ENECO630 (Macroeconomia I) *Otoño* 2012
Profesor: E. Engel Universidad de Chile
Ayudante: F. Huneeus
Fecha: Miercoles 06 de Mayo

Control 4: Soluciones

1. Verdadero, Falso o Incierto (16 puntos)

a) De acuerdo a lo visto en clases, el modelo de equivalencia cierta argumenta que mayor incertidumbre en ingresos no afecta el ahorro, por lo que el comente es verdadero.

b) Si es que el ingreso sigue un proceso I(1) y el crecimiento del ingreso tiene cierta persistencia, entonces el consumo reaccionará mas que los ingresos a los shocks, y será por lo tanto mas volátil que el ingreso. El comente es falso.

c) Efectivamente, una de las maneras de sustentar la idea de *sensibilida excesiva del consumo* es mediante restricciones de liquidez. Esto se puede ver a través de la siguiente ecuación derivada en clases:

$$\Delta \log C_{t+1} = \text{constante} + \frac{1}{\theta} E_t r_t + \alpha E_t \Delta \log Y_{t+1} + \varepsilon_{t+1}$$

Donde $\hat{\alpha} > 0$ implicaría que el crecimiento del ingreso esperado predice el crecimiento del consumo. Las restricciones de liquidez podrían llevar a que $\hat{\alpha} > 0$ porque hay agentes que no pueden aumentar su consumo mientras no se materializen los aumentos de sus ingresos.

d) Al aplicar el modelo de equivalencia cierta, los activos fiscales seguirán un proceso I(1), por lo cual con probabilidad alta los montos acumulados crecerán sin límite (la otra opcion, que la deuda crezca sin limite no es viable porque nadie le prestará). Desde un punto de vista politico esto es un problema, pues será difícil legitimar la regla fiscal y así se hará difícil su sustentabilidad política.

2. Ecuación para tiempos tormentosos (20 puntos)

(a) Tenemos que:

$$S_t = Y_t - C_t = Y_{K,t} + Y_{L,t} - \frac{r}{1+r} \{ \sum_{k \geq 0} \beta^k E_t \left[Y_{L,t+k} \right] + A_t \}$$

Comparando la expresión anterior para A_t e $Y_{K,t}$ tenemos que:

$$Y_{K,t} = \frac{r}{1+r} A_t,$$

que combinadas con la expresión anterior para S_t y usando que bajo equivalencia cierta $\beta(1+r)=1$, llegamos a:

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{r}{1+r}A_t + Y_{L,t} - \frac{r}{1+r}\{\sum_{k\geq 0}\beta^k E_t\left[Y_{L,t+k}\right] + A_t\} \\ &= Y_{L,t} - r\sum_{k\geq 0}\beta^{k+1}E_t\left[Y_{L,t+k}\right] \end{aligned}$$

Para derivar la segunda expresión, se comienza con la expresión a la que se quiere llegar:

$$S_t = -\sum_{k\geq 1}\beta^k E_t\left[\Delta Y_{L,t+k}\right] = -\sum_{k\geq 1}(\beta^k E_t Y_{L,t+k} - \beta^k E_t Y_{L,t+k-1}).$$

Si se abre la suma, el coeficiente de $E_t\left[Y_{L,t+k}\right]$ es $-\beta^k + \beta^{k+1}$ si $k\geq 1$ y β si $k=0$. Y por lo tanto $-\beta^k + \beta^{k+1} = -r\beta^{k+1}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} -\sum_{k\geq 1}\beta^k E_t\left[\Delta Y_{L,t+k}\right] &= -r\sum_{k\geq 1}\beta^{k+1}E_t\left[Y_{L,t+k}\right] + \beta Y_{L,t} = \\ &= -r\sum_{k\geq 0}\beta^{k+1}E_t\left[Y_{L,t+k}\right] + (\beta + r\beta)\,Y_{L,t} \end{aligned}$$

Recordando que $\beta + r\beta = 1$ completa la demostración.

Esta expresión para S_t dice que el ahorro es igual el valor presente esperado de futuras caídas del ingreso laboral. Por eso una caída en el ahorro no presagia necesariamente menor crecimiento en el futuro. Por esta misma razón se conoce como la .^{ec}uación de días tormentosos”, porque se ahorra para cubrir futuras y esperadas caídas en el ingreso laboral.

