Control 1

Macroeconomía I - Otoño 2024

Profesor: Luis Felipe Céspedes **Ayudantes:** Matías Muñoz y María Jesús Negrete

Modelo de Ramsey con Impuestos

Considere una economía en tiempo continuo donde no hay crecimiento poblacional ni tecnológico (normalizamos el tamaño de la población y del trabajo a 1).

Vamos a introducir en esta economía a la Ramsey al gobierno. El único rol de este es redistribuir recursos (no hay gasto de gobierno). Para esto aplica un impuesto proporcional al ingreso del hogar y luego hace una transferencia de suma alzada a cada hogar. Denote a la tasa impositiva que no varía en el tiempo como τ y la transferencia como $T(t)$.

Dicho esto, la restricción del hogar será:

$$c(t) + i(t) = (1 - \tau)(r(t)k(t) + w(t)) + T(t)$$

Donde $c(t)$ es el consumo, $i(t)$ la inversión, $k(t)$ el capital, $r(t)$ la tasa de interés y $w(t)$ el salario.

El capital se acumula siguiendo la siguiente ley:

$$\dot{k}(t) = i(t) + \delta k(t)$$

donde δ es la tasa de depreciación (que esta entre 0 y 1).

El hogar representativo maximiza la siguiente utilidad:

$$\mathcal{U} = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-1/\theta}}{1-1/\theta}$$

Donde $\rho > 0$ es la tasa de descuento y $\theta > 0$ es la elasticidad de sustitución intertemporal. El hogar maximiza su utilidad sujeto a su restricción y la ley de movimiento del capital, tomando como dado $w(t)$, $r(t)$, τ y $T(t)$.

Las firmas son perfectamente competitivas y maximizan sus ganancias. La tecnología es Cobb-Douglas, tal que:

$$y(t) = f(k(t)) = k(t)^\alpha$$

Note que en equilibrio se cumple:

$$y(t) = r(t)k(t) + w(t)$$

Finalmente, la restricción del gobierno viene dada por:

$$T(t) = \tau(r(t)k(t) + w(t)) = \tau y(t)$$

Con esto, responda:

COMENTARIO: Había un typo en la ley de movimiento del capital donde el término $\delta k(t)$ esta sumándose en vez de restándose. Este typo no cambia ningún resultado, exceptuando que ese término queda con - o con + en las distintas respuestas, sin embargo, las conclusiones se mantienen igual. Si utilizaron el término con + o - no importa, ambas respuestas se considerarán correctas.

(a) Derive la condición óptima del hogar (Ecuación de Euler) ¿Cómo depende de τ? Interprete.

Respuesta

Vamos a resolver el problema de optimización del hogar:

$$max \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-1/\theta}}{1-1/\theta} dt$$
$$\text{s.a.}$$
$$c(t) + i(t) = (1-\tau)(r(t)k(t) + w(t)) + T(t)$$
$$\dot{k}(t) = i(t) + \delta k(t)$$

Simplificando:

$$max \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-1/\theta}}{1-1/\theta} dt$$
$$\text{s.a.}$$
$$\dot{k}(t) = (1-\tau)(r(t)k(t) + w(t)) + T(t) - c(t) + \delta k(t)$$

Escribimos el Hamiltoniano del problema:

$$H : e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-1/\theta}}{1-1/\theta} + v(t)[(1-\tau)(r(t)k(t) + w(t)) + T(t) - c(t) + \delta k(t)]$$

Obtenemos las CPO del problema:

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0 \Longrightarrow e^{-\rho t} c(t)^{-1/\theta} = v(t) \text{ (1)}$$
$$\frac{\partial H}{\partial k(t)} = -\dot{v}(t) \longrightarrow v(t)[(1-\tau)r(t) + \delta] = -\dot{v}(t) \text{ (2)}$$

Usando (1) para derivar $\dot{v}(t)$ y luego reemplazando en (2) obtenemos:

$$\rho + \frac{1}{\theta}\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = (1-\tau)r(t) + \delta \Longrightarrow \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \theta[(1-\tau)r(t) + \delta - \rho]$$

Por lo que es fácil notar que la tasa de crecimiento del consumo dependerá del τ. En particular se cumple que:

$$\frac{\partial \dot{c}(t)/c(t)}{\partial c(t)} = \theta r(t)(-1) < 0$$

Luego, como la derivada es negativa, la tasa de crecimiento del consumo depende negativamente de la tasa impositiva. La interpretación viene del hecho de que un cambio en τ genera una distorsión en la decisión ahorro-consumo del hogar, haciendo que se reduzca la disposición del hogar a reducir el consumo hoy, para consumir más mañana (ie: cae la tasa de crecimiento del consumo).

