Solemne Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Ignacio Fuentes y Hriday Karnani

4 de mayo de 2024

Lea atentamente las siguientes indicaciones:

- Ud. tiene 140 minutos para resolver la prueba.
- La prueba consta de 4 ejercicios y tiene un total de 120 puntos.
- Los puntos asociados a cada pregunta están indicados en cada pregunta.
- Lea todas las preguntas antes de comenzar a responder, esto le permitirá planificar su trabajo de forma eficiente. Evite dedicar mucho tiempo a una pregunta.
- Responda cada pregunta en una hoja distinta, indique cuál pregunta está respondiendo y escriba con letra clara.
- Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.
- En caso de descubrir un intento de copia, éste se sancionará de acuerdo con el reglamento de copia y plagio de la facultad.

Pregunta 1. (24 puntos)

Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}_+$, ($\mathcal{B} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}_+, a < b\}$).

1. (12 puntos) Considere la regla de elección definida por $C([a, b]) = \{a\}$. Determine si la estructura de elección $(\mathcal{B}, C())$ satisface el ADPR. Demuestre o de un contraejemplo.
2. (12 puntos) Considere la regla de elección definida por $C([a, b]) = \{a, b\}$. Determine si la estructura de elección $(\mathcal{B}, C())$ satisface el ADPR. Demuestre o de un contraejemplo.

Respuesta

El ADPR dice que

> si para algún $B \in \mathcal{B}$, con $x, y \in B$ tenemos que $x \in C(B)$, entonces para cualquier $B' \in \mathcal{B}$ con $x, y \in B'$ tal que $y \in C(B')$, también se tiene que $x \in C(B')$.

1. Sí satisface el ADPR.

   Sean x e y tales que $x \neq y$ y ambos pertenecen a los conjuntos B y B'. Si $x \in C(B)$ sabemos que $x < y$. Por lo tanto, $y \notin C(B')$ para cualquier otro conjunto B' que los contenga a ambos.

2. No satisface el ADPR.

   Considere los conjuntos $B = [1, 3]$ y $B' = [0, 2]$ y los puntos $x = 1$ e $y = 2$. Tenemos que x y y pertenecen a B y B', $x \in C(B)$ e $y \in C(B')$ pero $x \notin C(B')$.

Pregunta 2. (30 puntos)

La preferencia $\succsim$ está definida en $X = \mathbb{R}^2_+$ de la siguiente manera: dados $x, y \in X$ tales que $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$

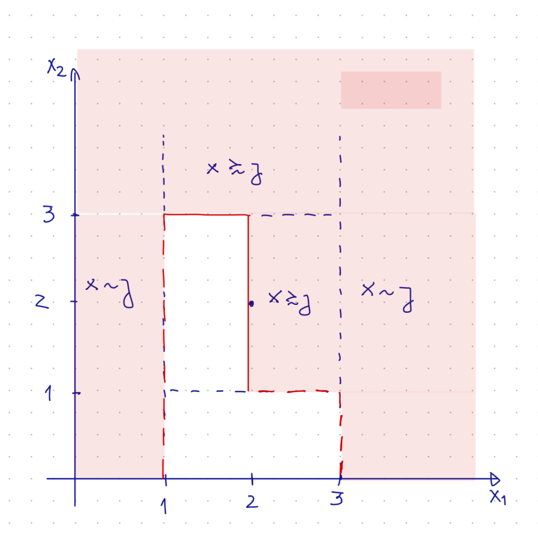
- si $|x_1 - y_1| > 1$: $x \sim y$,
- si $|x_1 - y_1| \leq 1$ y $|x_2 - y_2| > 1$: $x \succsim y$ si $x_2 \geq y_2$, y
- si $|x_1 - y_1| \leq 1$ y $|x_2 - y_2| \leq 1$: $x \succsim y$ si $x_1 \geq y_1$.

Responda justificadamente las siguientes preguntas.

