Guía 2

Macroeconomía I - Otoño 2024

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Matías Muñoz (mmunozdo@fen.uchile.cl)
María Jesús Negrete (mnegrete@fen.uchile.cl)

Fecha de entrega: Jueves 30 de mayo hasta las 23:59. Enviar por mail a ambos ayudantes.

Pregunta 1: Modelo Harrod-Domar 2. [1]

A modo de continuación del ejercicio 1 de la Guía 1, suponga ahora que los agentes optimizan resolviendo el problema de maximización del modelo de Ramsey visto en clases.

a) Plantee el problema de optimización, el hamiltoniano y derive el sistema dinámico que caracteriza la solución usual:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(f'(k) - \delta - \rho\right)$$

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k$$

Respuesta

Una explicación más detallada, ordenada y en formato ppt puede encontrarse acá: Link.

Los hogares resuelven el siguiente problema de maximización en términos per cápita:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \int_0^{\infty} U(c(t)) \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt \\ \text{s.a.} \quad & \dot{a}(t) = w(t) + r \cdot a(t) - c(t) - n \cdot a(t) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad a(0) \text{ dado} \end{aligned}$$

Para este problema el Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H}(t, \lambda(t), c(t), a(t)) = U(c(t))e^{-(\rho-n)t} + \lambda(t) \cdot (w(t) + r \cdot a(t) - c(t) - n \cdot a(t))$$

Y las condiciones necesarias de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = -\dot{\lambda}(t)$$

Además de la restricción del problema y una Condición de Transversalidad, ya que estamos en presencia de un problema de horizonte infinito:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$$

[1] Dudas de este ejercicio a: mmunozdo@fen.uchile.cl

Planteamos las condiciones necesarias de optimalidad (CNO):

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = U'(c(t))e^{-(\rho-n)t} - \lambda(t) = 0$$

$$\lambda(t) = U'(c(t))e^{-(\rho-n)t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = -\lambda(t)(r-n) = \dot{\lambda}(t) \tag{2}$$

Derivamos (1) con respecto al tiempo:

$$\dot{\lambda}(t) = U''(c(t))\dot{c}(t)e^{-(\rho-n)t} - U'(c(t))e^{-(\rho-n)t}(p-n) \tag{3}$$

Reemplazamos (1) y (3) en (2):

$$U''(c(t))\dot{c}(t)\cancel{e^{-(\rho-n)t}} - U'(c(t))\cancel{e^{-(\rho-n)t}}(p-n) = -U'(c(t))\cancel{e^{-(\rho-n)t}}(r-n)$$

$$U''(c(t))\dot{c}(t) - U'(c(t))(\rho - r) = 0$$

$$\dot{c}(t) = \frac{U'(c(t))}{U''(c(t))}(\rho - r)$$

Utilizando $U(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{r-\rho}{\theta} \tag{4}$$

Ahora, del problema de la firma tenemos que:

$$f'(k(t)) = r + \delta \tag{5}$$

$$f(k(t)) - f'(k(t))k(t) = w \tag{6}$$

Usando (5) en (4) llegamos a:

$$\boxed{\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - \delta - \rho)} \tag{7}$$

Ahora, para llegar a la ecuación de $\dot{k}$ partimos de la restricción presupuestaria notando que $a(t) = k(t)$ y reemplazamos w utilizando (6) y r utilizando (5):

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - f'(k(t))k(t) + (f'(k(t)) - \delta) \cdot k(t) - c(t) - n$$

Reoganizando llegamos a:

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k - n$$

Con $n = 0$:

$$\boxed{\dot{k} = f(k) - c - \delta k}$$

Puntajes: 2 puntos por plantear el problema de optimización correctamente, considerando la condición de transversalidad. 4 puntos el hamiltoniano y las CNO. 2 puntos por las CPO de la firma. 2 puntos por combinar lo anterior y llegar al resultado.

b) Usando la función de producción Leontief antes descrita ($Y = \min(AK, BL)$), grafique el locus para $\dot{k} = 0$ (diagrama de fase) en el plano (k, c), distinga dos regiones.

