Apuntes útiles

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Álvaro Castillo y Alberto Undurraga

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas de variables. Si hay una única variable independiente, se les conoce como *ecuación diferencial ordinaria* (ODE). El orden de una ODE viene dado por la derivada de mayor orden. Además, cuando la forma funcional de la ecuación es lineal, hablamos de una *ODE lineal*.

Prácticamente la totalidad de ecuaciones diferenciales que verá en esta sección de su curso de Macroeconomía I serán ODE lineales de primer orden, cuyas derivadas serán con respecto al tiempo. Un ejemplo de ecuación diferencial es

$$a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot y(t) + x(t) = 0 \tag{1}$$

La ecuación (1) es una ODE lineal de primer orden con coeficientes constantes (a_1 y a_2). En términos de notación, si la variable $x(t)$ es una constante distinta de cero, la ecuación se denomina *autónoma*. Si $x(t) = 0$, la ecuación se denomina homogénea.

El objetivo de resolver una ecuación diferencial es encontrar el comportamiento de la variable $y(t)$. Como usted ya habrá estudiado, para resolverlas existen métodos gráficos (como los que ha utilizado recientemente al estudiar $q - tobin$) o métodos analíticos. A continuación, se presentan resultados básicos que le serán útil para su curso de Macroeconomía.

1. La más sencilla

Algunas soluciones son casi inmediatas porque la ecuación puede ser integrada. Por ejemplo, la solución a $\dot{y}(t) = a$ es evidentemente $y(t) = a \cdot t + b$, donde b es una constante arbitraria.

2. Ecuación diferencial lineal de primer orden, no homogénea, con coeficientes constantes

Su forma general es $\dot{y}(t) + a_1 y(t) + x(t) = 0$, donde a_1 es una constante y $x(t)$ una función conocida. El primer paso para resolver esta ecuación es agrupar los términos asociados a y en un lado de la ecuación para luego multiplicar por $e^{a_1 t}$ e integrar:

$$\int e^{a_1 t} \cdot [\dot{y}(t) + a_1 \cdot y(t)] \; dt = -\int e^{a_1 t} \cdot x(t) \; dt \tag{2}$$

El término $e^{a_1 t}$ se conoce como *factor de integración*. Lo clave es notar que el argumento de la integral de la izquierda puede reescribirse como:

$$e^{a_1 t} \cdot [\dot{y}(t) + a_1 \cdot y(t)] = (d/dt) \left[e^{a_1 t} \cdot y(t) + b_0 \right]$$

donde b_0 es una constante arbitraria. Utilizando la igualdad anterior en (2) y notando que la integral de la derivada de una función es la función misma:

$$\int e^{a_1 t} \cdot [\dot{y}(t) + a_1 \cdot y(t)] \; dt = -\int e^{a_1 t} \cdot x(t) \; dt$$

$$e^{a_1 t} \cdot y(t) + b_0 = -\int e^{a_1 t} \cdot x(t) \; dt$$

$$\boxed{y(t) = -e^{-a_1 t} \cdot \int e^{a_1 t} \cdot x(t)\ dt - e^{-a_1 t} \cdot b_0} \tag{3}$$

En ocasiones la función $x(t)$ será constante y la solución analítica será sencilla de obtener.

3. Ecuación diferencial de primer orden autónoma

Suponga ahora que la función $x(t)$ del ítem anterior es simplemente una constante: $x(t) = z$. Entonces, puede notar directamente que la solución a $\dot{y}(t) = a_2 y(t) + z$ vendrá dada por:

$$y(t) = -z/a_2 + cte \cdot e^{a_2 \cdot t}$$

Le será útil verificar lo anterior teniendo especial detalle en los signos (note que $a_2 = -a_1$).

4. Ecuación diferencial de primer orden con coeficientes variables

Considere ahora la siguiente ecuación diferencial con coeficiente variable:

$$\dot{y}(t) + a(t) \cdot y(t) + x(t) = 0 \tag{4}$$

donde el coeficiente $a(t)$ depende del tiempo. El factor de integración en este tipo se ecuaciones será $e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}$. Luego, multiplicando por el factor de integración e integrando:

$$\int e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} \left[\dot{y}(t) + a(t) \cdot y(t)\right]\ dt = -\int e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} x(t)\ dt \tag{5}$$

Al igual que antes, la clave está en notar que el argumento de la integral a la izquierda será la derivada de $y(t) e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} + b_0$ [1]. Usando esta información, la solución al problema anterior será:

$$y(t) = -e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau} \cdot \int e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} \cdot x(t) \cdot dt - b_0 \cdot e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau}$$

Donde b_0 es una constante de integración.

