Guía 3

Macroeconomía I - Otoño 2024

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Matías Muñoz (mmunozdo@fen.uchile.cl)
María Jesús Negrete (mnegrete@fen.uchile.cl)

Fecha de entrega: Jueves 13 de junio hasta las 23:59. Enviar por mail a ambos ayudantes.

Pregunta 1: [1]

Considere la función de producción de Romer (1986) para la firma j :

$$y_j(t) = k_j^{\alpha}(t)A^{\eta}(t); \text{ con } 0 < \alpha < 1$$
$$A(t) = A_0 \frac{\sum_{j=1}^{N} k_j(t)}{N}$$

donde y es el producto, k es el capital por trabajador, y N es el número total de firmas. Suponga que s denota la tasa de ahorro constante, n es la tasa de crecimiento de la población (también constante), y δ es la tasa de depreciación del capital físico.

a) Encuentre la ecuación diferencial para k cuando todas las firmas son idénticas.

Respuesta

La variación del capital viene dada por la diferencia entre el ahorro y la depreciación:

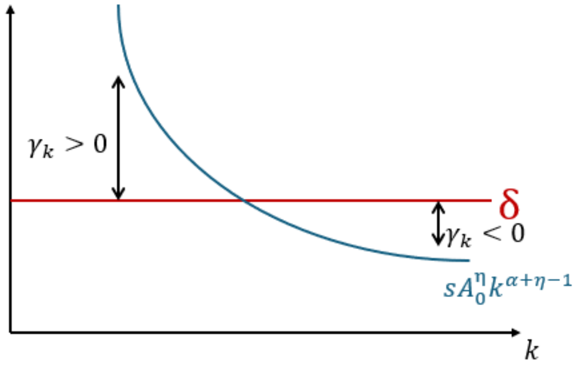
$$\dot{k}_j = sy_j(t) - \delta k_j$$
$$\Rightarrow \dot{k} = sy(t) - \delta k$$
$$\dot{k} = s \cdot k^{\alpha} A^{\eta} - \delta k$$
$$\dot{k} = s \cdot k^{\alpha} A_0^{\eta} k^{\eta} - \delta k$$
$$\dot{k} = s \cdot A_0^{\eta} k^{\alpha+\eta} - \delta k$$

b) Represente gráficamente la tasa de crecimiento del modelo para los siguientes casos de la función de producción: (i) retornos decrecientes a escala, es decir, $\alpha + \eta < 1$; (ii) retornos constantes a escala, $\alpha + \eta = 1$; (iii) retornos crecientes a escala, $\alpha + \eta > 1$

Respuesta

En el caso (i), tendremos que: $\frac{\dot{k}}{k} = sA_0^{\eta} k^{\alpha+\eta-1} - \delta$, con $\alpha + \eta < 1$. Gráficamente:

[1] Dudas de este ejercicio a: mmunozdo@fen.uchile.cl

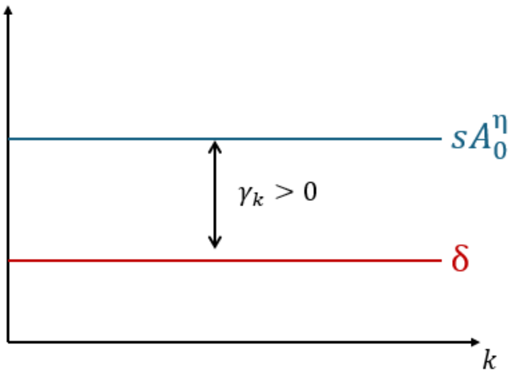


En el caso (ii), tendremos que:

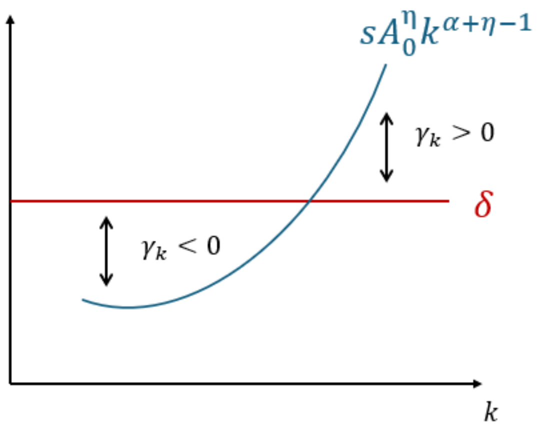
$$\frac{\dot{k}}{k} = sA_0^{\eta}k^{\alpha+\eta-1} - \delta$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA_0^{\eta} - \delta$$

