La acumulación de capital humano

Introducción

- Uno de los factores que ayuda a promover el crecimiento de un país es la educación de sus ciudadanos.
- En los cincuenta, se introdujo la noción de capital humano para describir el hecho de que el cuerpo humano podía aumentar su capacidad productiva a base de realizar inversiones.
- Es posible argumentar que para niveles bajos de ingreso, una inversión clave es en salud y alimentación.
- Pero conforme el ingreso per cápita aumenta, la inversión más importante es la educación.
- En esta clase vamos a estudiar la creación y acumulación de capital humano en los modelos de crecimiento que hemos venido estudiando.

The Model with Two Sectors of Production

- We have assumed, thus far, that physical goods and education are generated by the same production functions (open economy).

- This specification neglects a key aspect of education: it relies heavily on educated people as an input. We should, therefore, modify the model to reflect the property that the production of human capital is relatively intensive in human capital.

- This change in specification modifies some of the conclusions about the effects on growth from imbalances between physical and human capital.

A one-sector model with physical and human capital

- We start with a Cobb–Douglas production function that exhibits constant returns to physical and human capital, K and H:

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

- We can think of human capital, H, as the number of workers, L, multiplied by the human capital of the typical worker, h.

- The assumption here is that the quantity of workers, L, and the quality of workers, h, are perfect substitutes in production in the sense that only the combination Lh matters for output.

A one-sector model with physical and human capital

- We assume, only for convenience, that the total labor force, L, is fixed and, hence, that H grows only because of improvements in the average quality, h.
- We also omit any technological progress (that is, we assume that A is constant).
- Output can be used for consumption or investment in physical or human capital. We assume that the stocks of physical and human capital depreciate at the same rate, δ. The depreciation of human capital includes losses from skill deterioration and mortality, net of benefits from experience.

A one-sector model with physical and human capital

- The economy's resource constraint is

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha} = C + I_K + I_H$$

- where I_K and I_H are gross investment in physical and human capital, respectively.
- The changes in the two capital stocks are given by

$$\dot{K} = I_K - \delta K, \qquad \dot{H} = I_H - \delta H$$

A one-sector model with physical and human capital

- If we neglect population growth, households maximize the usual utility function

$$U = \int_0^\infty u[c(t)] \cdot e^{-\rho t} \, dt$$

- subject to the two constraints for the accumulation of K and H and subject to the economy-wide resource constraint equation. The Hamiltonian expression is

$$J = u(C) \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot (I_K - \delta K) + \mu \cdot (I_H - \delta H) + \omega \cdot (AK^\alpha H^{1-\alpha} - C - I_K - I_H)$$

A one-sector model with physical and human capital

- We use the usual utility function

$$u(C) = (C^{1-\theta} - 1)/(1 - \theta)$$

- From the first order conditions we obtain:

$$\dot{C}/C = (1/\theta) \cdot [A\alpha \cdot (K/H)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho]$$

- where $A\alpha \cdot (K/H)^{-(1-\alpha)} - \delta$ is the net marginal product of physical capital.

A one-sector model with physical and human capital

- The second condition is that the net marginal product of physical capital equal the net marginal product of human capital:

$$A\alpha \cdot (K/H)^{-(1-\alpha)} - \delta = A \cdot (1-\alpha) \cdot (K/H)^{\alpha} - \delta$$

- This condition implies that the ratio of the two capital stocks is given by

$$K/H = \alpha/(1-\alpha)$$

A one-sector model with physical and human capital

- This result for K/H implies that the net rate of return to physical and human capital is given by

$$r^* = A\alpha^{\alpha} \cdot (1-\alpha)^{(1-\alpha)} - \delta$$

- This rate of return is constant because the production function exhibits constant returns with respect to broad capital, K and H.
- Therefore, diminishing returns do not apply when K/H stays constant, that is, when K and H grow at the same rate. If K/H is constant, equation implies that is constant and equal to

$$\gamma^* = (1/\theta) \cdot \left[A\alpha^{\alpha} \cdot (1-\alpha)^{(1-\alpha)} - \delta - \rho\right]$$

A one-sector model with physical and human capital

- To see how this model relates to some previous analysis, we can substitute the result for K/H into the production function to get

$$Y = AK \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)}$$

- Thus the model is equivalent to the AK model. We can use the method of analysis from that chapter to show that, if the transversality condition holds, the growth rates of Y, K, and H must equal the growth rate of C.

