MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ

Pregunta 1

Considere una economía $\mathcal{E}$ con dos periodos. Hay $S \geq 2$ estados de la naturaleza en el segundo periodo y una única mercancía. Cada agente $i \in \{1,\ldots,N\}$ tiene una asignación inicial de recursos $(w_0^i,\ldots,w_S^i) \gg 0$ y preferencias representables por una función de utilidad $U^i : \mathbb{R}_+^{S+1} \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y estrictamente cóncava. Existen $J < S$ activos *numerarios*. Esto es, cada contrato $j \in \{1,\ldots,J\}$ es caracterizado por promesas $(A_{s,j})_{s\in\{1,\ldots,S\}} \neq 0$ medidas en unidades de la única mercancía disponible.

Tomando el precio de la mercancía como numerario y dados precios $q = (q_1,\ldots,q_J) \in \mathbb{R}_+^J$ para los activos, el agente i puede demandar planes de consumo y portafolios financieros en su conjunto presupuestario $B^i(q)$, el cual es caracterizado por los vectores $(x^i,z^i) \in \mathbb{R}_+^{S+1} \times \mathbb{R}^J$ tales que:

$$x_0^i + \sum_{j=1}^J q_j z_j^i \quad \leq \quad w_0^i\,, \qquad\qquad x_s^i \leq w_s^i + \sum_{j=1}^J A_{s,j} z_j^i, \quad \forall s \in \{1,\ldots,S\}.$$

En este contexto, suponga que para cada agente i existe un vector $(\varepsilon_1^i,\ldots,\varepsilon_J^i) \in \mathbb{R}_+^J$ tal que, dado $(z_1^i,\ldots,z_J^i) \in \mathbb{R}^J$ tenemos que

$$\left[\, w_s^i + \sum_{j=1}^J A_{s,j} z_j^i \geq 0,\ \forall s \in \{1,\ldots,S\} \,\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\, z_j^i \geq -\varepsilon_j^i, \quad \forall j \in \{1,\ldots,J\} \,\right].$$

Demuestre que es posible definir una economía de intercambio estática $\mathcal{E}^*$ con $J+1$ mercancías de tal forma que existe una correspondencia biunívoca entre los equilibrios de la economía con mercados incompletos $\mathcal{E}$ y los equilibrios de $\mathcal{E}^*$.[1]

Solución. Fije $i \in \{1,\ldots,N\}$ y $\overline{q} = (\overline{q}_1,\ldots,\overline{q}_J) \in \mathbb{R}_{++}^J$. Note que, por la monotonía estricta de las preferencias, la canasta $(\overline{x}^i,\overline{z}^i) \in \mathbb{R}_+^{S+1} \times \mathbb{R}^J$ maximiza la función de utilidad U^i en el conjunto presupuestario $B^i(\overline{q})$ si y solamente si $(\overline{x}_0^i,\overline{z}^i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^J$ maximiza la función

$$V^i(x_0^i,z^i) = U^i\left(x_0^i, \left(w_s^i + \sum_{j=1}^J A_{s,j} z_j^i\right)_{s\in\{1,\ldots,S\}}\right)$$

en el conjunto

$$\left\{(x_0^i,z^i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^J : x_0^i + \sum_{j=1}^J \overline{q}_j z_j^i \leq w_0^i\,, \quad w_s^i + \sum_{j=1}^J A_{s,j} z_j^i \,\geq\, 0, \quad \forall s \in \{1,\ldots,S\}\right\}.$$

Esta última propiedad es a su vez equivalente a afirmar que $(\overline{x}_0^i,\overline{z}^i)$ maximiza V^i en el conjunto

$$\left\{(x_0^i,z^i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^J : x_0^i + \sum_{j=1}^J \overline{q}_j (z_j^i + \varepsilon_j^i) \leq w_0^i + \sum_{j=1}^J \overline{q}_j \varepsilon_j^i\,, \quad z_j^i + \varepsilon_j^i \geq 0,\ \forall j \in \{1,\ldots,J\}\right\}.$$

Por lo tanto, haciendo el cambio de variables $y_j^i = z_j^i + \varepsilon_j^i$, concluimos que

$$(1) \qquad (\overline{x}^i,\overline{z}^i) \in \underset{(x^i,z^i)\in B^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}}\ U^i(x^i,z^i) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\overline{x}_0^i,\overline{y}^i) \in \underset{(x_0^i,y_0^i)\in C^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}}\ F^i(x_0^i,y^i),$$

[1] Puede ser útil pensar en el cambio de variables $y_j^i = z_j^i + \varepsilon_j^i$. Note que no es necesario probar que esos conjuntos de equilibrio son diferentes de vacío.

donde

$$
\begin{aligned}
F^i(x_0^i, y^i) &= U^i\left(x_0^i, \left(w_s^i + \sum_{j=1}^{J} A_{s,j}(y_j^i - \varepsilon_j^i)\right)_{s\in\{1,\dots,S\}}\right),\\
C^i(\overline{q}) &= \left\{(x_0^i, y^i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^J : x_0^i + \sum_{j=1}^{J} \overline{q}_j y_j^i \le w_0^i + \sum_{j=1}^{J} \overline{q}_j \varepsilon_j^i\right\}.
\end{aligned}
$$

Dado que los individuos tienen preferencias estrictamente monótonas y $(A_{s,j})_{s\in\{1,\dots,S\}} \neq 0$ para cada $j \in \{1,\dots,J\}$, sabemos que en un equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ el precio de cada activo será estrictamente positivo. Efectivamente, si el activo j tuviera precio cero, invirtiendo en él se podrían obtener recursos ilimitados en algún estado de la naturaleza en $t = 1$ sin incurrir en costos en $t = 0$.

