Profesor	: Eduardo Engel	Abril 26, 2023
Ayudantes	: Miguel Del Valle y Benjamín Peña	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2023	
Guía	: No. 4	
Entrega	: Viernes 5 de mayo, antes de las 8am	

1. **Teoría q con depreciación**

   (a) Derive el equivalente a las ecuaciones (5) y (6) del ppt I2, suponiendo que $\delta > 0$.

   Respuesta: El problema de la firma viene dado por:

$$\begin{aligned} V(K_0) &= \max_{\{I_t\}_{t\geq 0}} \int e^{-rt} \left[\pi(K_t) - (I_t + C(I_t, K_t))\right] dt \\ s.t. \quad & \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \end{aligned}$$

   Tomando las condiciones del Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H_t &= \pi(K_t) - (I_t + C(I_t, K_t)) + \lambda_t(I_t - \delta K_t) \\ \frac{\partial H_t}{\partial I_t} &= 0 \Leftrightarrow 1 + C_I(I_t, K_t) = q_t, \quad q_t = \lambda_t/p_t = \lambda_t \\ -\frac{\partial H_T}{\partial K_t} &= \dot{\lambda}_t - r\lambda_t \Leftrightarrow C_K(I_t, K_t) + (\delta + r)q_t = \dot{q}_t + \pi_k(K_t) \end{aligned}$$

   Notando que $I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$ y haciendo un poco de álgebra se obtiene que las dos ecuaciones que caracterizan el sistema son:

$$\dot{K}_t = \frac{(q_t - (1 + b\delta))\, K_t}{b} \tag{1}$$

$$\dot{q}_t = (r + \delta)q_t - \pi_k(K_t) - \frac{1}{2b}\,(q_t - 1)^2 \tag{2}$$

   (b) Determine los valores de q y K de estado estacionario y compare con el caso $\delta = 0$. Comente.

   Respuesta: Dado $\dot{K}_t = 0$ obtenemos de la ecuación (1) que:

$$q_t = 1 + b\delta \tag{3}$$

   Dado $\dot{q}_t = 0$ obtenemos de la ecuación (2) que:

$$\pi_k(K_t) = (r + \delta)q_t - \frac{1}{2b}(q_t - 1)^2 \tag{4}$$

Intuitivamente, como en este caso $\delta > 0$ y $\dot{K}_t = 0$, significa que todos los periodos debe invertirse δ unidades extra de capital para reponer el que se va depreciando con respecto al caso de $\delta = 0$. Esto se interpreta como: el costo de adquirir una unidad de capital es igual al precio de compra (que fijamos en 1) más la depreciación por el parámetro de sensibilidad de los costos de ajuste (esta última expresión es igual a el costo marginal de ajustar). En consecuencia, la ecuación (4) nos dice que la firma invierte hasta el punto en el que el costo de adquirir capital es igual al valor del capital (Ver Romer, página 410).

(c) Grafique el diagrama de fase para esta extensión del modelo vista en clases.

Respuesta:

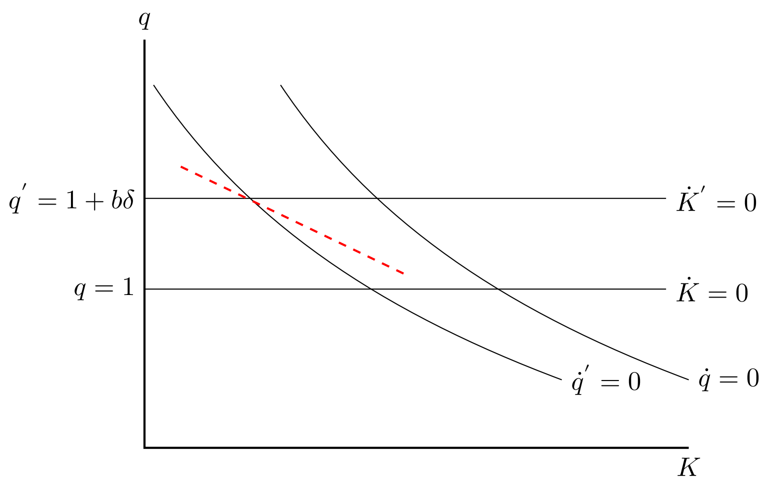


Figure 1: Diagrama q de Tobin ante un aumento de la depreciación.

2. **Modelo de q de Tobin y Subsidio a la Inversión**

Considere el modelo de teoría q visto en clases, con las simplificaciones que hicimos para analizar shocks no anticipados.

Suponga que el gobierno instituye un subsidio σ a la inversión, de modo que el costo de invertir I se reduce de $I + C(I, K)$ a $(1 - \sigma)I + C(I, K)$.

(a) Estamos suponiendo que el subsidio del gobierno no involucra los costos de ajuste. Discuta cuán razonable es este supuesto para distintas interpretaciones de los costos de ajuste.

Respuesta: Generalmente, los costos de ajuste no forman parte del costo de capital y su medición no es trivial. Bajo este supuesto, sería razonable que el subsidio del gobierno no los involucrara. Si los costos de ajuste pudieran incluirse como costo de capital, por ejemplo instalación de nuevo capital que requiriera capacitación de la mano de obra para ser puesto en operación, podría argumentarse a favor de considerarlos en el subsidio. Por lo tanto, el uso del supuesto depende de si es que se consideran los costos de instalación, reemplazo y aprendizaje que implica la inversión en capital.

(b) Muestre que el q de estado estacionario, q^*, es igual a $1-\sigma$. Interprete económicamente este resultado. Caracterice el stock de capital de estado estacionario, K^*.

