Microeconomía I
Ayudantía 3

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

Pregunta 1

La relación de preferencias $\succsim$ definida en $X = \mathrm{R}_+^L$ es débilmente monótona si y solo si $x \geq y$ implica $x \succsim y$. Demuestre que si $\succsim$ es transitiva, localmente no saciada y débilmente monótona, entonces es monótona.

Pregunta 2

Demuestre que una preferencia $\succsim$ continua es homotética si y solo si admite una función de utilidad $u(x)$ que es homogénea de grado 1.

Pregunta 3

Demuestre que si las preferencias $\succsim$ son convexas, entonces $h(p, u)$ es un conjunto convexo. Además, demuestre que si $\succsim$ es estrictamente convexo, entonces $h(p, u)$ es un singleton.

Pregunta 4

La función de utilidad indirecta $v(p, w)$ es logarítmica homogénea si $v(p, aw) = v(p, w) + ln(a)$ para $a > 0$. Muestre que si $v(\cdot, \cdot)$ es logarítmica homogénea, entonces $x(p, 1) = -\nabla_p v(p, 1)$.

Pregunta 5

Considere la función de utilidad $u(x) = [\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho}$.

a. Muestre qué sucede cuando $\rho = 1$, $\rho \to 0$ y $\rho \to -\infty$[1].

b. Asumiendo que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, calcule la demanda Walrasiana y la función de utilidad indirecta.

c. Defina y calcule la elasticidad de sustitución entre los bienes 1 y 2.

Pregunta 6

Suponga que el gobierno le pone un impuesto t al precio del bien 1, de tal forma que su nuevo precio de este bien es $p_1^1 = p_1^0 + t$, mientras se mantiene todo lo demás constante. En este contexto, se define el *deadweight loss of commodity taxation* como qué tanto peor está el consumidor con este impuesto en comparación a un impuesto de suma alzada que recaude lo mismo. Basado en estas definiciones, responda lo siguiente:

a. Derive una expresión para el *deadweight loss of commodity taxation* en términos de la demanda hicksiana al nivel de utilidad u^1. ¿Cuál es el signo de esto?

b. Repita la pregunta (a) pero para u^0.

c. Grafique ambos casos.

d. Calcule la derivada del *deadweight loss of commodity taxation* con respecto a t para ambos casos. Además, muestre que evaluada en $t = 0$ la derivada es igual a 0 y responda e interprete qué sucede para $t > 0$ si $h_1(p, u^0)$ es estrictamente decreciente en p_1.

[1] Puede asumir que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ en esta pregunta.

P1] pdq: $\succsim$ transitiva, lns y débil mono

$\Longrightarrow$ monótona

Es: $x \gg y \longrightarrow \boxed{x \succ y}$

- Supongo que $x \gg y$

$$\varepsilon = \min(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_L - y_L) > 0$$

- $\forall z \in X$: si $\|y - z\| < \varepsilon \Longrightarrow x \gg z$.
- Por lns $\longrightarrow \exists z^* \in X$ tq $\|y - z^*\| < \varepsilon \wedge \boxed{z^* \succ y}$

$x \gg z^*$

- $x \gg z^* \longrightarrow x \geq z^* \xrightarrow{\text{mono débil}} \boxed{x \succsim z^*}$
- Por trans: $\underline{\underline{x \succ y}}$ Q.E.D.

P21 $\succsim$ continua homotética $\Longleftrightarrow$ admite $u(x)$ homº 1

a) "$\Longleftarrow$": $u(\cdot)$ homº 1 y $x \sim y \Longrightarrow u(x) = u(y)$

$$u(x) = u(y) \longrightarrow a\,u(x) = a\,u(y) \qquad a > 0$$

$$\xrightarrow{\text{homº1}} u(ax) = u(ay)$$

$$\longrightarrow [ax \sim ay] \longrightarrow \text{homotética} \quad //$$

b) "$\Longrightarrow$": $u(x)e \sim x$; $e = [1\ 1 \cdots n \cdots 1]'$

$$\left.\begin{aligned} u(ax)e &\sim ax \\ a\,u(x)e &\sim ax \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} u(ax)e &\sim a\,u(x)e \\ u(ax) &= \underline{\underline{a\,u(x)}} \end{aligned} \qquad a > 0$$

