inversión

Tenemos que partir definiendo qué es inversión y qué es capital

* **Capital**: insumo durable que se utiliza en la producción de otros bienes
  ⇒ no es consumo directamente → "Demanda Derivada" (Depende de la dda de Y)
  → su dinámica es clave

* **Inversión**: Es el proceso a través del cual ajustamos el stock de capital a su nivel deseado
  ⇒ Es la compra de K

→ claramente existe una relación entre capital e inversión:

· **Notación**:
K_t: capital al final de t
I_t: inversión durante t

· **Lógica**:
→ Al terminar t-1 tengo K_{t-1}
→ Luego al pasar a t se deprecia → inicio con $(1-\delta)K_{t-1}$
→ Invierto I_t → $K_t = I_t + (1-\delta)K_{t-1}$

⇓

$$I_t = K_t - (1-\delta)K_{t-1}$$
$$= K_t - K_{t-1} + \delta K_{t-1}$$
$$I_t = \Delta K_t + \delta K_{t-1}$$ → Relación entre K y I

Sin embargo, necesitamos considerar algo clave con la inversión → los costos de ajuste

Ej: si yo sé que mañana vendrá un boom económico ⇒ Hoy invierto pues ∃ costos de ajuste.

→ Mercado de Arriendo de K

$$\underbrace{\Pi(K, X_1, \ldots, X_n)}_{\text{Beneficio firma}} - \underbrace{CK}_{\text{costo de arriendo de K}}$$

⇒ Si derivamos en función de K:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} - C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial K} = C}$$ → Arriendo hasta costo = img de K.

→ Ahora, derivando en función de C: → K depende de C

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} \cdot \frac{\partial K}{\partial C} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{\Pi_{K,K}}}$$

Luego como $\Pi_{K,K} < 0$ ⇒ retornos decrecientes ⇒ Dda decreciente en c.

Teoría del Acelerador
(Clark 1917)

· **Supuestos**:
1) Tecnología de proporciones fijas (determina K^*):

$$Y_t = \min(L_t, K_t/a)$$

⇒ 0 sustitución entre L y K

2) Producto es exógeno ⇒ no se ve afectado por decisiones de inversión → ej: me dicen cuánto producir

→ Luego dada la función Leontief de producción vemos que

$$Y_t = \frac{K_t}{a} \; (= L_t)$$

$$\Rightarrow Y_t \cdot a = K_t \quad (1)$$

→ Luego asumimos $\delta = 0$

$$\Rightarrow I_t = \Delta K_t$$

→ calculamos ΔK_t al sacar la 1era diferencia de (1):

$Y_{t-1} \cdot a = K_{t-1}$

→ $K_t - K_{t-1} = \Delta K_t = a(Y_t - Y_{t-1}) = a\Delta Y_t$

⇒ $\boxed{I_t = \Delta K_t = a \underbrace{\Delta Y_t}_{\text{tasa crecimiento producto (en magnitud)}}}$

⇒ I_t es mayor si el producto crece más ⟺ I es mayor cuando se acelera la tasa de crecimiento del producto

* Los datos no muestran este efecto
→ I_t es + persistente (toma T ajustar).

↳ Teoría del Acelerador Flexible

Aquí se considera que la inversión toma tiempo → ∃ fricción.

• Matemáticamente:

$$\left[I_t = \sum_{j\geq 0} \gamma_j (K^*_{t-j} - K^*_{t-j-1}) \right]$$

K_t^* es el "capital deseado" sin fricciones

→ Luego, los autores eliminan también el supuesto de $\delta = 0$, lo cual implica:

$I_t = \underbrace{a\Delta Y_t}_{\Delta K_t} + \delta K_{t-1}$ (reemplazando en ec. original de I_t)

⇒ $I_t = \sum_{j\geq 0} \gamma_j (a\Delta Y_{t-j} + \delta K_{t-1}) + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{término de error}}$

⟺ $\boxed{I_t = \left[a \sum_{j\geq 0} \gamma^j \Delta Y_{t-j}\right] + \underbrace{\delta K_{t-1} + \varepsilon_t}_{\text{salen de la sumatoria xq no dependen de j}}}$

"costo de ajuste"

→ Esta ecuación se ajusta mucho mejor a los datos.

* Comentarios modelo

• I, Y son endógenos en casi todos los modelos
• No influyen los precios!
• No hay costos de ajuste
• No hay Exp. sobre rentabilidad de K
• Y exógeno → raro.
• No se menciona nada sobre γ!

Modelo Neoclásico

Este modelo considera que la firma maximiza el valor de las acciones

- Def: Valor Acciones: Valor presente de las utilidades (descontadas a la tasa de interés libre de riesgo

→ no se consideran temas de control operativo.

- Supuestos

- Accionistas neutros al riesgo, es decir comprar K y luego vender es lo mismo que invertir en un bono (con tasa libre de riesgo)
- Firmas no emiten deuda
- En un inicio no hay T.
- Firma tomadora de precios
- sin asimetrías de información
- mercados de capitales perfectos (las firmas emiten las acciones a una tasa de retorno determinada por la tasa libre de riesgo)

⇒ Financiamiento interno (π retenidas) y externo (emitir acciones) son sustitutos perfectos

* Costo del usuario del capital

→ si la firma compra ΔK unidades de capital en t y las vende t+Δt entonces su ganancia por esta acción es:

→ Costos: $\underbrace{P_{K,t}}_{\text{Precio del capital en K}} \cdot \underbrace{\Delta K}_{\text{\# K que compro}}$

→ Ganancias:

1) Ganancia en producción ($X \uparrow K$ disponible para producir)

$$\int_t^{t+\Delta t} [\underbrace{\Pi(K_s+\Delta K, X_s)}_{\text{Beneficios de la firma cuando aumenta el capital con } \Delta K} - \underbrace{\Pi(K_s, X_s)}_{\text{Beneficios que hubiera tenido la firma sin la compra de } \Delta K}] \overbrace{e^{-r(s-t)}}^{\text{tasa de descuento}} ds$$

