Ayudantía 2

Pregunta 1

a) γ puede ser visto como un nivel de subsistencia.

b) Primero, resolvemos para los hogares. Ellos maximizan su utilidad s.a la restricción presupuestaria usual:

$$\max_{c(\tau)} \int_0^{\infty} \exp((\rho-n)\tau) \frac{(c(\tau)-\gamma)^{1-\theta}-1}{1-\theta} d\tau$$

$$\text{S.A} \quad \dot{a}(\tau) = w(\tau) + (r(\tau)-n)a(\tau) - c(\tau)$$

Planteamos el Hamiltoniano en valor presente:

$$H = \frac{(c(\tau)-\gamma)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \mu(\tau)\left(w(\tau) + (r(\tau)-n)a(\tau) - c(\tau)\right)$$

Y tomamos condiciones de optimalidad:

$$\frac{\partial H}{\partial c(\tau)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (c-\gamma)^{-\theta} = \mu \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial a(\tau)} = -\dot{\mu} + (\rho-n)\mu \quad \Rightarrow \quad \mu(r-n) = -\dot{\mu} + \mu(\rho-n) \qquad (2)$$

Tomamos logaritmo en (1) y derivamos c.r al tiempo:

$$-\theta \ln(c-\gamma) = \ln\mu \qquad \Big/ \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\theta \frac{\dot{c}}{c-\gamma} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} \qquad (3)$$

De (2), recordamos:

$$(r-\rho) = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} \qquad (4)$$

Reemplazamos (3) en (4) y tenemos

$$\theta \frac{\dot{c}}{c-\gamma} = (r-\rho)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{c-\gamma}{c}\frac{1}{\theta}(r-\rho) \qquad (5)$$

Luego, note que la elasticidad intertemporal de sustitución depende de $c(t)$. Si $\gamma=0$, estaríamos en CRRA y sería cte.

Del lado de la firma, sabemos que

$$\max F(K, AL) - wL - RK \quad , \quad R = r+\delta$$

$$F_K(K,AL) = r+\delta$$

Pero, sabemos que $F(\cdot)$ homogénea grado 1:

$$AL\,F\left(\frac{K}{AL},1\right) = AL\,f(k).$$

$$\frac{\partial}{\partial K} = F_K(K,AL) = \cancel{AL}\,f'(k)\cdot\frac{1}{\cancel{AL}} \iff F_K(K,AL) = f'(k)$$

$$\Rightarrow f'(k) = r+\delta \iff r = f'(k)-\delta \;//$$

Reemplazamos en la ecuac. de Euler:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{c-s}{c}\frac{1}{\theta}\left(f'(k)-\delta-\rho\right)$$

Con lo que encontramos el primer locus. Ahora, encontramos la ley de movimiento del capital:

$$\dot{K} = F(K, AL) - C - \delta K$$

Luego, ya que

$$\dot{k} = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{K}AL - K(\dot{A}L + A\dot{L})}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - k\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{k} = f(k) - \frac{C}{A} - k(g+n+\delta)$$

En este caso, no se puede extraer $A(t)$ del análisis, pues incluso si normalizamos consumo a $\hat{c} = \frac{c}{A}$, en Euler aparecería un término A. Por tanto, también encontraremos un locus para A:

$$\dot{A} = gA.$$

Así, las ecuaciones de equilibrio son

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{c-s}{c}\frac{1}{\theta}\left(f'(k)-\delta-\rho\right)$$

$$\dot{k} = f(k) - \frac{C}{A} - k(g+n+\delta)$$

$$\dot{A} = gA$$

c) El planificador central resolvería

$$\max \int_0^\infty \exp(-(\rho-n)\tau) \frac{(c(\tau)-\gamma)^{1-\theta}-1}{1-\theta} d\tau$$

$$\text{s.a} \quad \dot{k} = f(k) - \frac{c}{A} - k(g+n+\delta)$$
$$\dot{A} = Ag$$

