② Equivalencia Cierto y Proceso de ingresos Caroll.

(a) $\log P_t = \log(1+g) + \log P_{t-1} + \log N_t$

Si $\log P_t - \log P_{t-1} = \log(1+g) + \log N_t \sim I(0)$

$\Longrightarrow$ $\log P_t$ es ruido blanco

<u>Demostración</u>

$$\log P_t - \log P_{t-1} = \log(1+g) + \underbrace{\log N_t}_{\text{iid } (\mu,\ \sigma^2 \text{ acotada})}$$

Luego $E(\log P_t - \log P_{t-1}) = \log(1+g) \quad \forall t$

Estacionaria $(I(0))$

$\Longrightarrow$ $\log P_t \sim I(1)$

Además <u>clave</u> suponer que σ^2 (varianza) es acotada y $E(\log N_t) = \mu$

<u>cte</u> y acotada...

Para μ acotada... $\log E(N_t) = \log(1) = 0$

Por Jensen $\mu \leq 0$ ✓

y $var(\Delta \log P_t) = \underbrace{var(1+g)}_{0} + var(\log N_t) \leq \sigma^2$ ✓

$\Rightarrow$ varianza acotada.

(6) Asumiendo los hechos de Equiv. cierto (Hall, $\delta = r$, utilidad cuadrática) tenemos que Euler:

$$u'(C_t) = \frac{1+r}{1+\delta} E_t[u'(C_{t+1})] \quad / r = \delta$$

$$u'(C_t) = E_t[u'(C_{t+1})] \quad / u' = 1 - bc$$

$$\boxed{C_t = E_t C_{t+1}}$$

Por Hall ...... $\boxed{C_t = E_t C_{t+s}} \quad \forall s \geq 1$

Ahora, revisando la restricción presupuestaria ...

$$W \equiv A_0 + \sum_{u\geq 0} R^{-u} E_0(Y_u)$$

Como demostramos en (1) a) se cumple No Ponzi $\frac{A_t}{R^t} \to 0$

por lo que

$$A_0 + \sum_{u \geq 0} R^{-u} E_0(Y_u) = \sum_{t\geq 0} E_0(C_t) \cdot R^{-t} \quad / \text{Hall}$$

$$A_0 + \sum_{s\geq 0} R^{-t} E_t(Y_{t+s}) = \frac{R}{r} \cdot C_0$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{r+1}{r} \{A_0 + \sum_{s\geq 0} R^{-t} E_0(Y_{s})\}$$

En general $\Rightarrow$ $$C_t = \frac{r+1}{r}\left\{A_t + \sum_{s\geq 0} R^{-t} E_t(Y_{t+s})\right\}$$

Ahora $$E_t Y_t = Y_t = \varepsilon_t P_t = \varepsilon_t$$

$$E_t Y_{t+s} = E_t(\varepsilon_{t+s} P_{t+s}) = (1-p) E_t(P_{t+s}) = (1-p) E_t\left(P_t \cdot \prod_{i=1}^{s} N_{t+i} \cdot (1+g)\right)$$

$$\ldots \quad E_t Y_{t+s} = (1-p)\cdot P_t \cdot 1 \cdot (1+g)^s$$

$$= (1-p)(1+g)^s \cdot P_t \quad \forall s \geq 1.$$

Por tanto...

$$C_t^o = \left(\frac{1+r}{r}\right)^{-1}\left\{A_t + Y_t + \sum_{s\geq 1} R^{-s}(1-p)(1+g)^s P_t\right\}$$

$$= \left(\frac{1+r}{r}\right)^{-1}\left\{A_t + P_t\varepsilon_t + (1-p)\sum_{s\geq 1}\left(\frac{1+g}{R}\right)^s \cdot P_t\right\}$$

$$= \left(\frac{1+r}{r}\right)^{-1}\left\{A_t + P_t\varepsilon_t + \frac{(1-p)B}{1-B} P_t\right\} \quad / B = (1+g)R^{-1}$$

$$= \left(\frac{1+r}{r}\right)^{-1}\left\{A_t + \frac{(1-B)\varepsilon_t + (1-p)B}{1-B} P_t\right\}$$

$$\Rightarrow \quad C_t^o = \left(\frac{1+r}{r}\right)^{-1}\left\{A_t + \left[\frac{(1-(1+g)R^{-1})\varepsilon_t + (1-p)(1+g)R^{-1}}{1-(1+g)R^{-1}}\right]P_t\right\}$$

$$= \left(\frac{1+r}{r}\right)^{-1}\left\{A_t + \left[\frac{\frac{r-g}{R}\varepsilon_t + (1-p)\frac{(1+g)}{R}}{r-g/R}\right] P_t\right\}$$

$$\boxed{C_t^o = \left(\frac{R}{r}\right)^{-1}\left\{A_t + \left[\frac{(r-g)\varepsilon_t + (1-p)(1+g)}{r-g}\right]P_t\right\}}$$