→ asumimos tiempo continuo

2) Ganancia por la venta de ΔK

$$\underbrace{\frac{1}{1+r\Delta t}}_{\text{lo traemos a V.P.}} \underbrace{(1-\delta\Delta t)}_{\text{consideramos la depreciación de } \Delta K \text{ durante el tiempo que la firma lo tuvo}} \underbrace{P_{K,t+\Delta t}}_{\text{Precio K en t+}\Delta t} \Delta K$$

⇒ Beneficio total:

$$-P_{K,t} \cdot \Delta K + \int_t^{t+\Delta t} (\Pi(K_s+\Delta K, X_s) - \Pi(K_s, X_s)) e^{-r(s-t)} ds$$

$$+ \frac{1}{1+r\Delta t} (1-\delta\Delta t) P_{K,t+\Delta t} \Delta K$$

→ luego con un desarrollo milagroso concluye que

$$\boxed{-P_{K,t} + \Pi_K(K_t, X_t)\Delta t + \frac{1}{1+r\Delta t}(1-\delta\Delta t) P_{K,t+\Delta t}}$$

→ Luego como dijimos que los accionistas son aversos al riesgo entonces tiene que ocurrir que este beneficio total sea igual al obtenido si es que hubieron comprado un bono a la tasa libre de riesgo r, es decir igual a 0.

Beneficio bono

$$\Delta K\left(-P_{K,t} + \frac{1}{1+r\Delta t}(1+r\Delta t) P_{K,t}\right) = 0$$

* comentario
la aproximación
$1+r\Delta t$ viene de $(1+r)^{\Delta t}$

$\dot{P}_{K,t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{K,t+\Delta t} - P_{K,t}}{\Delta t}$ → Taylor de 1er orden en Δt

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_K(K_t, X_t) = \underbrace{(\delta + r_t)P_{K,t} - \dot{P}_{K,t}}_{C_t}} \quad (*)$$

C_t → costo del usuario del capital
≈ costo arriendo del capital

⇒ C_t creciente en
- $P_{K,t}$
- r_t
- δ

Ejemplo: Cobb-Douglas

Consideramos la siguiente función de producción

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

→ Luego, notamos que lo que queremos encontrar es el K óptimo, pero también tenemos otro insumo en la función: L, pero el L^* óptimo podemos escribirlo en función de K:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L_t} = (1-\alpha)K_t^{\alpha} L^{-\alpha} P - W = 0 \rightarrow \text{CPO } L$$

↳ De aquí obtenemos $L^*(K)$

Entonces, la función de beneficios será:

$$\Pi(K_t, W_t, P_{y,t}) = P_{y,t} \cdot Y_t - W_t L_t^*(K_t)$$
$$= P_{y,t} \cdot (K_t^{\alpha} L_t^{*(1-\alpha)}) - W_t L_t^*$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = \alpha P_{y,t} K_t^{\alpha-1} L_t^{*(1-\alpha)} + P_{y,t} K_t^{\alpha}(1-\alpha) L_t^{*-\alpha} \cdot \dot{L}_t^* - W_t \dot{L}_t^*$$

Notemos que

$$\frac{Y_t}{L_t} = K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}$$

$$\frac{Y_t}{K_t} = K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} = \left(\frac{L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial K} = \alpha P_{y,t} \frac{Y_t}{K_t} + P_{y,t} \frac{Y_t}{L_t}(1-\alpha)\dot{L}_t - W_t \dot{L}_t$$

$$\Leftrightarrow \alpha P_{y,t} \frac{Y_t}{K_t} + \frac{\dot{L}_t}{L_t}\left(P_{y,t} Y_t(1-\alpha) - W_t L_t\right)$$

→ luego de la CPO de L

$$P_{y,t}(1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t} - W = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{L_t}\underbrace{\left(P_{y,t}(1-\alpha)Y_t - WL\right)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial K} = \alpha P_{y,t} \frac{Y_t}{K_t} = C_t} \rightarrow \text{Por } (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{K_t^* = \alpha \frac{P_{yt} Y_t}{C_t}}$$

⇒ Las elasticidades del capital deseado respecto del producto (Y_t) y del costo del usuario del capital (C_t) tienen la misma magnitud = 1 (en v. abs)

→ Ahora, conociendo K^* queremos calcular la inversión

⇒ Utilizamos la fórmula de rezagos distribuidos

$$I_t = \sum_{j \geq 0} \gamma^j \Delta K_{t-j}^* + \delta K_{t-1} \quad / \frac{1}{K_{t-1}}$$

$$\frac{I_t}{K_{t-1}} = \sum_{j \geq 0} \gamma^j \underbrace{\frac{\Delta K_{t-j}^*}{K_{t-1-j}}}_{\text{tasa de } I} + \frac{\delta \cancel{K_{t-1}}}{\cancel{K_{t-1}}}$$

$$\frac{I_t}{K_{t-1}} \approx \sum_{j \geq 0} \gamma^j \frac{\Delta K_{t-j}^*}{K_{t-j-1}^*} + \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{I_t}{K_{t-1}} \approx \sum_{j\geq 0} \gamma^j \underbrace{\underbrace{\frac{K_{t-j}^* - K_{t-j-1}^*}{K_{t-j-1}^*}}_{\frac{K_{t-j}^*}{K_{t-j-1}^*} - 1}}_{\text{"}x\text{"}} + \delta$$

$$\log(1+x) \approx x$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{K_{t-j}^*}{K_{t-j-1}^*} - 1 + 1\right) \approx \frac{K_{t-j}}{K_{t-j-1}} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{I_t}{K_{t-1}} \approx \sum_{j\geq 0} \gamma^j \log\left(\frac{K_{t-j}^*}{K_{t-j-1}^*}\right) + \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{I_t}{K_{t-1}} \approx \sum_{j\geq 0} \gamma^j \left(\log(K_{t-j}^*) - \log(K_{t-j-1}^*)\right) + \delta$$

$$K_{t-j}^* = \frac{\alpha\, P_{y,t-j}\, Y_{t-j}}{C_{t-j}}$$

$$K_{t-j-1}^* = \frac{\alpha\, P_{y,t-j-1}\, Y_{t-j-1}}{C_{t-j-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{I_t}{K_{t-1}} \approx \sum_{j\geq 0} \gamma^j \log(\alpha P_{y,t-j} Y_{t-j}) - \log(C_{t-j}) - \log(\alpha P_{y,t-j-1} Y_{t-j-1}) + \log(C_{t-j-1}) + \delta$$

$$\boxed{\frac{I_t}{K_{t-1}} \approx \sum_{j\geq 0} \gamma^j \Delta\log(P_{y,t-j} Y_{t-j}) - \Delta\log(C_{t-j}) + \delta}$$

