Microeconomía I
Ayudantía 7

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

Pregunta 1

Para cada uno de los siguientes juegos, encuentre los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

Juego 1

		Jugador 2	
		L	R
Jugador 1	T	1,4	4,3
	C	2,0	1,2
	B	1,5	0,6

Juego 2

		Jugadora 2		
		E	F	G
Jugadora 1	A	2,4	3,3	6,0
	B	4,0	2,4	4,2
	C	3,3	4,2	3,1
	D	3,6	1,1	2,6

Pregunta 2

Existen dos países indexados con $i = \{1, 2\}$, donde cada uno emite e_i toneladas de gases contaminantes que le permiten tener un ingreso de A_i por tonelada de gas emitido. La contaminación total E_i de cada país depende de las emisiones propias y de las emisiones del país vecino, de tal forma que $E_i = e_i + k_i e_j$, con $0 \leq k \leq 1$. A su vez, esta contaminación genera problemas de salud en los habitantes de cada país, lo que genera costos de BE_i^2 para cada país i.

Asuma que cada uno de estos países elige simultáneamente la cantidad de gases que emite de tal manera de maximizar sus beneficios netos. ¿Cuál es el equilibrio de Nash?

Pregunta 3

Considere un juego simultáneo de n jugadores, en el cual cada jugador i debe elegir un nivel de esfuerzo $a_i \in [0, 1]$. El pago del jugador i está dado por

$$\pi_i(a_1, \ldots, a_n) = 4min\{a_1, \ldots, a_n\} - 2a_i$$

Encuentre todos los equilibrios de Nash.

Pregunta 4

En un país existe un continuo de ciudadanos, cada cual con una posición x favorita. La distribución de las posiciones favoritas de los ciudadanos está dada por una uniforme $U(x) \sim [0,1]$. Existen n candidatas, cada una eligiendo una posición x_i y atrayendo los votos de aquellos ciudadanos cuyas posiciones estén más cerca de su posición que a la de cualquier otra candidata. Si k candidatas eligen la misma posición, entonces cada una recibe una fracción $1/k$ de los votos que esa posición atrae. La función de utilidad de la candidata i cuando las posiciones de las candidatas son $(x_1, \ldots, x_n)$ es

$$u_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 3 & \text{si es la única ganadora de la elección.} \\ 2 & \text{si gana la elección empatando con alguien más.} \\ 1 & \text{si no se presenta a la elección.} \\ 0 & \text{si pierde la elección.} \end{cases}$$

a. Formule esta situación como un juego estratégico y encuentre el equilibrio cuando $n = 2$.

b. Muestre que no hay equilibrio cuando $n = 3$.

c. Asuma que $n = 2$ y que las candidatas solo pueden elegir posiciones $i/10$, con $i = 1, \ldots, 9$. Muestre que las estrategias extremas son dominadas. ¿Qué ocurre cuando iteramos?

Pregunta 1

Para cada uno de los siguientes juegos, encuentre los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

Juego 1

		Jugador 2	
		L	R
Jugador 1	T	1,4	4,3
	C	2,0	1,2
	~~B~~	~~1,5~~	~~0,6~~

dominadas estrictamente

Juego 2

		Jugadora 2		
		E	F	~~G~~
Jugadora 1	~~A~~	~~2,4~~	~~3,3~~	~~6,0~~
	B	4,0	2,4	~~4,2~~
	C	3,3	4,2	~~3,1~~
	~~D~~	~~3,6~~	~~1,1~~	~~2,6~~

Resultado útil:

sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_N^*)$ Eq. Nash en estr. mixtas

sea $\pi_i^* = \pi_i(\sigma^*)$

sea $\underbrace{s_{ij}, s_{ik}}_{\text{estrat. puras}} \in S_i$ tal que $\sigma_i^*(s_{ij}) > 0$

$\sigma_i^*(s_{ik}) > 0$

$\Rightarrow \pi_i(s_{ij}, \sigma^*_{-i}) = \pi_i(s_{ik}, \sigma^*_{-i}) = \pi_i^*$

Intuición

si en E.N una estrategia pura s_{ij} y

$$\pi_i(s_{ij}, \sigma^*_{-i}) > \pi_i(s_{ik}, \sigma^*_{-i})$$

$\Rightarrow$ yo podría aumentar mis pagos asignándole una mayor prob a s_{ij}, entonces yo aumentaría c/vez más y no sería EN el EN anterior, porque tendría incentivos a cambiarme a s_{ij}.

