Profesor	: Eduardo Engel	Abril 19, 2023
Ayudantes	: Miguel Del Valle y Benjamín Peña	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2023	
Guía	: No. 3	
Entrega	: Lunes 24 de abril, antes de las 8am	

1. **Restricciones de liquidez en un modelo de dos períodos**

   Consider an individual that lives two periods, with preferences represented by $U(C_1, C_2)$, where C_1 and C_2 denote consumption in the first and second period, respectively, and the utility is not necessarily additively separable.[1] The individual's income in periods 1 and 2 are Y_1 and Y_2 and there is no uncertainty. The individual can borrow at an interest rate r_D and can save at a rate r_S, with $r_S < r_D$.

   (a) Draw the budget constraint in (C_1, C_2) space. Conclude that it is made up of two lines, and determine the slope of each one of them.

   (b) Find a necessary and sufficient condition for consumption in periods 1 and 2 to be Y_1 and Y_2. These conditions will depend on the function $U(C_1, C_2)$ and its partial derivatives evaluated at (Y_1, Y_2) and both interest rates.

   (c) To what expression does the condition above simplify when $U(C_1, C_2)$ is additively separable?

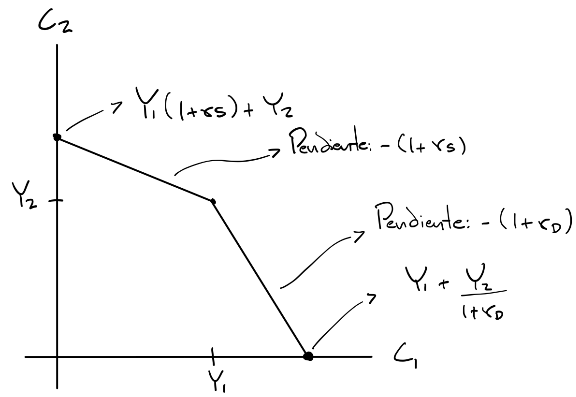
   (d) Consider the inequality conditions derived above and assume now that they hold with strict inequality. Show (graphically) that a small increase in Y_1 to $Y_1 + \Delta Y$ leads to an increase in C_1 that is also equal to ΔY. Thus $\Delta C_1/\Delta Y_1 = 1$, which is much closer to the predictions of a traditional Keynesian-style consumption function than a prediction from the LCT/PIH.

   (e) Noting that the most stringent definition of liquidity constraints corresponds to the case where $r_D = +\infty$ (you can't borrow, no matter the interest rate you're prepared to pay). Answer all the questions above for this particular case.

[1] Of course, you may assume that it is increasing and concave in each one of its arguments.

Solución:

(a) Hay dos rectas dado que se puede pedir prestado y ahorrar a tasas distintas. Las dos líneas se intersectan en (Y_1, Y_2). Lo máximo que se puede consumir en el período 2 es $C_2 = Y_1(1 + r_s) + Y_2$, cuando ahorro todo mi ingreso del período 1. La primera recta va desde $(0, Y_1(1 + r_s) + Y_2)$ hasta (Y_1, Y_2), y tiene una pendiente de $-(1 + r_s)$. En todos los pares de consumo en esta recta se está ahorrando en el período 1 para consumir más en el período 2. Por otra parte, lo máximo que se puede consumir en el período 1 es $C_1 = (Y_1 + Y_2/(1 + r_d), 0)$, cuando me endeudo en el período 1 por todos mis ingresos en el período 2. La segunda recta va desde (Y_1, Y_2) hasta $(Y_1 + Y_2/(1 + r_d), 0)$, con una pendiente de $-(1 + r_d)$. En todos los pares de consumo en esta recta nos estamos endeudando con ingreso del período 2.



