AYUDANTÍA IV

Profesora: Adriana Piazza.
Ayudantes: Agustín Farías Lobo, Camila Carrasco.

Pregunta 1

Demuestre la identidad de Roy. Esto es, demuestre que si $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencias localmente no saciada y estrictamente convexa en $X = \mathbb{R}^L_+$; y $v(p,\omega)$ es diferenciable en $(\bar{p},\bar{\omega}) \gg 0$, entonces se tiene que

$$x(\bar{p},\bar{\omega}) = -\frac{1}{\nabla_\omega v(\bar{p},\bar{\omega})}\nabla_p v(\bar{p},\bar{\omega}).$$

Pregunta 2

Suponga una economía con dos bienes (x_1 y x_2), los que tienen precios $p = (p_1, p_2) \gg 0$. Un agente posee preferencias $\succsim$ que pueden ser representadas por una función de utilidad CES dada por

$$u(x_1,x_2) = \left[\alpha_1 x_1^\theta + \alpha_2 x_2^\theta\right]^{1/\theta},$$

donde α_1, α_2 y θ son escalares positivos.

a) Resuelva el problema de minimización de gasto del agente para un nivel de utilidad $\bar{u}$. Caracterice la demanda hicksiana y la función de gasto.

b) Verifique que la demanda hicksiana es homogénea de grado cero en los precios.

c) Verifique que la función de gasto es homogénea de grado uno en p.

d) Verifique que la función de gasto es creciente en $\bar{u}$.

e) En la Ayudantía III se mostró que la demanda marshalliana y la función de utilidad indirecta para precios $(p_1, p_2) \gg 0$ y renta ω estaban dadas por

$$x(p,\omega) = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega}{p_1 + p_2\left[\frac{p_1\alpha_2}{p_2\alpha_1}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}} & \dfrac{\omega}{p_1\left[\frac{p_1\alpha_2}{p_2\alpha_1}\right]^{\frac{1}{\theta-1}} + p_2} \end{bmatrix},$$

$$v(p,\omega) = \left[\alpha_1\left(\frac{\omega}{p_1 + p_2\left[\frac{p_1\alpha_2}{p_2\alpha_1}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}}\right)^\theta + \alpha_2\left(\frac{\omega}{p_1\left[\frac{p_1\alpha_2}{p_2\alpha_1}\right]^{\frac{1}{\theta-1}} + p_2}\right)^\theta\right]^{1/\theta},$$

respectivamente. Verifique que $e(p, v(p,\omega)) = \omega$ y que $x(p,\omega) = h(p, v(p,\omega))$.

Pregunta 3

Suponga que $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad continua representando preferencias localmente no saciadas definidas sobre $X = \mathbb{R}^L_+$. Luego, muestre que para cada vector de precios $p \gg 0$, la correspondencia de demanda hicksiana cumple con las siguientes propiedades:

(a) Homogeneidad de grado cero en p.

(b) No exceso de utilidad: para cada $x \in h(p,u)$ se cumple que $u(x) = u$.

(c) Si las preferencias son convexas, entonces $h(p,u)$ es un conjunto convexo.

(d) Si las preferencias son estrictamente convexas, entonces $h(p,u)$ es un singleton.

Pregunta 4

Suponga que $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad continua representando preferencias localmente no saciadas definidas sobre $X = \mathbb{R}^L_+$. Luego, muestre que la función de gasto $e(p,u)$ es

(a) Homogénea de grado uno en p.

(b) Estrictamente creciente en u y no decreciente en p_ℓ, $\forall \ell \in \{1,...,L\}$.

(c) Cóncava en p.