Solemne Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Gabriela Denis y Pedro Schilling

16 de mayo de 2023

Lea atentamente las siguientes indicaciones:

- Ud. tiene 140 minutos para resolver la prueba.
- La prueba consta de 4 ejercicios y tiene un total de 120 puntos.
- Los puntos asociados a cada pregunta están indicados en cada pregunta.
- Lea todas las preguntas antes de comenzar a responder, esto le permitirá planificar su trabajo de forma eficiente. Evite dedicar mucho tiempo a una pregunta.
- Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
- Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.
- En caso de descubrir un intento de copia, éste se sancionará de acuerdo con el reglamento de copia y plagio de la facultad.

Pregunta 1:

1. **(10 puntos)** Demuestre o de un contrajemplo de la siguiente afirmación.

   Si la preferencia $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad continua u, entonces $\succeq$ es continua.

2. Sea $\succeq$ una relación de preferencias en $X = \mathbb{R}_+$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 0 \succ x \text{ para todo } x \neq 0, \\ x \succeq y \text{ si y sólo si } x \geq y \text{ para todo } x > 0 \text{ e } y > 0 \end{cases}$$

   a) **(10 puntos)** ¿Es continua la relación de preferencias? Justifique.

   b) **(10 puntos)** Encuentre una función de utilidad que represente a estas preferencias. ¿Existe una función de utilidad continua?

Respuesta

1. La afirmación es cierta.

   Por definición, una relación de preferencias $\succeq$ es continua si se preserva en el límite. Esto es, para cualquier secuencia $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \succeq y_n$, para todo n, tenemos que $x = \lim_{n\to\infty} x_n \succeq y = \lim_{n\to\infty} y_n$.

   Tomo $x_n \to x$ e $y_n \to y$ tal que $x_n \succeq y_n$ para todo n. Debo demostrar $x \succeq y$, o lo que es lo mismo, que $u(x) \geq u(y)$.

   De las hipótesis obtengo $u(x_n) \geq u(y_n)$ para todo n. Dado que $u(x_n) \to u(x)$ y $u(y_n) \to u(y)$, el resultado sigue de la continuidad de la función u.

2.

   a) La relación no es continua.
   Tomemos, por ejemplo, la secuencia $x_n = 1/n$, e $y_n = 1$. En este caso se cumple que $y_n \in \mathbb{R}_{++}$ y $x_n \in \mathbb{R}_{++}$ y además $y_n \geq x_n$, para todo $n \in N$. Esto implica que $y_n \succeq x_n$ para todo $n \in N$. Si las preferencias son continuas, se debe cumplir que $1 = \lim_{n\to\infty} y_n \succeq 0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sin embargo, por definición de $\succeq$ eso no es cierto.

   b) La preferencia $\succeq$ es representada por la función de utilidad $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0. \end{cases}$$

   En efecto,

$$\begin{cases} u(0) = 0 > u(x) = -\frac{1}{x} \ \forall x > 0 \\ u(x) \geq u(y) \iff -\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{y} \iff x \geq y \end{cases}$$

   Según lo demostrado en la parte 1 de esta pregunta, no puede existir ninguna función de utilidad continua, dado que $\succeq$ no es continua.

Pregunta 2: Considere una economía de solamente 2 bienes, x e y, con precios $p = (p_x, p_y)$, respectivamente. Supongamos que en la economía hay solamente 2 consumidores con rentas m_1 y m_2, respectivamente.

1. **(10 puntos)** Si la consumidora 1, tiene función de utilidad $u(x, y) = 107x^3y^\alpha$. Encuentre la demanda Marshalliana de la consumidora 1.
2. **(10 puntos)** Si el consumidor 2, tiene función de gasto $e(p, u) = u\sqrt{p_xp_y}$. Encuentre la demanda Marshalliana del consumidor 2.
3. **(10 puntos)** ¿Para qué valor(es) de α la demanda agregada del bien x es independiente de la **distribución** de la renta?

Respuesta

1. Reconociendo que la persona 1 tiene una función de utilidad de tipo Cobb-Douglas, vemos que su demanda Marshalliana es:

$$x = \frac{3}{3+\alpha}\frac{m_1}{p_x} \qquad y = \frac{\alpha}{3+\alpha}\frac{m_1}{p_y}$$

2. Hay muchas formas de resolver esta parte de la pregunta. Una alternativa es encontrar la función de utilidad indirecta y luego aplicar la identidad de Roy para encontrar la demanda Marshalliana:

$$\begin{aligned} & m_2 = e(p, v(p, m_2)) = v(p, m_2)\sqrt{p_xp_y} \\ \Rightarrow \qquad & v(p, m_2) = m_2/\sqrt{p_xp_y} \end{aligned}$$

   Aplicando la identidad de Roy obtenemos:

$$x = \frac{1}{2}\frac{m_2}{p_x} \qquad y = \frac{1}{2}\frac{m_2}{p_y}$$

3. Para resolver estar parte asumimos que la renta total, $M = m_1 + m_2$ es fija y calculamos la demanda agregada del bien x (que denotamos X):

$$X(p, m_1, m_2) = \frac{3}{3+\alpha}\frac{m_1}{p_x} + \frac{1}{2}\frac{M - m_1}{p_x} = \frac{1}{2}\frac{M}{p_x} + \frac{m_1}{p_x}\left(\frac{3}{3+\alpha} - \frac{1}{2}\right).$$

   Para que X sea independiente de como se distribuye la riqueza entre las personas 1 y 2, necesitamos que X sea independiente de m_1, es decir que, necesitamos que el término entre paréntesis de la expresión anterior sea igual a 0. De ahí que $\alpha = 3$.

