Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Departamento de Economía

Macroeconomía I
ENECO 630
Semestre Otoño 2019

Profesor: Eduardo Engel
Ayudante: Catalina Gómez

Guía No. 3

Viernes 7 de Junio

1 Metas de inflación con datos ruidosos

Considere una economía modelo donde las dinámicas de la brecha de producción e inflación se pueden describir mediante el siguiente sistema:

$$\pi_t = \beta \mathrm{E}_t \pi_{t+1} + \kappa x_t, \tag{1}$$

$$x_t = \mathrm{E}_t x_{t+1} - \sigma(i_t - \mathrm{E}_t \pi_{t+1} - r_t^n), \tag{2}$$

donde todas las variables fueron definidas en clases.
Se asume que la tasa de interés natural r_t^n sigue un proceso de la forma $r_t^n = \rho + \varepsilon_t$, donde ε_t es ruido blanco. La inflación se mide con un término de error ξ_t ruido blanco, o sea, $\pi_t^o = \pi_t + \xi_t$, donde π_t^o denota la inflación observada (o medida). Finalmente, el Banco Central sigue una regla del tipo:

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t^o. \tag{3}$$

1. Describa los microfundamentos de las ecuaciones (1)-(3) ¿A qué corresponde cada ecuación? ¿Cuáles son los supuestos implícitos del modelo representados en cada ecuación? Sea minucioso.

2. Use las ecuaciones (1)-(3) para obtener una ecuación de diferencias en expectativas de la forma

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathrm{E}_t x_{t+1} \\ \mathrm{E}_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + B v_t, \tag{4}$$

donde v_t depende de ξ_t y ε_t.

Respuesta: Tenemos las siguientes ecuaciones:

La curva de Phillips es:

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t, \tag{5}$$

La demanda agregada será:

$$x_t = E_t x_{t+1} - \sigma\left(i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^n\right), \tag{6}$$

La tasa de interés natural (*iid*) es:

$$r_t^n = \rho + \varepsilon_t \tag{7}$$

La inflación (observada con error de medida) es:

$$\pi_t^o = \pi_t + \xi_t \tag{8}$$

Y la regla del Banco Central será:

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t^o. \tag{9}$$

Usamos (7) y (8) para deshacernos de i y r^n en (6). Luego, reemplazamos (8) en la regla del Banco Central (9),

$$\begin{aligned} i_t &= \rho + \phi_\pi (\pi_t + \xi_t) \\ &= \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_\pi \xi_t \end{aligned} \tag{10}$$

A continuación, reemplazamos (7) y (10) en (6),

$$\begin{aligned} x_t &= E_t x_{t+1} - \sigma (\rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_\pi \xi_t - E_t \pi_{t+1} - (\rho + \varepsilon_t)) \\ &= E_t x_{t+1} - \sigma \phi_\pi \pi_t + \sigma E_t \pi_{t+1} - \sigma \varepsilon_t - \sigma \phi_\pi \xi_t. \end{aligned} \tag{11}$$

Luego podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma\phi_\pi \\ \kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sigma\varepsilon_t - \sigma\phi_\pi \xi_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma\phi_\pi \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \sigma\phi_\pi \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sigma\varepsilon_t - \sigma\phi_\pi \xi_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde,

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma\phi_\pi \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \begin{bmatrix} 1 & -\sigma\phi_\pi \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que tendremos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} &= \frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \begin{bmatrix} 1 & \sigma(1 - \beta\phi_\pi) \\ \kappa & \kappa\sigma + \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma\phi_\pi \\ \sigma\kappa & -\sigma\kappa\phi_\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

3. Use los resultados vistos en clases sobre el determinante de la matriz A para encontrar condiciones sobre ϕ_π que nos aseguren la existencia de un único equilibrio en expectativas racionales.

   Indicación: Recuerde que para que exista un único equilibrio en el sistema (4), A debe cumplir una de las 2 siguientes condiciones:

   (a) $\det A < 1$, $\det A +$ traza $A > -1$ y $\det A -$ traza $A > -1$

   (b) $\det A +$ traza $A < -1$ y $\det A -$ traza $A < -1$

   Respuesta: Recordemos que en nuestro caso la matriz A es:

$$A = \frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \begin{bmatrix} 1 & \sigma(1 - \beta\phi_\pi) \\ \kappa & \kappa\sigma + \beta \end{bmatrix}$$