(b) Una derivación directa muestra que:

$$\mathrm{E}_t[\Delta Y_{L,t+k}] = \begin{cases} g, & \text{for } k\geq 2, \\ g + \theta\varepsilon_t & \text{for } k=1 \end{cases}$$

Usando la segunda expresión para S_t que se obtuvo antes, tenemos:

$$\begin{aligned} S_t &= -\sum_{k\geq 1}\beta^k E_t\left[\Delta Y_{L,t+k}\right] \\ &= -\beta E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] - \sum_{k\geq 2}\beta^k E_t\left[\Delta Y_{L,t+k}\right] \\ &= -\beta E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] - \sum_{k\geq 2}\beta^k g \\ &= -\beta E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] - g\beta^2\sum_{k\geq 0}\beta^k \\ &= -\beta E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] - \frac{g\beta^2}{1-\beta} \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] = -\frac{g\beta}{1-\beta} - \frac{S_t}{\beta} = -\frac{g}{r} - (1+r)\, S_t.$$

Se concluye por lo tanto, que una caída en el ahorro presente genera un aumento en el ingreso futuro esperado.

3. Consumo y formación de hábitos (30 puntos)

a) ϕ mide la intensidad del hábito y η la velocidad con el hábito se deprecia.
b)

$$\begin{aligned}
\sum_{t\geq 0}\beta^t x_t &= \sum_{t\geq 0}\beta^t c_t - \phi\sum_{t\geq 0}\beta^t h_t \\
&= \sum_{t\geq 0}\beta^t c_t - \phi h_0 - \phi\sum_{t\geq 1}\beta^t c_{t-1} \\
&= \sum_{t\geq 0}\beta^t c_t - \phi h_0 - \phi\beta\sum_{t\geq 1}\beta^{t-1} c_{t-1} \\
&= \sum_{t\geq 0}\beta^t c_t - \phi h_0 - \phi\beta\sum_{t\geq 0}\beta^t c_t \\
&= (1-\beta\phi)\sum_{t\geq 0}\beta^t c_t - \phi h_0 \\
&= (1-\beta\phi)\mathcal{W} - \phi h_0 \\
&\equiv \widetilde{\mathcal{W}}
\end{aligned}$$

c) El problema que hay que resolver es:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{t\geq 0}\beta^t u(x_t) \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{t\geq 0}\beta^t x_t = \widetilde{\mathcal{W}}
\end{aligned} \tag{1}$$

Usando el método de Lagrangeano se concluye que $u'(x_t) = \lambda$, donde λ es el multiplicador de Lagrange correspondiente a la restricción. Por lo tanto $x_t = K$ para todo t porque $u()$ es estrictamente cóncava. Incorporando esto en la restricción se obtiene:

$$x_t = (1-\beta)\widetilde{\mathcal{W}} = K$$

Esto implica que el consumo corregido por el hábito es la anualidad de $\widetilde{\mathcal{W}}$.
d)
Del hecho que $x_t = c_t - \phi h_t = K$ y $h_t = c_{t-1}$ obtenemos lo siguiente:

$$c_t = \phi c_{t-1} + K$$

que iterativamente conduce a:

$$c_t = \left[h_0 - \frac{K}{1-\phi}\right]\phi^{t+1} + \frac{K}{1-\phi}, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

donde se uso que si $|a| < 1$, entonces $\sum_{k=0}^{t} a^k = \frac{1-a^{t+1}}{1-a}$. Ahora miramos el cambio en el consumo:

$$\begin{aligned} \Delta c_t &= \left[h_0 - \frac{K}{1-\phi}\right]\phi^{t+1} - \left[h_0 - \frac{K}{1-\phi}\right]\phi^{t} \\ &= \left[h_0 - \frac{K}{1-\phi}\right](\phi - 1)\phi^t \\ &= \left[\frac{K}{1-\phi} - h_0\right](1-\phi)\phi^t \end{aligned}$$

Dado que $\phi \in [0, 1)$, se deduce que la senda del consumo c_t es creciente/constante/decreciente dependiendo de si h_0 es menor/igual/mayor que $\bar{h}_0 \equiv K/(1-\phi)$. Má aún, dado que $\phi \in [0, 1)$, tenemos que c_t converge a $K/(1-\phi)$.

Finalmente, usando la expresión que se obtuvo para K, con un poco de algebra muestra que $h_0 = K/(1-\phi)$ es equivalente a $h_0 = (1-\beta)\mathcal{W}$, y por lo tanto $\bar{h}_0 = (1-\beta)\mathcal{W}$. De lo que se ha derivado anteriormente, se sigue que

$$\begin{aligned} K &= (1-\beta)\left[(1-\beta\phi)\mathcal{W} - \phi h_0\right] \\ &= (1-\beta)\left[(1-\beta\phi)\mathcal{W} - \phi(1-\beta)\mathcal{W}\right] \\ &= (1-\beta)\mathcal{W}(1-\phi) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$c_t = \frac{K}{1-\phi} = (1-\beta)\mathcal{W} = \frac{r\mathcal{W}}{1+r} \quad \text{when } h_0 = \bar{h}_0.$$

y así, cuando $h_0 = \bar{h}_0$, el consumo sigue la misma trayectoria que seguiría si no hubiera formación de hábitos.