(c)

Sabemos que $\Delta C_t = \frac{r}{1+r} \sum_{u\geq 0} (1+r)^{-u} E_t y_{t+u} - E_{t-1} y_{t+u}$

(1) $\sum_{u\geq 0} (1+r)^{-u} E_t y_{t+u} = y_t + \sum_{u\geq 1} E_t y_{t+u} (1+r)^{-u}$

$= y_t + \frac{(1+r)^{-1}(1+g)}{1-(1+r)^{-1}(1+g)} \cdot P_t (1-p).$

$= y_t + \frac{(1+g)\, P_t (1-p)}{1+r-1-g}.$

$= y_t + \frac{1+g}{r-g} \cdot P_t (1-p)$

$= P_t \left\{ \varepsilon_t + \frac{1+g}{r-g} (1-p) \right\}$

$\Leftrightarrow P_t \varepsilon_t + \frac{1+g}{r-g} (1-p) N_t P_{t-1} (1+g)$

(2) $\sum_{u\geq 0} (1+r)^{-u} E_{t-1} y_{t+u} = \frac{1}{1-(1+r)^{-1}(1+g)} \cdot (1+g)^{1} \cdot (1-p) \cdot P_{t-1}$

$= \frac{(1+r)(1+g)(1-p)}{r-g} P_{t-1}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta C_t = \frac{r}{1+r} \left[\{P_t\} \{\varepsilon_t\} + \left\{ \frac{(1+g)^2}{r-g} (1-p) N_t - \frac{(1+r)(1-p)}{r-g} \right\} P_{t-1} \right]$

TRANSITORIA.

$\boxed{\frac{\partial \Delta C_t}{\partial \varepsilon_t} = \frac{r}{1+r} \cdot P_t}$ $\rightarrow$ La propensión corresponde a una anualidad de lo observado como permanente en el periodo. La intuición es que ajustan persistencia con el modelo esperado de ingresos.

$$\boxed{\frac{\partial \Delta c_t}{\partial m_t} = \frac{r}{1+r}\left\{\frac{(1+g)}{r-g}(1-\rho)\,(1+g)\right\}P_{t-1}}$$

→ Corresponde a una anualidad descontada por $(r-g)$ que representa el "crecimiento neto" por año de su tasa, y ajustado por la probabilidad de que el shock transitorio permanezca, ajustado por el crecimiento del permanente $(1+g)^2$ y ajustado por el ingreso permanente del periodo anterior.

→ La intuición es que los individuos ajustan su ingreso permanente mirando la tendencia de crecimiento así como un ajuste de persistencia por el shock transitorio.

④ Equivalencia cierta y regla fiscal simple

(a) $U = c - \frac{b}{2}c^2$

$$\Rightarrow C_t^{*} = \frac{r}{1+r}\left\{ \sum \beta^k E_t[y_{L,t+k}] + A_t \right\}$$

De (3): $A_{t+1} = (1+r)(A_t + y_t - C_t)$

$$(1+r)C_t = (1+r)A_t + (1+r)y_t - A_{t+1}$$

$$C_t = A_t + y_t - \frac{A_{t+1}}{1+r}$$

En (2): $A_t + y_t - \frac{A_{t+1}}{1+r} = \frac{r}{1+r}\left\{ A_t + \sum \beta^s E_t y_{t+s} \right\}$

$$\Leftrightarrow A_t + y_t - \frac{A_{t+1}}{1+r} = \frac{r}{1+r} A_t + \frac{r}{1+r}\sum \beta^s E_t y_{t+s}$$

$$\Leftrightarrow y_t - \frac{r}{1+r}\sum \beta^s E_t y_{t+s} = \frac{r}{1+r} A_t - A_t + \frac{A_{t+1}}{1+r}$$

$$\Leftrightarrow y_t - \frac{r}{1+r}\sum \beta^s E_t y_{t+s} = \frac{A_{t+1}}{1+r} - \frac{A_t}{1+r}$$

$$\Leftrightarrow (1+r) y_t - r \sum \beta^s E_t y_{t+s} = \Delta A_{t+1}$$

$$\Leftrightarrow y_t - r\left(-y_t + \sum \beta^s E_t y_{t+s}\right) = \Delta A_{t+1}$$

