Profesor	: Eduardo Engel	Abril 23, 2021
Ayudantes	: Pablo Barros y Giovanni Villa	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2021	
Guía	: No. 5	
Entrega	: Martes 18 de mayo, antes de la ayudantía	

1. **IRF que varía en el tiempo**

   La función de hazard de un modelo Ss generalizado (o modelo de increasing adjustment hazard) viene dada por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \lambda x, & \text{si } 0 < x < 1/\lambda, \\ 1, & \text{si } x > 1/\lambda. \end{cases}$$

   Denotamos por $f(x,t)$ la densidad de probabilidad de la inversión mandatada justo antes del ajuste del período t, y definimos la tasa de inversión agregada mediante:

$$\frac{I_t}{K_t} \equiv \int x\Lambda(x) f(x,t) dx. \tag{1}$$

   Denotamos por $\text{IRF}_{k,t}$ la función de respuesta al impulso unitario en t, $k = 0, 1, 2, ...$

   Suponga que $f(x,t)$ es una uniforme en el intervalo $[x_0, x_0 + 0.1]$, con $x_0 < 1/\lambda - 0.1$ es un parámetro dado, de modo que $f(x,t) = 10$ si $x_0 < x < x_0 + 0.1$ y $f(x,t) = 0$ en caso contrario. El parámetro x_0 captura la parte del ciclo económico en que está la economia, valores grandes corresponden a etapas expansivas, valores pequeños tiempos recesivos.

   (a) Dibuje tres gráficas con $\Lambda(x)$ y $f(x,t)$. La primera para un $x_0 < -0.1$, la segunda para un $x_0 \in [-0.1, 0]$ y la tercera para un $x_0 > 0$.

   (b) Exprese I_t/K_t como función de x_0 y λ. En lo que sigue denotamos esta función por $y(x_0)$.

   (c) Calcule y grafique $y'(x_0)$ y explique por qué esta función es igual a $\text{IRF}_{0,t}$ cuando la economía es descrita por la densidad $f(x,t)$ correspondiente a x_0.

   La familia de uniformes que consideramos en este ejercicio captura, de manera simplificada, las variaciones de la distribución de la inversión mandatada. Es decir, suponemos que en todo momento del tiempo, la densidad justo antes de ajustar $f(x,t)$ viene dada por una uniforme en $[x_0, x_0 + 0.1]$ donde lo único que varía en el tiempo es el valor de x_0. Seguimos suponiendo que en todo momento $x_0 < 1/\lambda - 0.1$.

   (d) Luego de una serie de shocks agregados positivos y grandes, ¿la densidad que representa la economía corresponderá a valores grandes (y positivos) de x_0 o a valores pequeños (y hasta negativos) de x_0? Justifique.

   (e) Luego de una serie de shocks agregados adversos, ¿la densidad que representa la economía corresponderá a valores grandes (y positivos) de x_0 o a valores pequeños (y hasta negativos) de x_0? Justifique.

(f) Use las partes (c), (d) y (e) para justifica la afirmación siguiente:

Cuando más se necesita, un estímulo a la inversión es menos efectivo.

2. **Un enfoque simple para modelar costos de agencia: *limited pledgeability***

Un emprendedor tiene un proyecto que tiene un retorno estocástico $y \sim \text{U}[0, 2\gamma]$. El proyecto requiere de una inversión inicial de 1 pero el emprendedor posee riqueza $W < 1$. Existe un activo alternativo que tanto los inversionistas como el emprendedor pueden acceder, el retorno de este activo es r. Los inversionistas y el emprendedor son neutros al riesgo. Suponga que los inversionistas compiten por financiar el proyecto y hay libre entrada. A diferencia del modelo visto en clases, no existe un costo de verificación del producto que generó el proyecto para los inversionistas (en notación de clases $c = 0$), sino que el emprendedor esconde una fracción $1 - f$ del producto, con $0 \leq f \leq 1$. Tanto el emprendedor como el inversionista conocen el valor del parámetro f . En consecuencia, el emprendedor solo puede prometer de manera creíble pagar una fracción f del producto. En base a lo anterior conteste las siguientes preguntas:

(a) Considere un proyecto con producto esperado igual a γ, con $\gamma > 1 + r$. ¿Cuál es la condición para que el proyecto se ejecute?

(b) Suponga que la condición de la parte (a) se cumple con desigualdad estricta. ¿Está determinado de una única manera el contrato entre el inversionista y el emprendedor? Si su respuesta es afirmativa, ¿cuál es el contrato? Si su respuesta es negativa, explique por qué no está determinado de una única manera. **Hint:** No necesita realizar demostraciones rigurosas. ¿Qué tipo de contratos se vieron en clases? En específico, ¿se puede diseñar un contrato contingente al producto realizado?, ¿se puede diseñar un contrato de deuda con opción de bancarrota?, ¿serían estos contratos un equilibrio?

