Profesor	: Eduardo Engel	Abril 22, 2022
Ayudantes	: Benjamín Peña y Giovanni Villa	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2022	
Guía	: No. 3	
Entrega	: Martes 26 de abril, antes de las 8am	

1. **Sesgo hacia el presente y activos ilíquidos**

   Un individuo con riqueza total W vive tres períodos. Su utilidad en el primer período es $\log(C_1) + \eta(\log(C_2) + \log(C_3))$, su utilidad en el segundo período es $\log(C_2) + \eta \log(C_3)$ y su utilidad en el último período es $\log(C_3)$, donde C_i denota el consumo en el período i, $i = 1, 2, 3$ y $\eta < 1$ captura la inconsistencia dinámica de los planes de consumo del individuo, una inconsistencia de la cual está consciente.

   El individuo puede endeudarse/ahorrar a una tasa de interés igual a cero. También puede comprar un activo (activo *ilíquido* en lo que sigue, invertir en APV en Chile es un ejemplo) en $t = 0$ con una tasa de retorno negativa ρ si se vende en el período 2 y un retorno igual a cero si se retira en el período 3. Es decir, si compra x en el período 1 debe elegir entre recibir $(1-\rho)x$ en el período 2 y recibir x en el período 3. Suponga también que el individuo no puede endeudarse en el período 2 contra ingresos que tendrá en el período 3, incluyendo aquellos del activo ilíquido.

   (a) Encuentre la trayectoria óptima de consumo cuando el activo ilíquido no está disponible.

   Solución:
   Note que, dado el enunciado del problema, el individuo es sofisticado, es decir, está consciente de la tensión entre sus preferencias y las preferencias de sus futuros yo. Por lo tanto, la solución correcta usa inducción hacia atrás: el individuo del período 1 elige C_1 consciente de que el individuo del período 2 ahorra menos y gasta más de lo que al individuo del período 1 le gustaría. (En el caso particular considerado en este problema, la trayectoria de consumo es la misma para individuos sofisticados e individuos ingenuos, pero conceptualmente hay una diferencia fundamental).

   El individuo del período 3 consume todo lo que tiene. El individuo del período 2 resuelve el problema:

$$\max_{C_2, C_3} \quad \log(C_2) + \eta \log(C_3)$$

$$\text{s.t} \quad C_2 + C_3 = W - \overline{C}_1$$

   donde $\overline{C}_1$ es el consumo que eligió en el período 1 (y por lo tanto el individuo del período 2 lo toma como dado). La solución del problema es:

$$C_2(\overline{C}_1) = \frac{W - \overline{C}_1}{1+\eta} \quad C_3(\overline{C}_1) = \frac{\eta(W - \overline{C}_1)}{1+\eta}$$

   Por lo tanto, el problema que debe resolver el individuo sofisticado del período 1 es:

$$\max_{C_1} \quad \log(C_2) + \eta \log(C_2(C_1)) + \eta \log(C_3(C_1))$$

lo que implica que el consumo óptimo en el período 1 es $C_1^* = \frac{W}{1+2\eta}$. Finalmente, evaluando $C_2(.)$ y $C_3(.)$ en C_1^*, obtenemos que la trayectoria de consumo es:

$$C_1^* = \frac{W}{1+2\eta} \quad C_2^* = \frac{2\eta W}{(1+2\eta)(1+\eta)} \quad C_3^* = \frac{2\eta^2 W}{(1+2\eta)(1+\eta)}$$

(b) Encuentre la trayectoria óptima de consumo cuando el activo ilíquido está disponible. Determine cuánto invierte en el activo ilíquido. ¿Depende su respuesta del valor de ρ? Explique.

