Microeconomía I
Ayudantía

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

Pregunta 1

Para la siguiente función de utilidad

$$\tilde{u} : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R} : \ \ \tilde{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}\mathbf{x}$$

donde $a = (a_1, ..., a_L) \in \mathbb{R}^L_{++}$, y B es una matriz de L x L simétrica y positiva definida.

1. Compute el vector gradiente $\nabla \tilde{u}(\mathbf{x})$ y la matriz Hessiana $D^2\tilde{u}(\mathbf{x})$.
2. ¿Es la relación de preferencia representada por $\tilde{u}$ convexa? ¿Estrictamente convexa? ¿Localmente no saciada?
3. Grafique el mapa de curvas de indiferencia para $L = 2$, cuando $a_1 = a_2 = a$ y $B = \begin{bmatrix} b & c \\ c & b \end{bmatrix}$. Considere solo el caso donde $c = 0$.
4. Asuma que, para algún $(\mathbf{p}, w) >> 0$, existe una solución al problema $UMAX[\mathbf{p}, w]$ y es única. Demuestre que para w por encima de un cierto nivel, que debe hacer explícito, la demanda es insensible a los aumentos de riqueza, mientras que para valores de w por debajo de este nivel, la demanda walrasiana es afín en riqueza.

Pregunta 2

Considere una economía con $T + 1$ bienes: el bien 0 es un bien numerario y los bienes $1, ..., T$ representan el consumo de electricidad en el momento $t = 1, ..., T$. La producción de electricidad requiere la construcción de una planta de capacidad K, donde K representa la cantidad máxima de electricidad que se puede producir en cualquier momento. La construcción de una planta de capacidad K requiere ρK unidades del bien numerario y luego el costo de producir una unidad de electricidad en cualquier momento es γ unidades del numerario. Dado que no es óptimo construir una capacidad mayor que la cantidad máxima de electricidad producida en cualquier momento, la producción establecida para la electricidad es

$$Y = \{(-z_0, y_1, y_2, ..., y_T) \in \mathbb{R}_- \text{ x } \mathbb{R}^T_+ | z_0 \geq \rho \left(\max_{1 \leq t \leq T} y_t \right) + \gamma \sum_{t=1}^{T} y_t \}$$

1. Muestre que el conjunto de producción de electricidad es convexo y presenta rendimientos constantes a escala.
2. Para simplificar asuma que hay solo una empresa que maximiza sus ganancias tomando los precios como dados, con $T = 2$ y $p = (1, p_1, p_2)$. En el plano (y_1, y_2) dibuje las curvas de isocosto de la empresa.

Pregunta 3

Usted posee w unidades de un activo seguro, lo que produce una unidad del bien de consumo único en cualquier estado de la naturaleza. También existe un activo riesgoso, que rinde diferentes cantidades del bien de consumo en los distintos estados de la naturaleza. Usted puede intercambiar activos riesgosos y seguros *ex-ante* en los mercados financieros. Un portafolio se define por una cantidad γ del activo riesgoso, lo que le deja con la cantidad $w - \gamma$ del activo seguro. Asuma que hay solo dos estados de la naturaleza:

- s_1: estado malo. Ocurre con probabilidad π, y la tasa de retorno (bruta) de activos riesgosos es $v_1 < 1$.
- s_2: estado bueno. Ocurre con probabilidad $1-\pi$, y la tasa de retorno (bruta) de activos riesgosos es $v_2 > 1$.

El portafolio γ induce los siguientes consumos contingentes:

- $x_1 = w + \gamma(v_1 - 1)$ en el estado malo.
- $x_2 = w + \gamma(v_2 - 1)$ en el estado bueno.

Suponemos que el activo riesgoso tiene rendimientos esperados netos positivos: $\pi(v_1-1)+(1-\pi)(v_2-1) > 0$; y que la riqueza w es lo suficientemente grande como para que el consumo contingente sea positivo en ambos estados de la naturaleza.

Demuestre las siguientes proposiciones:

1. γ es constante (resp. creciente) si también lo es $x_2 - x_1$.
2. γ/w es constante (resp. creciente) si también lo es x_2/x_1.
3. La maximización de preferencias se caracteriza por la siguiente C.P.O.: $\frac{u'(x_1)}{u'(x_2)} = \frac{1-\pi}{\pi}\frac{v_2-1}{1-v_1}$.
4. $\frac{1-\pi}{\pi}\frac{v_2-1}{1-v_1}\psi > 1$.