Respuesta

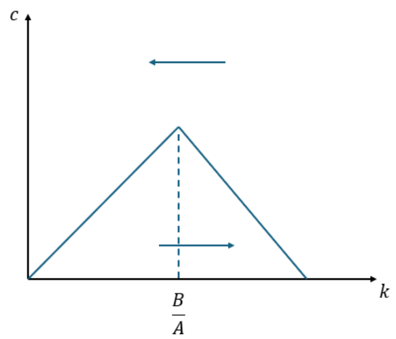
Tendremos que la función para $\dot{k}$ es la siguiente:

$$\dot{k} = \begin{cases} (A-\delta)k - c & \text{si} \quad 0 \leq k \leq \frac{B}{A} \\ B - c - \delta k & \text{si} \quad k > \frac{B}{A} \end{cases}$$

Por lo que el locus $\dot{k} = 0$,

$$\dot{k} = 0 = \begin{cases} c = (A-\delta)k & \text{si} \quad 0 \leq k \leq \frac{B}{A} \\ c = B - \delta k & \text{si} \quad k > \frac{B}{A} \end{cases}$$

Sabemos que $A > \delta$ porque A es el factor productividad que mejora la producción (por lo tanto es mayor que 1) y δ es la tasa de depreciación, por lo que va entre 0 y 1. Así, podemos graficar el locus $\dot{k}$ de la siguiente forma:



Las flechas las sabemos notando que cuando el capital crece, $\dot{k} > 0$, se llega a $(A-\delta)k > c$. Es decir, se cumple que el capital crece cuando los puntos están debajo de la curva. Para la flecha hacia la izquierda es análogo.

Puntajes: 2 puntos por la curva graficada. 2 puntos por los vientos.

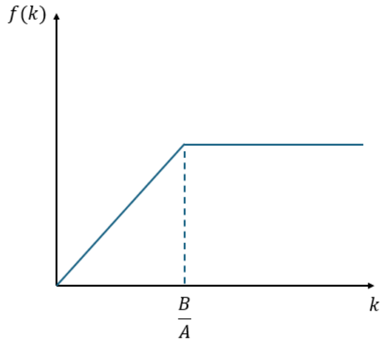
c) Dado que la derivada de $f'(k)$ no está bien definida en $k = B/A$, asuma que $f'(k) = \delta + \rho$ en ese punto. Grafique el locus $\dot{c} = 0$ (diagrama de fase) en el plano (k, c), distinga dos regiones.

Respuesta

Notamos que la función de producción es la siguiente:

$$f(k) = \begin{cases} Ak & \text{si} \quad 0 \leq k \leq \frac{B}{A} \\ B & \text{si} \quad k > \frac{B}{A} \end{cases}$$

Gráficamente:



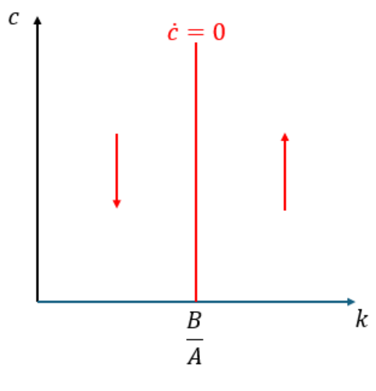
Notamos que la derivada $f'(k)$ no está definida en $k = \frac{B}{A}$, ya que existen infinitas rectas tangentes a la curva en ese punto y por lo tanto infinitas pendientes de estas rectas. Así, usamos la información del enunciado para reparar la función y tenemos que la derivada es:

$$f'(k) = \begin{cases} A & \text{si} \quad 0 \leq k < \frac{B}{A} \\ \delta + \rho & \text{si} \quad k = \frac{B}{A} \\ 0 & \text{si} \quad k > \frac{B}{A} \end{cases}$$

Por lo que, para graficar el locus $\dot{c} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{c} = \frac{c}{\theta}(f'(k) - \delta - \rho) &= 0 \\ f'(k) &= \delta + \rho \\ k = f'^{-1}(\delta + \rho) &= \frac{B}{A} \quad \text{(constante)} \end{aligned}$$

Graficamos el locus:



Para obtener las flechas vemos el caso cuando $\dot{c} > 0$:

$$\begin{aligned} f'(k) - \delta - \rho &> 0 \\ f'(k) &> \delta + \rho \\ k &> f'^{-1}(\delta + \rho) \\ k &> \frac{B}{A} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el consumo estará creciendo para los niveles de capital mayores a $\frac{B}{A}$, es decir, para los puntos a la derecha de la recta.

