Profesor	: Eduardo Engel	Abril 4, 2023
Ayudantes	: Miguel Del Valle y Benjamín Peña	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2023	
Guía	: No. 1	
Entrega	: Lunes 10 de abril, antes de las 8am	

1. **Procesos estacionarios con muchos ceros**

   Los ε_t son i.i.d. $N(0,1)$ y $x_t = \varepsilon_t$ y $y_t = (-1)^t \varepsilon_t$. También tenemos una secuencia ξ_t de variables aleatorias independientes que toman los valores 0 y 1 con probabilidad 1/2. Los ξ también son independientes de los ε.

   (a) Muestre que los procesos x e y son débilmente estacionarios (y por lo tanto fuertemente estacionarios ya que son Gausianos).

   (b) Muestre que $z_t \equiv x_t + y_t$ *no* es débilmente estacionario.

   (c) Muestre que $u_t \equiv \xi_t \varepsilon_t$ es débilmente estacionario.

   (d) Las trayectorias de z y u tienen en común que aproximadamente la mitad de los valores son cero, sin embargo, u es stationary y z no. Explique en qué radica la diferencia fundamental entre estos procesos.

2. **Predicciones para un proceso AR(2)**

   Una serie económica trimestral, x_t, sigue un proceso AR(2) estacionario:

   $$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \varepsilon_t.$$

   Donde los ε son un ruido blanco de media nula y varianza σ^2. Las preguntas que siguen son motivadas por el interés de predecir la seria a seis meses plazo, es decir, a dos trimestres.

   (a) Determine $\mathrm{E}[x_{t+1}|x_t, x_{t-1}, ...]$.

   (b) Determine $\mathrm{E}[x_{t+2}|x_t, x_{t-1}, ...]$.

   (c) Denote mediante

   $$e_{2,t} = x_{t+2} - \mathrm{E}[x_{t+2}|x_t, x_{t-1}, ...]$$

   el error de predicción a dos períodos. Muestre que $e_{2,t}$ sigue un proceso MA(q) con q finito. Determine el valor de q.

   (d) Para mostrar que el resultado anterior es general, considere un proceso estacionario x_t que se puede escribir como una media movil infinita:

   $$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j},$$

   donde $\sum b_j^2 < \infty$. Repita las partes *a)*, *b)* y *c)* concluya que el error de predicción a dos pasos sigue un MA(q) con el mismo valor de q que obtuvo para el AR(2).

3. **Transmisión de innovaciones correlacionadas**

x_t y y_t siguen procesos estacionarios AR(1) con innovaciones ε_t^x y ε_t^y:

$$\begin{aligned} x_t &= a_x x_{t-1} + \varepsilon_t^x, \quad (1) \\ y_t &= a_y y_{t-1} + \varepsilon_t^y. \quad (2) \end{aligned}$$

Las varianzas de ε_t^x y ε_t^y se denotan $\sigma^2_{\varepsilon,x}$ y $\sigma^2_{\varepsilon,y}$, respectivamente, y la correlación entre las innovaciones *contemporaneas* es $\rho > 0$ mientras que las correlaciones de innovaciones no contemporaneas es cero:

$$\rho(\varepsilon_s^x, \varepsilon_t^y) = \begin{cases} \rho & \text{si } s = t, \\ \\ 0 & \text{si } s \neq t. \end{cases}$$

Encuentre la correlación entre x_t y y_t y muestre que es menor o igual que ρ, con igualdad si y solo si $a_x = a_y$. Discuta la intuición del resultado.

Indicación: Recuerde que la correlación entre dos variables aleatorias V y W se define como

$$\rho(V, W) \equiv \frac{\mathrm{Cov}(V, W)}{\sigma(V)\sigma(W)}, \quad (3)$$

donde $\mathrm{Cov}(V, W)$ denota la covarianza de V y W y $\sigma(V)$ y $\sigma(W)$ las desviaciones estándar correspondientes.

4. **Representación de Wold**

El proceso x_t satisface

$$x_t = \varepsilon_t - 3\varepsilon_{t-1}$$

donde ε_t es un ruido blanco Gaussiano con media nula y varianza igual a uno que captura los shocks de interés económico que determinan (causan) la serie de interés, x_t.

(a) Muestre que x_t es estacionario y encuentre la función de autocovarianza y de autocorrelación correspondientes.

(b) ¿Es x_t invertible? Justifique.

(c) Explique por qué la representación de Wold de x_t será de la forma

$$x_t^{\text{Wold}} = v_t - \frac{1}{3} v_{t-1},$$

donde v_t es un ruido blanco Gaussiano con media nula.

(d) Determine la varianza de los v_t. Compare con la varianza de los ε_t. Comente.

(e) En general hemos insistido en que x_t y x_t^{Wold} pueden ser procesos distintos. Explique por qué en este caso particular son iguales.

(f) Usted cuenta con datos $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}...$ y desea predecir x_{t+1} usando $\mathrm{E}_t x_{t+1}$. Obtenga una expresión para $\mathrm{E}_t x_{t+1}$ en función de los datos que tiene. Calcule el error cuadrático medio de estas proyecciones y compare con el que obtendría si observara los ε_t. Comente.

(g) Obtenga la función de respuesta al impulso unitario para x_t respecto de ε_t y de x_t respecto de v_t. Compare. Si son iguales, explique por qué. Si son distintas, ¿cuál es útil?