Considere ahora la siguiente función de utilidad: $u(x) = -e^{-rx}$, con $r > 0$. Responda:

a) A medida que aumenta su riqueza inicial w, ¿cómo cambia la cantidad γ del activo riesgoso?

b) A medida que aumenta su riqueza inicial w, ¿cómo cambia el ratio γ/w?

Pregunta 1

Para la siguiente función de utilidad

$$\tilde{u} : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R} : \ \tilde{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}\mathbf{x}$$

donde $a = (a_1, ..., a_L) \in \mathbb{R}^L_{++}$, y B es una matriz de L x L simétrica y positiva definida.

1. Compute el vector gradiente $\nabla \tilde{u}(\mathbf{x})$ y la matriz Hessiana $D^2\tilde{u}(\mathbf{x})$.
2. ¿Es la relación de preferencia representada por $\tilde{u}$ convexa? ¿Estrictamente convexa? ¿Localmente no saciada?
3. Grafique el mapa de curvas de indiferencia para $L = 2$, cuando $a_1 = a_2 = a$ y $B = \begin{bmatrix} b & c \\ c & b \end{bmatrix}$. Considere solo el caso donde $c = 0$.
4. Asuma que, para algún $(\mathbf{p}, w) >> 0$, existe una solución al problema $UMAX[\mathbf{p}, w]$ y es única. Demuestre que para w por encima de un cierto nivel, que debe hacer explícito, la demanda es insensible a los aumentos de riqueza, mientras que para valores de w por debajo de este nivel, la demanda walrasiana es afín en riqueza.

lineal

1) $\nabla \tilde{u}(X) = a - \frac{1}{2}(B + B') \cdot X$

$B = B'$ / simétrica

$\Rightarrow \boxed{\nabla \tilde{u} = a - BX}$

$\boxed{D^2 \tilde{u}(X) = -B}$

2) si, porque $B > 0 \Rightarrow \underbrace{D^2 \tilde{u}(X) < 0}_{\text{estric. cóncava}}$ $\Rightarrow$ estric cuasicóncava

$\Leftrightarrow$

pref. estric convexas

$\Rightarrow$ convexas

$\underbrace{\text{L.N.S.}}$

no, como $\tilde{u}(x)$ es cóncava, tiene un max. local.

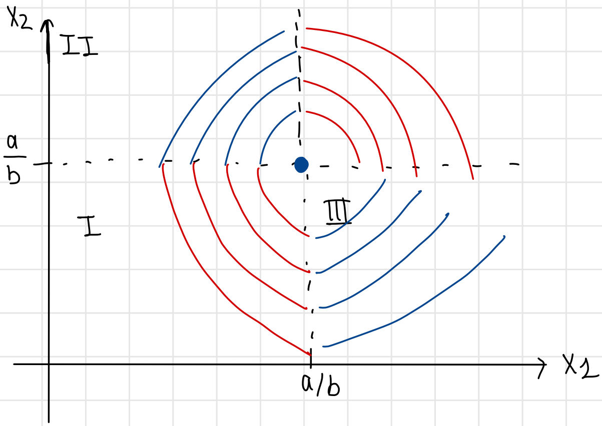
- $\nabla \tilde{u}(x) = 0$

$$\Rightarrow a - Bx = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x^* = B^{-1}a}$$

$\left.\right\}$ max local $\left.\right\}$ $\Rightarrow \succsim$ tienen un punto de saciación $\Rightarrow$ no es L.N.S

$\tilde{u}(x^*) > u(x) \Leftrightarrow x^* \succsim x \quad \forall x$

3)



$a_1 = a_2$

$$B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = a(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} \underbrace{\underbrace{(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{1 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{2 \times 1}}$$

$$\underbrace{\underbrace{(x_1 b \ \ x_2 b)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x_1^2 b + x_2^2 b}$$

$$\boxed{\tilde{u}(x_1, x_2) = a(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_1^2 b + x_2^2 b)}$$

$\ni \tilde{u} = \bar{u} \to x_2(x_1)$ (mejor con intuición)

$\nabla \tilde{u}(x) = 0$

$$a - Bx = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} - \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}} \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} bx_1 \\ bx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a/b = x_1} \quad \boxed{a/b = x_2}$$

$$\bar{u} - \tilde{u} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{a - bx_1}{a - bx_2}\right)$$ pendiente curvas indiferencia

$$\boxed{\text{I}: \begin{matrix} x_2 < \frac{a}{b} \\ x_1 < \frac{a}{b} \end{matrix} \Bigg\} \frac{\partial y}{\partial x} < 0}$$

$$\boxed{\text{II}: \begin{matrix} x_2 > a/b \\ x_1 < a/b \end{matrix} \Bigg\} \frac{\partial y}{\partial x} > 0}$$

$$\boxed{III: \left.\begin{matrix} x_1 > a/b \\ x_2 < a/b \end{matrix}\right\} \frac{\partial y}{\partial x} > 0}$$

$$\boxed{IV: \left.\begin{matrix} x_1 > a/b \\ x_2 > a/b \end{matrix}\right\} \frac{\partial y}{\partial x} < 0}$$

- A medida que el círculo se achica voy alcanzando el máximo global

4) Umax[p, w] tiene sol. única.