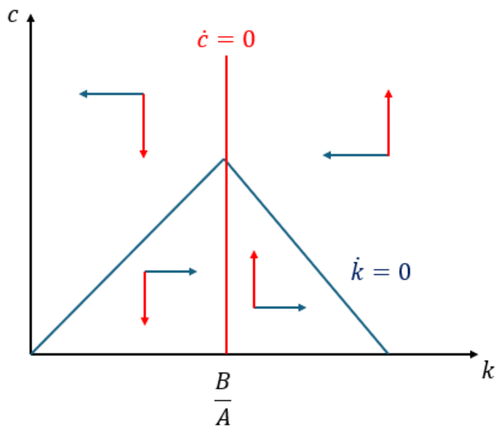
Sin embargo, en esta pregunta había otra forma de pensar los vientos, que era ver qué pasaba cuando $k > \frac{B}{A}$. En este caso se llega a que $\dot{c} = -\frac{c}{\theta} \cdot (\delta + \rho)$, lo cual es negativo, por lo que si $k > \frac{B}{A}$, entonces el consumo debiese estar cayendo. Esto arroja unos vientos opuestos a lo analizado anteriormente, y el sistema sí sería saddle-path stable. Se discutió en la ayudantía la posible validez de ambos casos y los supuestos y pasos que pueden estar bien o mal en cada enfoque y se decidió por esta vez corregir ambos casos como correctos. Dudas respecto a esto pueden enviar mail a mmunozdo@gmail.com. Se proseguirá asumiendo que el caso correcto es lo planteado en esta pauta.

Puntajes: 2 puntos por la curva graficada. 2 puntos por los vientos.

d) ¿Es este sistema "saddle path stable"? ¿Puede una economía como esta exhibir inherentemente un mal resultado? ¿Se sigue cumpliendo la conclusión de Harrod y Domar?

Respuesta

Combinando b) y c) tenemos que:



El sistema no es saddle-path stable. Una economía como esta exhibirá inherentemente un mal resultado y la conclusión de Harrod y Domar se sigue cumpliendo.

Puntaje: Se asignó puntaje según la coherencia de cada argumentación considerando las líneas generales estipuladas en esta respuesta y en la anterior.

Pregunta 2: Derivando resultados de clases. [2]

En este ejercicio estudiaremos la tasa de ahorro en el modelo de Ramsey, tanto en estado estacionario como en su dinámica. Para esto, considere el modelo con una función de producción Cobb-Douglas: $F(K, T{\cdot}L) = Y = K^{\alpha}(T{\cdot}L)^{1-\alpha}$. Partiremos primero analizando la tasa de ahorro en estado estacionario.

a) Exprese la función de producción en términos de unidades de eficiencia, $f(\hat{k})$. Donde $\hat{z} = \frac{Z}{T \cdot L}$.

[2] Dudas de este ejercicio a: mmunozdo@fen.uchile.cl

Respuesta

Se obtiene simplemente reordenando la función de producción:

$$Y = K^{\alpha}(T \cdot L)^{1-\alpha}$$
$$Y = \left(\frac{K}{T \cdot L}\right)^{\alpha} \cdot T \cdot L$$
$$\frac{Y}{T \cdot L} = \left(\frac{K}{T \cdot L}\right)^{\alpha}$$
$$\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}$$

Puntajes: 2 puntos por haber hecho la derivación correctamente.

b) Considere las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k}$$
$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x)$$

Derive la tasa de ahorro óptima de estado estacionario s^*.