   Vamos a calcular el determinante, la traza, y la suma y la diferencia entre determinante y la traza para ver si se cumple alguno de los sets de condiciones. Comencemos calculando el determinante:

$$\begin{aligned}
\det A &= \left(\frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi+1}\right)^2[\kappa\sigma+\beta-\sigma(1-\beta\phi_\pi)\kappa] \\
\Leftrightarrow \det A &= \frac{1}{(\kappa\sigma\phi_\pi+1)^2}[\kappa\sigma+\beta-\sigma\kappa+\sigma\beta\kappa\phi_\pi] \\
\Leftrightarrow \det A &= \frac{1}{(\kappa\sigma\phi_\pi+1)^2}[\beta(1+\sigma\kappa\phi_\pi)] \\
\Leftrightarrow \det A &= \frac{\beta}{\kappa\sigma\phi_\pi+1}
\end{aligned}$$

Ahora calculemos la traza:

$$\text{traza}\, A = \frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi+1}[1+\kappa\sigma+\beta]$$

Verifiquemos ahora si se cumple la primera condición del primer juego de condiciones, o sea, que $\det A < 1$. En efecto, la condición anterior se cumple, ya que $\beta \leq 1$, y $\kappa\sigma\phi_\pi+1 > 1$.

Ahora calculemos la suma del determinante y la traza:

$$\begin{aligned}
\det A + \text{ traza}\, A &= \frac{\beta}{\kappa\sigma\phi_\pi+1} + \frac{1+\kappa\sigma+\beta}{\kappa\sigma\phi_\pi+1} \\
\Leftrightarrow \det A + \text{ traza}\, A &= \frac{1+\kappa\sigma+2\beta}{\kappa\sigma\phi_\pi+1}
\end{aligned}$$

De lo anterior podemos ver que todos los términos son positivos, por lo tanto, $\det A + \text{ traza}\, A > 0$, lo que implica que:

$$\det A + \text{ traza}\, A > -1$$

Además, esto también nos indica que no se cumplirá que $\det A + \text{ traza}\, A < -1$, por lo que podemos descartar el segundo conjunto de condiciones para probar que hay equilibrio.

Finalmente, calculemos la diferencia entre el determinante y la traza:

$$\begin{aligned}
\det A - \text{ traza}\, A &= \frac{\beta}{\kappa\sigma\phi_\pi+1} - \frac{1+\kappa\sigma+\beta}{\kappa\sigma\phi_\pi+1} \\
\Leftrightarrow \det A - \text{ traza}\, A &= -\frac{1+\kappa\sigma}{\kappa\sigma\phi_\pi+1}
\end{aligned}$$

Lo anterior es negativo, pero, dado los resultados previos, queremos que se cumpla que $\det A - \text{ traza}\, A > -1$. Para que esto se cumpla, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
-\frac{1+\kappa\sigma}{\kappa\sigma\phi_\pi+1} &> -1 \\
\Leftrightarrow \frac{1+\kappa\sigma}{\kappa\sigma\phi_\pi+1} &< 1 \\
\Leftrightarrow 1+\kappa\sigma &< \kappa\sigma\phi_\pi+1 \\
\Leftrightarrow 1 &< \phi_\pi
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\phi_\pi > 1$, se tendrá que hay un único equilibrio en expectativas racionales.

4. Interprete el resultado anterior ¿Por qué podemos decir que esta RPM actúa como un estabilizador? ¿En equilibrio cómo será la inflación?

   Respuesta: Asumimos $d\varepsilon_t = 0$, entonces por la RPM

$$di = \phi_\pi d\pi$$

   Si $\phi_\pi > 1$ entonces ante aumentos de la inflación la tasa de interés aumentará más que esta. Por tanto el cambio en la tasa de interés real ($di - d\pi$) será estrictamente positivo

   Los agentes esperan que el BC estabilice los cambios en la inflación a través de la tasa de interés nominal.

   Sin embargo, a diferencia del caso visto en clases, la inflación no será cero en equilibrio. Esto se debe a que el BC mide la inflación con un término error por lo que no puede estabilizar completamente. Esto se muestra matemáticamente en el siguiente item donde $\pi_t \neq 0$

5. Resuelva el sistema anterior para encontrar el equilibrio para los procesos de inflación y brecha del producto.

   Indicación: Busque una solución en que la inflación y la brecha del producto son combinaciones lineales de los shocks, o sea:

$$\begin{aligned} x_t &= a_1\varepsilon_t + a_2\xi_t \\ \pi_t &= a_3\varepsilon_t + a_4\xi_t \end{aligned}$$

   Con esto, determine cuál es el valor de las constantes que solucionan el modelo.

