Universidad de Chile — Facultad de Economía y Negocios.

Macroeconomía I
Otoño 2020
Guía Nº5

Profesor: Eduardo Engel
Ayudantes: Catalina Gómez & Martín Ferrari

JULIÁN GARCÍA SANHUEZA
18.623.192-9

1 Comentes

(a) En el modelo clasico keynesiano no se cumple la Equivalencia Ricardiana

Respuesta: Verdadero. Bajo el modelo de Keynes la demanda agregada no depende del nivel de la deuda y sí depende negativamente del nivel de impuestos. Esto se debe a que un aumento del nivel de los impuestos disminuye el ingreso disponible de los hogares y finalmente el consumo agregado. Luego, un incremento del gasto financiado vía deuda siempre será preferido a un incremento del gasto financiado por impuestos. De manera formal, la ecuación de consumo de Keynes se escribe como:

$$C(Y, T, TR) = C(Y_d \equiv Y - T + TR)$$

De donde lo explicado se resume como $C_T(Y, T, TR) < 0$.

(b) El resultado de suavizamiento de impuestos de Barro explica por que los gobiernos financian las guerras mediante deuda y no subiendo los impuestos.

Respuesta: Verdadero. En efecto, el resultado de Barro muestra que no existen cambios no predecibles sobre el nivel de carga tributaria. Por lo tanto, será óptimo fijar una regla de carga tributaria constante o fija. De esta manera, cambios inesperados al gasto público, como por ejemplo una guerra, deberán ser financiados vía deuda de modo de alterar al mínimo la suavización. Más allá, bajo el mismo resultado de Barro, esta deuda será suavizada en el tiempo mediante una trayectoria de carga tributaria constante.

2 Tax Smoothing

Supuestos:

- Modelo de Tax-Smoothing de Barro en tiempo continuo
- Tasa real r constante e ingreso Y constante.
- Guerra entre 0 y τ por lo que gobierno gasta entre 0 y τ G_H mientras que luego de la guerra gasta G_L donde $G_H > G_L$

(a) What are the paths of taxes $T(t)$ and government debt outstanding, $D(t)$? Find explicit expressions for these paths and graph them. (**Hint:** For the debt path, focus on the evolution of debt for $t\tau$ and $t > \tau$ and find an expression for each case.)

Respuesta: Dado que la trayectoria de $G = \{G_H, G_L\}$ e Y son conocidas es posible asumir que nos encontramos en el *Tax Smoothing under Certainy* por lo que el problema del gobierno corresponde a :

$$\min_{T_0, T_1, \cdots} \quad \int_{t=0}^{\infty} e^{-rt} Y(t) f\left(\frac{T(t)}{Y(t)}\right) dt$$
$$\text{s.t.} \int_0^{\infty} e^{-rt} T(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-rt} G(t) dt$$

Por analogía con el problema del consumidor el óptimo de carga tributaria viene dado por la ecuación de Euler, es decir:

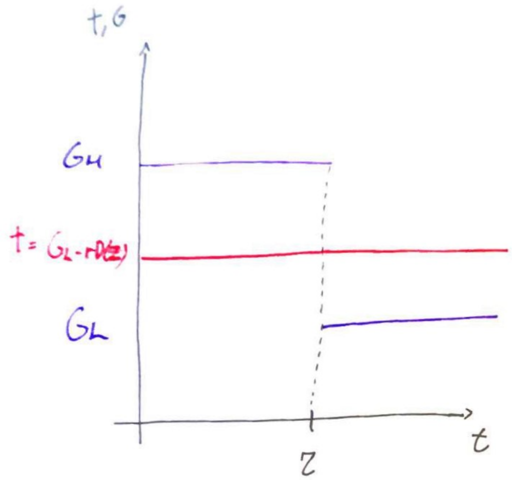
$$f'\left(\frac{T(t)}{G(t)}\right) = \alpha$$

