SOLEMNE II – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: KEVIN SEPÚLVEDA - GIOVANNI VILLA

Pregunta 1

Considere un modelo bilateral uno-a-uno con dos grupos de agentes $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Suponga que las preferencias son estrictas y cada individuo $h \in A \cup B$ considera a todos los agentes del grupo contrario aceptables. Dados emparejamientos estables μ_1 y μ_2, considere el emparejamiento η que junta a cada $a \in A$ con su mejor alternativa entre $\mu_1(a)$ y $\mu_2(a)$. Demuestre que η es estable.

Respuesta. Como cada individuo considera a todos los agentes del otro grupo aceptables, nadie está interesado en bloquear un emparejamiento para quedarse solo. Suponga que existe $a \in A$ que quiere desviar de η para emparejarse con $b \in B$, pues $b \succ_a \eta(a)$. Como $\eta(a)$ es la mejor alternativa para a entre $\mu_1(a)$ y $\mu_2(a)$, al individuo a también le gustaría desviar de μ_i para emparejarse con b, con $i \in \{1, 2\}$. Así, la estabilidad de μ_1 y μ_2 implica que $\mu_1(b) \succ_b a$ y $\mu_2(b) \succ_b a$, lo cual nos asegura que $\eta(b) \succ_b a$. Por lo tanto, $b \succ_a \eta(a)$ implica que $\eta(b) \succ_b a$. Concluimos que η es estable, pues no hay pares que lo quieran bloquear. $\square$

Pregunta 2

Considere un mercado habitacional con un conjunto $P = \{p_1, \ldots, p_6\}$ de propietarios y un conjunto $E = \{e_1, \ldots, e_7\}$ de entrantes. Denote por $C = \{c_1, \ldots, c_{13}\}$ al conjunto de casas y asuma que c_i es propiedad de p_i, con $i \in \{1, \ldots, 6\}$. Cada individuo $h \in P \cup E$ tiene preferencias estrictas $\succ_h$ por las casas en C. En este contexto, una *asignación habitacional* es caracterizada por una función $\mu : P \cup E \to C$ que asocia a cada individuo una casa diferente.

Diremos que una asignación habitacional μ es *óptima* si cumple las siguientes condiciones:

- *Pareto eficiencia:* no es posible redistribuir las casas sin perjudicar a alguien. Esto es, no existe una asignación habitacional η tal que $\eta \neq \mu$ y $\eta(h) \succeq_h \mu(h)$ para todo $h \in P \cup E$.[1]
- *Estabilidad a desvíos de propietarios:* no es posible que un conjunto de propietarios mejore su situación al retirarse del mercado para redistribuir sus casas. Esto es, no existe $Q \subseteq P$ no-vacío y $f : Q \to \{c_h : h \in Q\}$ inyectiva tal que $f(h) \succ_h \mu(h)$ para todo $h \in Q$.

Demuestre que siempre existe una asignación habitacional óptima.

Respuesta. Vamos a probar que el algoritmo YRMH-IGYT (*"tu pides mi casa, yo tomo tu turno"*) genera una asignación habitacional óptima. Esto es, una asignación habitacional que es Pareto eficiente y estable a desvíos de propietarios. Supongamos que se aplica YRMH-IGYT siguiendo el orden de prioridad $\{p_1, \ldots, p_6, e_1, \ldots, e_7\}$.[2] Esto es, siguiendo ese orden de prioridad, se adjudica a cada individuo h la casa que más le gusta entre las que aún no han sido adjudicadas, a menos que esa casa no esté vacía y el turno de su propietario aún no haya llegado. Caso esto último ocurra, el propietario de esa casa escoge antes que el individuo h (toma su turno).

[1]Note que, como las preferencias son estrictas, esta es la definición usual de Pareto eficiencia. Además, como es costumbre en este contexto, $\eta(h) \succeq_h \mu(h)$ significa que $\eta(h) \succ_h \mu(h)$ ó $\eta(h) = \mu(h)$.

[2]La respuesta no depende del orden de prioridad que se escoja.

Este algoritmo lleva a una asignación habitacional $\overline{\mu}$ que coincide con la que se obtendría al embargar (temporalmente) las propiedades a los agentes en P y aplicar el algoritmo *serial dictatorship* a un orden de prioridad $\{p_{n1}, \ldots, p_{n6}, e_1, \ldots, e_7\}$, donde $\{p_{n1}, \ldots, p_{n6}\}$ es el reordenamiento de los propietarios que se obtiene endógenamente luego de considerar las nuevas prioridades determinadas durante la implementación del algoritmo YRMH-IGYT (si durante la implementacón del algoritmo se genera un ciclo entre propietarios, estos se ordenan secuencialmente, uno después del otro, de forma arbitraria).