Respuesta: Tenemos que: $C(I_t, K_t) = \frac{1}{2}b\frac{I_t^2}{K_t}$, por lo que el Hamiltoniano corriente es:

$$H(I_t, K_t) = \pi(K_t, x_t) - (1-\sigma)I_t - \frac{1}{2}b\frac{I_t^2}{K_t} + \lambda_t I_t.$$

Obtenemos la condición de primer orden con respecto al control:

$$H_I = 0 \Longrightarrow q_t = (1-\sigma) + b\frac{I_t}{K_t},$$

donde utilizamos que $p = 1$ y $q_t = \frac{\lambda_t}{p}$.

Despejando para I_t y considerando la dinámica de K_t sin depreciación:

$$\dot{K}_t = I_t = \left[\frac{q_t - (1-\sigma)}{b}\right] K_t. \tag{5}$$

También tenemos que $\pi(K_t, x_t) = F(K_t)$ (el enunciado debió ser más claro en esto). Luego obtenemos la condición de primer orden con respecto a la variable de estado K:

$$-H_k = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t \Longrightarrow -[\pi_k(K_t, x) - \frac{1}{2}b\frac{I_t^2}{K_t^2}] = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t,$$

de modo que

$$\dot{q}_t = rq_t - \pi_k(K_t, x) - \frac{1}{2}b\frac{I_t^2}{K_t^2}. \tag{6}$$

Los valores de estado estacionario K^* y q^* se obtienen imponiendo $\dot{K} = 0$ y $\dot{q} = 0$ en (**??**) y (**??**). De $\dot{K} = 0$ resulta

$$q^* = 1 - \sigma.$$

Luego, imponiendo $\dot{q} = 0$ y usando la expresión anterior para q^* se obtiene:

$$\pi_K(K^*) = r(1-\sigma).$$

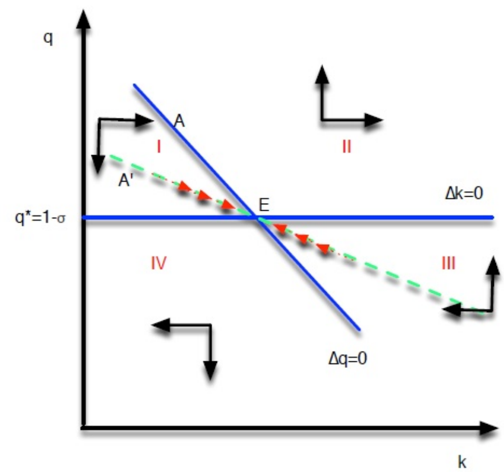
(c) Determine el diagrama de fase en el espacio (K, q). Justifique las flechas en cada región y muestre que hay un brazo estable.

Respuesta: Para $\dot{q}_t$, en las regiones I y IV:

Sabemos que $\dot{q} = rq - \pi_k(K, x) - c_k(I, K) = rq_t - \pi_k(K) - \frac{1}{2}\frac{(q-(1-\sigma))^2}{b}$.

Si nos paramos en la recta $\dot{K} = 0$ es decir, evaluando en $q = 1-\sigma$, tenemos que: $\dot{q} = r(1-\sigma) - \pi_k(K)$. Debido a la concavidad de $\pi(K)$, si evaluamos en $K = \epsilon$, con $\epsilon > 0$ un número muy pequeño, tenemos que $\dot{q} < 0$ (ya que $\pi_k(\epsilon)$ se hace muy grande y $\pi(\epsilon)$ pequeño). Esto lleva a que el movimiento de la flecha bajo $\dot{q} = 0$ sea hacia el origen del gráfico. En las regiones II y III: contrario al caso anterior, sobre $\dot{q} = 0$ la flecha se desplaza en dirección contraria al origen.

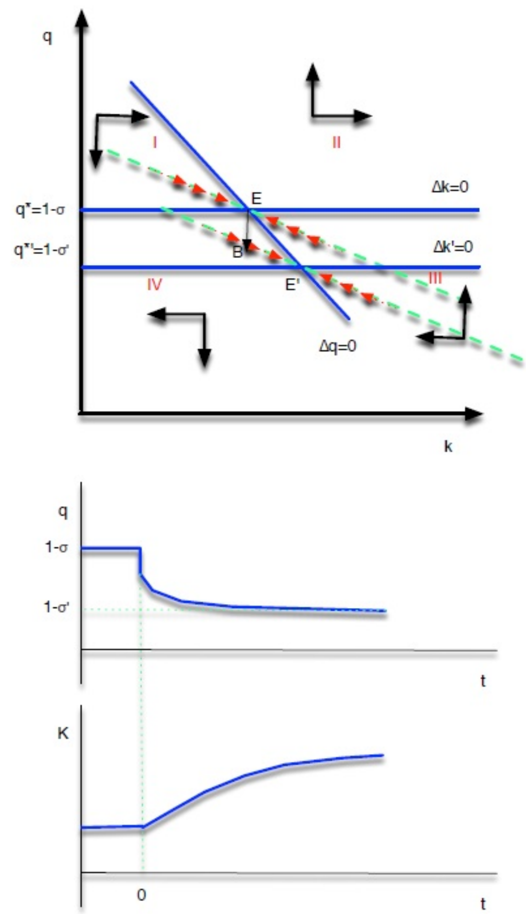
Para $\dot{K}$: las firmas aumentan su capital cuando su valor marginal es mayor al costo de reposición de equilibrio, $q^* = (1 - \sigma)$. Luego, sobre $\dot{K} = 0$, donde $q^* = (1 - \sigma)$, la flecha se mueve hacia la derecha, y bajo hacia la izquierda. En las regiones I y III se forma un brazo estable debido a que los vientos del sistema empujan hacia E.



(d) Considere un incremento no anticipado (y permanente) en σ. Asumiendo que el brazo estable del nuevo estado estacionario se encuentra por debajo del estado estacionario original,[1] describa la evolución de K y q.