Por lo tanto, sigue de la relación (1) que $(\overline{q}, (\overline{x}^i, \overline{z}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio de la economía con mercados incompletos $\mathcal{E}$, i.e.,

$$
(\overline{x}^i, \overline{z}^i) \in \underset{(x^i,z^i)\in B^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}} \; U^i(x^i), \;\; \forall i \in \{1,\dots,N\}; \qquad \sum_{i=1}^{N}(\overline{x}^i - w^i) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{N} \overline{z}^i = 0,
$$

si y solamente si $(\overline{q}, (\overline{x}_0^i, \overline{y}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$, donde $\overline{y}_j^i = \overline{z}_j^i + \varepsilon_j^i$, cumple las siguientes propiedades

$$
(\overline{x}_0^i, \overline{y}^i) \in \underset{(x_0^i,y^i)\in C^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}} \; F^i(x_0^i, y^i), \;\; \forall i \in \{1,\dots,N\}; \qquad \sum_{i=1}^{N}(\overline{x}_0^i - w_0^i) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{N} \overline{y}_j^i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_j^i, \;\; \forall j \in \{1,\dots,J\}.
$$

Por lo tanto, $(\overline{q}, (\overline{x}^i, \overline{z}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio competitivo de $\mathcal{E}$ si y solamente si $(\overline{q}, (\overline{x}_0^i, \overline{y}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio competitivo de una economía estática $\mathcal{E}^*$ con $J+1$ mercancías y N individuos, donde cada $i \in \{1,\dots,N\}$ tiene función de utilidad F^i y asignaciones iniciales $(w_0^i, \varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_J^i)$. $\square$

Pregunta 2

Describa una economía de intercambio estática con producción. Haciendo las hipótesis necesarias sobre preferencias, asignaciones iniciales y tecnologías de producción, demuestre que todo equilibrio competitivo es Pareto eficiente.

Solución. En una economía estática con producción hay N individuos que son propietarios de J firmas. Los individuos utilizan sus recursos iniciales y los beneficios obtenidos por sus empresas para demandar L mercancías perfectamente divisibles. Los mercados son competitivos y los individuos toman los precios como dados. Cada individuo $i \in \{1,\dots,N\}$ es caracterizado por una función de utilidad $U^i : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$, una asignación inicial de recursos $w^i \in \mathbb{R}_+^L$ y derechos de propiedad sobre las firmas $\theta^i = (\theta_1^i, \dots, \theta_J^i) \ge 0$, los cuales cumplen $\sum_{i=1}^{N} \theta^i = (1,\dots,1)$. Cada firma es caracterizada por un conjunto de posibilidades de producción $Y^j \subseteq \mathbb{R}^L$.

Un equilibrio para esta economía es dado por un vector de precios $\overline{p} \in \mathbb{R}_+^L \setminus \{0\}$ junto con decisiones óptimas de consumo y producción $((\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}, (\overline{y}^j)_{j\in\{1,\dots,J\}})$ tales que,

$$
\overline{y}^j \in \underset{y^j\in Y^j}{\operatorname{argmax}} \; \overline{p}\cdot y^j, \quad \forall j \in \{1,\dots,J\}, \qquad \overline{x}^i \in \underset{x^i\in B^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}} \; U^i(x^i), \;\; \forall i \in \{1,\dots,N\},
$$

$$
\sum_{i=1}^{N} \overline{x}^i = \sum_{i=1}^{N} w^i + \sum_{j=1}^{J} \overline{y}^j,
$$

donde $B^i(\overline{p}) := \left\{x^i \in \mathbb{R}_+^L : \overline{p}\cdot x^i \le \overline{p}\cdot w^i + \overline{p}\cdot \sum_j \theta_j^i \overline{y}^j\right\}$ es el conjunto presupuestario de i a precios $\overline{p}$.

Diremos que una distribución de recursos $(x^i)_{i\in\{1,\dots,N\}} \in \mathbb{R}_+^{LN}$ es *factible* si existen planes de producción $(y^j)_{j\in\{1,\dots,J\}} \in \prod_j Y^j$ tales que $\sum_{i=1}^{N} x^i \le \sum_{i=1}^{N} w^i + \sum_{j=1}^{J} y^j$.

Fije un equilibrio $(\overline{p}, (\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}, (\overline{y}^j)_{j\in\{1,\dots,J\}})$ y suponga que la distribución de recursos $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ no es Pareto eficiente. Entonces, existe otra distribución factible $(x^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ tal que $U^i(x^i) \geq U^i(\overline{x}^i)$ para todo agente $i \in \{1,\dots,N\}$ y $U^k(x^k) > U^k(\overline{x}^k)$ para algún $k \in \{1,\dots,N\}$. Si las preferencias son localmente no-saciadas, lo anterior implica que

$$\overline{p}\cdot x^k > \overline{p}\cdot w^k + \overline{p}\cdot \sum_{j=1}^{J} \theta_j^k \overline{y}^j; \qquad \overline{p}\cdot x^i \geq \overline{p}\cdot w^i + \overline{p}\cdot \sum_{j=1}^{J} \theta_j^i \overline{y}^j, \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}\setminus\{k\}.$$

Agregando estas desigualdades y utilizando la factibilidad de $(x^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ obtenemos que

$$\overline{p}\cdot \sum_{i=1}^{N} w^i + \overline{p}\cdot \sum_{j=1}^{J} y^j \geq \overline{p}\cdot \sum_{i=1}^{N} x^i > \overline{p}\cdot \sum_{i=1}^{N} w^i + \overline{p}\cdot \sum_{j=1}^{J} \overline{y}^j$$

para algún vector de planes de producción $(y^j)_{j\in\{1,\dots,J\}} \in \prod_j Y^j$. Así, $\overline{p}\cdot\sum_{j=1}^J y^j > \overline{p}\cdot\sum_{j=1}^J \overline{y}^j$. Esto implica que existe alguna firma j tal que $\overline{p}\cdot y^j > \overline{p}\cdot \overline{y}^j$. Una contradicción con la optimalidad de las decisiones de las empresas en un equilibrio. Por lo tanto, si las preferencias de los individuos son localmente no-saciadas, todo equilibrio competitivo (caso exista) es Pareto eficiente. □

Pregunta 3

Considere una economía de intercambio con dos mercancías y un conjunto H de individuos, todos con las mismas preferencias $u^h(x,y) = \sqrt{xy}/(1+\sqrt{xy})$, $\forall h \in H$. Si los recursos agregados son dados por $W \gg 0$, demuestre que independiente de la distribución de recursos existe un único equilibrio Walrasiano. Además, encuentre los precios relativos de equilibrio p_2/p_1 para cada distribución de recursos en $\{(w^h)_{h\in H} \in (\mathbb{R}^2_+)^H : \sum_{h\in H} w^h = W\}$.

