

# Modelos de Crecimiento de Economía Abierta

# Economía abierta

- En el modelo de economía cerrada, los hogares domésticos eran dueños de todo el capital.
- En consecuencia, el stock de capital per cápita era igual a los activos per cápita de los hogares:  $k_i = a_i$
- Ahora vamos a considerar el caso de una economía abierta.
- Vamos a extender el modelo de Ramsey para considerar libre movilidad de bienes y para permitir libre movilidad de capitales entre países.

# Modelo de economía abierta

- Hay muchos países en el mundo.
- El país doméstico será el país  $i$ .
- Dentro de cada país, los hogares y las empresas tienen las mismas funciones objetivo y restricciones que en el modelo de Ramsey del modelo de economía cerrada.
- Los activos domésticos y externos son sustitutos perfectos como depósitos de valor por lo que deben pagar la misma tasa de retorno  $r$ , la que será la tasa de interés mundial.

# Modelo de economía abierta

- Supongamos que el país local tiene activos netos por persona igual a  $a_i$  y un nivel de capital por persona de  $k_i$ . La diferencia  $k_i - a_i$  corresponderá en este caso a los pasivos externos netos del país,  $d_i$ .
- El saldo de la cuenta corriente corresponde en este caso a menos el cambio en la deuda externa,  $D_i = L_i \dot{d}_i$ . Donde  $L_i$  es la población y fuerza de trabajo del país  $i$  que crece a una tasa  $n_i$ .
- En consecuencia, el saldo de la cuenta corriente per cápita en el país  $i$  es igual a  $-(\dot{d}_i + n_i d_i)$ .

# Modelo de economía abierta

- Tenemos un solo bien en la economía mundial. Los hogares locales pueden comprar el único bien en los mercados mundiales y locales, al igual que los no residentes.
- El trabajo no es movable: los residentes locales no pueden trabajar en el extranjero (o emigrar) y los extranjeros no pueden trabajar en la economía local (o inmigrar).
- La restricción presupuestaria de los hogares es:

$$\dot{a}_{it} = (r - n_i) \cdot a_{it} + w_{it} - c_{it}$$

# Modelo de economía abierta

- Vamos a asumir las mismas preferencias que en el modelo de Ramsey que estudiamos en la sección pasada:

$$\left(\frac{\dot{c}_i}{c_i}\right) = \left(\frac{1}{\theta_i}\right) (r - \rho_i)$$

- Lo que expresado en términos de consumo por trabajador efectivo corresponde a:

$$\frac{\dot{\hat{c}}_i}{\hat{c}_i} = \frac{1}{\theta_i} \cdot [r - \rho_i - \theta_i x_i]$$

# Modelo de economía abierta

- Las condiciones de primer orden para el problema de la empresa son en este caso:

$$f'(\hat{k}_i) = r + \delta_i$$

$$[f(\hat{k}_i) - \hat{k}_i \cdot f'(\hat{k}_i)] \cdot e^{x_i t} = w_i$$

- Ahora reemplacemos estas condiciones en la restricción presupuestarias de los hogares locales y reescribamos todo en términos de trabajo efectivo.

# Modelo de economía abierta

- De lo anterior, obtenemos:

$$\dot{\hat{a}}_i = f(\hat{k}_i) - (r + \delta_i) \cdot (\hat{k}_i - \hat{a}_i) - (x_i + n_i + \delta_i) \cdot \hat{a}_i - \hat{c}_i$$



# Dinámica de una economía pequeña

- El supuesto de economía pequeña implica que la acumulación de activos y capital por parte de la economía local no tiene efectos en la trayectoria de la tasa de interés internacional.
- Dado lo anterior, trataremos a la trayectoria de la tasa de interés  $r(t)$  como exógena desde el punto de vista de la economía local.
- En consecuencia, las trayectorias de  $\hat{k}_i(t)$  y  $w_i(t)$  son determinadas independiente de las decisiones de consumo y ahorro de los hogares. (Recuerde que  $f'(\hat{k}_i) = r + \delta_i$  y  $[f(\hat{k}_i) - \hat{k}_i \cdot f'(\hat{k}_i)] \cdot e^{x_i t} = w_i$ )