(b) ¿Qué es $r(t)$ en equilibrio?, un aumento en $k(t)$ ¿incrementa o reduce $r(t)$? Explique.

Respuesta

En equilibrio sabemos que:

$$r(t) = f'(k(t)) = \alpha k(t)^{\alpha-1} = \alpha \frac{y(t)}{k(t)}$$

Es decir, la tasa de interés es igual a la productividad marginal del capital. Luego, nuevamente derivamos para conocer la relación entre $r(t)$ y $k(t)$:

$$\frac{\partial r(t)}{\partial k(t)} = \alpha \frac{y(t)}{k(t)^2}(-1) < 0$$

Por lo tanto, la relación es negativa, a mayor capital, cae la tasa de interés. La explicación viene del hecho de que como la función de producción es Cobb-Douglas entonces existirá un retorno decreciente a cada factor, por lo tanto a mayor $k(t)$ cae su productividad marginal de esta unidad extra de capital y cae por lo tanto la tasa de retorno del capital $(r(t))$.

(c) Escriba el equilibrio descentralizado de la economía caracterizado por dos ecuaciones diferenciales.

Respuesta

El equilibrio descentralizado viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$\textbf{Ec. Euler: } \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \theta[(1-\tau)r(t) + \delta - \rho]$$
$$\textbf{R. Presupuestaria: } \dot{k}(t) = (1-\tau)(r(t)k(t) + w(t)) + T(t) - c(t) + \delta k(t)$$

Pero también sabemos que en el equilibrio de la economía se cumple que:

$$r(t) = \alpha k(t)^{\alpha-1}$$
$$r(t)k(t) + w(t) = y(t) = k(t)^{\alpha}$$
$$T(t) = \tau y(t) = \tau k(t)^{\alpha}$$

Por lo tanto, reemplazando estas igualdades en nuestras ecuaciones iniciales obtenemos el siguiente sistema de 2 ecuaciones:

$$\textbf{Ec. Euler: } \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \theta[(1-\tau)\alpha k(t)^{\alpha-1} + \delta - \rho]$$
$$\textbf{R. Presupuestaria: } \dot{k}(t) = (1-\tau)k(t)^{\alpha} + \tau k(t)^{\alpha} - c(t) + \delta k(t) = k(t)^{\alpha} - c(t) + \delta k(t)$$

(d) Calcule el nivel de capital $k(t)$ de estado estacionario de la economía. ¿Cómo depende de τ? Interprete.

Respuesta

Imponiento que $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = 0$ obtenemos que:

$$(1-\tau)\alpha k_{EE}^{\alpha-1} = \delta + \rho \Longrightarrow k_{EE} = (\frac{\alpha(1-\tau)}{\delta+\rho})^{1/1-\alpha}$$

Notamos que dependerá negativamente de τ pues:

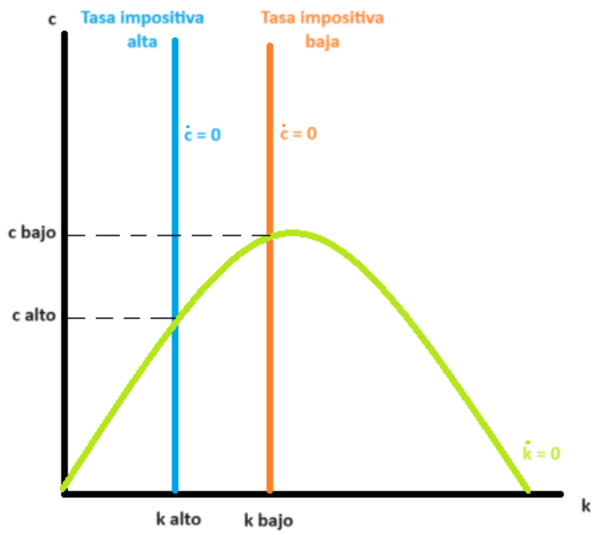
$$\frac{\partial k_{EE}}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(\delta+\rho)} \cdot (\frac{\alpha(1-\tau)}{\delta+\rho})^{(1/1-\alpha)-1} \cdot (-1) < 0$$