   Respuesta: Podemos escribir nuestro guess en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ p_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

   Reemplacemos esto en nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \begin{bmatrix} 1 & \sigma(1-\beta\phi_\pi) \\ \kappa & \kappa\sigma+\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t\varepsilon_{t+1} \\ E_t\xi_{t+1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma\phi_\pi \\ \sigma\kappa & -\sigma\kappa\phi_\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

   Podemos notar que como ε_t y ξ_t son ruidos blancos, tendremos que $E_t\varepsilon_{t+1} = E_t\xi_{t+1} = 0$. Por lo tanto, nuestro sistema se convertirá en:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma\phi_\pi \\ \sigma\kappa & -\sigma\kappa\phi_\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

   Entonces, para encontrar las constantes nos basta con decir que:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma\phi_\pi \\ \sigma\kappa & -\sigma\kappa\phi_\pi \end{bmatrix}$$

   Por lo tanto, tendremos que las soluciones al sistema tendrán la forma:

$$x_t = -\frac{\sigma(-\varepsilon_t + \phi_\pi\xi_t)}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \tag{13}$$

$$\pi_t = -\frac{\sigma\kappa(-\varepsilon_t + \phi_\pi\xi_t)}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \tag{14}$$

Y nuestras constantes serán:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\sigma}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \\
a_2 &= -\frac{\sigma\phi_\pi}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \\
a_3 &= \frac{\sigma\kappa}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \\
a_4 &= -\frac{\sigma\kappa\phi_\pi}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1}
\end{aligned}$$

6. Describa el comportamiento de la inflación, la brecha del producto y la tasa de interés nominal cuando ϕ_π tiende a infinito.

   Respuesta: Tendremos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\phi_\pi \to \infty} x_t &= \lim_{\phi_\pi \to \infty} -\frac{\sigma(-\varepsilon_t + \phi_\pi \xi_t)}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \\
\Leftrightarrow \lim_{\phi_\pi \to \infty} x_t &= -\lim_{\phi_\pi \to \infty} \frac{\sigma(-\varepsilon_t/\phi_\pi + \xi_t)}{\kappa\sigma + 1/\phi_\pi} \\
\Leftrightarrow \lim_{\phi_\pi \to \infty} x_t &= -\frac{\xi_t}{\kappa}
\end{aligned}$$

   Por otro lado, también tendremos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\phi_\pi \to \infty} \pi_t &= \lim_{\phi_\pi \to \infty} -\frac{\sigma\kappa(-\varepsilon_t + \phi_\pi \xi_t)}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \\
\Leftrightarrow \lim_{\phi_\pi \to \infty} \pi_t &= -\lim_{\phi_\pi \to \infty} \frac{\sigma\kappa(-\varepsilon_t/\phi_\pi + \xi_t)}{\kappa\sigma + 1/\phi_\pi} \\
\Leftrightarrow \lim_{\phi_\pi \to \infty} \pi_t &= -\xi_t
\end{aligned}$$

   Finalmente, la tasa de interés nominal es:

$$\begin{aligned}
i_t &= \rho + \phi_\pi(\pi_t + \xi_t) \\
\Leftrightarrow i_t &= \rho + \phi_\pi \left(\frac{\sigma\kappa(\varepsilon_t - \phi_\pi \xi_t)}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} + \xi_t \right) \\
\Leftrightarrow i_t &= \rho + \phi_\pi \frac{\sigma\kappa\varepsilon_t + \xi_t}{\kappa\sigma\phi_\pi + 1} \\
\Leftrightarrow i_t &= \rho + \frac{\sigma\kappa\varepsilon_t + \xi_t}{1/\phi_\pi + \kappa\sigma}
\end{aligned}$$

   Si calculamos el límite, veremos que este será:

$$\lim_{\phi_\pi \to \infty} i_t = \rho + \varepsilon_t + \xi_t/\kappa\sigma$$

2 Bienestar social e indexación de precios

En clases se vio que una aproximación cuadrática a (el negativo de) la función de utilidad del hogar representativo en el modelo NK viene dada por:

$$\sum_{t\geq 0} \beta^t [\pi_t^2 + \lambda(x_t - x^*)^2], \tag{15}$$

donde $\lambda > 0$ es una constante para la cual se proveyeron microfundamentos.

1. Explique la fuente de ineficiencia del modelo NK que captura cada uno de los términos entre paréntesis cuadrados: π_t^2 y $(x_t - x^*)^2$.