Las preferencias individuales son idénticas y homotéticas, pues pueden ser representadas por una transformación monótona creciente de una función homogenea de grado uno: $u^h(x,y) = f\circ g(x,y)$, donde $f(t) = t/(1+t)$ es estrictamente creciente y $g(x,y) = \sqrt{xy}$ es homogenea de grado uno. Por lo tanto, sabemos que existe un agente representativo, lo cual nos permite asegurar que, salvo normalización, los precios de equilibrio $(p_1,p_2) \gg 0$ quedan caracterizados por

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial_y f\circ g(W)}{\partial_x f\circ g(W)} = \frac{\partial_y g(W)}{\partial_x g(W)} = \frac{W_x}{W_y},$$

donde $W = (W_x, W_y)$. Esto es, los precios relativos coinciden con la escasez relativa de recursos y *no dependen de la distribución de los recursos entre los individuos*. □

Pregunta 4

Considere una economía de intercambio con dos individuos A y B y dos mercancías. A diferencia del modelo clásico Walrasiano, asumiremos que el consumo de uno de los individuos genera externalidades en el nivel de bienestar del otro individuo:

$$V^A(x^A, y^A, x^B) = \ln(x^A + x^B) + \ln(y^A), \qquad w^A = (1,2);$$

$$V^B(x^B, y^B) = \ln(x^B) + \ln(y^B), \qquad w^B = (2,1).$$

(a) Encuentre los equilibrios competitivos de esta economía.

Las condiciones de primer orden de los problemas individuales nos aseguran que a precios $(p_x,p_y) = (\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$, tendremos que

$$\frac{\overline{y}^A}{3} = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \qquad \overline{y}^B = \frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)}.$$

Por lo tanto, como $\overline{y}^A + \overline{y}^B = 3$, tenemos que

$$3 = \frac{6\alpha + (1+\alpha)}{2(1-\alpha)} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{5}{13}.$$

Concluimos que la economía tiene un único equilibrio competitivo:

$$\left[\left(\overline{p}_x, \overline{p}_y\right); \left(\overline{x}^A, \overline{y}^A\right); \left(\overline{x}^B, \overline{y}^B\right)\right] = \left[\left(\frac{5}{13}, \frac{8}{13}\right); \left(\frac{6}{5}, \frac{15}{8}\right); \left(\frac{9}{5}, \frac{9}{8}\right)\right].$$

□

(b) Encuentre la curva de contrato. ¿Se cumple el Primer Teorema del Bienestar Social?

Por monotonía de las preferencias, en una asignación Pareto eficiente $((\overline{x}^A, \overline{y}^A), (\overline{x}^B, \overline{y}^B))$ se cumple que $\overline{x}^B = 3 - \overline{x}^A$ y $\overline{y}^B = 3 - \overline{x}^A$. Por lo tanto, $(\overline{x}^A, \overline{y}^A)$ hace parte de una distribución Pareto eficiente si y sólo las siguientes condiciones sin satisfechas

$$(\overline{x}^A, \overline{y}^A) \in \operatorname{argmax}\left\{\ln(3) + \ln(y) : (x,y) \in [0,3]\times[0,3] \;\wedge\; (3-x)(3-y) \geq (3-\overline{x}^A)(3-\overline{y}^A)\right\}.$$

$$(\overline{x}^A, \overline{y}^A) \in \operatorname{argmax}\left\{(3-x)(3-y) : (x,y) \in [0,3]\times[0,3] \;\wedge\; \ln(y) \geq \ln(\overline{y}^A)\right\}.$$

En el problema de optimización que caracteriza la segunda condición la función objetivo es decreciente en $x \in [0,3]$ asegurando que $\overline{x}^A = 0$. Por otro lado, ninguna de las dos condiciones determina restricciones sobre $\overline{y}^A$. Concluimos que la curva de contrato viene dada por $\overline{x}^A = 0$. El resultado del ítem anterior nos asegura que que la distribución de recursos determinada por el equilibrio competitivo NO es Pareto eficiente, i.e., no se cumple el Primer Teorema del Bienestar Social. Efectivamente, la distribución alcanzada por el mercado competitivo es Pareto dominada por $\left((0, \frac{15}{8}); (3, \frac{9}{8})\right)$. □

Pregunta 5

Considere el sistema no-lineal de n ecuaciones y n incognitas $\Phi(\eta, x) = 0$, donde $\Phi : U \times V \to \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable definida en el abierto $U \times V \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ y η es un vector de parametros. Dado un compacto $K \subseteq V$, sea $\mathcal{S}(K,\eta) = \{x \in K : \Phi(\eta, x) = 0\}$.

(a) Si $\text{rango}(D_x\Phi(\eta, x)) = n$ para todo $x \in \mathcal{S}(K,\eta)$, demuestre que $\mathcal{S}(K,\eta)$ es finito.

Fije $\overline{x} \in \mathcal{S}(K,\eta)$. Como Φ es diferenciable, dado $x \in V$ tenemos que $\Phi(\eta, x) = D_x\Phi(\eta,\overline{x})(x-\overline{x}) + \varepsilon(\eta, x - \overline{x})$, donde $\lim_{v\to 0} \varepsilon(\eta, v)/\|v\| = 0$. Vamos a probar que $\overline{x}$ es un punto aislado de V, i.e., existe $\delta > 0$ tal que $\|x - \overline{x}\| < \delta \implies \Phi(\eta, x) \neq 0$. Suponga por contradicción que existe una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ tal que $\|x_n - \overline{x}\| < 1/n$ y $\Phi(\eta, x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como la secuencia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $v_n = (x_n - \overline{x})/\|x_n - \overline{x}\|$ es limitada, tiene una subsecuencia $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Así, existe $\overline{v} \neq 0$ tal que

$$D_x\Phi(\eta,\overline{x})\overline{v} = \lim_{k\to+\infty} D_x\Phi(\eta,\overline{x})v_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} D_x\Phi(\eta,\overline{x})\frac{(x_{n_k} - \overline{x})}{\|x_{n_k} - \overline{x}\|} = -\lim_{k\to+\infty} \frac{\varepsilon(\eta, x_{n_k} - \overline{x})}{\|x_{n_k} - \overline{x}\|} = 0,$$

lo cual nos asegura que las columnas de $D_x\Phi(\eta,\overline{x})$ son linealmente dependientes, una contradicción ya que $D_x\Phi(\eta,\overline{x})$ es invertible. Por lo tanto, para cada $x \in \mathcal{S}(K,\eta)$ existe $\delta_x > 0$ tal que $B_{\delta_x}(x) \cap \mathcal{S}(K,\eta) = \{x\}$. Esto nos asegura que $\mathcal{S}(K,\eta) = \bigcup_{x\in\mathcal{S}(K,\eta)} B_{\delta_x}(x)$. En otra palabras, $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x\in\mathcal{S}(K,\eta)}$ es una cobertura abierta de $\mathcal{S}(K,\eta)$. Note que $\mathcal{S}(K,\eta)$ es compacto, pues es un subconjunto cerrado del compacto K (siempre podemos escribir $\mathcal{S}(K,\eta) = \Phi^{-1}(\eta, \{0\})$ y $\Phi(\eta,\cdot)$ es continua por ser diferenciable). Luego, $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x\in\mathcal{S}(K,\eta)}$ tiene una subcobertura finita. Esto implica que $\mathcal{S}(K,\eta)$ es finito. □