(c) *Limited pledgeability* conlleva a ineficiencias, comparado al caso sin fricciones, si $\gamma > 1 + r$ y el proyecto no se lleva a cabo. Describa cuál de los siguientes escenarios puede causar que un proyecto con $\gamma > 1 + r$ no se ejecute:

(i) Una caída en la riqueza del emprendedor, W.

(ii) Un incremento en la fracción que el emprendedor puede esconder, $1 - f$ (dicho de otra forma, una caída en f).

(iii) Un incremento en el riesgo idiosincrático. Concretamente, el producto del proyecto se distribuye de manera uniforme sobre $[\gamma - b, \gamma + b]$ y ocurre un pequeño incremento en b.

3. **q-marginal y costos no convexos de ajuste**

Nota: Varios cálculos en este problema son considerablemente más simples si piensa cuidadosamente en qué le están pidiendo antes de responder y no procede mecánicamente[1]

Al ingresar a su último período de operación, una firma tiene un contrato de arriendo para una unidad de capital ($K_0 = 1$) pagando un arriendo de \$1 (por período). Si la firma decide modificar su stock de capital, debe pagar un costo fijo f, con $0 < f < 1$. Luego de pagar este costo puede arrendar el número de unidades de capital que desee pagando un arriendo de \$1 por unidad. Se tiene entonces que las utilidades

[1] Por supuesto, esto vale en general, pero más aun en este problema.

de la firma en este problema de un período, como función del stock de capital que elige para ese período, K_1, son

$$\Pi(K_1, \theta) = 2\theta\sqrt{K_1} - K_1 - f[K_1 \neq K_0],$$

donde $[K_1 \neq K_0]$ es igual a 1 si $K_1 \neq K_0$ e igual a cero en caso contrario, y θ denota un shock de rentabilidad que toma valores entre 0 y 2. La firma conoce el valor de θ antes de decidir respecto de su inversión. También note que estamos asumiendo, implícitamente, que los mercados de capitales son perfectos.

(a) Muestre que la política de inversión de la firma, como función de θ, $I(\theta)$, satisface:

$$I(\theta) = \begin{cases} \theta^2 - 1, & \text{si } \theta \in A, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde el conjunto A depende de f. Determine explícitamente el conjunto A. Grafique $I(\theta)$.

(b) Determine la función de valor ('value function') de la firma, $V(K_0 = 1, \theta)$, es decir, las utilidades netas de la firma dado K_0 y un shock θ, antes de tomar la decisión de inversión. Note que en el contexto de un problema de un período, esta función también corresponde al flujo de caja.

(c) Calcule q marginal como función de θ (es decir, calcule la derivada parcial de $V(K_0, \theta)$ respecto de K_0, evaluada en $K_0 = 1$). No debiera sorprenderse si encuentra que q-marginal toma valores "cercanos" a cero (en lugar de uno); esto se debe a que el capital se arrienda por un período (en lugar de comprarse).

(d) Grafique la curva de inversión de la firma, su q marginal y su flujo de caja, todos como función de θ, que toma valores entre 0 y 2. Muestre que la curva de inversión de la firma y su flujo de caja crecen con el parámetro de rentabilidad θ, mientras que q marginal no es monotóno en θ.

(e) Discuta la relevancia de lo que obtuvo en (d) tanto para la teoría q de inversión como para teorías que enfatizan las imperfecciones de los mercados financieros.

A continuación asuma que existe un continuo de firmas como la descrita anteriormente, todas las cuales ingresan a su último período con un stock de capital $K_0 = 1$ y enfrentan un shock común θ, pero difieren en su costo de ajuste f el cual tiene una distribución uniforme en $[0, 1]$. Como antes, θ toma valores entre 0 y 2.

(f) Muestre que la inversión agregada como función de θ satisface:

$$I_A(\theta) = (\theta + 1)(\theta - 1)^3.$$

Indicación: Si $I(\theta; f)$ denota inversión de una firma con costo de ajuste f cuando el shock es θ, entonces la inversión agregada, como función de θ, satisface:

$$I_A(\theta) = \int_0^1 I(\theta; f)\, \mathrm{d}f.$$

(g) De manera similar a lo indicado en (f) se puede mostrar (no necesita hacerlo) que el q marginal agregado, denotado por q_A, como función de θ, satisface:

$$q_A(\theta) = (1 - \theta)\theta(\theta - 2).$$

Haga un gráfico cualitativo en el espacio (I, q) del lugar geométrico de $(I_A(\theta), q_A(\theta))$ a medida que θ varía entre 0 y 2. $\theta = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ pueden ser una buena elección de valores de θ donde evaluar el lugar geométrico. Todo lo que necesita es saber si I y q toma un valor mayor, igual o menor que cero.

¿Tiene sentido estimar la inversión agregada como función de q_A? ¿Es cierto que q_A determina (es decir, es "suficiente") para I_A? ¿Qué sucedió con la teoría q de inversión?