ENECO610

Tarea II, Parte II

1. Sea $Y \subset \mathbb{R}^L$ un conjunto de producción. Demuestre que si Y es un cono convexo, entonces Y es aditivo.

2. Una firma produce un solo bien operando de forma simultánea o sólo una de sus dos plantas. En la planta 1 el bien es producido utilizando sólo el bien 1 acorde a la función de costos físicos $C_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ donde $C_1(q_1)$ es el mínimo monto del bien 1 que permite a la planta 1 producir q_1 unidades del bien final. Similarmente, la planta 2 produce el mismo bien final utilizando como insumo sólo el bien 2. acorde a la función de costos físicos $C_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ donde $C_2(q_2)$ es el mínimo monto del bien 2 que permite a la planta 2 producir q_2 unidades del bien final. Ambas funciones son contínuas, estrictamente crecientes y C^2. Además, $C_1(0) = C_2(0) = 0$. Los precios de los bienes 1 y 2 son w_1 y w_2, respectivamente.

   (a) Escriba el programa de minimización de costos de la firma y las C.P.O. Bajó qué condiciones sobre C_1 y C_2 son suficientes? (Hint: Debe utilizar las condiciones de Khun-Tucker).

   (b) Suponga que ambas plantas están activas en el óptimo. Cuál es la relación de sus costos marginales?

   (c) Asuma ahora que ambas funciones son estríctamente cóncavas. Demuestre que a lo más una planta puede estar activa.

3. Para un vector de precios de insumos $\mathbf{w} \gg 0$ y nivel de producción $q > 0$, encuentre la función de costos para la siguiente función de producción:

$$f(z_1, z_2) = z_1 + z_1 z_2 + z_2$$

4. Demuestre que la función de costos $C(\mathbf{w}, q)$ es superaditiva.

5. Considere la siguiente función de producción $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in [0,1), \\ -2 + 2z & \text{si } z \in [1,2), \\ z & \text{si } [2,3), \\ 1.5 + 0.5z & \text{si } z \geq 3 \end{cases}$$

   y asuma libre disposición.

   (a) Grafique la función de producción.

   (b) Es el conjunto cerrado? Convexo? Satisface la posibilidad de inacción? Posee algún tipo de retornos de escala? Posee costos hundidos o fijos?

   (c) Asuma que el precio del insumo es 1. Grafique la función de costos.

   (d) Para quén nivel de producción la función de costo medio está definida? Grafíquela.

   (e) Para quén nivel de producción la función de costo marginal está definida? Grafíquela.

   (f) Asuma que el precio del bien final es 1. Verbalmente describa y grafique la correspondencia de oferta.

6. La firma Sorny produce televisores (y_1) y radios (y_2) utilizando la siguiente función de producción implícita:

$$F(y_1, y_2, z) = (y_1)^2 + (y_2)^2 + z$$

   donde z es el único insumo (por ejemplo, trabajo). Entonces, cualquier vector (y_1, y_2, z) tal que $z \geq 0$ y $(y_1)^2 + (y_2)^2 + z \geq 0$ es tecnológicamente factible. Esta función de producción satisface la propiedad de libre disposición.

   (a) Satisface esta firma algún tipo de retornos a escala?

(b) Escriba el problema de maximización de beneficios y encuentre la función de oferta para un vector de precios $\mathbf{p} \gg 0$ dado.

(c) Chequee que la función de oferta es homogénea de grado 0 y que la función de beneficios es homogénea de grado 1.

(d) Chequee el lema de Hotteling.

(e) Chequee que $\partial y_j(\mathbf{p})/\partial p_j \geq 0$ para $j = 1, 2$.

7. Sea $Y \subset \mathbb{R}^L$ un conjunto de producción para una firma. Definimos $y \in Y$ como un vector eficiente si no existe otro vector de producción $y' \in Y$ tal que $y' \geq y$. Demuestre que:

   (a) Si, existe un vector de precios $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ tal que $\hat{y}$ maximiza los beneficios de la firma, entonces $\hat{y}$ es eficiente.

   (b) Asumamos que Y es convexo. Si $\hat{y}$ es eficiente, entonces existe $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{p} \cdot \hat{y}$ maximiza los beneficios de la firma.

8. Demuestre que si $f : \mathbf{R}^L_+ \to \mathbf{R}_+$ es una función de producción homogénea de grado 1, entonces la función de costo marginal es constante.

9. Sea $f : \mathbf{R}^L_+ \to \mathbf{R}_+$ es una función de producción homotética y definamos $C(\mathbf{w}, q)$ su función de costos para un vector de precios de insumos $\mathbf{w} \gg 0$ y un nivel de producción $q > 0$. Demuestre que $C(\mathbf{w}, q) = h(\mathbf{w})\phi(q)$, i.e., la función de costos es separable.

10. Asumamos que una firma demanda de todos los inputs en equilibrio. Su función de oferta es $y(p, \mathbf{w})$ y su función de costos es $C(\mathbf{w}, q) \in C^2(\mathbb{R}^L_+ \times \mathbf{R}_+)$. Demuestre que:

    (a) El aumento en el precio de un factor mueve a la curva de costo marginal hacia arriba o abajo dependiendo si el bien en cuestión es normal o inferior.

    (b) El aumento en el precio de un factor aumenta o decrece la oferta dependiendo si el bien es inferior o normal.

    (c) El efecto escala es siempre negativo.