**PAUTA SOLEMNE I - MICROECONOMÍA II**

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2021

**[1]** Considere una economía de intercambio estática con dos mercancías perfectamente divisibles y 1003 consumidores. Cada consumidor $i \in \{1, \ldots, 1003\}$ tiene preferencias representables por la función de utilidad $u^i(x, y) = x^{\alpha_i} y^{1-\alpha_i}$ donde $\alpha_i \in (0, 1)$. Además, cada $i \in \{1, \ldots, 1003\}$ tiene una asignación inicial de recursos $w^i \in \mathbb{R}^2_{++}$.

(i) Demuestre detalladamente que esta economía tiene un único equilibrio Walrasiano (salvo normalización de precios).

Esta economía siempre tiene al menos un equilibrio Walrasiano, pues las preferencias de los agentes son continuas, estrictamente convexas y $w^i \gg 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, 1003\}$. Además, la monotonía estricta de las preferencias nos asegura que en equilibrio los precios serán estrictamente positivos. Esto nos permite utilizar el precio de la segunda mercancía como numerario. Por lo tanto, denotando por $p > 0$ al precio de la primera mercancía, la demanda Marshalliana del consumidor $i$ por la primera mercancía es

$$x^i(p) = \alpha_i \frac{p w_x^i + w_y^i}{p} = \alpha_i w_x^i + \alpha_i \frac{w_y^i}{p},$$

donde $w^i = (w_x^i, w_y^i)$. Esto implica que la función exceso de demanda por la primera mercancía, $\widehat{z} : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$, cumple

$$\widehat{z}(p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{1003} \alpha_i w_y^i - \sum_{i=1}^{1003} (1 - \alpha_i) w_x^i.$$

La función $\widehat{z}$ es continua y estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$. Además, $\widehat{z}(p) > 0$ para $p$ cercano a cero y $\widehat{z}(p) < 0$ para $p$ muy grande. Por lo tanto, existe un único $\overline{p}$ tal que $\widehat{z}(\overline{p}) = 0$.

Dado que las preferencias son estrictamente monótonas, la Ley de Walras nos asegura que $(\overline{p}, 1)$ es el único vector de precios de equilibrio en el cual la segunda mercancía es numeraria. $\square$

(ii) Encuentre los valores de los parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_{1003}$ para los cuales la división equitativa de los recursos es Pareto eficiente.[1]

Como las preferencias son representables por funciones de utilidad diferenciables, la división equitativa de los recursos es Pareto eficiente si y solamente si las Tasas Marginales de Sustitución de los agentes en la canasta $\sum_{i=1}^{1003} w^i / 1003$ coinciden. Y esto ocurre si y solamente si $\alpha_i = \alpha_j$ para todo $i \neq j$ (Ud. debía hacer este cálculo en detalle). $\square$

[1] *Comentario Pregunta [1]:* Si $W = \sum_{i=1}^{1003} w^i \in \mathbb{R}^2_{++}$ es la riqueza agregada de la economía, la división equitativa de los recursos entrega a cada consumidor la canasta $W/1003$.

**[2]** Considere una economía de intercambio estática con dos mercancías perfectamente divisibles, dos consumidores y una firma. Los consumidores son caracterizados por las siguientes funciones de utilidad y asignaciones iniciales:

$$u^1(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad w^1 = (1,0); \qquad\qquad u^2(x,y) = \sqrt{y}, \qquad w^2 = (0,1).$$

La firma es propiedad del individuo $h = 1$, utiliza la primera mercancía como insumo en la producción de la segunda y es caracterizada por el conjunto de posibilidades de producción

$$Y = \{(-x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq 2x\}.$$

Demuestre o dé un contraejemplo: *Esta economía siempre tiene al menos un equilibrio competitivo.*

La afirmación es verdadera. Como la firma busca maximizar la diferencia entre sus ingresos y sus costos,

$$\max_{(-x,y)\in Y} (p_x, p_y) \cdot (-x, y) \;\equiv\; \max_{x \geq 0} (2p_y - p_x)x,$$

sabemos que tiene beneficios finitos—una condición necesaria para equilibrio—solo cuando $2p_y \leq p_x$.