Solución:
El individuo del período 1 podría intentar usar el activo ilíquido para alcanzar su trayectoria de consumo óptima con compromiso, esta es, la trayectoria que se obtiene de resolver:

$$\max_{C_1, C_2, C_3} \quad \log(C_1) + \eta \log(C_2) + \eta \log(C_3)$$
$$\text{s.t} \quad C_1 + C_2 + C_3 = W$$

La solución a este problema es $C_1 = W/(1+2\eta)$ y $C_2 = C_3 = \eta W/(1+2\eta)$. Para que su futuro yo siga esta trayectoria, el agente puede invertir C_3 en el activo ilíquido en el período 1. De esta manera el individuo del período 2 solo tiene C_2 para gastar. Sin embargo, para lograr nuestro objetivo el individuo del período 2 debe preferir gastar C_2 a vender el activo ilíquido. Esto ocurre si y solo si:

$$\log(C_2) + \eta \log(C_3) > \log(\widetilde{C}_2) + \eta \log(\widetilde{C}_3)$$

donde $(\widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3)$ denota la trayectoria de consumo cuando el activo ilíquido es vendido en el período 2 (y por lo tanto el individuo del período 2 recibe de vuelta $(1-\rho)C_3$).

Si el individuo del período 2 vende el activo ilíquido, su riqueza es:

$$\begin{aligned}\widetilde{W} &= W - C_1 - C_3 + (1-\rho)C_3 \\ &= C_2 + (1-\rho)C_3 \\ &= \frac{\eta W}{(1+2\eta)} + \frac{(1-\rho)\eta W}{(1+2\eta)} \\ &= \frac{(2-\rho)\eta W}{(1+2\eta)}\end{aligned}$$

que corresponde a la riqueza total, menos lo que consumió en el período 1, menos lo que invirtió en el activo ilíquido en el período 1, más lo que retira en el período 2 (con penalización). Por lo tanto, el individuo del período 2 decide consumir (utilizamos la solución al problema del individuo del período 2 de la parte a)):

$$\widetilde{C}_2 = \frac{(2-\rho)\eta W}{(1+2\eta)(1+\eta)} \quad \widetilde{C}_3 = \frac{(2-\rho)\eta^2 W}{(1+2\eta)(1+\eta)}$$

y por lo tanto el individuo no vende el activo ilíquido en el período 2 si:

$$\rho > 2 - (1+\eta)\eta^{-\eta/(1+\eta)}$$

(c) Argumente que, visto desde el período $t = 1$, si ρ es suficientemente grande, introducir un activo ilíquido mejora el bienestar a pesar de que su retorno está dominado por el activo líquido habitual. Explique esta aparente contradicción.

Solución:
Como vimos en la parte b), si ρ es lo suficientemente grande, entonces todas las versiones del individuo seguirán la trayectoria óptima del individuo del período 1 y, por lo tanto, desde la perspectiva del individuo del período 1, el activo ilíquido mejora el bienestar. Esto viene del hecho que el activo ilíquido actúa como un mecanismo de compromiso, haciendo que la trayectoria óptima del individuo del período 1 sea también óptima para sus futuros yo. De otro modo, los futuros yo se desviarían de esta trayectoria, producto de la inconsistencia temporal.

2. **Premio accionario y concentración de shocks agregados**

Considere una economía que puede estar en dos estados, cada uno con probabilidad 1/2. El consumo de cada individuo en el estado bueno es 1. En cambio, en el estado malo una fracción λ de la población consume $1 - (\phi/\lambda)$ mientras que el resto consume 1, donde $0 < \phi \leq \lambda \leq 1$. El parámetro ϕ mide la reducción promedio del consumo en el estado malo mientras que λ la fracción mide de la población afectada.

Considere dos activos. El primero paga 1 en el estado bueno (y nada en el estado malo), el segundo paga 1 en el estado malo (y nada en el estado bueno). Denote por p el precio del segundo activo relativo al precio del primero.

(a) Considere un individuo que inicialmente no tiene ninguno de los dos activos. Considere el experimento en que el individuo marginalmente reduce lo que tiene del activo de estado bueno (es decir, lo vende corto) y usa lo que recauda para incrementar sus pertenencias del activo de estado malo. Derive la condición que resulta de suponer que este cambio marginal no afecta la utilidad esperada del individuo.