(b) Llamemos $S \geq 0$ al ahorro y $B \geq 0$ a lo que se pide prestado. Entonces, $C_1 = Y_1 - S + B$ y $C_2 = Y_2 + (1 + r_S)S - (1 + r_D)B$. Reemplazando en la función de utilidad, el problema es el siguiente:

$$\max_{S,B} U(Y_1 - S + B, Y_2 + (1 + r_S)S - (1 + r_D)B) \quad \text{s.t.} \quad S, B \geq 0$$

Las condiciones de primer orden son

$$B: \quad \frac{\partial U}{\partial C_1}(C_1, C_2) - \frac{\partial U}{\partial C_2}(C_1, C_2)[1 + r_D] \leq 0$$

$$S: \quad -\frac{\partial U}{\partial C_1}(C_1, C_2) + \frac{\partial U}{\partial C_2}(C_1, C_2)[1 + r_S] \leq 0$$

Si queremos que $C_1 = Y_1$ y $C_2 = Y_2$, de manera que $S = B = 0$, lo que se tiene que cumplir es lo siguiente:

$$\frac{\partial U}{\partial C_1}(Y_1, Y_2) \leq \frac{\partial U}{\partial C_2}(Y_1, Y_2)[1 + r_D] \quad \text{and} \quad \frac{\partial U}{\partial C_1}(Y_1, Y_2) \geq \frac{\partial U}{\partial C_2}(Y_1, Y_2)[1 + r_S]$$

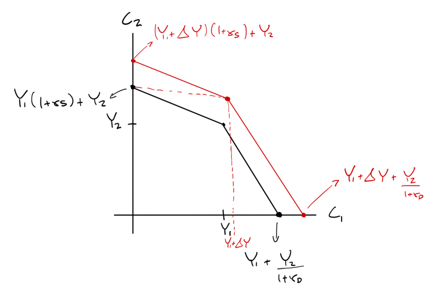
Combinando ambas desigualdades y tomando en cuenta que U creciente y cóncava, las condiciones suficientes y necesarias para que el consumo en los períodos 1 y 2 sean Y_1 e Y_2 son las siguientes

$$\left(\frac{\frac{\partial U}{\partial C_1}\Big|_{(Y_1,Y_2)}}{\frac{\partial U}{\partial C_2}\Big|_{(Y_1,Y_2)}} \right) \in [1+r_S, 1+r_D]$$

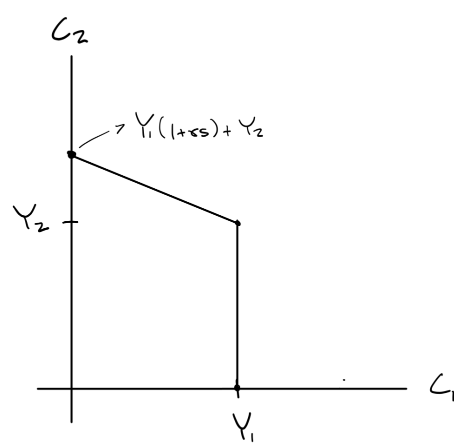
(c) En este caso se asume que $U(C_1, C_2) = u_1(C_1) + u_2(C_2)$, de manera que las desigualdades son las siguientes:

$$u_1'(Y_1) \leq u_2'(Y_2)[1+r_D] \quad \text{y} \quad u_1'(Y_1) \geq u_2'(Y_2)[1+r_S]$$

(d) La restricción presupuestaria se traslada a la derecha en ΔY unidades. La idea es que dado que las derivadas so nvontinuas y que las condiciones se cumplen con desigualdad estricta, si ΔY es lo suficientemente pequeña las condiciones se siguen cumpliendo para el nuevo ingreso en el período 1, $Y_1 + \Delta Y$. Luego, el invididuo continúa consumiendo su ingreso en cada período. Así, $C_1 = Y_1 + \Delta Y$, de manera que $\Delta C = \Delta Y$.



(e) Dado que no se puede pedir prestado, lo que cambia en la restricción presupuestaria es que la recta a la derecha de Y_1 se vuelve una recta con pendiente infinita, que va desde (Y_1, Y_2) a $(Y_1, 0)$. La otra recta no cambia:



La condición para que $C_1 = Y_1$ y $C_2 = Y_2$ en este caso es que

$$\frac{\partial U}{\partial C_1}(Y_1, Y_2) \geq \frac{\partial U}{\partial C_2}(Y_1, Y_2)[1 + r_S]$$

mientras que para una utilidad separable se tiene lo siguiente:

$$u_1'(Y_1) \geq u_2'(Y_2)[1 + r_S]$$

Lo que argumentamos para el ítem d) en el caso con endeudamiento no cambia.