The Constraint of Nonnegative Gross Investment

- Suppose that the economy begins with the two capital stocks K(0) and H(0).

- If the ratio K(0)/H(0) deviates from the value $\alpha/(1-\alpha)$, the solution that we just found dictates discrete adjustments in the two stocks to attain the value $\alpha/(1 - \alpha)$ instantaneously.

- This adjustment features an increase in one stock and a corresponding decrease in the other stock, so that the sum, K + H, does not change instantaneously.

The Constraint of Nonnegative Gross Investment

- The difficulty with this solution is that it depends on the possibility of an infinite positive rate of investment in one form of capital and an infinite negative rate of investment in the other form.

- We must, in other words, assume that investments are reversible, so that old units of physical capital can be converted into human capital and vice versa. This assumption is not very realistic.

- One would imagine that, even though investors can decide, ex ante, whether to invest in human or physical capital, once the decision is made, it is ***irreversible***.

The Constraint of Nonnegative Gross Investment

- Mathematically, these irreversibility constraints would take the form of inequality restrictions: $I_K \geq 0$ and $I_H \geq 0$. In other words, one cannot disinvest human or physical capital.

- One can choose not to invest at all in each form of capital; that is, one can set $I_K = 0$, which would entail a continuous decline in K at the rate $\dot{K}/K = -\delta$, but one cannot actually disinvest K.

- If $K(0)/H(0) < \alpha/(1-\alpha)$—that is, if H is initially abundant relative to K—the previous solution dictates a decrease in H and an increase in K at time zero. The desire to lower H by a discrete amount implies that the inequality $I_H \geq 0$ will be binding at time zero (and for a finite interval thereafter).

The Constraint of Nonnegative Gross Investment

- When this restriction is binding, the household chooses $I_H = 0$; hence, the growth rate of H is given by $\dot{H}/H = -\delta$, and H follows the path

$$H(t) = H(0) \cdot e^{-\delta t}, \quad \text{for } t = 0, \ldots$$

- If $I_H = 0$, the household's optimization problem can be written in terms of the simplified Hamiltonian expression

$$J = u(C) \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot (AK^{\alpha} H^{1-\alpha} - C - \delta K)$$

The Constraint of Nonnegative Gross Investment

- This setup is equivalent to the standard neoclassical growth model in which households choose consumption and investment in a single form of capital, K, subject to exogenous technological progress that augments the quantity of the other input, here H. In the standard model, the other input, effective labor, grows at the rate x (with zero population growth), whereas in the present setting, the other input, H, grows at the rate $-\delta$.

- The crucial difference from the standard neoclassical growth model is that K/H rises over time and reaches the value $\alpha/(1-\alpha)$ in finite time. At this point, the net marginal products of physical and human capital are equal, and, hence, the constraint of nonnegative gross investment in human capital becomes nonbinding. The two capital stocks then grow forever at the common rate $\gamma*$.

- Hence, the dynamics of the neoclassical growth model apply during the transition, but the long-run growth rate is positive (even without exogenous technological progress), because of the absence of diminishing returns to broad capital.