Aplicando E_t:

$$y_t - r\left(-y_t + y_t + \sum_{s\geq 1} \beta^s E_t y_{t+s}\right) = \Delta A_{t+1}$$

$$\boxed{y_t - r \sum_{s\geq 1} \beta^s E_t y_{t+s} = \Delta A_{t+1}}$$

∎

(6) $y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$

$$\downarrow$$

$$y_{t+s} - \mu = \phi(y_{t+s-1} - \mu) + \varepsilon_{t+s}$$

$$y_{t+s+1} - \mu = \phi(y_{t+s} - \mu) + \varepsilon_{t+s+1}$$

$$\vdots$$

$$y_{t+s+n} - \mu = \phi(y_{t+s+n-1} - \mu) + \varepsilon_{t+s+n}$$

$$\Rightarrow \quad y_{t+s} - \mu = \phi^k (y_t - \mu) + \sum_{k\geq 0} \phi^{k-1} \varepsilon_{t+s+k}$$

$$\Rightarrow \quad E_t(y_{t-s} - \mu) = \phi^k E_t(y_t) - \phi^k E_t \mu + \underbrace{\sum_{k\geq 0} \phi^k E_t(\varepsilon_{t+s+k})}_{0}$$

$$= \phi^k (y_t - \mu)$$

$$\Rightarrow \quad E_t(y_{t-s}) = \mu + \phi^k (y_t - \mu)$$

Remplazamos en (2):

$$C_t = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \sum_{s\geq 0} \beta^s (\mu + \phi^s (y_t - \mu))\right\}$$

$$\boxed{C_t^\circ = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \frac{\mu}{1-\beta} + \frac{y_t - \mu}{1-\beta\phi}\right\}} \quad \beta = \frac{1}{1+r}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{C_t^\circ = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \frac{\mu(1+r)}{r} + \frac{r(y_t - \mu)}{1+r-\phi}\right\}}$$

(c) Sea $\Delta A_{t+1} = y_t - r\sum_{s\geq 1}\beta^s E(y_{t+s})$

$$= y_t - r\sum_{s\geq 1}\beta^s\phi^s(y_t-\mu) - r\sum_{s\geq 1}\beta^s\mu$$

$$= y_t - \frac{r\beta\mu}{1-\beta} - \frac{r\beta\phi(y_t-\mu)}{1-\beta\phi}$$

Note que

$$\frac{\beta}{1-\beta} = 1/r \quad y \quad \text{que} \quad \frac{\beta\phi}{1-\beta\phi} = \frac{\phi}{1+r-\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta A_{t+1} = y_t - \mu - \frac{r\phi(y_t-\mu)}{1+r-\phi}$$

$$= y_t\left[1-\frac{r\phi}{1+r-\phi}\right] - \mu\left[1-\frac{r\phi}{1+r-\phi}\right]$$

$$= \left[1-\frac{r\phi}{1+r-\phi}\right]\left[y_t-\mu\right]$$

$$= \frac{(1+r)(1-\phi)}{1+r-\phi}(y_t-\mu) \quad / \text{ Sea } A = \frac{(1+r)(1-\phi)}{1+r-\phi}$$

$$= A(y_t-\mu)$$

Sea $y_t - \mu = \phi(y_{t-1}-\mu) + \varepsilon_t$

$$\Delta A_{t+1} = A\phi(y_{t-1}-\mu) + A\varepsilon_t$$

$$E\,\Delta A_{t+1} = A\phi\mu - A\phi\mu + 0 = 0$$

Por lo tanto, esperanza no depende del tiempo.

