# SOLEMNE II – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: DIEGO FICA - NICOLÁS SUÁREZ

## Pregunta 1 (15 puntos)

Sea $A$ un conjunto finito con tres o más alternativas sociales y $\mathcal{P}$ el conjunto de los rankings estrictos sobre $A$. En una economía con $n \geq 3$ individuos, suponga que la función $f : \mathcal{P}^n \to A$ es una regla de elección social totalmente implementable en estrategias Nash y Pareto eficiente.[1] Demuestre que $f$ es dictatorial.

*Solución.* Por el Teorema de Maskin (1977) sabemos que toda regla de elección social totalmente implementable en estrategias Nash es Maskin monótona, lo cual implica que es Condorcet monótona (esto último fue probado en la Pregunta 3 del Control III). Además, como $f$ es Pareto eficiente, tenemos que $f(\mathcal{P}^n) = A$. Efectivamente, dado $a \in A$, escoja un perfil de preferencias $P \in \mathcal{P}^n$ en el cual todos los individuos posicionan la alternativa $a$ como la mejor rankeada. Si $f(P) \neq a$, todos podrían mejorar al cambiar $f(P)$ por $a$, lo cual contradeciría la Pareto eficiencia de $f$. Por lo tanto, $f$ es Condorcet monótona y cumple $f(\mathcal{P}^n) = A$. Esto no asegura, gracias al Teorema de Yu (2013), que $f$ es dictatorial. $\square$

## Pregunta 2 (10 puntos)

Considere un *marriage market* con $n$ hombres y $n$ mujeres, donde todos los hombres tienen las mismas preferencias sobre el conjunto de las mujeres y las consideran a todas aceptables. Suponga que las mujeres se ordenan siguiendo las preferencias de los hombres, desde la mejor a la peor rankeada, y luego escogen pareja aplicando el algoritmo *serial dictatorship*. Demuestre que el emparejamiento alcanzado es estable en el mercado bilateral. ¿Puede haber otros emparejamientos estables?

*Solución.* Sea $w_i$ la $i$-ésima mujer mejor posicionada según los hombres. Entonces, según lo descrito en el enunciado, las mujeres escogerán pareja de forma secuencial siguiendo el orden $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (i.e., aplicando el algoritmo *serial dictatorship*). Note que la mujer $w_1$ escogerá al hombre que ella posiciona como su mejor alternativa, el cual denotaremos por $m_1$. La mujer $w_2$ escogerá al hombre que ella considera su mejor alternativa en $M \setminus \{m_1\}$, el cual denotaremos por $m_2$.[2] Y así sucesivamente, de tal forma que la mujer $w_i$ se emparejará con su mejor alternativa en el conjunto $M \setminus \{w_1, \ldots, w_{i-1}\}$, denotada por $m_i$. Esto nos llevará al emparejamiento $\mu = ((m_1, w_1), \ldots, (m_n, w_n))$.

¿Qué ocurre si los hombres implementan el algoritmo de aceptacón diferida? Bueno, en la primera etapa todos ellos le hacen propuestas a $w_1$, quien se empareja con $m_1$. Una decisión que será definitiva, pues es su mejor opción. En la segunda etapa, todos los hombres en $M \setminus \{m_1\}$ le hacen propuestas a $w_2$, quien podrá escoger a $m_2$ y su decisión sería definitiva, pues no recibiría nuevas propuestas. Y así sucesivamente, formándose el emparejamiento $\mu$. Por el Teorema de Gale y Shapley (1962), concluimos que $\mu$ es estable.

Además, $\mu$ es el único emparejamiento estable, pues si las mujeres hacen propuestas siguiendo el algoritmo de aceptación diferida también llegaríamos a $\mu$ (Pregunta (iv) del Control V). $\square$

[1] Esto es, $f(P_1, \ldots, P_n)$ es Pareto eficiente cuando las preferencias de cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ son determinadas por $P_i$.

[2] Como es usual, $M$ denota al conjunto de hombres.

Pregunta 3 (15 puntos)

(i) Un conjunto de no-propietarios $\{1, \dots, n\}$ tienen preferencias estrictas por $n$ casas. Demuestre que en toda distribución Pareto eficiente algún individuo recibe la casa que a él más le gusta.