① Eliminar estrategias dominadas

Jugador 1 nunca escoge B si puede escoger C

		q	$1-q$
		L	R
p	T	1,4	4,3
$1-p$	C	2,0	1,2

Hay en E.N en estr. mixtas : $\left\{ \begin{pmatrix} T & C \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ q & 1-q \end{pmatrix} \right\}$

Jugador 2

• Pago esperado de jugar L y R

$$\underbrace{4p + 0\cdot(1-p)}_{\pi_2(L,\sigma^*_{-i})} = \underbrace{3p + 2(1-p)}_{\pi_2(R,\sigma^*_{-i})}$$

$$\Rightarrow p = 2 - 2p$$

$$\Rightarrow p = 2/3$$

Jugador 1

• Pago esperado de jugar T y C

$$\underbrace{q + 4(1-q)}_{\pi_1(T,\sigma^*_{-i})} = \underbrace{2q + 1 - q}_{\pi_1(C,\sigma^*_{-i})}$$

$$\Rightarrow q = 3/4$$

EQ. Nash en estr. mixtas para juego 1 $\left\{ \begin{pmatrix} T & C & B \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \right\}$

(2) Jugador 1: B domina a D, C domina a A
Jugador 2: G dominada

		q	$1-q$
		E	F
p	B	4, 0	2, 4
$1-p$	C	3, 3	4, 2

$$\text{EQ. Nash} \left\{ \begin{pmatrix} B & C \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & F \\ q & 1-q \end{pmatrix} \right\}$$

Jugador 1

$$4q + 2(1-q) = 3q + 4(1-q)$$
$$\Rightarrow q = 2/3$$

Jugador 2

$$0p + (1-p)3 = 4p + 2(1-p)$$
$$\Rightarrow p = 1/5$$

EQ Nash

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 0 & 1/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & F & G \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 2

Existen dos países indexados con $i = \{1, 2\}$, donde cada uno emite e_i toneladas de gases contaminantes que le permiten tener un ingreso de A_i por tonelada de gas emitido. La contaminación total E_i de cada país depende de las emisiones propias y de las emisiones del país vecino, de tal forma que $E_i = e_i + k_i e_j$, con $0 \leq k \leq 1$. A su vez, esta contaminación genera problemas de salud en los habitantes de cada país, lo que genera costos de BE_i^2 para cada país i.

Asuma que cada uno de estos países elige simultáneamente la cantidad de gases que emite de tal manera de maximizar sus beneficios netos. ¿Cuál es el equilibrio de Nash?

País 1

$$\pi_1(e_1, e_2) = A_1 e_1 - BE_1^2 \quad ; \quad E_1 = e_1 + k_1 e_2$$

$$\pi_1(e_1, e_2) = A_1 e_1 - B(e_1 + k_1 e_2)^2$$

max el π_1 para sacar la función de mejor respuesta

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial e_1} : \quad A_1 - 2B(e_1 + k_1 e_2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{e_1 = A_1/2B - k_1 e_2}$$

mejor respuesta de país 1

País 2

$$\pi_2(e_1, e_2) = A_2 e_2 - BE_2^2 \quad , \quad E_2 = e_2 + k_2 e_1$$

$$\pi_2(e_1, e_2) = A_2 e_2 - B(e_2 + k_2 e_1)^2$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial e_2} : \quad A_2 - 2B(e_2 + k_2 e_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{e_2 = \frac{A_2}{2B} - k_2 e_1}$$

mejor respuesta país 2

- El equilibrio de Nash será la intersección de ellas, reemplazar una en la otra.
- EN: no hay incentivos a moverse de su estrategia. Esto se da cuando c/jugador juega su mejor respuesta, dado que los otros juegan su mejor respuesta.