Donde α es una constante que depende de r. Por tanto, existe un único valor de $T(t)/G(t)$ tal que cumple con la condición. Lo anterior implica que debe haber una regla de suavización de la carga tributaria tal que $T(t)/Y(t)$ es una constante tal que al evaluarse en la derivada nos da α. Aplicando supuestos, tenemos que la restricción presupuestaria del gobierno nos queda:

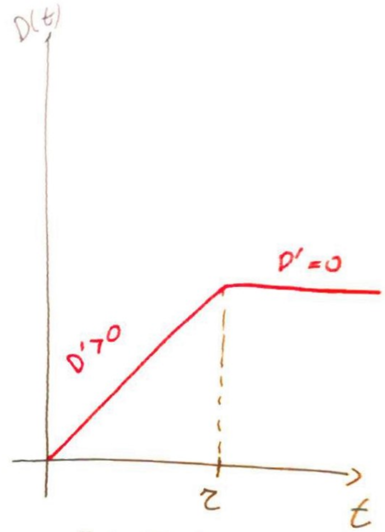
$$\int_0^{\infty} e^{-rt} T^* dt = \int_0^{\infty} e^{-rt} G(t) dt$$
$$T^* \int_0^{\infty} e^{-rt} dt = G_H \int_0^{\tau} e^{-rt} dt + G_L \int_{\tau}^{\infty} e^{-rt} dt = G_H e^{-r\tau} \; G_L e^{-r\tau} + G_H$$
$$T^* \int_0^{\infty} e^{-rt} dt < G_H \int_0^{\tau} e^{-rt} dt + G_H \int_{\tau}^{\infty} e^{-rt} dt$$
$$T^* \int_0^{\infty} e^{-rt} dt < G_H \int_0^{\infty} e^{-rt} dt$$
$$T^* < G_H$$

Donde el tercer paso usamos el hecho que $G_H > G_L$ y en el cuarto sumamos las integrales. Podemos hacer lo análogo para mostrar que $G_L < T^*$. Por lo tanto el gobierno cobrará impuestos T^* fijos tal que $G_L < T^* < G_H$. Por otro lado, el crecimiento de la deuda sigue la ecuación $D'(t) = G_H - T^* - rD(t)$ la cual será positiva entre 0 y τ (el déficit está creciendo). Dado que a partir de τ termina el gasto alto (G_H) entonces deja de crecer la deuda $(D'(t) = 0)$ lo que equivale a representar los impuestos como $T^* = G_L - rD(\tau)$.

Gráficamente:



Evolución del gasto y tributos en el tiempo



Evolución de la deuda en el tiempo.

(b) If the tax rate follows a random walk (and if the variance of its innovations is bounded from below by a strictly positive number), then with probability 1 it will eventually exceed 100 percent or be negative.

Does this observation suggest that the tax-smoothing model with quadratic distortion costs is not useful as either a positive or normative model of fiscal policy, since it has an implication that is both clearly incorrect as a description of the world and clearly undesirable as a prescription for policy? Explain your answer briefly.

Respuesta: En efecto, es la misma intuición de la problemática del modelo de equivalencia cierta para reglas fiscales en el largo plazo. El asunto es que las series Random Walk siempre crecen o siempre decrecen. Luego, podemos esperar que los impuestos siempre crezcan o siempre decrezcan lo que lleva a que con probabilidad 1 vaya a infinito en el largo plazo o se vuelvan negativos. Esto no es realista, pues, los países no suben sus impuestos hacia niveles exageradamente altos. Además, no es factible una carga tributaria negativa.

Por lo tanto, no es completamente correcto el modelo cuadrático para explicar los déficits en el largo plazo. Sin embargo, puede ser bastante útil en períodos acotados donde la deuda está acotada. Más allá, permite obtener buenas predicciones para shocks inesperados sobre el gasto fiscal en el corto plazo.

