C(t) + R(t) \ \Big/ \cdot 1/A(t)$

$$A(t)\left[L^{1-\alpha} x^{\alpha} - x\right] = C(t) + \frac{\dot{A}(t)}{\lambda} \ \Big/ \cdot \lambda$$

$$\lambda A(t)\left[L^{1-\alpha} x^{\alpha} - x\right] = \lambda C(t) + \dot{A}(t)$$

$$\dot{A}(t) = A(t)\lambda\left[L^{1-\alpha} x^{\alpha} - x\right] - \lambda C(t) \ \Big/ \cdot 1/A(t)$$

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \lambda\left[L^{1-\alpha} x^{\alpha} - x\right] - \lambda\frac{C(t)}{A(t)}$$

$\Rightarrow$ En el BGP: $\dot{A}/A = cte \therefore$ C y A crecen a igual tasa $\Rightarrow \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$

Tenemos finalmente que: $\frac{\dot{PiB}}{PiB} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{A}}{A}$

Sabemos que $\dot{c}/c = \frac{r-\rho}{\theta} = \frac{\lambda(1-\alpha/\alpha)(1-s)^{\alpha/\alpha-1} L\, \alpha^{2/1-\alpha} - \rho}{\theta} = \frac{\dot{PiB}}{PiB}$

f. subsidio a la dda. por bienes intermedios y subsidio al I + D : ambos aumentan g pues aumentan π, que corresponden a los beneficios de los productores intermedios. Por lo tanto, aumenta el valor de las innovaciones ($V(t)$) y eso hace que se innove más y haya mayor crecimiento.

Pregunta 2 · modelo schumpeteriano

- índice de calidad : $y(\tau) = A(\tau)\, x(\tau)^{\alpha}$ $\quad A(t) = \gamma_1^{i(\tau)} \cdot \gamma_2^{j(\tau)}$ $\quad$ • $\gamma_K H_K(\tau)$
- trabajadores calificados en I+D : H

trabajadores no calificados en manufactura : L

a. Beneficios totales son $\pi = A\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\omega_L\, x$ donde $\omega_L = W_L/A$ con W_L : salario de trabajadores no calificados

$\therefore$ beneficios innovación 1 : $\pi_1 = K\pi$

beneficios innovación 2 : $\pi_2 = (1-K)\pi$

b. Denotamos por V_1 al valor de una innovación el cual aumenta el índice de calidad de calidad de $\gamma_1^i \gamma_2^j$ a $\gamma_1^{i+1}\gamma_2^j$, se cumple la siguiente ecuación :

$$V_1 = \underbrace{\pi_1\, d\tau}_{\substack{\text{innovador gana}\\ \pi_1 \text{ durante el}\\ \text{tiempo } d\tau}} + (1-r\,d\tau)\underbrace{(1-\lambda_1 H_1\, d\tau)\, V_1}_{\substack{\text{innovador gana } V_1 \text{ con prob}\\ 1-\lambda_1 H_1 d\tau}}$$

$\rightarrow$ Despejamos V_1 e imponemos que $d\tau \to 0$

$$V_1\left(1-(1-r\,d\tau)(1-\lambda_1 H_1 d\tau)\right) = \pi_1\, d\tau$$
$$V_1\left(1-(1-\lambda_1 H_1 d\tau - r\,d\tau + \lambda_1 H_1 r\, d\tau^2)\right) = \pi_1\, d\tau$$
$$V_1\left(1-1+\lambda_1 H_1 d\tau + r\,d\tau - \lambda_1 H_1 r\, d\tau^2\right) = \pi_1\, d\tau$$
$$V_1 = \frac{\pi_1\, d\tau}{\lambda_1 H_1 d\tau + r\,d\tau - \lambda_1 H_1 r\, d\tau^2}$$

$$\lim_{d\tau\to 0} V_1 = \frac{0}{0} \quad \therefore \text{ usamos L'Hopital}$$

$$\lim_{d\tau\to 0} V_1 = \frac{\pi_1}{\lambda_1 H_1 + r - 2\lambda_1 H_1 r\, \cancel{d\tau}^{\,0}} = \frac{\pi_1}{\lambda_1 H_1 + r}$$

Hacemos algo análogo para V_2

$$V_2 = \pi_2\, d\tau + (1-r\,d\tau)(1-\lambda_2 H_2\, d\tau)\, V_2$$
$$V_2 = \frac{\pi_2\, d\tau}{\lambda_2 H_2 d\tau + r\,d\tau - \lambda_2 H_2 r\, d\tau^2} \nearrow \quad \lim_{d\tau\to 0} V_2 = \frac{\pi_2}{\lambda_2 H_2 + r}$$

c. Libre entrada implica que $V_1\lambda_1 = A\omega_H$ y $V_2\lambda_2 = A\omega_H$ con $\omega_H = W_H/A$

ω_H es el mismo para ambos innovadores $\therefore$ $V_1\lambda_1 = V_2\lambda_2$