$\frac{\partial x_\ell}{\partial w}$? p.dq $\exists \bar{x} / w > \bar{w} \to \frac{\partial x_\ell}{\partial w} = 0$

pero si $w < \bar{w} \to \frac{\partial x_\ell}{\partial w}$ son lineales

Dem

x^* tq $\nabla \tilde{u}(x^*) = 0$

Definimos $\bar{w} = p \cdot x^*$

- si $w > \bar{w} \Rightarrow x^{UMAX} = x^*$ y $\therefore$ no depende de w

UMAX: $\max_x \tilde{u}(x)$ s.a $p \cdot x \leq w$ } "no está activa la restricción"

$\Rightarrow \frac{\partial x_\ell}{\partial w} = 0$

- si $w < \bar{w}$

[Umax] $\to$ $\boxed{\begin{matrix} \nabla \tilde{u}(x) - \lambda p = 0 & (1) \\ p \cdot x = w & (2) \end{matrix}}$

$$\Rightarrow \quad a - B \cdot x - \lambda p = 0$$

$$a - \lambda p = Bx$$

$$x^* = B^{-1}(a - \lambda p)$$

$$\Rightarrow \quad p \cdot B^{-1}(a - \lambda p) = w$$

$$p \cdot B^{-1} a - \lambda \cdot p B^{-1} p = w$$

$$\boxed{\frac{p \cdot B^{-1} a - w}{p \cdot B^{-1} p} = \lambda} > 0$$

$$\Rightarrow \quad x^* = B^{-1}\left[a - \left(\frac{p B^{-1} a - w}{p \cdot B^{-1} p}\right) \cdot p\right]$$

$$x^* = B^{-1}\left[a - \frac{p B^{-1} a}{p B^{-1} p} \cdot p\right] + \underbrace{\frac{w}{p B^{-1} p} \cdot B^{-1} p}_{\text{función lineal de la riqueza}}$$

Pregunta 2

Considere una economía con $T+1$ bienes: el bien 0 es un bien numerario y los bienes $1, ..., T$ representan el consumo de electricidad en el momento $t = 1, ..., T$. La producción de electricidad requiere la construcción de una planta de capacidad K, donde K representa la cantidad máxima de electricidad que se puede producir en cualquier momento. La construcción de una planta de capacidad K requiere ρK unidades del bien numerario y luego el costo de producir una unidad de electricidad en cualquier momento es γ unidades del numerario. Dado que no es óptimo construir una capacidad mayor que la cantidad máxima de electricidad producida en cualquier momento, la producción establecida para la electricidad es

$$Y = \{(-z_0, y_1, y_2, ..., y_T) \in \mathbb{R}_- \text{ x } \mathbb{R}^T_+ | z_0 \geq \rho \left(\max_{1\leq t\leq T} y_t \right) + \gamma \sum_{t=1}^{T} y_t\}$$

1. Muestre que el conjunto de producción de electricidad es convexo y presenta rendimientos constantes a escala.
2. Para simplificar asuma que hay solo una empresa que maximiza sus ganancias tomando los precios como dados, con $T = 2$ y $p = (1, p_1, p_2)$. En el plano (y_1, y_2) dibuje las curvas de isocosto de la empresa.

1. convexo

$(-z_0, y) \in Y \qquad z_0 \geq \rho \cdot \max\{y_t\} + \gamma \sum y_t \quad / \cdot \alpha$

$+ \quad , \alpha \in (0,1)$

$(-\tilde{z}_0, \tilde{y}) \in Y \qquad \tilde{z}_0 \geq \rho \cdot \max\{\tilde{y}_t\} + \gamma \sum \tilde{y}_t \quad / (1-\alpha)$

$$\alpha z_0 + (1-\alpha)\tilde{z}_0 \geq \overbrace{\rho\alpha \max\{y_t\} + (1-\alpha)\rho \max\{\tilde{y}_t\}}^{(1)} + \gamma \sum (\alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_t)$$

