Macroeconomía I
Ayudantía 4

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Marcelo Gómez, Alberto Undurraga

Matemático I: Modelo de Romer

Considere el modelo de crecimiento de Romer[1]. En particular, consideremos un modelo sin capital y con utilidad logarítmica. En este, el crecimiento del producto corresponde a

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = max\left\{\frac{(1-\phi)^2}{\phi}B\bar{L} - (1-\phi)\rho, 0\right\}.$$

(a) Explique por qué el crecimiento no es negativo en este modelo (por qué el crecimiento tiene la función *max*). Además, explique la intuición del efecto de los cuatro parámetros en el crecimiento.

(b) Explique por qué este crecimiento no es el óptimo.

(c) Suponga ahora que, conscientes del problema de la pregunta (b), las autoridades obligan a los sostenedores de las patentes a cobrar $\delta w(t)/\phi$, donde $\phi \leq \delta \leq 1$. ¿Cual es la nueva tasa de crecimiento en equilibrio? ¿Cómo esta es afectada por δ y por qué es así?

(d) Suponga que se fija $\delta = \phi$. ¿Qué argumento existe para esto? ¿Se maximiza el bienestar social? ¿Por qué?

Matemático II: Capital Humano

Considere una economía con un continuo de hogares, cada miembro del hogar está dotado de una unidad de tiempo por periodo, que es repartido entre trabajo ($u(t)$) y acumulación de capital humano $1-u(t)$. El hogar representativo maximiza,

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}N(t)dt$$

Donde N es la cantidad de personas del hogar y c es el consumo per cápita. La producción agregada es,

$$Y(t) = K(t)^\alpha[Au(t)h(t)N(t)]^{1-\alpha}$$

Donde Y es el producto del bien final, K es el capital agregado, h es el nivel de capital humano per cápita y A es la tecnología *labor augmenting*. Supongamos que $A = 1$. Las leyes de movimiento del capital humano y físico son,

$$\dot{K}(t) = Y(t) - N(t)c(t)$$
$$\dot{h}(t) = h(t) - \phi(1-u(t))$$

Donde $\phi > 0$ es una constante. La tasa de crecimiento de la población es n.

[1] Si no lo ha hecho aún, se recomienda fuertemente estudiar en profundidad el capítulo 3 de *Advanced Macroeconomics* de David Romer, 5ta versión.

1. Muestre que la trayectoria de crecimiento óptima (BGP) todas las variables per cápita $c, h, k = K/N$ junto a $y = Y/N$, crecen a la misma tasa constante junto a la asignación constante en el tiempo u. Resuelva para esta tasa de crecimiento constante y obtenga la expresión analítica de u en la trayectoria de crecimiento óptima.

2. Resuelva para la tasa de ahorro (s), la tasa de salario (w) y la tasa de arriendo (r). Muestre que las tres son constantes en BGP.

3. Suponga ahora que hay un efecto externo a raíz del capital humano, que la decisión de acumulación de capital humano del individuo(a) no puede controlar pero que afecta al producto agregado de la siguiente manera,

$$Y(t) = K(t)^{\alpha}[Au(t)h(t)N(t)]^{1-\alpha}\overline{h}(t)^{\gamma}$$

Donde $\overline{h}$ es el nivel de capital humano promedio en esta economía. Suponiendo $A = 1$ y $\gamma > 0$, i.e., el capital humano tiene una externalidad positiva sobre el producto agregado. Asumiendo que los individuos del hogar ni las firmas toman en cuenta la externalidad, responda:

(a) Muestre que en el BGP las tasas de crecimiento de las variables per cápita se relacionan de la siguiente manera,

$$g_y = g_c = g_k = \left(\frac{1-\alpha+\gamma}{1-\alpha}\right) g_h$$

(b) Muestre que la expresión de g_h es constante.

Matemático III: Capital Humano 2

Consider the following endogenous growth model due to Uzawa and Lucas. The economy admits a representative household, and preferences are given by

$$\int_0^{\infty} exp(-\rho t)\frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$

Where $C(t)$ is consumption of the final good, which is produced as

$$Y(t) = AK(t)^{\alpha}H_P^{1-\alpha}(t)$$

where $K(t)$ is capital, $H(t)$ is human capital, and $H_P(t)$ denotes human capital used in production. The accumulation equations are

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

and

$$\dot{H}(t) = BH_E(t) - \delta H(t)$$

where $H_E(t)$ is human capital devoted to education (further human capital accumulation), and for simplicity the depreciation of human capital is assumed to be at the same rate δ as physical capital. The resource constraints of the economy are $I(t) + C(t) \leq Y(t)$, and $H_E(t) + H_P(t) \leq H(t)$.

(a) Interpret the second resource constraint.

(b) Denote the fraction of human capital allocated to production by $h(t)$ (so that $h(t) \equiv H_P(t)/H(t)$) and calculate the growth rate of final output as a function of $h(t)$ and the growth rates of accumulable factors.

(c) Assume that $h(t)$ is constant, and characterize the BGP of the economy (with constant interest rate and constant rate of growth for capital and output). Show that in this BGP, $r^* \equiv B - \delta$, and the growth rate of consumption, capital, human capital, and output are given by $g^* \equiv (B - \delta - \rho)/\theta$. Show also that there exists a unique value of $k^* \equiv K/H$ consistent with BGP.

(d) Determine the parameter restrictions to make sure that the transversality condition is satisfied.

(e) Analyze the transitional dynamics of the economy starting with K/H different from k^*. [Hint: look at the dynamics in three variables, $k \equiv K/H, \chi \equiv C/K$ and h, and consider the cases $\alpha < \theta$ and $\alpha \geq \theta$ separately.]