La interpretación viene del hecho que como se mencionó en (a) el impuesto tiene un efecto distorsionador en la decisión de ahorro-consumo, por lo tanto, al verse afectado negativamente el ahorro (y el consumo) cae la acumulación de capital obteniendo un nivel menor de $k(t)$ de estado estacionario.

(e) Dibuje el diagrama de fases para un τ_{alto} y un τ_{bajo} donde $\tau_{alto} > \tau_{bajo}$.

Respuesta

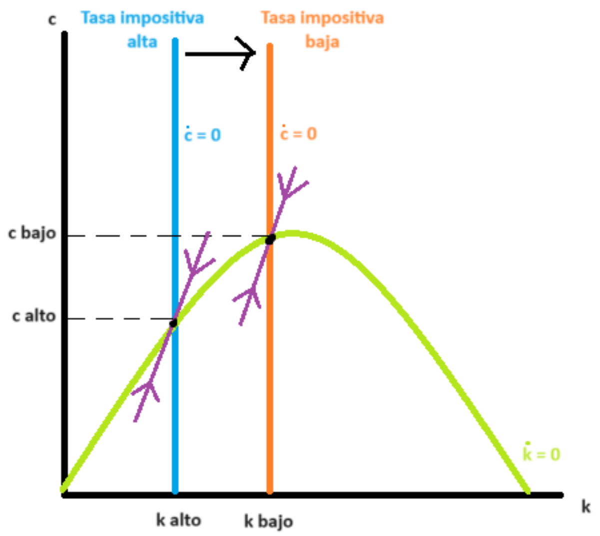
Es claro ver de las ecuaciones obtenidas en (c) que el locus $\dot{k}(t)$ no se verá afectado por el τ. Sin embargo no ocurre lo mismo con el locus $\dot{c}(t)$. Por lo tanto, el diagrama de fases se debería ver de la siguiente forma:



(f) Suponga que la economía ha estado por siempre en el estado estacionario con $\tau = \tau_{alto}$ y de forma inesperada en $t = t_0$ el gobierno decide bajar los impuestos a $\tau = \tau_{bajo}$ para siempre. ¿Cómo responde el consumo a este cambio en impuestos en $t = t_0$? Explique su intuición. ¿Cómo evoluciona el capital y el producto a través del tiempo después del recorte de impuestos?

Respuesta

Al caer la tasa impositiva inesperadamente y para siempre lo que ocurre es que el locus $\dot{c}(t)$ se mueve hacia la derecha:



Es decir, primero estabamos en una economía con τ_{alto} y ahora pasamos a una economía con τ_{bajo}.

Luego, como el consumo es la jumping variable y el hogar puede ajustar inmediatamente en $t = t_0$ su $c(t)$ lo que ocurrirá es que el consumo caerá en un inicio para caer sobre el nuevo brazo estable. La intuición es que el ahorro se hace mas atractivo y los individuos aprovecharan el nuevo retorno del capital. Entonces, el hogar lo que hace es reducir su consumo hoy para financiar mayores ahorros (con miras a lograr un mayor nivel de consumo en el futuro).

Luego, tras el cambio inicial en $c(t)$ el capital aumenta debido al aumento del ahorro. A medida que aumenta, tanto la producción como la tasa de rendimiento del capital caen. Esto continúa hasta que la tasa neta de rendimiento del capital vuelve a ser igual a la tasa de descuento de los hogares. En última instancia, lo que ocurre es que el consumo y el capital terminarán en un nivel de estado estacionario más alto.