Pregunta 1

Pregunta 1

Suponga que $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ representa a preferencias localmente no saciadas. Demuestre que la función de utilidad indirecta $v(p, \omega)$ es cuasiconvexa.

Sea v la f. de utilidad indirecta. Suponga p, $\bar{p}$, ω y $\bar{\omega}$ tales que $v(p,\omega) > v(\bar{p},\bar{\omega})$.

Ello implica que $u(x(p,\omega)) > u(x(\bar{p},\bar{\omega}))$. Ello implica que $x(\bar{p},\bar{\omega}) < p \cdot x(p,\omega)$. Por lo tanto, $x(p,\bar{\omega})$ no esta en la recta presupuestaria a precios p y renta ω. Como $\succsim$ es l.n.s. se cumple la ley de Walras, por lo que $x(p,\omega) \cdot p = \omega$. Luego

$$\lambda x(p,\omega) + (1-\lambda) x(\bar{p},\bar{\omega}) \in B(p,\omega), \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Con ello, $u(\lambda x(p,\omega) + (1-\lambda) x(\bar{p},\bar{\omega})) \leq v(p,\omega) = \text{máx}\{v(p,\omega), v(\bar{p},\bar{\omega})\}$.

Pregunta 2

Suponga una economía con dos bienes (x_1 y x_2), los que tienen precios $p = (p_1, p_2)$. Un agente posee renta igual a ω y sus preferencias $\succsim$ pueden ser representadas por una función de utilidad CES dada por

$$u(x_1, x_2) = \left[\alpha_1 x_1^\theta + \alpha_2 x_2^\theta\right]^{1/\theta},$$

donde α_1, α_2 y θ son escalares positivos.

a) Muestre que las preferencias son localmente no saciadas y, por lo tanto, el agente gastará todo su ingreso.

b) Resuelva el problema de maximización de utilidad del agente. Caracterice la demanda marshalliana y la función de utilidad indirecta.

c) Muestre que la demanda marshalliana es homogénea de grado cero.

d) Muestre que la función de utilidad indirecta es homogénea de grado cero.

e) Muestre que $v(p, \omega)$ es estrictamente creciente en ω.

a) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{\theta}(\alpha_1 x_1^\theta + \alpha_1 x_2^\theta)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \cdot \theta \alpha_1 x_1^{\theta-1} > 0$

$\frac{\partial u}{\partial x_2} = (\alpha_1 x_1^\theta + \alpha_2 x_2^\theta)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \alpha_2 x_2^{\theta-1} > 0$

mientras $x_1 > 0$ v $x_2 > 0$

si $x_1 = x_2 = 0$, $u(0,0) = 0$. Luego, no hay máximos locales. $\Rightarrow$ l.n.s.

Dado que $\succsim$ son l.n.s., se cumplirá la ley de Walras.

b) $\max \left[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho\right]^{1/\rho}$

s.a $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$

$$\mathcal{L} = \left[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho\right]^{1/\rho} + \lambda\left[R - p_1 x_1 - p_2 x_2\right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho}\left[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \rho \quad \alpha_1 x_1^{\rho-1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho}\left[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \rho \cdot \alpha_2 x_2^{\rho-1} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\alpha_1 x_1^{\rho-1}}{\alpha_2 x_2^{\rho-1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\left(x_1/x_2\right)^{\rho-1} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$x_1 = \underbrace{\left[\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1}\right]^{\frac{1}{\rho-1}}}_{\Omega} x_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - R$$

$$p_1 \Omega \, x_2 + p_2 x_2 = R$$

$$x_2 (p_1 \Omega + p_2) = R$$

$$x_2^* = \frac{R}{p_1 \Omega + p_2} = \frac{R}{p_1 \left[\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1}\right]^{\frac{1}{\rho - 1}} + p_2}$$

$$x_1^* = \frac{R}{p_1 \Omega + p_2} \cdot \Omega$$

$$x_1^* = \frac{R}{p_1 + \frac{p_2}{\Omega}} = \frac{R}{p_1 + p_2 \left[\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1}\right]^{\frac{1}{1-\rho}}}$$

$$v(p,R) = \left[\alpha_1 \left(\frac{R}{p_1 \left[\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1}\right]^{\frac{1}{\rho - 1}} + p_2} \right)^{\rho} + \alpha_2 \left(\frac{R}{p_1 + p_2 \left[\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1}\right]^{\frac{1}{1-\rho}}} \right)^{\rho} \right]^{1/\rho}$$

c) $$x_1(\lambda p, \lambda w) = \frac{\lambda R}{\lambda p_1 + \lambda p_2 \left[\frac{\lambda p_1 \alpha_2}{\lambda p_2 \alpha_1}\right]^{\frac{1}{1-\rho}}} = \frac{R}{p_1 + p_2 \left(\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}} = x_1(p,w)$$

$$x_2(\lambda p, \lambda w) = \frac{\lambda R}{\lambda p_1 \left[\frac{\lambda p_1 \alpha_2}{\lambda p_2 \alpha_1}\right]^{\frac{1}{\rho - 1}} + p_2 \cdot \lambda} = \frac{R}{p_1 \left(\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1}\right)^{\frac{1}{\rho - 1}} + p_2} = x_2(p,w).$$