Solución:
Si disminuyo en dA_b mi posición del activo bueno, la pérdida en utilidad en el estado bueno es de $U'(1)dA_b$. Con dA_b puedo comprar $\frac{dA_b}{p}$ unidades del activo malo, de manera que mi ganancia en utilidad en el estado malo es $\left[\lambda U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) + (1-\lambda))U'(1)\right]\frac{dA_b}{p}$. Para que mi utilidad esperada no cambie producto del cambio en mi posición de activos, se tiene que cumplir lo siguiente:

$$\frac{1}{2}\left[\lambda U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) + (1-\lambda))U'(1)\right]\frac{dA_b}{p} - \frac{1}{2}U'(1)dA_b = 0$$
$$\frac{1}{2}\left[\lambda U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) + (1-\lambda))U'(1)\right]\frac{dA_b}{p} = \frac{1}{2}U'(1)dA_b$$

(b) Como el consumo en los dos estados es exógeno y los indivduos son ex-ante idénticos, p se debe ajustar de modo que los individuos tienen cantidades iguales a cero de ambos activos. Usando (a) obtenga una expresión para p en función de ϕ, λ, $u'(1)$ y $u'(1-(\phi/\lambda))$

Solución:
Simplificando y despejando p de la expresión a la que se llega en a), tenemos lo siguiente:

$$p = \frac{\left[\lambda U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) + (1-\lambda))U'(1)\right]}{U'(1)}$$

(c) Determine $\partial p/\partial\lambda$.

Solución:
Derivando, se llega a lo siguiente:

$$\frac{\partial p}{\partial\lambda} = \frac{1}{U'(1)}\left[U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) - U'(1) + \frac{\phi}{\lambda}U''(1-\frac{\phi}{\lambda})\right]$$

(d) Muestre que cuando la utilidad es cuadrática, $\partial p/\partial\lambda = 0$.

Solución:
Si la función de utilidad es cuadrática, entonces la primera derivada derivada será lineal en C y la segunda será constante. Esto llevará a que la pendiente de $U'(\cdot)$, que es $U''(\cdot)$, pueda calcularse como la pendiente de una recta. Así, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} U''(1-\frac{\phi}{\lambda}) &= \frac{U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) - U'(1)}{1-\frac{\phi}{\lambda}-1} \\ &= \frac{U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) - U'(1)}{-\frac{\phi}{\lambda}} \end{aligned}$$

Reordenando:

$$U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) - U'(1) + \frac{\phi}{\lambda}U''(1-\frac{\phi}{\lambda}) = 0$$

Reemplazando esto en la expresión para $\frac{\partial p}{\partial\lambda}$, se llega a que es igual a 0.

(e) Muestre que si $u''' > 0$ se tiene que $\partial p/\partial\lambda < 0$. Inteprete este resultado.

Solución:
Si $U''' > 0$, tenemos que U' es convexa en C. Así, su derivada en un punto (la recta tangente en ese punto) va a ser menor que la pendiente calculada ocupando dos puntos distintos. Esto se puede ver gráficamente con cualquier función convexa. Luego, se va a cumplir lo siguiente:

$$U''(1-\frac{\phi}{\lambda}) < \frac{U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) - U'(1)}{1-\frac{\phi}{\lambda}-1}$$

Reordenando:

$$U'(1-\frac{\phi}{\lambda}) - U'(1) + \frac{\phi}{\lambda}U''(1-\frac{\phi}{\lambda}) < 0$$

Lo que implica que $\frac{\partial p}{\partial \lambda} < 0$. Intuitivamente, sabemos que $U''' > 0$ implica que va a haber ahorro por precaución. Luego, si aumenta λ, por un lado aumenta la probabilidad de que en el estado malo pierda parte de mis ingresos, pero también cae el monto en el que se reduce mi ingreso en ese caso. Dado que al caer en el estado malo pierdo menos ingresos, caerá mi ahorro por precaución, ya que hay menor variabilidad en mis niveles de ingresos. Esto implica una menor demanda por el activo malo, lo que lleva a que su precio caiga.

3. **Suavizamiento de impuestos**

Considere el modelo de suavizamiento de impuestos de Barro. El tiempo es continuo. Suponga que el producto Y y la tasa real de interés r son constantes y que la deuda de gobierno en $t = 0$ es cero. Suponga que habrá una pandemia de $t = 0$ a $t = \tau$, de modo que el gasto de gobierno, G_t, será igual a G_H para $0 \leq t \leq \tau$ e igual a G_L después, donde $G_H > G_L$.

Determine la trayectoria óptima de impuestos, T_t, y la trayectoria resultante de la deuda pública D_t. Encuentre expresiones explícitas para las trayectorias y grafíquelas.