De a) y b) sabemos que $\pi_1 = K\pi$, $\pi_2 = (1-K)\pi$, $V_1 = \frac{\pi_1}{r+\lambda_1 H_1}$, $V_2 = \frac{\pi_2}{r+\lambda_2 H_2}$

$$\therefore \quad V_1\lambda_1 = V_2\lambda_2$$
$$\frac{K\cancel{\pi}\lambda_1}{r+\lambda_1 H_1} = \frac{(1-K)\cancel{\pi}\lambda_2}{r+\lambda_2 H_2}$$

Usando que $H = H_1 + H_2 \rightarrow H_2 = H - H_1$

$$\therefore \quad \frac{K\lambda_1}{r+\lambda_1 H_1} = \frac{(1-K)\lambda_2}{r+\lambda_2(H-H_1)}$$

como el lado izquierdo cae con H_1, y el lado derecho aumenta con H_1, tenemos un único equilibrio

d. Tasa esperada de crecimiento

$$E(y) = E(\gamma_1^i \gamma_2^j)L^{\alpha} = E(\gamma_1^i)\cdot E(\gamma_2^j)\, L^{\alpha}$$
$$= e^{(\gamma_1-1)\lambda_1 H_1 \tau} \cdot e^{(\gamma_2-1)\lambda_2 H_2 \tau} \cdot L^{\alpha}$$
$$= e^{[(\gamma_1-1)\lambda_1 H_1 + (\gamma_2-1)\lambda_2 H_2]\tau}\, L^{\alpha}$$

$$E(\dot{y}) = \frac{\partial E(y)}{\partial \tau} = [(\gamma_1 - 1)\lambda_1 H_1 + (\gamma_2 - 1)\lambda_2 H_2] L^{\alpha} e^{[(\gamma_1-1)\lambda_1 H_1 + (\gamma_2-1)\lambda_2 H_2]\tau}$$

$$g = \frac{E(\dot{y})}{E(y)} = \frac{[(\gamma_1 - 1)\lambda_1 H_1 + (\gamma_2 - 1)\lambda_2 H_2] \cancel{L^{\alpha}} \cancel{e^{[(\gamma_1-1)\lambda_1 H_1 + (\gamma_2-1)\lambda_2 H_2]\tau}}}{\cancel{e^{[(\gamma_1-1)\lambda_1 H_1 + (\gamma_2-1)\lambda_2 H_2]\tau}} \cancel{L^{\alpha}}}$$

$$= (\gamma_1 - 1)\lambda_1 H_1 + (\gamma_2 - 1)\lambda_2 H_2$$

$$= (\gamma_1 - 1)\lambda_1 H_1 + (\gamma_2 - 1)\lambda_2 (H - H_1)$$

$\frac{\partial g}{\partial H_1} = (\gamma_1 - 1)\lambda_1 - (\gamma_2 - 1)\lambda_2 \rightarrow$ es creciente en H_1 si $(\gamma_1 - 1)\lambda_1 > (\gamma_2 - 1)\lambda_2$

es decreciente en H_1 si $(\gamma_1 - 1)\lambda_1 < (\gamma_2 - 1)\lambda_2$

es lineal en H_1 si $(\gamma_1 - 1)\lambda_1 = (\gamma_2 - 1)\lambda_2$

g se maximiza si $H_1 = H$ para $(\gamma_1 - 1)\lambda_1 > (\gamma_2 - 1)\lambda_2$

si $H_2 = H$ para $(\gamma_1 - 1)\lambda_1 < (\gamma_2 - 1)\lambda_2$

no depende de la distribución de recursos si $(\gamma_1 - 1)\lambda_1 = (\gamma_2 - 1)\lambda_2$

e. Si H_1 y H_2 son positivos, la economía crece muy lento. Se debe al supuesto que los trabajadores calificados solo participan en I+D, por lo que, el efecto de business-stealing no afecta la asignación óptima de trabajo calificado. Los spillovers intertemporales existen dentro de cada tipo de I+D y entre distintos tipos de actividades de investigación. En el óptimo social, los parámetros κ y $1-\kappa$ ya no están presentes, $\gamma_1 - 1$ y $\gamma_2 - 1$ toman sus lugares, ya que, el planner toma en consideración no solo los beneficios sino que todo el excedente creado por la innovación

Pregunta ayudantía

1. La visión neoclásica del crecimiento se basa en que los países alcanzan convergencia condicional. En este sentido, Filipinas y EEUU tienen la misma tasa de crecimiento tecnológico, pero distinto PIB per cápita de EE. Si están a la misma distancia de su EE, crecerán a la misma velocidad con distinto nivel de ingreso per cápita.

2. Romer desestimó la explicación neoclásica puesto que los parámetros estructurales debían ser muy distintos. Por ejemplo, la tasa de ahorro de EEUU es 30 veces mayor que la de Filipinas

3. Es materia que no vieron