   Respuesta: El término π_t^2 captura el costo de que los precios no se ajustan continuamente, por lo cual algunos precios están por sobre el promedio mientras que otros están por debajo, en una economía donde todos los precios serán iguales en la ausencia de fricciones (supuestos de simetría) .

   El término $(x_t - x^*)^2$ captura la brecha entre el producto agregado y aquel que habría en el modelo de ciclos reales subyacente si en este último se corrige la distorsión debida al poder de mercado. El término x^* captura la magintud promedio de esta última distorsión.

   Finalmente, $\lambda > 0$ captura la importancia relativa de los dos efectos.

La indexación de precios se observa frecuentemente en países que han pasado (o están pasando) por periódos de alta inflación.

El modelo y la notación son las mismas que para el Modelo NK, excepto que la dinámica del precio de firmas que no resetean su precio en t viene dada por:

$$\log p_t(i) = \log p_{t-1}(i) + \gamma\pi_{t-1}, \tag{16}$$

donde $0 \leq \gamma \leq 1$ captura el grado de indexación de precios a la medida de inflación más reciente disponible [1].

A partir de la expresión anterior se obtiene (no es necesario que lo haga):

$$\log p_{t+k}(i) = \log p_t(i) + \gamma[\log P_{t+k-1} - \log P_{t-1}]. \tag{17}$$

2. Expese el logaritmo del nivel agregado de precios en el período t, $\log P_t$, como función de los logaritmos de los niveles de precios pasados y el valor corriente del logaritmo del precio de reseteo, $\log p_t^*$.

   Indicación: Comience por expresar por separado la contribución a $\log P_t$ de quienes se ajustan y quienes no se ajustan.

   Respuesta: Denotando por NA y A los subconjuntos de $[0,1]$ de las firmas que no se ajustan y se ajustan, en t, respectivamente, tendremos que el nivel de precios agregado satisface:

$$\log P_t \equiv \int_0^1 \log p_t(i)\,\mathrm{d}i = \int_{i\in\mathrm{NA}} \log p_t(i)\,\mathrm{d}i + \int_{i\in\mathrm{A}} \log p_t(i)\,\mathrm{d}i. \tag{18}$$

   Al igual que en el caso habitual de Calvo, tenemos:

$$\int_{i\in\mathrm{A}} \log p_t(i)\,\mathrm{d}i = (1-\alpha)\log p_t^*,$$

[1] Recuerde que $\pi_t \equiv \log P_t - \log P_{t-1}$, donde P_t denota el nivel de precios agregado.

donde $\log p_t^*$ denota el precio de reseteo de quienes se ajustan, el cual es común a través de las firmas que se ajustan, pues solo hay shocks agregados.

Usando (**??**) tendremos que la contribución a $\log P_t$ de quienes no se ajustan en t vendrá dada por:

$$\int_{i\in \mathrm{NA}} \log p_t(i)\,\mathrm{d}i = \int_{i\in \mathrm{NA}} [\log p_{t-1}(i) + \gamma\pi_{t-1}]\,\mathrm{d}i = \alpha \log P_{t-1} + \alpha\gamma\pi_{t-1},$$

donde en el último paso usamos el supuesto de independencia de Calvo y que la fracción que no se ajusta es α.

Combinando (18) con las expresiones derivadas a continuación se obtiene:

$$\log P_t = \alpha \log P_{t-1} + \alpha\gamma\pi_{t-1} + (1-\alpha)\log p_t^*.$$

Reemplazando π_{t-1} por $\log P_{t-1} - \log P_{t-2}$ tenemos:

$$\log P_t = \alpha[(1+\gamma)\log P_{t-1} - \gamma \log P_{t-2}] + (1-\alpha)\log p_t^*. \tag{19}$$

3. Utilice (17) para escribir el problema de maximización que determina el precio óptimo de reseteo de una firma que se ajusta en t. Encuentre la condición de primer orden correspondiente y obtenga una expresión para $\log p_t^*$. que derivada en clases.

   Indicación: Tome como punto de partida la CPO de la firma que ajusta su precio:

$$\mathrm{E}_t \left\{ \sum_{j\geq 0} (\alpha\beta)^j \Pi_1(p_{t+j}, P_{t+j}; Y_{t+j}, \xi_{t+j}) \right\} = 0. \tag{20}$$

   donde p_{t+j} denota el precio que la firma tendrá en $t+j$ si elige p_t^* en t y no ha tenido su "shock-a-la-Calvo" entre t y $t+j$. Y use la aproximación de Taylor:

$$\Pi_1(p,P;Y,\xi) \simeq c[\log p - \log P - \zeta x],$$

   donde $x \equiv \log Y - \log Y^n(\xi)$ denota la brecha del producto (respecto del nivel natural).

