Ayudantía 4

Pedro Schilling

Universidad de Chile

13 Junio 2023

Índice

Problema 1

Problema 1

Considere una economía con un contínuo de hogares, cada miembro del hogar está dotado de una unidad de tiempo por período, que es repartido entre trabajo $(u(t))$ y acumulación de capital humano $(1-u(t))$. El hogar representativo maximiza:

$$U\int_{o}^{\infty} e^{-\rho}\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}N(t)dt$$

Donde $N(t)$ es la cantidad de personas del hogar y c es el consumo per cápita. La producción agregada es:

$$Y(t)=K(t)^{\alpha}\left[Au(t)h(t)N(t)\right]^{1-\alpha}$$

Donde Y es el producto del bien final, K es el capital agregado, h es el nivel de capital humano per cápita, y A es la tecnología *labour augmenting*.

Problema 1

Suponemos que $A = 1$. Las leyes de movimiento del capital físico y humano son

$$\dot{K}(t) = Y(t) - N(t)c(t)$$
$$\dot{h}(t) = h(t) - \phi(1 - u(t))$$

Donde $\phi > 0$ es una constante.
La tasa de crecimiento de la población es n.

Pregunta 1

a) Muestre que la trayectoria de crecimiento óptima (BGP) todas las variables per cápita $c, h, k = K/N$ crecen a la misma tasa constante junto a la asignación constante en el tiempo u.

a)

Planteamos el Hamiltoniano que caracteriza el problema:

$$\begin{aligned} H = N(t)\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \quad &+ \quad \lambda_1(t)\left[K(t)^{\alpha}\left(u(t)h(t)N(t)\right)^{1-\alpha} - N(t)c(t)\right] + \\ &+ \quad \lambda_2(t)\left[h(t)\phi(1-u(t))\right] \end{aligned}$$

Donde tenemos 2 controles y dos estados. Resolviendo, encontramos la ecuación de Euler:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\sigma}\left(\alpha K(t)^{\alpha-1}[u(t)h(t)N(t)]^{1-\alpha} - \rho\right)$$

a)

Ahora, si existiera una senda de crecimiento estable, todas las variables crecen a una tasa constate, por lo que $\frac{\dot{c}}{c} = g_c$. De la ecuación de Euler, tenemos que

$$\sigma g_c + \rho = \alpha K(t)^{\alpha-1}[u(t)h(t)N(t)]^{1-\alpha}$$

Tomando logarítmo y derivando con respecto al tiempo, tenemos que:

$$0 = (\alpha - 1)g_K + (1-\alpha)g_u + (1-\alpha)g_h + (1-\alpha)n$$
$$\Rightarrow g_K = g_h + n$$

Donde usamos que $g_u = 0$ dado que $u \in [0, 1]$. De este mismo hecho, tenemos que

$$g_K = \phi(1-u) + n \Rightarrow g_k = g_h$$

a)

De la ecuación de dinámica del capital, tenemos que:

$$\alpha K(t)^{\alpha-1}[u(t)h(t)N(t)]^{1-\alpha} = \alpha\left(\frac{\dot{K}}{K} + \frac{N(t)c(t)}{K(t)}\right)$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación de Euler, tenemos:

$$g_c = \frac{1}{\sigma}\left(\alpha(g_K + \frac{N(t)c(t)}{K(t)}) - \rho)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}(\sigma g_c + \rho) - g_K = \frac{c(t)}{\left(\frac{K(t)}{N(t)}\right)}$$

Cómo el lado izquierdo es constante, tenemos que $g_c = g_k$
Por lo que tenemos que en la senda estbale, $g_c = g_h = g_k$

Problema 1

Suponga ahora que hay un efecto externo a raíz del capital humano, que la decisión de acumulación de capital humano del individuo(a) no puede controlar pero que afecta al producto agregado de la siguiente manera, $Y(t) = K(t)^{\alpha} \left[Au(t)h(t)N(t)\right]^{1-\alpha} h(t)^{\gamma}$ Donde h es el nivel de capital humano promedio en esta economía. Suponiendo $A = 1$ y $\gamma > 0$, i.e., el capital humano tiene una externalidad positiva sobre el producto agregado. Asumiendo que los individuos del hogar ni las firmas toman en cuenta la externalidad, responda:

Pregunta 1

b) Muestre que en el BGP las tasas de crecimiento de las variables per cápita se relacionan de la siguiente manera

$$g_y = g_k = \left(\frac{1-\alpha+\gamma}{1-\alpha}\right) g_h$$

b)

De la ecuación del producto tenemos que

$$g_y = \alpha g_k + (1 - \alpha - \gamma) g_h$$

Por último, tomando logarítmo de la ecuación de Euler después de haber despejado a la izquierda las constantes, tenemos que:

$$g_k = \frac{1 - \alpha - \gamma}{1 - \alpha} g_h$$

Reemplazando en el crecimiento del producto, tendremos que

$$g_y = \frac{1 - \alpha - \gamma}{1 - \alpha} g_h$$

Por lo que finalmente, concluimos que

$$g_y = g_k > g_h$$

Problema 2

Pregunta 2

Considere una economía cuyo agente representativo tiene una función de utilidad de la forma

