Macroeconomía
Examen Final

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Marcelo Gómez, Alberto Undurraga

Pregunta 1: La controversia de la convergencia (30 puntos)
Considere la información contenida en la Figura 1.

a. Explique utilizando la visión Neoclásica del crecimiento económico la diferencia en el crecimiento económico y en el nivel de PIB per cápita entre Filipinas y Estados Unidos. (10 puntos)

Solution: La visión neoclásica del crecimiento se basa en que los países alcanzan convergencia condicional. En este sentido, Filipinas y EEUU tienen la misma tasa de crecimiento tecnológico, pero distinto PIB per cápita de estado estacionario. Si están a la misma distancia de su EE, crecerán a la misma velocidad con distinto nivel de ingreso per cápita.

b. Explique de acuerdo a lo estudiado en clases por qué Romer desestimó la capacidad del modelo Neoclásico para explicar esta diferencia. (10 puntos)

Solution: Romer desestimó la explicación neoclásica puesto que los parámetros estructurales debían ser muy distintos. Por ejemplo, la tasa de ahorro de EEUU es 30 veces mayor que la de Filipinas.

c. Explique como un modelo de difusión tecnológica podría explicar esta situación. (10 puntos)

Solution: La difusión tecnológica es lenta. Los países que copian enfrentan los costos de imitar y eventualmente pueden alcanzar las tasas de crecimiento, pero no los niveles de crecimiento. Por ende, se quedan siempre niveles más atrás.

Pregunta 2: Un modelo de crecimiento con empleo (40 puntos)
Considere el model de crecimiento de Ramsey donde el consumidor representativo maximiza la siguiente función de utilidad:

$$\int_0^\infty \left[\log c_t - \theta \frac{h^{1+\eta}}{1+\eta}\right] e^{-\rho t} dt. \tag{1}$$

donde c corresponde al consumo y h horas de trabajo. Los trabajadores tienen una dotación de tiempo de trabajo de 1 por lo que $0 \leq h \leq 1$, y $h+l=1$. Donde l corresponde al ocio. Las horas trabajadas contribuyen a la producción a través de una tecnología Cobb-Douglas:

$$y = k^\alpha h^{1-\alpha}$$

y la acumulación de capital viene dada por:

$$\dot{k} = i - \delta k$$

a. Exprese el problema para el planificador central en esta economía, exprese el Hamiltoneano y obtenga las condiciones de optimalidad. (10 puntos)

Solution: El planificador central resuelve

$$\max \int_0^\infty \left[\log c_t - \theta \frac{h^{1+\eta}}{1+\eta}\right] e^{-\rho t} dt$$

sujeto a $\dot{k} = k^\alpha h^{1-\alpha} - c - \delta k$, eligiendo una trayectoria para c, h y k. Luego, el Hamiltoneano es

$$H = \log c_t - \theta \frac{h^{1+\eta}}{1+\eta} + \lambda(k^\alpha h^{1-\alpha} - c - \delta k)$$

Y las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \rightarrow \frac{1}{c} = \lambda \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 0 \rightarrow \theta h^\eta = \lambda(1-\alpha)k^\alpha h^{-\alpha} \tag{3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \rho\lambda - \dot{\lambda} \rightarrow \alpha\lambda k^{\alpha-1}h^{1-\alpha} - \delta\lambda = \rho\lambda - \dot{\lambda} \tag{4}$$

b. Exprese el consumo y el stock de capital en términos de unidades de empleo, y llámelas $\widehat{c}$ y $\widehat{k}$. Obtenga los niveles de estado estacionario. (10 puntos)

Solution: De 2 y 4 encontramos que

$$\frac{\dot{c}}{c} = \alpha k^{\alpha-1}h^{1-\alpha} - \delta - \rho. \tag{5}$$

Además, utilizando 2 y 3, podemos llegar a

$$\theta h^\eta = (1-\alpha)\frac{k^\alpha h^{-\alpha}}{c}, \tag{6}$$

de lo cual podemos llegar a

$$\theta h^{1+\eta} = (1-\alpha)\frac{\hat{k}^\alpha}{\hat{c}}. \tag{7}$$

Ahora, utilizando 5,

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{h}}{h} = \alpha k^{\alpha-1}h^{1-\alpha} - \delta - \rho - \frac{\dot{h}}{h}. \tag{8}$$

Por otro lado, de la dinámica del capital,

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{k}}{k} - \frac{\dot{h}}{h} = \hat{k}^{\alpha-1} - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - \delta - \frac{\dot{h}}{h}. \tag{9}$$

Por las características del problema, podemos ver que en estado estacionario $\dot{\hat{c}} = \dot{\hat{c}} = \dot{h} = 0$. Así, de 8:

$$\hat{k}^* = \left(\frac{\delta+\rho}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{10}$$