$\Rightarrow$ EQ. Nash:

$$e_1 = \frac{A_1}{2B} - \frac{k_1 A_2}{2B} - k_2 k_1 e_1$$

$$e_1 + k_2 k_1 e_1 = \frac{A_1 - k_1 A_2}{2B}$$

$$\Rightarrow \boxed{e_1 = \left(\frac{A_1 - k_1 A_2}{2B}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - k_2 k_1}\right)} \Big\} \text{ país 1}$$

$$\boxed{e_2 = \left(\frac{A_2 - K_2 A_1}{2B}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - K_2 K_1}\right)} \Big\} \text{país 2}$$

- calculamos E_1, E_2, etc.
- parecido a cournot
  ↳ el set de estrategias que puede jugar c/jugador es ∞

Pregunta 3

Considere un juego simultáneo de n jugadores, en el cual cada jugador i debe elegir un nivel de esfuerzo $a_i \in [0, 1]$. El pago del jugador i está dado por

$$\pi_i(a_1, \ldots, a_n) = 4min\{a_1, \ldots, a_n\} - 2a_i$$

Encuentre todos los equilibrios de Nash.

- nunca conviene esforzarse más que el mínimo, porque mi "ingreso" es el mismo, pero mi "costo" es mayor.
- siempre que hay alguien que se esfuerce más, esa persona va a tener incentivos a esforzarse menos y no será EN que hayan ≠ niveles de esfuerzo.

- EN: $(e, \ldots, e)$ tq $e \in [0,1]$ } todos se esfuerzan $e \in [0,1]$
  ↳ $\pi_i(e, \ldots e) = 4e - 2e = 2e$

- si $a_i = a > e$
  ↳ $\pi_i(e, \ldots, a, \ldots, e) = 4e - 2a < 2e$
  $e < a$ } menos pago

- si $a_i' = a' < e$
  ↳ $\pi_i(e, \ldots, a', \ldots, e) = 4a' - 2a' = 2a'$
  $2a' < 2e \Rightarrow e > a'$ } menos pago

- No hay incentivos a esforzarse más ni menos
  ↳ si alguien se desvía unilateralmente, le va peor.

$\Rightarrow (e, \dots, e)$ $e \in [0,1]$ es EQ. Nash. (son ∞, porque $e \in [0,1]$)

- PDQ son los únicos

sea $(a_1, \dots, a_n)$ es eq Nash tq $a_i \neq a_j$ } demostraremos por contradicción

↳ sea $a_{min} = \min\{a_1, \dots, a_n\}$

sea $a_K > a_{min}$

$\pi_K = 4a_{min} - 2a_K$

y si K juega a_{min}?

↳ $\pi_K(a_1, \dots, a_{min}, \dots, a_n) = 4a_{min} - 2a_{min} = 2a_{min}$

como $2a_{min} > 4a_{min} - 2a_K$

↳ no es EQ. porque jugador K puede elegir a_{min} y tener más beneficios.

- Demostramos que no puede haber otro EN tq $a_i \neq a_j$.

Entonces $(e, \dots, e)$ es el único EN.

Pregunta 4

En un país existe un continuo de ciudadanos, cada cual con una posición x favorita. La distribución de las posiciones favoritas de los ciudadanos está dada por una uniforme $U(x) \sim [0,1]$. Existen n candidatas, cada una eligiendo una posición x_i y atrayendo los votos de aquellos ciudadanos cuyas posiciones estén más cerca de su posición que a la de cualquier otra candidata. Si k candidatas eligen la misma posición, entonces cada una recibe una fracción $1/k$ de los votos que esa posición atrae. La función de utilidad de la candidata i cuando las posiciones de las candidatas son $(x_1, \dots, x_n)$ es

$$u_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 3 & \text{si es la única ganadora de la elección.} \\ 2 & \text{si gana la elección empatando con alguien más.} \\ 1 & \text{si no se presenta a la elección.} \\ 0 & \text{si pierde la elección.} \end{cases}$$

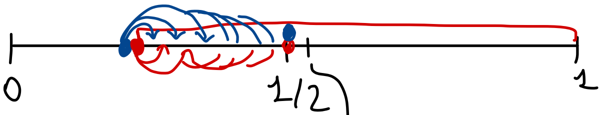
a. Formule esta situación como un juego estratégico y encuentre el equilibrio cuando $n = 2$.

b. Muestre que no hay equilibrio cuando $n = 3$.

c. Asuma que $n = 2$ y que las candidatas solo pueden elegir posiciones $i/10$, con $i = 1, \dots, 9$. Muestre que las estrategias extremas son dominadas. ¿Qué ocurre cuando iteramos?

a) • jugadores : n candidatas
• pagos dados por u_i
• estrategias : $x_i \in [0,1] \cup \{\text{no ir}\}$

• $N=2 \rightarrow$ EQ. Nash es $x_1 = x_2 = 1/2$



un poco más allá gana todo de $(1/2+\varepsilon, 1)$, pero pierde $(0, 1/2)$ y pierde la elección.