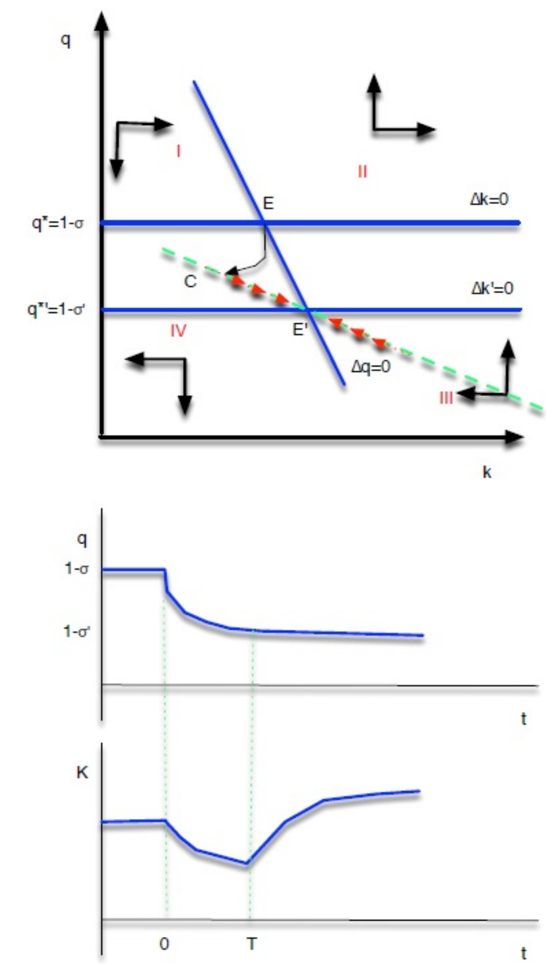
Respuesta: Dado el aumento no anticipado del subsidio a la inversión, en $t = 0$ (E a B) el valor del capital q disminuye fuertemente hasta alcanzar la trayectoria del nuevo brazo estable. De B a E', el valor del capital va convergiendo paulatinamente hasta su nuevo estado estacionario. Por su parte, en $t = 0$ el capital no se modifica pues en el corto plazo es fijo. De $t = 0$ en adelante, comienza a aumentar gradualmente a consecuencia del incentivo dado por el subsidio, hasta llegar a su nuevo estado estacionario en E'.

[1]Esto no necesariamente sera así, en clase auxiliar discutiremos la intuición de por qué pueden darse ambas alternativas. ¿Se le ocurre una intuición económica al respecto? No es fácil.



(e) Igual que la parte anterior, pero ahora el incremento en σ es anticipado, es decir, se conoce con T períodos de anticipación. Al igual que en la parte anterior, son shocks de una sola vez.

Respuesta: Al anticipar el futuro subsidio, el valor presente del capital instalado disminuye, pues una caída de éste en σ, en T, implica mayor capital en el futuro, y por lo tanto una menor productividad futura del capital instalado hoy. Luego, hasta C se desacumula capital, para finalmente producirse un boom de inversión al momento en que se materializa el subsidio.



3. **Costos externos de ajuste**

Los costos de ajuste vistos en clases son *internos* a la firma, en este problema consideramos costos *externos*.

El tiempo es continuo. Asuma que existe un gran número de firmas, cada una de ellas resolviendo el mismo problema. Denotaremos las variables a nivel de firma con minúsculas: k_t para el capital e i_t para la inversión en t. Las variables agregadas las denotaremos con mayúsculas: K_t para capital agregado e I_t para inversión agregada en t. Asuma que no existen costos internos de ajuste, es decir, $C(i,k) = 0$, pero que el precio del bien de inversión es una función de la inversión agregada, $p(I_t)$, con $p' > 0$. Denote por $\Pi(k_t)$ los beneficios de una firma que opera con un stock de capital k_t, donde $\Pi' > 0$ y $\Pi'' < 0$. Asuma que existe depreciación $\delta \in (0,1)$, y que la tasa de interés real es r.

(a) Escriba el problema de una firma que toma la inversión agregada como dada.

Respuesta: Tenemos

$$\begin{aligned}
&\max_{\{i_t\}_{t\geq 0}} \int_0^\infty e^{-rt}\left[\Pi(k_t) - p(I_t)i_t\right]dt \\
&\text{s.a.} \quad \dot{k}_t = i_t - \delta k_t, \\
&\qquad\quad I_t, K_t \text{ dados}, \\
&\qquad\quad k_0 \text{ dado}.
\end{aligned}$$

(b) A partir del Hamiltoniano en valor corriente y tomando como dadas las variables agregadas obtenga las ecuaciones de primer orden. Obtenga una expresión para el q de tobin marginal. ¿Varía esta expresión en el tiempo? ¿Satisface la firma una versión modificada de la regla de inversión de costos de usuario del modelo neoclásico?

Respuesta: Tenemos:

$$H = \Pi(k_t) - p(I_t)i_t + \lambda_t[i_t - \delta k_t] \tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial i_t} = 0 \Longrightarrow p(I_t) = \lambda_t \Longrightarrow q_t \equiv \frac{\lambda_t}{p(I_t)} = 1. \tag{8}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - r\lambda \Longrightarrow \dot{\lambda}_t = \lambda_t(r+\delta) - \Pi'(k_t). \tag{9}$$

Concluimos que q_t no varía en el tiempo y es igual a 1. El motivo es que una unidad instalada en la firma vale lo mismo que una unidad en la tienda, pues no hay costos de instalación del capital.