Sabemos que el algoritmo *serial dictatorship*—o bien el algoritmo YRMH-IGYT—siempre induce un resultado Pareto eficiente (evidentemente, no se pierden puntos por dar detalles de la demostración de esta propiedad). Por lo tanto, $\overline{\mu}$ es eficiente.

Queda por probar que $\overline{\mu}$ es estable a desvíos de propietarios. Supongamos, por contradicción, que existe $Q \subseteq P$ no-vacío y $f : Q \to \{c_h : h \in Q\}$ inyectiva tal que $f(h) \succ_h \overline{\mu}(h)$ para todo $h \in Q$. Siguiendo el orden $\{p_{n1}, \ldots, p_{n6}\}$, sea p_{ni} el primer propietario que pertenece al grupo Q. Como $\overline{\mu}(p_{ni})$ es la mejor alternativa que p_{ni} tenía disponible al momento de elegir, para que $f(p_{ni}) \succ_{p_{ni}} \overline{\mu}(p_{ni})$, es necesario que $f(p_{ni}) \in \{c_{n1}, \ldots, c_{n(i-1)}\}$. Pero ninguna de esas propiedades pertenece a alguien en Q, una contradicción con el hecho que $f(p_{ni}) \in \{c_h : h \in Q\}$. $\square$

Pregunta 3

Considere una plataforma en la cual participan ocho pacientes, $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8\}$, los cuales necesitan un transplante de riñón. Los primeros seis pacientes entran a la plataforma acompañados de otra persona que está dispuesta a donar un riñón. Los pacientes tienen las siguientes preferencias

$\mathbf{t_1} : t_3 \succ t_4 \succ t_5 \succ c$ $\qquad$ $\mathbf{t_5} : t_1 \succ t_3 \succ t_2 \succ t_4 \succ t_5 \succ t_6 \succ c$

$\mathbf{t_2} : t_4 \succ t_5 \succ t_3 \succ c$ $\qquad$ $\mathbf{t_6} : t_4 \succ t_5 \succ t_3 \succ c$

$\mathbf{t_3} : t_4 \succ t_5 \succ t_2 \succ t_1 \succ t_3 \succ c$ $\qquad$ $\mathbf{t_7} : t_1 \succ t_2 \succ t_3 \succ t_4 \succ t_5 \succ c$

$\mathbf{t_4} : t_3 \succ t_5 \succ t_1 \succ t_2 \succ c$ $\qquad$ $\mathbf{t_8} : t_2 \succ t_3 \succ t_1 \succ t_4 \succ t_5 \succ c$

donde c denota la opción de ir a la lista de espera. Así, por ejemplo, el paciente t_6 prefiere recibir un riñón del donante que acompaña al paciente t_5 que del donante que acompaña al paciente t_3.

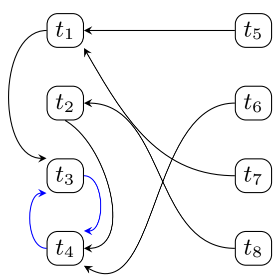
En este contexto, encuentre el emparejamiento que se obtiene al implementar el mecanismo TTCC (*Top Trading Cycles and Chains*) considerando la siguiente *regla de selección de cadenas*:

(i) Se da prioridad a las cadenas de mayor tamaño.

(ii) Entre cadenas del mismo tamaño, se da prioridad a la que empieza con el paciente de menor número.

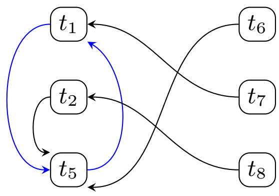
(iii) Si el primer paciente de una cadena implementada venía acompañado de un potencial donante, este último se mantiene disponible en la plataforma.

Respuesta. Aplicando el mecanismo TTCC:



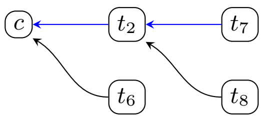
En la primera etapa se forma un ciclo entre t_3 y t_4.

Así, t_3 recibe un riñón del acompañante de t_4, mientras que t_4 recibe un órgano del donador que entra a la plataforma con t_3. Los cuatro salen de la plataforma y se pasa a la siguiente etapa.