*Solución.* Suponga que en una distribución Pareto eficiente $\phi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ nadie recibe la casa que más le gusta. Entonces, el individuo $i_1 = 1$ prefiere la casa del individuo $i_2 \in \{2, \dots, n\}$ a la casa $\phi(i_1)$, el individuo $i_2$ prefiere $\phi(i_3)$ a $\phi(i_2)$ y así sucesivamente. Si implementamos este proceso $n+1$ veces obtenemos una secuencia de individuos $i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}$ tal que $\phi(i_{k+1}) \succ_{i_k} \phi(i_k)$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Como hay $n$ individuos, en el conjunto $\{i_1, \dots, i_{n+1}\}$ debe haber al menos un individuo repetido. Entre dos repeticiones sucesivas de un individuo se forma un ciclo, el cual genera una mejora de Pareto si se redistribuyen las casas siguiendo el orden definido en él. Esto contradeciría la Pareto eficiencia de $\phi$. □

(ii) Cuatro estudiantes $\{a, b, c, d\}$, los cuales entrarán el próximo semestre a la universidad, tienen las siguientes preferencias estrictas por habitaciones en un dormitorio universitario:

$$h_1 \succ_a h_2 \succ_a h_3 \succ_a h_4,$$
$$h_4 \succ_b h_2 \succ_b h_1 \succ_b h_3,$$
$$h_3 \succ_c h_1 \succ_c h_4 \succ_c h_2,$$
$$h_3 \succ_d h_2 \succ_d h_4 \succ_d h_1.$$

Encuentre las distribuciones de habitaciones que son Pareto eficientes.

*Solución.* Sabemos del ítem anterior que en una distribución Pareto eficiente al menos un individuo recibe su mejor alternativa. Si sacamos a uno de esos individuos del mercado junto con su habitación, al menos uno de los tres que quedan recibirá su mejor alternativa entre las habitaciones que quedan.[3] Si lo sacamos junto con su habitación, al menos uno de los dos que quedan recibe su mejor alternativa entre las dos habitaciones que quedan. Esto es, toda distribución Pareto eficiente se puede obtener como el resultado de aplicar un *serial dictatorship* partiendo de algún orden los estudiantes.

Como son cuatro estudiantes, hay 24 ordenes posibles, lo cuales al aplicar el algoritmo *serial dictatorship* nos llevan a los siguientes emparejamientos:

| Orden | Emparejamiento | Orden | Emparejamiento |
|---|---|---|---|
| $a,b,c,d$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ | $c,a,b,d$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ |
| $a,b,d,c$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_2),(d,h_3))$ | $c,a,d,b$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ |
| $a,c,b,d$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ | $c,b,a,d$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ |
| $a,c,d,b$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ | $c,b,d,a$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ |
| $a,d,c,b$ | $((a,h_1),(b,h_2),(c,h_4),(d,h_3))$ | $c,d,a,b$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ |
| $a,d,b,c$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_2),(d,h_3))$ | $c,d,b,a$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ |
| $b,a,c,d$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ | $d,a,b,c$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_2),(d,h_3))$ |
| $b,a,d,c$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_2),(d,h_3))$ | $d,a,c,b$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_2),(d,h_3))$ |
| $b,c,a,d$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ | $d,b,a,c$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_2),(d,h_3))$ |
| $b,c,d,a$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_3),(d,h_2))$ | $d,b,c,a$ | $((a,h_2),(b,h_4),(c,h_1),(d,h_3))$ |
| $b,d,c,a$ | $((a,h_2),(b,h_4),(c,h_1),(d,h_3))$ | $d,c,a,b$ | $((a,h_2),(b,h_4),(c,h_1),(d,h_3))$ |
| $b,d,a,c$ | $((a,h_1),(b,h_4),(c,h_2),(d,h_3))$ | $d,c,b,a$ | $((a,h_2),(b,h_4),(c,h_1),(d,h_3))$ |

Por lo tanto, hay cuatro emparejamientos estables (los cuales fueron destacados en azul la primera vez que aparecieron en la lista). □

[3]Dada una distribución Pareto eficiente de objetos entre individuos, si sacamos del grupo a algunos agentes junto con los objetos que ellos recibieron, entonces para un conjunto restante la distribución continua siendo Pareto eficiente.

(iii) Bajo las condiciones del ítem previo, suponga que cada estudiante estaba originalmente en una habitación: $(a, h_3)$, $(b, h_2)$, $(c, h_1)$ y $(d, h_4)$. Bajo las preferencias descritas en (ii), encuentre las redistribuciones de habitaciones que están en el núcleo.

*Solución.* Gracias al Teorema de Shapley y Scarf (1974) sabemos que, cuando cada individuo es propietario de una (única) habitación, existe una única distribución en el núcleo de un mercado unilateral uno-a-uno. Es más, esa asignación en el núcleo se puede obtener aplicado el algoritmo *Top Trading Cycle* (TTC).

