Guía 4, Segunda Parte

Nombre: Alberto Belmar
Rut: 19.801.271-8

Pregunta 1

a.

Respuesta

En esta economía $h_t = \gamma k_t$, por tanto, como $\gamma > 0$, el capital humano se acumula a través de la acumulación de capital físico, es decir, más capital físico por trabajador conlleva a más capital humano por trabajador. La intuición de esto es la misma que en el modelo "learning by doing" visto en clases, donde, mientras más se invierte en capital físico, mayor será la acumulación capital humano gracias al aprendizaje que se va obteniendo en el tiempo.

Luego, podemos afirmar que el nivel de capital humano no aumenta por inversión directa de las firmas o individuos, sino que aumenta por el efecto secundario de crear capital físico. Por lo tanto, es de esperar que la solución competitiva decentralizada no coincida con la solución del planificador social, ya que probablemente en el equilibrio decentralizado se demandará un nivel menor de capital al socialmente óptimo.

b.

Respuesta

En este caso, si trabajamos las variables en términos por trabajador, el problema del planificador social viene dado por:

$$\begin{aligned} \text{máx} \qquad & \textstyle\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\theta}}}{1-\frac{1}{\theta}} \\ & \Delta k_{t+1} = y_t - \delta k_t - c_t \end{aligned}$$

Pd: Notar que en la restricción presupuestaria anterior, no aparece ningún término para el crecimiento de L, pues este último es constante.

Por otra parte, el producto por trabajador viene dado por $y_t = k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$. Luego, si trabajamos la restricción presupuestaria considerando la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \Delta k_{t+1} &= y_t - \delta k_t - c_t \\ k_{t+1} &= k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} + (1-\delta) k_t - c_t \\ &= k_t^{\alpha} (\gamma k_t)^{1-\alpha} + (1-\delta) k_t - c_t \\ &= k_t(\gamma^{1-\alpha} + 1 - \delta) - c_t \end{aligned}$$

Luego, el lagrangeano viene dado por:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\theta}}}{1-\frac{1}{\theta}} + \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t \left[(\gamma^{1-\alpha} + 1 - \delta) k_t - c_t - k_{t+1} \right]$$

Las CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t c_t^{-\frac{1}{\theta}} - \mu_t = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\mu_t + \mu_{t+1}(\gamma^{1-\alpha} + 1 - \delta) = 0 \quad (2)$$

Si adelantamos (1) un período nos quedaría $\beta^{t+1} c_{t+1}^{-\frac{1}{\theta}} = \mu_{t+1}$. Reemplazando esta última expresión y (1) en (2), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\beta^t}{c_t^{\frac{1}{\theta}}} &= \frac{\beta^{t+1}}{c_{t+1}^{\frac{1}{\theta}}}(\gamma^{1-\alpha} + 1 - \delta) \\ \frac{c_{t+1}}{c_t} &= [\beta(\gamma^{1-\alpha} + 1 - \delta)]^\theta \end{aligned}$$

Así, encontramos la tasa de crecimiento para el consumo.

Ahora bien, para la tasa de ahorro, podemos escribir la dinámica del capital en función de la tasa de ahorro, resultando:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= s y_t + (1 - \delta) k_t \\ &= k_t (s\gamma^{1-\alpha} + 1 - \delta) \end{aligned}$$

También podemos usar la otra versión de la dinámica del consumo para mostrar que:

$$\begin{aligned} c_t &= (1 - s) y_t \\ &= (1 - s) k_t \gamma^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Luego, de la ecuación anterior, notamos que la dinámica del consumo es igual a la del capital, es decir:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} [\beta(\gamma^{1-\alpha} + 1 - \delta)]^\theta &= s\gamma^{1-\alpha} + 1 - \delta \\ s &= \frac{[\beta(\gamma^{1-\alpha} + 1 - \delta)]^\theta - (1 - \delta)}{\gamma^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Llegando finalmente a la tasa de ahorro.

c.

1.