Derivando respecto del tiempo la ecuación (6) se obtiene

$$p'(I_t)\dot{I}_t = \dot{\lambda}_t.$$

Y reemplazando $\dot{\lambda}_t$ en (7) por esta expresión se obtiene

$$\Pi'(k_t) = (\delta + r)p(I_t) - p'(I_t)\dot{I}_t. \tag{10}$$

La condición de optimalidad el modelo neoclásico de costos de usuario es:

$$\Pi'(k_t) = (\delta + r)p_t - \dot{p}_t.$$

Notando que con costos externos $p_t = p(I_t)$ y que, por lo tanto, $\dot{p}_t = p'(I_t)\dot{I}_t$ y comparando las dos expresiones concluimos que la firma satisface una versión modificada de la regla de inversión de costos de usuario del modelo neoclásico que incorpora que el precio del capital depende de la inversión agregada.

(c) Notando que en equilibrio el capital e inversión agregados deben satisfacer que $K = k$ e $I = i$, caracterice el estado estacionario y muestre que el nivel de capital correspondiente, K_{EE}, satisface

$$\Pi'(K_{EE}) = (\delta + r)p(\delta K_{EE}).$$

Determine también la dinámica de la economía en el espacio (K, I), dibuje el diagrama de fase correspondiente y muestre que existe un brazo estable. Finalmente, explique por qué en este problema, y a diferencia de lo que sucede con costos de ajuste internos, I será la variable de salto.

Respuesta: Usando la expresión estándar para la evolución del capital (en su versión agregada) y (8) tendremos que la dinámica agregada es determinada por:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t, \tag{11}$$

$$\dot{I}_t = \frac{1}{p'(I_t)}\left[(\delta + r)p(I_t) - \Pi'(K_t)\right]. \tag{12}$$

Imponiendo $\dot{K} = 0$ y $\dot{I} = 0$, el estado estacionario se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$I_{EE} = \delta K_{EE}, \qquad \Pi'(K_{EE}) = (\delta + r)p(I_{EE}),$$

por lo cual K_{EE} se determina de

$$\Pi'(K_{EE}) = (\delta + r)p(\delta K_{EE}). \tag{13}$$

Como el lado izquierdo es decreciente en K mientras el lado derecho es creciente, la expresión anterior tiene una solución única[2].

De (9) tenemos que el lugar geométrico de los pares (K, I) donde $\dot{K}_t = 0$ viene dado por

$$I_t = \delta K_t. \tag{14}$$

Este lugar geométrico es una recta de pendiente δ que pasa por el origen.

De (10) tenemos que el lugar geométrico de los pares (K, I) donde $\dot{I}_t = 0$ viene dado por

$$\Pi'(K_t) = (\delta + r)p(I_t). \tag{15}$$

Tendremos $K_t \uparrow \Rightarrow \ \Pi'(K_t) \downarrow \Rightarrow \ p(I_t) \downarrow \Rightarrow \ I_t \downarrow$, por lo cual este lugar geométrico tendrá pendiente negativa.

Para determinar la dinámica de la economía notamos que:

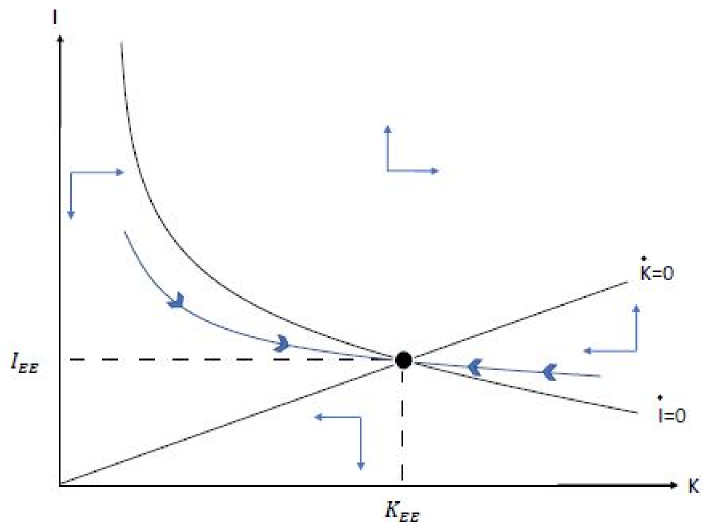
- Tomamos un punto (K_0, I_0) en el lugar geométrico determinado por $\dot{K}_t = 0$, de modo que $I_0 - \delta K_0 = 0$ [ver (12)]. Luego incrementamos I de I_0 a I_1 sin cambiar K. Entonces, por (9), tendremos que en (K_0, I_1) se cumple $\dot{K} = I_1 - I_0 > 0$. Luego K crece para puntos sobre $\dot{K} = 0$ y cae para puntos por debajo.
- Ahora tomamos un punto (K_0, I_0) en el lugar geométrico determinado por $\dot{I}_t = 0$, de modo que $(\delta + r)p(I_0) - \Pi'(K_1) = 0$ [ver (13)]. Luego incrementamos K de K_0 a K_1 sin cambiar I. Entonces, por (10) tendremos que en (K_0, I_1) se cumple $\dot{I} = -[\Pi'(K_1) - \Pi'(K_0)]/p'(I_0) > 0$, donde usamos que $\Pi'' < 0$. Luego I crece para puntos sobre $\dot{I} = 0$ y cae para puntos por debajo.

Los resultados anteriores se ven reflejados en el diagrama de fase que sigue.

Finalmente notamos que I puede saltar en este modelo, pues no hay costos internos de ajuste. Es interesante notar que los saltos de I son acotados porque sube el precio del capital, a diferencia del modelo neoclásico donde serían infinitos. Este es el "truco" fundamental de este modelo.

[2] Condiciones de Inada para Π' aseguran que sea así, no es necesario que la alumna note esto.