. Usando este resultado y la ecuación 9:

$$\hat{c}^* = \hat{k}^{*\alpha-1} - \delta, \tag{11}$$

donde $\hat{k}^*$ está dado por 10. Finalmente, de la ecuación 7:

$$h^* = \left(\frac{1-\alpha}{\theta}\frac{\hat{k}^{*\alpha}}{\hat{c}^*}\right). \tag{12}$$

c. Obtenga la expresión para $\frac{\dot{h}}{h}$ como función de $\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}$ y de $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}}$. Interprete dicha relación. (10 puntos)

Solution: De la ecuación 7 sacamos logaritmos, derivamos con respecto al tiempo y obtenemos

$$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{1}{1+\eta}\left(\alpha\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} - \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}}\right). \tag{13}$$

De esta forma, un aumento en el crecimiento del consumo afecta negativamente las horas trabajadas, pues más consumo disminuye la utilidad marginal de este y del trabajo. Por otro lado, más capital implica una mayor producción, lo cual aumenta la oferta por trabajo.

d. Usando las ecuaciones dinámicas de $\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}$, $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}}$ y $\frac{\dot{h}}{h}$, muestre que $\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\alpha}{\alpha+\eta}\left[\frac{\widehat{c}^*}{\widehat{k}^*} - \frac{\widehat{c}}{\widehat{k}}\right]$. (10 puntos)

Solution: Insertamos las ecuaciones 8 y 9 en la ecuación 13 y obtenemos

$$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\alpha}{1+\eta}\left[\hat{k}^{\alpha-1} - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - \delta - \frac{\dot{h}}{h}\right] - \frac{1}{1+\eta}\left[\alpha k^{\alpha-1}h^{1-\alpha} - \delta - \rho - \frac{\dot{h}}{h}\right],$$

de lo cual se puede despejar $\frac{\dot{h}}{h}$ para llegar a

$$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\alpha}{\alpha+\eta}\left(\frac{(1-\alpha)\delta}{\alpha} + \frac{\rho}{\alpha} - -\frac{\hat{c}}{\hat{k}}\right).$$

Pero sabemos de (b) que $\hat{c}^*/\hat{k}^* = (\delta+\rho)/\alpha - \delta$. Combinando esto con la ecuación anterior se llega a

$$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\alpha}{\alpha+\eta}\left[\frac{\widehat{c}^*}{\widehat{k}^*} - \frac{\widehat{c}}{\widehat{k}}\right].$$

Pregunta 3: Quasi modelo AK (30 puntos)
Suponga una variante del modelo neoclásico con preferencias en $t = 0$ dadas por

$$\int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}e^{-\rho t}dt. \tag{14}$$

Asuma que la población L es constante y el trabajo se ofrece de manera inelástica. A diferencia del modelo visto en clases, la función de producción viene dada por:

$$F(K,L) = A_K K + G(L,K), \tag{15}$$

donde G es una función diferenciable, homogénea de grado 1 y satisface las condiciones de Inada. Además, el capital se deprecia a una tasa δ, donde $A_K > \rho + \delta$. Los mercados del capital y del trabajo son competitivos.

a. ¿Es F una función de producción neoclásica? Discuta si cumple cada una de las condiciones. (7,5 puntos)

Solution:

- Rendimientos constantes a escala en capital y trabajo.

$$F(\lambda K, \lambda L) = A_K \lambda K + G(\lambda L, \lambda K) = A_K \lambda K + \lambda G(L, K) = \lambda F(K, L)$$

  Se cumple.

- Productividad marginal positiva y decreciente en cada insumo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} &= A_K + G_K(L, K) > 0 \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= G_L(L, K) > 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} &= G_{KK}(L, K) < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial L^2} &= G_{LL}(L, K) < 0 \end{aligned}$$

  Se cumple.

- Condiciones de Inada.

$$\begin{aligned} \lim_{K \to 0} \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) &= \infty \\ \lim_{K \to \infty} \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) &= A_K \\ \lim_{L \to 0} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) &= \infty \\ \lim_{L \to \infty} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) &= 0 \end{aligned}$$

  Por ende, no se cumple la segunda condición de Inada.