Luego, $x(p,w)$ es homogénea de grado cero.

d) $$v(\lambda p, \lambda w) = u(x(\lambda p, \lambda w)) = u(x(p,w)) = v(p,w)$$

e) $$v(p,R) = \left[\alpha_1 \left(\frac{1}{p_1 \left[\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1}\right]^{\frac{1}{\rho - 1}} + p_2} \right)^{\rho} + \alpha_2 \left(\frac{1}{p_1 + p_2 \left[\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1}\right]^{\frac{1}{1-\rho}}} \right)^{\rho} \right]^{1/\rho} R$$

Pregunta 3

Suponga que $u(x)$ es una función de utilidad representa preferencias localmente no saciadas, siendo u estrictamente cuasicóncava. Muestre que si $u(x)$ es homogénea de grado uno, entonces la demanda marshalliana $x(p,\omega)$ y la función de utilidad indirecta $v(p,\omega)$ son homogéneas de grado uno en ω.

Si $u(x)$ es homogénea de grado 1 entonces $\lambda u(x) = u(\lambda x)$ $\forall \lambda > 0$.

$\lambda x(p,w)$ es factible con p y λw.

Notar que $\lambda p \cdot x(p,w) \leq \lambda w$. Sea $\bar{x}$ una canasta tal que $p \cdot \bar{x} \leq \lambda w$. Luego, $p \cdot (\lambda^{-1} \bar{x}) \leq w$. Ello implica que $u(\lambda^{-1}\bar{x}) \leq u(x(p,w))$. Por la homogeneidad se tiene que $u(\bar{x}) \leq \lambda u(x(p,w)) = u(\lambda x(p,w))$. Dado que $\bar{x}$ es una canasta cualquiera en $B(p,\lambda w)$ y $u(\lambda x(p,w)) \geq u(\bar{x})$, siendo $\lambda x(p,w)$ factible a precios p y renta λw, $\lambda x(p,w) = x(p,\lambda w)$. → demanda es homogénea de grado uno

Luego, $v(p,\lambda w) = u(x(p,\lambda w)) = u(x(p,w)\cdot\lambda) = \lambda u(x(p,w)) = \lambda v(p,w)$.

homogénea de grado uno

Pregunta 4

Sea $\succsim$ una relación de preferencias definida en $\mathbb{R}^3_+$. Suponga que $\succsim$ puede ser representada por la siguiente función de utilidad

$$u(x,y,z) = -(x-y-z)^2.$$

a) Dado precios $p \gg 0$ y renta $M > 0$, ¿qué puede decir acerca de la existencia y unicidad de la demanda Marshalliana?

b) ¿Se cumple la Ley de Walras?

a) $B(p,w)$ es compacto y $u(\cdot)$ es continua → Teorema de Weierstrass nos asegura que $x(p,w)$ existe

No es única → ejemplos → $(2,1,1)$

→ $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

→ $(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

b) No necesariamente → $\succsim$ no es l.n.s.

→ Si tenemos renta M es posible consumir $(0,0,0)$ con lo que no se consume nada de la renta.

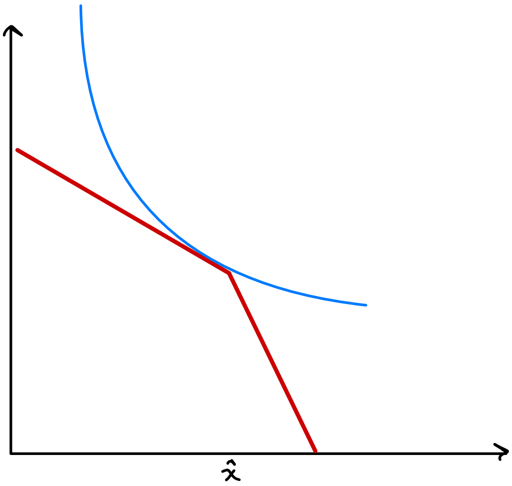
Pregunta 5 (Solemne 2022)

Considere una economía de solamente dos bienes: x y el bien compuesto y cuyo precio es $p_y = 1$. Supongamos que una persona tiene preferencias $\succsim$ racionales, continuas y localmente no saciadas.

a) El precio del bien x es $p_x = 1$ por cada unidad hasta un nivel de consumo $\hat{x}$ (se tiene que $\hat{x} < 2\omega$). Todo lo que se consume más allá de $\hat{x}$, se paga a precio $p'_x = 2$ (solo el exceso se paga a p'_x). Demuestre la siguiente afirmación o dé un contraejemplo (puede ser un contraejemplo gráfico): "Si $\succsim$ es estrictamente convexa, la demanda marshalliana es siempre un único punto."

b) El precio del bien x es $p_x = 1$ por cada unidad si el consumo es menor a $\hat{x}$ (se tiene que $\hat{x} < 2\omega$). Si el consumo supera $\hat{x}$, todo lo consumido se paga a precio $p_x = 2$. Demuestre la siguiente afirmación o dé un contraejemplo (puede ser un contraejemplo gráfico): "Si $\succsim$ es estrictamente convexa, la demanda marshalliana es siempre un único punto."

a)



El conjunto presupuestario es convexo.