→ Jorgenson estimó esta ecuación y obtuvo $\gamma^j > 0$ y significativos

Sin embargo, si estimamos ecuaciones del tipo:

$$\frac{I_t}{K_{t-1}} = cte + \sum_{j\geq 0} \eta_j \Delta\log(P_{y,t+1-j}\, Y_{t+1-j}) - \sum_{j\geq 0} \mu_j \Delta\log(C_{t+1-j}) + \varepsilon_t$$

solo encontramos significancia sobre $\eta_t \Rightarrow$ solo efecto acelerador y no por costos de usuario.

APLICACIÓN

Queremos estudiar cómo varía la demanda de capital con $\tau \rightarrow$ impuesto a las utilidades

Tenemos la utilidad en tiempo continuo dada por:

$$(1-\tau)\int_0^\infty [F(K_t, L_t) - wL_t - P_{K,t} I_t]\, e^{-rt}\, dt$$

Nuestra decisión óptima de K no varía con el impuesto (es una cte (t))

→ Sin embargo, otros autores introducen supuestos donde τ sí cambia el K^*

1) Los intereses de la deuda (por inversión) se consideran como gasto en la contabilidad $\Rightarrow \tau$ afecta esto, lo se ve afectado el pago de impuesto total

2) La depreciación también reduce la base imponible

Lógicamente las empresas tienen 2 vías de financiamiento

Deuda — Emisión de Acciones

Beneficio tributario
↳ r se descuenta de la base imponible
$\Rightarrow$ Debería usar 100% deuda, pero hay riesgo moral
$\Rightarrow$ Existe una fracción exógena $b \in [0,1]$ que representa el % de la inversión que se financia vía deuda.

Luego, por el lado de la depreciación tengo que:
"si invierto 1 en $t \rightarrow$ Puedo contabilizar δ_s como costo en $t+s$ ($\delta_s \geq 0 \wedge \int_0^\infty \delta_s\, ds = 1$.)"

$\Rightarrow$ En valor presente la depreciación será:

$$\boxed{z \equiv \int_0^{\infty} e^{-rs} \delta_s \, ds} \quad z \in [0,1]$$

$z = 1 \rightarrow$ Depreciación instantánea

*** Notemos que:**

$$(1-\tau)\int_0^{\infty} [F(K_t, L_t) - wL_t - \underbrace{P_{K,t} I_t}] e^{-rt} \, dt$$

Este término nos dice que hay depreciación instantánea pues toda la I está multiplicada por $(1-\tau) \Rightarrow z = 1$

Además, no existe ningún término que haga referencia a una deuda $\Rightarrow b = 0$

$\rightarrow$ Ahora, vamos a asumir que la firma quiere maximizar sus dividendos:

$$Div_t = (1-\tau)[F(K_t, L_t) - wL_t - rD_t] + \tau \Delta_t - (1-b) P_t I_t$$

$\Delta_t = \int_0^t \delta_{t-s} \, p_s I_s \, ds \rightarrow$ suma actos x depreciación

$D_t = b \int_0^t p_s I_s \, ds \rightarrow$ Deuda acumulada en t

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_K (K_t, L_t(K_t)) = \frac{1 - \tau(b+z)}{1-\tau} \left[(\delta + r_t) p_{K,t} - \dot{p}_{K,t} \right]}$$

- $\tau(b+z) \rightarrow$ Ganancia tributaria
  - $\hookrightarrow$ como $b \in [0,1] \wedge z \in [0,1]$

$\Rightarrow \quad b+z \in [0,2]$

- $b+z < 1$: $\uparrow \tau \Rightarrow \downarrow K$
- $b+z = 1$ $\uparrow \tau \Rightarrow \Delta K = 0$
- $b+z > 1$ $\uparrow \tau \Rightarrow \uparrow K \rightarrow$ incentivos para invertir

teoría q

Esta teoría determina conjuntamente Y^*, I^* incluyendo el impacto dinámico de I sobre Y

⇒ internaliza los costos de ajuste:

- Instalación
- Aprendizaje
- ↓ Producción (ej: autos)
- Reorganización planta
  etc

} internos

- ΔP por ↑ de mi ada } externos

- Rol clave de q

$$\boxed{q = \frac{\frac{dV}{dK}}{P_K}}$$

dV/dK } cómo cambia valor presente de π de la firma con ↑ de K

P_K } costo de capital

"cuanto más vale mi firma si instalo una unidad más de capital"

→ la lógica de este cálculo viene de la idea de que el valor de una unidad instalada ≠ valor unidad al comprarla

si $\frac{dV}{dK} > P_K \Rightarrow$ voy a invertir

* comentarios:

*El q teórico que calculamos es marginal → pero este no lo observamos

sin embargo, Hayashi demuestra que existen condiciones bajo las cuales podemos decir que

$$\boxed{q = \bar{q} = \frac{V}{K}}$$ → el cual sí observamos.

MODELO

SUPUESTOS

- costos internos de ajuste de K (no hay costo en otros insumos)
- costos convexos de instalar y desinstalar capital
- mercado de insumos competitivo
- sin restricción de crédito
- función de producción con retornos constantes a escala

$$\boxed{Y_t = F(K_t, L_t, z_t)}$$

$\hookrightarrow$ shock de productividad.