Planteando el Hamiltoniano:

$$H = \frac{(c-\delta)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \mu_1\left(f(k) - \frac{c}{A} - k(g+n+\delta)\right) + \mu_2 Ag$$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \qquad \Leftrightarrow (c-\delta)^{-\theta} - \frac{\mu_1}{A} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\mu}_1 + \mu_1(\rho-n) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1\left(f'(k) - (g+n+\delta)\right) = -\dot{\mu}_1 + \mu_1(\rho-n) \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial A} \qquad (3)$$

Tomando log() de (1) y derivando c.r al tiempo:

$$-\theta \ln(c-\delta) = \ln \mu_1 - \ln A \qquad \Big/ \frac{\partial}{\partial t}$$

$$-\theta \frac{\dot{c}}{c-\delta} = \frac{\dot{\mu}_1}{\mu} - \frac{\dot{A}}{A}$$

$$\theta \frac{\dot{c}}{c-\delta} = -\frac{\dot{\mu}_1}{\mu_1} + g$$

Despejando $\frac{\dot{\mu}_1}{\mu}$ de (2):

$$\mu_1\left(f'(k) - (g+n+\delta)\right) = -\dot{\mu}_1 + \mu_1(\rho-n)$$

$$f'(k) - (g+n+\delta) + n - \rho = -\frac{\dot{\mu}_1}{\mu_1}$$

$$f'(k) - (g+\rho+\delta) = -\frac{\dot{\mu}_1}{\mu_1}$$

$$\theta \frac{\dot{c}}{c-\bar{c}} = f'(k) - (\cancel{g}+\rho+\delta) + \cancel{g}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{c-\bar{c}}{c}\frac{1}{\theta}\left(f'(k) - (\rho+\delta)\right)_{//}$$

d) Luego, las ecuaciones que describen la solución del Planner son iguales a las del eq. descentralizado. Esto dado que no hay fricciones en la economía, cumpliendo 1er teorema bienestar.

e) Para revisar si la economía admite un BGP, verificamos que se cumple una condición necesaria. $\frac{K}{Y}$ es cte.

$$\frac{K}{F(K,AL)} = \frac{K}{ALF(\frac{K}{AL},1)} = \frac{k}{f(k)}.$$

Luego, basta que $k = k^*$, con k^* una cte. Pero, esto implica que $\dot{k}=0 \Rightarrow$

$$\dot{k} = f(k) - \frac{c}{A} - k(g+n+\delta)$$

$$\frac{c}{A} = f(k^*) - k^*(g+n+\delta)$$

Luego, el consumo debe crecer a la misma tasa que A, g. dado que el lado derecho es cte. Así:

$$\frac{\dot c}{c} = g = \frac{c-\delta}{c}\,\frac{1}{\theta}\left(f'(k) - \delta - \rho\right)$$

Pero sabemos que $\frac{c-\delta}{c}\cdot\frac{1}{\theta}$ no es constante si crece. De Hecho:

$$\varepsilon(c) \quad \frac{u''(c)}{u'(c)}\cdot c = \frac{c}{c-\delta}\cdot\theta \rightarrow \text{Aversión al riesgo}$$

$$\varepsilon'(c) = \frac{\cancel{c} - \delta - \cancel{c}}{(c-\delta)^2}\cdot\theta < 0$$

Luego, lado derecho no es ct, pues aumento del consumo modifica Aversión al riesgo haciendo que $\frac{\dot c}{c}$ no sea ct.

f) La condición de transversalidad es lo siguiente:

$$\lim_{t\to 0} \exp(-(\rho-n)t)\,\mu(t)\,k(t) = 0 \Rightarrow \text{Condic del problema del planner.}$$

Es decir, que el valor subjetivo del capital descontado sea igual a 0 en el LP. De las condiciones de primer orden, tenemos que:

$$\mu(t)\left[f'(k(t)) - \delta - g - \cancel{n}\right] = (\rho - \cancel{n})\,\mu(t) - \dot\mu(t)$$

$$\mu(t)\left[f'(k(t)) - \delta - g - \rho\right] = \dot\mu(t)$$

$$\mu(t) = \mu(0)\exp\left[\int_0^t f'(k(s)) - \delta - g - \rho\, ds\right]^{*}$$

*Nota que

$$\dot\mu(t) = \underbrace{\mu(0)\exp\left(\int_0^t f'(k(s)) - \delta - \rho - n\, ds\right)}\left(f'(k(t)) - \delta - \rho - n\right)$$

$$\dot\mu(t) = \mu(t)\left(f'(k(t)) - \delta - \rho - n\right)$$

Luego, es soluc.