2. **Procastinación**

Su utilidad vista desde el período t de un flujo de beneficios instantáneos $u_t, u_{t+1}, ..., u_T$, que corresponden a la calidad de las películas que usted ve los sábados en la noche), viene dada por:

$$U^t(u_t, u_{t+1}, ..., u_T) = u_t + \eta \sum_{s=t+1}^{T} u_s.$$

Usted va regularmente al cine cercano a su casa los sábados y las películas que tocan las próximas semanas son una película mediocre, seguida de una buena, seguida de una excelente seguida de una película de su actor/actriz favorita que no se quiere perder por ningún motivo. Los utiles que deriva de estas películas son 3, 5, 8 y 13, respectivamente.

Desgraciadamente usted debe estudiar para sus exámenes en la FEN, por lo cual deberá perderse una de las películas. Determine la película que se salta en cada uno de los siguientes casos, explicando en detalle el razonamiento que justifica su respuesta:

(a) $\eta = 1$.
(b) $\eta = 1/2$ y usted es hiperbólico ingenuo, es decir, no juega juegos con su persona futura.
(c) $\eta = 1/2$ y usted es hiperbólico sofisticado, de modo que juega juegos con su persona futura.

Solución

(a) Debo elegir tres de los cuatro valores en $\{3, 5, 8, 13\}$ de modo que la suma sea máxima. Evidentemente esto se logra eligiendo los tres números más grandes, de modo que se salta la película del primer sábado.

(b) Ahora cada sábado el agente compara su utilidad de saltarse la película de ese sábado con la de no saltarla, sin considerar que su decisión es dinámicamente inconsistente, es decir, que aun cuando hoy le parezca óptimo saltarse la película del sábado siguientes, es posible que no se la salte cuando llegue el sábado siguiente.

Semana	No voy	Voy
1	$\frac{1}{2}(5 + 8 + 13) = 13$	$3 + \frac{1}{2}(8 + 13) = 13.5$
2	$\frac{1}{2}(8 + 13) = 10.5$	$5 + \frac{1}{2}13 = 11.5$
3	$\frac{1}{2}13 = 6.5$	8
4	0	$-\infty$

Luego la primera semana es mejor ir al cine, la segunda también, la tercera también y la cuarta no queda otra que no ir. Eso, a pesar de que la utilidad obtenida, vista desde $t = 1$ es de solo $3 + \frac{1}{2}(5 + 8) = 9.5$ comparado con $3 + \frac{1}{2}(8 + 13) = 13.5$ que habría obtenido si me hubiese podido comprometer a no ir en la semana 2. Lo que sucede es que el agente no se da cuenta que la semana que viene no cumplirá con el plan que era óptimo hoy.

(c) Hacemos inducción en reversa:

- Si llego a $t = 4$ sin haberme saltado una película, estaré obligado a saltármela en $t = 4$.
- Si llego a $t = 3$ sin haberme saltado una película, tendré que elegir entre saltármela en $t = 3$ y verla en $t = 3$. Con mi utilidad de $t = 3$ estaré comparando $\frac{1}{2} \cdot 13 = 6.5$ con 8, de modo que elegiré verla y me saltaré la película en $t = 4$.
- Si llego a $t = 2$ sin haberme saltado una película, tendré que elegir entre saltármela en $t = 2$ y verla en $t = 2$. Con mi utilidad de $t = 2$ estaré comparando $\frac{1}{2}(8 + 13) = 10.5$ con $5 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 9$, donde internalizo que si la veo en $t = 2$ me salto la película en $t = 4$ (por el punto anterior). Luego, en $t = 2$ elegiré saltarme la película, con una utilidad, vista desde $t = 1$, de $3 + \frac{1}{2}(8 + 13) = 14.5$.
- Si me salto la película en $t = 1$, obtengo, visto desde $t = 1$, una utilidad de $\frac{1}{2}(5 + 8 + 13) = 13$. Si la veo en $t = 1$, por el punto anterior se que me la saltaré en $t = 2$ por lo cual, mi utilidad, vista de $t = 1$, es $3 + \frac{1}{2}(8 + 13) = 14.5$. Luego en $t = 1$ elijo ver la película a sabiendas de que mi yo de $t = 2$ elegirá saltarse la película.

3. **Evolución del consumo luego de los retiros y teorías de consumo**

Durante 2020, los afiliados al sistema de AFP pudieron realizar dos retiros de parte de los fondos que tenían en sus cuentas individuales. Estos retiros sumaron aproximadamente un 10 por ciento del PIB.

