Profesor	: Eduardo Engel	Abril 24, 2023
Ayudantes	: Miguel Del Valle y Benjamín Peña	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2023	
Control	: No. 3	

1. **Sesgo hacia el presente y activos ilíquidos**

Un individuo con riqueza total W vive tres períodos. Su utilidad en el primer período es $\log(C_1) + \eta[\log(C_2) + \log(C_3)]$, su utilidad en el segundo período es $\log(C_2) + \eta \log(C_3)$ y su utilidad en el último período es $\log(C_3)$, donde C_t denota el consumo en el período t, $t = 1, 2, 3$ y $\eta < 1$ captura la inconsistencia dinámica de los planes de consumo del individuo, una inconsistencia de la cual está consciente. El individuo puede endeudarse/ahorrar a una tasa de interés igual a cero.

(a) Encuentre la trayectoria óptima de consumo cuando el individuo puede comprometer en $t = 1$ su consumo en $t = 2$ y $t = 3$.

En la realidad, el individuo no puede comprometer su consumo futuro y el resultado de (a) es algo a lo cual aspira pero que no podrá lograr sin una política pública diseñada para tal efecto.

(b) Encuentre la trayectoria óptima de consumo cuando el individuo no puede comprometer consumo futuro. Compare con la trayectoria de (a) y comente las diferencias.

A continuación vemos que si agregamos una opción de ahorro que castiga retiros tempranos, el individuo puede lograr la trayectoria de consumo óptima con compromiso de (a) a pesar del problema de inconsistencia din 'amica.

Suponga ahora que el individuo puede comprar un activo (activo *ilíquido* en lo que sigue, invertir en APV en Chile es un ejemplo) en $t = 1$ con una tasa de retorno negativa ρ si se vende en el período 2 y un retorno igual a cero si se retira en el período 3. Es decir, si compra x en el período 1 debe elegir entre recibir $(1-\rho)x$ en el período 2 y recibir x en el período 3. Suponga también que el individuo no puede endeudarse en el período 2 contra ingresos que tendrá en el período 3, incluyendo aquellos del activo ilíquido.

(c) Encuentre la trayectoria óptima de consumo cuando el activo ilíquido está disponible. Determine cuánto invierte el individuo en el activo ilíquido.

(d) Explique por qué el valor de ρ es importante para que invertir en el activo ilíquido permita lograr la trayectoria óptima con compromiso de (a). En particular, derive una condición sobre ρ que asegure que el individuo **no** va a vender en el período 2 lo que invierte en el activo ilíquido en el período 1.

(e) Concluya que, visto desde el período $t = 1$, si ρ es suficientemente grande, introducir un activo ilíquido mejora el bienestar del individuo a pesar de que su retorno está dominado por el activo líquido habitual. Explique esta aparente contradicción.

Solución

(a) La trayectoria óptima que se puede obtener cuando se puede comprometer en $t = 1$ es la que se obtiene de resolver el siguiente problema:

$$\max_{C_1,C_2,C_3} \quad \log(C_1) + \eta\log(C_2) + \eta\log(C_3)$$

$$\text{s.a} \quad C_1 + C_2 + C_3 = W$$

La solución a este problema es $C_1 = W/(1+2\eta)$ y $C_2 = C_3 = \eta W/(1+2\eta)$.

(b) Note que, dado el enunciado del problema, el individuo es sofisticado, es decir, está consciente de la tensión entre sus preferencias y las preferencias de sus futuros yo. Por lo tanto, la solución correcta usa inducción hacia atrás: el individuo del período 1 elige C_1 consciente de que el individuo del período 2 ahorra menos y gasta más de lo que al individuo del período 1 le gustaría. (En el caso particular considerado en este problema, la trayectoria de consumo es la misma para individuos sofisticados e individuos ingenuos, pero conceptualmente hay una diferencia fundamental).

