CONTROL IV – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: MARTÍN FERRARI - CATALINA GÓMEZ

Pregunta 1

Considere el modelo de emparejamiento unilateral en el cual un número finito de individuos pueden intercambiar objetos indivisibles (por ejemplo, casas). Cada individuo posee un único objeto y tiene preferencias estrictas por los objetos en el mercado. En este contexto, encuentre un algoritmo que implemente asignaciones en el núcleo y sea compatible con incentivos.

Asumamos que hay n individuos con preferencias estrictas por n objetos, denotados por $w_1, \ldots, w_n$. Para simplificar notación, vamos a suponer que el individuo i es el propietario del objeto w_i. Sabemos que el algoritmo conocido como *top trading cycle* (TTC) implementa asignaciones en el núcleo y es compatible con incentivos. Por esta razón, vamos a describirlo y a demostrar que cumple con estas propiedades.

En la primera etapa del TTC cada individuo anuncia al agente que posee el objeto que él más desea. Esto hace que se genere al menos un ciclo: un grupo ordenado de individuos $(i_1, \ldots, i_k)$, con $k \geq 1$, donde cada i_j ha anunciado a i_{j+1} (módulo k).[1,2] Los ciclos generados se implementan: se entrega a cada agente que participa del ciclo el objeto que es propiedad del individuo que él anunció, retirando del mercado a todos los involucrados en este intercambio (agentes y objetos). En la segunda etapa del TTC cada individuo que aún está en el mercado anuncia al agente que posee el objeto que él más desea *entre aquellos que se mantienen en el mercado*. Luego de esto, los ciclos generados se implementan. Se continua con este proceso mientras existan agentes en el mercado. Como en cada etapa se genera al menos un ciclo, la implementación del algoritmo de extiende por a lo más n etapas.

Para probar que este proceso lleva a una asignación en el núcleo, vamos a suponer (por contradicción) que existe un conjunto S de individuos que pueden mejorar su situación saliendo del mercado antes de la implementación del TTC, con el objetivo de redistribuir entre ellos sus asignaciones iniciales. Note que, luego de esta redistribución de asignaciones iniciales, debe haber al menos un agente en S con algo mejor que lo que obtendría si se aplica TTC. Entre todos los individuos de S que están en esta situación, denote por h a alguno de los que saldría primero del mercado si se aplicara TTC y denote por A_k al conjunto de individuos que saldrían del mercado en la etapa k del TTC. Entonces, por definición, existe una etapa r tal que $h \in A_r$ y al salir del mercado con los otros individuos en S obtiene uno de los objetos que originalmente tienen los agentes en $\bigcup_{k<r} A_k$. Pero eso significa que $S \cap \left(\bigcup_{k<r} A_k\right) \neq \emptyset$. Esto es, h no está entre los primeros individuos de S que saldrían del mercado si se aplicara TTC. Una contradicción. Concluimos que ninguna coalición de individuos puede mejorar su situación abandonando del mercado. Esto es, el resultado de la implementación del *Top Trading Cycle* es una asignación que está en el núcleo.

---

[1] Recuerde que "módulo k" significa que i_k anuncia a i_1.

[2] *Siempre se genera al menos un ciclo.* Si un individuo i considera w_i como el objeto que él más desea, se forma el ciclo (i). Alternativamente, cuando ningún individuo se anuncia a si mismo, el individuo 1 anuncia a un individuo $h_2 \neq i$, quien anuncia a h_3 y así sucesivamente. Mientras $h_{k+1} \notin \{1, h_2, \ldots, h_k\}$ no se formará un ciclo. Pero eso es imposible que se cumpla siempre, pues hay n individuos. Esto es, $h_{n+1} \in \{1, h_2, \ldots, h_n\}$.

Para probar que TTC es compatible con incentivos, tenemos que asegurar que ningún individuo se puede beneficiar reportando preferencias falsas si sabe que los otros individuos no mentirán sobre sus gustos. Note que, el único objetivo que un individuo $i \in A_k$ tiene para mentir sobre sus preferencias es el obtener alguno de los objetos en $A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$. Pero si los otros no mienten, i no participará de ningún ciclo antes de la etapa k, por lo cual no tendrá acceso a ninguno de los objetos que le hubiese gustado tener luego de ver el resultado de TTC. Esto es, mintiendo no gana nada (y puede perder, si deja de participar en un ciclo en la etapa k). Por lo tanto, el algoritmo *Top Trading Cycle* es compatible con incentivos. □

PREGUNTA 2

Asumiendo preferencias estrictas, describa una forma de encontrar todas las distribuciones eficientes de casas en un mercado habitacional en el cual hay propietarios y entrantes. Además, de un ejemplo de su metodología en un mercado con tres casas, dos entrantes y un propietario.

Note que, la identidad de los propietarios y las características de las casas que ellos tienen es irrelevante al momento de evaluar la eficiencia de una distribución de inmuebles, pues lo único importante es que no exista una forma de redistribuirlos que mejore a algunos sin perjudicar a nadie. Esto es, una distribución eficiente de casas puede dejar a un propietario peor de lo que él estaba originalmente. Dicho técnicamente: una distribución eficiente puede no ser *individualmente racional*. El argumento anterior nos permite ignorar la información sobre quienes son propietarios y cuales son sus casas.