Ya que $\alpha + \eta = 1$. Gráficamente:



Para el caso (iii), tenemos que: $\frac{\dot{k}}{k} = sA_0^{\eta}k^{\alpha+\eta-1} - \delta$, con $\alpha + \eta > 1$. Gráficamente:



c) Describa qué sucede con la tasa de crecimiento de largo plazo, ante un cambio en la tasa de ahorro s para cada uno de los tres casos de (b)

Respuesta

En los tres casos se desplaza la curva verde hacia arriba generando más crecimiento.

d) Considere el efecto un shock. Suponga un terremoto destruye la mitad del stock del capital de la economía. Describa qué pasa en cada uno de los tres casos a: la tasa de crecimento inmediatamente después del shock, la tasa de crecimiento de largo plazo, y el nivel de ingreso que se hubiera alcanzado si no hubiera sucedido el shock. Los efectos del shock son temporales o permanentes?

Respuesta

En el caso (i) se mueve el capital desde estado estacionario hacia la izquierda, lo que genera crecimiento y se vuelve al estado estacionario donde no se crece más, si no hubiera ocurrido el shock la economía se queda donde mismo. En el caso (i) no pasa absolutamente nada ya que el crecimiento no es sensible a la cantidad de capital. En el caso (iii) nos movemos hacia una senda de decrecimiento del capital hasta llegar a 0, si no hubiese ocurrido esto nos quedaríamos en un mayor nivel de ingreso.

Pregunta 2: Modelo de Lucas con Externalidades [2]

Considere el modelo de Uzawa-Lucas. Asuma que la función de producción del bien final toma la siguiente forma:

$$y = Ak^{\alpha}(uh)^{(1-\alpha)}(h^{\alpha})^{\psi}$$

donde A corresponde al nivel de tecnología, k es el stock de capital físico, u es la fracción de capital humano utilizado en el sector de producción del bien final, h es el stock de capital humano y h^{α} es el stock de capital humano promedio en la economía. El gobierno impone un impuesto al ingreso τ. El producto después de impuesto puede ser consumido o usado para incrementar el stock de capital:

$$\dot{k} = (1-\tau)Ak^{\alpha}(uh)^{(1-\alpha)}(h^{\alpha})^{\psi} - c - \delta k \ (1)$$

Asuma que no hay crecimiento poblacional. La producción de capital humano exhibe retornos constantes a escala. En particular, la acumulación de capital humano toma la siguiente forma:

$$\dot{h} = (1+s)B(1-u)h - \delta h \ (2)$$

Donde s corresponde a un subsidio constante a la eduación, B es el nivel de productividad en el sector del capital humano y (1-u) es la fracción del capital humano destinada al sector de educación.

Los hogares maximizan la siguiente función de utilidad:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} dt$$

Sujeto a (1) y (2), tomando $k(0) > 0$, $h(0) > 0$, τ, s, h^{α} como dados.

(a) Imagine que la economía esta habitada por personas con distintos niveles de capital humano, digamos h_1 tiene un nivel mas bajo que h_2 y asi sucesivamente. ¿Cuál sería el efecto de introducir una persona con el nivel mas alto de capital humano en la productividad del resto de los trabajadores? Explique por qué.

[2] Dudas de este ejercicio a: mnegrete@fen.uchile.cl

Respuesta

Si entra alguien con mayor capital humano a la economía debería aumentar el capital promedio de esta economía (h^{α}).

En consecuencia de este aumento se producirá un aumento en la Pmg del capital humano pues aumenta el término $(h^{\alpha})^{\psi}$:

$$\frac{\partial y}{\partial h} = A(1-\alpha)k^{\alpha}u^{1-\alpha}h^{-\alpha}(h^{\alpha})^{\psi}$$

Por lo tanto, cada trabajador es más productivo debido al ingreso de este individuo.