(b) Asuma que $n = m = 1$ y $U = V = (0, +\infty)$. Demuestre o de un contra-ejemplo: si $\nabla\Phi(\eta, x) \neq 0$ para todo par $(\eta, x) \gg 0$ tal que $\Phi(\eta, x) = 0$, entonces para casi todo $\eta > 0$ el sistema $\Phi(\eta, x) = 0$ tiene un número finito de soluciones.

El Teorema de Transversalidad nos permite afirmar que, bajo las condiciones del enunciado, para casi todo $\eta > 0$ las soluciones del sistema $\Phi(\eta, x) = 0$ son puntos aislados de V. Sin embargo, para concluir que el número de soluciones es finito requerimos más que tener puntos aislados. Por supuesto, utilizando los mismos argumentos del ítem anterior podemos concluir que: *para casi todo $\eta > 0$ el sistema $\Phi(\eta, x) = 0$ tiene un número finito de soluciones dentro de cada compacto $K \subseteq V$*.

Para construir un contraejemplo necesitamos un sistema que tenga un número infinito de soluciones localmente aisladas. Cualquier función $\Phi(\eta, \cdot)$ cuyo gráfico oscile alrededor del eje de las abscisas resultará. Por ejemplo $\Phi(\eta, x) = cos(\eta x)$. □

Pregunta 6

Filomena y Colomba son vecinas y están dispuestas a abrir mano de parte de su tiempo libre para ir a buscar moras silvestres al bosque. Colomba es la única que sabe donde crecen las moras y puede utilizar su propio tiempo libre o contratar a Filomena para obtenerlas. Si se dedican x horas a buscar y recolectar moras, se conseguirán $\sqrt{x}$ kilos. Las preferencias de Filomena y Colomba por horas de ocio (x) y por kilos de moras silvestres (y) son representadas por las funciones de utilidad $U^F(x, y) = y\sqrt{x}$, $U^C(x, y) = xy$. Si cada una de las vecinas tiene una hora de tiempo libre, determine el equilibrio competitivo.

Se trata de una economía Walrasiana con producción. Hay una firma, propiedad de Colomba, la cual es caracterizada por la tecnología $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \ \wedge \ y \leq \sqrt{x}\}$. Así, dados precios $(p_x, p_y) \gg 0$ para el ocio y las moras silvestres,[2] el objetivo de la firma es $\max_{x \geq 0}(p_y\sqrt{x} - p_x x)$. Como la función objetivo es cóncava, la solución queda biunívocamente caracterizada por la condición de primer orden, la cual implica que la demanda de la firma de horas dedicadas a la recolección de moras es igual a $x^f(p_x, p_y) := p_y^2/(4p_x^2)$. Los beneficios de la firma son $p_y\sqrt{x^f(p_x, p_y)} - p_x x^f(p_x, p_y) = p_y^2/(4p_x)$.

Sigue que a precios (p_x, p_y) Colomba tiene una renta monetaria $p_x + p_y^2/(4p_x)$, mientras que Filomena tiene una cantidad p_x de recursos. Como las utilidades son Coob-Douglas, las demandas individuales vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
(x^C(p_x, p_y), y^C(p_x, p_y)) &= \left(\frac{1}{2}\frac{p_x + p_y^2/(4p_x)}{p_x}, \ \frac{1}{2}\frac{p_x + p_y^2/(4p_x)}{p_y}\right); \\
(x^F(p_x, p_y), y^F(p_x, p_y)) &= \left(\frac{1}{3}\frac{p_x}{p_x}, \ \frac{2}{3}\frac{p_x}{p_y}\right).
\end{aligned}$$

En equilibrio la demanda agregada por tiempo, sea para ocio por parte de Colomba o Filomena, o para labores de recolección de moras por parte de la firma, debe igualar a la oferta. Por lo tanto, normalizando $p_x = 1$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_y^2}{4}\right) + \frac{1}{3} + \frac{p_y^2}{4} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad p_y = \frac{2}{3}\sqrt{7}.$$

Concluimos que los precios de equilibrio vienen dados por $(\overline{p}_x, \overline{p}_y) = (1, 2\sqrt{7}/3)$. A esos precios, las demandas de las vecinas son $(\overline{x}^C, \overline{y}^C) = (8/9, 4\sqrt{7}/21)$, $(\overline{x}^F, \overline{y}^F) = (3/9, 3\sqrt{7}/21)$. Es inmediato que esto es coherente con la venta de $7/9$ de hora de ocio (Colomba vende $1/9$ de hora, mientras que Filomena vende $6/9$ de hora) para que la firma produzca $\sqrt{7}/3$ kilos de moras silvestres, lo cual no sólo asegura que se maximizan sus beneficios sino que también viabiliza la oferta de moras para cubrir la demanda agregada de las vecinas.□

[2] La monotonía estricta de las preferencias asegura la positividad de los precios de equilibrio.

Pregunta 7

Considere una economía con dos periodos e incertidumbre sobre la realización de un estado de la naturaleza $s \in \{u, d\}$ en el segundo periodo. Existen n individuos y dos mercancías, x e y. Asumiremos que x es perecible e y es perfectamente durable. Cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$ es caracterizado por la asignación inicial de mercancías $w^i \in \mathbb{R}^6_{++}$ y la función de utilidad

$$U^i\left((x_s, y_s)_{s\in\{0,u,d\}}\right) = \sqrt{x_0 y_0} + \beta_i\left(\pi_i \sqrt{x_u y_u} + (1-\pi_i)\sqrt{x_d y_d}\right),$$

donde $\beta_i, \pi_i \in (0,1)$ representan, respectivamente, el factor de descuento intertemporal y la probabilidad de ocurrencia del estado u. Los individuos son tomadores de precios y pueden suavizar su consumo negociando un activo financiero, el cual promete entregar en el segundo periodo un pago igual al valor de mercado de una unidad de la mercancía x.