Sabemos que en un mercado sin propietarios una forma de encontrar una distribución eficiente es determinar un orden de prioridad para los individuos $\{i_1, \ldots, i_n\}$ y aplicar el algoritmo *serial dictatorship*: el individuo i_1 escoge su casa preferida y cada agente i_k, con $k \geq 2$, escoge en la k-ésima etapa la casa que más le gusta entre aquellas que quedan disponibles luego de la elecciones hechas por los individuos $\{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$. Es más, variando el orden de prioridad de los individuos podemos encontrar todas las asignaciones eficientes.

Por ejemplo, considere un mercado con tres casas $\{c_1, c_2, c_3\}$, dos entrantes $\{h_1, h_2\}$ y un agente h_3 que es propietario de la casa c_3. Además, asuma que las preferencias de los individuos vienen dadas por

$$c_3 \succ_1 c_2 \succ_1 c_1, \qquad c_2 \succ_2 c_3 \succ_2 c_1, \qquad c_2 \succ_3 c_3 \succ_3 c_1.$$

En este contexto, si denotamos por $\Omega(i,j)$ a la distribución de casas que se obtiene al aplicar *serial dictatorship* siguiendo el orden que posiciona a h_i en el primer lugar y a h_j en segundo lugar, tenemos que:

$$\Omega(1,2) = (c_3, c_2, c_1); \qquad \Omega(1,3) = (c_3, c_1, c_2); \qquad \Omega(2,1) = (c_3, c_2, c_1);$$

$$\Omega(2,3) = (c_1, c_2, c_3); \qquad \Omega(3,1) = (c_3, c_1, c_2); \qquad \Omega(3,2) = (c_1, c_3, c_2).$$

Así, las distribuciones eficientes de casas son $\{(c_3, c_1, c_2); (c_3, c_2, c_1); (c_1, c_2, c_3); (c_1, c_3, c_2)\}$.[3] □

[3]Note que la distribución eficiente (c_3, c_2, c_1) deja al individuo h_3 en una situación peor que la que él tenía originalmente. Así, en este ejemplo, no todas las distribuciones eficientes son individualmente racionales. Esto genera una pregunta natural: ¿existe una forma de encontrar las asignaciones eficientes e individualmente racionales?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa y pasa por aplicar el algoritmo *You request my house, I get your turn* (YRMH-IGYT) a los diferentes ordenes de prioridad de los individuos. Recuerde que este algoritmo aplica *serial dictatorship* pero respetando los derechos de los propietarios frente a intentos de los entrantes de llevarse sus casas: se determina un orden en el cual los individuos podrán solicitar inmuebles y siguiendo ese orden se van adjudicando las casas (cada uno pidiendo la aquella que más le gusta entre las que aún están disponibles). Sin embargo, si un entrante i solicita la casa de un propietario j que aún no ha tenido turno de escoger, j toma el turno de i (pudiendo solicitar su propia casa). Si durante este proceso se generan ciclos, estos se implementan.

Pregunta 3 (20 puntos)

En el contexto de problemas de Elección de Colegios, describa el mecanismo de Boston y demuestre que es inestable e incompatible con incentivos.

Hay C colegios y E estudiantes. Cada colegio $c \in \{1, \dots, C\}$ ofrece $q_c \geq 1$ cupos y tiene ordenes de prioridad (estrictos) sobre el conjunto de estudiantes, pudiendo considerar a algunos inadmisibles (i.e., prefiere dejar cupos vacíos a aceptarlos). Cada estudiante $e \in \{1, \dots, E\}$ tiene preferencias estrictas por los colegios, pudiendo considerar a algunos inaceptables (i.e., prefiere no estudiar a inscribirse en ellos). En este contexto, el *mecanismo de Boston* asigna estudiantes a colegios a través del siguiente algoritmo:

- En la primera etapa, cada estudiante postula a su colegio preferido. Cada colegio acepta las postulaciones de estudiantes admisibles siguiendo el orden de prioridad y mientras tenga cupos. Los colegios que llenan sus cupos, abandonan el mercado.
- En la k-ésima etapa, cada estudiante que aún no está inscrito en un colegio postula a la institución aceptable que más le gusta entre aquellas que aún tienen cupos. Cada colegio acepta las postulaciones de los estudiantes admisibles siguiendo el orden de prioridad y mientras tenga cupos. Los colegios que llenan sus cupos, abandonan el mercado.
- El algoritmo termina cuando cada estudiante está inscrito en algún colegio o ha postulado a todos sus colegios aceptables.

Este mecanismo puede generar resultados inestables, pues un colegio c puede no conseguir admitir a un estudiante e al cual le daba prioridad alta, pues e se quedó sin cupos en c por haber postulado en las primeras etapas del mecanismo de Boston a colegios que no lo consideraban prioritario. Esta inestabilidad puede llevar a que e tenga incentivos para no reportar sus verdaderas preferencias si sabe que los otros estudiantes no mienten (incompatibilidad de incentivos).