Figure 2: Diagrama de fases



(d) A continuación consideramos el efecto de un subsidio a la inversión, el cual modelamos como una reducción en el precio de los bienes de inversión desde $p(I)$ hasta $(1-\tau)p(I)$, donde $\tau > 0$ es el subsidio. Suponga que la economía se encuentra en estado estacionario con $\tau = 0$ cuando, de manera sorpresiva y permanente, se implementa el subsidio $\tau > 0$. Muestre que el capital del nuevo estado estacionario será mayor que en el estado estacionario original y use un diagrama de fase para describir la dinámica hacia el nuevo estado estacionario.

Respuesta: La derivación de (d) aplica en este caso si reemplazamos $p(I)$ por $(1-\tau)p(I)$. Entonces, denotando el capital de estado estacionario por $K_{EE}(\tau)$, de (11) tendremos que

$$\Pi'(K_{EE}(\tau)) = (\delta + r)(1-\tau)p(\delta K_{EE}(\tau)). \tag{16}$$

Para mostrar que K_{EE} es creciente en τ, podemos derivar implícitamente respecto de τ y usar que $\Pi'' < 0$. Alternativamente, podemos partir con la identidad que define $K_{\mathrm{EE}}(0)$:

$$\Pi'(K_{EE}(0)) = (\delta + r)p(\delta K_{EE}(0))$$

lo cual implica que

$$\Pi'(K_{EE}(0)) > (1-\tau)(\delta + r)p(\delta K_{EE}(0)).$$

Para restablecer la igualdad se debe incrementar K_{EE} ya que esto reduce el lado izquierdo y aumenta el lado derecho. Luego el capital (y por lo tanto la inversión) serán mayores en el nuevo estado estacionario.

Para describir la dinámica al nuevo estado estacionario, notamos que de (12) se sigue que el lugar geométrico para $\dot{K} = 0$ no cambia, pues no depende de $p(I)$. En cambio, el hecho que K será mayor en el nuevo estado estacionario indica que el lugar geométrico de $\dot{I} = 0$, que depende de la función de precios, se desplaza hacia afuera. Alternativamente, esto también se puede mostrar haciendo un análisis similar a partir de (13).

La dinámica entonces será la siguiente: Luego del shock, la economía salta al brazo estable del nuevo estado estacionario, lo cual conlleva un aumento de I. En la trayectoria al nuevo estado estacionario, la inversión va cayendo y el capital va creciendo. La figura siguiente ilustra el análisis anterior.

Figure 3: Diagrama de fases

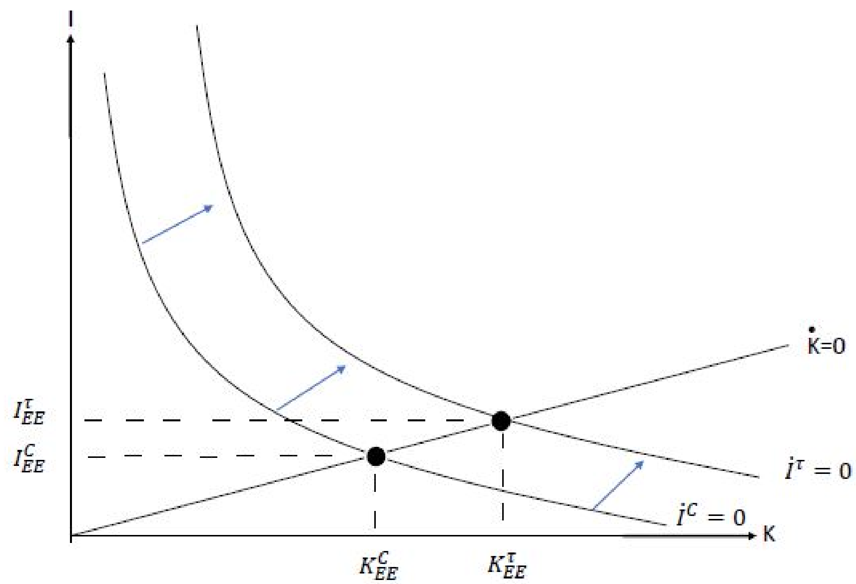
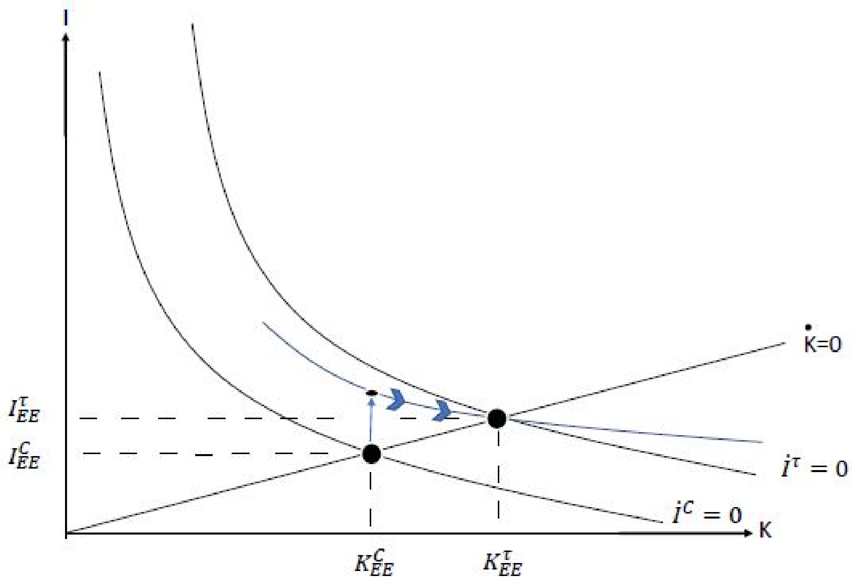


Figure 4: Diagrama de fases



(e) Asuma ahora que existe una única firma en la economía. Esta firma actúa como monopsonista en el mercado de bienes de inversión, es decir, la firma internaliza que si invierte I enfrentará un precio $p(I)$. Asuma que la elasticidad-precio de los bienes de inversión es constante, es decir, $p(I) = I^{\eta}$ con $\eta > 1$. Resuelva el problema de la firma y explique cómo cambia el nivel de capital (e inversión) de estado estacionario comparado a lo visto en (c).