(b) Encuentre las condiciones de primer orden con respecto a c, u, h y k.

Respuesta

Desarrollamos el problema de maximización del individio/hogar:

$$max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} dt$$

s.a

$$\dot{k} = (1-\tau)Ak^{\alpha}(uh)^{(1-\alpha)}(h^{\alpha})^{\psi} - c - \delta k$$
$$\dot{h} = (1+s)B(1-u)h - \delta h$$
$$k(0), h(0), \tau, s, h^{\alpha} \text{ dados}$$

Escribimos el Hamiltoniano y calculamos las CPO:

$$H : e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} + \mu_t((1-\tau)Ak^{\alpha}(uh)^{(1-\alpha)}(h^{\alpha})^{\psi} - c - \delta k) + v_t((1+s)B(1-u)h - \delta h)$$

$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 = e^{-\rho t}c_t^{-\theta} + \mu_t(-1)$ **(1)**
$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = \mu_t((1-\tau)Ak^{\alpha}(h^{\alpha})^{\psi}h^{1-\alpha}(1-\alpha)u^{-\alpha}) + v_t((1+s)Bh(-1))$ **(2)**
$\frac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\mu}_t = \mu_t((1-\tau)A(uh)^{1-\alpha}(h^{\alpha})^{\psi}\alpha k^{\alpha-1} - \delta)$ **(3)**
$\frac{\partial H}{\partial h} = -\dot{v}_t = \mu_t((1-\tau)Ak^{\alpha}u^{1-\alpha}(h^{\alpha})^{\psi}(1-\alpha)h^{-\alpha}) + v_t((1+s)B(1-u) - \delta)$ **(4)**

Comentario que puede servir para el estudio: No olvidar, que cuando piden hacer la maximización también hay que considerar las condiciones de transversalidad (en este caso para k y h). En esta respuesta no era necesario incluirlas porque pedían directamente las CPO, sin embargo, dejo a continuación las condiciones que deberían haberse incluído si es que la instrucción hubiese sido 'resuelva el problema de maximización del hogar':

$$lim_{t\to\infty}\mu_t k_t = 0$$
$$lim_{t\to\infty}v_t h_t = 0$$

(c) Encuentre las tasas de crecimiento de estado estacionario para el capital físico, el capital humano, el consumo y el producto. ¿Son todos iguales?

Respuesta

Vamos a resolver el estado estacionario de la economía y ver si las tasas de crecimiento son idénticas para las variables que nos piden.

Partimos derivando **(1)** y reemplazando este resultado en **(4)**:

$$e^{-\rho t}c_t^{-\theta}((1-\tau)A(uh)^{1-\alpha}(h^\alpha)^\psi \alpha k^{\alpha-1}-\delta) = e^{-\rho t}c_t^{-\theta}\rho + e^{-\rho t}c_t^{-\theta-1}\theta\dot{c}_t$$
$$\implies \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}((1-\tau)\alpha A(uh)^{1-\alpha}(h^\alpha)^\psi k^{\alpha-1}-\delta-\rho)$$

Notemos que $A(uh)^{1-\alpha}(h^\alpha)^\psi k^{\alpha-1} = y/k$

$$\implies \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}((1-\tau)\alpha\frac{y}{k}-\delta-\rho)$$

Como sabemos que en la senda estable o estado estacionario se debe cumplir que las variables crezcan a una tasa constante sabemos que $\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \gamma_c =$ constante. Dicho esto, se tiene que cumplir que $\frac{1}{\theta}((1-\tau)\alpha\frac{y}{k}-\delta-\rho)$ sea constante también. Para que eso ocurra se debe cumplir que el producto y el capital crecen a la misma tasa: $\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \gamma_y = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \gamma_k$ $=$ constante.