Sabemos que YRMH-IGYT siempre genera resultados eficientes e individualmente racionales. Por otro lado, suponga que hay un conjunto N de individuos. Dada una distribución eficiente e individualmente racional de casas $\{c_i\}_{i \in N}$, afirmamos que siempre hay una forma de ordenar a los agentes de tal forma que al implementar YRMH-IGYT se obtiene $\{c_i\}_{i \in N}$. Para demostrar esto, note que cuando se distribuyen las casas siguiendo $\{c_i\}_{i \in N}$ el conjunto $N_1 \subseteq N$ de individuos que reciben la propiedad que más les gusta es diferente de vacío. Efectivamente, caso contrario todos podrían anunciar su mejor opción y se generaría al menos un ciclo, el cual al ser implementado induciría una redistribución de casas que dominaría en en sentido de Pareto a $\{c_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$, contradiciendo la eficiencia de esta última. Análogamente, dado $k \geq 2$, si $N_1 \cup \cdots \cup N_{k-1} \neq N$, entonces el conjunto $N_k \subseteq N \setminus (N_1 \cup \cdots \cup N_{k-1})$ de individuos que reciben la propiedad que más les gusta entre aquellas en $\{c_i\}_{i \in N \setminus (N_1 \cup \cdots \cup N_{k-1})}$ es diferente de vacío. Ordenemos a los individuos poniendo primero a los que están en N_1 (siguiendo cualquier orden entre ellos), luego a los que están en N_2 y así sucesivamente (hasta terminar con los individuos que están en el último conjunto N_k que es diferente de vacío). Si implementamos YRMH-IGYT siguiendo este orden obtendremos como resultado la distribución $\{c_i\}_{i \in N}$.

Por ejemplo, considere un mercado con tres casas $\{c_1, c_2, c_3\}$, dos entrantes $\{h_1, h_2\}$ y un agente h_3 que es propietario de la casa c_3. Además, asuma que las preferencias de los individuos vienen dadas por

$$c_3 \succ_1 c_2 \succ_1 c_1, \qquad c_2 \succ_2 c_3 \succ_2 c_1, \qquad c_2 \succ_3 c_3 \succ_3 c_1.$$

Si denotamos por $\Omega(i,j)$ a la distribución de casas que se obtiene al aplicar el algoritmo YRMH-IGYT siguiendo el orden que posiciona a h_i en el primer lugar y a h_j en segundo lugar, tenemos que:

$$\Omega(1,2) = (c_3, c_1, c_2); \qquad \Omega(1,3) = (c_3, c_1, c_2); \qquad \Omega(2,1) = (c_1, c_2, c_3);$$

$$\Omega(2,3) = (c_1, c_2, c_3); \qquad \Omega(3,1) = (c_3, c_1, c_2); \qquad \Omega(3,2) = (c_1, c_3, c_2).$$

Así, las distribuciones eficientes e individualmente racionales son $\{(c_3, c_1, c_2); (c_1, c_2, c_3); (c_1, c_3, c_2)\}$ (compare con el resultado obtenido en la respuesta de la Pregunta 2).

Para demostrar que estas situaciones pueden ocurrir al aplicar el mecanismo de Boston es suficiente dar un ejemplo de un problema de Elección de Colegios en el cual el resultado del algoritmo descrito arriba es inestable e incompatible con incentivos. Así, suponga que hay tres colegios y tres estudiantes. Cada colegio ofrece un cupo. Los ordenes de prioridad de los colegios y las preferencias de los estudiantes son:

$$e_1 \succ_{c_1} e_2 \succ_{c_1} e_3, \qquad e_2 \succ_{c_2} e_3 \succ_{c_2} e_1, \qquad e_2 \succ_{c_3} e_3 \succ_{c_3} e_1,$$

$$c_1 \succ_{e_1} c_2 \succ_{e_1} c_3, \qquad c_1 \succ_{e_2} c_2 \succ_{e_2} c_3 \qquad c_2 \succ_{e_3} c_1 \succ_{e_3} c_3.$$

Al aplicar el mecanismo de Boston, en la primera etapa los estudiantes e_1 y e_2 postulan al colegio c_1, mientras que e_3 postula a c_2. Así, c_1 acepta a e_1 y c_2 acepta a e_3. Ambos colegios llenan sus cupos, por lo cual salen del mercado. En la segunda etapa, e_2 postula y es aceptado por c_3. Note que la asignación obtenida, $((c_1, e_1), (c_2, e_3), (c_3, e_2))$, es inestable pues el colegio c_2 preferiría haber aceptado al estudiante e_2, quien a su vez preferiría estar en este colegio que en c_3. Es más, si un planificador central pidiera a los estudiantes reportar sus preferencias para luego implementar el mecanismo de Boston, e_2 tendría incentivos a mentir cuando los otros reportan las verdaderas preferencias. Efectivamente, si e_1 y e_3 no mienten y e_2 reporta que $c_2 \succ c_1 \succ c_3$, se obtiene la asignación $((c_1, e_1), (c_2, e_2), (c_3, e_3))$, la cual deja a e_2 en una situación mejor que la que tendría al decir la verdad. $\square$