Teoría de Juegos
Juegos secuenciales

Adriana Piazza

Microeconomía I

Otoño 2025

Juego: “cash in a hat”

- Jugador 1 puede poner 0, 1 o 3 en un sombrero
- El jugador 2, recibe el sombrero, mira lo que hay adentro y puede
  - Poner en el sombrero la misma cantidad que hay (igualar) ó
  - Tomar lo que hay dentro y quedárselo.
- Pagos:

$$\text{Jugador 1:} \begin{cases} \text{Si pone 0 obtiene} : 0 \\ \text{Si pone 1 obtiene} : 1 \text{ si el Jug. 2 iguala}, \ -1 \text{ si no} \\ \text{Si pone 3 obtiene} : 3 \text{ si el Jug. 2 iguala}, \ -3 \text{ si no} \end{cases}$$

$$\text{Jugador 2:} \begin{cases} 0 \text{ si hay } 0 & \\ 1.5 \text{ si iguala}, & 1 \text{ si toma el dinero} \\ 2 \quad \text{si iguala}, & 3 \text{ si toma el dinero} \end{cases}$$

Juegos secuenciales

En este ejemplo:

- El Jugador 2 sabe lo que hizo el Jug. 1, antes de elegir la estrategia
- El Jugador 1 sabe que Jug. 2 sabrá lo que él hizo antes de elegir la estrategia

Este es un ejemplo de un **Juego secuencial o dinámico con información perfecta**:

- Juegos con etapas o decisiones sucesivas
- Información completa (la estructura del juego y las reglas de pago son conocidas por todos)
- Información completa puede ser perfecta o imperfecta,
  - Información perfecta $=$ el jugador al que le corresponde jugar conoce **toda** la historia previa del juego.
  - Información imperfecta $\neq$ información perfecta.

Juegos secuenciales: descripción del juego

- Conjunto de Jugadores
- Estrategias
- Pagos
- A quién le toca jugar en cada etapa
- Qué sabe el jugador a quién le corresponde jugar (si es un juego con información imperfecta)

Definición: En un juego de información completa, una **estrategia** pura es un **plan de acción completo** que le indica que hacer en todos los nodos (incluso en aquellos nodos que no se alcanzan a jugar).

En el ejemplo anterior, las estrategias son:

- $S_1 = \{0, 1, 3\}$
- $S_2 = \{(I, I), (I, T), (T, I), (T, T)\}$

Juegos secuenciales: descripción del juego

- Conjunto de Jugadores
- Estrategias
- Pagos
- A quién le toca jugar en cada etapa (turno)
- Qué sabe el jugador a quién le corresponde jugar

La información de turnos y pagos de los jugadores se puede representar en un árbol.

- Un árbol es un conjunto finito de nodos ordenados parcialmente.
- Hay un nodo inicial que es anterior a todos los demás.
- Todos los nodos tienen exactamente un único antecesor inmediato (excepto el primero).

Esta representación del juego se llama la forma **extensiva** del juego.

Árboles

- Nodo inicial
- Nodo terminal (pagos)
- Nodo de decisión (turno)

Identificamos los nodos por medio de historias.

Historias

Secuencia de acciones que se juegan desde el nodo inicial.

- Historia vacía: corresponde al nodo inicial.
- Historia terminal: historia que no está contenida en otra historia, es decir, no se puede continuar
  (va desde el nodo inicial hasta un nodo terminal).
- sub-Historia: sub-secuencia de una historia que parte desde el nodo inicial.

En el ejemplo, las historias terminales son: $(0), (1, I), (1, T), (3, I), (3, T)$.

Inducción hacia atrás

Una forma de resolver el juego *Cash in a hat*

Inducción hacia atrás: Consiste en comenzar por determinar los movimientos óptimos del jugador que mueve en último lugar y proceder secuencialmente hacia atrás hasta alcanzar el nodo inicial.