Cuando $2p_y < p_x$, la firma no produce nada y caemos en una economía estática sin producción en la cual no existe equilibrio, pues siempre hay exceso de demanda por la segunda mercancía. Efectivamente, $h = 2$ tiene toda la oferta de la segunda mercancía y solo se interesa en ella, mientras que $h = 1$ siempre demanda una cantidad positiva de la segunda mercancía, pues su función de utilidad cumple la condición de Inada.

Cuando $2p_y = p_x$, la firma tendrá beneficios iguales a cero, por lo que la única renta que su propietario tendrá será aquella que obtiene de sus asignaciones iniciales de recursos. Además, como podemos normalizar los precios para que $p_x + p_y = 1$, obtenemos que $(p_x, p_y) = (2/3, 1/3)$. Esto implica que las demandas Marshallianas $((\overline{x}^1, \overline{y}^1), (\overline{x}^2, \overline{y}^2))$ cumplen:

$$\frac{1}{2\sqrt{\overline{x}^1}} = \frac{2}{3}\lambda, \qquad \frac{1}{2\sqrt{\overline{y}^1}} = \frac{1}{3}\lambda, \qquad (\overline{x}^2, \overline{y}^2) = (0, 1).$$

Haciendo el cuociente de las dos primeras identidades y elevando al cuadrado obtenemos que $\overline{y}^1 = 4\overline{x}^1$. Reemplazando en la restricción presupuestaria de $h = 1$, $p_x\overline{x}^1 + p_y\overline{y}^1 = p \cdot w^1$, tenemos que $6\overline{x}^1 = 2$, lo cual implica que $(\overline{x}^1, \overline{y}^1) = (1/3, 4/3)$.

Esto es, los precios de equilibrio son $(\overline{p}_x, \overline{p}_y) = (2/3, 1/3)$. A esos precios, la firma utiliza $2/3$ de unidad de la primera mercancía para producir $4/3$ de unidades de la segunda mercancía. Al mismo tiempo los consumidores demandan las canastas $(\overline{x}^1, \overline{y}^1) = (1/3, 4/3)$ y $(\overline{x}^2, \overline{y}^2) = (0, 1)$. $\square$

En las preguntas **[3]** y **[4]** consideraremos una economía financiera en la cual:

- Hay dos periodos $t \in \{0, 1\}$.
- No existe incertidumbre en $t = 0$ y se pueden realizar $S$ estados de la naturaleza en $t = 1$.
- En cada periodo se pueden intercambiar $L$ mercancías perfectamente divisibles.
- Existen $H$ individuos.
- Cada individuo $h$ tiene asignaciones iniciales $w^h \in \mathbb{R}^{L(S+1)}_{++}$.
- Cada individuo $h$ tiene preferencias representables por una función de utilidad

$$U^h : \mathbb{R}^{L(S+1)}_{+} \to \mathbb{R}$$

  continua, estrictamente cóncava y estrictamente creciente.
- Existen $J$ activos nominales y $K$ activos reales, los cuales pueden ser negociados en $t = 0$ para suavizar el consumo entre periodos y estados de la naturaleza.
- Cada activo nominal $j \in \{1, \ldots, J\}$ promete un pago $N_{s,j} \geq 0$ en el estado $s \in \{1, \ldots, S\}$.
- Cada activo real $k \in \{1, \ldots, K\}$ promete un pago $p_s \cdot A_{s,k}$ en el estado $s \in \{1, \ldots, S\}$, donde $A_{s,k} \in \mathbb{R}^L_+$ y $p_s$ es el vector de precios de las mercancías en el estado $s$.
- No existen restricciones a la negociación de activos nominales y ningún individuo puede *comprar* más de $a_k$ unidades del activo real $k \in \{1, \ldots, K\}$

**[3]** Suponga que $(S, L, H) = (2, 1, 2)$ y $(J, K) = (2, 0)$.

Además, asuma que los consumidores son caracterizados por las siguientes funciones de utilidad y asignaciones iniciales

$$U^1(x_0, x_1, x_2) = x_0^{1/3} x_1^{1/3} x_2^{1/3}, \qquad w^1 = (3, 3, 3),$$
$$U^2(x_0, x_1, x_2) = x_0^{1/3} x_1^{1/2} x_2^{1/6}, \qquad w^2 = (6, 6, 6),$$

mientras que los pagos de los activos nominales son

$$(N_{1,1}, N_{2,1}) = (3, 2), \qquad (N_{1,2}, N_{2,2}) = (1, 6).$$

Justificando detalladamente sus argumentos, encuentre las demandas de equilibrio de los consumidores por mercancías y los precios de equilibrio de los activos.