Respuesta

Las dinámicas del capital y bonos para los hogares pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= i_t^k + (1 - \delta) k_t \\ b_{t+1} &= i_t^b + b_t \end{aligned}$$

Los bonos no se deprecian. Por otra parte, la restricción del hogar es:

$$c_t + i_t^k + i_t^b = w_t h_t + r_t k_t + R_t b_t$$

Lo consumido y gastado en inversión por el hogar es igual al salario y las ganancias por capital y bonos. Luego, reemplazando las dinámicas:

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + b_{t+1} - b_t &= w_t h_t + r_t k_t + R_t b_t \\ c_t + k_{t+1} + b_{t+1} &= w_t h_t + (r_t + 1 - \delta)k_t + (1 + R_t)b_t \end{aligned}$$

Mostrando lo solicitado.

Sabemos que la condición de arbitraje es cuando los costos de capital y bonos se igualan, es decir:

$$\begin{aligned} (r_t + 1 - \delta) &= 1 + R_t \\ R_t &= r_t - \delta \end{aligned}$$

Si se desvían del arbitraje los agentes preferirán aquel con menor costo. Entonces, bajo arbitraje están indiferentes entre invertir en capital o bonos. Luego, reemplazando en la restricción, llegamos a:

$$\begin{aligned} c_t + a_{t+1} &= w_t h_t + (r_t + 1 - \delta)k_t + (r_t + 1 - \delta)b_t \\ c_t + a_{t+1} &= w_t h_t + (r_t + 1 - \delta)a_t \end{aligned}$$

Llegamos a la última expresión usando $a_t = k_t + b_t \implies a_{t+1} = k_{t+1} + b_{t+1}$.

2.

Respuesta

El problema de maximización del hogar es,

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \textstyle\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\theta}}}{1-\frac{1}{\theta}} \\ s.a \quad & a_{t+1} = w_t h_t + (1 + R_t)a_t - c_t \end{aligned}$$

El lagrangeano viene dado por:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\theta}}}{1-\frac{1}{\theta}} + \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t [w_t h_t + (1 + R_t)a_t - c_t - a_{t+1}]$$

Luego, las CPO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_t} &= \beta^t c_t^{-\frac{1}{\theta}} - \mu_t = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_{t+1}} &= -\mu_t + \mu_{t+1}(1 + R_t) = 0 \end{aligned}$$

Luego, usando ambas condiciones,

$$\begin{aligned}
\frac{\beta^t}{c_t^{\frac{1}{\theta}}} &= \frac{\beta^{t+1}}{c_{t+1}^{\frac{1}{\theta}}}(1+R_t) \\
\frac{c_{t+1}}{c_t} &= [\beta(1+R_t)]^{\theta}
\end{aligned}$$

El problema de maximización de la firma es,

$$\begin{aligned}
\max_{K_t,h_t} &\quad K_t^{\alpha}(h_tL_t)^{1-\alpha} - w_th_tL_t - r_tK_t \\
\max &\quad k_t^{\alpha}h_t^{1-\alpha} - w_th_t - r_tk_t
\end{aligned}$$

Expresamos el problema por trabajador. Las CPO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial k_t} &= \alpha k_t^{\alpha-1}h_t^{1-\alpha} = r_t \\
\frac{\partial L}{\partial h_t} &= (1-\alpha)k_t^{\alpha}h_t^{-\alpha} = w_t
\end{aligned}$$

Usando la expresión de h_t:

$$\begin{aligned}
\alpha\gamma^{1-\alpha} &= r_t \\
(1-\alpha)\gamma^{-\alpha} &= w_t
\end{aligned}$$

3.

Respuesta

La tasa de crecimiento del consumo viene dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{c_{t+1}}{c_t} &= [\beta(1+r_t-\delta)]^{\theta} \\
&= [\beta(1+\alpha\gamma^{1-\alpha}-\delta)]^{\theta}
\end{aligned}$$

d.