- Que los insumos sean esenciales viene de las condiciones anteriores, por ende, no se cumple.

b. Derive el sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza la evolución del capital y del consumo en el equilibrio descentralizado. Encuentre también el precio de los factores. (7,5 puntos)

Solution: El problema de maximización del hogar es el siguiente:

$$\max \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} e^{-\rho t} dt.$$
$$s.a \ \dot{a} = r a_t + w_t - c_t$$

Resolviendo el problema de optimzación queda,

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

La firma resuelve

$$\max \pi = A_K K + G(L,K) - (r+\delta)K - wL$$

Las CPO nos entregan

$$r = A_K + G_K(L,K) - \delta$$
$$G_L(L,K) = w$$

Tomando la CPO respecto a K y reemplazando en la ley de movimiento del consumo,

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[A_K + G_K(L,K) - \delta - \rho]$$

c. Derive el sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza la evolución del capital y del consumo en el equilibrio del planificador social. ¿Es igual a lo encontrado en la pregunta anterior? ¿Por qué? (7,5 puntos)

Solution: El Hamiltoniano del problema del planificador es,

$$H = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_t[A_K K_t + G(L_t, K_t) - c_t - \delta K_t]$$

Las CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = c_t^{-\theta} - \lambda_t = 0 \quad (16)$$
$$\frac{\partial H}{\partial K} = \lambda_t[A_K + G_K(L_t, K_t) - \delta] = \rho\lambda_t - \dot{\lambda}_t \quad (17)$$

Diferenciando en el tiempo la primera condición, luego, juntando con la segunda nos queda,

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}[A_K + G_K(L_t, K_t) - \delta - \rho]$$
$$\frac{\dot{K}}{K_t}d = A_K + \frac{G(L_t, K_t)}{K_t} - \frac{c_t}{K_t} - \delta$$

d. Muestre que esta economía genera crecimiento sostenido sin cambio tecnológico. Encuentre la tasa de crecimiento asintótica de esta economía. ¿Depende este crecimiento de G? Interprete. (7,5 puntos)

Solution: La tasa de crecimiento del consumo asintótica será, cuando $K \to \infty$,

$$\frac{\dot{c}}{c_t} = \frac{1}{\theta}[A_K - \delta - \rho]$$

Entonces, la tasa de crecimiento del consumo es constante.

La tasa de crecimiento del capital viene dada por,

$$\frac{\dot{K}}{K_t} = A_K + G(l) - \frac{c_t}{K_t} - \delta = \gamma$$

Asintóticamente,

$$\frac{\dot{K}}{K_t} = A_K - \frac{c_t}{K_t} - \delta$$

Podemos ver que asintóticamente, dado que los rendimientos constantes a escala producen que el capital siempre crezca en el tiempo, la producción neoclásica $G(l)$ tiende a cero. En el caso de la tasa de crecimiento del consumo, la condición de inada de G(,) también provoca que este no afecte asintóticamente.

Pregunta 4: Crecimiento endógeno (40 puntos)
Considere una variante del modelo de crecimiento de Romer donde el motor del crecimiento es el incremento en la variedad de productos intermedios. En este modelo, existen tres tipos de bienes: trabajo, ofrecido por los hogares; el bien final (numerario), que es utilizado en consumo e inversión; y productos intermedios, que se utilizan para producir el bien final. La población es constante e igual a L, los hogares son idénticos, viven para siempre y sus preferencias están dadas por:

$$\int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}e^{-\rho t}dt, \tag{18}$$

donde $c(t)$ denota la cantidad del bien final consumido en el período t. Cada hogar ofrece una unidad de trabajo por unidad de tiempo. Hogares trabajan en la industria del bien final.
La industria del bien final es perfectamente competitiva. La cantidad $Y(t)$ del bien final se produce utilizando trabajo y un continuo de bienes intermedios, definidos en el intervalo $[0, A(t)]$, según la función de producción

$$Y(t) = L(t)^{1-\alpha}\int_0^{A(t)} x_i(t)^\alpha di, \tag{19}$$

donde $x_i(t)$ denota la cantidad del bien intermedio i, $L(t)$ la cantidad de trabajo, $A(t)$ es la cantidad de variedades de productos y $0 < \alpha < 1$. El mercado del trabajo es perfectamente competitivo. Finalmente, $p_i(t)$ es el precio unitario del bien intermedio i y $w(t)$ es el salario.

a. Escriba la función de beneficios de la industria del bien final y compute la demanda por el producto intermedio i. (5 puntos)

Solution: La firma de bienes finales tiene una función de utilidad

$$Y(t) - w(t)L(t) - \int_0^{A(t)} p_i(t)x_i(t)^\alpha di.$$

Reemplazando $Y(t)$, tenemos que la condición de primer orden para un bien intermedio i es

$$L(t)^{1-\alpha}\alpha x_i(t)^{\alpha-1} = p_i(t)$$

lo cual nos determina la demanda. Específicamente, se demandará según

$$x_i(t) = \left(\frac{L(t)^{1-\alpha}\alpha}{p_i(t)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Los bienes intermedios son producidos con el bien final: una unidad del bien final produce una unidad del producto intermedio. Cada producto intermedio es producido por un monopolio. Los productores de bienes intermedios tienen un subsidio $s \in (0, 1)$ por cada unidad de producción del bien intermedio. Por lo tanto, su función de utilidad es igual a

$$\pi_i(t) = [p_i(t) + s]x_i(t) - x_i(t) \tag{20}$$

b. Encuentre la producción del bien intermedio i y demuestre que las utilidades del monopolista de este producto son iguales a (5 puntos):

$$\pi = \frac{1-\alpha}{\alpha}(1-s)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} L\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \tag{21}$$