A diferencia del modelo clásico de mercados incompletos, existe *riesgo de crédito*. Esto es, quienes reciben recursos en $t = 0$ a cambio de una promesa futura pueden no honrar sus compromisos. Con el objetivo de proteger a los inversores, los deudores deberán constituir garantías subsidiarias (*colateral*) al momento de hacer una promesa: se deberá poner como garantía una unidad de la mercancía y por cada unidad del activo que se vende al descubierto. Los deudores pueden consumir estas garantías en $t = 0$, pero deben entregarlas en los estados de la naturaleza donde no cumplan con sus promesas.

Como no existen efectos reputacionales asociados al no cumplimiento de los compromisos financieros, quienes invierten saben que estarán sujetos a *default estratégico* por parte de los deudores: se entregará el colateral si y solamente si su valor es inferior a la promesa. Dicho de otra forma, por cada unidad demandada en $t = 0$, el activo pagará $\min\{p_{s,x}, p_{s,y}\}$ en el estado $s \in \{u, d\}$.

(a) Describa analíticamente las restricciones a las cuales se enfrenta cada individuo y las características de un equilibrio competitivo. Además, demuestre que en equilibrio el precio del activo es menor que el precio del bien durable en $t = 0$. Interprete.

Dados precios para las mercancías y para el activo $((p_{s,x}, p_{s,y})_{s\in\{0,u,d\}}, q) \in \mathbb{R}^6_+ \times \mathbb{R}_+$, cada individuo $i \in \{1, \ldots, n\}$ escogerá un plan de consumo $(x_s, y_s)_{s\in\{0,u,d\}} \geq 0$ y una posición financiera $z \in \mathbb{R}$ sujeto a las siguientes restricciones presupuestarias:

$$\begin{aligned}
p_{0,x}x_0 + p_{0,y}y_0 &\leq p_{0,x}w^i_{0,x} + p_{0,y}w^i_{0,y} - qz \\
p_{s,x}x_s + p_{s,y}y_s &\leq p_{s,x}w^i_{s,x} + p_{s,y}w^i_{s,y} + p_{s,y}y_0 + \min\{p_{s,x}, p_{s,y}\}z, \quad \forall s \in \{u, d\}; \\
y_0 &\geq \max\{-z, 0\}.
\end{aligned}$$

Note que las restricciones presupuestarias del segundo periodo consideran la existencia de colateral como garantía a las promesas y la durabilidad de la mercanía y. Además, la tercera restricción asegura que los individuos demandan la cantidad de bien durable necesario para cubrir sus promesas.

Denotaremos por $B^i(p, q)$ al conjunto de vectores $((x, y), z) \equiv ((x_s, y_s)_{s\in\{0,u,d\}}, z) \in \mathbb{R}^6_+ \times \mathbb{R}$ que cumplen las restricciones antes descritas a precios $(p, q) \equiv ((p_{s,x}, p_{s,y})_{s\in\{0,u,d\}}, q)$.

Un equilibrio competitivo es caracterizado por precios y decisiones individuales que hacen posible que todos los individuos maximizen sus preferencias y las demandas agregadas sean compatibles con la oferta de mercado. Esto es, un equilibrio es dado por un vector $[(\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}^i, \overline{y}^i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}]$ tal que:
- Para cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(\overline{x}^i, \overline{y}^i) \in B^i(\overline{p}, \overline{q})$.
- Para cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U^i(\overline{x}^i, \overline{y}^i) \geq U^i(x^i, y^i)$, $\forall (x^i, y^i) \in B^i(\overline{p}, \overline{q})$.

- La oferta se iguala a la demanda en cada mercado,

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}_0^i - w_{0,x}^i) = \sum_{i=1}^{n}(\overline{y}_0^i - w_{0,y}^i) = \sum_{i=1}^{n}\overline{z} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n}(\overline{x}_s^i - w_{s,x}^i) = \sum_{i=1}^{n}(\overline{y}_s^i - (w_{s,y}^i + w_{0,y}^i)) = 0,\ \forall s \in \{u,d\}.$$

Nos piden probar que en todo equilibrio $\overline{q} < \overline{p}_{0,y}$. Note que $\overline{p}_{0,y} - \overline{q}$ es el costo de la operación conjunta asociada a vender una unidad del activo y constituir el colateral requerido. Esa operación genera pagos no-negativos en el segundo periodo, pues el deudor tiene el colateral y nunca paga más que el mínimo entre su valor y el valor de la promesa. Por lo tanto, como las preferencias son estrictamente monótonas y el colateral es consumido por el deudor, por no-arbitrage, el costo $\overline{p}_{0,y} - \overline{q}$ debe ser positivo.

Note que la monotonía estricta de las preferencias nos asegura que, en la ausencia de mecanismos de recuperación de crédito adicionales al embargo del colateral, los deudores harán *default estratégico*. Por lo tanto, la propiedad $\overline{q} < \overline{p}_{0,y}$ es una simple reacción del mercado a este comportamiento a nivel individual: siempre se prestará un monto inferior al valor de la garantía. □

(b) Asuma que el bien durable es relativamente escaso: $\sum_{i=1}^{n}(w_{0,y}^i + w_{s,y}^i) < \sum_{i=1}^{n} w_{s,x}^i,\ \forall s \in \{u,d\}$. Demuestre que en equilibrio los deudores siempre cumplen sus promesas.

Sabemos que en equilibrio los deudores siempre cumplirán sus promesas si y solamente si los precios de las mercancías cumplen $\overline{p}_{s,x} \leq \overline{p}_{s,y},\ \forall s \in \{u,d\}$. ¿Como podemos obtener este tipo de información sobre los precios a partir de una hipótesis sobre la oferta de mercancías? Es probable que utilizando las condiciones de primer orden del problema individual y la factibildiad de mercado.