Ayuda: Haga toda la derivación en función de $p(I)$, sin usar que $p(I) = I^{\eta}$, salvo cuando obtenga una expresión $p'(I)I/p(I)$ que puede reemplazar por η.

Respuesta: La firma resuelve

$$\max_{\{I_t\}_{t\geq 0}} \int_0^{\infty} e^{-rt}\left[\Pi(K_t) - p(I_t)I_t\right] dt$$
$$s.t. \quad \dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$

Luego:

$$H = \Pi(K_t) - p(I_t)I_t + \lambda_t[I_t - \delta K_t].$$

Tendremos:

$$\frac{\partial H}{\partial I} = 0 \Longrightarrow p(I_t)(1+\eta) = \lambda_t,$$

mientras que la segunda CPO sigue siendo la misma.

Luego podemos usar todo lo hecho en (c) en la medida que reemplacemos $p(I_t)$ por $(1+\eta)p(I_t)$. [O puede volver a hacerlo.] En particular, de (11) se sigue que el capital de estado estacionario se determina a partir de

$$\Pi'(K_{EE}) = (\delta + r)(1+\eta)p(\delta K_{EE}),$$

Luego la única diferencia con (11) es el factor $1+\eta$ al lado derecho.

Usando el mismo argumento que usamos en la parte (d) tendremos que K_{EE} será menor para $\eta > 0$ que para $\eta = 0$. La intuición es que un sector monopsónico invierte menos pues internaliza el impacto de sus decisiones de inversión sobre el precio del capital.

4. **Ajuste abultado y tiempo-de-construcción**

Considere el modelo de Calvo para ajustes de capital, es decir, con k en el rol de y en las láminas de las clases, y suponga que el target estático ($\hat{y}_{i,t}$ en la notación de cátedra) sigue un AR(1):

$$\hat{y}_{i,t} = \phi \hat{y}_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}$$

con $0 \leq \phi < 1$. Asuma también que el target estático es común a todos los agentes, es decir, $\varepsilon_{i,t} = \varepsilon_t$ para todo i.

(a) Demuestre que el capital agregado y_t sigue un AR(2). Encuentre expresiones para los coeficientes del AR(2).

Respuesta: Cada firma elige el nivel de capital actual con la información hasta el periodo t, por lo que el problema que resuelven es:

$$\min_{y_{i,t+1}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k (y_{i,t} - \hat{y}_{i,t+k})^2 \right]$$

Obtenemos la condición de primer orden:

$$2\mathbb{E}_t \left[\sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k (y^*_{i,t} - \hat{y}_{i,t+k}) \right] = 0$$

despejando obtenemos:

$$y^*_{i,t+1} = [1-\rho(1-\pi)] \sum_{k\geq 0} [\rho(1-\pi)]^k \mathbb{E}_t[y_{i,t+k}]$$

calculando la esperanza, el target dinámico nos queda:

$$y_{i,t+1} = \frac{1-\rho(1-\pi)}{1-\phi\rho(1-\pi)} \hat{y}_{i,t}$$

Por ley de grandes números e independencia sabemos que en el agregado:

$$\begin{aligned}
y_t &= (1-\pi) y_{t-1} + \pi y^*_t \\
y_t &= (1-\pi) y_{t-1} + \pi \frac{1-\rho(1-\pi)}{1-\phi\rho(1-\pi)} \hat{y}_{i,t} \\
y_t[1-(1-\pi)L][1-\phi L] &= \pi \frac{1-\rho(1-\pi)}{1-\phi\rho(1-\pi)} \varepsilon_t \\
y_t &= [(1-\pi)+\phi] y_{t-1} + \phi(1-\pi) y_{t-2} + \pi \frac{1-\rho(1-\pi)}{1-\phi\rho(1-\pi)} \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Se concluye que y_t sigue un AR(2).

Ahora incorporaremos el hecho de que toma tiempo llevar a cabo un proyecto de inversión (varios años). Para capturar esto suponemos que las decisiones de la firma sobre su stock de capital se materializan con un período de rezago. Es decir, en t decide cuál será su stock de capital en $t+1$. Haciendo el supuesto anterior,

(b) Derive una expresión para el target dinámico, $y^*_{i,t}$.

Respuesta:
Cada firma que ajusta elige el nivel de capital actual con la información hasta el periodo t, por lo que el problema que resuelven es:

$$\min_{y_{i,t+1}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{k\geq 1} \{\rho(1-\pi)\}^k (y_{i,t+1} - \hat{y}_{i,t+k})^2 \right]$$

Obtenemos la condición de primer orden:

$$2\mathbb{E}_t \left[\sum_{k\geq 1} \{\rho(1-\pi)\}^k (y^*_{i,t+1} - \hat{y}_{i,t+k}) \right] = 0$$

despejando obtenemos:

$$y^*_{i,t+1} = [1-\rho(1-\pi)] \sum_{k\geq 1} [\rho(1-\pi)]^k \mathbb{E}_t[y_{i,t+k}]$$

calculando la esperanza, el target dinámico nos queda:

$$y_{i,t+1} = \phi \frac{1-\rho(1-\pi)}{1-\phi\rho(1-\pi)} \hat{y}_{i,t}$$

(c) Derive una expresión para el capital agregado, y_t, y compare con la expresión obtenida en (a). ¿Cómo difieren las respuestas al impulso unitario (de los shocks ε_t) de las dos series? De la intuición para la diferencia. Comente si eventuales diferencias dependen del valor de ϕ.