Solución:

Dadas las condiciones del ejercicio, podemos ocupar el resultado de que la tasa de impuestos T_t/Y_t es constante. $Y_t = Y$ para todo t implica que $T_t = T$ para todo t. Esto es, los impuestos son constantes. La restricción presupuestaria para el gobierno es la siguiente:

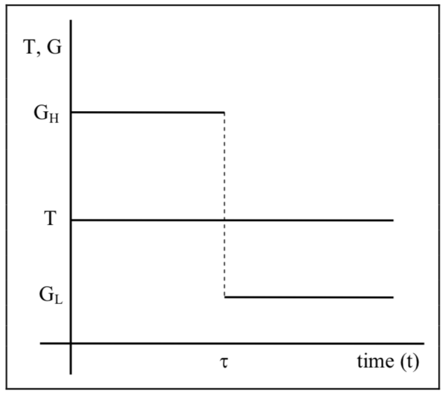
$$\int_0^\infty e^{-rs}T ds = \int_0^\tau e^{-rs}G_H ds + \int_\tau^\infty e^{-rs}G_L ds \tag{1}$$

Esto significa que el valor descontado de los impuestos tiene que ser igual al valor descontado de los gastos de gobierno. Integrando esta expresión, llegamos a

$$T = G_H + e^{-r\tau}(G_H - G_L)$$

De esta expresión es directo que $G_H > T > G_L$. En tiempos de pandemia ($0 \leq t \leq \tau$) el gobierno va a tener déficits primarios que va a financiar con deuda. Después de la pandemia ($\tau < t$) va a tener superávits que va a ocupar para pagar la deuda.

Gráficamente: en el caso de los impuestos, hay dos períodos relevantes: (1) $0 \leq t \leq \tau$, en los que el



gobierno adquiere deuda para financiar su déficit primario, y (2) $\tau < t$, donde el gobierno ya no acumula deuda y paga los intereses de la deuda acumulada.

- En $0 \leq t \leq \tau$:

  El valor descontado de la deuda acumulada hasta t tiene que ser igual al valor descontado de todos los déficits:

$$e^{-rt}D(t) = \int_0^t [G_H - T]e^{-rs}ds$$

  Integrando:

$$D(t) = \frac{G_H - T}{r}(e^{rt} - 1) \tag{2}$$

  Así, la deuda acumulada hasta τ es

$$D(\tau) = \frac{(G_H - T)}{r}(e^{r\tau - 1})$$

  Diferenciando (2):

$$D'(t) = (G_H - T)e^{rt}$$

  De (2), la última expresión puede expresarse de la siguiente manera:

$$D'(t) = G_H - T + rD(t) > 0$$

  lo que muestra que la tasa de cambio de la deuda (déficit).De (2), la deuda acumulada hasta τ es

$$D(\tau) = \frac{(G_H - T)}{r}(e^{r\tau - 1})$$

- En $\tau < t$:

  Para satisfacer la restricción presupuestaria, el gobierno debe ocupar impuestos para pagar G_L y los intereses en la deuda $D(\tau)$. En otras palabras, la tasa de crecimiento de la deuda vigente tiene que ser igual a 0:

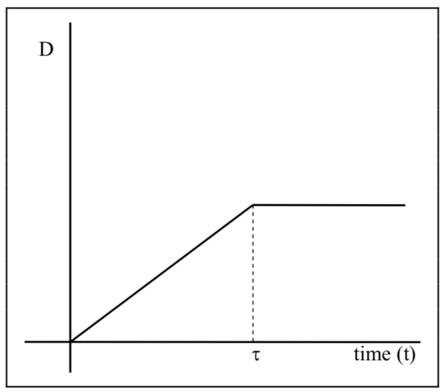
  $$D'(t) = G_L - T + rD(\tau) = 0$$

  De lo anterior, concluimos que

  $$T = G_L + rD(\tau)$$

  Lo que va a satisfacer la restricción presupuestaria.

  Gráficamente, el nivel de deuda será el siguiente:



Si la tasa de impuestos sigue un camino aleatorio (y si la varianza de su error está limitada inferiormente por un número estrictamente positivo) entonces con probabilidad 1 eventualmente va a exceder 100% o va a ser negativa.