Respuesta

Como $\alpha < 1$, tenemos que el equilibrio descentralizado es menor que el equilibrio del planificador social. Esto se produce porque las firmas competitivas no toman en cuenta el hecho de que invertir en más capital físico, produce como externalidad positiva aumentar el capital humano.

En cambio, el planificador social internaliza la externalidad para escoger la cantidad de capital físico óptima. Por ende, la tasa de crecimiento en el equilibrio descentralizado es menor, ya que las firmas no invierten lo socialmente óptimo en capital físico, que sería invertir más de lo que invierten, dada la externalidad positiva que presenta este insumo.

e.

1.

Respuesta

La nueva restricción presupuestaria del hogar viene dada por:

$$c_t + k_{t+1} + b_{t+1} = w_t h_t + (r_t + 1 - \delta)k_t + (1 + R_t)b_t - T_t$$

Sin embargo, en el problema del hogar, las CPO no se ven afectadas por la inclusión del impuesto de suma alzada (no es distorsionador). Por tanto, la tasa de crecimiento seguirá siendo:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(1 + r_t - \delta)]^{\theta}$$

Ahora bien, el problema de la firma es:

$$\text{máx}\, k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - w_t h_t - (1-\tau) r_t k_t$$

La CPO para h_t es la misma, mientras que para k_t tendremos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial k_t} =^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} - r_t(1-\tau) = 0$$

Usando la expresión para h_t:

$$r_t = \frac{\alpha \gamma^{1-\alpha}}{1-\tau}$$

2.

Respuesta

En este caso, la tasa de crecimiento es:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left[\beta(1 + \frac{\alpha\gamma^{1-\alpha}}{1-\tau} - \delta)\right]^{\theta}$$

Para que esta tasa sea igual a la del planificador social debe cumplirse que $1 - \tau = \alpha \implies \tau = 1 - \alpha$. Esto permitirá alcanzar el equilibrio del planificador social.

El gobierno quiere subsidiar la inversión en capital físico dado que las firmas subvaloran los rendimientos del capital, lo que las lleva a un nivel de capital físico menor que el socialmente deseable. No interiorizan la externalidad del capital vía *learning by doing* que impulsa el capital humano.

Pregunta 2

a.

Respuesta

A partir del enunciado, sabemos que el precio de cada producto intermedio es igual a su producto marginal en el sector final. Entonces, la CPO del producto Y_t con respecto al producto intermedio, es:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial x_{it}} = \alpha L^{1-\alpha} A_{it}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha-1} = p_i \tag{3}$$

Con p_i el precio del producto intermedio i. Luego, si despejamos x_{it} de (3):

$$\begin{aligned} x_{it}^{\alpha-1} &= \frac{p_i}{\alpha L^{1-\alpha} A_{it}^{1-\alpha}} \\ x_{it}^{\alpha-1} &= \frac{p_i L^{\alpha-1} A_{it}^{\alpha-1}}{\alpha} \\ x_{it} &= LA_{it} \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

Ahora bien, para encontrar p_i y poder despejar finalmente x_{it}, necesitamos resolver el problema de los monopolistas de bienes intermedios. Por ende, recordando que el Cmg de producir una unidad de bien intermedio es igual a 1, tendremos:

$$\max_{p_i} \pi_i = (p_i - 1) LA_{it} \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \iff \max_{p_i} \pi_i = LA_{it} \frac{p_i^{\alpha/(\alpha-1)}}{\alpha^{1/(\alpha-1)}} - LA_{it} \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}$$

Luego, la CPO con respecto a p_i:

$$\frac{\partial \pi_i}{p_i} = \frac{\alpha}{\alpha-1} LA_{it} \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} - \frac{1}{\alpha-1} LA_{it} \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} \frac{1}{\alpha} = 0$$

Desarrollando un poco esta última expresión, llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha-1} LA_{it} \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} &= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} LA_{it} \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} \\ \alpha^2 \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} &= \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} \\ \alpha^2 &= \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{-1} \\ p_i &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Notamos que el precio del bien intermedio p_i es igual al estudiado en clases, $\frac{1}{\alpha}$, siendo este mayor que el $Cmg = 1$, ya que los productores de bienes intermedios son monopolistas y por lo tanto, obtienen cierto margen de ganancia.

