Microeconomía I
Ayudantía 10

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

Pregunta 1

Considere un juego entre dos compradores. Cada jugador ofrece un precio por un bien, $b_i \geq 0$, $i = 1, 2$. Los precios son observados y el comprador con el mayor precio es declarado el ganador. Si hay un empate el jugador 1 es declarado ganador. El jugador que gana compra el bien por el precio que ofreció y el que no gana no paga nada.
Haremos los siguientes supuestos:

(1) Los tipos de los compradores (las valoraciones por el bien) θ_1, θ_2 son sacados independientemente de una distribución uniforme en $[0, 1]$.

(2) El precio que ofrece i es de la forma $b_i(\theta_i) = \alpha_i \theta_i$, donde $\alpha_i \in (0, 1]$. Esto implica que el jugador i ofrece una fracción α_i de su valoración. Cada jugador conoce lo anterior.

Responda lo siguiente:

a) Plantee el problema de cada jugador, derive las condiciones óptimas y verifique que el perfil de estratégias propuesto $b_i(\theta_i) = \theta_i/2$ es equilibrio Nash-Bayesiano asumiendo que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$.

b) Muestre que la utilidad esperada del subastador es $1/3$.

c) Muestre que si la subasta es a segundo precio la utilidad esperada del subastador es $1/3$ (también).

Pregunta 2

Considere el juego del bien público visto en clases. Suponga que existen $I > 2$ jugadores y que el bien público es provisto (con beneficio 1 para todos los jugadores) solo si al menos $K \in \{1, \cdots, I\}$ jugadores contribuyen. Los costos de los jugadores $\theta_1, \cdots, \theta_I$ son sacados independientemente de la distribución P en $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, donde $\underline{\theta} < 1 < \overline{\theta}$.
Responda lo siguiente.

a) Generalice el equilibrio Bayesiano visto en clases.

b) Suponga que $K > 2$. Muestre que siempre existe un equilibrio trivial en donde nadie contribuye. Asuma que $\underline{\theta} > 0$. Derive un equilibrio Bayesiano más "interesante".

Pregunta 3

El valor de un bien público es 1 para todos los jugadores $i = 1, \cdots, I$. El tiempo es continuo y la tasa de interés es r. El costo de cada jugador c de proveer el bien público es distribuido de acuerdo a la función de distribución acumulada P en $[0, 1]$. Los tipos de los jugadores son independientes y el bien público es provisto si al menos un agente lo provee. El bien es provisto la primera vez que al menos un individuo decide contribuir. Concentrese en el equilibrio en estratégias puras simétrico. Muestre que el periodo $s(c)$ en el cual un jugador con costo c provee el bien público es creciente en c.

Pregunta 4

Suponga que existen dos firmas 1 y 2. La firma 1 produce un producto x_1 mientas que la firma 2 produce un producto x_2 o y_2. El producto x_2 es similar al producto x_1 y el y_2 es una línea diferente de producto. El producto que produce la firma 2 es información privada de la firma 2. Por lo tanto tenemos que $N = \{1, 2\}$, $\Theta_1 = \{x_1\}$, $\Theta_2 = \{x_2, y_2\}$. Cada firma debe elegir el precio del producto que produce y esta es una decisión estratégica. La compañia $i = 1, 2$ puede elegir un precio bajo a_i o alto b_i. Luego, $S_i = \{a_i, b_i\}$. Las probabilidades que otorga la compañia 1 sobre el tipo de la comañia 2 vienen dadas por $p_1(x_2) = 0{,}6$ y $p_1(y_2) = 0{,}4$. Los pagos de las firmas dadas sus decisiones son:

Cuadro 1: Pagos para x_1 y x_2

1	2	
	a_2	b_2
a_1	1,2	0,1
b_1	0,4	1,3

Cuadro 2: Pagos para x_1 y y_2

1	2	
	a_2	b_2
a_1	1,3	0,4
b_1	0,1	1,2

Obtenga un equilibrio Nash-Bayesiano.

1 a) El problema del comprador 1 es maximizar su utilidad.

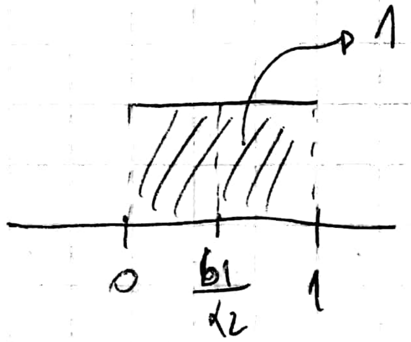
$$\max_{b_1 \geq 0} \; (\theta_1 - b_1)\, P\{ b_2(\theta_2) \leq b_1 \}$$

Como $b_2(\theta_2) = \alpha_2 \theta_2$ y $\theta_2 \in [0,1]$, note que $\max\{ b_2(\theta_2) \} = \alpha_2$.