El jugador 1 anticipa lo que hará el Jugador 2 al momento de tomar su decisión.

Juego "Cash in a hat": discusión

El juego representa de forma muy simple, la situación de pedir financiamiento para un emprendimiento.

Este es un ejemplo clásico de *riesgo moral* (moral hazard) donde el Jugador 2 (*agente*) tiene incentivos para seguir estrategias que son malas para el Jugador 1 (*principal*).

¿Como mitigar el riesgo?

Forma normal o estratégica

	(I,I)	(I,T)	(T,I)	(T,T)
0	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
1	$(1,1.5)$	$(1,1.5)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$
3	$(3,2)$	$(-3,3)$	$(3,2)$	$(-3,3)$

La definición de equilibrio de Nash es igual que antes:

$(s_1^*,\ldots,s_n^*)$ *es un equilibrio de Nash si*

$$u_i(s_i^*,s_{-i}^*) \geq u_i(s_i,s_{-i}^*) \quad \forall\, s_i \in S_i$$

Lo que cambia es que las estrategias son más complicadas de describir.

Los equilibrios de Nash son : $\{(0,TT),(1,IT)\}$

Existencia de Equilibrio de Nash

Teorema: Un juego secuencial finito con información completa y perfecta tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Demostración por inducción.

Idea de la demostración: Se parte por los penúltimos nodos, transformándolos en nodos finales con los pagos que corresponden a lo que hubiese elegido el jugador al que le tocaba jugar.

Competencia en cantidad

- 2 firmas que producen (respectivamente) una cantidad q_i, $i = 1, 2$ del mismo producto.
- Precio determinado por $p(q_1, q_2)$
- Costo de producción $c = 0$.
- Pago: $u_i(q_1, q_2) = p \times q_i = (12 - q_1 - q_2) \times q_i$

Resuelvo primero a la Cournot (juego simultáneo)

- Busco la función de mejor respuesta:
  Dado $\bar{q}_j$, $MR_i(\bar{q}_j) = \frac{12-\bar{q}_j}{2}$.
- Equilibrio de Nash:
  $$q_1^* = q_2^* = 4.$$
- Pagos de Equlibrio: $u_1(4, 4) = u_2(4, 4) = 16$.

Competencia en cantidad

Stackelberg agrega orden al juego.

- El jugador 1, juega primero y sabe que 2 reaccionará a su juego.
- Si la estratega de 1 es producir $q_1 \Rightarrow$ la estrategia de 2 es $q_2 = \frac{12-q_1}{2}$
- La función de utilidad de 1 es $u_1(q_1) = (12 - q_1 - \frac{12-q_1}{2})q_1 = \frac{q_1}{2}(12 - q_1)$
- El máximo de u_1 se alcanza en $q_1 = 6$.
- El jugador 2, reacciona a $q_1 = 6$ produciendo $q_2 = 3$.
- Pagos $u_1(6,3) = 18$, $u_2(6,3) = 9$

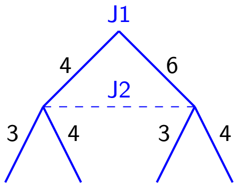
Cournot vs. Stackelberg

	Cournot	**Stackelberg**
Jugadores	Firmas 1 y 2	Firmas 1 y 2
Timing	En 1, juega firma 1 En 2, juega firma 2	En 1, juega firma 1 En 2, juega firma 2
Acciones	4, 6	3, 4
Informacion	**Firma 2 no conoce la acción elegida por 1**	**Firma 2 conoce la acción elegida por 1**
Pagos	Conocen los pagos p(q)=12-q	Conocen los pagos p(q)=12-q

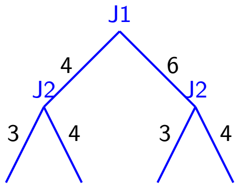
Para poder representar estos juegos por medio de árboles, vamos a simplificar el espacio de estrategias suponiendo que $S_1 = \{4, 6\}$ y $S_2 = \{3, 4\}$

Cournot vs Stackelberg

Representemos ambos juegos a través de árboles:



Cournot

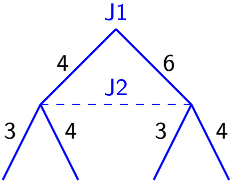


Stackelberg

- Única diferencia entre los juegos
  - Stackelberg es un juego con información completa, perfecta y movimientos secuenciales.
  - Cournot es un juego con información completa, perfecta y movimientos simultáneos.