# Dinámica de una economía pequeña

- Y en este caso, la dinámica para  $\hat{c}_i$  viene dada por:

$$\frac{\dot{\hat{c}}_i}{\hat{c}_i} = \frac{1}{\theta_i} \cdot [r - \rho_i - \theta_i x_i]$$

- Mientras que la acumulación de activos viene dada por:

$$\dot{\hat{a}}_i = f(\hat{k}_i) - (r - \delta_i) \cdot (\hat{k}_i - \hat{a}_i) - (x_i + n_i + \delta_i) \cdot \hat{a}_i - \hat{c}_i$$

- Y dado lo anterior podemos obtener la dinámica para la deuda externa neta recordando que  $d_i = k_i - a_i$ .

# Dinámica de una economía pequeña

- La tasa de interés que observaríamos en la economía si ésta fuera una economía cerrada sería  $\rho_i + \theta_i x_i$ .
- Ahora, si  $r > \rho_i + \theta_i x_i$  entonces la economía local acumularía suficientes activos como para violar el supuesto de economía pequeña. Lo anterior implica que tenemos que asumir que  $r \leq \rho_i + \theta_i x_i$ .
- Adicionalmente se requiere que  $r > x_i + n_i$   
...recuerde que:

$$\int_0^{\infty} c(t) e^{-[\bar{r}(t)-n]t} dt = a(0) + \int_0^{\infty} w(t) e^{-[\bar{r}(t)-n]t} dt = a(0) + \tilde{w}(0)$$

# Dinámica de una economía pequeña

- Velocidad de convergencia. Si  $r$  es constante,  $\hat{k}_i(t)$  es constante. En particular:

$$f' \left[ (\hat{k}_i^*)_{EA} \right] = r + \delta_i$$

- Lo anterior implica que la velocidad de convergencia desde cualquier nivel inicial de capital al estado estacionario es infinita. Lo anterior implica que la velocidad de convergencia del producto es también infinita.
- Si  $\hat{k}_i(0)$  es menor a  $(\hat{k}_i^*)_{EA}$  se genera una entrada de capitales inmediata de forma tal de que la brecha desaparece al instante. Lo contrario ocurre si  $\hat{k}_i(0)$  es mayor a  $(\hat{k}_i^*)_{EA}$ .
- Lo anterior es un resultado problemático de este modelo. Es un resultado contrafactual.

# Dinámica de una economía pequeña

- ¿Qué ocurre con la intensidad de uso de capital en estado estacionario de la economía abierta versus la economía cerrada?
- Recuerde que hemos asumido que  $r \leq \rho_i + \theta_i x_i$ .
- Lo anterior implica que  $(\hat{k}_i^*)_{EA} \geq \hat{k}_i^*$ .

# Trayectoria de consumo en economía abierta

- Recordemos que:

$$\frac{\dot{\hat{c}}_i}{\hat{c}_i} = \frac{1}{\theta_i} \cdot [r - \rho_i - \theta_i x_i]$$

- Es decir, el consumo crece a una tasa:

$$\frac{1}{\theta_i} \cdot [r - \rho_i - \theta_i x_i] \leq 0$$

- Si  $r = \rho_i + \theta_i x_i$ , entonces el consumo es constante.
- Si  $r < \rho_i + \theta_i x_i$ , entonces el consumo se acerca asintóticamente a cero. Como los hogares son relativamente impacientes, consumen al principio y luego tienen que pagar la cuenta...otra característica problemática de este modelo.

# Trayectoria de los activos en economía abierta

- Si  $r = \rho_i + \theta_i x_i$ ,  $\hat{a}_i(t)$  es constante.
- Si  $r < \rho_i + \theta_i x_i$ ,  $\hat{a}_i(t)$  converge a un valor negativo equivalente al valor presente de sus ingresos laborales.
- Es decir, los hogares locales hipotecan todo su capital e ingresos del trabajo para sostener un consumo mayor al principio, consumo que luego se va acercando a cero.
- Necesitamos hacer un ajuste al modelo...