El individuo del período 3 consume todo lo que tiene. El individuo del período 2 resuelve el problema:

$$\max_{C_2,C_3} \quad \log(C_2) + \eta\log(C_3),$$

$$\text{s.t} \quad C_2 + C_3 = W - \overline{C}_1,$$

donde $\overline{C}_1$ es el consumo que eligió en el período 1 (y por lo tanto el individuo del período 2 lo toma como dado). La solución del problema es:

$$C_2(\overline{C}_1) = \frac{W - \overline{C}_1}{1+\eta}, \quad C_3(\overline{C}_1) = \frac{\eta(W - \overline{C}_1)}{1+\eta}.$$

Por lo tanto, el problema que debe resolver el individuo sofisticado del período 1 es:

$$\max_{C_1} \quad \log(C_2) + \eta\log(C_2(C_1)) + \eta\log(C_3(C_1))$$

lo que implica que el consumo óptimo en el período 1 es $C_1^* = \frac{W}{1+2\eta}$. Finalmente, evaluando $C_2(.)$ y $C_3(.)$ en C_1^*, obtenemos que la trayectoria de consumo es:

$$C_1^* = \frac{W}{1+2\eta}, \quad C_2^* = \frac{2\eta W}{(1+2\eta)(1+\eta)}, \quad C_3^* = \frac{2\eta^2 W}{(1+2\eta)(1+\eta)}.$$

(c) La trayectoria óptima de consumo cuando el activo ilíquido está disponible es la que encontramos en el ítem (a). Para que su futuro yo siga esta trayectoria, el agente puede invertir $C_3 = \eta W/(1+2\eta)$ en el activo ilíquido en el período 1. De esta manera, el individuo del período 2 solo tiene C_2 para gastar. Luego, eso es lo que invierte en el activo ilíquido en el período 1.

(d) El valor de ρ es importante ya que determina la penalización por vender el activo ilíquido antes de tiempo. Para que el individuo se pueda comprometer a una trayectoria de consumo a través del activo ilíquido, ρ tiene que ser lo suficientemente grande para asegurar que el castigo por vender antes de tiempo sea mayor al beneficio de tener el monto que había comprometido disponible para consumir.

En particular, para lograr nuestro objetivo se tiene que cumplir que el individuo del período 2 debe prefiera gastar C_2 a vender el activo ilíquido. Esto ocurre si y sólo si:

$$\log(C_2) + \eta \log(C_3) > \log(\widetilde{C}_2) + \eta \log(\widetilde{C}_3)$$

donde $(\widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3)$ denota la trayectoria de consumo cuando el activo ilíquido es vendido en el período 2 (y por lo tanto el individuo del período 2 recibe de vuelta $(1-\rho)C_3$).

Si el individuo del período 2 vende el activo ilíquido, su riqueza es:

$$\begin{aligned}
\widetilde{W} &= W - C_1 - C_3 + (1-\rho)C_3 \\
&= C_2 + (1-\rho)C_3 \\
&= \frac{\eta W}{(1+2\eta)} + \frac{(1-\rho)\eta W}{(1+2\eta)} \\
&= \frac{(2-\rho)\eta W}{(1+2\eta)}
\end{aligned}$$

que corresponde a la riqueza total, menos lo que consumió en el período 1, menos lo que invirtió en el activo ilíquido en el período 1, más lo que retira en el período 2 (con penalización). Por lo tanto, el individuo del período 2 decide consumir (utilizamos la solución al problema del individuo del período 2 del ítem (b)):

$$\widetilde{C}_2 = \frac{(2-\rho)\eta W}{(1+2\eta)(1+\eta)} \quad \widetilde{C}_3 = \frac{(2-\rho)\eta^2 W}{(1+2\eta)(1+\eta)}.$$

Por lo tanto el individuo no vende el activo ilíquido en el período 2 si

$$\rho > 2 - (1+\eta)\eta^{-\eta/(1+\eta)}.$$

Luego, comprometerse a la trayectoria óptima encontrada en (a) con el activo ilíquido sólo es viable si ρ es lo suficientemente grande. Por ejemplo, si $\eta = \frac{1}{2}$, la condición anterior dice que $\rho > 0.11$. En cambio, si $\eta = 0.1$, $\rho > 0.644$. Como es de esperar, mientras mayor es el sesgo hacia el presente se requiere un valor mayor de ρ.

(e) Como vimos en la parte (b), si ρ es lo suficientemente grande, entonces todas las versiones del individuo seguirán la trayectoria óptima del individuo del período 1 y, por lo tanto, desde la perspectiva del individuo del período 1, el activo ilíquido mejora el bienestar. Esto viene del hecho que el activo ilíquido actúa como un mecanismo de compromiso, haciendo que la trayectoria óptima del individuo del período 1 sea también óptima para sus futuros yo. De otro modo, los futuros yo se desviarían de esta trayectoria, producto de la inconsistencia temporal.