Respuesta:
A nivel agregado tenemos que siempre se ajusta una fración π de las firmas. Tenemos que:

$$y_t = (1-\pi)y_{t-1} + \pi y^*_t$$

Reemplazamos por la expresión que obtuvimos en (b):

$$y_t = (1-\pi)y_{t-1} + \pi\phi \frac{1-\rho(1-\pi)}{1-\phi\rho(1-\pi)} \hat{y}_{t-1}$$

$$y_t = [(1-\pi)+\phi]y_{t-1} + \phi(1-\pi)y_{t-2} + \phi\pi \frac{1-\rho(1-\pi)}{1-\phi\rho(1-\pi)} \varepsilon_t$$

Notamos que cuando $\phi = 1$ el ajuste es exactamente igual que en el caso del modelo de Calvo, por otro lado, cuando $\phi = 0$ no hay ajuste. En los casos $\phi \in (0,1)$ el ajuste es menor que en el modelo original.

5. **Costos de ajuste no convexos y respuesta al impulso que varía en el tiempo**

La función de probabilidad de ajuste de una firma (hazard function) en un modelo con costos de ajuste no convexos y estocásticos viene dada por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \lambda x, & \text{si } 0 < x < 1/\lambda, \\ 1, & \text{si } x > 1/\lambda. \end{cases}$$

La inversión agregada en t viene dada por

$$\frac{I_t}{K_t} \equiv \int x\Lambda(x) f(x,t)\, \mathrm{d}x, \tag{17}$$

donde $f(x,t)$ la denota la densidad de probabilidad de la inversión mandatada (la inversión que habría sin costos de ajuste) justo antes de los ajustes de capital del período t.

Denotamos por $\mathrm{IRF}_{k,t}$ la función de respuesta al impulso unitario en t, donde $k = 0, 1, 2, ...$ corresponde al número de períodos desde el shock.

Suponga que $f(x,t)$ es una uniforme en el intervalo $[x_0, x_0 + 0.1]$, donde $x_0 < 1/\lambda - 0.1$, de modo que $f(x,t) = 10$ si $x_0 < x < x_0 + 0.1$ y $f(x,t) = 0$ en caso contrario.

(a) Explique por qué (15) es una buena definición para la tasa de inversión agregada.

(b) Dibuje tres gráficas con $\Lambda(x)$ y $f(x,t)$. La primera para un $x_0 < -0.1$, la segunda para un $x_0 \in [-0.1, 0]$ y la tercera para un $x_0 > 0$.

Respuesta:

- Si $x_0 < -0.1$ entonces $x_0 + 0.1 < 0$
- Si $x_0 \in [-0.1, 0]$ entonces $x_0 + 0.1 \in [0, 0.1]$
- Si $x_0 > 0$ entonces $x_0 + 0.1 > 0.1$

(c) Exprese I_t/K_t como función de x_0 y λ. En lo que sigue denotamos esta función por $y(x_0)$.

Respuesta: Para $x_0 < -0.1$ tenemos que

$$y(x_0) = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 f(x,t) dx = 0$$

Para $x_0 \in [-0.1, 0]$:

$$y(x_0) = \int_{0}^{x_0+0.1} x \cdot \lambda x 10 dx = \int_{0}^{x_0+0.1} 10\lambda x^2 dx$$
$$y(x_0) = 10\lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{x_0+0.1} = 10\lambda \frac{(x_0+0.1)^3}{3}$$

Para $x_0 > 0$:

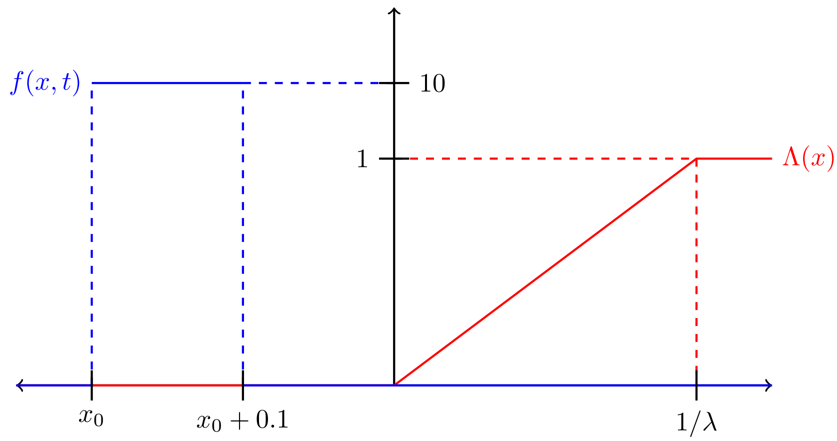


Figure 5: Caso: $x_0 < -0.1$

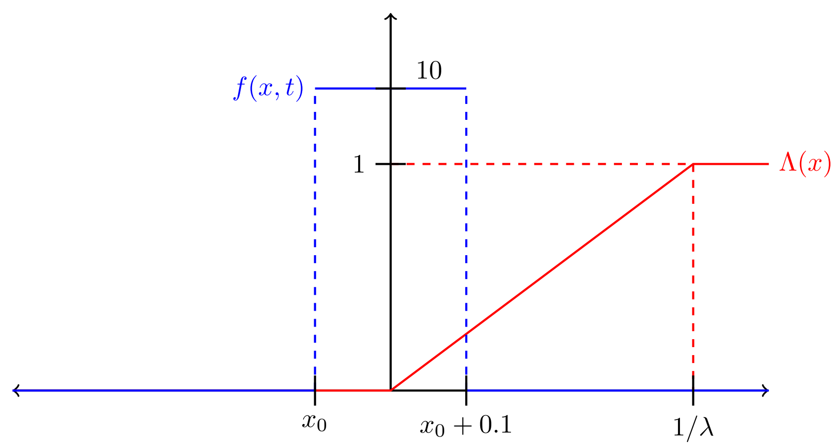


Figure 6: Caso: $x_0 \in [-0.1, 0]$

$$y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+0.1} x \cdot \lambda x 10 dx = \int_{x_0}^{x_0+0.1} 10\lambda x^2 dx$$

$$y(x_0) = 10\lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{x_0}^{x_0+0.1} = 10\lambda \left[\frac{(x_0+0.1)^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}\right]$$

(d) Calcule y grafique $y'(x_0)$. Explique por qué esta función es igual a $\text{IRF}_{0,t}$ cuando la economía es descrita por la densidad $f(x,t)$ correspondiente a x_0.

