Profesor	: Eduardo Engel	Abril 17, 2023
Ayudantes	: Miguel Del Valle y Benjamín Peña	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2023	
Control	: No. 2	

1. **El Teorema de Muth y la Crítica de Lucas**

El ingreso, Y_t, es exógeno e igual a la suma de un camino aleatorio (shocks permanente), P_t, y un ruido blanco (componente transitoria), u_t,

$$\begin{aligned} Y_t &= P_t + u_t, \\ P_t &= P_{t-1} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Donde ε_t es i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, u_t i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_u^2)$, ε_t y u_t independientes.

A diferencia del análisis que vimos en cátedra, ahora suponemos que los agentes observan las Y_t pero no sus componentes. Además, supondremos (se puede mostrar) que ΔY_t sigue un MA(1), cuya representación de Wold es:

$$\Delta Y_t = v_t - \theta v_{t-1}, \qquad \theta = \frac{1}{2}\left[Q + 2 - \sqrt{(Q+2)^2 - 4}\right]. \tag{1}$$

donde $Q \equiv \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_u^2$ y $|\theta| < 1$.

(a) Use (1) para expresar los v_t en función de los ΔY_{t-k}, $k = 0, 1, 2, ...$

Respuesta:
De (1) y que $|\theta| < 1$ tenemos que:

$$v_t = \frac{1}{1 - \theta L} = \sum_{k \geq 0} \theta^k \Delta Y_{t-k}$$

(b) Para $k = 1, 2, 3, 4, ...$ encuentre $\mathrm{E}_t[\Delta Y_{t+k}]$ (donde la información disponible en t son todos los valores pasados y presentes de Y, lo cual significa que también se conocen todos los valores presentes y pasados de ΔY). Use la expresión que obtuvo para mostrar que para todo $k \geq 1$:

$$\mathrm{E}_t[Y_{t+k}] = (1 - \theta) \sum_{j \geq 0} \theta^j Y_{t-j}. \tag{2}$$

Se sigue que las proyecciones de valores futuros de Y no dependen del horizonte de proyección, de modo que le recomendamos denotar $\mathrm{E}_t[Y_{t+k}]$ por $\hat{Y}_t$, para $k \geq 1$, cuando responda las partes que siguen

Respuesta:
Para $k = 1$, usando la expresión v_t derivada en la parte (a) tenemos que:

$$\mathrm{E}_t \Delta Y_{t+1} = \mathrm{E}_t[v_{t+1} - \theta v_t] = -\theta v_t = -\sum_{k \geq 0} \theta^{k+1} \Delta Y_{t-k}.$$

Mientras que para $k \geq 2$:

$$\mathrm{E}_t \Delta Y_{t+k} = \mathrm{E}_t[v_{t+k} - \theta v_{t+k-1}] = 0.$$

Sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t Y_{t+k} &= \mathrm{E}_t[\Delta Y_{t+k} + \cdots \Delta Y_{t+1} + Y_t] = Y_t + \mathrm{E}_t \Delta Y_{t+1} = Y_t - \sum_{k \geq 0} \theta^{k+1} \Delta Y_{t-k} \\
&= Y_t - \theta \Delta Y_t - \theta^2 \Delta Y_{t-1} - \theta^3 \Delta Y_{t-2} - \cdots \\
&= (1-\theta) Y_t + (\theta - \theta^2) Y_{t-1} + (\theta^2 - \theta^3) Y_{t-2} + \cdots = (1-\theta) \sum_{k \geq 0} \theta^k Y_{t-k}.
\end{aligned}$$

(c) A continuación suponga que la relación ente ΔC_t y el proceso de ingreso está determinada por el modelo de equivalencia cierta visto en clases, de modo que

$$\Delta C_t = \frac{r}{R} \sum_{u \geq 0} \beta^u \{\mathrm{E}_t Y_{t+u} - \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+u}\}.$$

Use esta expresión para mostrar que ΔC_t se puede escribir como:

$$\Delta C_t = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \Delta Y_{t-k}.$$

Encuentre expresiones para los α_k.

Respuesta:
Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta C_t &= \frac{r}{R} \left\{ Y_t - \hat{Y}_{t-1} + \sum_{u \geq 1} \beta^u (\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1}) \right\} \\
&= \frac{r}{R} \left\{ Y_t - \hat{Y}_{t-1} + \frac{\beta}{1-\beta} (\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1}) \right\} \\
&= \frac{r}{R} \left\{ \frac{1}{1-\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right\} \Delta \hat{Y}_t = \frac{R-\theta}{R(1-\theta)} \Delta \hat{Y}_t = \frac{R-\theta}{R} \sum_{j \geq 0} \theta^j \Delta Y_{t-j},
\end{aligned}$$

En donde es importante notar que el primer término en la primera suma es simplemente Y_t. Dado lo anterior, sigue que $\alpha_k = (R-\theta)\theta^k / R$.