Sustituimos en la condic de transversalidad:

$$\lim_{\tau\to\infty} \exp(-(\rho-n)\tau)\, \mu(0) \exp\left(-\int_0^\tau f'(k(s)) - \delta - g - \rho \, ds\right) k(\tau) = 0$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \exp\left(-\int_0^\tau f'(k(s)) - \delta - g - n \, ds\right) k(\tau) = 0$$

Aunque no hay BGP, asintóticamente sabemos que el consumo de subsistencia es irrelevante. Luego:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{c(\tau)-s}{c(\tau)} \frac{1}{\theta} \left(f'(k(\tau)) - \delta - \rho\right)$$

Si consumo fuese muy alto, tendríamos

$$\lim_{c\to\infty} \frac{c-s}{c} = 1.$$

Luego: $\frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} = g = \frac{1}{\theta}(f'(k^*) - \delta - \rho) \Rightarrow$ Si existiera

$$\Rightarrow \quad \theta g = f'(k^*) - \delta - \rho$$

$$\Rightarrow \lim_{\tau\to\infty} \exp(-(g\theta + \rho - g - n)\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \exp(((1-\theta)g + n - \rho)\tau)$$

$$(1-\theta) g + n > \rho$$

Condición de parámetros para que se puede resolver el problema.

Pregunta 2

Antes que nada, recordemos las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema.

Ecuación de Euler

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(r-\rho-\theta g)$$

Recordando que $r = (1-\tau)f'(k)$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left((1-\tau)f'(k) - \rho - \theta g\right)$$

$$\dot{\hat{c}} = 0 \iff f'(k) = \frac{\rho+\theta g}{1-\tau}$$

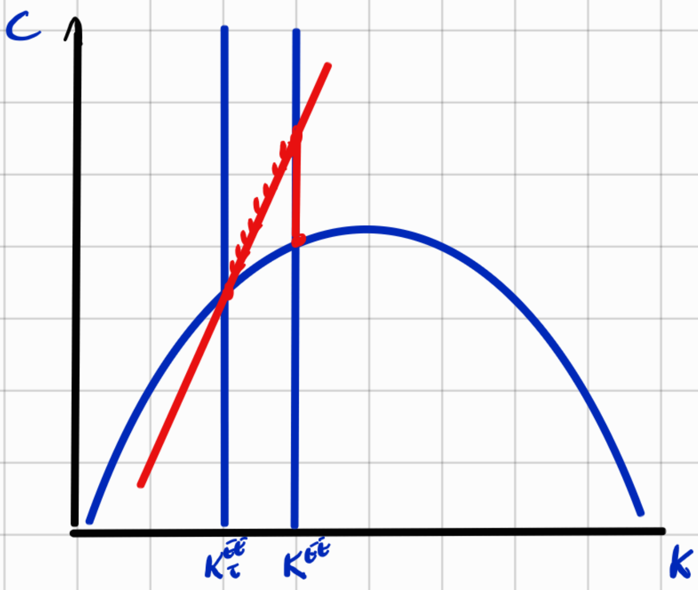
Como se exige una prod al capital mayor, k^{EE} cae.

$$\dot{\hat{k}} = i - (n+g)\hat{k}$$

$$i = y - c$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{k}} = f(k) - c - (n+g)\hat{k}.$$

b)



Cambio de EE genera un salto del consumo para alcanzar brazo estable.
Este aumento genera una desacumulación de capital, hasta llegar a nuevo K^{EE}_{τ}.

c) Ambos son menores ya que menor capital implica menor ingreso.