3 Modelo de q de Tobin y Subsidio a la Inversion

Supuestos:

- Firma paga tasa de interés constante r
- Función de producción cóncava F(K)

- Paga $p \equiv 1$ por unidad de capital
- Costos cuadráticos con parámetro de convexidad b.
- Se pueden descontar los costos de instalar capital para efectos contables (Aparece z)
- $\delta = 0$
- **Subsidio a la inversión** σ tal que costo de invertir se reduce a $C(I,K)^* = (1-\sigma)I + C(I,K)$

(a) Estamos suponiendo que el subsidio del gobierno no involucra los costos de ajuste. Discuta cuán razonable es este supuesto para distintas interpretaciones de los costos de ajuste.

Respuesta: Es razonable pensar que el Estado no subsidiará los costos de ajuste. Esto, pues, existen altos problemas de monitoreo debido a la ambigüedad de los costos de ajuste (mover máquinas, capacitar trabajadores) por lo que hace más sentido aplicar el subsidio sólo sobre lo estrictamente relacionado a inversión. Sin embargo, si se considerarán costos de ajuste como la instalación de capital fijo entonces efectivamente el supuesto podría tener problemas.

(b) Muestre que el q de estado estacionario, q^* es igual a $1-\sigma$. Interprete económicamente este resultado. Caracterice el stock de capital de estado estacionario, K^*.

Respuesta: Planteamos el problema de la firma (donde $p_{K,t} = 1$, $\delta = 0$ que $C(I_t, K_t) = \frac{b}{2}\frac{I_t^2}{K_t}$ y que $p_{K,t}F(K) = F(K) = \pi(K)$):

$$
\begin{aligned}
&V(K_0) = \max_{\{I_t, t \geq 0\}} \int_0^\infty [\pi(K_t) - (1-\sigma)I_t - \frac{b}{2}\frac{I_t^2}{K_t}]e^{-rt}dt \\
&\text{s.a.} \quad \{x_t, t \geq 0\} \quad \text{y} \quad K_0 \quad \text{dados} \\
&K'(t) = I_t
\end{aligned}
$$

Definiendo I_t como variable de control, x_t, K_t son variables de estado, y λ_t es variable de co-estado. Tomemos el Hamiltoniano corriente:

$$
\mathcal{H}(K_t, I_t) = \pi(K_t) - (1-\sigma)I_t - \frac{b}{2}\frac{I_t^2}{K_t} + \lambda_t(I_t)
$$

Las condiciones de primer orden son:

$$
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I}(K_t, I_t, \lambda_t) := (1-\sigma) - \frac{bI_t}{K_t} = \lambda_t \tag{1}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K}(K_t, I_t, \lambda_t) := \pi_K(K_t, x_t) + \frac{bI_t^2}{2K_t^2} = -\lambda_t' + r\lambda_t \tag{2}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(K_t, I_t, \lambda_t) := K'(t) = I_t \tag{3}
$$

De la primera CPO obtenemos el q de tobin, donde $q_t \equiv \lambda_t = (1-\sigma) - \frac{bI_t}{K_t}$. Por otro lado, la segunda CPO nos muestra la siguiente ecuación:

$$\pi_K(K_t, x_t) + \frac{b}{2}(\frac{I_t}{K_t})^2 + \lambda_t' = r\lambda_t$$

A partir de la expresión (1) podemos encontrar que q cumple con $\frac{I}{K} = \frac{(q-(1-\sigma))}{b}$ lo que combinado con la ecuación (3) nos da que la evolución del capital es:

$$K' = I = \frac{(q-(1-\sigma))}{b}K$$

Por lo tanto en estado estacionario, tenemos que $K' = 0$ y asumiendo que $K_t \neq 0$ en el estado estacionario llegamos a que $q^* = 1-\sigma$. En conclusión, el valor marginal del capital ajustado por su costo en el estado estacionario corresponde al porcentaje de la inversión que no es subsidiada por el gobierno. Además entregará un q menor al caso sin subsidio. La intuición es que el subsidio permite que sea óptimo converger a que la última unidad adicional de capital tenga un valor marginal menor a 1 pues existirá una fracción σ de la última unidad adicional de capital que permitirá amortiguar el costo de invertir. Dicho de otra manera, q actua como precio sombra, por lo que las firmas invertirán hasta que el valor marginal sea igual al costo por unidad de capital, en este caso, $1-\sigma$.