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

y enfrenta una restricción presupuestaria

$$\dot{a}(t) = r(t)a(t) + w(t) - c(t)$$

Donde $a(t)$ es su nivel de activos, $w(t)$ es su salario, $r(t)$ es el retorno de sus activos y $c(t)$ es su nivel de consumo en el período t. Esta es una economía pequeña y cerrada por lo que el único activo en oferta neta es el capital, $k(t) = a(t)$. El capital se deprecia a una tasa δ. Imagine ahora que cada empresa en esta economía tiene una función de producción de la forma:

$$Q(t) = A \cdot K(t)$$

Donde $Q(t)$ es el producto final y $K(t)$ es el stock de capital de cada firma.

Pregunta 2

El número de personas en la economía L es constante. Asuma ahora que un virus ataca al país y genera un efecto negativo en la economía. En particular, asuma que el virus le "quita" a la economía una fracción $(1 - p)$ de la producción. Es decir, las personas en una economía atacada por el virus logran mantener una fracción p de la producción que existiría en tiempos normales. La autoridad de este país puede reducir los efectos del virus en el economía gastando recursos en un sistema de "testeo, trazabilidad y aislamiento". Asuma que los recursos destinados a este sistema son iguales a G unidades del producto final. Las pérdidas asociadas al virus son decrecientes en G (p es creciente en G). Pero dado un nivel de G, el sistema de "testeo, trazabilidad y aislamiento" es menos efectivo cuando la actividad económica "efectiva" es mayor. Defina Y como la cantidad de producto final que las empresas logran producir una vez que el páis ha sido atacado por el virus (actividad económica efectiva). Con todo, p es una función de G/Y con $p' > 0$, y $p'' < 0$.

Pregunta 2

El nivel de producto una vez que el virus ha afectado a la economía es:

$$Y(t) = A \cdot K(t) \cdot p(G(t)/Y(t))$$

Para financiar el sistema de protección frente al virus el gobierno debe cobrar impuestos al producto efectivo. Asuma que la tasa de impuestos es constante e igual a τ . El gobierno mantiene un presupuesto balanceado por lo que su restricción presupuestaria viene dada por:

$$G(t) = \tau Y(t)$$

Pregunta 2

1. El agente representativo elige la trayectoria para $c(t)$ y para $a(t)$, para maximizar función de utilidad sujeto a su restricción presupuestaria. Encuentre las condiciones de primer orden. Encuentre la relación entre la tasa de crecimiento del consumo y la tasa de interés. Interprete cómo cambia la tasa de crecimiento ante cambios en sus parámetros.

1. Solución

El individuo maximiza su función de utilidad sujeot a su restricción presupuestaria:

$$\begin{array}{ll} \max_{\{c(t)\}} & \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt \\ s.a & \dot{a}(t)=r(t)a(t)+w(t)-c(t) \end{array}$$

Resolviendo, tenemos que:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1}{\theta}\left(r(t)-\rho\right)$$

Donde evidentemente tenemos que

- $\frac{\partial\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)}{\partial\theta}<0$: Individuo buscará suavizar consumo si es más averso al riesgo.
- $\frac{\partial\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)}{\partial r}>0$: Por efecto sustitución es más atractivo posponer consumo presente, ya que es más caro.
- $\frac{\partial\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)}{\partial\rho}<0$: Individuo es más impaciente, y valora más el presente.

Pregunta 2

2. Las empresas maximizan la utilidad después del virus y de impuestos y actúan competitivamente tomando τ y la proporción p como dados. Encuentre la expresión para las utilidades después de impuesto (la función objetivo de las empresas). Derive la condición de primer orden para las empresas.

2. Solución

La función de utilidad de las firmas es

$$\Pi = Y(t)(1-\tau)-R(t)K(t), \quad R(t) = \delta+r(t), \quad Y(t) = AK(t)p\left(G(t)/Y(t)\right)$$

$$\Rightarrow AK(t)\cdot p\left(G(t)/Y(t)\right)(1-\tau) - (\delta r(t))K(t)$$

Solucionando el problema, tenemos que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K(t)} = 0 \Rightarrow (1-\tau)Ap\left(G(t)/Y(t)\right) = \delta + r(t)$$

Pregunta 1

3. Usando la restricción presupuestaria del gobierno y la condición de primer orden obtenida previamente, encuentre una expresión para la tasa de crecimiento del consumo en estado estacionario como función del tamaño del gobierno τ y los parámetros del modelo. ¿Qué restricciones (en términos de parámetros) debe imponer para asegurar que la tasa de crecimiento del consumo sea positiva y que la utilidad tenga límite?