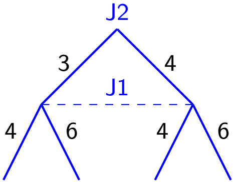
Forma normal vs. forma extensiva

Algunos juegos tienen más de una representación a través de árboles:



Cournot

=



Cournot

Forma extensiva

La forma extensiva de un juego debe contener la siguiente información

- Conjunto de Jugadores
- Estrategias
- Pagos
- A quién le toca jugar en cada etapa (turno)
- Qué sabe el jugador a quién le corresponde jugar

Definición:
Un **conjunto de información** es un conjunto de nodos de decisión del jugador i que cumple:

- el jugador i juega en todos los nodos del conjunto.
- el jugador i no sabe en que nodo del conjunto se encuentra.

Observación:

- El conjunto de acciones posibles debe ser el mismo en todos los nodos de un conjunto de información.
- Un nodo no puede pertenecer a dos conjuntos de información diferentes.

Volvamos al juego a la Stackelberg

Lo podemos representar en su forma normal o estratégica

	$(3,3)$	$(3,4)$	$(4,3)$	$(4,4)$
4	$(20,15)$	$(20,15)$	$(16,16)$	$(16,16)$
6	$(18,9)$	$(12,8)$	$(18,9)$	$(12,8)$

¿Cuántos equilibrios de Nash tiene el juego?

- $(6,(4,3))$
- $(4,(4,4))$

Nuevo concepto de equilibrio: Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos

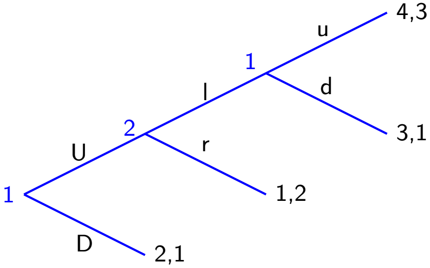
- ¿Qué es un subjuego?

Un subjuego es una parte del juego que "parece" un juego en el árbol:

- Empieza desde un *único* nodo de decisión (el nodo pertenece a un conjunto de información que es un singleton)
- Contiene a **todos sus sucesores**
- No quiebra ningún conjunto de información

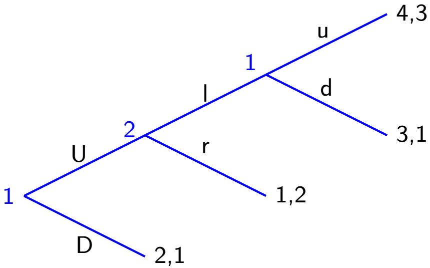
Definición: Un equilibrio de Nash es un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS) si induce un EN en cada uno de los subjuegos del juego.

Strategias



- Estrategias de J2?
  - $\{l, r\}$
- Estrategias de J1?
  - $\{Uu, Ud, Du, Dd\}$
- Equilibrios de Nash

Strategias



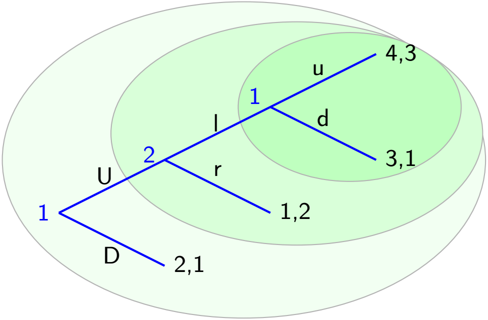
- Estrategias de J2= $\{l, r\}$
- Estrategias de J1 $= \{Uu, Ud, Du, Dd\}$