Solution: Reemplazando la expresión que encontramos para el precio de i en función de $x(i)$, tenemos que el productor del bien intermedio debe maximizar

$$\max_{x_i(t)} \pi_i(t) = L^{1-\alpha}\alpha x_i(t)^{\alpha} + s x_i(t) - x_i(t),$$

donde la CPO es

$$x_i(t) = (1-s)^{\frac{1}{\alpha-1}} L\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}.$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de beneficios del bien intermedio obtenemos lo solicitado.

Asuma ahora que el número de nuevas variedades depende de la cantidad $R(t)$ del bien final utilizado en investigación:

$$\dot{A}(t) = \lambda R(t), \tag{22}$$

con $\lambda > 0$. Existe libre entrada al sector de la investigación, que es perfectamente competitivo. Si una firma inventa un bien intermedio nuevo, recibe una patente perpetua para este bien. Sea $V(t)$ el valor presente descontado de una innovación en el período t, responda las siguientes preguntas.

c. Asumiendo una tasa de interés constante r, encuentre $V(t)$ como función de π y de la tasa de interés. Además, escriba la condición de utilidades cero en el sector de la investigación (10 puntos).

Solution: El valor presente de una innovación en el período t es

$$V(t) = \int_t^{\infty} \pi e^{-r(\tau - t)} d\tau = \frac{\pi}{r},$$

que, notemos, es simplemente la perpetuidad de π.

Además, el sector de la investigación es de libre entrada, por lo que se debe dar que

$$V(t)\lambda R(t) = R(t).$$

En esta expresión el lado izquierdo es el valor de las variedades descubiertas en t multiplicada por su valor, y el lado derecho es su costo.

d. Con los resultados anteriores, encuentre la tasa de interés en función de λ, α, s y L. (5 puntos)

Solution: De la condición de libre entrada, tenemos que $V(t) = 1/\lambda$. Como sabemos que $V(t) = \pi/r$, podemos concluir que

$$r = \lambda\pi.$$

Reemplazando en la expresión que encontramos para π:

$$r = \lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}(1-s)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} L\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$$

Que es lo solicitado.

e. Utilizando la ecuación de Euler[1], determine la tasa de crecimiento del PIB en la senda estable de crecimiento. (5 puntos)

Solution: Lo primero es notar que el producto interno bruto es igual al output final menos el monto utilizado en la producción del bien intermedio. Sea $X(t)$ el total del bien final que se utilizó en bienes intermedios, tenemos que

$$PIB(t) = Y(t) - X(t) = C(t) + R(t)$$

Usando el valor de equilibrio $X(t) = xA(t)$ y la función de producción

$$Y(t) = L^{1-\alpha}A(t)^{1-\alpha}X(t)^{\alpha} = A(t)L^{1-\alpha}x^{\alpha}$$

donde el producto $Y(t)$, la producción de bienes intermedios $X(t)$ y el $PIB(t)$ crecen a la misma tasa que $A(t)$. En el BGP, el consumo y el gasto en investigación crecen a la misma tasa que $A(t)$. Por lo tanto, utilizando la ecuación de Euler y el valor de la tasa de interés, tenemos que la tasa de crecimiento del PIB es

$$g = \frac{\lambda\pi - \rho}{\sigma} = \frac{\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}(1-s)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}L\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} - \rho}{\sigma}.$$

Notemos que esta expresión equivale al crecimiento del consumo utilizando la tasa de interés de equilibrio.

f. Discuta cuál es el impacto de un subsidio a la demanda por bienes intermedio y de un subsidio la I+D en la tasa de crecimiento del producto. (10 puntos)

Solution: Ambos subsidios aumentan la tasa de crecimiento, pues aumentan los beneficios para los productores de bienes intermedios, ya sea a través del caso de la demanda o a la oferta. Así, aumenta el valor de las innovaciones, se innova más, y el crecimiento es mayor.

[1] Note que por el lado del consumidor no impusimos mayores cambios al modelo clÃ¡sico, por lo que al igual que el modelo visto en clases, tenemos que $\dot{c}/c = (r - \rho)/\theta$.

Figure 1
Testing for Convergence