Luego, podemos utilizar la restricción del capital para conocer cual es la tasa de crecimiento del capital:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = (1-\tau)Ak^{\alpha-1}(uh)^{(1-\alpha)}(h^\alpha)^\psi - \frac{c}{k} - \delta$$

Notando nuevamente que $A(uh)^{1-\alpha}(h^\alpha)^\psi k^{\alpha-1} = y/k$ podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = (1-\tau)\frac{y}{k} - \frac{c}{k} - \delta$$

Ahora razonamos igual que antes. Sabemos que γ_k debe ser constante y por lo tanto $(1-\tau)\frac{y}{k} - \frac{c}{k} - \delta$ debe ser constante. Además, por lo parte anterior sabemos que $\gamma_k = \gamma_y$ por lo tanto, se cumple que el primer término será constante. Luego, para que todo el término sea constante se debe cumplir que el segundo término también lo sea. Para que eso ocurra se debe cumplir que $\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \gamma_c = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \gamma_k =$ constante.

Por lo tanto, ahora sabemos que $\gamma_c = \gamma_k = \gamma_y$. Falta solamente ver que ocurre con la tasa de crecimiento del capital humano. Para encontrar esta tasa usamos la restricción del capital humano:

$$\frac{\dot{h}}{h} = (1+s)B(1-u) - \delta$$

Nuevamente, sabemos que se debe cumplir que $\frac{\dot{h}}{h} = \gamma_h =$ constante. Para que eso ocurra se debe cumplir que $(1+s)B(1-u)-\delta$ sea constante. Para que eso ocurra se debe cumplir que u es constante.

Posteriormente, podemos imponer que en estado estacionario se cumple que $h^\alpha = h$. Reemplazamos esta equivalencia en la función de producción para luego calcular la tasa de crecimiento del PIB (es decir, γ_y que es igual a γ_k y γ_c):

$$y = Ak^\alpha(uh)^{(1-\alpha)}(h^\alpha)^\psi \implies y = Ak^\alpha(uh)^{(1-\alpha)}(h)^\psi = Ak^\alpha u^{1-\alpha}h^{1-\alpha+\psi}/log(.)$$
$$\Longleftarrow log(y) = log(A) + \alpha log(k) + (1-\alpha)log(u) + (1-\alpha+\psi)log(h)/\frac{\partial}{\partial t}$$
$$\implies \frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} + (1-\alpha)\frac{\dot{u}}{u} + (1-\alpha+\psi)\frac{\dot{h}}{h}$$

Pero sabemos que u es constante (por lo tanto $\frac{\dot{u}}{u} = 0$) y que $\gamma_y = \gamma_k$:

$$\implies \gamma_y = \alpha\gamma_y + (1-\alpha+\psi)\gamma_h \implies \gamma_y = \frac{(1-\alpha+\psi)}{(1-\alpha)}\gamma_h$$

Por lo tanto, podemos concluir que $\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c \neq \gamma_h$

Ahora solo falta encontrar los valores de las tasas de crecimiento (notemos que basta encontrar una de las tasas para obtener todas las demás).

Para eso tenemos que trabajar con nuestros multiplicadores. Notemos que podemos reescribir la ecuación **(2)** como:

$$\mu_t((1-\tau)(1-\alpha)\frac{y}{u}) = v_t((1+s)Bh)$$

Luego, aplicamos logaritmo y derivamos en función del tiempo:

$$log(\mu_t) + log(\frac{(1-\tau)(1-\alpha)}{u}) + log(y) = log(v_t) + log(B(1+s)) + log(h) / \frac{\partial}{\partial t}$$
$$\implies \frac{\dot{\mu_t}}{\mu_t} + \frac{\dot{y_t}}{y_t} = \frac{\dot{v_t}}{v_t} + \frac{\dot{h_t}}{h_t}$$

Luego, reemplazamos nuestras igualdades de tasas de crecimiento obtenidas antes:

$$\implies \frac{\dot{\mu_t}}{\mu_t} + \frac{\dot{y_t}}{y_t} = \frac{\dot{v_t}}{v_t} + \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\psi}\frac{\dot{y_t}}{y_t} \implies \frac{\dot{y_t}}{y_t} = \frac{1-\alpha+\psi}{\psi}(\frac{\dot{v_t}}{v_t} - \frac{\dot{\mu_t}}{\mu_t}) = \gamma_y \textbf{ (*)}$$