- Equilibrios de Nash:

  $\{(Uu, l), (Du, r), (Dd, r)\}$

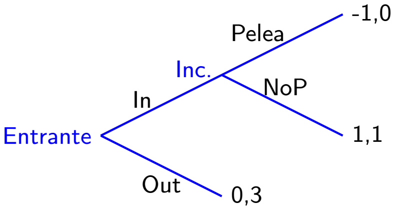
  - En el juego hay 3 EN, pero sólo uno de ellos es ENPS
  - Sólo (Uu, l) es Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Subjuegos



- (Uu, l) es perfecto en subjuegos.
- (Du, r) no induce un EN en el subjuego que comienza en la segunda etapa (en el primer nodo de decisión de J2).
- (Dd, r) no induce un EN en el subjuego que comienza en la tercera etapa (en el segundo nodo de decisión de J1).

Juego de entrada al mercado



- Una firma monopolista en el mercado (incumbente)
- Una firma que está considerando entrar al mercado (entrante)

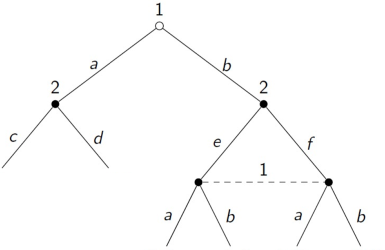
Amenaza no creíble

Juegos secuenciales con movimientos simultáneos

ENPS en juegos de información perfecta con movimientos simultáneos

Para encontrar equilibrios de Nash Perfectos en subjuegos en un juego con movimientos secuenciales: usamos inducción hacia atrás desde el *último nodo de decisión*.

Pero en un juego con movimientos simultáneos: usamos inducción hacia atrás desde el *último subjuego*.



ENPS en juegos de información perfecta con movimientos simultáneos

Ejemplo: Matchmaker

- 3 Jugadores: el *matchmaker* (M), B y C
- M decide si enviar a los jugadores B y C a una cita o no.
  - Si no los envía a una cita, todos los jugadores ganan 0.
- Cuando decide enviarlos a la cita, olvida decirles en donde deben encontrarse.

  Si B y C logran encontrase el pago de M es 1, caso contrario es -1.
  - Hay dos lugares posibles donde encontrarse: Teatro o Fútbol.
  - B prefiere encontrarse con C en el Teatro a encontrarse con C en el Fútbol, y prefiere encontrarse con C en el Fútbol a no encontrarse con C.
  - C prefiere encontrarse con C en el Fútbol a encontrarse con B en el Teatro, y prefiere encontrarse con B en el Teatro a no encontrarse con B.

Encuentre todos los ENPS.

Juegos Secuenciales: resumen de lo visto hasta ahora

- Descripción del juego: Conjunto de Jugadores, Estrategias, Pagos, A quién le toca jugar en cada etapa, Qué sabe el jugador a quién le corresponde jugar.
- Conceptos nuevos:
  - Estrategias: plan de acción **completo**
  - Árbol
  - Conjuntos de información
  - Subjuego: Parte del juego que *parece* un juego
    (empieza en un nodo e incluye a todos los sucesores, sin quebrar ningún conjunto de información).
  - ENPS: Equilibrio de Nash que induce un EN en cada subjuego.
  - Inducción hacia atrás: caracteriza un ENPS.
    ¿Cómo encontrar todos los ENPS? Repetir con cada acción óptima.
- Siempre existe al menos un ENPS.
- Si el juego es de movimientos secuenciales: Siempre existe al menos un ENPS en estrategias puras.