Para la varianza, definimos $\bar{Y}_t = Y_t - \mu$

Por tanto: $\Delta A_{t+1} \cdot A \cdot \bar{Y}_t = A\phi \bar{Y}_{t-1} + A\varepsilon_t$

Multiplicamos por $A\bar{Y}_t \longrightarrow \Delta A_{t+1} \cdot A \cdot \bar{Y}_t^2 = A\phi \bar{Y}_{t-1}\bar{Y}_t + A\varepsilon_t \bar{Y}_t$

Aplicamos esperanza:

$$\underbrace{E(\Delta A_{t+1} \cdot A^2 \cdot \bar{Y}_t^2)}_{} = E(A^2\phi \bar{Y}_{t-1}\bar{Y}_t) + E(A^2\varepsilon_t \bar{Y}_t)$$

$$A^2 E(Y_t - \mu)^2 = A^2\phi\, Cov(\bar{Y}_t, \bar{Y}_{t-1}) + A^2 E(\varepsilon_t \bar{Y}_t)$$

$$Var(\Delta A_{t+1}) = \phi\, Cov(\bar{Y}_t, \bar{Y}_{t-1}) + E(\bar{Y}_{t-1}\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2)$$

$$= \phi\, Cov(\phi \bar{Y}_{t-1} + \varepsilon_t, \bar{Y}_{t-1}) + E(\bar{Y}_{t-1})E(\varepsilon_t) + \sigma^2$$

$$= \phi^2 Cov(\bar{Y}_{t-1}, \bar{Y}_{t-1}) + 0 + \sigma^2$$

$$=$$

$$\Rightarrow \quad Var(\bar{Y}_t) = \phi^2 V(\bar{Y}_{t-1}) + \sigma^2$$

Por otro lado $\bar{Y}_t \sim AR(1)$, con $Var(\bar{Y}_t)$ $\underline{cte}$.

$$\Rightarrow \quad Var(\bar{Y}_t) = \phi^2 Var(\bar{Y}_t) + \sigma^2$$

$$\Rightarrow \quad Var(\bar{Y}_t) = Var(\Delta \ldots) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

$$\Rightarrow \quad Var(\Delta A_{t+1}) = \frac{A^2\sigma^2}{1-\phi^2}$$

La varianza no depende del tiempo

Por último $Cov(\bar{Y}_t, \bar{Y}_{t-1}) = \phi\, Var(\bar{Y}_t) = \dfrac{\phi\sigma^2}{1-\phi^2} \Rightarrow Cov(\bar{Y}_t, \bar{Y}_{t+s}) = \dfrac{\phi^s\sigma^2}{1-\phi^2}$

tampoco depende su varianza del tiempo.

$\therefore$ $\boxed{\Delta A_{t+1} \text{ es estacionaria débil.}}$

Para mostrar que A_t no es estacionaria tenemos:

$$A_{t+1} = (1+r)A_t + (1+r)y_t - (1+r)C_t$$

$$\Big\downarrow \; C^* \text{ de (b)}$$

$$A_{t+1} = (1+r)A_t + (1+r)y_t - rA_t - (1+r)\mu - \frac{r(1+r)(y_t-\mu)}{1+r-\phi}$$

$$= A_t + \underbrace{(y_t-\mu)\left[1+r - \frac{r(1+r)}{1+r-\phi}\right]}_{\text{estacionario } (y_t-\mu \text{ lo es})}$$

raíz 1!

$\therefore$ fuera círculo unitario.

$\therefore$ no es estacionaria A_t $\forall t$.

(d)

$$G_t = rF_t + \mu + r(y_t-\mu)$$

tenemos C_t^* de (b): $C_t = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \frac{\mu(1+r)}{r} + \frac{(1+r)(y_t-\mu)}{1+r-\phi}\right\}$

$$= \frac{r}{R}A_t + \frac{r}{R-\phi}(y_t-\mu) + \mu \qquad / R = 1+r$$

$$= \frac{r}{R}A_t + \frac{r}{R}(y_t-\mu) + \mu \qquad / A_t = F_t$$

$$\Rightarrow G_t = \frac{r}{R}F_t + \mu + \frac{r}{R}(y_t-\mu)$$

$$\text{si } R \approx 1 \Rightarrow G_t = rF_t + \mu + r(y_t-\mu)$$

y la regla es aproximadamente óptima.