Respuesta

Tomando la ecuación para la dinámica del capital en estado estacionario $\left(\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = 0\right)$, tenemos que:

$$\hat{c}^* = \hat{k}^{*^{\alpha}} - (\delta + n + x)\hat{k}^*$$
$$\frac{\hat{c}^*}{\hat{y}^*} = 1 - (\delta + n + x)\hat{k}^{*^{1-\alpha}}$$

Con esto, definimos la tasa de ahorro de estado estacionario como $s^* = 1 - \frac{\hat{c}^*}{\hat{y}^*}$. Por lo que usando la ecuación anterior tenemos que:

$$s^* = 1 - (1 - (\delta + n + x)\hat{k}^{*^{1-\alpha}})$$

$$s^* = (\delta + n + x)\hat{k}^{*^{1-\alpha}} \tag{8}$$

Ahora debemos encontrar $\hat{k}^*$ para poder tener s^* en función de solamente parámetros. Para esto, partimos de la ecuación de la tasa de crecimiento de estado estacionario ($\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0$):

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x$$
$$\alpha \hat{k}^{*^{\alpha}} = \delta + \rho + \theta x$$
$$\hat{k}^* = \left(\frac{\delta + \rho + \theta x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

Por lo que reemplazando en (8) llegamos a la tasa de ahorro de estado estacionario:

$$s^* = \frac{(\delta + n + x)\alpha}{\delta + \rho + \theta x}$$

Puntajes: 2 puntos por llegar a s^* en función de k^*, puntaje total (4 puntos) si se llegó a s^* en función de parámetros.

c) Muestre que en estado estacionario $s^* < \alpha$. **HINT:** Utilice la condición de transversalidad para obtener información acerca de $f'(\hat{k})$.

Respuesta

La condición de transversalidad es $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)a(t) = 0$, es decir, los agentes no quieren dejar ningún activo valioso al final. De las CNO del problema del hogar, sabemos que se cumple que:

$$\lambda(t) = U'(c(t))e^{-(\rho-n)t} \tag{9}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -(r-n)\lambda(t)$$

Resolviendo esta última ecuación diferencial, tenemos que $\lambda(t) = \lambda(0) \cdot e^{-(r-n)t}$. Donde $\lambda(0)$ es igual a $U'(c(0))$, usando la ecuación (9). Así, como $\lambda(0)$ es igual a la utilidad marginal del consumo inicial, tenemos que $\lambda(0) > 0$. Ahora reemplazamos la solución de $\lambda(t)$ a la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ a(t) \cdot \lambda(0) \cdot e^{-(r-n)t} \right\} = 0$$

Ahora reemplazamos una CPO del problema de optimización de la firma, $f'(\hat{k}) = r + \delta$, en la CDT y llegamos a:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ a(t) \cdot \lambda(0) \cdot e^{-(f'(\hat{k})-\delta-n)t} \right\} = 0$$

El último paso, es multiplicar y dividir por e^{xt} para transformar $a(t)$ en $\hat{a}(t) = a(t) \cdot e^{-xt}$ y utilizar que en equilibrio se cumple que $\hat{a}(t) = \hat{k}(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ a(t) \cdot \frac{e^{xt}}{e^{xt}} \cdot \lambda(0) \cdot e^{-(f'(\hat{k})-\delta-n)t} \right\} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ \hat{k}(t) \cdot \lambda(0) \cdot e^{-(f'(\hat{k})-\delta-n-x)t} \right\} = 0$$

De esta última expresión, notamos que para que el límite tienda a 0, se debe cumplir necesariamente que $f'(\hat{k}) > \delta - n - x$.

Con esta información podemos responder lo que nos piden. Notar que en estado estacionario, de $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0$ tenemos que $f'(\hat{k}) = \delta + \rho + \theta x$. Por lo que reemplazando esto último en la tasa de ahorro de estado estacionario llegamos a que:

$$s^* = \frac{(\delta + n + x)\alpha}{f'(\hat{k})}$$

Y como $f'(\hat{k}) > \delta + n + x$, tenemos que $s^* < \alpha$.

Puntajes: 4 puntos por una demostración válida. Se otorgó puntaje intermedio si hubo errores, supuestos incorrectos en el desarrollo o falta de justificación en algunos pasos.