Para obtener la cantidad x_{it} que se tranza en equilibrio, reemplazamos el p_i encontrado en la expresión que veníamos trabajando para x_{it}, obteniendo:

$$\begin{aligned} x_{it} &= LA_{it} \left(\frac{p_i}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ x_{it} &= LA_{it} \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ x_{it} &= LA_{it} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

De esta forma, vemos que la cantidad x_{it} encontrada sí difiere a la del modelo visto en clases, que es: $x_{it} = LA^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$. Esto se debe principalmente a que en este modelo, el término A_{it} en la función de producción del bien final no está elevado a 1 (como en clases), sino que a $1-\alpha$, es decir, la calidad del producto presenta rendimientos decrecientes. Además, en el modelo visto en clases, teníamos una tecnología fija (A) para todo i, t; es decir, la tecnología no variaba ni por sector ni por tiempo. Una última diferencia que podemos resaltar es que en el modelo de clases el número de bienes intermedios utilizados era discreto y acá continuo.

b.

Respuesta

Reemplazando la expresión encontrada para x_{it} en el nivel de producto Y_t del bien final:

$$\begin{aligned} Y_t &= L^{1-\alpha}\int_0^1 A_{it}^{1-\alpha}\left[LA_{it}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}\right]^{\alpha} di \\ &= \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} L\int_0^1 A_{it}di \\ &= \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} A_t L \end{aligned}$$

Notar que el producto per cápita se expresa como:

$$y_t = \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} A_t$$

Llegando así al nivel de producto y producto per cápita de equilibrio en función de parámetros.

Ahora bien, el GDP de equilibrio es:

$$\begin{aligned} GDP_t &= Y_t - \int_0^1 x_{it}di \\ &= \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} LA_t - \int_0^1 \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} LA_{it}di \\ &= \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} LA_t - \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} LA_t \\ &= \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} A_t L(1-\alpha^2) \end{aligned}$$

c.

Respuesta

Por el enunciado, sabemos que n_{it} se define como el gasto realizado en investigación partido en la productividad del nuevo bien intermedio si la investigación es existosa.

Luego, la idea detrás de asumir que $\phi'(n_i) > 0$, es indicar que mayor inversión o gasto en investigación para algún sector específico, hará más probable que en ese sector se logre innovar o hacer nuevos descubrimientos.

d.

Respuesta

Para comenzar, sabemos que el gasto en investigación de la emprendedora viene dado por:

$$\begin{aligned} R_{it} &= n_{it}A^*_{it} \\ &= \gamma n_{it}A_{it-1} \end{aligned}$$

Luego, tendremos que la emprendedora resuelve el problema de maximizar su beneficio esperado dado que logró innovar:

$$\text{máx } \phi(n_{it})\pi_{it} - R_{it}$$

Que es equivalente a decir:

$$\text{máx } \phi\left(\frac{R_{it}}{A_{it}}\right)\pi_{it} - R_{it}$$

Luego, la CPO:

$$\frac{\partial}{\partial R_{it}} = \phi'(n_{it})\frac{\pi_{it}}{A_{it}} - 1 = 0$$

Notar que para este problema, el beneficio máximo viene dado por:

$$\begin{aligned} \pi_{it} &= \alpha(LA_{it})^{1-\alpha}\alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}(LA_{it})^{\alpha} - \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}(LA_{it}) \\ &= \left(\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}\right)LA_{it} \\ &= (1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}LA_{it} \end{aligned}$$

Luego, si desarrollamos la CPO con respecto a R_{it}:

$$\begin{aligned} \phi'(n_{it})\frac{\pi_{it}}{A_{it}} &= 1 \\ \lambda\sigma n_{it}^{\sigma-1}\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)L\frac{A_{it}}{A_{it}} &= 1 \\ n^*_{it} &= \left(\lambda\sigma\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)L\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

Llegando así al nivel óptimo de n_{it}. Ahora bien, reemplazando esta última expresión en $\phi(n_{it})$:

$$\begin{aligned} \phi(n^*_{it}) &= \lambda\left(\lambda\sigma\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)L\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \\ &= \lambda^{\frac{1}{1-\sigma}}\left(\sigma\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)L\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

Encontrando la probabilidad de innovar en equilibrio.