1. (10 puntos) Encuentre el conjunto de contorno superior del punto $(2, 2)$
2. (10 puntos) ¿Las preferencias son racionales?
3. (10 puntos) ¿Las preferencias pueden ser representadas por una función de utilidad?

Respuesta

1.



2. Las preferencias no son racionales, pues no son transitivas. Para demostrar esto damos un contraejemplo. Considere las canastas $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 2)$. Según la definición de $\succsim$ tenemos que:
   - $(1, 1) \succ (0, 0)$,
   - $(2, 2) \succ (1, 1)$ y
   - $(2, 2) \sim (0, 0)$.
3. No. Porque la racionalidad es condición necesaria para que una preferencia pueda ser representada por una función de utilidad.

Pregunta 3. (36 puntos)

Parte a. (18 puntos)

Sea u una función de utilidad continua que representa preferencias localmente no saciadas en el conjunto de consumo $X = R^L_+$, y p el vector de precios tal que $p \gg 0$. Demuestre que

> Si x^* es óptimo en el Problema de Maximización de Utilidad (PMaxU) cuando el ingreso del consumidor es $\bar{\omega} > 0$, entonces x^* es óptimo en el Problema de Minimización del Gasto (PMinG) cuando la utilidad requerida es $u(x^*)$. Además, el nivel mínimo de gasto en este PMinG es exactamente $\bar{\omega}$.

Parte b. (18 puntos)

Considere la siguiente función de utilidad definida en $I\!R^2_+$,

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & \text{si } x_1 x_2 < 4 \\ 4, & \text{si } x_1 x_2 \geq 4 \end{cases}$$

1. (6 puntos) Encuentre la(s) solución(es) del PMaxU si $p = (2, 1)$ y $\bar{\omega} = 8$. ¿Cuál es la utilidad máxima?
2. (6 puntos) Encuentre la(s) solución(es) del PMinG si $p = (2, 1)$ y el nivel de utilidad que se quiere obtener es 4. ¿Cuál es el gasto mínimo?
3. (6 puntos) Las soluciones encontradas en b.1 y b.2, ¿contradicen lo demostrado en la Parte a.? Justifique.

Respuesta

Parte a.

Demostración por contradicción. Si x^* no es la demanda Marshalliana, es decir que no es solución del problema de maximización de la utilidad, entonces existe x' tal que $u(x') > u(x^*)$ y $p \cdot x' \leq p \cdot x^*$.

Por continuidad de u existe $\alpha \in (0, 1)$ (suficientemente cerca de 1) tal que $u(\alpha x') > u(x^*)$.Además, $p \cdot (\alpha x') < p \cdot x' \leq p \cdot x^*$ dado que $\alpha < 1$. Pero esto contradice la optimalidad de x^* en (PMG) dado que $(\alpha x')$ es un punto factible de (PMG) con un menor valor de la función objetivo.

Parte b.

1. Vemos dos formas de resolver este ejercicio.

- Observamos que el máximo valor posible de u es 4, y que hay puntos dentro del conjunto presupuestario que la alcanzan (por ejemplo: el punto $(2, 2)$). Es decir que la utilidad máxima que puedo alcanzar es 4.

  La demanda Marshalliana es

  $$x^*(p, w) = \{x \in I\!R^2_+ \text{ tales que } x_1 x_2 \geq 4 \text{ y } 2x_1 + x_2 \leq 8\}.$$

  Sabemos que es un conjunto no vacío porque $(2, 2)$ pertenece a él.

- Otra forma de resolverlo, sería empezar por ver si hay alguna solución al (PMaxU) dentro de la región donde la función u vale $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Para eso, resolvemos el problema como si $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ en todo $I\!R^2_+$ (aunque sabemos que no es cierto) y luego **verificamos** si la solución encontrada está en la región $x_1 x_2 < 4$.