Ahora analizaremos la dinámica de la tasa de ahorro. Para esto, primero debemos escribir el modelo en términos de $\hat{k}$ y $\frac{\hat{c}}{\hat{y}}$.

d) Muestre que el modelo se puede escribir como:

$$\frac{(\dot{\hat{c}/\hat{y}})}{\hat{c}/\hat{y}} = \frac{1}{\theta}(\alpha\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x) - \alpha\left(\hat{k}^{\alpha-1} - \left(\frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right) \cdot \hat{k}^{\alpha-1} - (\delta + n + x)\right)$$

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \hat{k}^{\alpha-1} - \left(\frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right) \cdot \hat{k}^{\alpha-1} - (\delta + n + x)$$

Respuesta

Comenzamos derivando $\frac{\hat{c}}{\hat{y}}$ con respecto al tiempo:

$$\dot{\left(\frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right)} = \frac{\dot{\hat{c}}\hat{y} - \hat{c}\dot{\hat{y}}}{\hat{y}^2} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{y}} - \frac{\hat{c}}{\hat{y}} \cdot \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}}$$

Dividimos lo anterior por $(\hat{c}/\hat{y})$:

$$\begin{aligned} \frac{(\dot{\hat{c}/\hat{y}})}{(\hat{c}/\hat{y})} &= \frac{\dot{\hat{c}}}{\cancel{\hat{y}}} \cdot \frac{\cancel{\hat{y}}}{\hat{c}} - \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} \\ &= \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} - \frac{\alpha\hat{k}^{\alpha-1} \cdot \dot{\hat{k}}}{\hat{k}^{\alpha}} \\ &= \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} - \alpha\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} \end{aligned}$$

Reemplazando las ecuaciones para $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}}$ y $\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}$ habituales:

$$\frac{(\dot{\hat{c}/\hat{y}})}{(\hat{c}/\hat{y})} = \frac{1}{\theta}(\alpha\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x) - \alpha\left(\hat{k}^{\alpha-1} - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - (\delta + n + x)\right)$$

Notando que $\frac{\hat{c}}{\hat{k}} = \frac{\hat{c}}{\hat{y}} \cdot \hat{k}^{\alpha-1}$ llegamos a las ecuaciones pedidas:

$$\frac{(\dot{\hat{c}/\hat{y}})}{\hat{c}/\hat{y}} = \frac{1}{\theta}(\alpha\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x) - \alpha\left(\hat{k}^{\alpha-1} - \left(\frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right) \cdot \hat{k}^{\alpha-1} - (\delta + n + x)\right)$$

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \hat{k}^{\alpha-1} - \left(\frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right) \cdot \hat{k}^{\alpha-1} - (\delta + n + x)$$

Puntajes: 4 puntos por haber llegado correctamente a las ecuaciones, 2 puntos por cada una.

e) A partir de la ecuación para $\frac{(\dot{\hat{c}/\hat{y}})}{\hat{c}/\hat{y}}$ en estado estacionario, derive una condición de la cual dependa la trayectoria del ahorro. Grafique los distintos casos.

Respuesta

Tenemos que en estado estacionario $\frac{\dot{\hat{c}/\hat{y}}}{\hat{c}/\hat{y}} = 0$, por lo que:

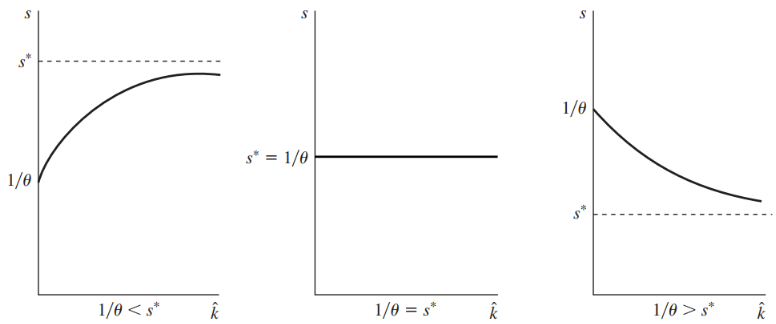
$$0 = \frac{(\dot{\hat{c}/\hat{y}})}{\hat{c}/\hat{y}} = \frac{1}{\theta}(\alpha\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x) - \alpha\left(\hat{k}^{\alpha-1} - \left(\frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right) \cdot \hat{k}^{\alpha-1} - (\delta + n + x)\right)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{c}}{\hat{y}} &= -\frac{1}{\theta\alpha}\hat{k}^{1-\alpha}(\alpha\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x) + 1 - (\delta + n + x)\hat{k}^{1-\alpha} \\
&= -\frac{1}{\theta} - \frac{\hat{k}^{1-\alpha}}{\theta\alpha}(-\delta - \rho - \theta x) + 1 - (\delta + n + x)\hat{k}^{1-\alpha} \\
&= \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) + \left[\frac{\delta + \rho + \theta x}{\theta\alpha} - (\delta + n + x)\right]\hat{k}^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