Respuesta: Cuando $x_0 < -0.1$, $y'(x_0) = 0$. Cuando $x_0 \in [-0.1, 0]$, $y'(x_0) = 10\lambda(x_0 + 0.1)^2$.

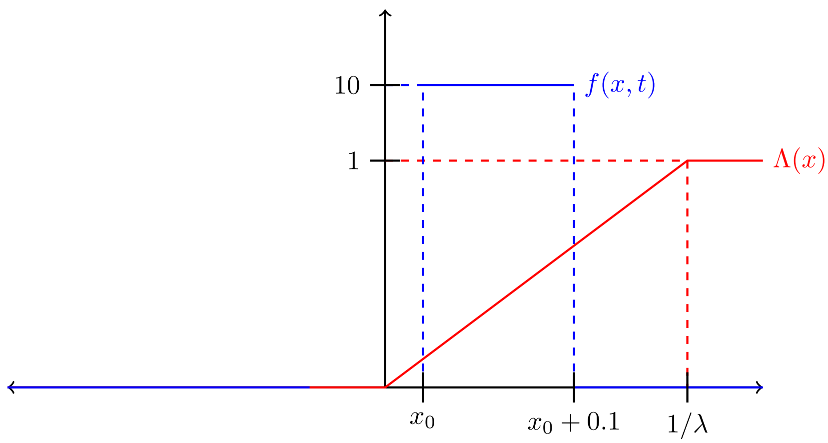


Figure 7: Caso: $x_0 > 0$

Cuando $x_0 > 0$

$$y'(x_0) = 10\lambda[(x_0 + 0.1)^2 - x_0^2] = 10\lambda[0.2x_0 + 0.1^2] = \lambda(2x_0 + 0.1)$$

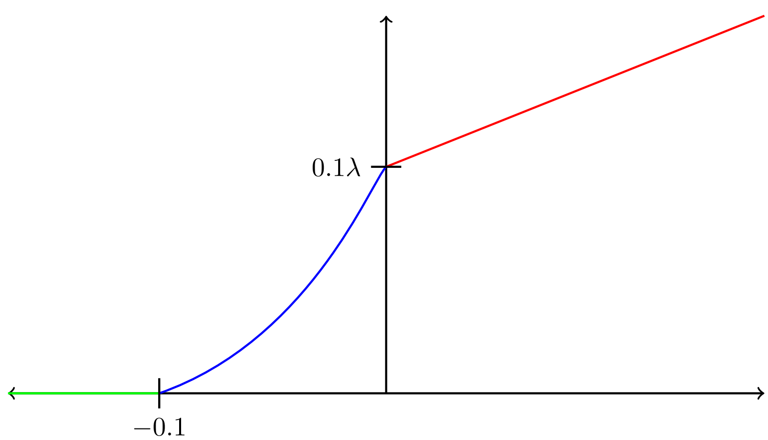


Figure 8: $y'(x_0)$

Esta función es igual a $\text{IRF}_{0,t}$ dado $f(x,t)$ porque $y'(x_0)$ son los cambios de la inversión agregada (como razón del capital) frente a cambios en x_0, que se pueden interpretar como shocks al capital deseado. Por tanto las definiciones son análogas.

La familia de uniformes que consideramos en este ejercicio captura, de manera simplificada, las variaciones de la distribución de la inversión mandatada. Es decir, suponemos que en todo momento del tiempo, la densidad justo antes de ajustar, $f(x,t)$, viene dada por una uniforme en $[x_0, x_0 + 0.1]$ donde lo único que varía en el tiempo es el valor de x_0. Seguimos suponiendo que en todo momento $x_0 < 1/\lambda - 0.1$.

(e) Luego de una serie de shocks agregados positivos y grandes, ¿la densidad que representa la economía corresponderá a valores grandes (y positivos) de x_0 o a valores pequeños (y hasta negativos) de x_0? Justifique.

Respuesta: Corresponderá a valores grandes (y positivos) de x_0. Ya que con shocks agregados positivos mi capital deseado crecerá. Por tanto, la distribución de x se encontrará más hacia la derecha, lo que corresponde a valores grandes y positivos de x_0.

(f) Luego de una serie de shocks agregados adversos, ¿la densidad que representa la economía corresponderá a valores grandes (y positivos) de x_0 o a valores pequeños (y hasta negativos) de x_0? Justifique.

Respuesta: Corresponderá a valores pequeños (y hasta negativos) de x_0. La justificación es igual que la (d), pero inversa.

(g) Use las partes (d), (e) y (f) para justifica la afirmación siguiente:

Cuando más se necesita, un estímulo a la inversión es menos efectivo.

Respuesta: Cuando hay una serie de shocks agregados adversos (lo que según (e) son valores pequeños de x_0), es cuando más se necesita un estímulo a la inversión. Pero la parte (c) nos muestra que la IRF es cero para $x_0 < -0.1$ (irreversabilidad total) y luego creciente para $x_0 > -0.1$.