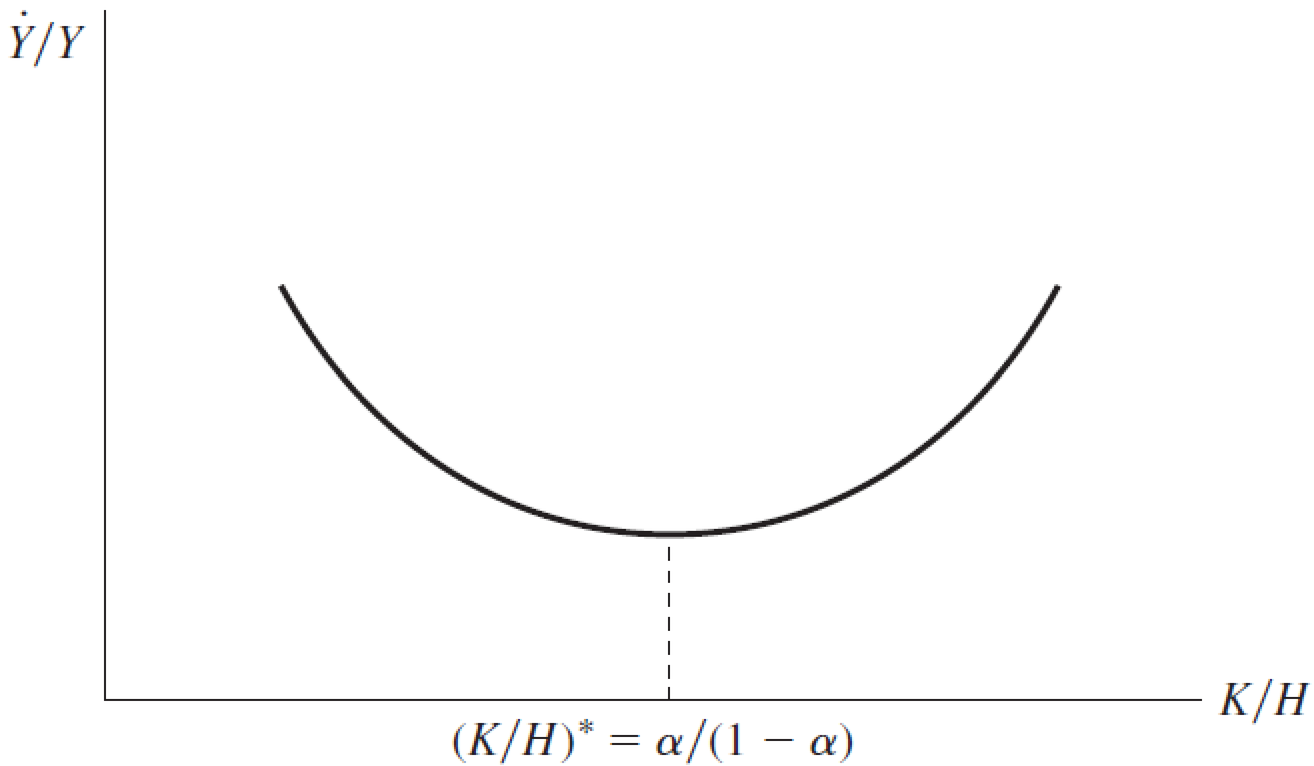
The Constraint of Nonnegative Gross Investment

- The solution exhibits the convergence property in the sense that the growth rates, $\gamma_K \equiv \dot{K}/K$ and $\gamma_Y \equiv \dot{Y}/Y$, decline monotonically over time.

- Since the two growth rates fall monotonically toward $\gamma^* > 0$, they must be positive, but declining, during the transition. Thus, K/H rises monotonically over time, partly because H is falling (at the rate δ) and partly because K is rising (at a rate that decreases toward γ^*).

- The increase in K/H implies that the net marginal product of physical capital—and, hence, the rate of return—declines monotonically. This declining path of the rate of return corresponds in the usual way to a falling path of γ_C.

The Constraint of Nonnegative Gross Investment



The Uzawa–Lucas Model

- Como vimos previamente, la idea de considerar el trabajo como capital humano (y, en consecuencia, convertir el trabajo en un factor susceptible de ser acumulado) constituía una forma de introducir la tecnología AK.

- Sin embargo, uno de los supuestos implícitos en nuestro argumento se apoyaba en el hecho de que el capital físico y el capital humano eran bienes similares en el sentido de que ambos podían ser acumulados a partir de las unidades de producción.

- Acá consideraremos que el capital físico y el capital humano son bienes distintos producidos por tecnologías distintas.

The Uzawa–Lucas Model

- Uzawa (1965) y Lucas (1988) explotaron esa idea para construir un modelo de dos sectores con crecimiento endógeno.