• Para demostrar matemáticamente:

$x_1 = 1/2$, $x_2 = a > 1/2$

y ver la cant. de votos de c/ candidata

votos de x_1 : $0 \leq x \leq \frac{a + 1/2}{2}$

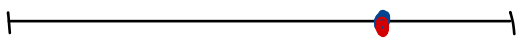
votos de x_2 : $\frac{a+1/2}{2} \leq x \leq 1$

$$\int_0^{(a+1/2)/2} f(x)\,dx \rightarrow F(x) = x \Big|_0^{(a+1/2)/2}$$

lo mismo.

b) $n=3$

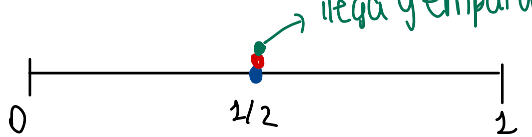
- ∄ EN tq una candidata compite y pierde → prefiere no presentarse
  ↳ las que compiten, deben empatar
- ∄ EN donde sólo una compite
  ↳ otra entraría en la misma posición y obtiene un pago mayor empatando



ya está mejor que si no se presenta } tb puede ganar, pero no es necesario demostrarlo

- ∄ EN donde dos compitan

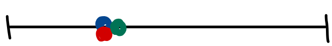
llega y empata



} tb la verde puede llevarse sólo de la 1ra si se pone más para allá

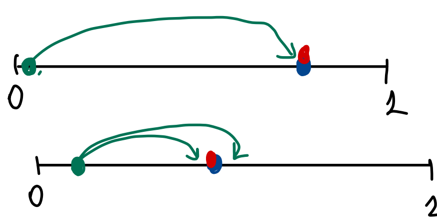
↳ la que no compite mejora su pago si elige $x = 1/2$

- ∄ EN donde las 3 son candidatas
  ↳ i) $x_1 = x_2 = x_3$



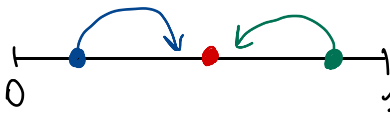
↳ todas tienen incentivos a desviarse

ii) $x_1 = x_2 \neq x_3$



} si las otras 2 están juntas a la otra le conviene moverse pegadita y llevarse los votos
[ ]

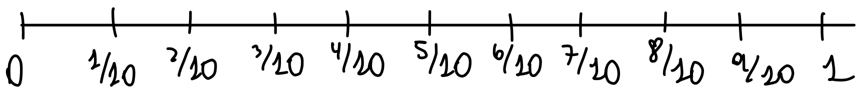
iii) $x_1 \neq x_2 \neq x_3$



las de los extremos tienen incentivos a moverse al medio

$\Rightarrow$ NO existen EN cuando $n=3$

c) $n=2$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1/10	2	0	0	0	0	0	0	0	2
5/10	3	3	3	3	2	3	3	3	3

} : 10

$x_i = \frac{5}{10}$ domina a jugar 1/10 y 9/10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2/10		2	3	3	3	3	3	2	
5/10	3	3	3	3	2	3	3	3	3

} : 10

$x_i = \frac{5}{10}$ domina a 2/10 y 8/10

Si uno tiene una estrategia continua llegamos a que el equilibrio es 1/2 y si uno quisiera que fuera discreta, que sea un set finito de estrategias, por iteración de estrategias estrictamente dominantes, también llegaríamos al EN donde ambas juegan 1/2. Eso es otro juego, porque el set de estrategias es distintos, pero se comportan de manera similar y lo resolvimos de manera distinta. Entonces para n=2, los extremos están estrictamente dominados y haciendo iteración de estrategias estrict dominadas, llegamos a que el equilibrio para ambas es jugar 1/2.