En este caso, el Lagrangiano correspondiente es:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} = x_1 x_2 + \lambda(8 - 2x_1 - x_2) \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{L}_{x_1} = x_1 - 2\lambda \\ & \mathcal{L}_{x_2} = x_2 - \lambda \end{aligned}$$

Igualando $\nabla\mathcal{L} = 0$, obtenemos que $x_2 = 2x_1$. Sustituyendo en la restricción presupuestaria, obtenemos $4x_1 = 8$. Como estamos en el caso en que $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ en todo $I\!R^2_+$, la función es l.n.s. y el óptimo debe alcanzarse en la restricción presupuestaria, y por lo tanto $2x_1 + x_2 = 2x_1 + 2x_1 = 8$ y obtenemos $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$.

Sin embargo, el punto $(2, 4)$ no cumple que $x_1 x_2 = 8 < 4$.

Todo lo anterior, nos sirve para ver que el óptimo se debe alcanzar en la región en que $x_1 x_2 \geq 4$. Es decir que la utilidad máxima que puedo alcanzar es 4y la demanda Marshalliana es

$$x^*(p, w) = \{x \in I\!R^2_+ \text{ tales que } x_1 x_2 \geq 4 \text{ y } 2x_1 + x_2 \leq 8\}.$$

Sabemos que es un conjunto no vacío porque $(2, 4)$ pertenece a él.

2. El problema a resolver es

$$\begin{cases} \text{mín} & 2x_1 + x_2 \\ s.a & x_1 x_2 \geq 4 \end{cases}$$

El Lagrangiano correspondiente es

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} = 2x_1 + x_2 + \lambda(4 - x_1 x_2) \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{L}_{x_1} = 2 - \lambda x_2 \\ & \mathcal{L}_{x_2} = 1 - \lambda x_1 \end{aligned}$$

Igualando $\nabla\mathcal{L} = 0$, obtenemos que $x_2 = 2x_1$.

Como el gasto se minimiza con x_1 y x_2 lo más pequeños posibles, sabemos que la restricción $x_1 x_2 \geq 4$ se debe cumplir con igualdad. Otra forma de ver esto es: como λ no puede ser 0 (pues obtendríamos 1=0), la condición de complementariedad $\lambda(4 - x_1 x_2) = 0$ implica que $x_1 x_2 = 4$.

Por lo tanto, obtenemos

$$x_1 x_2 = 2(x_2)^2 = 4 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2}$$

y $x_1 = \sqrt{2}/2$.

La solución del (PMinG) es $h^* = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ y el gasto mínimo es $\omega = 2\sqrt{2}$.

3. Vemos que hay varios valores de x que pertenecen a la demanda Marshalliana que no son solución del PMinG. También vemos que si bien la utilidad óptima encontrada en la parte b.1 es igual a la utilidad mínima exigida en b.2, los gastos no coinciden pues $\bar{\omega} \neq 8$.

Es decir, la afirmación de la Parte a. no se cumple.

Sin embargo, esto no contradice lo demostrado pues la función u no es localmente no saciada, por lo tanto, no cumple los supuestos necesarios para la demostración.

Pregunta 4. (30 puntos)

Considere un contribuyente con ingresos fijos $y > 0$ por los que debe pagar un impuesto proporcional t, con $t \in (0,1)$. El contribuyente debe realizar una declaración jurada en el Servicio de Impuestos Internos, donde debe indicar el monto que percibe de ingresos. Llamaremos x al monto que declara. Si el contribuyente declara x, paga un impuesto $t \times x$.

Si el contribuyente es honesto va a reportar $y = x$, pero también podría reportar otro valor. Definimos $z = y - x$, es decir, z es el monto que sub-declara de sus ingresos. Asumimos que $z \in [0, y]$ (el contribuyente no declara más que su verdadero ingreso y y tampoco declara ingresos negativos).

A priori, el SII no conoce los ingresos verdaderos. El SII audita cada reporte con una probabilidad fija $p \in (0,1)$. Cada vez que audita un reporte, el SII logra conocer el valor de y. Si $z = y - x > 0$, el contribuyente debe pagar el impuesto evadido y una multa proporcional al monto evadido, multa $= m \times z$.