d) i) En $\dot{\hat{k}}=0$, tenemos

$$f(\hat{k})-\hat{c} = k(g+n)$$

$$s=\frac{f(\hat{k})-\hat{c}}{f(\hat{k})} = \frac{k(g+n)}{f(\hat{k})}$$

$$s(k) = \frac{k(g+n)}{f(\hat{k})}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial s}{\partial \tau} = (g+n)\left(\frac{\frac{\partial k}{\partial \tau}f(\hat{k})-k f'(k)\frac{\partial k}{\partial \tau}}{[f(\hat{k})]^2}\right)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = (g+n)\frac{\partial k}{\partial \tau}\left(\frac{f(\hat{k})-kf'(k)}{[f(\hat{k})]^2}\right)$$

- $g+n>0$
- $f(k)-kf'(k)>0$

Capital EE:

$$f'(k^{*}) = \frac{\rho+\theta g}{1-\tau}$$

$$f''(k^{EE})\cdot\frac{\partial k}{\partial \tau} = \frac{(\rho+\theta g)}{(1-\tau)^2} \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial \tau} = \frac{\rho+\theta g}{(1-\tau)^2}\cdot\frac{1}{f''(k^{EE})}<0_{//}$$

$\rightarrow \frac{\partial S}{\partial \tau} < 0$ //

ii) El retorno marginal (después de τ) de invertir en esos países será

$$(1-\tau) f'(k) = \rho + \theta g$$

Luego, no habría incentivos a invertir aunque hayan productividades marginales al capital diferentes.

e) Subsidio tendría el efecto contrario al impuesto. Aumentaría inversión dado que cambia los precios relativos y exigiría una PMgK menor a la del mercado, aumentando su nivel de EE.
Como es financiado con impuestos de suma alzada, no altera precios relativos ni cambia decisiones óptimas. Gráficamente:

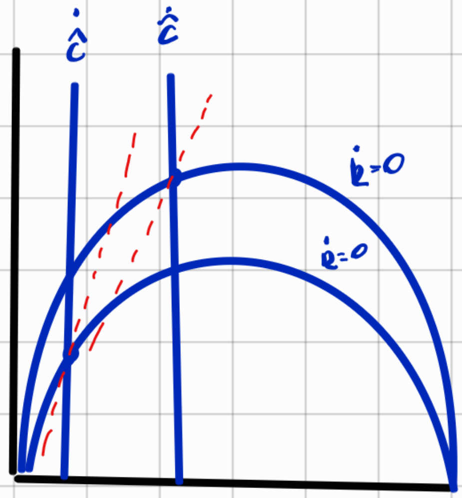
Note que esto no implica un aumento de bienestar. De hecho, debería disminuirlo. (Caída de consumo en periodos cercanos a presente)

f) $\dot{\hat{k}} = i - (n+g)k$

$i = y - g - c$

$\Rightarrow \dot{\hat{k}} = f(k) - g - \hat{c} - (n+g)\hat{k} \rightarrow$ Gasto pese en su parte de restricción de la economía.

$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left(f'(k)(1-\tau) - (\rho + \theta g)\hat{k}\right)$



Pregunta 3

a) Como tenemos varios activos, deberíamos tener diferentes tasas de retorno $r_m(t)$. Sin embargo, por arbitraje, todos deben tener la misma tasa, $r_m(t) = r_n(t) = r(t)$. Luego, la restricción del individuo es:

$$\sum_{m=1}^{M} \dot{a}_m = w + r \sum_{m=1}^{M} a_m - c$$

Luego, note que se podría haber definido 1 solo activo:

$$\sum \dot{a}_m = \dot{a} \quad \wedge \quad \sum a_m = a$$

$$\dot{a} = w + r a - c$$

b) Equilibrio será una secuencia de $\{r(t), w(t), c(t), \{a_m(t)\}_{m=1}^{M}\}$ que satisfacen CPO. Estos son:

$$H = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \mu\left(w + r \sum a_m - c\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Rightarrow c^{-\theta} = \mu \quad \Rightarrow \theta \frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_m} = -\dot{\mu} + \rho\mu \Rightarrow r\mu = -\dot{\mu} + \rho\mu \Rightarrow r - \rho = -\frac{\dot{\mu}}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

Las empresas max

$$\Pi = F(K,L) - wL - \sum_{m=1}^{M} R_m K_m \Rightarrow F'_m(K,L) = R_m, \quad R_m = r + \delta_m$$