(c) $G_t = \frac{r}{1+r}\left\{ F_t + \frac{\mu(1+r)}{r} + \frac{(1+r)(y_t-\mu)}{1+r-\phi} \right\}$

Si $A_t = F_t$, entonces:

$$\Delta A_{t+1} = y_t - r \sum_{s\geq 1} R^{-s}\left(\phi^s(y_t-\mu)+\mu\right)$$ con $\phi \neq 0$

→ con $\phi = 0$

$$\Rightarrow \Delta A_{t+1} = y_t - r \sum R^{-s}\mu$$

$$= y_t - \frac{r R^{-1}}{1-R^{-1}}\mu$$

$$= y_t - \mu.$$

→ con $\phi > 0$. $\Rightarrow Var(\Delta A_{t+1}) = Var(y_t)$

$$\Delta A_{t+1} = y_t - r\frac{\phi(y_t-\mu)}{1-\phi R^{-1}} - \frac{rR^{-1}\mu}{1-R^{-1}}$$

$$\Delta A_{t+1} = y_t - \frac{r\phi(y_t-\mu)}{R-\phi} - \mu.$$

$$\Rightarrow \Delta A_{t+1} = (y_t-\mu)\left[\frac{R-\phi-r\phi}{R-\phi}\right].$$

$$\Delta A_{t+1} = (y_t-\mu)\left[\frac{(r+1)(1+\phi)}{1+r-\phi}\right]$$

$$\Rightarrow Var(\Delta A_{t+1}) = Var(y_t)\cdot\left[\frac{(r+1)(1+\phi)}{1+r-\phi}\right]^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{Var(\Delta A_{t+1}^{\phi=0})}{Var(\Delta A_{t+1}^{\phi\neq 0})}} = 1\bigg/\frac{(r+1)(1+\phi)}{1+r-\phi} = \frac{1+r-\phi}{(1+r)(1+\phi)}$$ <1

Por lo que hay mayores desviaciones en la práctica que lo que predice el gobierno. Esto dado por subestimar la persistencia de los shocks.

Además si $\phi \to 1 \Rightarrow$ razón $\to 0$ lo que interpreta que a mayor persistencia mayor subestimación de las desviaciones.

(f) Veamos dos ejemplos adicionales que podrían explicar la regla.

(i) Inversión pública y/o privada: Son shocks persistentes pues estos permiten aumentar en el largo plazo los niveles de capital y ahorro de activos. Por tanto, una fluctuación en el FE será respondida con un gasto óptimo que no consideraría tal persistencia. Estos shocks positivos permitirían expandir más el gasto cuando se considera este factor.

(ii) Dificultad alterar presupuesto o regla: Si la regla es fija, entonces las restricciones permiten menor holgura para gasto de emergencia o no planificado, lo que nuevamente conflictúa con una alta persistencia de shocks en los activos.

Por lo que hay mayores desviaciones en la práctica que lo que predice el gobierno. Esto dado por subestimar la persistencia de los shocks.

Además si $\phi \to \infty \Rightarrow$ razón $\to 0$ lo que interpreta que a mayor persistencia mayor subestimación de las desviaciones.

(f) Veamos dos ejemplos adicionales que podrían complicar la regla.

(i) Inversión pública y/o privada: Son shocks persistentes pues estos permiten aumentar en el largo plazo los niveles de capital y ahorro de activos. Por tanto, una fluctuación en el FE será respondida con un gasto óptimo que no consideraría tal persistencia. Estos shocks positivos permitirían expandir más el gasto cuando se considera este factor.

(ii) Dificultad obtener presupuesto o regla: Si la regla es fija, entonces las restricciones permiten menor holgura para gasto de emergencia o no planificado lo que nuevamente conflictúa con una alta persistencia de shocks en los activos.

③ Ecuación para tiempos tormentosos

(a) Si $y_t - C_t = S_t$ y $R^{-1} = \beta$ (supuesto)

$$y_t - C_t = y_t - \frac{r}{1+r} A_t - \frac{r}{1+r} \sum_{k \geq 0} R^{-k} E_t[y_{L,t+k}]$$

$$= y_t - \frac{r}{1+r} A_t - \frac{r}{1+r} \sum_{k \geq 0} R^{-1} E_t[y_{L,t+k}]$$

$$= y_t - \frac{r}{1+r} A_t - \frac{r}{1+r} \sum_{k \geq 0} R^{-1} E_t[y_{L,t+k}]$$

$$= y_{L,t} - \frac{r}{1+r} A_t + y_{K,t} - \frac{r}{1+r} \sum_{k \geq 1} R^{-k} E_t[y_{L,t+k}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Por otro lado } y_{K,t} = r(A_{t-1} + y_{L,t-1} - C_{t-1}) \\ \text{y } \quad A_t = r(A_{t-1} + y_{L,t-1} - C_{t-1}) \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{y_{K,t} = \frac{r}{1+r} A_t} \; *$$