P3

a) $\succsim$ convexas $\Longrightarrow h(p,u)$ convexo

$x \in h(p,u)$, $x' \in h(p,u)$

$p\cdot x = p\cdot x'$; $u(x) \geq u$; $u(x') \geq u$

$x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$; $\lambda \in (0,1)$

$\rightarrow px'' = \lambda px + (1-\lambda)px'$

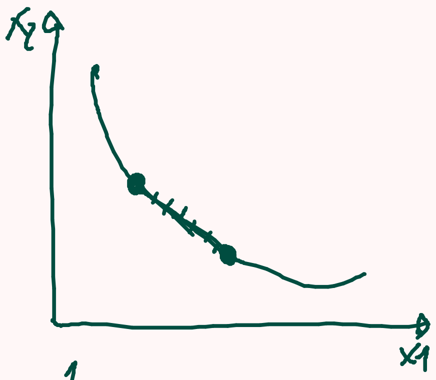
$= \lambda px + (1-\lambda)px = px = px' = px''$

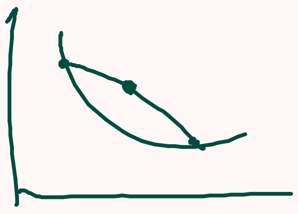
$\rightarrow u(x'') \geq u$: por pref convexas $x \succsim y$

$x' \succsim y$

$\lambda x + (1-\lambda)x' \succsim y$

b) $\succsim$ est. convexas $\Longrightarrow h(p,u)$ es un singleton





• $x, x' \in h(p,u) \;\wedge\; x \neq x'$

$\rightarrow px = px' = px''$

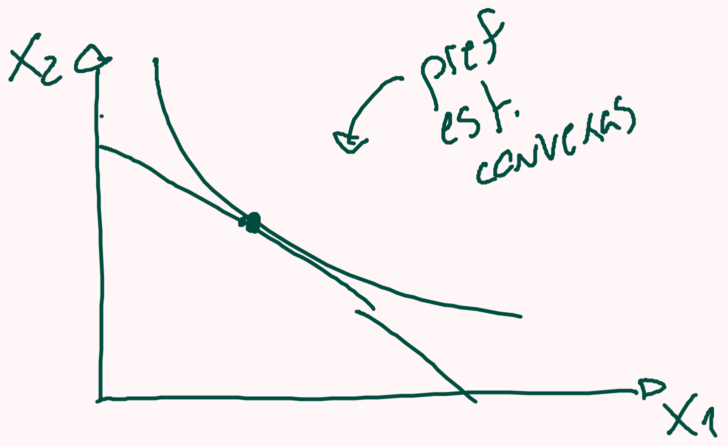
$\left.\begin{array}{l} x \succsim y \\ x' \succsim y \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{conv est}} \left[x'' \succ x \right]$

$\rightarrow \theta \approx 1$; $\theta < 1$ Ej: $\theta = 0{,}9999999$

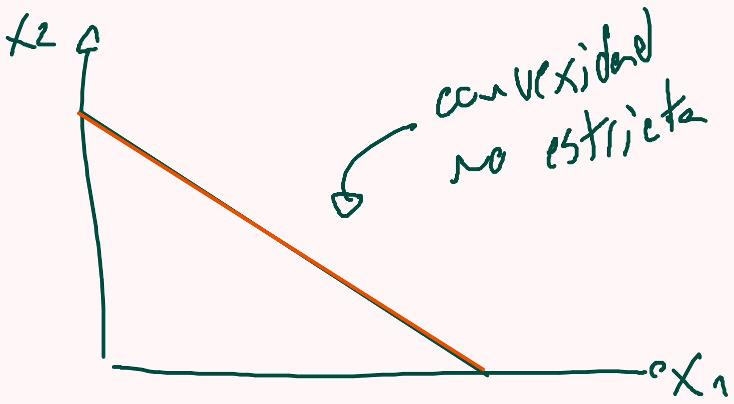
$\exists \theta : \theta x'' \succ x$

$px'' = px$; $\theta px'' < px$

↳ Contradicción



$\rightarrow h(p,u)$ es singleton



$\boxed{P4}$

$$V(p, \underline{\alpha w}) = V(p,w) + \ln(\alpha) \overset{\alpha > 0}{\Longrightarrow} x(p,1) = -\nabla_p V(p,1)$$