Pregunta 3: (Las partes 1. y 2. son independientes)

1. **(12 puntos)** Sea $c(w, q)$ la función de costos de una tecnología de producto único Y (con Y cerrado y no vacío). Demuestre que $c(w, q)$ es cóncava en w.

2. **(18 puntos)** Considere la siguiente función de producción: $f : I\!R^2_+ \to I\!R$, $f(z_1, z_2) = \text{mín}\{z_1, z_2\}^\alpha$, con $\alpha > 0$. El precio de los insumos es $w = (w_1, w_2) \gg 0$ y el precio del producto es $p > 0$.
¿Para que valores de α el problema de maximización de beneficios **no** tiene solución?
Sugerencia: Relacione con el rendimiento a escala del proceso productivo.

Respuesta

1. Por definición $c(w, q)$ es el valor óptimo del problema

$$\begin{cases} \text{mín}_{z \geq 0} & wz \\ \text{s.a} & f(z) \geq q \end{cases}$$

Queremos demostrar que

$$c(\lambda w + (1-\lambda)w', q) \geq \lambda c(w, q) + (1-\lambda)c(w', q) \qquad (1)$$

Si $\nexists z$ tal que $f(z) \geq q$ entonces ninguno de los problemas de optimización tiene solución. En ese caso tenemos que $c(w, q) = \infty \ \forall w$ y la desigualdad (1) se cumple trivialmente.

Si existe algún $z \geq 0$ tal que $f(z) \geq q$ entonces los 3 problemas de optimización que definen $c(w, q)$, $c(w', q)$ y $c(\lambda w + (1-\lambda)w', q)$ están bien definidos.
Sea y en la correspondencia de demanda condicionada $z(\lambda w + (1-\lambda)w', q)$. Entonces

$$\begin{aligned} c(\lambda w + (1-\lambda)w', q) &= (\lambda w + (1-\lambda)w')y \\ &= \lambda wy + (1-\lambda)w'y \leq c(w, q) + c(w', q) \end{aligned}$$

2. Dado que $f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^\alpha f(z_1, z_2)$ sabemos que el rendimiento a escala de f es:

(i) estrictamente decreciente si $\alpha \in (0, 1)$

(ii) estrictamente creciente si $\alpha > 1$

(iii) constantes si $\alpha = 1$

En (i) el problema está bien definido.

En (ii) y (iii) podría no estar bien definido. Tenemos dos casos posibles

- Si $pf(z_1, z_2) - w_1 z_1 - w_2 z_2 \leq 0$ para todo (z_1, z_2) entonces $\pi(p, w_1, w_2) \leq 0$ y el problema está bien definido.
- Si existe $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ tal que $pf(\bar{z}_1, \bar{z}_2) - w_1\bar{z}_1 - w_2\bar{z}_2 > 0$ entonces el rendimiento a escala no decreciente de f nos asegura que la secuencia $\{n\bar{z}_1, n\bar{z}_2\}_n$ cumple que $[pf(n\bar{z}_1, n\bar{z}_2) - w_1 n\bar{z}_1 - n\bar{w}_2 z_2] \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y el problema no está bien definido.

Veamos que en (ii) el problema no está bien definido:

$$\begin{aligned} pf(z_1,z_2) - w_1z_1 - w_2z_2 &= p\,\text{mín}\{z_1,z_2\}^\alpha - w_1z_1 - w_2z_2 \qquad \text{tomo } z_1 = z_2 \\ &= pz_1^\alpha - (w_1+w_2)z_1 \\ &= z_1[\underbrace{pz_1^{\alpha-1} - (w_1+w_2)}_{(*)}] \end{aligned}$$

Si $\alpha > 1$ entonces para z_1 suficientemente grande, tendremos que el término $(*)$ es positivo. Basta tomar entonces la sucesión $\{nz_1, nz_1\}_n$ para concluir que $[pf(nz_1,nz_1) - nw_1z_1 - nw_2z_2] \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y podemos concluir que el problema no está bien definido.

Veamos que en (iii), la respuesta depende de los valores relativos. Si $\alpha = 1$, el término $(*)$ es igual a $p - (w_1 + w_2)$. La existencia de solución depende de los precios. Si $p > (w_1 + w_2)$, entonces la secuencia $\{(nz_1, nz_1)\}$ ocupada en el párrafo anterior nos permite concluir que el problema no esta bien definido.