Efectivamente, como las utilidades son separables, luego de la realización de la incertidumbre los individuos no se arrepienten del consumo que planificaron para ese estado. Además, para cada i el núcleo de la utilidad separable U^i es una función Coob-Douglas, lo cual nos asegura que en cada estado $s \in \{u,d\}$ las demandas cumplen

$$\overline{x}_s^i = \frac{1}{2}\frac{m(\overline{p}_s, \overline{y}_0^i, w_s^i, \overline{z}^i)}{\overline{p}_{s,x}}, \qquad \overline{y}_s^i = \frac{1}{2}\frac{m(\overline{p}_s, \overline{y}_0^i, w_s^i, \overline{z}^i)}{\overline{p}_{s,y}},$$

donde $m(\overline{p}_s, \overline{y}_0^i, w_s^i, \overline{z}^i)$ es la renta monetaria que el individuo i tiene disponible para consumo en el estado s. Por lo tanto, manipulando estas condiciones obtenemos que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}: \quad \frac{\overline{p}_{s,x}}{\overline{p}_{s,y}}\overline{x}_s^i = \overline{y}_s^i \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\overline{p}_{s,x}}{\overline{p}_{s,y}}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_s^i = \sum_{i=1}^{n}\overline{y}_s^i.$$

La hipótesis sobre escasez relativa del bien durable y las condiciones de factibilidad de mercado implican que $\overline{p}_{s,x} < \overline{p}_{s,y},\ \forall s \in \{u,d\}$. □

(c) Asumiendo todas las propiedades de continuidad que necesite sobre las correspondencias de alternativas presupuestariamente factibles, demuestre la existencia de al menos un equilibrio competitivo.

Para probar la existencia de equilibrio es recomendable seguir los mismos pasos de la demostración de existencia de equilibrio en economías de intercambio Walrasianas. Esencialmente, hay que truncar la economía, para luego definir un juego generalizado donde los individuos maximizan su utilidad en conjuntos presupuestarios truncados, al mismo tiempo que jugadores abstractos escogen precios en cada estado de la naturaleza con el objetivo de maximizar el valor del exceso de demanda. Luego de probar la existencia de equilibrio en el juego generalizado, la concavidad estricta de las funciones de utilidad permite probar que todo equilibrio del juego generalizado es también un equilibrio de la economía original (*Ud. tenía que desarrollar estos argumentos en detalle al responder esta pregunta*).

En esta pauta enfocaremos en el paso inicial, que es la clave para implementar la estrategia de demostración: la existencia de límites endógenos para las variables del modelo.

Las homogeneidades de grado cero en precios de las restricciones presupuestarias nos permiten asumir que $p_{0,x} + p_{0,y} + q = 1$, $p_{s,x} + p_{s,y} = 1$, $\forall s \in \{u, d\}$. Además, las condiciones de factibilidad de mercado y la no-negatividad del consumo nos aseguran que las demandas individuales por mercancías son limitadas.

Por lo tanto, la clave está en demostrar la existencia de límites endógenos para las posiciones financieras. Aunque los activos no son nominales, ni existen límites de Radner, la existencia de garantias subsidiarias hace que el volumen de deuda esté asociado a la disponibilidad del bien durable, al menos cuando la factibilidad de mercado se cumple. Efectivamente, como $\max\{-z^i, 0\} \leq y_0^i$, tenemos que $\max\{-z^i, 0\} \leq W_{0,y} := \sum_{i=1}^n w_{0,y}^i$. Por lo tanto, para cada individuo i, $z^i \geq -W_{0,y}$. Hemos encontrado así un *"límite de Radner endógeno"* que nos permite acotar las inversiones al utilizar la factibilidad de mercado, $\sum_{i=1}^n z^i = 0$. □

Pregunta 8

Considere una economía de intercambio estática con N consumidores y L mercancías, donde la oferta agregada de recursos es $W \in \mathbb{R}^L_{++}$. Cada individuo $i \in \{1, \ldots, N\}$ tiene una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava. Diremos que una distribución de recursos $(x^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ es *libre de envidia* si $u^i(x^i) \geq u^i(x^j)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Una asignación factible es *justa* si es Pareto eficiente y libre de envidia.

(i) De un ejemplo de una economía donde las distribuciones de recursos que se obtienen en un equilibrio competitivo *no* son justas.

Solución. Para que la distribución de recursos que se obtiene en un equilibrio sea *justa* debe ser *libre de envidia*. Intuitivamente, es imposible que esto ocurra en economías donde los individuos tienen rentas monetarias muy desiguales. Por ejemplo, si $N = 2$, $u^1(x, y) = u^2(x, y) = \sqrt{xy}$ y $W = w^1 + w^2 = (10, 10) + (1, 1)$, entonces en el único equilibrio Walrasiano los agentes demandan sus asignaciones iniciales y el individuo $i = 2$ envidia la situación del individuo $j = 1$, pues $u^i(\overline{x}^j) = \sqrt{100} > \sqrt{1} = u^i(\overline{x}^i)$. □

(ii) Demuestre que siempre existen distribuciones de recursos justas.

Solución. Para asegurar la justicia de una distribución de recursos es suficiente probar que $u^i(x^i) = u^j(x^j)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Considere el siguiente problema de maximización del bienestar social, en el cual un planificador central se preocupa del individuo que está en la peor situación en términos de utilidad:

$$\begin{array}{cc} \max & \min\{u^1(x^1), \ldots, u^N(x^N)\} \\ (x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}^{LN}_+ : & \sum_{i=1}^N x^i \leq W. \end{array}$$

Como las funciones de utilidad son continuas y el conjunto de asignaciones factibles es compacto, sigue del Teorema de Weierstrass que existe una solución para el problema anterior. Además, en toda solución $(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^N)$ tenemos que $u^i(\overline{x}^i) = u^j(\overline{x}^j)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Si no fuera así, existiría un agente i tal que $\min_{j\neq i} u^j(\overline{x}^j) < u^i(\overline{x}^i)$. Luego, por la continuidad de las funciones de utilidad, existiría $\theta \in (0, 1)$ tal que $\min\limits_{j\neq i} u^j\left(\overline{x}^j + \frac{(1-\theta)}{N-1}\overline{x}^i\right) < u^i(\theta\overline{x}^i)$, lo que implicaría que $\min\left\{u^i(\theta\overline{x}^i), \min\limits_{j\neq i} u^j\left(\overline{x}^j + \frac{(1-\theta)}{N-1}\overline{x}^i\right)\right\} > \min\limits_i u^i(\overline{x}^i)$. Esto contradeciría la optimalidad de $(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^N)$. □

Pregunta 9

Considere una economía con dos periodos, dos estados de la naturaleza en el segundo periodo $s \in \{u, d\}$ y una única mercancía, la cual está disponible para consumo sólo en el segundo periodo. Hay dos agentes, A y B, que negocian activos en $t = 0$ para suavizar su consumo en $t = 1$. Hay dos activos, j y k, con promesas reales $(N_{j,u}, N_{j,d}) = (1, 0)$ y $(N_{k,u}, N_{k,d}) = (0, 1)$.