La función anterior tiene pendiente positiva si:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta + \rho + \theta x}{\theta\alpha} &> \delta + n + x \\
\frac{\delta + \rho + \theta x}{(\delta + n + x)\alpha} &> \theta \\
s^* &< \frac{1}{\theta}
\end{aligned}
$$

Por lo que el ahorro $\left(1 - \frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right)$ tendrá una trayectoria negativa si $s^* < \frac{1}{\theta}$. Será constante si $s^* = \frac{1}{\theta}$ y creciente si $s^* > \frac{1}{\theta}$. Gráficamente:



Puntajes: 2 puntos por llegar a la condición, 2 puntos por los gráficos.

f) Finalmente, derivaremos la velocidad de convergencia. Las ecuaciones de equilibrio se pueden escribir de la siguiente manera:

$$
\dot{ln(\hat{k})} = e^{-(1-\alpha)ln(\hat{k})} - e^{ln(\hat{c})-ln(\hat{k})} - (\delta + n + x) \tag{10}
$$

$$
\dot{ln(\hat{c})} = \frac{1}{\theta}(\alpha e^{-(1-\alpha)ln(\hat{k})} - \delta - \rho - \theta x) \tag{11}
$$

Note que en estado estacionario se cumple que:

$$
\begin{aligned}
e^{-(1-\alpha)ln(\hat{k}^*)} - e^{ln(\hat{c}^*)-ln(\hat{k}^*)} &= \delta + n + x \\
e^{ln(\hat{c}^*)-ln(\hat{k}^*)} &= \frac{\delta + \rho + \theta x}{\alpha} - (\delta + n + x)
\end{aligned}
$$

Muestre que la velocidad de convergencia viene dada por:

$$
\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\left\{ \zeta^2 + 4\left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)(\delta + \rho + \theta x)\left[\frac{\delta + \rho + \theta x}{\alpha} - (\delta + n + x)\right] \right\}^{\frac{1}{2}} - \zeta \right) \tag{12}
$$

Donde $\zeta = \rho - n - (1-\theta)x$.

Para esto, primero obtenga una aproximación de Taylor de orden 1 alrededor del estado estacionario para $\dot{ln(\hat{k})}$ y $\dot{ln(\hat{c})}$, donde las variables son $ln(\hat{k})$ y $ln(\hat{c})$. Luego, escriba el sistema compuesto por estas dos ecuaciones lineales matricialmente del tipo $Y = MX$, donde:

$$Y = \begin{bmatrix} \dot{ln(\hat{k})} \\ \dot{ln(\hat{c})} \end{bmatrix}$$

y

$$X = \begin{bmatrix} ln(\hat{k}) - ln(\hat{k}^*) \\ ln(\hat{c}) - ln(\hat{c}^*) \end{bmatrix}$$

La velocidad de convergencia viene dada por el negativo del valor propio negativo de la matriz M.