Por último, podemos afirmar que la probabilidad de innovar es la misma en todos los sectores, sin importar cuál sea el nivel inicial de productividad. Lo anterior, puesto que $\phi(n_{it})$ no depende de i en equilibrio.

e.

Respuesta

Como el producto es proporcional a la productividad agregada A_t, la tasa de crecimiento de la economía será igual a la tasa de crecimiento de A_t:

$$g_t = \frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} \tag{4}$$

Sin embargo, la tasa de crecimiento agregada en este caso es estocástica, pues la mala suerte en algunos sectores que no innovan y se quedan con A_{it-1} se verá compensada por la buena suerte en otros que logran innovar con γA_{it-1}. Es decir, en cada sector, tendremos:

$$A_{it} = \begin{cases} \gamma A_{it-1} & \textit{con prob.} \quad \phi(n_{it}^*) \\ \\ A_{it-1} & \textit{con prob.} \quad 1-\phi(n_{it}^*) \end{cases}$$

Luego, como teníamos que $A_t = \int_0^1 A_{it}di$, podemos expresar la productividad promedio del período como:

$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^1 [\phi(n_{it}^*)\gamma A_{it-1} + (1-\phi(n_{it}^*))A_{it-1}] \\ &= \int_0^1 A_{it-1}di + \phi(n_{it}^*)(\gamma-1)\int_0^1 A_{it-1}di \\ &= A_{t-1} + \phi(n_{it}^*)(\gamma-1)A_{t-1} \end{aligned}$$

Reemplazando esto último en la ecuación (4), llegamos a:

$$\begin{aligned} g_t &= \frac{A_{t-1} + \phi(n_{it}^*)(\gamma-1)A_{t-1} - A_{t-1}}{A_{t-1}} \\ g_t &= \frac{\phi(n_{it}^*)(\gamma-1)A_{t-1}}{A_{t-1}} \\ g_t &= \phi(n_{it}^*)(\gamma-1) \\ g_t &= \lambda^{\frac{1}{1-\sigma}} \left(\sigma\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)L\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} (\gamma-1) \end{aligned}$$

Por ende, llegamos a la conclusión de que $\mu = \phi(n_{it}^*)$, para que podamos expresar g_t como $g_t = \mu(\gamma-1)$.

Finalmente, si en vez de tener un continuo de bienes intermedios, existe sólo uno, tendremos que el crecimiento del producto (g_t) será el mismo. Lo anterior, puesto que g_t depende sólo de parámetros que son constantes en la cantidad de bienes intermedios.

f.

Respuesta

Para responder esta pregunta, recordemos que habíamos llegado a que el crecimiento del producto es:

$$g_t = \lambda^{\frac{1}{1-\sigma}} \left(\sigma\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)L\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} (\gamma-1)$$

Luego, para evaluar como cambia g_t antes cambios en λ, γ y L, haremos las respectivas derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_t}{\partial \lambda} &> 0\\ \frac{\partial g_t}{\partial \gamma} &> 0\\ \frac{\partial g_t}{\partial L} &> 0\end{aligned}$$

La interpretación de cada derivada es la siguiente:

i. $\frac{\partial g_t}{\partial \lambda}$: La tasa de crecimiento del GDP es creciente en λ. Además, como λ acompaña a n_{it}^{σ} en el término relacionado con la probabilidad de innovar, podemos decir que a mayor probabilidad de innovar, mayor crecimiento del GDP. O más aún, podemos entender λ como la productividad del gasto en innovación y decir que el crecimiento del GDP es creciente en este.