JUEGOS REPETIDOS

(Caso particular de juegos secuenciales)

War of attrition (guerra de desgaste)

- 2 jugadores. Acciones de ambos jugadores: $\{Pelear, Salir\}$

- En cada etapa, se juega un juego simultáneo con el siguiente pago:
  - Si ambos juegan *Salir*, el pago es 0 para ambos.
  - Si A juega *Pelear* y B juega *Salir*, A gana V y B gana 0 (y viceversa).
  - Si ambos juegan *Pelear*, ambos pierden C y el juego se repite.
  - $V > C$.

		Jug. B P	S
Jug. A	P	$-C, -C$	$V, 0$
	S	$0, V$	$0, 0$

Queremos resolver la versión con horizonte de tiempo infinito, pero resolvamos primero el caso de 2 etapas.

Juegos repetidos

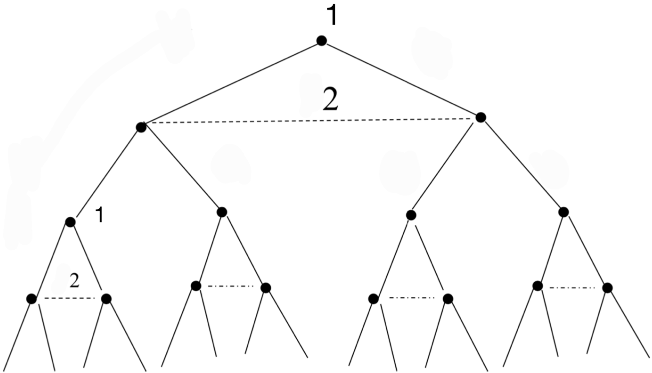
- El mismo juego se repite en períodos sucesivos, un número finito o infinito de veces
- Después de cada etapa, el resultado del juego es observado por todos los jugadores y esa información es conocimiento común
- El pago total de cada jugador depende de los pagos obtenidos en cada etapa (por ej.: promedio, total, suma descontada. etc.)
- Pregunta principal: ¿podemos influir en las decisiones presentes a través de promesas o amenazas acerca de las acciones futuras?

Dilema del prisionero

	ND	D
ND	4, 4	0, 5
D	5, 0	1, 1

- Si lo jugamos repetidas veces, ¿puede la promesa de interacciones futuras cambiar el comportamiento?

Dilema del prisionero en horizonte de tiempo finito



Juegos repetidos finitos

Proposición: Si un juego repetido finito es tal que el juego de etapa tiene un único equilibrio de Nash, entonces el juego repetido tiene un único ENPS.

Prueba: Ocupando inducción hacia atrás.

Ejemplo: Dilema del prisionero jugado un número finito de veces. En la última etapa, *delatar* es estrategia dominante. Por lo tanto, en la penúltima etapa, ambos jugadores elegirán *delatar*... etc.

¿No hay esperanza?

Otro ejemplo

Jugador 2

Jugador 1	A	B	C
A	4,4	0,5	0,0
B	5,0	1,1	0,0
C	0,0	0,0	3,3

- Nos gustaría inducir (A, A).
- Sin embargo, (A, A) no es EN en el juego de una etapa.
- EN=$\{(B, B), (C, C)\}$ (también hay EN en estrategias mixtas, pero no los consideramos ahora).

Otro ejemplo

		Jugador 2	
Jugador 1	A	B	C
A	4,4	0,5	0,0
B	5,0	1,1	0,0
C	0,0	0,0	3,3

- Consideremos esta estrategia:

Jugar A en la primera etapa y después

$$\begin{cases} \text{Jugar } C & \text{si } (A, A) \text{ fue jugado en la etapa anterior} \\ \text{Jugar } B & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

¿Es EN? ¿Es ENPS?

Juegos repetidos finitos

Proposición: Si el juego de etapa de un juego repetido finito tiene más de un equilibrio de Nash, entonces quizás sea posible usar la promesa de jugar distintos EN en las etapas subsiguientes para proveer incentivos (premios y castigos) que logren la cooperación en las etapas anteriores a la última etapa.