Al implementar TTC, en la primera etapa todos apuntan al individuo que tiene la casa que ellos prefieren: $b \to d \to a \to c \to a$. Se forma el ciclo $(a, c)$, el cual se implementa e induce $(a, h_1)$ y $(c, h_3)$. En la segunda etapa, los individuos que quedan apuntan al agente que tiene la casa que ellos prefieren entre aquellos que aún están participando: $b \to d \to b$. Se forma un ciclo, el cual se implementa e induce $(b, h_4)$ y $(d, h_2)$. Esto es, $((a, h_1), (b, h_4), (c, h_3), (d, h_2))$ es el único emparejamiento en el núcleo. □

PREGUNTA 4 (20 PUNTOS)

Sea $A = \{0, 1\} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto de alternativas sociales en una economía con $n \geq 3$ individuos caracterizados por funciones de utilidad $U^i : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ tales que $U^i(\theta_i, (\alpha, (t_1, \dots, t_n))) = \theta_i \alpha + t_i$, donde $\theta_i \in \mathbb{R}$ es un parámetro que caracteriza al individuo $i \in \{1, \dots, n\}$. El vector $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ es observado por los individuos, pero es información desconocida para un planificador central.

El planificador central quiere implementar una política social $f : \mathbb{R}^n \to A$ que depende de las características no observables de los individuos, de tal forma que $f(\theta_1, \dots, \theta_n) = (x(\theta_1, \dots, \theta_n), (0, \dots, 0))$, donde

$$x(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } \sum_{i=1}^{n} \theta_i \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Justificando detalladamente sus afirmaciones, responda las siguientes preguntas:

(i) ¿Es posible implementar $f$ de forma veraz en estrategias dominantes?

*Solución.* Como $f$ es exitosa, para ser implementable de forma veraz en estrategias dominantes es necesario que el mecanismo directo $(\mathbb{R}^n, f)$ sea de Groves (Teorema de Green y Laffont (1977)). Y esto no es así, pues en un mecanismo de Groves la función que define las de transferencias nunca es idénticamente cero. □

(ii) ¿Es posible implementar $f$ en estrategias Nash?

*Solución.* Para que $f$ sea implementable en estrategias Nash es suficiente que sea Maskin monótona y cumpla *no poder de veto*. Como las preferencias de cada individuo son estrictamente crecientes en la propia transferencia, es imposible que $n - 1$ de ellos coincidan en evaluar una alternativa social como la mejor de todas. Por lo tanto, la propiedad de *no poder de veto* se cumple trivialmente. Por otro lado, para asegurar la monotonía Maskin de $f$ hay que probar que, dados $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ y $\theta' = (\theta'_1, \dots, \theta'_n)$, las siguientes propiedades son satisfechas:

(1) Si $f(\theta) = (1, \vec{0})$ y para todo individuo $i$ tenemos que

$$U^i(\theta_i, (1, \vec{0})) \geq U^i(\theta_i, (\alpha, \vec{t})) \Longrightarrow U^i(\theta'_i, (1, \vec{0})) \geq U^i(\theta'_i, (\alpha, \vec{t})), \qquad \forall (\alpha, \vec{t}) \in A,$$

entonces $f(\theta') = (1, \vec{0})$. Esto es equivalente a asegurar que, $\sum_i \theta_i \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \theta_i \geq \theta_i + t_i \quad &\Longrightarrow \quad \theta'_i \geq \theta'_i + t_i, \qquad \forall t_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ \theta_i \geq t_i \quad &\Longrightarrow \quad \theta'_i \geq t_i, \qquad \forall t_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

implican que $f(\theta') = (1, \vec{0})$. Esto es, $f(\theta') = (1, \vec{0})$ cuando $\sum_i \theta_i \geq 0$ y $\theta' \geq \theta$.

(2) Si $f(\theta) = (0, \vec{0})$ y para todo individuo $i$ tenemos que

$$U^i(\theta_i, (0, \vec{0})) \geq U^i(\theta_i, (\alpha, \vec{t})) \Longrightarrow U^i(\theta_i', (0, \vec{0})) \geq U^i(\theta_i', (\alpha, \vec{t})), \qquad \forall (\alpha, \vec{t}) \in A,$$

entonces $f(\theta') = (0, \vec{0})$. Esto es equivalente a asegurar que, $\sum_i \theta_i < 0$ y

$$\begin{aligned} 0 \geq \theta_i + t_i \quad &\Longrightarrow \quad 0 \geq \theta_i' + t_i, \qquad &&\forall t_i \in \mathbb{R},\, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \\ 0 \geq t_i \quad &\Longrightarrow \quad 0 \geq t_i, \qquad &&\forall t_i \in \mathbb{R},\, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

implican que $f(\theta') = (0, \vec{0})$. Esto es, $f(\theta') = (0, \vec{0})$ cuando $\sum_i \theta_i < 0$ y $\theta' \leq \theta$.

Note que la validez de las propiedades destacadas en azul es una consecuencia directa de la definición de la función $x : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$. Por lo tanto, $f$ es implementable en estrategias Nash. $\square$