Por lo que necesitamos el valor de la tasa de nuestros multiplicadores (que también debe ser constante) para encontrar el valor de nuestras tasas de crecimiento. Para eso, sabemos de la ecuación **(2)** que:

$$\frac{\mu_t}{v_t} = \frac{(1+s)Bhu}{(1-\tau)(1-\alpha)y} \textbf{ (5)}$$

Luego, de **(4)**:

$$\frac{-\dot{v_t}}{v_t} = \frac{\mu_t}{v_t}((1-\tau)(1-\alpha)\frac{y}{h}) + (1+s)B(1-u) - \delta$$

Reemplazamos **(5)** en esta versión de **(4)**:

$$\frac{-\dot{v_t}}{v_t} = \frac{(1+s)Bhu}{(1-\tau)(1-\alpha)y}((1-\tau)(1-\alpha)\frac{y}{h}) + (1+s)B(1-u) - \delta = (1+s)Bu + (1+s)B(1-u) - \delta$$
$$\implies \frac{\dot{v_t}}{v_t} = \delta - (1+s)B \textbf{ (6)}$$

Entonces, ya encontramos una expresión para $\frac{\dot{v_t}}{v_t}$, ahora falta una expresión para $\frac{\dot{\mu_t}}{\mu_t}$. Esta la obtenemos a partir de la ecuación **(1)**:

$$e^{-\rho t}c_t^{-\theta} = \mu_t / log(.)$$
$$\implies -\rho t - \theta log(c_t) = log(\mu_t) / \frac{\partial}{\partial t}$$
$$\implies -\rho - \theta\frac{\dot{c_t}}{c_t} = \frac{\dot{\mu_t}}{\mu_t} = -\rho - \theta\gamma_c \textbf{ (7)}$$

Finalmente, reemplazamos **(6)** y **(7)** en **(*)**

$$\gamma_y = \frac{1-\alpha+\psi}{\psi}(\delta - (1+s)B + \rho + \theta\gamma_c)$$

Como $\gamma_y = \gamma_c$:

$$\gamma_y - \frac{(1-\alpha+\psi)\theta}{\psi}\gamma_y = \frac{1-\alpha+\psi}{\psi}(\delta - (1+s)B + \rho)$$
$$\implies \gamma_y = \frac{(1-\alpha+\psi)}{\psi-(1-\alpha+\psi)\theta}(\delta - (1+s)B + \rho) = \gamma_c = \gamma_k$$
$$\implies \gamma_h = \gamma_y\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\psi} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\psi} \cdot \frac{(1-\alpha+\psi)}{\psi-(1-\alpha+\psi)\theta}(\delta - (1+s)B + \rho) = \frac{1-\alpha}{\psi-(1-\alpha+\psi)\theta}(\delta - (1+s)B + \rho)$$

(d) ¿Cuál es el papel que juega la externalidad en la tasa de crecimiento?

Respuesta

La externalidad viene medida a través de la constante ψ. A medida que aumenta el tamaño de la externalidad debe aumentar la tasa de crecimiento de la economía, puesto que esto trae un efecto positivo sobre el producto (aunque no es internalizado por los hogares).

(e) ¿Cuál es el efecto de un incremento en el subsidio s en la tasa de crecimiento del producto?¿Por qué?

Respuesta

El subsidio tendrá un efecto positivo sobre la tasa de crecimiento. Esto viene del hecho de que las personas no internalizan la externalidad positiva de la acumulación de capital humano. Por lo tanto, la provisión descentralizada (sin subsidio) de h será menor a la óptima socialmente. Luego, con el subisidio lo que se hace es aumentar la provisión de h, por lo tanto, aumenta el capital humano promedio (ie: aumenta la externalidad postiva) y por lo tanto, aumenta la tasa de crecimiento.

(f) Ignorando la restricción presupuestaria del gobierno ¿Cuál es el efecto de un aumento en τ en la tasa de crecimiento del producto? ¿Por qué?

Respuesta

No hay efecto de un aumento en τ en la tasa de crecimiento del producto (esto se ve directamente del resultado derivado anteriormente). La intuición viene de que el crecimiento endógeno del modelo se genera a partir de la acumulación de capital humano y no de capital físico, este último tiene retornos decrecientes mientras que el capital humano no (debido a la externalidad positiva h^{α})