

## Guía de ejercicios No 2

### 1. Ahorro por precaución y función de utilidad CARA

Considere el modelo del problema general de consumo visto en clases, sin activo riesgoso y con función de utilidad instantánea con coeficiente de aversión absoluta al riesgo constante:

$$u(c) = -\frac{1}{\theta}e^{-\theta c},$$

donde  $\theta > 0$  denota el coeficiente de aversión absoluta al riesgo. La tasa de descuento subjetiva es  $\delta$ , la tasa de interés es  $r$  y las dos son constantes. El ingreso laboral,  $y_t$ , es i.i.d., de modo que

$$y_t = \bar{y} + \varepsilon_t,$$

con  $\varepsilon_t$  i.i.d.  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Los activos del hogar al comienzo de un período evolucionan de acuerdo a

$$(1) \quad A_{t+1} = (1+r)[A_t + y_t - c_t].$$

Se puede mostrar que existe una solución única a la ecuación de Bellman y que existe una correspondencia uno-a-uno entre esta solución y la solución a la ecuación de Euler. No es necesario que demuestre lo anterior. Se sigue que la ecuación de Euler tiene una única solución, en la cual nos enfocamos en lo que sigue.

Suponemos que la solución de la ecuación de Euler toma la forma:

$$(2) \quad c_t = \frac{r}{1+r} \left\{ A_t + y_t + \frac{1}{r}\bar{y} \right\} - P(r, \theta, \delta, \sigma),$$

donde  $P$  es una constante (que depende de  $r$ ,  $\theta$ ,  $\delta$  y  $\sigma$ ). A continuación encontramos el valor de  $P$  para el cual (2) resuelve la ecuación de Euler.

(a) Asumiendo que se cumple (2), use (1) y un poco de álgebra para mostrar que:

$$(3) \quad \Delta c_t = \frac{r}{1+r} \varepsilon_t + rP.$$

- (b) Use (3) y la ecuación de Euler para derivar una expresión explícita para  $P$ .
- (c) Muestre que  $P$  es creciente en  $\sigma$  y decreciente en  $\delta$ . Interprete los dos resultados.
- (d) Ahora asuma que  $r = \delta$ . El ahorro por precaución se define como la diferencia entre el ahorro efectivo y el ahorro que prescribe el modelo de equivalencia cierta. Muestre que el ahorro por precaución será igual a  $P$  y que  $P$  es estrictamente positivo.

## 2. Consumo y formación de hábitos

Varios trabajos exploran el impacto de la formación de hábitos sobre el consumo. La idea es que niveles altos de consumo en el pasado reciente llevarán a una mayor utilidad marginal del consumo presente, porque el consumo es adictivo o formador de hábitos.

Un enfoque para modelar la formación de hábitos es suponiendo que la función de utilidad instantánea toma la forma  $u(c_t - bc_{t-1})$  o la forma  $u[c_t/(c_{t-1}^p)]$ , donde  $u(\cdot)$  tiene las propiedades habituales de una función de utilidad y  $b$  y  $p$  toman valores entre 0 y 1. Los términos  $bc_{t-1}$  y  $c_{t-1}^p$  representan el “hábito” del hogar: un valor más alto del consumo reciente reduce la utilidad del consumo presente aumentando la utilidad marginal del consumo de hoy.

Considere la formulación secuencial del hogar con formación de hábitos. En  $t = 0$  el hogar maximiza la utilidad descontada esperada:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t u(c_t, c_{t-1})$$

sujeto a la riqueza inicial,  $A_0$ , a la condición de no Ponzi y a la restricción presupuestaria intertemporal

$$A_{t+1} = R(A_t + Y_t - C_t),$$

donde  $\gamma$  denota el factor subjetivo de descuento,  $R = (1 + r)$  con  $r$  igual a la tasa de interés (constante),  $A_t$  denota riqueza financiera al comienzo de  $t$  y  $Y_t$  denota el ingreso laboral del hogar en el período  $t$ , el cual sigue un proceso Markoviano. La función de utilidad  $u(c_t, c_{t-1})$  representa el flujo de utilidad experimentado por el hogar en el período  $t$ . Esta función permite capturar de manera general que el consumo presente y del período anterior afectan la utilidad presente; esta formulación incluye como casos particulares los dos ejemplos de formación de hábitos antes mencionados.