# Restricciones de acceso al mercado financiero internacional

- Si el consumo de los hogares converge a cero y los ingresos del trabajo están destinados a pagar la deuda externa, eventualmente los hogares harán default si el castigo por éste está limitado a una fracción del producto doméstico o de su stock de capital.



# Restricciones de acceso al mercado financiero internacional

- Si el consumo de los hogares converge a cero y los ingresos del trabajo están destinados a pagar la deuda externa, eventualmente los hogares harán default si el castigo por éste está limitado a una fracción del producto doméstico o de su stock de capital.

*“Miren, yo reconozco nuestra deuda. Pero entre pagarles a ustedes y llenar los estómagos de la gente, yo me quedo con el pueblo de Brasil. Mientras haya niños muriendo de hambre, no voy a tener los medios para pagar la deuda”*  
Lula, 1998

# Restricciones de acceso al mercado financiero internacional

- Dado que los prestamistas entienden esta situación, la trayectoria antes descrita no es un equilibrio.
- Lo anterior implica que en algún momento el país local no podrá endeudarse en los mercados financieros internacionales.
- Veamos una extensión del modelo que nos permite analizar esta situación.

# Modelo con capital físico y humano

- Asumamos que existen dos tipo de capital: físico y humano.
- El capital físico sirve bien como colateral para acceder a los préstamos internacionales. Lo anterior implica que los prestamistas efectivamente pueden tomar posesión del capital en caso de default.
- El capital humano no sirve como colateral para acceder a préstamos internacionales.

# Modelo con capital físico y humano

- La función de producción en este caso es:

$$\hat{y} = f(\hat{k}, \hat{h}) = A\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta}$$

- Donde  $\hat{k}$  es el capital por unidad efectiva de trabajo y  $\hat{h}$  es el capital humano por unidad efectiva de trabajo.
- Adicionalmente  $0 < \alpha < 1$  ,  $0 < \eta < 1$  y  $\eta + \alpha < 1$ .

# Modelo con capital físico y humano

- En este caso, la restricción presupuestaria viene dada por:

$$\dot{\hat{a}} = f(\hat{k}, \hat{h}) - (r + \delta) \cdot (\hat{k} + \hat{h} - \hat{a}) - (x + n + \delta) \cdot \hat{a} - \hat{c}$$

$$\dot{\hat{a}} = A\hat{k}^\alpha \hat{h}^\eta - (r + \delta) \cdot (\hat{k} + \hat{h} - \hat{a}) - (x + n + \delta) \cdot \hat{a} - \hat{c}$$

- Estamos asumiendo que la tasa de depreciación es igual para el capital físico que para el capital humano.

# Caso 1: Economía cerrada

- En este caso  $d = 0$  y por lo tanto  $a = k + h$ .
- Podemos mostrar que los resultados en este caso son equivalente a los del modelo de Ramsey.
- Los inversionistas igualan el producto marginal tanto del capital físico como del humano a  $r + \delta$ . Donde  $r$  es la tasa de interés doméstica.
- En estado estacionario tenemos que  $\hat{k}^* / \hat{h}^* = \alpha / \eta$ .
- Si comenzamos con niveles de capital físico y humano por debajo de sus valores de estado estacionario, al igual que en el modelo de Ramsey para el capital físico, las tasas de crecimiento de estos factores caen durante la transición.

# Caso 1: Economía cerrada

- Podemos demostrar que el coeficiente de convergencia en este caso es:

$$2\beta = \left\{ \zeta^2 + 4 \cdot \left( \frac{1 - \alpha - \eta}{\theta} \right) \cdot (\rho + \delta + \theta x) \cdot \left[ \frac{\rho + \delta + \theta x}{\alpha + \eta} - (n + x + \delta) \right] \right\}^{1/2} - \zeta$$

- La diferencia con el modelo de Ramsey viene dada por que en vez de tener  $\alpha$  ahora tenemos  $\alpha + \eta$ .
- Consistente con Mankiw, Romer y Weil (1992), ayuda a reconciliar este coeficiente de convergencia con la evidencia empírica.

