# Tarea 3
# Microeconomía I

**Profesora**: Adriana Piazza
**Ayudantes**: Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

## Otoño 2021

1. **Economía forestal** (2 puntos)

   Considere el modelo de una plantación forestal visto en clases:

   - La plantación se compone de una sola especie forestal que vive exactamente $N$ años.
   - Los coeficientes de biomasa $b_i, i = 1, \ldots, N$, $b \geq 0$ indican el volumen de madera contenido en una hectárea cubierta por árboles de edad $i = 1, \ldots, N$.

   Agregaremos dos supuestos (con respecto al modelo visto en clases):

   - La superficie disponible de tierra es exactamente igual a $S$.
   - La tierra está completamente cubierta de árboles.

   Recuerde que la tierra es perfectamente divisible.

   *a*) Encuentre el conjunto de posibilidades de producción ($Y$).

   *b*) Indique cuales de las siguientes propiedades son satisfechas por $Y$ (Justifique).

      1) No free lunch
      2) Posibilidad de inacción
      3) Free disposal
      4) Rendimientos crecientes a escala? Decrecientes a escala?
      5) Convexidad
      6) Aditividad

   *c*) A partir de ahora asumimos que el valor de $S$ es variable.

   Suponga que el único costo de producción es el arriendo de la tierra y que el mismo es de $\$w$/hectárea cada año. La tasa de interés es $r$. Resuelva el problema de minimización del costo de producción si se requiere producir un volumen de madera igual a $q$. [1]

   *d*) ¿Qué superficie de tierra necesita para producir exactamente un volumen de madera igual a $q$ *todos* los años? Describa su plantación en un año cualquiera.

2. (1 punto) Considere una firma que produce un único producto $y$ a partir de un único insumo $z$ y cuyo conjunto de posibilidades de producción viene dado por: $y \leq 0$ si el insumo $z \in [0, 1]$ y $y \leq \ln(z)$ si $z \geq 1$. [2]

   *a*) Calcule la función de beneficio $\pi(p, w)$. ¿Cuál es el beneficio máximo cuando $p = w/2$?

   *b*) Verifique que se cumple el Lema de Hotelling.

3. (1 punto) Considere una firma que produce un único producto. Demuestre matemáticamente que si la firma maximiza utilidades, está minimizando costos.

[1] Sugerencia: Tenga en cuenta que para producir una hectárea de árboles de edad $i$ necesitará arrendar la tierra durante $i$ años (anteriores al momento de cosechar). Por ejemplo, para cosechar una hectárea de árboles de edad 2, el costo de producción sería $w \cdot (1 + \frac{1}{\delta})$ con $\delta = \frac{1}{1+r}$.

[2] En este ejercicio el insumo está considerado como no-negativo.

4. (1 punto) Una firma tiene dos plantas que producen el mismo producto único. La función de producción de la primera planta es $f_1(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ y la función de producción de la segunda planta es $f_2(x_1, x_2) = x_1^b x_2^{1-b}$. Demuestre que el costo mínimo para producir $q$ unidades es

$$c(w_1, w_2) = \text{mín}\left\{\left[\left(\frac{a}{1-a}\right)^{1-a} + \left(\frac{1-a}{a}\right)^{a}\right] w_1^a w_2^{1-a} q, \left[\left(\frac{b}{1-b}\right)^{1-b} + \left(\frac{1-b}{b}\right)^{b}\right] w_1^b w_2^{1-b} q\right\}.$$

5. (1 punto) Dado un conjunto productivo $Y$, se dice que un plan de producción $y \in Y$ es *débilmente eficiente* si no existe $y' \in Y$ que cumpla $y' >> y$. Por ejemplo, en la Figura 1 se muestra el punto $y$ que es *débilmente* eficiente (aunque no es eficiente en el sentido usual).

   Asumiendo que $Y$ es convexo, demuestre que si $y \in Y$ es débilmente eficiente entonces $y$ es maximizador de utilidades para algún precio $p \geq 0$.

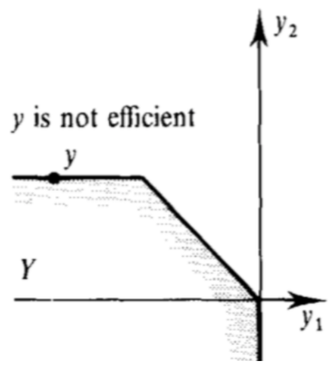


Figura 1: $y$ es débilmente eficiente