ii. $\frac{\partial g_t}{\partial \gamma}$: La tasa de crecimiento del GDP es creciente en γ. Podemos entender este último parámetro como el factor de mejora en la productividad (a mayor *gamma*, mejor asignación de los recursos por ejemplo). Luego, tendremos que un país con un alto γ podrá aprovechar un mayor porcentaje de nueva innovación y adentrarse en la frontera del conocimiento, creciendo más rápido.

iii. $\frac{\partial g_t}{\partial L}$: La tasa de crecimiento del GDP es creciente en L. La intuición es que un aumento en la población debiese traer consigo un aumento de la oferta de trabajo. Luego, tendremos una mayor competencia en el mercado laboral, lo que llevaría a la eficiencia y potenciaría el crecimiento.

Pregunta 3

a.

Respuesta

En primer lugar, es importante notar que el problema del hogar no se ve afectado por el virus. En cambio, el problema de las firmas sí. Por ende, el problema de maximización de los hogares es:

$$\begin{aligned}\text{máx} \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt\\ s.a \quad & \dot{a} = ra + w - c\end{aligned}$$

Luego, el Hamiltoniano:

$$H = e^{-\rho t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + v_t(ra + w - c)$$

Las CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\rho t}c^{-\theta} - v = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial a} = vr = -\dot{v} \quad (6)$$

Si diferenciamos (5) con respecto al tiempo, obtenemos:

$$-\rho e^{-\rho t}c^{-\theta} - \theta e^{-\rho t}c^{-\theta-1}\dot{c} = \dot{v} \tag{7}$$

Luego, reemplazando (5) y (7) en (6):

$$\begin{aligned} e^{-\rho t}c^{-\theta}r &= e^{-\rho t}[\rho c^{-\theta} + \theta c^{-\theta-1}\dot{c}] \\ r &= \rho + \theta c^{-1}\dot{c} \\ \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\theta}(r-\rho) \end{aligned}$$

De esta forma, encontramos la relación entre la tasa de crecimiento del consumo y la tasa de interés. Además, podemos ver que la tasa de crecimiento del consumo es creciente en la tasa de interés.

Siguiendo con la idea anterior, tendremos que si r es alto, el retorno del ahorro aumenta y el individuo prefiere desplazar consumo hacia el futuro, es decir, tendrá una trayectoria creciente del consumo ($\dot{c}/c$ aumenta). En cambio, si r es bajo, el agente prefiere traer consumo al presente, por lo que tendrá una trayectoria decreciente del consumo.

En adición, si ρ es alto, el agente es más impaciente, por lo que querrá consumir más hoy y la tasa de crecimiento del consumo cae.

b.

Respuesta

La utilidad después de impuestos viene dada por:

$$V_t = (1-\tau)AK_t p(G_t/Y_t) - (r+\delta)K_t - wL$$

Luego, como L es constante y τ, $p(G_t/Y_t)$ están dados, tendremos que la empresa sólo escojerá K_t, por lo que la CPO será:

$$\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = (1-\tau)p(G_t/Y_t)A - (r+\delta) = 0 \implies r = (1-\tau)p(G_t/Y_t)A - \delta \tag{8}$$

c.

Respuesta

Si reemplazamos (8) en la tasa de crecimiento de c que obtuvimos en la parte $a.$, y además, considerando que $\tau = G_t/Y_t$, tendremos:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[(1-\tau)p(\tau)A - \delta - \rho]$$

Luego, para que esta tasa sea positiva, debe ocurrir que $(1-\tau)p(\tau)A > \delta + \rho$.