Seguimos... $y_t - C_t = S_t = y_{L,t} - \frac{r}{1+r} A_t + y_{K,t} - r \sum_{k \geq 1} R^{-k-1} E_t[y_{L,t+k}]$

Dado que $R^{-1} = \beta$ entonces para la demostración necesitamos:

Supongamos que:

$$\frac{-r}{1+r} A_t + y_{K,t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_{K,t} = \frac{r}{1+r} A_t$$

Lo que fue mostrado en $*$)

Por lo que $S_t = y_{L,t} - r \sum_{k \geq 0} \beta^{k+1} E_t[y_{L,t+k}]$

Partimos de $S_t = -\sum_{k\geq 1} \beta^k E_t[\Delta y_{2,t+k}]$

Nota que $-\sum_{k\geq 1} \beta^K E_t[y_{2,t+k}] = -\sum_{k\geq 1} \beta^K E_t[y_{2,t+k}]$

$$= -\beta E_t[y_{2,t}] - \beta^2 E_t[y_{2,t+1}] \ldots$$

$$-\sum_{k\geq 1} \beta^k E_t[y_{2,t+k-1}] = -\beta E_t[y_{2,t-1}] - \beta^2 E_t[y_{2,t-1}] \ldots$$

$$= \sum_{k\geq 1} \beta^{k+1} E[y_{2,t+k}] + \beta E_t y_{t2}$$

$$= -\sum_{k\geq 1} \beta^{k+1} [1-\beta^{-1}] E_t[y_{2,t+k}] + \beta y_{2,t}$$

$$= -r \sum_{k\geq 0} \beta^{k+1} E_t[y_{2,t+k}] + r\beta y_{2,t} + \beta y_{2,t}$$

$$\boxed{S_t = -r \sum_{k\geq 0} \beta^{k+1} E_t[y_{2,t+k}] + y_{2,t}}$$

$\square$

Se llama ecuación para días tormentosos, pues relaciona el ingreso laboral en valor presente con el ahorro. Esto lo hace ponderando negativamente futuros periodos de bonanza y positivamente periodos de "malos tiempos".

En otras palabras, si se esperan peores tiempos entonces los individuos lo interpretan como un necesario ajuste positivo al ahorro. Se anticipan a ellos ahorrando más.

Partimos de $S_t = -\sum_{k\geq 1} \beta^k E_t[\Delta y_{2,t+k}]$

Nota que $-\sum_{k\geq 1}\beta^k E_t[y_{2,t+k}] = -\sum_{k\geq 1} \beta^k E_t[y_{2,t+k}]$

$$= -\beta E_t[y_{2,t}] - \beta^2 E_t[y_{2,t+1}] \ldots$$

$$-\sum_{k\geq 1}\beta^k E_t[y_{2,t+k-1}] = -\beta E_t[y_{2,t-1}] - \beta^2 E_t[y_{2,t-1}] \ldots$$

$$= \sum_{k\geq 1}\beta^{k+1} E[y_{2,t+k}] + \beta E_t y_{t2}$$

$$= -\sum_{k\geq 1}\beta^{k+1}[1-\beta^{-1}] E_t[y_{2,t+k}] + \beta y_{2,t}$$

$$= -r\sum_{k\geq 0}\beta^{k+1} E_t[y_{2,t+k}] + r\beta y_{2,t} + \beta y_{2,t}$$

$$\boxed{S_t = -r\sum_{k\geq 0}\beta^{k+1} E_t[y_{2,t+k}] + y_{2,t}}$$

□

Se llama ecuación para días tormentosos, pues relaciona el ingreso laboral en valor presente con el ahorro. Esto lo hace ponderando negativamente futuros periodos de bonanza y positivamente periodos de "malos tiempos".

En otras palabras, si se esperan peores tiempos entonces los individuos lo interpretan ~~como~~ un necesario ajuste positivo al ahorro. Se anticipan a ellos ahorrando más.