Respuesta

Primero hacemos la aproximación de Taylor de orden 1 de las ecuaciones (10) y (11) alrededor de estado estacionario:

$$\begin{aligned}
\dot{ln(\hat{k})} &\approx \left(-(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)ln\left(\hat{k}^*\right)} + e^{ln(\hat{c}^*)-ln\left(\hat{k}^*\right)}\right)\left(ln(\hat{k}) - \ln(k^*)\right) - e^{ln(\hat{c}^*)-ln\left(\hat{k}^*\right)}\left(ln(\hat{c}) - ln(\hat{c}^*)\right) \\
&\approx \left(-(1-\alpha)\frac{(\delta+\rho+\theta x)}{\alpha} + \frac{(\delta+\rho+\theta x)}{\alpha} - (\delta+n+x)\right)\left(\ln(\hat{k}) - \ln(k^*)\right) + \\
&\quad \left(\delta+n+x-\frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha}\right)\left(\ln(\hat{c}) - \ln(\hat{c}^*)\right) \\
&\approx (\cancel{\delta}+\rho+\theta x-\cancel{\delta}-n-x)\left(\ln(\hat{k}) - \ln(k^*)\right)\left(\delta+n+x-\frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha}\right)\left(\ln(\hat{c}) - \ln(\hat{c}^*)\right) \\
\dot{\ln(\hat{k})} &\approx [\rho+(\theta-1)x-n]\left(\ln(\hat{k}) - \ln(\hat{k}^*)\right)\left[\delta+n+x-\frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha}\right]\left(ln(\hat{c}) - ln(\hat{c}^*)\right)
\end{aligned}$$

Ahora para $\dot{ln(\hat{c})}$:

$$\begin{aligned}
\dot{ln(\hat{c})} &\approx \left[-\frac{1}{\theta}\alpha(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)ln\left(\hat{k}^*\right)}\right]\left(ln(\hat{k}) - ln(k^*)\right) \\
\dot{\ln(\hat{c})} &\approx \frac{-(1-\alpha)(\delta+\rho+\theta x)}{\theta}\left(ln(\hat{k}) - ln(k^*)\right)
\end{aligned}$$

Con esto, escribimos el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\ln(\hat{k})} \\ \dot{\ln(\hat{c})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho-n-(1-\theta)x & (\delta+n+x)-\frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha} \\ \frac{-(1-\alpha)(\delta+\rho+\theta x)}{\theta} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ln(\hat{k}) - \ln\left(\hat{k}^*\right) \\ \ln(\hat{c}) - \ln(\hat{c}^*) \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos los valores propio de esta matriz:

$$\det\begin{bmatrix} \rho-n-(1-\theta)x-\epsilon & (\delta+n+x)-\frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha} \\ \frac{-(1-\alpha)(\delta+\rho+\theta x)}{\theta} & -\epsilon \end{bmatrix} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&-(\rho-n-(1-\theta)x-\epsilon)\epsilon+\left[(\delta+n+x)-\frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha}\right]\frac{(1-\alpha)(\delta+\rho+\theta x)}{\theta}=0\\
&-(\rho-n-(1-\theta)x)\epsilon+\epsilon^2+\cdots=0\\
&\epsilon^2-\underbrace{(\rho-n-(1-\theta)x)}_{\zeta}\epsilon-\cdots=0\\
&2\epsilon=\zeta\pm\sqrt{\zeta^2+4\cdot\left[\frac{\delta+p+\theta x}{\alpha}-(\delta+n+x)\right]\frac{(1-\alpha)(\delta+\rho+\theta x)}{\theta}}
\end{aligned}
$$

Ahora definimos ϵ_1 como la solución de ϵ con la raíz positiva y ϵ_2 cuando tomamos la raíz negativa. Con esto, podemos escribir lo siguiente:

$$\log(\hat{k})=\log(\hat{k}^*)+\psi_1\cdot e^{\epsilon_1 t}+\psi_2\cdot e^{\epsilon_2 t}$$

Donde ψ_1 y ψ_2 son constantes. Como $\epsilon_1>0$, ψ_1 debe ser igual a 0 para que el sistema converja a estado estacionario. ψ_2 se despeja tomando $t=0$, con lo que llegamos a $\psi_2=log(\hat{k}(0))-log(\hat{k}^*)$. Sustituyendo estos valores en la expresión anterior y definiendo $\epsilon_2=-\beta$ llegamos a que:

$$\log(\hat{k})=(1-e^{-\beta t})\cdot\log(\hat{k}^*)+e^{-\beta t}\cdot\log(\hat{k}(0))$$