Posibles problemas:

- renegociación,
- leyes de bancarrota
- (compromiso: eficiencia ex-ante y ex-post)

Juegos repetidos infinitos

- No hay una última etapa a partir de la cual resolver el juego (no hay inducción hacia atrás)

- Pago total es la suma descontada o el promedio descontado de los pagos de etapa
- Factor de descuento: $\delta < 1$ (Interpretación: probabilidad de que el juego continúe o tasa de interés)

- Si el juego de etapa tiene un único EN (s^*), sigue siendo cierto que jugar s^* en todas las etapas es ENPS (igual que en el caso finito).

- ¿Hay otros ENPS?
- Consideremos esta *estrategia gatillo* en el dilema del prisionero:

Jugar *ND* en la primera etapa y después

$$\begin{cases} \text{Jugar } ND & \text{si nadie ha jugado } D \\ \text{Jugar } D & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Observar que una vez que un jugador juega D, ambos juegan D para siempre.

¿Es ENPS?

Juegos repetidos infinitos

Demostraremos que, si un jugador es suficientemente "paciente", la estrategia *gatillo* es una mejor respuesta en el juego completo y en todos los subjuegos a la misma estrategia jugada por el otro jugador.

Es decir, **un par de estrategias *gatillo* constituye un equilibrio perfecto por subjuegos.**

- Supongamos que el jugador 2 sigue la estrategia *gatillo*. Debemos demostrar que es óptimo para el jugador 1 seguir la misma estrategia
  - *(A)* en el juego completo y
  - *(B)* en todos los subjuegos.

One-shot deviation principle

Condición de desviación en una etapa: Decimos que el perfil de estrategias s cumple la condición de desviación en una etapa si ningún jugador puede mejorar desviando en una *única* etapa (y volviendo a jugar s después).

Teorema: En un juego repetido finito el perfil de estrategias s es ENPS si y solo si s satisface la condición de desviación en una etapa.

El teorema también es válido en juegos repetidos infinitos con una condición adicional en la función de pago: *continuidad en el infinito*.

Si ocupamos la suma descontada o el promedio descontado de los pagos por etapa con $\delta < 1$, la condición se cumple.

Juegos repetidos infinitos

- En este juego, la estrategia gatillo es ENPS si

$$\delta \geq \frac{1}{4}.$$

	ND	D
ND	**4, 4**	**0, 5**
D	**5, 0**	**1, 1**

- Al hacer los cálculos vemos que la condición que determina el límite inferior de δ se puede escribir como

$$\text{tentación actual} \leq [\text{valor de la recompensa} - \text{valor de la amenaza}] \times \delta$$

- Implementación de estrategias gatillo puede sostener equilibrios cooperativos.

- Hay *muchos* ENPS posibles.

Juegos repetidos infinitos

Nueva propuesta de estrategia para el dilema del prisionero en infinitas etapas

- Estrategia gatillo con castigo de una sola etapa. ¿Es ENPS?

Jugar ND en la primera etapa y después

$$\begin{cases} \text{Jugar } ND & \text{si } (D, D) \text{ o } (ND, ND) \text{ fue jugado en la etapa anterior} \\ \text{Jugar } D & \text{si } (D, ND) \text{ o } (ND, D) \text{ fue jugado en la etapa anterior} \end{cases}$$

Juegos repetidos infinitos

- En el primer ejemplo (castigo infinito), para que las estrategias propuestas sean ENPS necesitamos:

$$\delta \geq \frac{1}{4}$$

- En el segundo ejemplo (un solo periodo de castigo), para que las estrategias propuestas sean ENPS necesitamos:

$$\delta \geq \frac{1}{3}$$

- **Castigos más cortos, necesitan que se le otorgue mayor peso al futuro**

- Esta conclusión es cierta en general, no solamente en el dilema del prisionero con horizonte infinito.