El Informe de Política Monetaria (IPOM) de diciembre de 2020 del Banco Central de Chile constata que el comercio ya había superado sus niveles de actividad previos a la pandemia, "fuertemente impulsado por el retiro de ahorros previsionales, con ventas que registraron máximos históricos en líneas como el equipamiento del hogar, vestuario y calzado y materiales de construcción".

En esta pregunta le pedimos que determine si el incremento del consumo de los hogares producto de los retiros previsonales es consistentes con diversas teorías de consumo. Para responder deberá hacer un supuesto sobre el impacto que tuvo el retiro sobre la riqueza financiera de los hogares, definida como el valor de todos sus activos financieros. El supuesto más simple y probablemente una buena aproximación es que los retiros no modificaron la riqueza financiera de los hogares. Haga este supuesto en lo que sigue.

(a) Explique por qué suponer que los retiros no modificaron la riqueza financiera de los hogares es un supuesto razonable.

Para cada uno de los modelos que sigue, determine si explica el incremento observado en el consumo de los hogares luego de los retiros. Justifique cada respuesta.

(b) Modelo de equivalencia cierta.

(c) Modelo de restricciones de liquidez.
Indicación: Considere el caso de un consumidor impaciente sin riesgo en su ingreso.

(d) Modelo de Carroll de ahorro por precaución.

(e) Modelo de descuento hiperbólico.

Finalmente, responda la siguiente pregunta:

(f) De un escenario en que el supuesto de que la riqueza financiera de los consumidores no cambió producto de los retiros no se cumple.

Solución

(a) Se combinan dos ideas. Primero, es razonable asumir que las personas incluían sus ahorros en las AFP **antes** de los retiros dentro de su riqueza financiera. Segundo, también es razonable (aunque esto es más opinable) suponer que las personas no esperan que el gobierno les transfiera de vuelta, en el futuro, parte de los fondos retirados. Combinando las dos ideas anteriores se traduce en que los retiros de 2020 no modifican la riqueza financiera. Sin ser perfectos, son supuestos razonables para realizar un primer análisis.

(b) No. La expresión para C_t en equivalencia cierta es la siguiente:

$$C_t = \frac{r}{R}\left\{A_t + \sum_{s\geq 0} R^{-s}\mathrm{E}_t Y_{t+s}\right\}.$$

Y esta no cambiado con los retiros. Los ahorros previsionales eran parte de A_t antes y después del retiro. Obviamente hubo una caída en la riqueza laboral (el segundo término al lado derecho) producto de la pandemia, pero lo que nos convoca es el retiro de los ahorros previsionales, y allí no hay cambio.

Está claro que esta pregunta pone de manifiesto las limitaciones del modelo de equivalencia cierta:

- No considera restricciones de liquidez.
- No considera ahorro por precaución.

(c) A pesar de no modificar su riqueza financiera, la posibilidad de un retiro sí lleva a un aumento en la liquidez de los consumidores, dado que ese dinero antes no estaba disponible para gastar. Luego, consumidores impacientes que ven su consumo restringido por falta de liquidez van a aumentar su consumo frente a la posibilidad de un retiro.

(d) En el modelo de Carroll, el consumo, c, depende del dinero en efectivo, x, que es igual a la suma de activos financieros disponibles (que se pueden gastar, recuerden que c es muy cercano a x cuando x es pequeño) e ingreso corriente, de modo que un incremento en x lleva a más consumo hoy.

(e) Una de las principales justificaciones para forzar a las personas a ahorrar para sus pensiones es que contribuye a resolver el problema de inconsistencia dinámica que vimos en la pregunta 2 de esta guía. Visto de esta manera, el retiro es una forma sin costo alguno de poder gastar activos que la persona que soy hoy prefiere gastar hoy aun cuando la persona que seré cuando jubile podría arrepentirse de haberlos gastado hoy.

(f) Un escenario en que no se cumpliría el supuesto es uno en que el gobierno se compromete a reponer los fondos que las personas ocupen para el consumo. En este caso, la riqueza financiera de los consumidores aumenta por el monto que pueden retirar de su AFP, dado que van a recibir de vuelta lo que gasten en consumir.

4. **Suavizamiento de impuestos**

Considere el modelo de suavizamiento de impuestos de Barro. El tiempo es continuo. El producto Y y la tasa real de interés r son constantes y la deuda de gobierno en $t = 0$ es cero. El país debe financiar un gasto de gobierno por sobre el normal durante $0 \leq t \leq \tau$ de modo que el gasto de gobierno, G_t, será igual a G_H en este período, para regresar a su nivel habitual, G_L, después.