Como hay dos estados de la naturaleza en el segundo periodo y dos activos nominales no-redundantes, los mercados son completos. Por lo tanto, para encontrar los consumos de equilibrio es suficiente encontrar el equilibrio de la *economía de mercados contingentes* asociada (i.e., la economía estática en la cual se negocian simultáneamente las tres mercancías, una para entrega inmediata y las otras dos para entrega futura contingente a la realización de la incertidumbre).

Dado que las utilidades de los individuos son Coob-Douglas y podemos normalizar los precios de las mercancías contingentes $p = (p_0, p_1, p_2)$ de tal forma que $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, tenemos que las demandas Marshallianas vienen dadas por

$$\begin{aligned}
(\overline{x}_0^1, \overline{x}_1^1, \overline{x}_2^1) &= \left( \frac{1}{3} \frac{p \cdot w^1}{p_0}, \frac{1}{3} \frac{p \cdot w^1}{p_1}, \frac{1}{3} \frac{p \cdot w^1}{p_2} \right) = \left( \frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2} \right), \\
(\overline{x}_0^2, \overline{x}_1^2, \overline{x}_2^2) &= \left( \frac{1}{3} \frac{p \cdot w^2}{p_0}, \frac{1}{2} \frac{p \cdot w^2}{p_1}, \frac{1}{6} \frac{p \cdot w^2}{p_2} \right) = \left( \frac{2}{p_0}, \frac{3}{p_1}, \frac{1}{p_2} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, igualando la oferta a la demanda, obtenemos que los precios de equilibrio de la mercancías contingentes son $(\overline{p}_0, \overline{p}_1, \overline{p}_2) = (3/9, 4/9, 2/9)$, lo cual implica que las demandas de equilibrio de los consumidores por mercancías son

$$(\overline{x}_0^1, \overline{x}_1^1, \overline{x}_2^1) = (9/3, 9/4, 9/2), \qquad (\overline{x}_0^2, \overline{x}_1^2, \overline{x}_2^2) = (18/3, 27/4, 9/2).$$

Una condición necesaria para tener equilibrio en mercados financieros es la ausencia de oportunidades de arbitraje, lo cual implica que el precio de cada activo debe coincidir con el valor deflactado de sus pagos futuros. Ahora, como en la economía original hay una única mercancía en cada estado de la naturaleza, podemos normalizar su precio de equilibrio a uno. Esto implica que el precio de equilibrio de la *mercancía contingente*, aquella que se negocia en $t = 0$ para entrega futura, es igual al deflactor del estado de la naturaleza en el cual ella se consume.

Concluimos que, cuando la mercancía tiene precio $\overline{p}_0 = 3/9$ en el primer periodo, los precios de equilibrio de los activos nominales son $\overline{q}_1 = 3\overline{p}_1 + 2\overline{p}_2 = 16/9$ y $\overline{q}_2 = \overline{p}_1 + 6\overline{p}_2 = 16/9$. $\square$

**[4]** Suponga que $(S,L,H) = (100, 10, 1000)$ y $(J,K) = (13, 14)$.

Además, asuma que no hay activos nominales redundantes. Explique detalladamente como encontrar límites superiores e inferiores para los *portafolios financieros de equilibrio* que sólo dependan de los límites de compra impuestos sobre los activos reales, del número de agentes, de la riqueza agregada de la economía y de los pagos de los activos reales y nominales.