Mientras que si $p \leq (w_1 + w_2)$, tenemos que

$$p\,\text{mín}\{z_1,z_2\} - w_1z_1 - w_2z_2 \quad \leq \quad p\,\text{mín}\{z_1,z_2\} - (w_1+w_2)\,\text{mín}\{z_1,z_2\} \leq 0 \quad \forall (z_1,z_2)$$

y el problema sí está bien definido con un valor óptimo $\pi \leq 0$

En resumen, el problema de maximización de beneficios no tiene solución cuando $\alpha > 1$ y cuando $\alpha = 1$ y además $p > (w_1 + w_2)$.

Pregunta 4: (Las partes 1. y 2. son independientes)

1. **(10 puntos)** Considere el espacio de las loterías definidas sobre el conjunto de consecuencias finito $\mathcal{C}$, donde

$$\mathcal{C} = \{\text{ganar \$20, ganar \$0, perder \$20}\}$$

Represente en el Simplex las curvas de indiferencia de un agente **averso** al riesgo cuyas preferencias son racionales, continuas e independientes.

2. Una persona tiene una función de utilidad de Bernoulli dada por $u(w) = \ln(1 + w)$. Su riqueza inicial es w y se le ofrece la oportunidad de apostar al lanzamiento de una moneda que tiene una probabilidad π de salir cara. Si apuesta x, su riqueza final será $w + x$ si sale cara y $w - x$ si sale cruz.

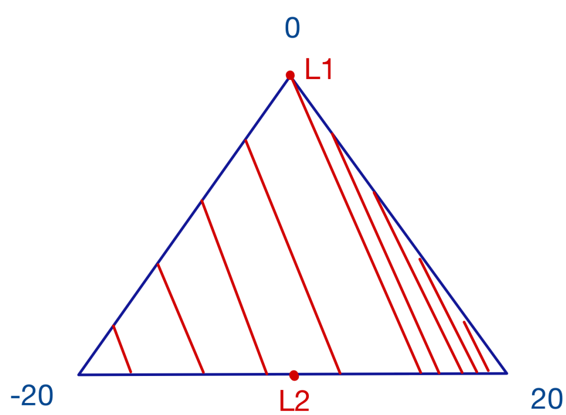
   a) **(10 puntos)** Resuelva la x óptima si $\pi = \frac{1}{2}$.

   b) **(10 puntos)** Relacione el valor de x obtenido con la actitud frente al riesgo del consumidor.

Respuesta

1. Gracias al Teorema de Representación de von Neuman-Morgenstern, sabemos que las preferencias son representadas por una función de utilidad esperada. Y las curvas de indiferencia de una función de utilidad esperada son rectas paralelas. Sabemos también la utilidad esperada aumenta a medida que nos movemos hacia el vértice $(1, 0, 0)$, es decir hacia la derecha en la Figura. Esto porque siempre se asume que las funciones de Bernoulli son crecientes.

Solo queda definir la pendiente de dichas rectas. Como el agente es averso al riesgo, debe preferir estrictamente la lotería $L_1 = (0, 1, 0)$ que tiene como pago cierto \$0 a la lotería $L = (1/2, 0, 1/2)$ cuyo pago esperado es \$0. La curva de indiferencia de L_1 debe pasar a la derecha de L_2 (ver Figura).



2.

a) La utilidad esperada del agente si apuesta x es

$$U(x) = \pi \ln(1 + w + x) + (1 - \pi) \ln(1 + w - x).$$

Derivando obtenemos,

$$U'(x) = \frac{\pi}{1 + w + x} - \frac{1 - \pi}{1 + w - x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + w + x} - \frac{1}{1 + w - x}\right]$$

Esta derivada es igual a 0 cuando $x = 0$. Como la función $U(x)$ es estrictamente cóncava, si encontramos un punto donde la derivada es igual a 0, ese punto tiene que ser máximo global. Como $x = 0$ es un punto factible de nuestro problema de optimización, sabemos que $U(0)$ es la solución.

b) Observe que el valor esperado de la lotería es exactamente w cualquiera sea el valor de x. Como la función de Bernoulli del agente ($u(w) = \ln(w)$) es cóncava, sabemos que el agente es averso al riesgo. Y todo agente averso al riesgo, prefiere la lotería que le entrega w como pago cierto, a enfrentar una lotería riesgosa cuyo pago esperado es también w (cualquier lotería con $x > 0$ tiene riesgo).

Otra forma de ver esto, es observar que, como el agente es averso al riesgo, el equivalente cierto de una lotería donde $x > 0$ es menor a su pago esperado (w). Es decir que, dada una lotería con $x > 0$, el agente es indiferente entre esa lotería y un *pago cierto menor a w*. Por lo tanto, prefiere el pago cierto w a cualquier lotería con $x > 0$.