$$/ \frac{d}{d\alpha}$$

$$w \cdot \frac{dV(p,w)}{dw} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\boxed{\frac{dV(p,1)}{dw} = 1}$$

$$\rightarrow x(p,w) = -\frac{1}{\nabla_w V(p,w)} \cdot \nabla_p V(p,w) \leftarrow \text{Roy}$$

(Prop. 3.6.4)

$$x(p,1) = -\frac{1}{\underset{1}{\cancel{\nabla_w V(p,1)}}} \cdot \nabla_p V(p,1)$$

$$\boxed{x(p,1) = -\nabla_p V(p,1)}$$

PG1

a) $-T - \underbrace{EV(p^0, p^1, u^1)}_{e(p^0,u^1) - w}$

$= \underline{w} - e(p^0,u^1) - T$

$= e(p^1,u^1) - e(p^0,u^1) - \overbrace{t h_1(p_1^0+t, \bar{p}_{-1}, u^1)}^{T}$

$= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1)\, dp_1 - t h_1(p_1^0+t, \bar{p}_{-1}, u^1)$

$DW_1 = \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} [\underbrace{h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1)}_{A} - \underbrace{h_1(p_1^0+t, \bar{p}_{-1}, u^1)}_{B}]\, dp_1$

→ h_1 es no creciente en p_1

→ $A \geq B$ → $DW_1 \geq 0$

→ Si h_1 es decreciente en p_1 → $DW_1 > 0$

b) $-T - \underbrace{CV(p_0, p_1, u^0)}_{w - e(p_1, u^0)}$ ←

$= e(p_1,u^0) - w - T$

$= e(p_1,u^0) - e(p_0,u^0) - T$

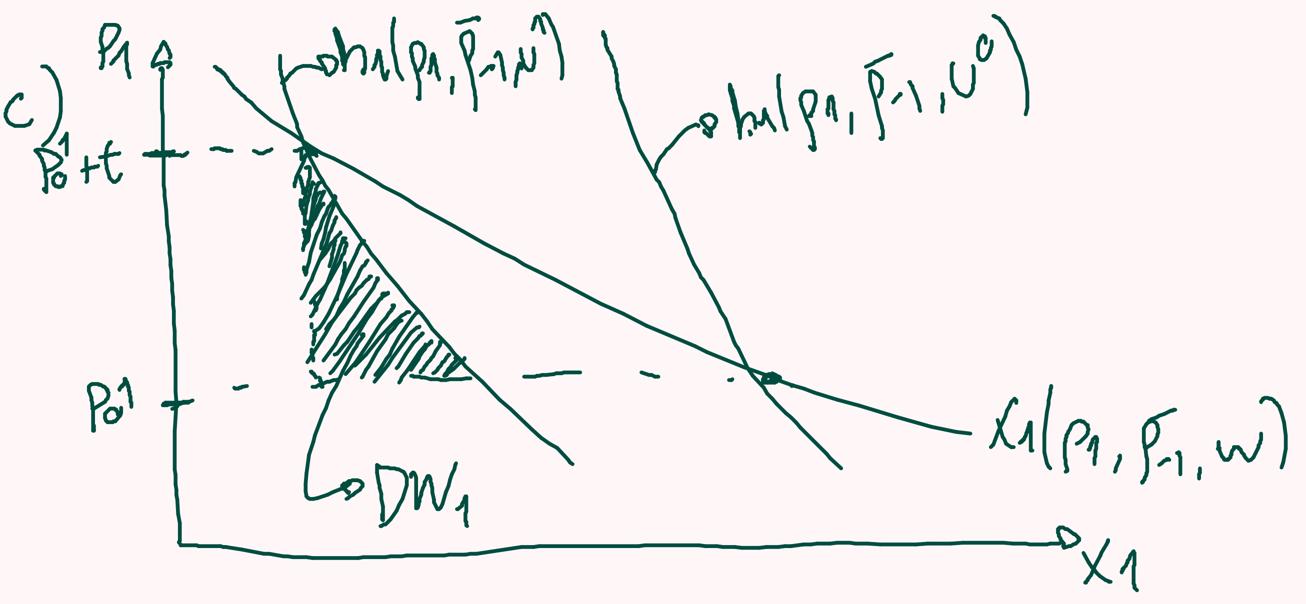
$= \int_{p_0^1}^{p_0^1+t} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0)\, dp_1 - t h_1(p_0^1+t, \bar{p}_{-1}, u^0)$