Juegos repetidos: lo que hemos visto hasta ahora

- Notación:
  - G juego de etapa
  - $G(T)$ el juego de etapa G se repite T veces
  - $G(\infty)$ el juego de etapa G se repite infinitas veces
- Juegos Finitos
  - En la etapa T siempre se juega un EN de G
  - Si G tiene un único EN (s^*), entonces el único ENPS de $G(T)$ es jugar s^* en todas las etapas
  - Si G tiene más de un EN, entonces pueden existir ENPS de $G(T)$ donde en las etapas $t < T$ se juega un perfil de estrategias que no es EN de G
- Juegos Infinitos
  - Jugar algún EN de G en cada etapa siempre es ENPS de $G(\infty)$
  - Es posible encontrar ENPS de $G(\infty)$ donde en todas las etapas se juega un perfil de estrategias que no es EN de G (aun cuando G tiene un único EN)

Juegos repetidos

- Hasta ahora encontramos 3 ENPS en el dilema del prisionero repetido infinitas veces:

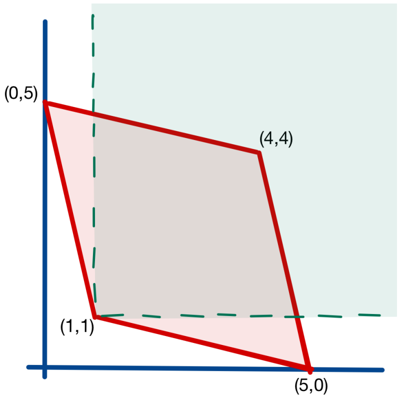
  1. Jugar D siempre.
  2. Jugar ND hasta que haya algún desvío y después castigar para siempre jugando D.
  3. Jugar ND hasta que haya algún desvío y después castigar durante un período jugando D.

	ND	D
ND	4, 4	0, 5
D	5, 0	1, 1

¡Hay infinitos ENPS!

Siguiente objetivo: caracterizar mejor los pagos que se pueden obtener en $G(\infty)$ a través de ENPS.

Pagos factibles



Pagos factibles para
el Dilema del Prisionero

Definición:

Decimos que el vector de pagos (U_1, U_2) es *factible* si puede obtenerse como una combinación convexa de los pagos correspondientes a los perfiles de estrategias puras de G.

El teorema que veremos considera solo los pagos estrictamente por encima del pago del EN

Folk Theorem

Teorema de J.W. Friedman (1971)

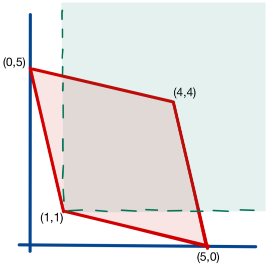
Sea G un juego estático y finito de información completa de n jugadores. Sea $(e_1, ..., e_n)$ los pagos de un EN de G, y sea $(x_1, ..., x_n)$ cualquier otro pago factible de G.

Si $x_i > e_i$ para todo jugador i y si δ es suficientemente grande, entonces existe un ENPS del juego infinitamente repetido $G(\infty)$ que alcanza $(x_1, ..., x_n)$ como promedio descontado.

$$x_i = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(s^*_{i,t}, s^*_{-i,t})$$

Existen otros "teoremas Folk". Generalmente se diferencian en que permiten agrandar el conjunto de pagos alcanzables.

Folk Theorem: Idea de la demostración



Queremos inducir que se juegue el perfil de estrategias (a_x), cuyo pago promedio esperado es x, bajo la amenaza de jugar el EN de pago e para siempre en caso de desvío.