- Demanda isoelástica

$$\boxed{Y_t = P_t^{-1/\eta}} \rightarrow \frac{1}{\eta} = \varepsilon_{Y,P}$$

$\hookrightarrow \eta = 0 \rightarrow$ comp. perfecta

- Función de beneficios

$$\boxed{\pi(K_t, X_t) = \max_{L_t} P_{Y,t} \cdot F(K_t, L_t, z_t) - W_t L_t}$$

- $\left[\begin{array}{l} z = 1 \\ F(K,L,z) = K^\alpha L^{1-\alpha} \end{array}\right\}$ simplicidad

→ Ahora, lo primero que hacemos es encontrar $L^*(K)$:

$$\max P_{Y,t} \cdot (K^\alpha L^{1-\alpha}) - W_t L_t$$

$$P_{Y,t}^{-1/\eta} = K^\alpha L^{1-\alpha} \quad /(\ )^\eta$$

$$P_{Y,t}^{-1} = (K^\alpha L^{1-\alpha})^\eta$$

$$\Rightarrow P_{Y,t} = (K^\alpha L^{1-\alpha})^{-\eta}$$

$$\Rightarrow \max (K^\alpha L^{1-\alpha})^{-\eta} (K^\alpha L^{1-\alpha}) - W_t L_t$$

$$\Leftrightarrow \max (K^\alpha L^{1-\alpha})^{1-\eta} - W_t L_t$$

$$\frac{\partial}{\partial L} = (K^{\alpha})^{1-\eta}\,(1-\alpha)(1-\eta)\,L^{(1-\alpha)(1-\eta)-1} - W_t = 0$$

$$(1-\alpha)(1-\eta)-1 = \cancel{1}-\eta-\alpha+\alpha\eta-\cancel{1} = \alpha(\eta-1)-\eta$$

$$\Rightarrow K^{\alpha(1-\eta)} = \frac{W_t}{(1-\alpha)(1-\eta)\,L^{(-\eta+\alpha(\eta-1))}}$$

$$= \frac{W_t}{(1-\alpha)(1-\eta)} \cdot L^{\eta+\alpha(1-\eta)}$$

$$\Rightarrow K^{\alpha(1-\eta)}\,\frac{(1-\alpha)(1-\eta)}{W_t} = L^{\eta+\alpha(1-\eta)}$$

$$\Rightarrow L_t^*(K_t) = \underbrace{\left(\frac{(1-\alpha)(1-\eta)}{W_t}\right)^{\frac{1}{\eta+\alpha(1-\eta)}}}_{C_0(X)} \cdot K^{\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta+\alpha(1-\eta)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_t^*(K_t) = C_0(X)\,K_t^{\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta+\alpha(1-\eta)}}}$$

→ luego, lo sustituimos en π:

$$\pi = (K^{\alpha}L^{1-\alpha})^{1-\eta} - W_t L_t$$

$$= K^{\alpha(1-\eta)}\left[C_0(X)\,K_t^{\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta+\alpha(1-\eta)}}\right]^{(1-\alpha)(1-\eta)}$$

$$- W_t\, C_0(X)\, K^{\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta+\alpha(1-\eta)}}$$

→ simplificando obtenemos:

$$\boxed{\pi(K_t, X_t) = c(X_t)\,K_t^{\alpha(1-\eta)/(\eta+\alpha(1-\eta))}}$$

→ si $\eta = 0$ → comp. perfecta

$\Rightarrow \pi(K_t, X_t) = c(X_t)K_t$ → beneficios lineales

$(\pi_{KK} = 0)$

→ si $\eta > 0$ → Poder de mcdo

↳ retornos decrecientes

$(\pi_{KK} < 0)$

* comentarios:

* En comp. perf. si duplico $K \Rightarrow$ duplico π

En poder de mercado si duplico $K \Rightarrow$ debo bajar mi $P \Rightarrow \pi$ crece menos del doble.

* En comp. perf. K_t no determinado (crezco ∞)

Costos de Ajuste Convexos

Si la firma invierte I:

- Paga $p_K \cdot I$
- Paga costo de ajuste $C(I,K)\cdot p_K$

$C(I,K)$ satisface

$C(0,K) = 0$

$C(I,K) > 0 \quad \forall I \neq 0$

$C_I(0,K) = 0$

$C_K(I,K) < 0 \quad \forall I$

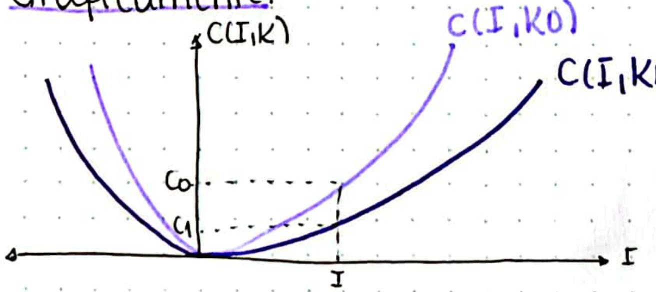
$C_{II}(I,K) > 0 \quad \forall I \neq 0$

Ej: costos cuadráticos

$$\boxed{C(I,K) = \frac{1}{2}\,b\,\frac{I^2}{K}}$$

b → magnitud costos de ajuste

• Gráficamente:



Donde se cumple que $K_0 < K_1$ pues $C_0 > C_1$ → "en fábricas + grandes es + fácil meter una unidad más"

* Notemos que la convexidad implica que es mejor ir invirtiendo de a poco pues así Σc_i son menores que un C grande → "suavizo I"

• Solución

Nuestra función objetivo es:

$$V(K_0) = \max \int_0^{\infty} [\pi(K_t, X_t) - P_{K,t}\cdot I_t - P_{K,t}\,C(I_t, K_t)]\, e^{-rt}\, dt$$

s.a. $\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$

$\{X_t, t \geq 0\}$, K_0 dados

* Notemos que:

- $-P_{K,t} I_t > 0$ cuando desinvierto
- r fijo
- sin restricciones de liquidez
- Tenemos un problema de control óptimo: control: I_t
  Estado: K_t
  Co-estado: λ_t