El jugador conoce esto y $\therefore b_1 \in [0, \alpha_2]$. Adicionalmente:

$$\begin{aligned} P\{ b_2(\theta_2) \leq b_1 \} &= P\{ \alpha_2 \theta_2 \leq b_1 \} \\ &= P\left\{ \theta_2 \leq \frac{b_1}{\alpha_2} \right\} \\ &= \frac{b_1}{\alpha_2} \quad (¿) \text{ por qué} \end{aligned}$$

$$F(\theta) = \begin{cases} \theta \,, & \theta \in [0,1] \\ \cdot & \\ \cdot & \end{cases}$$



$\therefore$ El problema se reduce a:

$$\max_{b_1 \in [0, \alpha_2]} \; (\theta_1 - b_1) \frac{b_1}{\alpha_2}$$

Luego, para una solución interior:

CPO: $\dfrac{\theta_1}{\alpha_2} - \dfrac{2b_1}{\alpha_2} = 0 \rightarrow b_1 = \dfrac{\theta_1}{\alpha_2}\dfrac{\alpha_2}{2} = \dfrac{\theta_1}{2}$

Luego, $b_1 = \dfrac{\theta_1}{2}$ si $\dfrac{\theta_1}{2} \leq \alpha_2$.

Si $\frac{\theta_1}{2} > \alpha_2$, la solución no será interior y ∴

$b_1 = \alpha_2$ si $\frac{\theta_1}{2} > \alpha_2$ (es decir, la restricción sobre b_1 está activa en este caso)

De lo anterior:

$$b_1(\theta_1) = \begin{cases} \frac{\theta_1}{2} & \text{si } \frac{\theta_1}{2} \leq \alpha_2 \\ \alpha_2 & \text{si } \frac{\theta_1}{2} > \alpha_2 \end{cases}$$

Análogamente:

$$b_2(\theta_2) = \begin{cases} \frac{\theta_2}{2} & \text{si } \frac{\theta_2}{2} \leq \alpha_1 \\ \alpha_1 & \text{si } \frac{\theta_2}{2} > \alpha_1 . \end{cases}$$

Supongamos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$:

$$b_1(\theta_1) = \begin{cases} \frac{\theta_1}{2} & \text{si } \frac{\theta_1}{2} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{\theta_1}{2} > \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \quad b_1(\theta_1) = \frac{\theta_1}{2} \quad \forall \theta_1 \in \Theta_1$$

Análogamente,

$$b_2(\theta_2) = \frac{\theta_2}{2} \quad \forall \theta_2 \in \Theta_2$$

Esto implica que $\left(\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2}\right)$ $\forall \theta_1 \in \Theta_1$, $\forall \theta_2 \in \Theta_2$ es un equilibrio de Nash Bayesiano del juego (cuando $\alpha_1, \alpha_2 = \frac{1}{2}$).

1b) $E \max\left\{\frac{V_1}{2}, \frac{V_2}{2}\right\} = \int_0^1 \int_0^1 \max\left\{\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right\} dv_1 \, dv_2$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^{V_2} V_2 \, dV_1 + \int_{V_2}^1 V_1 \, dV_1 \right] dV_2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[V_2^2 + \frac{V_1^2}{2} \Big|_{V_2}^1 \right] dV_2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(V_2^2 + \frac{1}{2} - \frac{V_2^2}{2} \right) dV_2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{V_2^2}{2} \right) dV_2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{V_2^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \;//$$

[Recuerde que $E\, u(x,y) = \iint u(x,y) \cdot f(x,y) \, dx \, dy$.]

1c) En clases vimos que si la subasta es a segunda precio es estrategia dominante ofertar la verdadera valoración. Luego, en este caso el subastador obtendrá:

$$E \min\{V_1, V_2\} = \int_0^1 \int_0^1 \min\{V_1, V_2\}\, dV_1\, dV_2$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{V_2} V_1\, dV_1 + \int_{V_2}^1 V_2\, dV_1 \right] dV_2$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{V_1^2}{2}\Big|_0^{V_2} + V_2 V_1 \Big|_{V_2}^1 \right] dV_2 = \int_0^1 \left[\frac{V_2^2}{2} + V_2 - V_2^2 \right] dV_2$$

$$= \int_0^1 \left[V_2 - \frac{V_2^2}{2} \right] dV_2 = \left[\frac{V_2^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{V_2^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2a) Recuerde que cada jugador deriva un beneficio de 1 si al menos uno de ellos pone el bien público y 0 si nadie lo hace. Los costos de proveer son c_i, $i = 1,2$

~~[illegible]~~ Buscamos un equilibrio donde cada jugador contribuye si su costo es menor o ~~[illegible]~~ igual a c^*.

Para que el jugador i prefiera contribuir $c_i \leq c^*$

y el jugador con costo c^* debe estar indiferente. Debemos tener que:

$c^* =$ ~~[illegible]~~ prob (ningún otro jugador contribuye)

$c^* = (1 - P(c^*))^{I-1}$ (por independencia)

Note que si $c^* = \underline{\theta}$:

$\underline{\theta} = (1 - 0)^{I-1} = 1$ (pero sabemos que $\underline{\theta} < 1$)

Luego, si ~~θ~~ c^* aumenta el lado izquierdo aumenta y el lado derecho disminuye, es decir, el lado izquierdo es creciente y el derecho decreciente en c^*

$\therefore \exists$ un equilibrio en $(\underline{\theta}, 1)$. ~~[illegible]~~ Este c^* es un equilibrio Bayesiano.