## Caso 2: Economía abierta

- Asumiremos que la deuda externa del país puede ser positiva pero que no puede exceder la cantidad de capital físico  $k$ .
- El capital físico puede ser utilizado como colateral para acceder a los mercados financieros internacionales. No así el capital humano.
- Vamos a asumir que los locales son los dueños del capital físico y que usan deuda para financiar su stock de capital. Los resultados serán los mismos si incluimos inversión extranjera directa.



# La restricción de acceso al crédito

- Hay varias formas de motivar la restricción de acceso al crédito en los mercados internacionales.
- Recobrar el capital físico es más fácil que recobrar el capital humano y por lo tanto es un mejor colateral.
- El capital físico es también más atractivo para un inversionista extranjero: es más fácil poseer una empresa que el flujo de ingreso de una persona.

## Caso 2: Economía abierta

- Asumiremos que la tasa de interés es constante.
- En particular, asumiremos que  $r = \rho + \theta x$ .
- La cantidad inicial de activos por unidad efectiva de trabajo es  $\hat{k}(0) + \hat{h}(0) - \hat{d}(0)$ .
- La clave será si  $\hat{k}(0) + \hat{h}(0) - \hat{d}(0)$  es menor o mayor que el capital humano (por unidad efectiva de trabajo) en estado estacionario,  $\hat{h}^*$ .

## Caso 2: Economía abierta

- Si  $\hat{k}(0) + \hat{h}(0) - \hat{d}(0) \geq \hat{h}^*$ , la restricción de acceso al crédito no está activa y la economía salta a su estado estacionario.
- Si  $\hat{k}(0) + \hat{h}(0) - \hat{d}(0) < \hat{h}^*$ , la restricción de acceso al crédito está activa y por lo tanto  $d = k$  debe cumplirse.
- Veamos en detalle que ocurre en este caso.

## Caso 2: Economía abierta

- Dado que el capital físico sirve como colateral, se debe cumplir en todo momento del tiempo que:

$$f_k = r + \delta$$

- Dado que estamos asumiendo la función de producción Cobb-Douglas, podemos mostrar que:

$$\hat{k} = \alpha \hat{y} / (r + \delta)$$

## Caso 2: Economía abierta

- Lo anterior implica que  $K/Y$  es constante, lo que es consistente con uno de los hechos estilizados de Kaldor respecto del desarrollo económico.
- Si reemplazamos  $\hat{k} = \alpha \hat{y} / (r + \delta)$  en la función de producción  $\hat{y} = A \hat{k}^\alpha \hat{h}^\eta$ , obtenemos:

$$\hat{y} = \tilde{A} \hat{h}^\epsilon$$

- Donde  $\tilde{A} \equiv A^{1/(1-\alpha)} \cdot [\alpha/(r + \delta)]^{\alpha/(1-\alpha)}$   
 $\epsilon \equiv \eta/(1 - \alpha)$

## Caso 2: Economía abierta

- La condición de que  $0 < \alpha + \eta < 1$  implica que  $0 < \epsilon < \alpha + \eta < 1$ .
- Si combinamos la restricción presupuestaria de la página 21 con  $\hat{y} = \tilde{A}\hat{h}^\epsilon$ , con la restricción  $d = k$  (por lo que  $a = h$ ) y con  $\hat{k} \cdot (r + \delta) = \alpha\hat{y}$ , tenemos que:

$$\dot{\hat{h}} = (1 - \alpha)\tilde{A}\hat{h}^\epsilon - (x + n + \delta) \cdot \hat{h} - \hat{c}$$

- ¿Por qué se sustrae  $\alpha\tilde{A}\hat{h}^\epsilon$  de la producción local en la ecuación pasada?