$\Rightarrow$ Debemos plantear el Hamiltoniano:

$$H(K_t, I_t) = \underbrace{\Pi(K_t, X_t) - P_{K,t}(I_t + C(I_t, K_t))}_{F(\cdot)} + \underbrace{\lambda_t (I_t - \delta K_t)}_{\lambda \cdot K'}$$

$\rightarrow$ Pero aquí no consideramos que estamos trayendo todo a V.P. $\rightarrow$ tb hay H con V.P.

$$\mathcal{H}(K_t, I_t) = e^{-rt} H(K_t, I_t)$$

* Utilizaremos $H(K_t, I_t)$

① $\frac{\partial H}{\partial I_t} = 0 : -P_{K,t}\left(1 + \frac{\partial C}{\partial I}\right) + \lambda_t = 0$

"Precio sombra K"

$$\Rightarrow \frac{\lambda_t}{P_{K,t}} = 1 + C_I(I_t, K_t)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial K} = \lambda_t = P_{K,t} \cdot q_t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{\lambda_t}{P_{K,t}} = 1 + C_I(I_t, K_t)} \quad (1)$$

② $-H_K = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t$

$$\frac{\partial H}{\partial K_t} = \frac{\partial \Pi}{\partial K} - P_{K,t} \cdot \frac{\partial C}{\partial K} - \lambda_t \delta$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \Pi}{\partial K} + P_{K,t}\frac{\partial C}{\partial K} + \lambda_t \delta = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t$$

$$\Rightarrow \boxed{(r+\delta)\lambda_t = \dot{\lambda}_t + \Pi_K - P_{K,t} C_K} \quad (2)$$

③ $$\boxed{\lim_{t\to\infty} \lambda_t \cdot e^{-rt} K_t = 0} \quad (3)$$

* si usamos $\mathcal{H}$:

① $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = 0$

② $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \dot{\mu}_t$

③ $\lim_{t\to\infty} \mu_t K_t = 0$

$\rightarrow$ "multiplicando (2) x $e^{-(r+\delta)(s-t)}$ e integrando x partes con $s = t \rightarrow s = \infty$"

$$P_{K,t} \cdot q_t = \lambda_t = \int_t^\infty e^{-(r+\delta)(s-t)} \{\Pi_K + P_{K,s}(-C_K)\} ds + \lim_{T\to\infty} \lambda_T e^{-(r+\delta)T}$$

Aplicando (3) veremos que λ_t es LTC (C. Perf.) o tiene EE (Poder de mercado) $\rightarrow$ el lím = 0.

* Si $\delta = 0 \rightarrow \lambda_t = \frac{dV}{dK_t}$

Si $\delta > 0 \rightarrow$ misma interpretación pero hay que calcular $\frac{dV_t}{dK_t}$

* $\rightarrow$ ¿Qué pasa si asumimos costos cuadráticos?

$$C(I,K) = \frac{1}{2} b \frac{I^2}{K} \rightarrow \frac{\partial C}{\partial I} = \frac{1}{\cancel{2}} b \cancel{2} \frac{I}{K}$$

$$\Rightarrow q = 1 + \frac{bI}{K} \Rightarrow \boxed{\frac{I}{K} = \frac{q-1}{b}} \quad (4)$$

Por (1)

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -\frac{1}{2} b \frac{I^2}{K^2}$$

$\rightarrow$ De (2) $= (r+\delta)(q P_{K,t}) = \dot{q} P_{K,t} + \Pi_K - P_{K,t} C_K$

$$\Rightarrow \dot{q} = (r+\delta) q - \frac{\Pi_K}{P_K} - \frac{1}{2} b \left(\frac{I}{K}\right)^2 \quad x\,(4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{q} = (r+\delta) q - \frac{\Pi_K}{P_K} - \frac{(q-1)^2}{2b}}$$

* Dinámica del modelo

→ Asumiremos:

$P_{K,t} = 1$, $\delta = 0$, $C(I,K) = \frac{1}{2} b \frac{I^2}{K}$, $X_t = X$

$\Rightarrow$ • $\dot{P}_{K,t} = 1$ → si cambia no hay E.E.

• como $\delta = 0 \Rightarrow \dot{K}t = It - \cancel{0 \cdot Kt}^{0}$

• $q = \frac{\lambda t}{1} \Rightarrow q = \lambda t$

• $\Pi(Kt, Xt) = \Pi(Kt, X) = \Pi(Kt)$

→ Resolvemos nuevamente:

$q = 1 + \frac{bI}{K}$

$\Rightarrow \frac{q-1}{b} = \frac{I}{K} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{q-1}{b}\right) K = I = \dot{K}}$

$\Rightarrow \boxed{\dot{q} = rq - \frac{\Pi K}{1} - \frac{(q-1)^2}{2b}}$

Dinámica

* Estado Estacionario

↳ $\dot{K}t = 0$ $\quad \dot{q}t = 0$

→ Si $\dot{K} = 0 \Rightarrow \frac{q-1}{b} \cdot K = 0$

$\Rightarrow q - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{q = 1}$

→ si $\dot{q} = 0 \Rightarrow r \cdot 1 - \Pi_K - \underbrace{\frac{(1-1)^2}{2b}}_{0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\Pi_K = r}$

Es muy improbable que justo $\Pi_K = r \Rightarrow$ no tenemos E.E.

En este caso $\Pi_K = \underbrace{r}_{C(Xt)}$

(esto es en comp. perfecta).

→ luego, el EE es $\boxed{q = 1,\ K = \Pi_K^{-1}(r)}$

$(\Pi_{KK} < 0)$

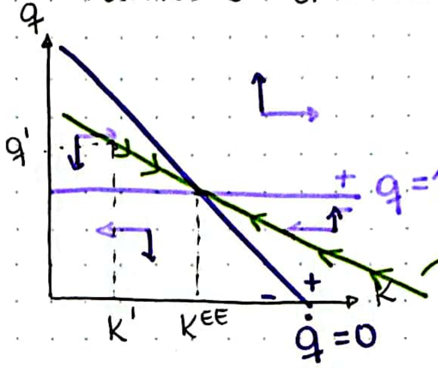
* Diagrama de Fase

• Supuesto clave

K se mueve lentamente

q salta pues es un precio

$\Rightarrow$ la condición de transversalidad se cumple solo si estamos en el brazo estable.