Asuma que el contribuyente es averso al riesgo, que maximiza su utilidad esperada, y que la función de Bernoulli u es dos veces derivable y estrictamente creciente.

1. (5 puntos) Escriba la lotería que enfrenta el contribuyente.
2. (5 puntos) Escriba la utilidad esperada del contribuyente como función del monto sub-declarado z.
3. (10 puntos) Encuentre la condición en m (depende de p y t) que asegura que el contribuyente no evada sus impuestos.
4. (10 puntos) Suponga que la condición anterior no se cumple y que el contribuyente escoge un monto óptimo de declaración $z^* > 0$. ¿Como varía z^* si la probabilidad p de ser auditado aumenta?

Respuesta

1. Con probabilidad $1 - p$, el contribuyente no es auditado y su riqueza final será $y - tx$.

   Con probabilidad p, si es auditado y debe pagar lo que no ha pagado del impuesto (con lo que el impuesto total que paga es ty) y además una multa de mz, por lo que si riqueza final es $y - ty - mz$.

2. $$U(z) = (1-p)u(y - ty + tz) + pu(y - ty - mz).$$

3. Para resolver esta parte, primero observamos que la función U es cóncava en z. Por lo que las condiciones necesarias de optimalidad son también suficientes para caracterizar la solución óptima.

   Para que sea óptimo declarar todo el ingreso, se debe cumplir que $U'(0) \leq 0$.

$$\begin{aligned}
& U'(z) = (1-p)tu'(y - ty + tz) - mpu'(y - ty - mz) \\
\Rightarrow \quad & U'(0) = (1-p)tu'(y - ty) - mpu'(y - ty) = [(1-p)t - mp]u'(y - ty) \leq 0 \\
\Rightarrow \quad & (1-p)t - mp \leq 0 \\
\Rightarrow \quad & m \geq \frac{t(1-p)}{p}.
\end{aligned}$$

4. Si $z^* > 0$, entonces z^* cumple

$$U'(z^*) = (1-p)tu'(y - ty + tz^*) - mpu'(y - ty - mz^*)$$

La expresión de $U'(z)$ se puede escribir como

$$U'(z^*) \quad = \quad tu'(y - ty + tz^*) - p[tu'(y - ty + tz^*) + mu'(y - ty - mz^*)].$$

Es evidente que $U'(z^*)$ es decreciente con p (pues el término entre corchetes es positivo).

Al aumentar p el lado derecho de la igualdad disminuye, para cancelar este efecto es necesario que z^* también disminuya, En efecto, teniendo en cuenta que u' es decreciente, vemos que z^* decrece el lado derecho aumenta y puede cancelar el efecto del incremento de p para mantener la igualdad a 0.

Esto significa que si aumenta la probabilidad de ser auditado, debe disminuir el monto de subdeclaración.

Otra forma de resolver esta parte es utilizando el Teorema de la Función Implícita. Llamamos $z(p)$ al z óptimo para p, tenemos que $U'(z(p)) = 0$, y entonces

$$U'(z(p)) = (1-p)tu'(y - ty + tz(p)) - mpu'(y - ty - mz(p)) = 0.$$

Derivando con respecto a p obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad -[tu'(y - ty + tz^*) + mu'(y - ty - mz^*)] \\ &\quad +[t^2(1-p)tu''(y - ty + tz^*) + m^2pu''(y - ty - mz^*)]\frac{dz}{dp} \\ \Rightarrow \frac{dz}{dp} \quad &= \quad \frac{tu'(y - ty + tz^*) + mu'(y - ty - mz^*)}{t^2(1-p)tu''(y - ty + tz^*) + m^2pu''(y - ty - mz^*)} \end{aligned}$$

y concluimos que $\frac{dz}{dp} < 0$ porque u es cóncava y estrictamente creciente.