Por último, aprovechando la ecuación (2) y el hecho que $\lambda = q$ tenemos que:

$$\lambda' = q' = rq - \pi_K(K_t) - \frac{[(1-\sigma)(q-1)]^2}{2b}$$

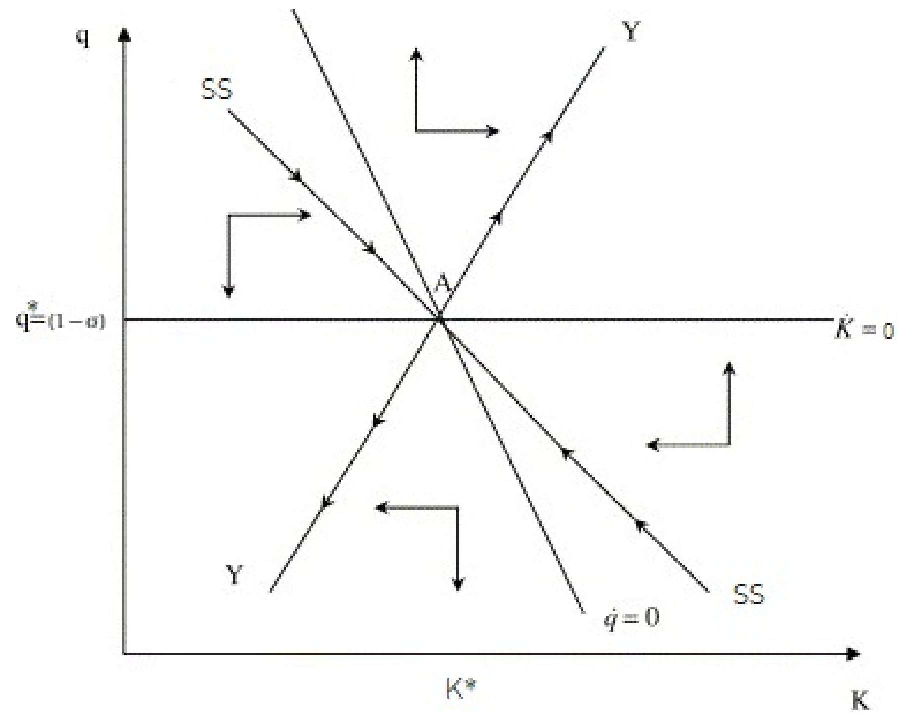
Tenemos que $(\frac{I_t}{K_t})^2 = \frac{[q^*-(1-\sigma)]^2}{2b}$. Luego, asumiendo $q' = 0$ (i.e. estado estacionario), aprovechando la segunda CPO, y que q^* tenemos que K^* cumple con:

$$\pi_K(K_t) = rq^* - \frac{[q^* - (1-\sigma)]^2}{2b} = r(1-\sigma)$$

Si asumimos que π_K tiene inversa tenemos que $K_t^* = \pi_K^{-1}(r(1-\sigma))$ la cual caracteriza el estado estacionario para el capital.

(c) Determine el diagrama de fase en el espacio (K,q). Justifique las flechas en cada región y muestre que hay un brazo estable.

