Pregunta 1

Considere un juego repetido, donde el juego de etapa es el dilema del prisionero con los siguientes pagos:

		Jugador 2	
		C	D
	C	(1,1)	(-1,2)
Jugador 1	D	(2,-1)	(0,0)

El pago de cada jugador en el juego repetido es la suma descontada de los pagos de cada etapa. El factor de descuento es $\delta \in (0,1]$.
Considere la estrategia (conocida como tit-for-tat) dada por:

- En t = 0, jugar C.
- En $t \geq 1$, jugar la acción que jugó su oponente en la etapa $t-1$.

Si ambos jugadores juegan la estrategia tit-for-tat, se pide lo siguiente:

1. Calcular el pago esperado de cada jugador.

Juego: (C,C), (C,C), (C,C), ...

El pago esperado del juego será:

$$u_i = 1 + \delta 1 + \delta^2 1 + \dots = \sum_{t \geq 0} 1 \cdot \delta^t = 1 \cdot \sum_{t\geq 0} \delta^t = 1 \cdot \frac{1}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta} \quad \text{para } i = 1,2$$

2. Encontrar la condición que debe cumplir δ para que no sea conveniente para J1 desviar en $t = 0$.

Si J1 desvía en t=0, el juego será: (D,C), (C,D), (D,C), (C,D), ...

* pagos de J1 = $\begin{cases} 2 & ; \; t = 0,2,4,6,\dots \text{ (pares)} \\ -1 & ; \; t = 1,3,5,7,\dots \text{ (impares)} \end{cases}$

$$u_1 = 2 - \delta + 2\delta^2 - \delta^3 + 2\delta^4 - \delta^5 + \dots$$

$$u_1 = (2-\delta) + \delta^2(2-\delta) + \delta^4(2-\delta) + \dots$$

$$u_1 = \sum_{t\geq 0} \delta^{2t}(2-\delta)$$

$$u_1 = \frac{2-\delta}{1-\delta^2}$$

Para que J1 no tenga incentivos a desviar:

$$\frac{1}{1-\delta} \geq \frac{2-\delta}{1-\delta^2}$$

$$\frac{1}{\cancel{1-\delta}} \geq \frac{2-\delta}{(1+\delta)\cancel{(1-\delta)}}$$

$$1+\delta \geq 2-\delta$$

$$\delta \geq 1/2$$

3. Suponga que J2 desvía en $t = 0$:

a. ¿Cuál es el desarrollo del juego? ¿Cuál es el pago que recibe J1?

Juego : $(C,D), (D,C), (C,D), (D,C), \ldots$

* pagos J1 : $\begin{cases} -1 \ ; & t = 0, 2, 4, 6, \ldots \quad \text{(pares)} \\ 2 \ ; & t = 1, 3, 5, 7, \ldots \quad \text{(impares)} \end{cases}$

* $u_1 = -1 + 2\delta - \delta^2 + 2\delta^3 - \delta^4 + 2\delta^5 - \ldots$

$= (-1 + 2\delta) + \delta^2(-1 + 2\delta) + \delta^4(-1 + 2\delta) + \ldots$

$= \sum_{t \geq 0} \delta^{2t}(-1 + 2\delta)$

$= \dfrac{-1 + 2\delta}{1 - \delta^2}$

b. Encuentre la condición que debe cumplir δ para que no sea conveniente para J1 desviar en $t = 1$.

· Si J1 desvía en $t = 1$: $(C,D), (C,C), (C,C), \ldots$

siguiendo la estrategia, J1 debía jugar D $\Rightarrow$ desvía jugando C

pagos de J1 · $\begin{cases} -1 \ ; & t = 0 \\ 1 \ ; & t \geq 1 \end{cases}$

$u_1 = -1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = -1 + \sum_{t \geq 1} \delta^t = -1 + \dfrac{\delta}{1 - \delta}$

$\sum_{t \geq 0} \delta^t = \dfrac{1}{1 - \delta} \rightarrow \underbrace{\delta^0}_{1} + \sum_{t \geq 1} \delta^t = \dfrac{1}{1 - \delta}$

$\rightarrow \sum_{t \geq 1} \delta^t = \dfrac{1}{1 - \delta} - 1 = \dfrac{1 - (1 - \delta)}{1 - \delta} = \dfrac{\delta}{1 - \delta}$

∴ Para que J1 no desvíe en $t = 1$:

$\dfrac{-1 + 2\delta}{1 - \delta^2} \geq -1 + \dfrac{\delta}{1 - \delta}$

$\dfrac{-1 + 2\delta}{\cancel{(1 - \delta)}(1 + \delta)} \geq \dfrac{-1 + 2\delta}{\cancel{1 - \delta}}$

$(-1 + 2\delta) \geq \underbrace{(1 + \delta)}_{\geq 1}(-1 + 2\delta)$

Dado que $(1 + \delta) \geq 1$, la condición se cumple si $(-1 + 2\delta) \leq 0$

$-1 + 2\delta \leq 0$

$\Rightarrow \delta \leq 1/2$

4. Considerando los resultados de las partes anteriores, ¿para qué valor(es) de δ el perfil de estrategias donde ambos jugadores juegan tit-for-tat podría ser un ENPS?

