PAUTA CONTROL I – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2021

[1] Considere una economía de intercambio estática con m mercancías perfectamente divisibles y n consumidores. Cada consumidor $i \in \{1,\dots,n\}$ tiene preferencias representables por una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente cuasicóncava y sin máximos locales en $\mathbb{R}^m_+$. Además, cada $i \in \{1,\dots,n\}$ tiene una asignación inicial de recursos $w^i \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $w^i \neq (0,\dots,0)$ y $\sum_{k=1}^n w^k \gg 0$. Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{i \in \{1,\dots,n\} : \ w^i \gg 0\}, \\ \mathcal{B} &= \{i \in \{1,\dots,n\} : \ u^i \text{ es estrictamente creciente}\}. \end{aligned}$$

En este contexto, sabemos que existe un equilibrio Walrasiano cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones: $\mathcal{A} = \{1,\dots,n\}$ ó $\mathcal{B} = \{1,\dots,n\}$. Demuestre que existe un equilibrio Walrasiano cuando $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Normalice los precios en el conjunto $\Delta = \{z \in \mathbb{R}^m_+ : \sum_{l=1}^m p_l = 1\}$. Note que, todo individuo $h \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ tiene renta monetaria positiva a precios $p \in \Delta$ y podemos asegurar que $p \gg 0$ cuando su demanda Marshaliana $x^h(p)$ está bien definida. Por lo tanto, si asumimos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, la demostración de equilibrio debería seguir argumentos muy similares a los que fueron utilizados para probar la existencia de equilibrio cuando $\mathcal{B} = \{1,\dots,n\}$.

Efectivamente, si para cada $T \in \mathbb{N}$ definimos $w^{i,T} = w^i + W/T$ con $W = \sum_{k=1}^n w^k$, entonces la economía de intercambio $\mathcal{E}^T$ caracterizada por funciones de utilidad y asignaciones iniciales $(u^i, w^{i,T})_{i \in \{1,\dots,n\}}$ cumple con la condición $\mathcal{A} = \{1,\dots,n\}$. Por lo tanto, sigue del Teorema de Existencia de Equilibrio (caso (a)), que $\mathcal{E}^T$ tiene al menos un equilibrio competitivo $(p^T, (x^{i,T})_{i\in\{1,\dots,n\}}) \in \Delta \times [0,W]^n$. Como la secuencia $\{(p^T, (x^{i,T})_{i\in\{1,\dots,n\}})\}_{T\in\mathbb{N}}$ es limitada, tiene una subsecuencia convergente. Por lo tanto, salvo subsecuencia, existe $(\overline{p}, (\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}) \in \Delta \times [0,W]^n$ tal que $\lim_{n\to+\infty} p^T = \overline{p}$ y $\lim_{n\to+\infty} x^{T,i} = \overline{x}^i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. Es más, los mismos argumentos utilizados en la demostración del Teorema de Existencia de Equilibrio visto en clases (caso (b)), nos aseguran que

$$\overline{p}\cdot\overline{x}^i = \overline{p}\cdot w^i, \ \ \forall i \in \{1,\dots,n\}; \qquad \sum_{i=1}^n (\overline{x}^i - w^i) \leq 0, \qquad \overline{p}\cdot\sum_{i=1}^n (\overline{x}^i - w^i) = 0,$$

$$u^i(x^i) > u^i(\overline{x}^i) \implies \overline{p}\cdot x^i > \overline{p}\cdot w^i, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \text{ tal que } \overline{p}\cdot w^i > 0. \tag{1}$$

Por lo tanto, $(\overline{p}, (\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,n\}})$ es un equilibrio Walrasiano de la economía original cuando $\overline{p}\cdot w^i > 0$ para todo consumidor $i \in \{1,\dots,n\}$. Como $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, sabemos que existe un consumidor h con $\overline{p}\cdot w^h > 0$ y preferencias estrictamente monótonas. Las propiedades $\overline{p}\cdot w^h > 0$ y (1) nos aseguran que $\overline{x}^h$ es la demanda Marshaliana de h a precios $\overline{p}$. Así, como las preferencias de h son estrictamente monótonas, tenemos que $\overline{p} \gg 0$. Finalmente, como las asignaciones iniciales son vectores diferentes de cero, concluimos que $\overline{p}\cdot w^i > 0$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. □

[2] Considere una economía de intercambio estática con dos mercancías perfectamente divisibles y dos consumidores caracterizados por las siguientes funciones de utilidad y asignaciones iniciales:

$$u^1(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad w^1 = (1,\alpha); \qquad\qquad u^2(x,y) = \sqrt{y}, \qquad w^2 = (0,1).$$

donde $\alpha \geq 0$ es un parámetro dado. Determine los valores de α para los cuales la economía tiene al menos un equilibrio competitivo. Además, para cada $\alpha \geq 0$, encuentre la curva de contrato.

Si $\alpha = 0$, entonces no existe equilibrio. Efectivamente, como $h = 1$ tiene preferencias estrictamente monótonas, los precios de equilibrio deberían ser estrictamente positivos. Esto implica que $h = 1$ tendrá renta monetaria positiva y siempre demandará algo de la segunda mercancía (por la Condición de Inada). Por otro lado, como a $h = 2$ sólo le interesa consumir la segunda mercancía, independiente de los precios, siempre demandará su asignación inicial. Así, independiente de los precios, siempre habrá exceso de demanda por la segunda mercancía.