• PDQ: $\alpha z_0 + (1-\alpha)\tilde{z}_0 \geq \underbrace{\rho \max\{\alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_t\}}_{(2)} + \gamma \sum (\alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_t)$

$(1) \geq (2)$

$\hookrightarrow \alpha \rho \max\{y_t\} + (1-\alpha)\rho \cdot \max\{\tilde{y}_t\} \geq \rho \max\{\alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_t\}$

$$\Rightarrow \alpha \max\{y_t\} + (1-\alpha)\max\{\tilde{y}_t\} \geq \max\{\alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_t\}$$

$\{y_t\}_{t=1}^{T}, \{\tilde{y}_t\}_{t=1}^{T}$

sea $\bar{t}$ tq. $\max\{y_t\} = y_{\bar{t}}$

$\hat{t}$ tq $\max\{\tilde{y}_t\} = y_{\hat{t}}$

$$\forall t \quad \alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_t \leq \underbrace{\alpha y_{\bar{t}} + (1-\alpha) y_{\hat{t}}}_{\alpha \max\{y_t\} + (1-\alpha)\max\{\tilde{y}_t\}}$$

$$\Rightarrow \alpha z_0 + (1-\alpha)\tilde{z}_0 \geq p\max\{\alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_t\}$$

$$\Rightarrow (\alpha z_0 + (1-\alpha)\tilde{z}_0, \alpha y + (1-\alpha)\tilde{y}) \in Y$$

Rend. ctes a escala

$(-z, y) \in Y$ P.D.Q. $\alpha Y \in Y$, $\alpha \geq 0$

Por hipótesis:

$$z_0 \geq p\max\{y_t\} + r\sum y_t \quad / \alpha$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha z_0 \geq p\max\{\alpha y_t\} + r\sum \alpha y_t}_{(-\alpha z_0, \alpha y) \in Y \Rightarrow \alpha Y \in Y, \ \alpha \geq 0 \ //}$$

2) $T=2$
$p=(1,p_1,p_2)$
(y_1,y_2)

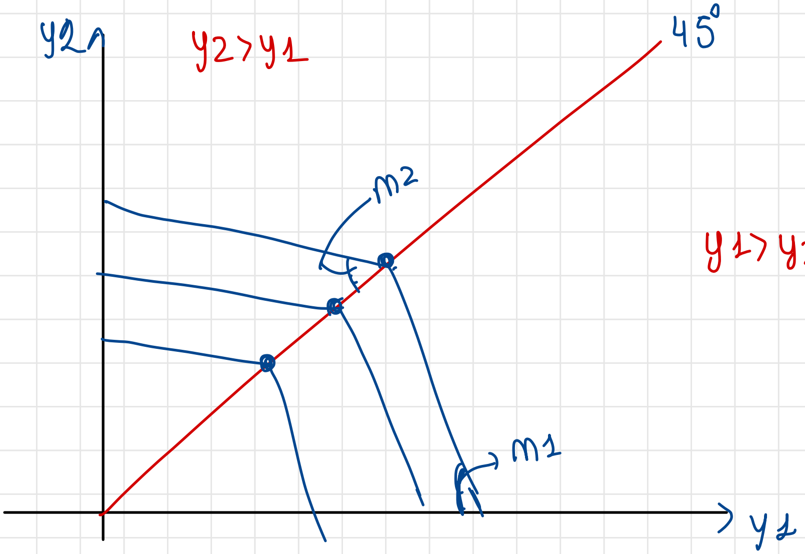
$Y=\{(-z_0,y_1,y_2)\in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^2 :$
$z_0 \geq p\cdot \max\{y_1,y_2\}+r\{y_1+y_2\}$

2 partes distintas:

caso 1: $y_1 \geq y_2 \rightarrow \bar{q} = p\cdot y_1 + r\{y_1+y_2\} \rightarrow m_1 = -\left(\frac{p+r}{r}\right)$

caso 2: $y_2 \geq y_1 \rightarrow \bar{q} = p\cdot y_2 + r\{y_1+y_2\} \rightarrow m_2 = -\left(\frac{r}{p+r}\right)$

$|m_1| > |m_2|$
$(r,p) \gg (0,0)$



Pregunta 3

Usted posee w unidades de un activo seguro, lo que produce una unidad del bien de consumo único en cualquier estado de la naturaleza. También existe un activo riesgoso, que rinde diferentes cantidades del bien de consumo en los distintos estados de la naturaleza. Usted puede intercambiar activos riesgosos y seguros *ex-ante* en los mercados financieros. Un portafolio se define por una cantidad γ del activo riesgoso, lo que le deja con la cantidad $w-\gamma$ del activo seguro. Asuma que hay solo dos estados de la naturaleza:

- s_1: estado malo. Ocurre con probabilidad π, y la tasa de retorno (bruta) de activos riesgosos es $v_1 < 1$.
- s_2: estado bueno. Ocurre con probabilidad $1-\pi$, y la tasa de retorno (bruta) de activos riesgosos es $v_2 > 1$.