Los límites exógenos a la compra de activos reales, junto con la condición de oferta igual a demanda que debe cumplirse en equilibrio, nos aseguran que la posición $z_k^h$ del individuo $h \in \{1, \dots, H\}$ en el activo real $k \in \{1, \dots, K\}$ debe cumplir

$$z_k^h \leq a_k, \qquad\qquad z_k^h = -\sum_{i \neq h} z_k^i \geq -\sum_{i \neq h} a_k = -(H-1)a_k.$$

Esto es, $z_k^h \in [-(H-1)a_k, a_k]$. Además, la monotonía estricta de las preferencias nos asegura que las restricciones presupuestarias se cumplirán con igualdad:

$$p_s(x_s^h - w_s^h) - \sum_{k=1}^{K} p_s \cdot A_{s,k} z_k^h = \sum_{j=1}^{J} N_{s,j}\theta_j^h, \qquad \forall s \in \{1, \dots, S\},$$

donde $p_s$ es el vector de precios de las mercancías en el estado $s$ y $\theta^h = (\theta_1^h, \dots, \theta_J^h)$ es el portafolio del individuo $h$ en los activos nominales.

Como los activos nominales no son redundantes y $J < S$, la matriz de pagos $(N_{s,j})_{(s,j)}$ tiene una sub-matriz invertible de $J \times J$. Esto es, existe un subconjunto $\mathcal{S}^* \subseteq \{1, \dots, S\}$ tal que $\#\mathcal{S}^* = J$ y $\widehat{N} = (N_{s,j})_{s \in \mathcal{S}^*, j \in \{1, \dots, J\}}$ es invertible. Por lo tanto, tenemos que

$$(\theta^h)^{\mathrm{t}} = \widehat{N}^{-1} \left( p_s(x_s^h - w_s^h) - \sum_{k=1}^{K} p_s \cdot A_{s,k} z_k^h \right)_{s \in \mathcal{S}^*}^{\mathrm{t}}, \tag{1}$$

donde $(\theta^h)^{\mathrm{t}}$ es el vector columna que se obtiene al transponer el vector fila $\theta^h$.

Considere los siguientes límites superiores para la riqueza agregada de la economía y para los pagos de los activos reales:

$$M(p) = \max_{s \in \{1, \dots, S\}} \sum_{h=1}^{H} p_s \cdot w^h, \qquad\qquad \overline{A}(p) = \max_{s \in \{1, \dots, S\}} \sum_{k=1}^{K} p_s \cdot A_{s,k}.$$

Sigue de las propiedades de equilibrio que, dado un estado de la naturaleza $s \in \mathcal{S}^*$, tenemos que

$$\underbrace{-\left( M(p) + \overline{A}(p) \max_{k \in \{1, \dots, K\}} a_k \right)}_{\underline{v}(p)} \leq p_s(x_s^h - w_s^h) - \sum_{k=1}^{K} p_s \cdot A_{s,k} z_k^h \leq \underbrace{\left( M(p) + (H-1)\overline{A}(p) \max_{k \in \{1, \dots, K\}} a_k \right)}_{\overline{v}(p)}.$$

Las cantidades $\underline{v}(p) < 0$ y $\overline{v}(p) > 0$ sólo dependen de los límites de compra impuestos sobre los activos reales, del número de agentes y de las expresiones $M(p)$ y $\overline{A}(p)$, las cuales quedan determinadas a partir de la riqueza agregada de la economía y de los pagos de los activos reales.

Además, como los pagos de los activos nominales son no-negativos, tenemos que

$$\underline{v}(p)\widehat{N}(1, \dots, 1)^{\mathrm{t}} \leq \widehat{N} \left( p_s(x_s^h - w_s^h) - \sum_{k=1}^{K} p_s \cdot A_{s,k} z_k^h \right)_{s \in \mathcal{S}^*}^{\mathrm{t}} \leq \overline{v}(p)\widehat{N}(1, \dots, 1)^{\mathrm{t}}.$$

Por lo tanto, concluimos de (1) que, en equilibrio, la posición del agent $h$ en el activo nominal $j$ cumple

$$\underline{v}(p) \sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{J} N_{s,j} \leq \theta_j^h \leq \overline{v}(p) \sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{J} N_{s,j}.$$

lo cual concluye la demostración. □