Aplicaciones en crecimiento económico

Ecuaciones diferenciales no lineales en el modelo de Solow-Swan: trayectoria para k

Como habrá visto en clases, en el caso de una función Cobb-Douglas y ahorro constante, se puede obtener la trayectoria para k de forma analítica. Sabemos que la ley de movimiento del capital per cápita viene dada por $\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k$, que puede ser reescrita como:

$$\dot{k} = s \cdot A k^{\alpha} - (n + \delta) \cdot k$$
$$\dot{k} \cdot k^{-\alpha} = s \cdot A - (n + \delta) \cdot k^{1-\alpha}$$

Si define $v \equiv k^{1-\alpha}$, note que $\dot{v} = (1 - \alpha) k^{-\alpha} \dot{k}$. Por tanto, las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas como:

$$\dot{v}/(1 - \alpha) = s \cdot A - (n + \delta) \cdot v$$

[1] Para mostrar esto se utiliza la Fórmula de Leibniz para derivación de integrales. No es necesario, por ahora, que utilice su tiempo en entender cada detalle

Así, se ha transforamdo una ecuación diferencial no lineal en una lineal y sólo es necesario reordenar términos para resolverla:

$$\dot{v} + (1-\alpha)(n+\delta)\cdot v = (1-\alpha)s\cdot A$$

Notando que se puede definir $a \equiv (1-\alpha)(n+\delta)$, la solución general (3) implica que

$$v(t) = \frac{sA}{(n+\delta)} - e^{at}\cdot b_0 \tag{6}$$

Finalmente, es posible evaluar en t=0 para obtener la constante de integración ($v(0) = [k(0)]^{1-\alpha} = sA/(n+\delta) - b_0$) y la solución a la ecuación diferencial será

$$v(t) \equiv k(t)^{1-\alpha} = \frac{sA}{(n+\delta)} - e^{(1-\alpha)(n+\delta)t}\cdot\left[\frac{sA}{(n+\delta)} - [k(0)]^{1-\alpha}\right] \tag{7}$$

Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables en el modelo de Ramsey

Para evitar esquemas Ponzi en el modelo de Ramsey se asume que los mercados financieros imponen una restricción en el endeudamiento: el valor presente de los activos debe ser asintóticamente no negativo. ¿Cuál es el valor presente de los activos financieros en un punto T? Sabemos que la acumulación de activos per cápita viene dada por $\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - c_t - n a_t$. Como la tasa de interés es variable en el tiempo lo anterior es una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables:

$$\dot{a}_t + (n - r_t)a_t = w_t - c_t \tag{8}$$

Luego, el factor de integración en esta ecuación será $e^{\int_0^t (n-r_v)\partial v}$[2]. A diferencia de los ejemplos anteriores, esta vez nos interesa conocer el valor presente de los activos financieros en un punto T. Esto implica que para resolver la ecuación diferencial la integral será definida:

$$\int_0^T e^{-(\bar{r}_t-n)t}\left[\dot{a}_t - (\bar{r}_t - n)a_t\right]\, dt = \int_0^T e^{-(\bar{r}_t-n)t}\left[w_t - c_t\right]\, dt \tag{9}$$

En este punto usted puede utilizar integración por partes para resolver el lado izquierdo o simplemente notar que el argumento de la integral es la derivada de $a_t e^{-(\bar{r}_t-n)t} + b_0$. Evaluando la integral en sus límites de integración (y omitiendo b_0) tendrá finalmente:

$$\left[a_t e^{-(\bar{r}_t-n)t}\right]\Big|_0^T = \int_0^T e^{-(\bar{r}_t-n)t}\left[w_t - c_t\right]\, dt \tag{10}$$

$$a_T\cdot e^{-(\bar{r}_T-n)T} = a_0 + \int_0^T e^{-(\bar{r}_t-n)t}\left[w_t - c_t\right]\, dt \tag{11}$$

Así, la condición para evitar esquemas Ponzi vendrá dada por:

$$\lim_{T\to\infty}\left\{a_T\cdot e^{-(\bar{r}_T-n)T}\right\} \geq 0$$

O bien

$$\lim_{T\to\infty}\left\{a_T\cdot\exp\left[-\int_0^T [r_v - n]dv\right]\right\} \geq 0$$

Que es el resultado presentado en clases.

[2]Para simplificar notación en lo que viene se define $\bar{r}_t \equiv (1/t)\int_0^t r_v\partial v$. Por lo tanto, el factor de integración será $e^{(n-\bar{r}_t)t}$

Referencias

[1] Barro, R. J., and X. Sala-i-Martin. Economic Growth, 2004, segunda edición.
[2] Acemoglu, D. Introduction to Modern Economic Growth, 2007.