3. Solución

De la restricción del gobierno, tenemos que:

$$G(t) = \tau Y(t) \Rightarrow \tau = G(t)/Y(t)$$

Reemplazando en la condición de primer orden, tenemos que

$$r(t) = (1-\tau)Ap(\tau) - \delta$$

por lo que en la ecuación de Euler:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}((1-\tau)Ap(\tau) - \delta - \rho)$$

Para que la trayectoria de consumo sea creciente, debemos asegurar que

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} > 0 \Rightarrow (1-\tau)Ap(\tau) > \delta + \rho$$

$$\Rightarrow (1-\tau)Ap(\tau) - \delta > \rho$$

3. Solución

Para asegurar que la utilidad está limitada, en primer lugar resolvemos la ecuación diferencial del consumo:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \gamma \Rightarrow \dot{c}(t) - \gamma c(t) = 0$$

$$\int_0^t \dot{c}(t) - \gamma c(t) dt = 0 \Rightarrow c(t) = e^{\gamma t} c(0)$$

$$c(t) = e^{\frac{1}{\theta}((1-\tau)Ap(\tau)-\delta-\rho)} c(0)$$

Reemplazando en la función de utilidad:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{\{e^{\gamma t} c(0)\}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt = \frac{c(0)^{1-\theta}}{1-\theta} \int_0^\infty e^{((1-\theta)\gamma-\rho)t} dt - \frac{1}{1-\theta} \int_0^\infty e^{-\rho}$$

3. Solución

Para que lo anterior esté acotado, tenemos que:

$$(1-\theta)\gamma < \rho$$

$$\frac{1-\theta}{\theta}\left((1-\tau)Ap(\tau)-\gamma-\rho\right) < \rho \Rightarrow (1-\theta)\left((1-\tau)Ap(\tau)-\gamma\right) < \rho$$

Por lo que, combinando con la condición de trayectoria de consumo creciente, tendremos que:

$$(1-\theta)\left((1-\tau)Ap(\tau)-\gamma\right) < \rho < (1-\tau)Ap\left(\tau\right)-\delta$$

Siendo la condición de parámetros consistente con nuestros criterios.

Pregunta 2

4. Si el gobierno quiere maximizar la tasa de crecimiento del consumo, ¿qué tasa de impuesto fijaría? Interprete.

4. Solución

El gobierno maximizará $\frac{\dot{c}}{c}$ escogiendo τ.

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left((1-\tau)Ap\left(\tau\right) - \delta - \rho\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{A}{\theta}(p'(\tau)(1-\tau) - p(\tau)) = 0$$

Por lo que

$$p'(\tau)(1-\tau) = p(\tau)$$

Donde el τ óptimo satisface la ecuación de arriba.

Pregunta 2

5. Considere un planificador social que internaliza la restricción presupuestaria del gobierno antes de tomar las decisiones de consumo e inversión. ¿Cuál es la tasa de crecimiento que elegiría el planificador social? ¿Es esta tasa diferente de la tasa de crecimiento obtenida en (c)? Interprete. ¿Cuál es la tasa de impuesto óptima que elegiría el planificador central? Explique intuitivamente.

5. Solución

Si el planificador internaliza la restricción del gobierno, habrán 2 controles y 1 estado. Además, dado que estamos en una economía cerrada, tenemos que $\dot{a}(t) = \dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L}$. Así, el planificador se enfrentará al siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \max_{\{c(t),\tau\}} & \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \\ s.a & \dot{k}(t) = (1-\tau)Ak(t)p(\tau) - c(t) - \delta k(t) \end{array}$$

Resolviendo el Hamiltoniano, tendremos que

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left((1-\tau)Ap\left(\tau\right) - \delta - \rho\right) \vee p'(\tau)(1-\tau) = p(\tau)$$

Por lo que obtenemos el mismo resultado de mercado en caso de que el gobierno escogiera el τ óptimo.

Pregunta 2

6. Imagine ahora que el virus es transitorio, dura un período de tiempo determinado. Desafortunadamente, el virus puede tener un efecto negativo permanente en la productividad A. Imagine que el nivel de productividad una vez que el virus ha "desaparecido" es $A^{SV} = A^{CV} \cdot p$. Es decir, mientras mayor sea p, menor serán los efectos permanentes en la productividad. Asuma ahora que el gobierno puede endeudarse en los mercados financieros internacionales a una tasa r^* (los privados no pueden endeudarse). Explique intuitivamente cuál podría ser la política óptima por parte del gobierno en este caso. No es necesario hacer ninguna derivación matemática.

6. Solución

Se busca minimizar el efecto de la pandemia en la economía, y maximizar su producto. Así, con un acceso a deuda externa se pod´ria usar para el aumento en ρ.
El gobierno podría aumentar transitoriamente su gasto, que pagará gradualmente con impuestos permitiendo que τ no varíe mucho en el período de crisis, produciendo menos volatilida en τ que si hubiera sido financiado todo sin incurrir a deuda.