Si $\alpha > 0$, entonces existe equilibrio. Note que, como en el caso previo, cualquier candidato a precios de equilibrio $(\overline{p}_x, \overline{p}_y)$ debe ser un vector con coordenadas estrictamente positivas y el individuo $h = 2$ siempre demandará su asignación inicial de recursos. Por lo tanto, $(\overline{p}_x, \overline{p}_y)$ son precios de equilibrio si y solamente si la demanda Marshaliana de $h = 1$ coincide con su asignación inicial de recursos, lo cual implica que las condiciones de primer orden de su problema de maximización de utilidad deben cumplir:

$$\frac{1}{2} = \lambda \overline{p}_x, \qquad \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \lambda \overline{p}_y,$$

donde $\lambda > 0$ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria. Por lo tanto, $\overline{p}_x/\overline{p}_y = \sqrt{\alpha}$. Normalizando $\overline{p}_x + \overline{p}_y = 1$, concluimos que los precios de equilibrio vienen dados por

$$(\overline{p}_x, \overline{p}_y) = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\right).$$ [1]

Fije $\alpha \geq 0$. Como $h = 1$ es el único que se interesa por la primera mercancía, en cualquier distribución de recursos Pareto eficiente $((x^1, y^1), (x^2, y^2))$ debemos tener que $(x^1, x^2) = (1, 0)$, pues caso contrario podríamos transferir cantidades de la primera mercancía del segundo al primer individuo, lo cual no afectaría el bienestar de $h = 2$ y mejoraría la situación de $h = 1$. Como $h = 1$ recibirá toda la oferta de la primera mercancía, no hay forma de compensar perdidas de la segunda mercancía con incrementos en la cantidad de la primera. Esto nos asegura que cualquier distribución de la oferta de la segunda mercancía entre los dos individuos será eficiente. Por lo tanto, la *curva de contrato* es caracterizada por las asignaciones $((x^1, y^1), (x^2, y^2)) = ((1, \beta), (0, 1 + \alpha - \beta))$, donde $\beta \in [0, 1 + \alpha]$. $\square$

[3] Considere una economía de intercambio estática con m mercancías perfectamente divisibles y n consumidores. Cada consumidor $i \in \{1, \ldots, n\}$ tiene una asignación inicial de recursos $w^i \in \mathbb{R}^m_{++}$ y preferencias representables por una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ continua y sin máximos locales en $\mathbb{R}^m_+$. Asuma que las siguientes propiedades se cumplen para cada par de canastas $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $y = (y_1, \ldots, y_m)$ en $\mathbb{R}^m_+$:

(i) Para cada mercancía $l \in \{1, \ldots, m\}$, existe al menos un consumidor $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $u^i(x) > u^i(y)$ si y solamente si $x_l > y_l$. Además, las preferencias de cada consumidor cumplen esta propiedad para alguna mercancía.

(ii) Para cada consumidor $i \in \{1, \ldots, n\}$, si $u^i(x) > u^i(y)$, entonces $u^i(\lambda x + (1-\lambda)y) > u^i(y)$ para todo $\lambda \in (0, 1)$.

Demuestre la existencia y la unicidad del equilibrio competitivo (salvo normalización de precios).

Existencia: Si las funciones de utilidad fueran estrictamente cuasicóncavas, la existencia de equilibrio sería una consecuencia directa del Teorema de Existencia de Equilibrio (caso (a)). Sin embargo, aunque esto no es verdad, la condición (ii) del enunciado nos asegura podemos seguir probando que toda canasta que es óptima en el *conjunto presupuestario truncado* también es óptima en el *conjunto presupuestario original*. Y esta es la única parte de la demostración "clásica" de equilibrio en la cual se apela a la cuasiconcavidad estricta de las funciones de utilidad.

Unicidad. Vamos a probar que la función exceso de demanda de la economía satisface la propiedad de *sustitutos brutos*. Note que la condición (i) del enunciado nos asegura que podemos particionar el conjunto de agentes $\{1, \ldots, n\}$ en una familia de conjuntos $H_1, \ldots, H_m$, no-vacíos y disjuntos, tales que $\{1, \ldots, n\} = H_1 \cup \cdots \cup H_m$ y cada agente en H_l gasta toda su renta monetaria en el consumo de la mercancía l. Así, la demanda Marshaliana del agente $h \in H_l$ viene dada por $x^h(p) = (p \cdot w^h/p_l)\vec{e}_l$, donde $\vec{e}_l$ es el l-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^m$. Esto implica que el exceso de demanda por la mercancía l viene dado por $z_l(p) = \sum_{h \in H_l} p \cdot w^h/p_l - \sum_{k=1}^n w^k_l$. Como $w^h \gg 0$ para todo $h \in \{1, \ldots, n\}$, concluimos que $z_l(p)$ es estrictamente creciente en p_k, con $k \neq l$. $\square$

---

[1] Una alternativa para probar la existencia de equilibrio es utilizar el resultado del Ejercicio [1], pues cuando $\alpha > 0$ tenemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{1\}$. Sin embargo, como $u^2(x, y) = \sqrt{y}$ no es estrictamente cuasicóncava, si se optaba por seguir esta estrategia era clave hacer notar que en la única parte de la demostración de equilibrio donde se usa la cuasiconcavidad estricta de las funciones de utilidad es cuando se prueba que la canasta que es óptima en el conjunto presupuestario truncado también es óptima en el conjunto presupuestario original. Pero para hacer este argumento es suficiente que la función de utilidad cumpla la siguiente propiedad: si $u(\tilde{x}, \tilde{y}) > u(x, y)$, entonces $u(\lambda(\tilde{x}, \tilde{y}) + (1-\lambda)(x, y)) > u(x, y)$ para todo $\lambda \in (0, 1)$. Y esto último lo cumple la función $u^2(x, y) = \sqrt{y}$.