- (a) Identifique las variables de estado y variables de decisión. Indique cuáles variables de estado son endógenas y cuáles exógenas, donde las endógenas son determinadas por acciones del agente económico y la exógenas no dependen de dichas acciones.
- (b) Escriba la ecuación de Bellman del problema. Determine la condición de primer orden para el lado derecho de la ecuación de Bellman y las condiciones de la envolvente para cada una de las variables de estado endógenas.
- (c) Utilice las expresiones de la parte (b) para mostrar que la ecuación de Euler viene dada por:

$$(4) \quad u_1(c_t, c_{t-1}) + \gamma E_t u_2(c_{t+1}, c_t) = \gamma R E_t [u_1(c_{t+1}, c_t) + \gamma u_2(c_{t+2}, c_{t+1})],$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  denotan la derivada parcial de  $u$  con respecto a su primer y segundo argumento, respectivamente.

- (d) En esta parte derivamos (4) de una manera alternativa.<sup>1</sup> Suponga que  $c_{t-1}$ ,  $c_t$ ,  $c_{t+1}$  y  $c_{t+2}$  son los valores que toma el consumo en la trayectoria óptima y suponga que se reduce  $c_t$  en  $\Delta$ , ahorrando dicho monto y consumiendo lo ahorrado en  $t + 1$ . Planteando la condición que para  $\Delta$  pequeño esta variante en la trayectoria del consumo no altera la utilidad descontada esperada del hogar, derive (4).
- (e) En esta parte considere el caso en que  $u(c_t, c_{t-1}) = \log(c_t/c_{t-1}^p)$ , con  $0 < p < 1$ . Utilice (4) para derivar la ecuación de Euler. Compare con la ecuación de Euler en el caso sin hábito. De ser iguales, explique por qué. Si son distintas, interprete la diferencia.
- (f) Ahora considere el caso de utilidad cuadrática, es decir, estudiamos cómo el caso de equivalencia cierta con hábito:

$$u(c_t, c_{t-1}) = [c_t - \eta c_{t-1}] - \frac{b}{2} [c_t - \eta c_{t-1}]^2,$$

donde  $b > 0$  y  $0 < \eta < 1$ . Suponga que  $\gamma R = 1$ . Utilice (4) para derivar la ecuación de Euler para este caso. Suponga que la solución es un proceso AR(1) para  $\Delta C_t$ , de modo que

$$\Delta C_t = \phi \Delta C_{t-1} + e_t,$$

donde los  $e_t$  son innovaciones. Determine el único valor de  $\phi \in (0, 1)$  consistente con la ecuación de Euler que obtuvo. Compare con el caso sin hábito. De ser iguales, explique por qué. Si son distintas, interprete la diferencia. **Sugerencia:** Para que el álgebra sea más simple, le sugerimos proceder como sigue: Primero, obtenga expresiones para  $u_{1,t} \equiv u_1(c_t, c_{t-1})$  y  $u_{2,t} \equiv u_2(c_t, c_{t-1})$ . Segundo, exprese  $u_{2,t}$  en términos de  $u_{1,t}$ . Tercero, use (4) y la relación anterior para concluir que la ecuación de Euler equivale a:

$$E_t \Delta u_{1,t+1} = \eta \gamma E_t \Delta u_{1,t+2}$$

Ahora exprese  $\Delta u_{1,t}$  en términos de  $\Delta C_t$  y  $\Delta C_{t-1}$  para mostrar que la expresión anterior lleva a una ecuación de diferencias en expectativas y luego use el supuesto que  $\Delta C_t$  sigue un AR(1) para determinar el único valor de  $\phi \in [0, 1]$  que cumple esta ecuación.

### 3. Procastinación

Su utilidad vista desde el período  $t$  de un flujo de beneficios instantáneos  $u_t, u_{t+1}, \dots, u_T$  viene dada por:

$$U^t(u_t, u_{t+1}, \dots, u_T) = u_t + \eta \sum_{s=t+1}^T u_s.$$

Usted va regularmente al cine cercano a su casa los sábados y las películas que tocan las próximas semanas son una película mediocre, seguida de una buena, seguida de una excelente seguida de una película de su actor/actriz favorita que no se quiere perder por ningún motivo. Los utiles que deriva de estas películas son 5, 6, 7 y 15, respectivamente.

Desgraciadamente usted debe estudiar para sus exámenes en la FEN, por lo cual deberá perderse una de las películas. Determine la película que se salta en cada uno de los siguientes casos, explicando en detalle el razonamiento que justifica su respuesta:

<sup>1</sup>Lo que sigue se conoce como un argumento de perturbación, porque se analiza una leve desviación ('perturbación') de la trayectoria óptima.

- (a)  $\eta = 1$ .
- (b)  $\eta = 1/2$  y usted es hiperbólico ingenuo, es decir, no juega juegos con su persona futura.
- (c)  $\eta = 1/2$  y usted es hiperbólico sofisticado, de modo que juega juegos con su persona futura.