Determine la trayectoria óptima de impuestos, T_t, y la trayectoria resultante de la deuda pública D_t. Encuentre expresiones explícitas para las trayectorias y grafíquelas.

Solución:

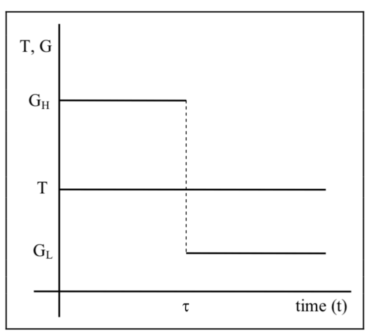
Dadas las condiciones del ejercicio, podemos ocupar el resultado de que la tasa de impuestos T_t/Y_t es constante. $Y_t = Y$ para todo t implica que $T_t = T$ para todo t. Esto es, los impuestos son constantes. La restricción presupuestaria para el gobierno es la siguiente:

$$\int_0^\infty e^{-rs} T ds = \int_0^\tau e^{-rs} G_H ds + \int_\tau^\infty e^{-rs} G_L ds \tag{1}$$

Esto significa que el valor descontado de los impuestos tiene que ser igual al valor descontado de los gastos de gobierno. Integrando esta expresión, llegamos a

$$T = G_H + e^{-r\tau}(G_H - G_L)$$

De esta expresión es directo que $G_H > T > G_L$. En tiempos de pandemia ($0 \leq t \leq \tau$) el gobierno va a tener déficits primarios que va a financiar con deuda. Después de la pandemia ($\tau < t$) va a tener superávits que va a ocupar para pagar la deuda. Gráficamente:



en el caso de los impuestos, hay dos períodos relevantes: (1) $0 \leq t \leq \tau$, en los que el gobierno adquiere deuda para financiar su déficit primario, y (2) $\tau < t$, donde el gobierno ya no acumula deuda y paga los intereses de la deuda acumulada.

- En $0 \leq t \leq \tau$:

El valor descontado de la deuda acumulada hasta t tiene que ser igual al valor descontado de todos los déficits:

$$e^{-rt}D(t) = \int_0^t [G_H - T]e^{-rs}ds$$

Integrando:

$$D(t) = \frac{G_H - T}{r}(e^{rt} - 1) \tag{2}$$

Así, la deuda acumulada hasta τ es

$$D(\tau) = \frac{(G_H - T)}{r}(e^{r\tau - 1})$$

Diferenciando (2):

$$D'(t) = (G_H - T)e^{rt}$$

De (2), la última expresión puede expresarse de la siguiente manera:

$$D'(t) = G_H - T + rD(t) > 0$$

lo que muestra que la tasa de cambio de la deuda (déficit).De (2), la deuda acumulada hasta τ es

$$D(\tau) = \frac{(G_H - T)}{r}(e^{r\tau - 1})$$

- En $\tau < t$:

  Para satisfacer la restricción presupuestaria, el gobierno debe ocupar impuestos para pagar G_L y los intereses en la deuda $D(\tau)$. En otras palabras, la tasa de crecimiento de la deuda vigente tiene que ser igual a 0:

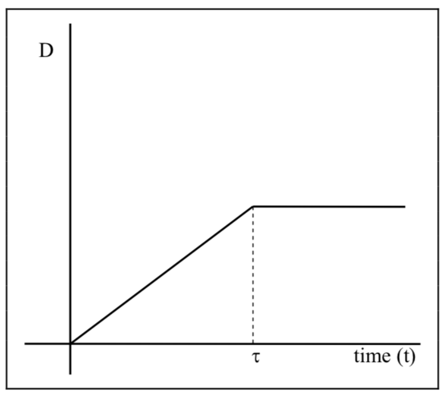
  $$D'(t) = G_L - T + rD(\tau) = 0$$

  De lo anterior, concluimos que

  $$T = G_L + rD(\tau)$$

  Lo que va a satisfacer la restricción presupuestaria.

  Gráficamente, el nivel de deuda será el siguiente:



Si la tasa de impuestos sigue un camino aleatorio (y si la varianza de su error está limitada inferiormente por un número estrictamente positivo) entonces con probabilidad 1 eventualmente va a exceder 100% o va a ser negativa.