Fuente: Examen de Econometría II 2021

2. (40 puntos) Considere una economía de dotación con un agente representativo. El agente está interesado en maximizar la esperanza descontada de utilidades. Su función de utilidad es logarítmica en consumo y su factor de descuento es $0 < \beta < 1$. Asuma a su vez que el agente tiene acceso al mercado privado de bonos libres de riesgo con retorno neto ρ_τ.

- **(a) (5 puntos)** El problema de optimización del agente es:

$$\text{máx}\, \mathbb{E}_0 \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^\tau \ln \chi_\tau \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \quad \chi_\tau + (1+\rho_\tau) b_\tau \leq \psi_\tau + b_{\tau+1} \tag{2}$$

  donde χ y b son variables de control, ψ es la variable de estado y ρ es el estado controlable. La condición de optimalidad para el problema del agente es:

$$\frac{1}{\chi_\tau} = \beta(1+\rho_{\tau+1})\mathbb{E}_\tau \frac{1}{\chi_{\tau+1}} \tag{3}$$

  La condición de equilibrio en el mercado de bonos privados es $b_\tau = 0$ y en el de bienes es $\chi_\tau = \psi_\tau$.

- **(b) (10 puntos)** Los procesos postulados para la ley de movimiento de la dotación son:

$$\ln \psi_\tau = \begin{cases} \phi + \ln \psi_{\tau-1} + u_\tau \\ \theta_\tau + v_\tau \end{cases} \tag{4}$$

  donde, el primero considera que $\ln \psi$ es estacionario en diferencia (DS) y el segundo que es estacionario en tendencia (TS). En cada caso tenemos:

$$\Delta \ln \psi_\tau = \begin{cases} \phi + u_\tau \\ \theta + v_\tau - v_{\tau-1} \end{cases} \tag{5}$$

  En ambos casos $\Delta \ln \psi_\tau$ es débilmente estacionario. En el caso DS, $\Delta \ln \psi_\tau$ es un ruido blanco. En el caso TS, $\Delta \ln \psi_\tau$ es un MA(1) con una raíz unitaria en el componente MA. Para que tengan las mismas esperanzas y varianzas incondicionales se requiere que $\theta = \phi$ y que $\sigma_u^2 = 2\sigma_v^2$. Cuando el proceso es DS todas las autocovarianzas y autocorrelaciones son 0 y $\gamma_0 = \sigma_u^2$; cuando el proceso es TS $\gamma_0 = 2\sigma_v^2$, $\gamma_1 = -\sigma_v^2$, $\gamma_\varphi = 0$ para $\varphi > 1$.

- **(c) (25 puntos)** Utilizando la condición de optimalidad e imponiendo las condiciones de equilibrio tenemos:

$$1 + \rho_{\tau+1} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\mathbb{E}_\tau \left[\left(\frac{\psi_{\tau+1}}{\psi_\tau} \right)^{-1} \right]} \tag{6}$$

Por ende, si $\ln \psi$ es DS tenemos:

$$\ln(1+\rho_{\tau+1}) = \phi - \ln \beta - \frac{\sigma_u^2}{2} \tag{7}$$

y si es TS tenemos:

$$\ln(1+\rho_{\tau+1}) = \theta - \ln \beta - \frac{\sigma_v^2}{2} - v_\tau \tag{8}$$

En el primer caso, la tasa de interés es constante y en el segundo es un ruido blanco. En ambos casos, el nivel de la tasa de interés es creciente en el crecimiento de la economía, decreciente en el factor de descuento y en la volatilidad. Por ende, si ρ es constante, esto es consistente con DS, de lo contrario con TS.