Aquí converjo en E.E

Entonces dado un valor de K $\Rightarrow$ existe un único valor de q de modo que la firma tiende al E.E.

↳ q se ajusta porque salta

→ Si q no se ajusta $\Rightarrow$ se viola la condición de transversalidad

$\Rightarrow$ o $K \to \infty$ o $K \to 0$

Entonces si estamos en $K' \Rightarrow q$ debe ser mayor a 1 para estar sobre →

↳ luego, en la trayectoria hacia el E.E. q irá decreciendo y K crecerá monotónicamente.

* Aplicaciones

1) Shock de productividad

Suponemos que inicialmente nos encontramos en el E.E.

luego $z > 1$ → shock

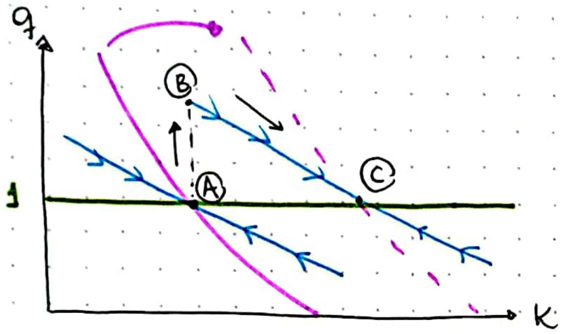
$\Pi_K(K) \longrightarrow z \cdot \Pi_K(K)$

z es no anticipado y sucede una vez.

¿Cuál es la lógica del shock? Si soy + productivo ⇒ la máquina instalada en mi firma es más valiosa

⇒ $\uparrow \frac{dV}{dK}$ ⇒ $\uparrow K$ (es + productivo tener capital).

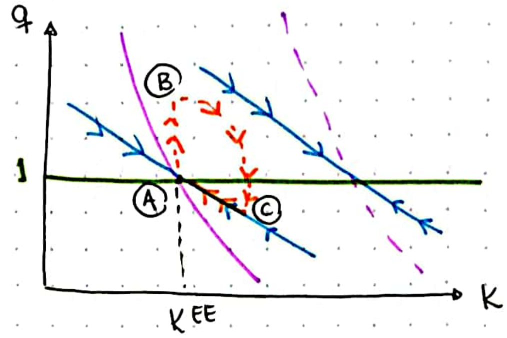
↳ Gráficamente



Ⓐ → Ⓑ : Por $\uparrow \frac{dV}{dK} = \uparrow q$

Ⓑ → Ⓒ : Empieza a caer q y aumentar K
⇒ E.E nuevo → $q = 1$
↳ $K^{EE} < K^{EE'}$

→ Continuando con el gráfico q/K:

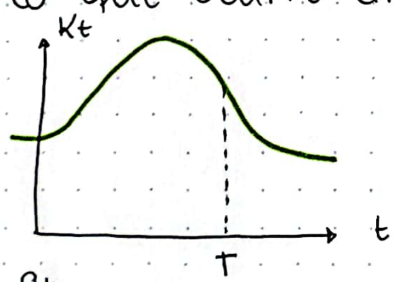


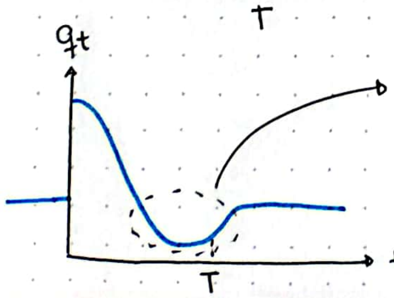
Ⓐ → Ⓑ : salto q por shock
Ⓑ → Ⓒ : el shock solo es transitorio ⇒ vuelve a caer q
Ⓒ → Ⓐ : en el brazo estable vuelvo a converger a K^{EE}.

2) MIT shock → shock transitorio
→ Ahora sabemos que durará entre $t=0 \wedge t=T$

- No pueden haber saltos anticipados de q
- Manda la dinámica del E.E activo

Lo que ocurre gráficamente:





Aquí desacumulo K_t (pues pasará el shock)

Costos no convexos de ajuste

En general podemos definir 3 tipos de ajustes:

1. Mantenimiento
2. Graduales: refinamiento, de entrenamiento
3. Grandes e infrecuentes
   ↳ no tenemos teoría para este último
   ↳ Peor aún → la evidencia muestra que este tipo de inversión es la que explica la tendencia de la inversión en su conjunto.

↳ Esto sugiere que tenemos ajuste abultado (PPT mete + dobla)

↳ **Modelo de Calvo**

Modelo más simple

Supuesto:

- Los agentes ajustan con una probabilidad exógena, la cual es ⫫ entre agentes y en el t.

Para ver el aporte del modelo 1ero derivaremos el modelo general y luego el de Calvo.

① **Modelo General de Ajuste Cuadrático**

- Problema de Optimización

$$\min_{y_{i,t}} E_t \sum_{j\geq 0} \rho^j \left[c(y_{i,t+j} - y_{i,t+1-j})^2 + (y_{i,t+j} - \hat{y}_{i,t+j})^2 \right]$$

costo de ajuste cuadrático

target (mi y_i^* óptimo sin costos de ajuste)

Nota: si $\left.\begin{matrix}\rho=0\\ c=0\end{matrix}\right\}$ $y_{i,t} = \hat{y}_{i,t}$ → Op. estática sin restricción

* si $\rho=0$ → Descuento todo el futuro, solo me importa el presente.