Por lo que la velocidad de convergencia viene dada finalmente por:

$$\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\left\{\zeta^2+4\left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)(\delta+\rho+\theta x)\left[\frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha}-(\delta+n+x)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}-\zeta\right)$$

Puntajes: 4 puntos por la log-linearización correcta. 2 puntos por plantear el sistema en forma matricial. 2 puntos por calcular correctamente el valor propio. 2 puntos por llegar a β.

g) A partir de lo anterior, y considerando el caso en que la tasa de ahorro es constante ($s^*=\frac{1}{\theta}$), muestre que $\beta=(1-\alpha)(\delta+n+x)$. **Hint:** Primero muestre que $\zeta=(x+n+\delta)(\alpha\theta-1)$ y reemplácelo en (12). Después, usando nuevamente una expresión derivada de $s^*=\frac{1}{\theta}$, trabaje la ecuación (12). Tendrá que llegar a un cuadrado de trinomio para eliminar el exponente $\frac{1}{2}$.

Respuesta

Primero desarrollamos la definición de ζ:

$$
\begin{aligned}
\zeta&=\rho-n-(1-\theta)x\\
&=\rho-n-x+\theta x\\
&=(\rho+\delta+\theta x)-(n+x+\delta)\\
&=\alpha\theta(n+x+\delta)-(n+x+\delta)\qquad\left(s^*=\frac{(\delta+n+x)\alpha}{\delta+\rho+\theta x}=\frac{1}{\theta}\right)\\
\zeta&=(\alpha\theta-1)(x+n+\delta)
\end{aligned}
$$

Con esto, tenemos tenemos uno de los términos que están dentro de la raíz, ahora desarrollamos el segundo:

$$
\begin{aligned}
&4\left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)(\delta+\rho+\theta x)\left[\frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha}-(\delta+n+x)\right] \\
&=4\left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)(\alpha\theta(\delta+n+x))[\theta(\delta+n+x)-(\delta+n+x)] \\
&=4\left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\alpha\theta(x+n+\delta)^2(\theta-1)
\end{aligned}
$$

Con estas dos expresiones, desarrollamos la raíz:

$$
\begin{aligned}
&=\left\{(\text{x+n+}\ \delta)^2\left[(\alpha\theta-1)^2+4(1-\alpha)\alpha(\theta-1)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&=\left\{(x+n+\delta)^2\left[\alpha^2\theta^2-2\alpha\theta+1+4\alpha(1-\alpha)(\theta-1)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&=\left\{(x+n+\delta)^2\left[\alpha^2\theta^2-2\alpha\theta+1+4\alpha(\theta-1-\alpha\theta+\alpha)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&=\left\{(x+n+\delta)^2\left[\alpha^2\theta^2-2\alpha\theta+1+4\alpha\theta-4\alpha-4\alpha^2\theta+4\alpha^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&=\left\{(x+n+\delta)^2\left[\alpha^2\theta^2+2\alpha\theta-4\alpha-4\alpha^2\theta+4\alpha^2+1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&=\left\{(x+n+\delta)^2\left[\alpha^2\theta^2+4\alpha^2+1+2\alpha\theta-4\alpha-4\alpha^2\theta\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&=\left\{(x+n+\delta)^2\left[(\alpha\theta-2\alpha+1)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&=(x+n+\delta)(\alpha\theta-2\alpha+1)
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que la velocidad de convergencia es:

$$
\begin{aligned}
2\beta &= (x+n+\delta)(\alpha\theta-2\alpha+1)-(\alpha\theta-1)(x+n+\delta) \\
&= (x+n+\delta)(\cancel{\alpha\theta}-2\alpha+1-\cancel{\alpha\theta}+1) \\
&= (x+n+\delta)2(1-\alpha) \\
\beta &= (x+n+\delta)(1-\alpha),
\end{aligned}
$$

Puntajes: 2 puntos por el trabajo de ζ. 4 puntos por el trabajo de la raíz y el cuadrado de trinomio. 2 puntos por llegar al resultado.