Suponga que los agentes son caracterizados por utilidades y asignaciones iniciales

$$V^A(x_u, x_d) = 2\sqrt{x_u + 1} + \sqrt{x_d}, \qquad w^A = (1, 1),$$
$$V^B(x_u, x_d) = \sqrt{x_u + 1} + 2\sqrt{x_d}, \qquad w^B = (1, 1).$$

(i) Encuentre las demandas de equilibrio en esta economía. Para los precios de equilibrio, puede reportar una ecuación que los determine.

Solución. Como las funciones de utilidad son estrictamente crecientes, en equilibrio los precios de los activos son estrictamente positivos y en el primer periodo los individuos no pierden recursos que podrían utilizar para consumo en el segundo periodo. Esto es, $q_j z_j^h + q_k z_k^h = 0$, donde (z_j^h, z_k^h) es el portafolio financiero del individuo $h \in \{A, B\}$ y $(q_j, q_k) \gg 0$ son los precios de los activos. Por lo tanto, normalizando $q_j = 1$, obtenemos que $z_j^h = -q_k z_k^h$. Luego, como el consumo del segundo periodo es

$$(x_u^h, x_d^h) = (1 + z_j^h, 1 + z_k^h) = (1 - q_k z_k^h, 1 + z_k^h),$$

los problemas individuales son equivalentes a

$$\max_{z_k^A \in \mathbb{R}} 2\sqrt{2 - q_k z_k^A} + \sqrt{1 + z_k^A}, \qquad \max_{z_k^B \in \mathbb{R}} \sqrt{2 - q_k z_k^B} + 2\sqrt{1 + z_k^B}.$$

Calculando las condiciones de primer orden y haciendo las manipulaciones algebraicas necesarias Ud. debería llegar a que

$$(z_k^A(q_k), z_k^B(q_k)) = \left(\frac{2 - 4q_k^2}{4q_k^2 + q_k}, \frac{8 - q_k^2}{q_k^2 + 4q_k}\right).$$

Si $\overline{q}_k$ es un precio de equilibrio entonces $z_k^A(\overline{q}_k) + z_k^B(\overline{q}_k) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{2 - 4q_k^2}{4q_k + 1} = \frac{q_k^2 - 8}{q_k + 4} \qquad \Longrightarrow \qquad 8\overline{q}_k^3 + 17\overline{q}_k - 34\overline{q}_k - 16 = 0.$$

Así, hemos encontrado fórmulas para el consumo y los portafolios óptimos en función de $\overline{q}_k$, junto a una ecuación cuya solución estrictamente positiva determinará el precio de este activo.[3] □

(ii) Suponga que sólo se pueden demandar portafolios en el conjunto $\{(z_j, z_k) \in \mathbb{R}^2 : z_j + z_k \geq 0\}$. Demuestre que esta restricción compromete la existencia de equilibrio.

Solución. Suponga que existe un equilibrio en el cual los portafolios vienen dados por $(\overline{z}_j^A, \overline{z}_k^A)$ y $(\overline{z}_j^B, \overline{z}_k^B)$. Como la factibilidad de mercado asegura que $\overline{z}_j^A + \overline{z}_j^B = 0 = \overline{z}_k^A + \overline{z}_k^B$, sabemos que

$$(\overline{z}_j^A + \overline{z}_k^A) + (\overline{z}_j^B + \overline{z}_k^B) = 0.$$

Así, sigue de las restricciones financieras que $\overline{z}_j^A + \overline{z}_k^A = 0$. Por otro lado, normalizando a uno el precio del activo j, la restricción presupuestaria del primer periodo asegura que $\overline{z}_j^A = -\overline{q}_k \overline{z}_k^A$. Estas dos propiedades nos permiten concluir que $\overline{z}_k^A = \overline{q}_k \overline{z}_k^A$.

Sea $\overline{\alpha} = \overline{z}_k^A$. Sigue de los argumentos hechos en el ítem previo que

$$\overline{\alpha} \in \operatorname*{argmax}_{\alpha \in \mathbb{R}} 2\sqrt{2 - \overline{q}_k \alpha} + \sqrt{1 + \alpha}, \qquad \overline{\alpha} \in \operatorname*{argmax}_{\alpha \in \mathbb{R}} \sqrt{2 + \overline{q}_k \alpha} + 2\sqrt{1 - \alpha},$$

[3] La ecuación $8\overline{q}_k^3 + 17\overline{q}_k - 34\overline{q}_k - 16 = 0$ tiene una única raiz real positiva $\overline{q}_k \approx 1.52421$. Evidentemente, Ud. no tenía que hacer este cálculo numérico.

lo cual implica que

$$\overline{\alpha} = \frac{2 - 4q_k^2}{4q_k^2 + q_k} = -\frac{8 - q_k^2}{q_k^2 + 4q_k}.$$

Note que no es posible que esas dos expresiones se anulen al mismo tiempo, i.e., en un equilibrio debe haber negociación de activos. Como $\overline{z}_k^A = \overline{q}_k \overline{z}_k^A \neq 0$, obtenemos que $\overline{q}_k = 1$. Reemplazando este valor en la igualdad previa, llegamos a que $2 = 7$. Una contradicción. $\square$

Pregunta 10

Sea $\mathcal{E}(w)$ una economía con producción en la cual hay L mercancías, J firmas y N consumidores con asignaciones iniciales $w = (w^i)_{i\in\{1,\dots,N\}} \gg 0$. Los consumidores son los propietarios de las firmas, aunque al menos uno de ellos *no tiene* derechos propiedad sobre ninguna empresa. Asuma que las demandas de los consumidores $(x^i(p))_{i\in\{1,\dots,N\}}$ y las decisiones óptimas de producción de las firmas $(y^j(p))_{j\in\{1,\dots,J\}}$ son funciones bien definidas y diferenciables en el espacio de precios $\mathbb{R}^L_{++}$. A partir de los resultados vistos en clase para economías de intercambio y bajo los supuestos usuales en preferencias y tecnologías de producción, demuestre que para casi todo $w \in \mathbb{R}^{LN}_{++}$ la economía $\mathcal{E}(w)$ tiene un número finito e impar de equilibrios.