26) Suponga que $K \geq 2$ y que todos los jugadores menos i juegan la estrategia de nunca contribuir. Luego, sin importar la estrategia del jugador i, el proyecto nunca será completado. ∴ los pagos de contribuir y no contribuir son $-c_i$ y 0 respectivamente. Esto implica que no contribuir es una mejor ~~respuesta~~ respuesta //

También podemos encontrar un equilibrio Bayesiano simétrico donde el jugador i contribuye si y solo si

$c_i \leq c^*$. Nuevamente resolvemos para el c^* que hace que el jugador con costo c^* esté exactamente indiferente, esto es, que su costo c^* debe ser el beneficio de la probabilidad añadida de completar el proyecto.

El jugador i se beneficia de la contribución si y solo si <u>exactamente</u> $K-1$ otros tienen costo menor a c^*:

$$c^* = \binom{I-1}{K-1} P(c^*)^{K-1} (1-P(c^*))^{I-K}$$

donde $\binom{I-1}{K-1}$ denota el coeficiente binomial:

$$\binom{I-1}{K-1} = \frac{(I-1)!}{(K-1)!\,(I-K)!}$$ (Nota: ocupamos la distribución binomial que nos da las

diferentes formas de distribuir [illegible] exactamente $K-1$ "éxitos" ($K-1$ con costo menor a c^*) en una secuencia de $I-1$ individuos sacados independientemente) note que cada experimento es un ~~ ~~ ensayo Bernoulli: "Tiene costo menor o no a c^*" //

3) Suponga que tenemos un equilibrio simétrico donde un jugador con costo c provee el bien en el periodo $s(c)$ si no ha sido todavía provisto.

Tome $c_1 < c_2$

Si $s(c_2) < s(c_1)$, como el jugador 2 prefiere proveer ahora:

$$1 - c_2 \geq E\left(\begin{matrix}\text{utilidad cuando alguien} \\ \text{más lo provee en } (s(c_2), s(c_1))\end{matrix}\right) + p(1 - c_2)e^{-r\Delta t}$$

donde p es la probabilidad de que nadie más provee el bien antes de $s(c_1)$.

Análogamente, el jugador 1 prefiere proveer después:

$$1 - c_1 \leq E\left(\quad\right) + p(1 - c_1)e^{-r\Delta t}$$

Restando tenemos que

$$c_1 - c_2 \geq p e^{-r\Delta t}(c_1 - c_2)$$

$$\rightarrow \boxed{c_1 \geq c_2} \rightarrow \text{ si } s(c_1) > s(c_2) \rightarrow c_1 \geq c_2$$

Informalmente, si un jugador con costo c_1 prefiere proceder en c_1 pero no en $c_1-\varepsilon$, entonces es indiferente en proceder en c_1, esto es, la ganancia por retrasar el gasto se compensa por el costo de obtener el bien después.

Luego, el jugador tipo c_2 tiene un beneficio esperado mayor por retrasar el gasto, así en el periodo $s(c_1)$ preferirá continuar esperando. //

4) Derivemos las utilidades esperadas:

Denote $U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) :=$ la utilidad esperada del agente tipo x_1 (que pertenece al jugador 1) cuando este jugador juega a_1 y el tipo x_2 e y_2 del jugador 2 juegan a_2 y b_2 respectivamente. Entonces:

$$U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) = p_1(x_2)\, u(x_1, x_2, a_1, a_2)$$
$$+ \; p_1(y_2)\, u(x_1, y_2, a_1, b_2)$$
$$= 0{,}6 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0$$
$$= 0{,}6$$

$$U_{x_1}(a_1, b_2, a_2) = 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4$$

$$U_{x_1}(b_1, a_2, b_2) = 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4$$

$$U_{x_1}(b_1, b_2, a_2) = 0{,}6 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0 = 0{,}6$$

Luego,

$\cancel{U_{X_2}(b_1, a_2, b_2) = 0, 4}$

$U_{X_2}(a_1, a_2, b_2) = 2$

$U_{X_2}(a_1, b_2, b_2) = 1$

$U_{Y_2}(a_1, a_2, b_2) = 4$

$U_{Y_2}(a_1, a_2, a_2) = 3$

Luego, $U_{X_1}(a_1, a_2, b_2) > U_{X_1}(b_1, a_2, b_2)$

$U_{X_2}(a_1, a_2, b_2) > U_{X_2}(a_1, b_2, b_2)$

$U_{Y_2}(a_1, a_2, b_2) > U_{Y_2}(a_1, a_2, a_2)$

$\therefore$ el perfil (a_1, a_2, b_2) jugados por X_1, X_2 e Y_2 respectivamente es un equilibrio de Nash del juego //