## Caso 2: Economía abierta

- Porque corresponde al pago neto a los factores de extranjeros. Es la diferencia entre PIB y PNB.
- En este caso los hogares van a maximizar

$$U = \int_0^{\infty} \left[ \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{(1-\theta)} \right] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt$$

- Sujeto a la restricción presupuestaria en página 30 y al nivel inicial de capital humano.

## Caso 2: Economía abierta

- La condición de optimización para el consumo es en este caso:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[ (1 - \alpha)\epsilon \tilde{A} \hat{h}^{\epsilon-1} - \delta - \rho - \theta x \right]$$

- Donde  $(1 - \alpha)\epsilon \tilde{A} \hat{h}^{\epsilon-1} = \eta \tilde{A} \hat{h}^{\epsilon-1}$  es igual al producto marginal del capital humano.
- La dinámica del modelo se completa con la condición de transversalidad.



## Caso 2: Economía abierta

- Dado que hemos asumido que  $r = \rho + \theta x$ , el estado estacionario en este caso es igual al de economía cerrada con capital humano y físico.
- Es decir, la posibilidad de pedir prestado en los mercados financieros internacionales no afecta el estado estacionario pero si la velocidad de convergencia.

# Velocidad de convergencia

- La fórmula del coeficiente de convergencia viene dada por:

$$2\beta = \left\{ \zeta^2 + 4 \cdot \left( \frac{1 - \epsilon}{\theta} \right) \cdot (\delta + \rho + \theta x) \cdot \left[ \frac{\delta + \rho + \theta x}{\epsilon} - (\delta + n + x) \right] \right\}^{1/2} - \zeta$$

- Donde  $\zeta = \rho - n - (1 - \alpha)x$ .
- El coeficiente de convergencia es equivalente al de economía cerrada con un coeficiente asociado a la participación del capital  $\epsilon$  en vez de  $\alpha + \eta$ .
- Tenemos además que  $\epsilon < \alpha + \eta$ .

# Velocidad de convergencia

- La economía abierta con restricción de acceso a los mercados financieros internacionales se comporta como una economía cerrada con una participación del capital que es menor.
- Dado que la velocidad de convergencia depende inversamente de la participación del capital, la velocidad de convergencia de la economía abierta con restricción de acceso al mercado financiero internacional es mayor que la de economía cerrada.

# Velocidad de convergencia

- Para entender la mayor velocidad de convergencia de la economía abierta con restricción parcial de acceso a los mercados financieros internacionales analicemos la trayectoria del cociente  $k/h$ .
- En la economía cerrada,  $k/h$  permanece constante en la transición hacia el estado estacionario (ver página 22). En nuestro caso de economía abierta  $k/h$  cae durante la transición a estado estacionario.

# Velocidad de convergencia

- En el caso de perfecto acceso a los mercados internacionales,  $k$  aumenta inmediatamente hacia el estado estacionario.
- Con acceso imperfecto a los mercados de capitales,  $k/h$  cae a través del tiempo lo que causa que los rendimientos decrecientes de  $h$  ocurran más rápido por lo que la velocidad de convergencia es mayor.

# Transición de $h/k$

- La transición a estado estacionario implica un aumento monótono de  $\hat{h}$  desde su valor inicial de  $\hat{h}(0)$  hasta  $\hat{h}^*$ .
- La tasa de crecimiento de  $\hat{y}$  es  $\epsilon$  veces la tasa de crecimiento de  $\hat{h}$ . Por lo tanto  $h/y$  crece durante la transición.
- Dado que  $\hat{k} = \alpha \hat{y} / (r + \delta)$ ,  $k/y$  es constante durante la transición a estado estacionario. Por lo que  $h/k$  sube en la transición.

# Transición de $k$

- Aunque  $k$  sirve como colateral, no salta inmediatamente a su valor de estado estacionario.
- La razón para lo anterior es que la acumulación de capital humano depende del ahorro doméstico y que existe una complementariedad entre  $h$  y  $k$  en la función de producción.