Respuesta:



q de Tobin con subsidio a la inversión

4 Modelo de q de Tobin cuando $\delta > 0$

Supuestos:

- Tiempo continuo.
- Obj: Máximizar flujo de caja descontado a tasa constante $r > 0$
- Firma comienza con K_0 con flujo de caja igual a $\pi(K_t) > 0$.
- $\pi' > 0$ y $\pi'' < 0$, y existe la inversa de $\pi(K_t)$.
- El capital instalado se deprecia a tasa $\delta > 0$.
- Oferta de capital infinitamente elástica a precio $p_t = 1$.
- Costo de ajuste de I_t unidades de capital: $I_t + C(I_t, K_t)$

(a) El problema de la firma corresponde a :

$$
\begin{aligned}
&V(K_0) = \max_{\{I_t, t\geq 0\}} \int_0^{\infty} [\pi(K_t) - I_t - C(I_t, K_t)] e^{-rt} dt \\
&\text{s.a.} \quad \{x_t, t \geq 0\} \quad \text{y} \quad K_0 \quad \text{dados} \\
&K'(t) = I_t - \delta K_t
\end{aligned}
$$

(b) $C(I_t, K_t) = \frac{b}{2}\frac{I_t^2}{K_t}$

Definiendo I_t como variable de control, x_t, K_t son variables de estado, y λ_t es variable de co-estado. Tomemos el Hamiltoniano corriente:

$$\mathcal{H}(K_t, I_t) = \pi(K_t) - I_t - \frac{b}{2}\frac{I_t^2}{K_t} + \lambda_t(I_t - \delta K_t)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I}(K_t, I_t, \lambda_t) := 1 - \frac{bI_t}{K_t} = \lambda_t \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K}(K_t, I_t, \lambda_t) := \pi_K(K_t) + \frac{bI_t^2}{2K_t^2} - \delta\lambda = -\lambda_t' + r\lambda_t \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(K_t, I_t, \lambda_t) := K'(t) = I_t - \delta K_t \tag{3}$$

En este caso $q_t \equiv \lambda_t = 1 - \frac{bI_t}{K_t}$ lo que viene de la CPO (1). Por otro lado, tenemos que para (2) podemos representarla gracias al hecho anterior como:

$$\begin{aligned} q_t' &= -rq_t + \pi_K(K_t) - \frac{b}{2}(\frac{I_t}{K_t})^2 - \delta q_t \\ &= \pi_K(K_t) - \frac{(1-q_t)^2}{2b} - (\delta + r)q_t \end{aligned}$$

Donde el último paso aprovechamos la expresión que entrega (1) al despejar I_t/K_t así como factorizamos q. Luego, por la ecuación (3) tenemos que $K'(t) = I_t - \delta K_t$ por lo que la ecuación de $K'(t)$ se puede escribir aprovechando (1) de modo que la diferencial del capital es:

$$K'(t) = (\frac{1-q_t}{b} - \delta)K_t$$

(c) ¿Como se interpreta el parámetro b? Encuentre las curvas asociadas a $K_t' = 0$ y $q_t' = 0$. Provea una explicacion intuitiva de la expresión para la curva asociada a $K_t' = 0$.

Respuesta: El parámetro b representa la tasa de crecimiento del costo de ajuste. En otras palabras, mayores valores de b producirán que los costos crecerán mucho más rápido por unidad de inversión relativo a menores valores de b. En la ecuación diferencial de K se puede ver que es decreciente en b, pues, un mayor b desincentiva la inversión y por tanto la acumulación de capital.

Cuando $K_t' = 0$ (i.e. estado estacionario) y asumiendo que en ese instante $K_t \neq 0$ tenemos que para el capital:

$$q^* = 1 + b\delta$$

Esto significa que el q^* corresponde a una constante, es decir, una línea horizontal con valor $1 + b\delta$. Debido a que q actúa como precio sombra, las firmas invierten hasta que el valor marginal de la última unidad adicional de capital sea igual al costo del capital, en este caso $1 + b\delta$. La clave está en que depreciar el capital encarece la próxima inversión (la vuelve más exigente para el mismo rendimiento de capital deseado) así como que b encarece la instalación de cada unidad.