Por otra parte, sabemos que la utilidad es $\int_0^\infty e^{-\rho t}\dfrac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$ y la dinámica del consumo puede escribirse como:

$$c_t = c_0 e^{\frac{1}{\theta}(r-\rho)t} \tag{9}$$

Donde la última expresión se obtiene después de resolver la ecuación diferencial que viene de $\dot{c}/c$. Luego, si reemplazamos (9) en la función de utilidad:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\frac{(c_0 e^{\frac{1}{\theta}(r-\rho)t})^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right]dt \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{c_0^{1-\theta}e^{(-\rho+\frac{1-\theta}{\theta}(r-\rho))t}}{1-\theta} - \frac{e^{-\rho t}}{1-\theta}\right]dt \end{aligned}$$

Por tanto, para que la utilidad presente límite, debe ocurrir que $-\rho + \frac{1-\theta}{\theta}(r-\rho) < 0$, ya que el término de la derecha se encuentra acotado. Así, se debe cumplir que:

$$\rho > \frac{1-\theta}{\theta}(r-\rho) \implies \rho > \frac{1-\theta}{\theta}(A(1-\tau)p(\tau)-\delta-\rho)$$

d.

Respuesta

Primero, se debe notar que por la forma funcional de Y_t, nos encontramos frente a un modelo AK de crecimiento endógeno, es decir, la tasa de crecimiento del producto será igual a la del consumo. Por tanto, si tomamos la ecuación $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[(1-\tau)p(\tau)A - \delta - \rho]$ y la derivamos con respecto a τ:

$$\frac{\partial(\dot{c}/c)}{\partial\tau} = \frac{A}{\theta}[-p(\tau) + (1-\tau)p'(\tau)] = 0$$

Así, el gobierno colocará la tasa de impuesto que cumpla con:

$$p(\tau) = (1-\tau)p'(\tau)$$

Entonces, como $p'(\tau) > 0$; si τ es muy grande, esto afectará negativamente el stock de capital, haciendo que también caiga el producto. Por el contrario, si τ es muy pequeño, $p(\tau)$ también lo será y se perderá parte importante de la producción Y_t una vez que el virus afecta la economía.

e.

Respuesta

En este caso, tendremos que el problema del planificador social es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt \\ s.a \quad & Y = C + I + G \end{aligned}$$

Sabemos que $Y = AK_t p(\tau)$ y $\dot{K} = I - \delta K_t$, por lo que la restricción es:

$$\dot{K} = (1-\tau)AK_t p(\tau) - C - \delta K_t$$

El Hamiltoniano quedaría:

$$H \quad : \quad e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta} + v_t[(1-\tau)AK_t p(\tau) - C - \delta K_t]$$

Luego, las CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\rho t}c_t^{-\theta} - v_t = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = v_t(-AK_t p(\tau) + (1-\tau)AK_t p'(\tau)) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial H}{\partial K_t} = v_t((1-\tau)Ap(\tau) - \delta) = -\dot{v} \tag{12}$$

Diferenciando (10) respecto al tiempo, nos queda:

$$-\rho e^{-\rho t}c_t^{-\theta} - \theta e^{-\rho t}c_t^{-\theta-1}\dot{c} = \dot{v} \tag{13}$$

Reemplazando (10) y (13) en (12), tenemos que:

$$\begin{aligned}(1-\tau)Ap(\tau) - \delta &= \theta\frac{\dot{c}}{c} + \rho \\ \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\theta}[(1-\tau)Ap(\tau) - \delta - \rho]\end{aligned}$$

Así, podemos notar que el crecimiento descentralizado de c es el mismo que propone el planificador. Esto ocurre porque no hay alguna externalidad positiva que potenciar y por ende, el mercado asigna de manera eficiente las cantidades de capital a utilizar.

f.

Respuesta

Como los efectos negativos en la productividad serán de carácter permanente, lo más conveniente es aumentar p, ya que esto acercaría la producción a sus niveles "normales" durante el virus y también reduciría los efectos negativos permanentes en la productividad después del virus.

Para lograr dicho objetivo, el gobierno debe aumentar su gasto G, ya que p es creciente en G. Luego, para poder aumentar su gasto de manera sostenible, el gobierno puede endeudarse con el extranjero a la tasa de interés internacional. Finalmente, cuando el virus haya acabado, se pueden cobrar impuestos a la población para pagar la deuda internacional acumulada durante la crisis.