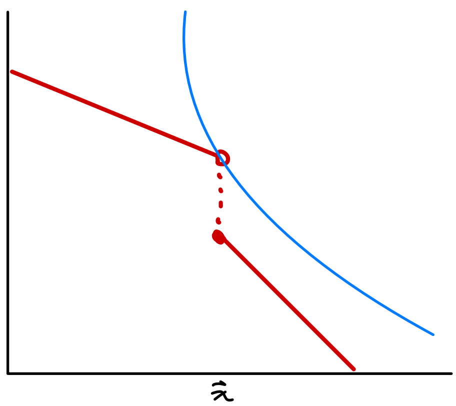
Las preferencias l.n.s. aseguran la ley de Walras.

Si $\succsim$ es estric. convexa, $u(\cdot)$ es estrictamente cuasicóncava.

Suponga que existen dos demandas marshallianas $x(p,w)$ $\wedge$ $\bar{x}(p,w)$ tales que $x \neq \bar{x}$.
Dado que $B(p,w)$ es convexo, $\lambda x + (1-\lambda)\bar{x} \in B(p,w)$.
Por la cuasiconcavidad estricta,
$u(\lambda x + (1-\lambda)) > \min(u(x), u(\bar{x}))$, por lo que
x $\wedge$ $\bar{x}$ no maximizan $u(\cdot)$ dentro de $B(p,w)$.
Contradicción.

$x(p,w)$ es única.

b)



→ el conjunto presupuestario no es convexo ni compacto.

→ la demanda marshalliana no necesariamente existe.

Pregunta 6 (Solemne 2021)

Considere un consumidor que tiene preferencias $\succsim$ racionales y continuas y busca maximizar sus preferencias. La siguiente figura muestra su conjunto presupuestario.

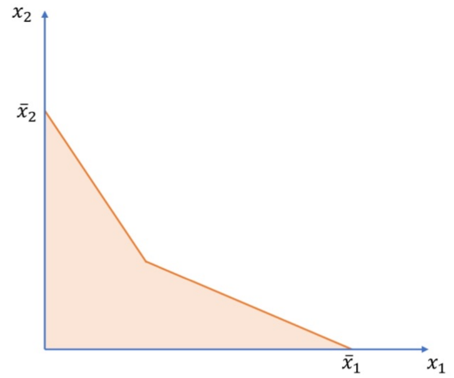


Figura 1: Conjunto presupuestario.

a) Para la siguiente afirmación dé una demostración o un contra-ejemplo: "Si $\succsim$ es localmente no saciada, el/la consumidor/a consumirá toda su riqueza."

b) Para la siguiente afirmación dé una demostración o un contra-ejemplo: "Si $\succsim$ es convexa, la demanda del consumidor es un conjunto convexo."

a) Suponga que $\succsim$ es l.n.s. pero que $p \cdot x(p,w) < w$. Dado que $\succsim$ es l.n.s. existe $\bar{x} \in B(p,w)$ tal que $\bar{x} \succ x(p,w)$. Luego, $x(p,w)$ no puede resolver PMáx U. Contradicción.

b) Suponga $u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta z$

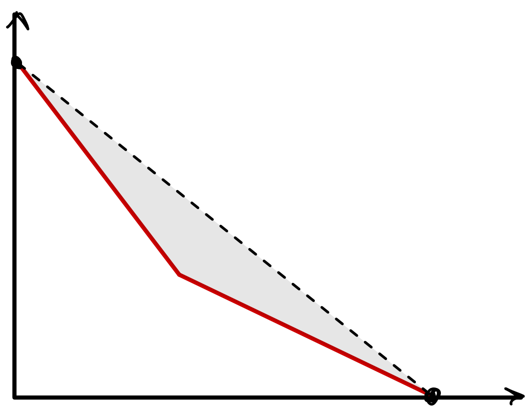
$$\alpha x_1 + \beta x_2 \geq \alpha y_1 + \beta y_2$$

$$\lambda \alpha x_1 + \lambda \beta x_2 + (1-\lambda)\alpha y_1 + (1-\lambda)\beta y_2$$

$$\lambda(\alpha x_1 + \beta x_2) + (1-\lambda)(\alpha y_1 + \beta y_2) \geq \alpha y_1 + \beta y_2$$

Luego, $u(x_1, x_2)$ es cuasicóncava.

Luego, existe el caso particular donde



Luego, la demanda no necesariamente es un conjunto convexo.