Macroeconomía I

Profesor: Luis Felipe Céspedes

Ayudantes:Gabriela Jaque y Pedro Schilling

Control 1

Otoño 2023

Modelo de Ramsey con Utilidad Exponencial

Considere una economía cerrada cuyo hogar representaito maximiza una función de la forma:

$$U = \int_0^\infty u\left(c(t)\right) e^{-(\rho-n)t} dt$$

Donde $c(t)$ representa el consumo per cápita.
El hogar enfrenta la siguiente restricción presupuestaria expresada en términos per cápita:

$$\dot{a} = (r(t) - n)a(t) + w(t) - c(t)$$

Donde $a(t)$ es su nivel de activos, $w(t)$ es su salario y $r(t)$ es el retorno de sus activos en el período t.
El comportamiento de las empresas es el mismo que en el modelo de Ramsey sin crecimiento tecnológico ($x = 0$). Cada empresa tiene acceso a la siguiente función de producción:

$$Y(t) = K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}$$

Donde $Y(t)$ corresponde al flujo de producción, $K(t)$ al nivel del capital y $L(t)$ al insumo trabajo. No hay des-utilidad del trabajo y $L(t) = e^{nt}$. El capital se deprecia a una tasa δ.

1. Escriba el problema de control óptimo y encuentre las condiciones de primer orden para el hogar representativo (se le pide resolver el equilibrio descentralizado). (15 puntos)

Solución: El problema del control óptimo sería

$$\max_{c(t)} \int_0^\infty u\left(c(t)\right) e^{-(\rho-n)t} dt$$

$$s.a$$

$$\dot{a} = (r(t) - n)a(t) + w(t) - c(t)$$

Por lo que el Hamiltoniano sería el siguiente (Puede plantear también el Hamiltoniano en valor presente)

$$H = u\left(c(t)\right) + \lambda(t)\left[(r(t) - n)a(t) + w(t) - c(t)\right]$$

Resolviendo las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Rightarrow u'(c(t)) = \lambda(t) \Rightarrow \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \cdot \frac{u'(c(t))}{u''(c(t)) \cdot c(t)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a(t)} = -\dot{\lambda}(t) + \lambda(\rho - n) \Rightarrow -(rho - n) = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)a(t) = 0$$

Resolviendo, tenemos la ecuación de Euler:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = -\frac{u'(c(t))}{u''(c(t)) \cdot c(t)}(\rho - n)$$

Llegando a las condiciones de optimalidad del hogar representativo.

2. Asuma que la función de utilidad de los hogares viene dada por:

$$u\left(c(t)\right) = -\frac{1}{\eta}e^{-\eta c(t)}$$

Donde $\eta > 0$. Obtenga la elasticidad intertemporal de sustitución. Explique cómo afecta η y el nivel de consumo per cápita esta elasticidad. En particular explique cómo afectan η y c el deseo de suavizamiento de consumo de los hogares. (10 puntos)

Solución: Calculando la elasticidad de sustitución intertemporal:

$$ESI = -\frac{u'(c(t))}{u''(c(t)) \cdot c(t)} = -\frac{e^{-\eta c}}{-\eta e^{-\eta c}} = \frac{1}{\eta c}$$

Por lo que la ecuación de Euler quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\eta c}(r(t) - \rho)$$

Por tanto, tendremos que

- $\frac{\partial \dot{c}/c}{\partial \eta} < 0$ si $r > \rho$; $\frac{\partial \dot{c}/c}{\partial \eta} > 0$ si $r < \rho$; Una caída de la ESI, implica un mayor deseo de suavizamiento.
- Misma situación anterior. Luego, aumento del consumo presente implicaría una caída de ESI, habiendo un mayor deseo por suavizamiento.