- En uno de los sectores, la producción final se obtiene mediante la combinación de capital físico y humano. Este producto final puede ser consumido o transformado en capital físico:

$$\dot{K} = AK_Y^{\alpha} H_Y^{1-\alpha} - C - \delta_K K$$

The Uzawa–Lucas Model

- En el otro sector, la producción y acumulación de capital humano se hace exprofeso a partir de capital físico y humano.

- Se considera que la tecnología para la obtención de capital humano es diferente de la que se emplea para la obtención de la producción final:

$$\dot{H} = BK_H^{\eta}H_H^{1-\eta} - \delta_H H$$

The Uzawa–Lucas Model

- A diferencia de la tecnología, que puede ser utilizada en más de un sitio al mismo tiempo, el capital humano es un bien rival, por lo que no puede ser utilizado simultáneamente en el sector de bienes finales y en el sector de educación.

- Lo anterior implica que $H = H_K + H_H$.

- Definamos u a la fracción de capital humano utilizada en la producción de bienes finales y $1 - u$ a la fracción de capital humano utilizada en el proceso educativo.

The Uzawa–Lucas Model

- Podemos escribir las ecuaciones de acumulación en términos per cápita dividiendo por L.

$$h = H/L$$

$$\dot{h} = \frac{\dot{H}}{L} - nh$$

- Dado lo anterior obtenemos:

$$\dot{k} = Ak^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta_K + n)k \,,$$

$$\dot{h} = B(1-u)h - (\delta_H + n)h \,,$$

The Uzawa–Lucas Model

- El resto del modelo es idéntico a los estudiados hasta ahora.

- Los individuos eligen la trayectoria de consumo y la fracción del tiempo que dedican a cada uno de los sectores con el objetivo de maximizar

$$U(0) = \int_{o}^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) dt \ ,$$

- Sujeto a las restricciones de acumulación de capital humano y físico. Dado los valores iniciales de k y h.

The Uzawa–Lucas Model

- Ahora tenemos dos restricciones dinámicas y dos variables de control (c y u).

- El hamiltoniano en este caso viene dado por:

$$H(\cdot) = e^{-(\rho-n)t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \nu_t\left(Ak^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta_k + n)k\right) +$$
$$+ \lambda_t\left(B(1-u)h - (\delta_h + n)h\right) \, ,$$

The Uzawa–Lucas Model

- Variables de control? Variables de estado?
- Condiciones de primer orden:

$$H_c = 0 \quad \leftrightarrow \quad e^{-(\rho-n)t} c^{-\theta} = \nu \,,$$

$$H_u = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nu A k^{\alpha}(1-\alpha) u^{-\alpha} h^{1-\alpha} = \lambda B h \,,$$

$$H_k = -\dot{\nu} \quad \leftrightarrow \quad \nu \left(A\alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - (\delta_K + n) \right) = -\dot{\nu} \,,$$

$$H_h = -\dot{\lambda} \quad \leftrightarrow \quad \nu \left(A k^{\alpha} u^{1-\alpha}(1-\alpha) h^{-\alpha} \right) + \lambda \left(B(1-u) - (\delta_H + n) \right) = -\dot{\lambda} \,,$$

$$\lim_{t\to\infty} \nu_t k_t = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} \lambda_t h_t = 0.$$

The Uzawa–Lucas Model

- Supongamos que las tasas de depreciación de los dos tipos de capital son iguales.
- Tomando logaritmos y derivada de la primera condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{\dot{c}}{c} \equiv \gamma_c = \frac{1}{\theta}\left(\frac{-\dot{\nu}}{\nu} - (\rho - n)\right).$$

- Y utilizando la condición de primer orden de k tenemos que:

$$\frac{\dot{c}}{c} \equiv \gamma_c = \frac{1}{\theta}\left(A\alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - (\delta + \rho)\right).$$

The Uzawa–Lucas Model

- Lo anterior implica que el crecimiento del consumo depende del producto marginal del capital físico.
- A diferencia de los modelos anteriores, este producto marginal del capital físico no depende solamente del stock de capital físico sino que depende también del capital humano y de la fracción de éste que se utiliza en el sector final.
- Acá solo solucionaremos el modelo en estado estacionario.
- Recordemos que en estado estacionario todas las variables crecen a un ritmo constante. No sabemos cuál es la tasa de crecimiento de c,k y h. Pero si sabemos que u tiene que ser constante ya que u es una fracción que debe permanecer acotada entre cero y uno.