(d) En $t = 0$ la macroeconomista usa las series agregadas para estimar

$$\Delta C_t = \sum_{k \leq 0} \alpha_k \Delta Y_{t-k}. \tag{3}$$

Poco después, la varianza de la componente cíclica del ingreso aumenta de manera inesperada y permanente (todo lo restante no cambia). La macroeconomista está consciente del cambio en el entorno económico pero confía que los nuevos valores de ΔY lo van a capturar adecuadamente, por lo cual sigue usando (3) para proyectar el consumo. ¿Es correcto este supuesto? Justifique.

Respuesta:
El problema central es que el valor de θ y por tanto el de α_k a cambiado. Un aumento en la varianza de la componente ciclica baja Q y por tanto, aumenta θ. Por tanto, usar los coeficientes de la regresión del regimen anterior va a generar un sesgo en el forecast.

2. **Ahorro por precaución, función de utilidad CARA e ingreso i.i.d.**

Considere el modelo del problema general de consumo visto en clases (lámina 22 y siguientes), con función de utilidad instantánea con coeficiente de aversión absoluta al riesgo constante:

$$u(c) = -\frac{1}{\theta}e^{-\theta c},$$

donde $\theta > 0$ denota el coeficiente de aversión absoluta al riesgo. La tasa de descuento subjetiva es δ, la tasa de interés es r y las dos son constantes. El ingreso laboral, y_t, es i.i.d., de modo que

$$y_t = \bar{y} + \varepsilon_t,$$

con ε_t i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Los activos del hogar al comienzo de un período evolucionan de acuerdo a

$$A_{t+1} = (1 + r)[A_t + y_t - c_t]. \tag{4}$$

Se puede mostrar que existe una solución única a la ecuación de Bellman y que existe una correspondencia uno-a-uno entre esta solución y la solución a la ecuación de Euler. No es necesario que demuestre lo anterior. Se sigue que la ecuación de Euler tiene una única solución, en la cual nos enfocamos en lo que sigue.

Suponemos que la solución de la ecuación de Euler toma la forma:

$$c_t = \frac{r}{1 + r}\left\{A_t + y_t + \frac{1}{r}\bar{y}\right\} - P(r, \theta, \delta, \sigma), \tag{5}$$

donde P es una constante (que depende de r, θ, δ y σ). A continuación encontramos el valor de P para el cual (5) resuelve la ecuación de Euler. Para esto, asuma que se cumple que:

$$\Delta c_t = \frac{r}{1 + r}\varepsilon_t + rP. \tag{6}$$

(a) Use (6) y la ecuación de Euler para derivar una expresión explícita para P.
Ayuda: Recuerde que si $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $\mathrm{E}(\exp(X)) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$. **Respuesta:**

Definiendo $\beta \equiv 1/(1 + \delta)$, la ecuación de Euler es la siguiente:

$$u'(c_t) = \beta(1 + r)E_t[u'(c_{t+1})]$$

donde ocupando la función de utilidad del enunciado, tenemos lo siguiente:

$$1 = \beta(1 + r)E_t[e^{-\theta \Delta c_{t+1}}]$$

Ocupando (5):

$$1 = \beta(1+r)e^{-r\theta P} E_t[e^{-\frac{r\theta}{1+r}\varepsilon_{t+1}}]$$

Luego, ocupamos el siguiente resultado: si X es una variable aleatoria con una distribución normal de media μ y varianza σ^2, entonces para cualquier número real t,

$$E[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

Aplicamos lo anterior

$$1 = \beta(1+r)e^{-r\theta P} e^{\frac{(\sigma r\theta)^2}{2(1+r)^2}}$$

y tomamos logaritmos a ambos lados.

$$0 = \log(\beta(1+r)) - r\theta P + \frac{(\sigma r\theta)^2}{2(1+r)^2}$$

Finalmente, despejando P se tiene lo pedido:

$$P = \frac{\log(\beta(1+r))}{\theta r} + \frac{\sigma^2 r\theta}{2(1+r)^2}$$

(b) Ahora asuma que $r = \delta$. El ahorro por precaución se define como la diferencia entre el ahorro efectivo y el ahorro que prescribe el modelo de equivalencia cierta. Muestre que el ahorro por precaución será igual a P y que P es estrictamente positivo.

Respuesta:
En este caso,

$$P = \frac{\sigma^2 r\theta}{2(1+r)^2} > 0$$

Ocupando la ecuación para el consumo bajo equivalencia cierta (y que $r = \delta$),

$$C_t = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \sum_{s\geq 0}\frac{E_t[y_{t+s}]}{(1+r)^s}\right\}$$

Desarrollando lo anterior:

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{r}{1+r}\left\{A_t + y_t + E_t\sum_{s\geq 1}\frac{y_{t+s}}{(1+r)^s}\right\} \\ &= \frac{r}{1+r}\left\{A_t + y_t + \bar{y}\sum_{s\geq 1}\frac{1}{(1+r)^s}\right\} = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + y_t + \frac{\bar{y}}{r}\right\} \end{aligned}$$

así, el ahorro por precaución está dado por

$$S_t - S_t^{certain} = C_t^{certain} - C_t = P$$