   Respuesta: Usando Taylor y (17):

$$\Pi_1(p_{t+j}, P_{t+j}; Y_{t+j}, \xi_{t+j}) = c[\log p_t^* + \gamma \log P_{t+j-1} - \gamma \log P_{t-1} - \log P_{t+j} - \zeta x_{t+j}].$$

   Luego la CPO (20) equivale a:

$$\sum_{j\geq 0} (\alpha\beta)^j \mathrm{E}_t[\log p_t^* + \gamma \log P_{t+j-1} - \gamma \log P_{t-1} - \log P_{t+j} - \zeta x_{t+j}] = 0.$$

   Y despejando las expresiones de la suma que no dependen de j:

$$\log p_t^* - \gamma \log P_{t-1} = (1-\alpha\beta) \sum_{j\geq 0} (\alpha\beta)^j \mathrm{E}_t[\log P_{t+j} - \gamma \log P_{t+j-1} + \zeta x_{t+j}]. \tag{21}$$

   Bajo $\gamma = 0$, tendremos:

$$\log p_t^* = (1-\alpha\beta) \sum_{j\geq 0} (\alpha\beta)^j \mathrm{E}_t[\log P_{t+j} + \zeta x_{t+j}]$$

   Que corresponde al resultado del modelo de Calvo clásico.

4. Demuestre que el valor presente esperado de la varianza de $\log p_t(i)$ será proporcional a

$$\sum_{j\geq 0} \beta^j E_t[\pi_{t+j} - \gamma\pi_{t+j-1}]^2.$$

Indicación: Revise el material de apoyo adjunto. Recuerde que en este caso se cumple que:

$$\log P_t = \alpha(\log P_{t-1} + \gamma\pi_{t-1}) + (1-\alpha)\log p_t^*$$

Respuesta: Tenemos:

$$\log p_t(i) = \begin{cases} \log p_{t-1}(i) + \gamma\pi_{t-1}, & \text{con prob } \alpha. \\ \log p_t^* & \text{con prob. } 1-\alpha. \end{cases} \tag{22}$$

Usamos la propiedad que indica que:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}_Y \mathrm{Var}[X|Y] + \mathrm{Var}_Y\{X|Y\}$$

Donde Y es una variable aleatoria que con probabilidad $1-\alpha$ toma valor 1 (la firma ajusta), y con probabilidad α toma valor 0 (la firma no ajusta). Por lo tanto, tendremos que:

$$\mathrm{Var}(\log p_t(i)) = \alpha\mathrm{Var}(\log p_{t-1}(i)) + \mathrm{Var}[(\log p_t^* - \log P_{t-1} - \gamma\pi_{t-1})\mathrm{Bin}(1, 1-\alpha)]$$

Por lo cual:

$$\mathrm{Var}(\log p_t(i)) = \alpha\mathrm{Var}(\log p_{t-1}(i)) + (\log p_t^* - \log P_{t-1} - \gamma\pi_{t-1})^2\alpha(1-\alpha) \tag{23}$$

Del ejercicio anterior sabemos que:

$$\log P_t = \alpha(\log P_{t-1} + \gamma\pi_{t-1}) + (1-\alpha)\log p_t^*$$

Despejando $\log p_t^*$ de la expresión anterior y sustituyendo en (23) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\log p_t(i)) &= \alpha\mathrm{Var}(\log p_{t-1}(i)) + \frac{1}{(1-\alpha)^2}[\pi - \gamma\pi_{t-1}]^2\alpha(1-\alpha) \\ \Leftrightarrow \mathrm{Var}(\log p_t(i)) &= \alpha\mathrm{Var}(\log p_{t-1}(i)) + \frac{\alpha}{(1-\alpha)}[\pi - \gamma\pi_{t-1}]^2. \end{aligned}$$

Luego, multiplicamos a ambos lados por β^t, y sumamos a ambos lados desde $t = 0$ a ∞. Por el resultado visto en clases tendremos que:

$$\sum_{t\geq 0} \beta^t \mathrm{Var}(\log p_t(i)) \approx \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)} \sum_{t\geq 0} \beta^t (\pi_t - \gamma\pi_{t-1})^2$$