3. Obtenga las condiciones de primer orden para el problema de la firma (salario y tasa de interés de arriendo del capital). Asuma que préstamos y capital son sustitutos perfectos como depósito de valor para obtener $r(t)$. (15 puntos)

Solución: Para las condiciones de primer orden de la firma, primero trabajamos un poco la función de producción:

$$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha} = k^{\alpha}L$$

Ahora, tomamos la derivada e igualamos a sus pagos:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} =^{\alpha-1} \frac{L}{L} = f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$$

$$r = \alpha k^{\alpha-1} - \delta$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = k^{\alpha} - L\cdot^{1-\alpha}\cdot\frac{1}{L^2} = (1-\alpha)k^{\alpha} = w$$

4. Combine las condiciones de primer orden del problema de los hogares con las del problema de las firmas y obtenga el sistema de dos ecuaciones diferenciales en $c(t)$ y $k(t)$ (y el resto de las condiciones que usted considere necesarias) que determinan las trayectorias en el tiempo de $c(t)$ y $k(t)$. (10 puntos)

Solución: Reemplazando en la ecuación de Euler, tenemos que:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\eta c}(\alpha k^{\alpha-1} - \delta - \rho)$$

Tenemos que $k = a$, por lo que recordando las condiciones de primer orden de la firma:

$$\dot{k}(t) = k(t)^{\alpha} - (n-\delta)k(t) - c(t)$$

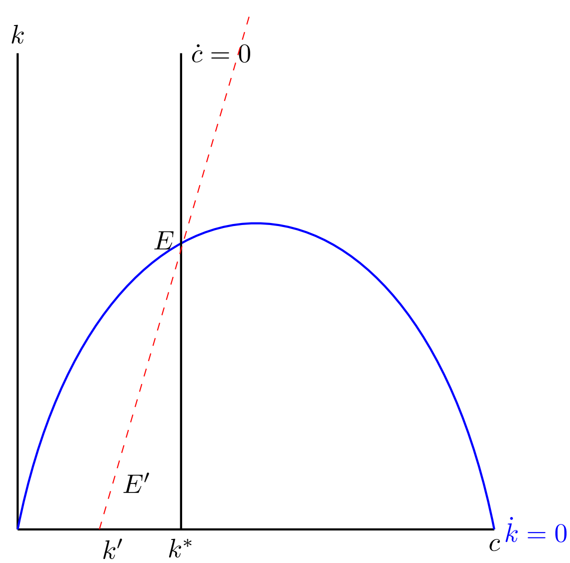
El sistema de ecuaciones diferenciales que caracterizarán la solución del problema serán los siguientes:

$$\dot{c} = 0 \Rightarrow \alpha k^{\alpha-1} = \rho + \delta \Rightarrow k^* = \left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow c = k^{\alpha} - (n+\delta)k$$

5. Dibuje el diagrama de fases de esta economía. (10 puntos)

Solución:



6. Linealice el sistema de ecuaciones diferenciales en torno al estado estacionario. (Importante: se le pide linealizar en torno al estado estacionario, no log linealizar en torno a estado estacionario). (10 puntos)

Solución: Las ecuaciones que gobiernan el problema son las siguientes:

$$\dot{k} = k^{\alpha} - (n+\delta)k - c$$
$$\dot{k} = (\alpha k^{\alpha-1} - n - \delta)|_{k=k^*}(k-k^*) - (c-c^*)$$

Pero como

$$\alpha k^{\alpha-1} - n - \delta = \alpha\left[\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\alpha-1} - (n-\delta) = \rho + n$$

$$\Rightarrow \dot{k} = (\rho+n)(k-k^*) - (c-c^*)$$

Y, la otra ecuación sería:

$$\dot{c} = -\frac{1}{\eta}(\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2})|_{k=k^*}(k-k^*)$$
$$\dot{c} = -\frac{1}{\eta}\alpha(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{-(2-\alpha)}{1-\alpha}}(k-k^*)$$

Lo que reordenado de manera matricial sería

$$\begin{bmatrix}\dot{k}\\ \dot{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho+n & -1\\ -\frac{\alpha(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{-(2-\alpha)}{1-\alpha}}}{\eta} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\ c\end{bmatrix}$$

7. Bonus para solemne: determine si hay saddle-path stability. (2 décimas para nota final de la solemne de la segunda parte).

Solución:
En este item, se buscaba que discutieran las condiciones que debía cumplir la matriz

$$\begin{bmatrix}\rho+n & -1\\ -\frac{\alpha(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{-(2-\alpha)}{1-\alpha}}}{\eta} & 0\end{bmatrix}$$

Para que el problema tenga una un estado estacionario. Habría que estudiar si la parte real de los eigenvalues de la matriz alternan en signo.