→ Solución: Política óptima

Se puede demostrar que la política óptima es:

$$\boxed{y_{i,t} - y_{i,t-1} = (1-\alpha)\underbrace{(y_{i,t}^* - y_{i,t-1})}_{\text{Brecha}}}$$

→ target dinámico

$$\boxed{y_{i,t}^* = (1-\delta)\sum_{k\geq 0}\delta^k E_t[\hat{y}_{i,t+k}]}$$

→ target estático

↳ ¿Qué pasó aquí?

$$\delta = \frac{1+c(1+\rho)-\sqrt{[1+c(1+\rho)]^2-4c^2\rho}}{2c}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1+c(1+\rho)+\sqrt{(1+c(1+\rho))^2-4c^2\rho}}{2c}$$

→ Conclusión: Este modelo de ajuste dinámico es como el promedio ponderado de la meta estática esperada

→ Ahora asumimos que los shock son comunes entre agentes ⇒ $y_t^* = y_{i,t}^*$ $\forall i$

Def: y agregado

$$\boxed{y_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_{i,t}}$$

⇒ $y_t - y_{t-1} = (1-\alpha)(y_t^* - y_{t-1})$

* **Caso particular**

El target estático es un random walk:

$$\hat{y}_t = g + \hat{y}_{t-1} + v_t \qquad v_t \sim iid(0, \sigma_v^2)$$

→ Luego, reemplazamos este nuevo valor de $\hat{y}_t$ en la ecuación para calcular y_t^*:

$$y_t^* = (1-\delta)\sum_{k\geq 0}\delta^k E_t[\hat{y}_{t+k}]$$

→ Sacamos el 1er término pues $E_t(\hat{y}_t) = \hat{y}_t$

$$y_t^* = (1-\delta)\left[\hat{y}_t + \sum_{k\geq 1}\delta^k E_t[\hat{y}_{t+k}]\right]$$

→ luego, notemos que

$$E_t(\hat{y}_{t+1}) = E_t(g + \hat{y}_t + V_{t+1})$$
$$= g + \hat{y}_t$$

$$E_t(\hat{y}_{t+2}) = E_t(g + \hat{y}_{t+1} + V_{t+2})$$
$$= g + g + \hat{y}_t$$
$$= 2g + \hat{y}_t$$

$$\Rightarrow E_t(\hat{y}_{t+k}) = k \cdot g + \hat{y}_t$$

→ Reemplazando en y_t^*:

$$y_t^* = (1-\delta)[\hat{y}_t + \sum_{k\geq 1} \delta^k (kg + \hat{y}_t)]$$

$$= (1-\delta)(\hat{y}_t + \sum_{k\geq 1} \delta^k kg + \sum \delta^k \hat{y}_t]$$

$$= (1-\delta)(\hat{y}_t + g \sum_{k\geq 1} \delta^k k + \hat{y}_t \sum_{k\geq 1} \delta^k)$$

$$= (1-\delta)(\hat{y}_t + g \underbrace{\sum_{k\geq 1} \delta^k \cdot k}_{\underbrace{\sum_{k\geq 0} \delta^{k+1}(k+1)}_{\underbrace{\underbrace{\sum_{k\geq 0} \delta\delta^k k}_{\delta \cdot \frac{\delta}{(1-\delta)^2}} + \underbrace{\sum_{k\geq 0} \delta^k \delta}_{\frac{\delta}{1-\delta}}}_{\frac{\cancel{\delta^2} + \delta - \cancel{\delta^2}}{(1-\delta)^2}}}} + \hat{y}_t \underbrace{\sum_{k\geq 0} \delta\delta^k}_{\frac{\delta}{1-\delta}})$$

$$= (1-\delta)(\hat{y}_t + g \cdot \frac{\delta}{(1-\delta)^2} + \hat{y}_t \frac{\delta}{1-\delta})$$

$$= \hat{y}_t (1-\cancel{\delta}) + \cancel{\hat{y}_t \delta} + g \frac{\delta}{1-\delta}$$

$$= \boxed{\hat{y}_t + g \frac{\delta}{1-\delta} = y_t^*}$$

→ luego reemplazamos en la ecuación de $y_t - y_{t-1}$:

$$y_t - y_{t-1} = (1-\alpha)(\hat{y}_t + g \frac{\delta}{1-\delta} - y_{t-1})$$

$$\Rightarrow y_t = \cancel{y_{t-1}} - \cancel{y_{t-1}} + \alpha y_{t-1} + (1-\alpha)\hat{y}_t + \frac{(1-\alpha)}{(1-\delta)} g\delta$$

$$\Rightarrow y_t = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha)\hat{y}_t + \overbrace{\frac{(1-\alpha)}{(1-\delta)} g \cdot \delta}^{A}$$

$$- \quad \Rightarrow y_{t-1} = \alpha y_{t-2} + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1} + \frac{(1-\alpha)}{(1-\delta)} g \cdot \delta$$

$$\Delta y_t = \alpha \Delta y_{t-1} + (1-\alpha)\Delta \hat{y}_t + A - A$$

$$\Delta \hat{y}_t = g + V_t$$

$$\Rightarrow \Delta y_t = \alpha \Delta y_{t-1} + (1-\alpha) g + (1-\alpha) V_t$$

$(1-\delta)$ → profe

Modelo de Calvo

Vamos a denotar como π a la probabilidad de ajustarse, la cual es ⫫ entre agentes y en el tiempo.

→ Si el agente se ajusta en t ⇒ este escoge $y_{i,t}$ teniendo en mente que no se volverá a ajustar en un largo tiempo.