Dado lo encontrado en 2 y 3.b, el único valor para el cual el perfil de estrategias propuesto es ENPS es $\delta = 1/2$

Pregunta 2:

Considere que hay dos firmas que producen una cantidad q_i, con $i = 1,2$ del mismo producto. El precio está determinado por $P(q_1, q_2) = a - (q_1 + q_2)$. Los pagos vienen dados por $u_i(q_1, q_2) = p \cdot q_i = (a - q_1 - q_2)q_i$. Las firmas pueden coludirse y producir la mitad de la cantidad monopólica cada una, $q_m/w = (a-c)/4$ con un pago de $u_i = (a-c)^2/8$ cada una, o competir a la Cournot y producir $q_c = (a-c)/3$ con pagos de $u_i = (a-c)^2/9$ cada una. Considere el juego $G(\infty)$, donde G es el juego de etapa de Cournot. Considere la siguiente estrategia gatillo:

- Producir $q_m/2$ en la primera etapa.
- En la segunda etapa producir $q_m/2$ si ambas firmas han producido $q_m/2$ hasta ahora y producir q_c en caso contrario.

1. ¿Hay valores de δ para los cuales es ENPS? Parta con valores para a y c genéricos. Luego encuentre el resultado para $a = 12$ y $c = 0$.

De Folk Theorem sabemos que la estrategia puede ser ENPS si: $\delta \geq \dfrac{d_i - x_i}{d_i - e_i}$

d_i: π desviarse

x_i: π seguir gatillo

e_i: π repetido desvío (Cournot)

* $d_i = \pi^{\text{desvío}}(q^d, q^{m/2}) = (a - q_d - q_{m/2} - c)\,q_d = (a - q_{m/2} - c)\,q_d - q_d^2$

$\dfrac{\partial}{\partial q_d} = (a - q_{m/2} - c) - 2q_d = 0 \Rightarrow q_d = \dfrac{a - q_{m/2} - c}{2} = \dfrac{a - \left(\frac{a-c}{4}\right) - c}{2} = \dfrac{\frac{3}{4}(a-c)}{2} = \dfrac{3(a-c)}{8}$

$\therefore\ d_i = \left(a - \dfrac{3(a-c)}{8} - \dfrac{(a-c)}{4} - c\right)\cdot\dfrac{3(a-c)}{8} = \left[(a-c)\left(1 - \dfrac{3}{8} - \dfrac{2}{8}\right)\right]\dfrac{3(a-c)}{8} = \dfrac{3(a-c)}{8}\cdot\dfrac{3(a-c)}{8}$

$d_i = \dfrac{9(a-c)^2}{64}$

* $x_i = \pi$ gatillo $= (a - q_{m/2} - q_{m/2} - c)\,q_{m/2}$

$= \left(a - \dfrac{(a-c)}{4} - \dfrac{(a-c)}{4} - c\right)\cdot\dfrac{(a-c)}{4}$

$= (a-c)(1 - 1/4 - 1/4)\cdot(a-c)/4$

$= \dfrac{(a-c)}{2}\cdot\dfrac{(a-c)}{4}$

$= \dfrac{(a-c)^2}{8}$

* $e_i = \pi$ (Cournot) $= (a - q_c - q_c - c)\,q_c$

$= (a-c)(1 - 2\cdot 1/3)\cdot(a-c)/3$

$= \dfrac{(a-c)^2}{9}$

$$\Rightarrow \delta \geq \frac{\frac{9(a-c)^2}{64} - \frac{(a-c)^2}{8}}{\frac{9(a-c)^2}{64} - \frac{(a-c)^2}{9}}$$

* $a = 12,\ c = 0 \Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} d_i &= \frac{9\cdot 12^2}{64} \\ x_i &= 12^2/8 \\ e_i &= 12^2/9 \end{aligned}\right\}$ $\delta \geq \dfrac{12^2\,(9/64 - 1/8)}{12^2\,(9/64 - 1/9)}$

$\delta \geq 9/17 \rightarrow$ para $\delta \geq 9/17$ gatillo es ENPS

Ahora asuma que hay dos firmas que fijan precios simultáneamente. La demanda por el producto de la firma i es $a - p_i$ si $p_i < p_j$, 0 si $p_i > p_j$ y $(a - p_i)/2$ si $p_i = p_j$. El costo marginal es $c < a$. Considere el juego $G(\infty)$, donde G es el juego de etapa de Bertrand.

2. Demuestre que las empresas pueden utilizar una estrategia gatillo para mantener el nivel de precio de monopolio en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos solo si $\delta \geq 1/2$.

Estrategia: ① p^{monop} en 1ra ronda

② En rondas siguientes jugar p^{monop} si se jugó p^{monop} en ronda anterior.
Caso contrario jugar $p_i = c$ (Bertrand)

* $x_i = \pi^{monopolio} = \dfrac{(a-c)^2}{8}$

se lleva todo el mercado

* $d_i = \pi^{derviar} = p_d\,(a - p_d - c)$

· desvía escogiendo $p_d = p_m - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow d_i = \dfrac{(a-c)^2}{4}$

* $e_i = \pi$ Bertrand $= 0$

Usando Folk Theorem:

$$\delta \geq \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i} = \frac{\frac{(a-c)^2}{4} - \frac{(a-c)^2}{8}}{\frac{(a-c)^2}{4} - 0} = \frac{(a-c)^2\,(2/8 - 1/8)}{(a-c)^2 \cdot 1/4} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \delta \geq 1/2$