(6) S 4. $\Delta y_t \sim AR(1)$ por lo que $y_t \sim ARIMA(0,1)$

$$\Delta y_t = g + \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} \quad , \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

$$\boxed{E_t[\Delta y_{t+k}] = g + E_t(\varepsilon_{t+k}) + \phi E_t(\varepsilon_{t+k-1}) = g + \phi E_t(\varepsilon_{t+k-1})}$$

$\Rightarrow$ temos que $E_t[\Delta y_{\cdot, t+k}] = \begin{cases} g & k \geq 2 \\ g + \phi \varepsilon_t & k = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{E_t[\Delta y_{2, t+k}] = \begin{cases} g & k \geq 2 \\ g + \phi \varepsilon_t & k = 1 \end{cases}}$$

Em $S_t = -\sum_{k \geq 1} \beta^k E_t[\Delta y_{2,t+k}]$

$$S_t = -\beta E_t[\Delta y_{2,t+1}] - \sum_{k \geq 2} \beta^k E_t[\Delta y_2, t+k]$$

$$S_t = -\beta E_t[\Delta y_2, t+1] - \frac{1}{1-\beta} \cdot g \cdot \beta^2$$

$$\beta E_t[\Delta y_{2,t+1}] = -S_t - \frac{1}{1-\beta} g \beta^2$$

$$= -\frac{S_t}{\beta} - \frac{\beta}{1-\beta} g$$

$$\boxed{E_t[\Delta y_{2,t+1}] = -(1+r) S_t - \frac{g}{r}}$$

$\beta = R^{-1} \Rightarrow \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{1}{r}$

$\Rightarrow \beta^{-1} = 1 + r = R$

Guía n°1

(1) Optimal Consumption with Stone-Geary Utility

- $y_t;\ t = 0, 1 \dots$ es conocido $t = 0$
- $r > 0$ y descuento $\delta > r$
- A_0 definido: $\omega_0 = A_0 + \sum R^{-t} y_t$
- Problema $\left\{ \sum_{t\geq 0} \beta^t u(c_t) \right.$ con $\beta \equiv \frac{1}{1+\delta}$

- $$u(c) = \frac{\sigma}{\sigma-1}(c-m)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

(a) El problema de optimización:

$$\left\{ \max_{\{c_t\}} \sum_{t\geq 0} \beta^t u(c_t) \right.$$

$$\text{s.a.} \quad A_{t+1} = R(A_t + y_t - c_t)$$

La ecuación de Bellman es:

$$V_t(A_t) = u(c_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1})$$

$\Rightarrow$ FOC:

$$u'(c_t) + \beta V'_{t+1}(A_{t+1}) \cdot R = 0$$

$$\rightarrow \quad u'(c_t) = \beta R V'_{t+1}(A_{t+1})$$

$\Rightarrow$ Por teorema envolvente $V_t'(A_t) = u'(c_t) = \beta R V'_{t+1}(A_{t+1})$

Por lo que: $\boxed{u'(c_t) = \beta R u'(c_{t+1})}$ Ecuación de Euler.

Luego $u'(C_t) = \frac{\cancel{\theta}}{\cancel{\theta-1}} \cdot \frac{\cancel{\theta-1}}{\cancel{\theta}} \cdot (C_t - m)^{\frac{\theta-1}{\theta}-1} \cdot 1$

$$u'(C_t) = (C_t - m)^{-1/\theta}$$

$$\Rightarrow u'(C_{t+1}) = (C_{t+1} - m)^{-1/\theta}$$

Por lo que $\quad (C_t - m)^{-1/\theta} = \beta R (C_{t+1} - m)^{-1/\theta} \quad / (\ )^{-\theta}$

$$C_t - m = (\beta R)^{-\theta} (C_{t+1} - m)$$

Para $s=1 \longrightarrow \quad C_{t+1} - m = (\beta R)^{-\theta} (C_{t+2} - m)$

$s=2 \longrightarrow \quad C_{t+2} - m = (\beta R)^{-\theta} (C_{t+3} - m)$

$\vdots$

$s=n \longrightarrow \quad C_{t+n} - m = (\beta R)^{-\theta} (C_{t+n+1} - m)$

$\Rightarrow$ En general: $\quad C_t - m = (\beta R)^{-s\theta} (C_{t+s} - m)$

$$\Rightarrow \boxed{C_{t+s} - m = (\beta R)^{s\theta} (C_t - m)}$$

En particular dado $C_t = 0$

$$\Rightarrow \quad C_s - m = (\beta R)^{s\theta} (C_0 - m)$$

$$C_s = (\beta R)^{s\theta} (C_0 - m) + m$$

Por otro lado, construimos No-Ponzi :