→ Entonces, asumimos que la agente se ajusta en t, por lo tanto, ella resuelve:

$$\min_{y_{i,t}} E_t[\sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k (y_{i,t} - \hat{y}_{i,t+k})^2]$$

El factor de descuento incluye la prob. de no ajustarse porque esta es relevante en $t+j$ → va de la mano con el $y_{i,t}$

→ luego podemos reescribir el modelo como:

$$\min_{y_{i,t}} E_t\left(\sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k (y_{i,t}^2 - 2 \cdot y_{i,t} \hat{y}_{i,t+k} + \hat{y}_{i,t+k}^2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \min_{y_{i,t}} \sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k (y_{i,t}^2 - 2 y_{i,t} E_t(\hat{y}_{i,t+k}) + E_t(\hat{y}_{i,t+k}^2))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\min_{y_{i,t}} A y_{i,t}^2 - 2B y_{i,t} + C}$$

con $A: \sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k$

B: $\sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k E_t(\hat{y}_{i,t+k})$

C: $\sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k E_t(\hat{y}_{i,t+k}^2)$

→ Entonces ahora todo es tan simple como minimizar una cuadrática:

$$\frac{\partial FO}{\partial y_{i,t}} = 2 \cdot A \cdot y_{i,t} - 2B = 0$$

$$\Rightarrow y_{i,t} = \frac{2B}{2A} \Rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = y_{i,t}^*}$$

Escrito sin notación de A y B:

$$y_{i,t}^* = \frac{\sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k E_t(\hat{y}_{i,t+k})}{\sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k} \qquad \sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k \to \frac{1}{1-\rho(1-\pi)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{i,t}^* = (1-\rho(1-\pi)) \sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k E_t(\hat{y}_{i,t+k})}$$

→ Podemos definir un y agregado (con $N \to \infty$):

$$y_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i,t}^*$$

↳ Notemos que $(1-\pi)$ fracción de los agentes no ajustan y π sí ajustan

→ si no ajustan ⇒ su contribución al agregado es $(1-\pi)y_{t-1}$

$$\Rightarrow y_t = (1-\pi) y_{t-1} + \pi y_t^* \qquad (y_t^* = y_{i,t}^*)$$

↳ y el N?

$$\Rightarrow \boxed{y_t - y_{t-1} = \pi (y_t^* - y_{t-1})}$$

→ conclusiones:

$\alpha \to 1-\pi$
$\delta \to \rho(1-\pi)$ } tomando esto, los dos modelos son indistinguibles

Esto porque solo vemos el agregado

costos
no convexos

Caso simple: Para un nivel K dado:

$$C(I,K) = \begin{cases} F & \text{si } I \neq 0 \\ 0 & \text{si } I = 0 \end{cases}$$

↳ costo fijo

⇒ Ya no hay ajustes pequeños y existen t donde no es óptimo ajustarse.
si la firma invierte ⇒ invierte harto

* comentarios

- costos deben crecer con el tamaño de la firma
- $I \to C(I,K)$ es discontinua en $I=0$
  ⇒ no convexidad

→ Podemos reescribir los $C(I,K)$ como:

$$\boxed{C(I,K) = F\,\underbrace{1\{I\neq 0\}}_{=1 \text{ si } I\neq 0,\ =0 \sim} + C_0(I,K)}$$

$C_0(I,K)$ ↳ convexa como en teoría q.

• **Modelo**

· Tiempo discreto
· Función de beneficio:

$$\boxed{\pi(K,\theta) = K^{\beta}\theta - (r+\delta)K}$$

$\beta \in (0,1)$
θ: shocks (ada, productividad, trabajo, etc)

$$\Rightarrow K^* = \underbrace{\arg\max_K \pi(K,\theta)}$$

$$\frac{\partial F.O}{\partial K} = \theta\beta K^{\beta-1} - (r+\delta) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{K^* = \left(\frac{r+\delta}{\theta\beta}\right)^{1/\beta-1}}$$

→ vamos a suponer que $\log \theta$ es un random walk

$$\Rightarrow K = \left(\frac{\theta\beta}{r+\delta}\right)^{1/1-\beta} \quad / \log$$

$$\log(K) = \frac{1}{1-\beta}\left[\log(\theta) + \log(\beta) - \log(r+\delta)\right]$$

random walk ⇐ random walk

⇓

$\Delta(\log K)$ son iid

→ Ahora, le metemos costos de ajuste:
si la firma ajusta su K en t
⇒ deja de percibir ω en t (de sus ingresos)

Entonces, notemos que los ingresos de la firma son:

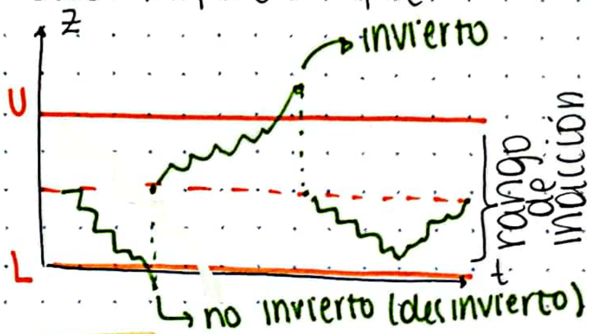
↳ $K^{\beta}\theta$ ⇒ $\boxed{\text{Costo de Ajuste} = \omega K^{\beta}\theta}$

Definimos

$$z = \log(K^*/K) = \log K^* - \log K = k^* - k$$

↓
estado

Esto implica que:



z: $z_t > U$ ⇒ invierto ⇒ $\downarrow z_t$ hasta c
$z_t < L$ ⇒ ~ ⇒ $\uparrow z_t$ "
si $z_t \in [L,U]$ ⇒ no hago nada

* L,U → "triggers"
* target luego del ajuste: c

* Limitaciones de la regla L/C/U

Cuando las firmas ↑K siempre es en el mismo % : U−C (si lo bajan (−L))
↓
no realista
⇓
Aporte del modelo: captura que la Pr de ajustarse es creciente en la brecha de la firma

• Función de Pr de Ajuste

Suponemos $c=0$ ($x = z - c$)

Entonces, denotamos la Pr de Ajuste por $\Lambda(x)$ ⇒ si costo es fijo, esto implica que $\Lambda(x)$ pasa de 0 a 1 cuando x llega a L o U.

↳ Es más realista que $\Lambda(x)$ crezca lentamente con $|x|$
↳ ej. cumulativa $G(w)$

Entonces, la política óptima de las firmas es seguir las reglas L,C,U con $\underbrace{L(x), U(x)}$
⇓
A mayor $|x|$ ⇒ ↑ rango inacción
L decreciente en $|x|$
U creciente en $|x|$

→ Función $\Lambda(x)$