El portafolio γ induce los siguientes consumos contingentes:

- $x_1 = w + \gamma(v_1 - 1)$ en el estado malo.
- $x_2 = w + \gamma(v_2 - 1)$ en el estado bueno.

Suponemos que el activo riesgoso tiene rendimientos esperados netos positivos: $\pi(v_1-1)+(1-\pi)(v_2-1) > 0$; y que la riqueza w es lo suficientemente grande como para que el consumo contingente sea positivo en ambos estados de la naturaleza.

Demuestre las siguientes proposiciones:

1. γ es constante (resp. creciente) si también lo es $x_2 - x_1$.
2. γ/w es constante (resp. creciente) si también lo es x_2/x_1.
3. La maximización de preferencias se caracteriza por la siguiente C.P.O.: $\frac{u'(x_1)}{u'(x_2)} = \frac{1-\pi}{\pi}\frac{v_2-1}{1-v_1}$.
4. $\frac{1-\pi}{\pi}\frac{v_2-1}{1-v_1}\psi > 1$.

Considere ahora la siguiente función de utilidad: $u(x) = -e^{-rx}$, con $r > 0$. Responda:

a) A medida que aumenta su riqueza inicial w, ¿cómo cambia la cantidad γ del activo riesgoso?

b) A medida que aumenta su riqueza inicial w, ¿cómo cambia el ratio γ/w?

1) $X_2 - X_1 = \gamma(V_2-1) - \gamma(V_1-1)$

$$\underbrace{X_2 - X_1}_{\text{cte}} = \underbrace{\gamma}_{\text{cte}}\underbrace{(V_2 - V_1)}_{>0},$$

$\frac{\partial(X_2-X_1)}{\partial\gamma} > 0$ // } lo mismo que probar que es cte (se mueven en la misma dirección)

2) $$\frac{x_2}{x_1} = \frac{w + r(v_2 - 1) \cdot 1/w}{w + r(v_1 - 1) \cdot 1/w}$$

$$\partial\left(x_2/x_1\right) / \partial\left(r/w\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{1 + \frac{r}{w}\overbrace{(v_2 - 1)}^{>0}}{1 + r/w\underbrace{(v_1 - 1)}_{<0}}$$

$\Big\}$ $\partial\left(x_2/x_1\right) / \partial\left(r/w\right) > 0$

son ctes.

3) $$\max_{\{r\}} \ \pi \cdot u(w + r(v_1 - 1)) + (1 - \pi)\, u(w + r(v_2 - 1))$$

$\underline{\text{CPO}}$ (∂r): $\pi\, u'(x_1) \cdot (v_1 - 1) + (1 - \pi)\, u'(x_2)(v_2 - 1) = 0$

$$\Rightarrow \frac{u'(x_1)}{u'(x_2)} = \frac{1 - \pi}{\pi} \cdot \frac{v_2 - 1}{1 - v_1} \quad //$$

4) $$\underbrace{\frac{1 - \pi}{\pi} \cdot \frac{v_2 - 1}{1 - v_1}}_{} = \psi > 1$$

$$(1 - \pi)(v_2 - 1) > \pi(1 - v_1)$$

$$(1 - \pi)\underbrace{(v_2 - 1)}_{>0} + \pi\underbrace{(v_1 - 1)}_{<0} > 0 \quad //$$

a) $u(x) = -e^{-rx}$

$u'(x_1) = r e^{-rx_1}$

$u'(x_2) = r e^{-rx_2}$

$$\frac{u'(x_1)}{u'(x_2)} = e^{r(x_1 - x_2)} = \psi > 1 \quad / \log$$

$$r \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\text{cte}} = \ln(\psi)$$

cte
y no depende de r ni w. } r tampoco

Ante $\uparrow w \rightarrow r$ no cambia $(x_1 - x_2)$ se mueve = al r.

$$\frac{\partial r}{\partial w} = 0$$

b) $\frac{r}{w}$ r } no cambia con w
w } aumenta } $\frac{\partial (r/w)}{\partial w} < 0$ //