Estrategia gatillo:

Jugar a_{xi} en la primera etapa y después

$$\begin{cases} \text{Jugar } a_{xi} & \text{si nadie ha desviado antes} \\ \text{Jugar } EN & \text{cuyo pago es } e_i \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Sea d_i es el mayor pago de etapa que el jugador i puede obtener desviando, la estrategia gatillo es ENPS si δ cumple

$$\delta \geq \max_i \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i}$$

(Observar que $\frac{d_i - x_i}{d_i - e_i} < 1$)

Colusión en un duopolio

- 2 firmas que producen (respectivamente) una cantidad q_i, $i = 1, 2$ del mismo producto.
- Precio determinado por $p(q_1, q_2) = \alpha - (q_1 + q_2)$
- Costo de producción c.
- Pago: $u_i(q_1, q_2) = p \times q_i = (\alpha - q_1 - q_2) \times q_i$

Competencia a la Cournot (juego simultáneo)

- Equilibrio de Nash:
  - Cantidad producida en equilibrio $q_i = q_c = \frac{\alpha - c}{3}$.
  - Pago de cada firma en equilibrio $e_i = \frac{(\alpha - c)^2}{9}$.
- Pacto colusorio, producir cada una la mitad de la cantidad monopólica:
  - Cantidad producida en colusión $q_i = \frac{q_m}{2}$ con $q_m = \frac{(\alpha - c)}{2}$.
  - Pago de cada firma cuando cada una produce $q_m/2$ es $x_i = \frac{(\alpha - c)^2}{8}$.

Colusión en un duopolio

Considere el juego $G(\infty)$, donde G es el juego de etapa de Cournot.

Considere la siguiente estrategia gatillo:

Producir $q_m/2$ en la primera etapa y después

$$\begin{cases} \text{Producir } q_m/2 & \text{si ambas firmas han producido } q_m/2 \text{ hasta ahora} \\ \text{Producir } q_c & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

¿Hay valores de δ para los cuales es ENPS?

Si $\delta \geqslant 9/17$ la estrategia gatillo es ENPS.

Colusión en un duopolio

Si $\delta < 9/17$, ¿hay algún trato colusorio que sea ENPS?

Las firmas no pueden coludirse para producir como un monopolio ($q_m/2$), pero sí pueden coludirse para producir menos que la cantidad de Cournot.

- Considere la estrategia gatillo:

  Producir $q^* \in (q_m/2, q_c)$ en la primera etapa y después

$$\begin{cases} \text{Producir } q^* & \text{si ambas firmas han producido } q^* \text{ hasta ahora} \\ \text{Producir } q_c & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Pacto colusorio, producir cada una q^*.
  - Pago de cada firma cuando cada una produce q^* es $x_i^* = (\alpha - 2q^* - c)q^*$.
  - El máximo pago en la etapa que se desvía es $d_i^* = \frac{(\alpha - q^* - c)^2}{4}$.

Para que sea ENPS, se debe cumplir la condición $\delta \geq \frac{d_i^* - e_i}{x_i - e_i}$ que es equivalente a

$$q^* \geq \frac{9 - 5\delta}{3(9 - \delta)}(\alpha - c).$$

Colusión en un duopolio

Otra forma para lograr coludirse en un nivel de producción $q_m/2$: en lugar de amenazar con jugar Cournot por siempre, se amenaza un castigo de una única etapa tal que la pérdida en esa etapa sea mayor (que sea *creíble*).

- Considere la estrategia gatillo:

  Producir $q_m/2$ en la primera etapa y después

$$\begin{cases} \text{Producir } q_m/2 & \text{si ambas firmas produjeron } q_m/2 \text{ en el periodo anterior} \\ \text{Producir } q_m/2 & \text{si ambas firmas produjeron } x \text{ en el periodo anterior} \\ \text{Producir } x & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- El castigo es más corto.
- El valor de x puede ser mayor a q_c, lo que perjudica más
- ¿Qué valor puede tomar x?
  - Suficientemente grande como para evitar desvíos
  - Pero no demasiado grande, pues debe ser creíble
  - Depende del valor de δ