Solución. Asumiremos que los individuos tienen preferencias representables por funciones de utilidad continuas, estrictamente crecientes y estrictamente cuasi-cóncavas. Además, cada firma j tiene un conjunto de producción Y^j cerrado y convexo tal que $[y_j \in Y^j \wedge y_j' \leq y_j] \Longrightarrow y_j' \in Y^j$, $Y^j \cap (-Y^j) = \{0\}$. Bajo estas condiciones cada economía $\mathcal{E}(w)$ tiene un conjunto no-vacío de equilibrios competitivos.

Como las restricciones presupuestarias de los consumidores son homogéneas de grado cero en precios, sin perdida de generalidad podemos utilizar la mercancía L como numerario, normalizando su precio a uno. Defina la función $\widehat{z} : \mathbb{R}^{LN}_{++} \times \mathbb{R}^{L-1}_{++} \to \mathbb{R}^{L-1}$ por

$$\widehat{z}(w,p) = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(x_l^i(p,1) - w_l^i \right) - \sum_{j=1}^{J} y_l^j(p,1) \right)_{l\in\{1,\dots,L-1\}}.$$

La Ley de Walras nos asegura que $(p,1) \gg 0$ es un equilibrio de $\mathcal{E}(w)$ si y solamente si $\widehat{z}(w,p) = 0$. Por lo tanto, para caracterizar el conjunto de precios de equilibrio de una economía $\mathcal{E}(w)$ es suficiente caracterizar las soluciones del sistema de ecuaciones $\widehat{z}(w,p) = 0$.

Dado $w \in \mathbb{R}^{LN}_{++}$, argumentos idénticos a los aplicados a la función exceso de demanda truncada de una economía de intercambio *sin producción* nos permiten afirmar que, si $D_p\widehat{z}(w,p)$ es invertible cuando $\widehat{z}(w,p) = 0$, entonces $\{p \in \mathbb{R}^{L-1}_{++} : \widehat{z}(w,p) = 0\}$ es un conjunto de puntos localmente aislados. Esto es, toda economía regular tiene un conjunto de precios de equilibrio cuyos elementos son localmente aislados.

Note que, como las asignaciones iniciales son interiores, el individuo que no tiene derechos de propiedad sobre ninguna firma tendrá recursos incluso cuando algunas mercancías (no todas) tengan precio cero. Por lo tanto, argumentos análogos a los ya aplicados para economías sin producción implican que en toda economía regular el conjunto de precios es finito. A partir de esto, y gracias al Teorema del Índice, sabemos que toda economía regular tiene un número finito e impar de precios de equilibrio.

Por otro lado, aplicando el Teorema de Transversalidad—lo cual se hacía perturbando las asignaciones iniciales de un individuo, por lo que se puede repetir en un ambiente con producción—podemos concluir que casi toda economía es regular.

Finalmente, juntando todos los resultados anteriores, concluimos que para casi todo $w \in \mathbb{R}^{LN}_{++}$ la economía $\mathcal{E}(w)$ tiene un número finito e impar de equilibrios. $\square$

PREGUNTA 11

Considere una economía con dos periodos en la cual hay incertidumbre sobre el estado de la naturaleza $s \in \mathcal{S} = \{1, \ldots, S\}$ que se realizará en el segundo periodo. Hay una única mercancía y un activo real con promesas $(A_s)_{s\in\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^S_+ \setminus \{0\}$. Suponga que en esta economía, en la cual hay muchos individuos, Felipe tiene asignaciones iniciales $w = (w_s)_{s\in\{0\}\cup\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ y preferencias representables por una función de utilidad continua $V : \mathbb{R}^{S+1}_+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\in\mathbb{R}^{S+1}_{++}:\|x\|\to+\infty} V(x) = +\infty.$$

Además asuma que el acceso a crédito de Felipe está limitado por la restricción

$$100 + qz \geq 0,$$

donde q es el precio de activo y $z \in \mathbb{R}$ su posición financiera.

Tomando el precio de la mercancia como numerario, suponga que existe $\Omega > 0$ tal que

$$\max_{s\in\{0\}\cup\mathcal{S}} x_s(q) \leq \Omega,$$

donde $(x_s(q))_{s\in\{0\}\cup\mathcal{S}}$ es la demanda de mercancías de Felipe a precios q. Demuestre que existe $\underline{Q} > 0$ que depende de $(\Omega, V, w, (A_s)_{s\in\mathcal{S}})$ tal que $q \geq \underline{Q}$.

Solución. Intuitivamente, si no se pudiera limitar inferiormente el precio q, Felipe podría vender parte de su asignación inicial y comprar muchas unidades del activo en $t = 0$. Esa inversión le daría retornos muy altos en al menos un estado de la naturaleza en el segundo periodo, asegurándole un nivel de utilidad superior a $V(\Omega, \ldots, \Omega)$. Esto sería incompatible con la optimalidad de $(x_s(q))_{s\in\{0\}\cup\mathcal{S}}$.

Formalmente, suponga que Felipe utiliza la mitad de su asignacíon inicial en el primer periodo para comprar $\alpha > 0$ unidades del activo en $t = 0$. Esta acción le permite financiar la canasta de consumo $y(\alpha) := (0.5w_0, (w_s + A_s\alpha)_{s\in\mathcal{S}}) \gg 0$. Como $(x_s(q))_{s\in\{0\}\cup\mathcal{S}}$ es su demanda a precios q, sabemos que

$$V\,(y(\alpha)) \leq V((x_s(q))_{s\in\{0\}\cup\mathcal{S}}) \leq V(\Omega, \ldots, \Omega).$$

Ahora, $(A_s)_{s\in\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^S_+ \setminus \{0\}$ implica que $\lim_{\alpha\to+\infty} \|y(\alpha)\| = +\infty$. Por lo tanto, $\lim_{\alpha\to+\infty} V(y(\alpha)) = +\infty$.

Esto implica que debe existir $\overline{\alpha} > 0$ tal que Felipe no puede nunca comprar más que $\overline{\alpha}$ unidades del activo con la venta de la mitad de su asignación inicial de recursos en $t = 0$. Esto es, $0.5w_0 \leq q\overline{\alpha}$. Definiendo $\underline{Q} = 0.5w_0/\overline{\alpha}$ concluimos la demostración. $\square$