La interpretación de $K_t' = 0$ es que muestra que cuando no hay incentivos a aumentar o disminuir capital coincide con que el valor marginal de una unidad adicional de capital ajustada por su costo es igual a $1 + b\delta$ (su costo marginal). Por otra parte, el q de Tobin:

$$0 = \pi_K(K_t) - \frac{(1-q_t)^2}{2b} - (\sigma + r)q_t$$

Para encontrar el estado estacionario de K^* aprovechamos el hecho que $\pi(K)$ tiene inversa y el estado estacionario de q:

$$\pi_K^{-1}(\frac{(1-q_t)^2}{2b} + (\sigma + r)(1 - b\delta)) = K^*$$

(d) Para este ejercicio aprovechamos el Teorema de la Función Implícita, por ello definimos:

$$F(K_t, q_t) = 0 = \pi_K(K_t) - \frac{(1-q_t)^2}{2b} - (\delta + r)q_t$$

Tenemos que $\frac{\partial F}{\partial K}(K_t, q_t) = \pi_{KK}(K_t)$ y que $\frac{\partial F}{\partial q}(K_t, q_t) = \frac{q_t - 1}{b} - \delta - r$ por lo que:

$$\frac{dq_t}{dK_t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial K}(K_t, q_t)}{\frac{\partial F}{\partial q}(K_t, q_t)} = \frac{-\pi_{KK}(K_t)}{\frac{q_t - 1}{b} - \delta - r}$$

Dado que el numerador siempre es positivo ($\pi_{KK} < 0$) tenemos que la derivada será estrictamente positiva si y sólo si q_t cumple con estar en el intervalo $q_t > 1 + \delta b + \delta r$. Por tanto, podemos ver que q explotará cuando esté por sobre $1 + \delta(b + r)$ pues se producirá un círculo vicioso de añadir capital el cual sube el valor marginal, por lo que nuevamente conviene añadir capital.

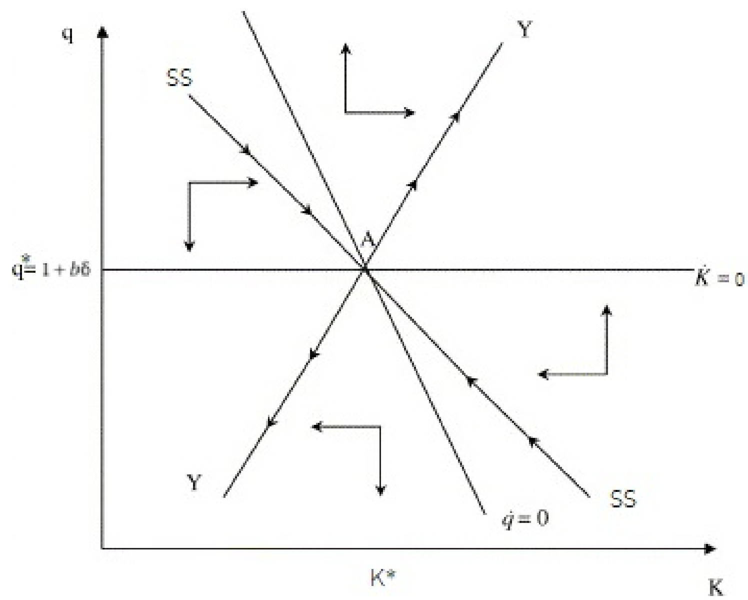
(e) El estado estacionario del capital viene dado por:

$$\pi_K^{-1}(\frac{(1-q_t)^2}{2b}+(\sigma+r)(1-b\delta))=K^*$$

Mientras que el estado estacionario de q de Tobin viene dado por:

$$q^*=1+b\delta$$

Gráficamente



Dada una vecindad de q^* tal que $q+\varepsilon>q^*$ con $\varepsilon\to 0$ tenemos que la derivada será negativa siempre ya que $q^*+\varepsilon=1+\delta b+\varepsilon<1+\delta b+\delta r$ dado $r>0$. Lo anterior muestra que en una vecindad del estado estacionario efectivamente se puede garantizar su trayectoria hacia el estado estacionario.