$$A_{t+1} = R(A_t + y_t - C_t)$$
$$A_t = R(A_{t-1} + y_{t-1} - C_{t-1})$$

$$\Leftrightarrow \quad A_{t+1} = R^2 A_{t-1} + R^2(y_{t-1} - C_{t-1}) + R(y_t - C_t)$$

$$\Rightarrow \quad A_t = R^t A_0 + \sum_{s\geq 0} R^{t-s}(y_s - C_s)$$

$$\Leftrightarrow \quad R^{-t}A^t = A_0 + \sum_{s\geq 0} R^{-s}(y_s - C_s)$$

NPonzi $$\cancel{R^{-t}A^t} = A_0 + \sum_{s\geq 0} R^{-s} y_s - \sum_{s\geq 0} R^{-s} C_s$$

$$\Rightarrow \quad A_0 + \sum R^{-s} y_s = \sum R^{-s} C_s = W_0$$

Además $$\sum R^{-s} C_s = \sum_{s\geq 0} R^{-s}(gR)^{s\theta}(C_0 - m) + m$$

$$= \sum_{s\geq 0} R^{-s}(gR)^{s\theta} C_0 - \sum_{s\geq 0} R^{-s}(gR)^{s\theta} m + \sum_{s\geq 0} R^{-t} m$$

$$= \frac{C_0 - m}{1 - R^{-1}(gR)^{\theta}} + \sum_{s\geq 0} R^{-t} m$$

$$= \frac{C_0 - m}{1 - R^{-1}(gR)^{\theta}} + \frac{m}{1 - R^{-1}}$$

Por lo que $$(C_0 - m)[1 - R^{-1}(gR)^{\theta}]^{-1} + m[1 - R^{-1}]^{-1} = W_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_0(W_0) = (W_0 - m[1 - R^{-1}]^{-1})(1 - R^{-1}(gR)^{\theta}) + m}$$

$$C_S^{\circ} = (\beta R)^{s\theta}\left[\left(w_0 - m\left[1 - R^{-1}\right]^{-1}\right)\left(1 - R^{-1}(\beta R)^{\theta}\right) + m - m\right] + m$$

$$\boxed{C_S^{\circ} = (\beta R)^{s\theta}\left[\left(w_0 - \frac{mR}{r}\right)\left(1 - \frac{(R\beta)^{\theta}}{R}\right)\right] + m}$$

Consumo óptimo.

(b) $\dfrac{\partial C_0}{\partial A_0} = \dfrac{\partial}{\partial A_0}\left[\left(A_0 - B - \frac{mR}{r}\right)\left(1 - \frac{(R\beta)^{\theta}}{R}\right) + m\right]$

$$\boxed{PMC_{A_0} = 1 - \frac{(R\beta)^{\theta}}{R}}$$ donde $B = \sum_{t \geq 0} R^{-t} y_t$

* No depende de m, por lo que no hace diferencia.

(c) $y > 0$, no se puede endeudar y $rw_0 > Rm$

Si $rw_0 > Rm \Rightarrow w_0 > \frac{Rm}{r} \Leftrightarrow w_0 - \frac{Rm}{r} > 0$

Por tanto $C_S^{\circ} - m = \underbrace{(\beta R)^{s\theta}}_{\geq 0}\underbrace{\left(1 - \frac{(\beta R)^{\theta}}{R}\right)}_{\geq 0}\underbrace{\left[w_0 - \frac{Rm}{r}\right]}_{> 0}$

$$\Rightarrow C_S^{\circ} > m$$

Por otro lado, si no se puede endeudar, entonces no tiene misma holgura para suavizar consumo.

Nuevo problema:

$$\sum \beta u(c_t)$$

$$\text{SA.} \quad c_t \leq A_t + y$$
$$y > 0$$
$$A_{t+1} = R(A_t + y_t - c_t)$$

→ Euler: $c_s = (\beta R)^{s\theta}(c_0 - m) + m$

Pero ahora $c_0 \leq A_0 + y$ con $y > 0$

Por lo tanto si $m > y \Rightarrow$ el individuo se comenzará a comer sistemáticamente sus ingresos laborales.

Supongamos que $c_0^{o} = A_0 + y$

$$c_0 - m = A_0 + y - m$$

Si $y = m \Rightarrow c_0 - m = A_0$

$$\frac{\partial c_0}{\partial A_0} = 1$$ y por tanto se irá consumiendo sus ahorros iniciales paulatinamente. Si $m = 0 \Rightarrow$ Caso (b)