Luego, r tiene múltiples definiciones:

$$r = f_1'(K_m, L) - \delta_1 = f_2'(K_m, L) - \delta_2 = \dots = f_n'(K_m, L) - \delta_n$$

Esto da lugar a múltiples Ec. de Euler:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(f_m'(K_m, L) - \delta_m - \rho\right)$$

Que dependen de de varios k_m. Sin embargo, podemos obtener $n-1$ ecuaciones:

(Note que al igual que en el caso de 1 bien de capital, $f_m(K, L) = f_m(k)$, con $k = (k_1, k_2, \dots k_m)$)

$$f_m'(k) - \delta_m = f_1'(k) - \delta_1.$$

Tendríamos $n-1$ ecuaciones para n incógnitas*. Como las ecuaciones están bien definidas (u cumpliendo de), podemos escribir todas las $k_m = h_m(k_1)$. Luego, esto nos permite escribir la inversión en cada sector como lo siguiente:

$$i_m = \dot{k}_m + \delta_m k_m$$

$$i_m = \dot{\left(h_m(k_1)\right)} + \delta_m h_m(k_1)$$

$$i_m = h_m'(k_1) \cdot \dot{k}_1 + \delta_m h_m(k_1) = g_m(k_1)$$

* De cierta forma, es como resolver las $n-1$ ecuaciones pensando que k_1 es una cte. Luego, serían $n-1$ ecuaciones y "$n-1$ incógnitas". Pero como k_1 no está del aún, habrían miles de sol.

Finalmente, podemos caracterizar el equilibrio en esta economía por las sgtes ecuaciones:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(f_1\left(k_1, h_2(k_1), \dots, h_m(k_1)\right) - \delta_1 - \rho\right)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(f'(k_1) - \delta_1 - \rho\right)$$

$$y = c + \sum_{m=1}^{M} i_m$$

$$f(k_1) = c + i_1 + \sum_{m=2}^{M} i_m$$

$$f(k_1) = c + \dot{k}_1 + \delta_1 k_1 + \sum_{m=2}^{M} i_m$$

$$\dot{k}_1 = f(k_1) - c - \sum_{m=2}^{M} i_m - \delta k_1$$

$$\dot{k}_1 = f(k_1) - c - \sum_{m=2}^{M} g_m(k_1) - \delta k_1$$

Para EE, $\dot{c} = 0$

$$f'(k_1) = \delta_1 + \rho.$$

Con lo que encontramos k_1^* y $k_m^* = h_m(k_1^*)$. Luego, $\dot{k}_m = 0 \Rightarrow i_m^* = \delta_m k_m^*$

$$c = f(k_1^*) - \sum \delta_m k_m$$

d) Para el problema del planificador, debemos resolver el siguiente problema:

$$\max_{\{c(\tau)\}} \int_0^\infty e^{-\rho\tau} \frac{c(\tau)^{1-\theta}-1}{1-\theta}\, d\tau$$

s.a $f(k) = c(t) + \sum_{m=1}^{m} i_m(t)$

$i_m(\tau) = \dot{k}_m(\tau) + \delta k_m(t)$

$$\Leftrightarrow \max_{\{\{i_m(t)\}_m\}_\tau} \int_0^\infty e^{-\rho\tau} \frac{\left(f(k) - \sum i_m(t)\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta}\, d\tau$$

s.a $i_m(t) - \dot{k}_m(t) + \delta k_m(t)$.

$$\Rightarrow H = \frac{\left(f(k) - \sum i_m\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \sum \mu_m \left(i_m - \delta k_m(\tau)\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial i_m} = \underbrace{\left(f(k) - \sum i_m\right)}^{-\theta} = \mu_m$$

$$C_\tau^{-\theta} = \mu_m$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_m} = C_\tau^{-\theta} f_m(k) - \mu_m \delta = -\dot{\mu}_m + \mu_m \rho$$

$$\Rightarrow f_m(k) - \delta_m - \rho = -\frac{\dot{\mu}_m}{\mu_m}$$

$$\theta \frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\dot{\mu}_m}{\mu_m}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(f_m(k) - \delta_m - \rho\right)$$

Luego llegamos a las mismas ecuaciones que en el equilibrio competitivo