En la segunda etapa se forma un ciclo entre t_1 y t_5.

Así, t_1 recibe un riñón del acompañante de t_5, mientras que t_5 recibe un órgano del donador que entra a la plataforma con t_1. Los cuatro salen de la plataforma y se pasa a la siguiente etapa.



En la tercera etapa no hay ciclos y se forman dos cadenas.

Siguiendo la normativa, se implementa la cadena $t_7 \to t_2 \to c$. Por lo tanto, t_7 recibe un riñón del acompañante de t_2, mientras que t_2 va a la lista de espera. Los tres salen de la plataforma.

Finalmente, en la última etapa, t_6 y t_8 deciden ir a la lista de espera, pues el único donante potencial que queda, aquel que entra a la plataforma con t_6, no es compatible con ninguno de los dos pacientes. $\square$

Pregunta 4

Considere una sociedad en la cual hay tres individuos y un conjunto $\{a_1, \ldots, a_m\}$ de alternativas sociales. Los individuos tienen preferencias estrictas por las alternativas sociales. Dado un perfil de preferencias $(\succ_1, \succ_2, \succ_3)$, diremos que a_i es *socialmente preferida* a a_j si $\#\{h \in \{1, 2, 3\} : a_i \succ_h a_j\} \geq 2$.

Sea f la regla de elección social que asocia a cada perfil de preferencias un conjunto de alternativas sociales siguiendo el *Método de Copeland*:

(i) Dadas las preferencias, cada alternativa es comparada con cada una de las otras.

(ii) Si a_i es *socialmente preferida* a a_j, entonces a_i recibe un punto.

(iii) Se escoge(n) la(s) alternativa(s) que haya(n) recibido más puntos.

En este contexto,

(a) Determine si f cumple la propiedad de *no-poder de veto*.

Respuesta. Dado un perfil de preferencias $(\succ_1, \succ_2, \succ_3)$, asuma que dos individuos consideran a la alternativa $a \in \{a_1, \ldots, a_m\}$ como la mejor de todas. Queremos probar que $a \in f(\succ_1, \succ_2, \succ_3)$. Como a es preferida a cualqueir otra alternativa por dos individuos, al aplicar el Método de Copeland, a recibe $m - 1$ puntos. Las otras, que participan en $m - 1$ comparaciones, pueden obtener como máximo $m - 2$ puntos. Por lo tanto, $f(\succ_1, \succ_2, \succ_3) = \{a\}$. $\square$

(b) Suponga que $m = 3$ y que las preferencias vienen dadas por

$$a_1 \succ_1 a_2 \succ_1 a_3, \qquad a_2 \succ_2 a_3 \succ_2 a_1, \qquad a_3 \succ_3 a_1 \succ_3 a_2.$$

Encuentre $f(\succ_1, \succ_2, \succ_3)$.

Respuesta. Note que la alternativa a_1 es socialmente preferida a a_2, la alternativa a_2 es socialmente preferida a a_3 y la alternativa a_3 es socialmente preferida a a_1. Por lo tanto, al aplicar el Método de Copeland, todas las alternativas reciben un punto. Esto es, $f(\succ_1, \succ_2, \succ_3) = \{a_1, a_2, a_3\}$. $\square$

(c) Determine si f es totalmente implementable en estrategias Nash.

Respuesta. Sigue del ítem (a) y del Teorema de Maskin que f es totalmente implementable en estrategias Nash si y solamente si f es Maskin monótona. Ahora, para el perfil de preferencias $(\succ_1, \succ_2, \succ_3)$ descrito en el ítem previo, sabemos que $a_2 \in f(\succ_1, \succ_2, \succ_3)$. Además, el perfil de preferencias $(\succ_1', \succ_2', \succ_3')$ caracterizado por

$$a_1 \succ_1' a_2 \succ_1' a_3, \qquad a_2 \succ_2' a_1 \succ_2' a_3, \qquad a_1 \succ_3' a_2 \succ_3' a_3,$$

cumple con la propiedad $\{b : a_2 \succ_i b\} \subseteq \{b : a_2 \succ_i' b\}$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Así, para que la monotonía Maskin sea satisfecha es necesario que $a_2 \in f(\succ_1', \succ_2', \succ_3')$. Pero esto no es verdad, pues $f(\succ_1', \succ_2', \succ_3') = \{a_1\}$. Concluimos que f no es totalmente implementable en estrategias Nash. $\square$