4. **Evidencia sobre compartición de riesgo**

Un hogar que vive indefinidamente tiene ingresos que siguen un camino aleatorio:

$$Y_t = Y_{t-1} + v_t$$

donde v_t son innovaciones i.i.d., de media nula.

(a) Muestre que bajo equivalencia cierta tendremos

$$\Delta C_t = v_t. \tag{3}$$

Una investigadora usa datos agregados de consumo y v_t para estimar la regresión

$$\Delta C_t = \phi v_t + \text{error}_t \tag{4}$$

y obtiene un valor de ϕ significativamente (en términos estadísticos y económicos) menor que uno. La investigadora concluye que los hogares tienen acceso a mecanismos que les permiten compartir riesgos más allá de lo que suponen los modelos estándar de consumo (equivalencia cierta, ahorro por precaución, etc.).

En este problema exploramos una interpretación alternativa. Suponemos que los consumidores prestan atención a sus decisiones de consumo sólo esporádicamente (se les conoce como *consumidores inatentos*, *inattentive consumers* en inglés). Concretamente, en cada período hay una probabilidad $1 - \pi$ que un hogar repita su consumo del período anterior y una probabilidad π que cambie su consumo.

Los shocks que determinan si un consumidor ajustará su consumo en un período dado son i.i.d. entre consumidores y para un consumidor a lo largo del tiempo.

Si un consumidor ajusta su consumo en t elige su nuevo nivel de consumo, C_t, resolviendo:

$$\min_{C_t} \mathrm{E}_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \{\gamma(1-\pi)\}^k (C_t - C^*_{t+k})^2 \right] \tag{5}$$

donde γ denote la tasa subjetiva de descuento y C^*_t lo que sería el consumo óptimo bajo equivalencia cierta.

Solución:

Ocupando la ecuación para el consumo bajo equivalencia cierta:

$$\begin{aligned}
\Delta C_t &= \frac{r}{1+r} \sum_{u\geq 0} \beta^u \left\{ \mathrm{E}_t[Y_{t+u}] - \mathrm{E}_{t-1}[Y_{t+u}] \right\} \\
&= \frac{r}{1+r} \sum_{u\geq 0} \beta^u \left\{ Y_t + \mathrm{E}_t[v_{t+1} + \ldots + v_{t+u}] - Y_{t-1} - \mathrm{E}_{t-1}[v_t + \cdots + v_{t+u}] \right\} \\
&= \frac{r}{1+r} \sum_{u\geq 0} \beta^u \left\{ Y_t - Y_{t-1} \right\} \\
&= v_t \frac{r}{1+r} \sum_{u\geq 0} \beta^u = v_t \frac{r}{1+r} \frac{1}{1-\beta} = v_t.
\end{aligned}$$

(b) De la intuición para la función objetivo en (5), en particular, para los términos $(C_t - C^*_{t+k})^2$ y $\{\gamma(1-\pi)\}^k$.

Solución:
La pérdida de desviarse del óptimo sin fricciones, C^*_{t+k}, se asume cuadrática y se expresa como $(C_t - C^*_{t+k})^2$. Esto se puede jsutificar con una expansión de Taylor de segundo orden a la utilidad en torno al óptimo sin fricciones: los términos de primer orden son iguales a 0 ya que en el óptimo C^*_{t+k} la primera derivada de la utilidad es igual a 0. Esto es, las pérdidas de desviarse del óptimo son de segundo orden.

En t, el consumidor elige C_t para maximizar su utilidad descontada esperada desde el período t, tomanod en cuenta que con probabilidad $(1-\pi)^k$ no va a haber cambiado su consumo entre t y $t+k$. Cuando cambie su consumo de nuevo (por ejemplo en el momento $s > t$), el valor que había escogido en el momento t, C_t, se vuelve irrelevante y no se hace parte de la utilidad esperada descontada de toda su vida desde el momento s en adelante. Por esto se escribe la función objetivo considerando solo los eventos donde no se cambia el nivel de consumo (i.e. se mantiene C_t y se tiene esa utilidad k periodos en el futuro descontado de acuerdo al factor de descuento combinado con la probabilidad de que la decisión corriente sea relevante $\{\gamma(1-\pi)\}^k$).