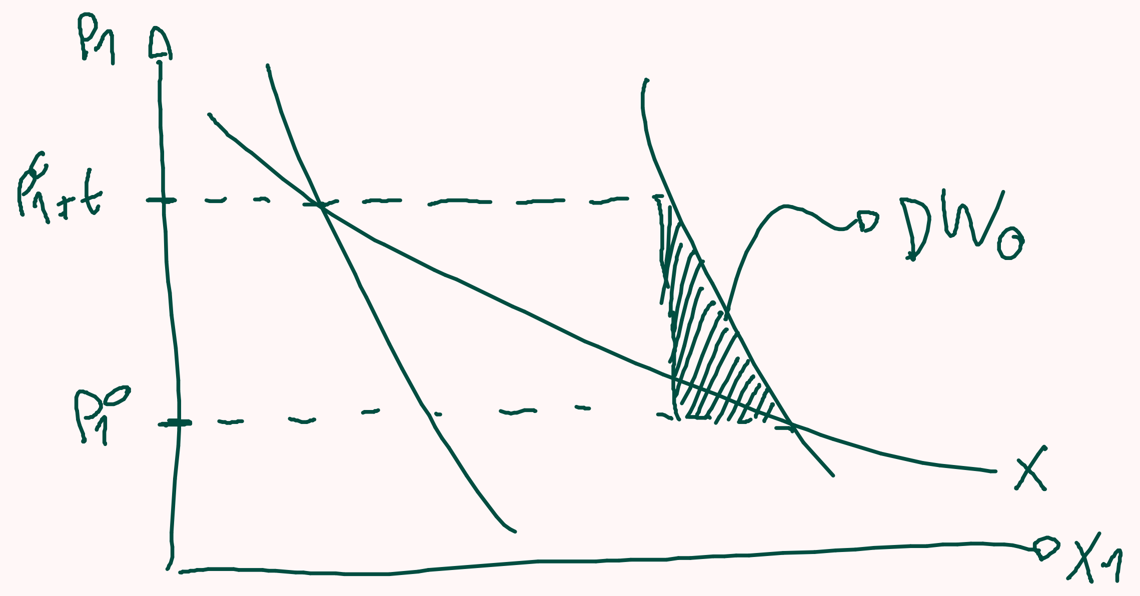
$DW_0 = \int_{p_0^1}^{p_0^1+t} [h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0) - h_1(p_0^1+t, \bar{p}_{-1}, u^0)]\, dp_1$

→ h_1 es no creciente en p_1 ⟹ $DW_0 \geq 0$

→ Si h_1 es decreciente en p_1 ⟹ $DW_0 > 0$

c)





d) Para DW_1

$DW_1 = \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} [h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1) - h_1(p_1^0+t, \bar{p}_{-1}, u^1)]\, dp_1$

Leibniz: $G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} g(p,t)\, dp$

$G'(t) = g(b(t),t)\, b'(t) - g(a(t),t)\, a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial g}{\partial t}(p,t)\, dp$

$\frac{\partial DW_1}{\partial t} = h_1(\cancel{p_1^0+t}, \bar{p}_{-1}, u^1) - h_1(\cancel{p_1^0+t}, \bar{p}_{-1}, u^0)$

$- \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} \frac{\partial h_1(p_1^0+t, \bar{p}_{-1}, u^1)}{\partial p_1}\, dp_1$

$= -t \frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1^0+t, \bar{p}_{-1}, u^1)$