The Uzawa–Lucas Model

- Considere

$$\frac{\dot{c}}{c} \equiv \gamma_c = \frac{1}{\theta}\left(A\alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - (\delta+\rho)\right).$$

- Reescríbala como:

$$\frac{\theta\gamma_c^* + \delta + \rho}{A\alpha(u^*)^{1-\alpha}} = k^{\alpha-1}h^{1-\alpha}.$$

The Uzawa–Lucas Model

- Tomando logaritmos de los dos lados y derivando con respecto al tiempo obtenemos:

$$0 = (\alpha - 1)\gamma_k^* + (1 - \alpha)\gamma_h^*$$

- Lo anterior implica que las tasas de crecimiento del capital físico y humano son idénticas.

- Lo anterior implica que (h/k)* es constante.

The Uzawa–Lucas Model

- Dividiendo la dinámica del capital por k obtenemos:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma_k = Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \frac{c}{k} - (\delta + n).$$

- Lo anterior implica que c/k debe ser constante en estado estacionario por lo que las tasas de crecimiento de c y h y k deben ser iguales.

- Mostrar que el crecimiento de y es igual al de c, h y k.

The Uzawa–Lucas Model

- Para solucionar el modelo nos basta con encontrar la tasa de crecimiento de c.

- Multipliquemos ambos lados de:

$$\upsilon A k^{\alpha}(1-\alpha)u^{-\alpha}h^{1-\alpha} = \lambda B h$$

- por u y obtenemos:

$$\nu A k^{\alpha}(1-\alpha)u^{1-\alpha}h^{-\alpha} = \lambda B u.$$

The Uzawa–Lucas Model

- Como todos los términos son constantes a excepción de los dos precios sombra λ y υ tenemos que

$$\gamma_{\nu}^{*} = \gamma_{\lambda}^{*}.$$

- Pero $\upsilon A k^{\alpha}(1-\alpha)u^{-\alpha}h^{1-\alpha}$ es idéntico al primer término de la condición de primer orden de h. En consecuencia:

$$\lambda B u^{*} + \lambda(B(1-u^{*}) - (\delta + n)) = -\dot{\lambda}.$$

The Uzawa–Lucas Model

- Lo anterior implica que:

$$\left(\frac{-\dot{\lambda}}{\lambda}\right)^* \equiv -\gamma_\lambda^* = B - \delta - n.$$

- Lo que implica que:

$$\gamma_c^* = \gamma_y^* = \gamma_k^* = \gamma_h^* = \frac{1}{\theta}(B - \delta - \rho).$$

- Es decir, la tasa de crecimiento a largo plazo es parecida a la obtenida por los modelos lineales AK. Pero en lugar de ser el nivel de productividad en el sector del producto final, el parámetro de productividad que afecta al crecimiento económico a largo plazo es el del sector educativo.

The Uzawa–Lucas Model

- Recuerde que asumimos que el sector educativo no utiliza capital físico lo que implica que la función de producción de educación es lineal en capital humano.

- Este resultado no es general por lo que no podemos sugerir que se subsidie la tecnología educativa y no la del bien final.

- Para obtener u* se puede usar la dinámica de acumulación de h y obtener:

$$u^* = 1 - \frac{\gamma_c^* + (\delta + n)}{B}.$$

The Uzawa–Lucas Model

- Para evitar que el valor de la utilidad sea infinita necesitamos asumir que:

$$\rho - n > (1-\theta)\gamma_c^* \ ,$$

- Respecto de la dinámica de transición, ésta surge si k/h iniciales son distintas a las de estado estacionario.

- Comportamiento asimétrico entre h y k: la tasa de crecimiento de una economía con una relación k_0/h_0 baja estará por encima de la de estado estacionario. La de una economía con una relación k_0/h_0 alta estará por debajo de la del estado estacionario.

- Guerra versus terremoto.