Como conclusión, el consumidor escoge su consumo en el momento t para minimizar una aproximación de la pérdida de la utilidad esperada de no ser posible ajustar su consumo en períodos futuros.

(c) Resuelva (5) y concluya que en períodos donde el consumidor ajusta su consumo elige $C_t = C^*_t$.

Solución:
La función objetivo (5) puede ser escrita como cuadrática en C_t:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{\gamma(1-\pi)\}^k C_t^2 - 2\left[\sum_{k=0}^{\infty}\{\gamma(1-\pi)\}^k \mathrm{E}_t C^*_{t+k}\right] C_t + \sum_{k=0}^{\infty}\{\gamma(1-\pi)\}^k \mathrm{E}_t (C^*_{t+k})^2.$$

Del resultado de camino aleatorio/martingale de Hall tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{\gamma(1-\pi)\}^k \mathrm{E}_t C^*_{t+k} = \sum_{k=0}^{\infty}\{\gamma(1-\pi)\}^k C^*_t = \frac{C^*_t}{1-\gamma(1-\pi)}.$$

Se sigue que resolviendo la función objetivo (5) es equivalente a resolver

$$\min_{C_t}[1-\gamma(1-\pi)]^{-1} C_t^2 - 2[1-\gamma(1-\pi)]^{-1} C^*_t C_t + \text{constante}$$

y la CPO implica:

$$C_t = C^*_t.$$

(d) Ahora considere un gran número, n, de consumidores como aquel de las partes (b) y (c), y denote el consumo del i-ésimo consumidor mediante C_{it} y el consumo agregado mediante $C_t \equiv \sum_{i=1}^{n} C_{it}$. Asuma que las innovaciones v_t son las mismas para todos los consumidores. Encuentre una expresión para C_t in términos de C_{t-1} y C_t^*.

Solución:
Los individuos que no cambian su consumo en el período t forman una distribución aleatoria de la población dado el supuesto de que si el consumidor ajusta su consumo es independiente entre consumidores. Estos individuos mantienen el mismo nivel de consumo que en el momento $t-1$ y por lo tanto su consumo agregado es $(1-\pi)C_{t-1}$, dado que representan una fracción $(1-\pi)$ de la población. Quienes cambian su nivel de consumo escogen C_t^*, por lo que el consumo agregado de este sub-grupo en el período t es πC_t^*. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$C_t = (1-\pi)C_{t-1} + \pi C_t^*.$$

(e) Tome la primera diferencia de la expresión que obtuvo en (d) y note que (3) aplica a C^* para expresar ΔC_t en términos de ΔC_{t-1} y v_t. A continuación utilice este resultado para expresar ΔC_t en términos de v_t y sus rezagos (la idea es deshacerse de ΔC_{t-1}).

Solución:
De (d)

$$\Delta C_t = (1-\pi)\Delta C_{t-1} + \pi \Delta C_t^* = (1-\pi)\Delta C_{t-1} + \pi v_t.$$

Se sigue que

$$[1-(1-\pi)L]\Delta C_t = \pi v_t$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}\Delta C_t &= \frac{1}{1-(1-\pi)L}\pi v_t \\ &= \pi v_t + \pi(1-\pi)v_{t-1} + \pi(1-\pi)^2 v_{t-2} + ...\end{aligned}$$

(f) Concluya que bajo los supuestos del modelo desarrollado en las partes (b)–(e), la investigadora obtendrá un valor de ϕ aproximadamente igual a π al estimar (4). Concluya que valores estimados de ϕ menores que uno no necesariamente implican compartición de riesgo más allá del sugerido por los modelos estándar de consumo.

Solución:
De (e) tenemos que

$$\Delta C_t = \pi v_t + \sum_{k\geq 1} \pi(1-\pi)^k v_{t-k}$$

Estimar la regresión que la investigadora propone entregará el valor $\phi = \pi$, dado que el término de error $\sum_{k\geq 1}\pi(1-\pi)^k v_{t-k}$ no está correlacionado con el regresor v_t. Esto implica que el valor estimado de ϕ será significativamente menor que 1. Este resultado es, por lo tanto, no necesariamente dado por una mayor importancia de la compartición de riesgo como sugieren modelos de mercados incompletos. Puede ser la consecuencia de consumidores desatentos, como lo muestra este problema.