SOLEMNE II - PAUTA
MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: MOHIT KARNANI - MICHAEL LLAUPI

Pregunta 1

Filomena y Colomba son vecinas y están dispuestas a abrir mano de parte de su tiempo libre para ir a buscar moras silvestres al bosque. Colomba es la única que sabe donde crecen las moras y puede utilizar su propio tiempo libre o contratar a Filomena para obtenerlas. Si se dedican x horas a buscar y recolectar moras, se conseguirán $\sqrt{x}$ kilos. Las preferencias de Filomena y Colomba por horas de ocio (x) y por kilos de moras silvestres (y) son representadas por las funciones de utilidad $U^F(x,y) = y\sqrt{x}$, $U^C(x,y) = xy$. Si cada una de las vecinas tiene una hora de tiempo libre, determine el equilibrio competitivo.

Se trata de una economía Walrasiana con producción. Hay una firma, propiedad de Colomba, la cual es caracterizada por la tecnología $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \ \wedge \ y \leq \sqrt{x}\}$. Así, dados precios $(p_x, p_y) \gg 0$ para el ocio y las moras silvestres,[1] el objetivo de la firma es $\max_{x \geq 0}(p_y\sqrt{x} - p_x x)$. Como la función objetivo es cóncava, la solución queda biunívocamente caracterizada por la condición de primer orden, la cual implica que la demanda de la firma de horas dedicadas a la recolección de moras es igual a $x^f(p_x,p_y) := p_y^2/(4p_x^2)$. Los beneficios de la firma son $p_y\sqrt{x^f(p_x,p_y)} - p_x x^f(p_x,p_y) = p_y^2/(4p_x)$.

Sigue que a precios (p_x,p_y) Colomba tiene una renta monetaria $p_x + p_y^2/(4p_x)$, mientras que Filomena tiene una cantidad p_x de recursos. Como las utilidades son Coob-Douglas, las demandas individuales vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
(x^C(p_x,p_y), y^C(p_x,p_y)) &= \left(\frac{1}{2}\,\frac{p_x + p_y^2/(4p_x)}{p_x},\ \frac{1}{2}\,\frac{p_x + p_y^2/(4p_x)}{p_y}\right);\\
(x^F(p_x,p_y), y^F(p_x,p_y)) &= \left(\frac{1}{3}\,\frac{p_x}{p_x},\ \frac{2}{3}\,\frac{p_x}{p_y}\right).
\end{aligned}$$

En equilibrio la demanda agregada por tiempo, sea para ocio por parte de Colomba o Filomena, o para labores de recolección de moras por parte de la firma, debe igualar a la oferta. Por lo tanto, normalizando $p_x = 1$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_y^2}{4}\right) + \frac{1}{3} + \frac{p_y^2}{4} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad p_y = \frac{2}{3}\sqrt{7}.$$

Concluimos que los precios de equilibrio vienen dados por $(\overline{p}_x, \overline{p}_y) = (1, 2\sqrt{7}/3)$. A esos precios, las demandas de las vecinas son $(\overline{x}^C, \overline{y}^C) = (8/9,\ 4\sqrt{7}/21)$, $(\overline{x}^F, \overline{y}^F) = (3/9, 3\sqrt{7}/21)$. Es inmediato que esto es coherente con la venta de $7/9$ de hora de ocio (Colomba vende $1/9$ de hora, mientras que Filomena vende $6/9$ de hora) para que la firma produzca $\sqrt{7}/3$ kilos de moras silvestres, lo cual no sólo asegura que se maximizan sus beneficios sino que también viabiliza la oferta de moras para cubrir la demanda agregada de las vecinas.$\square$

Pregunta 2

Considere una economía con dos periodos e incertidumbre sobre la realización de un estado de la naturaleza $s \in \{u, d\}$ en el segundo periodo. Existen n individuos y dos mercancías, x e y. Asumiremos que

[1] La monotonía estricta de las preferencias asegura la positividad de los precios de equilibrio.

x es perecible e y es perfectamente durable. Cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$ es caracterizado por la asignación inicial de mercancías $w^i \in \mathbb{R}^6_{++}$ y la función de utilidad

$$U^i\left((x_s, y_s)_{s\in\{0,u,d\}}\right) = \sqrt{x_0 y_0} + \beta_i\left(\pi_i\sqrt{x_u y_u} + (1-\pi_i)\sqrt{x_d y_d}\right),$$

donde $\beta_i, \pi_i \in (0,1)$ representan, respectivamente, el factor de descuento intertemporal y la probabilidad de ocurrencia del estado u. Los individuos son tomadores de precios y pueden suavizar su consumo negociando un activo financiero, el cual promete entregar en el segundo periodo un pago igual al valor de mercado de una unidad de la mercancía x.

A diferencia del modelo clásico de mercados incompletos, existe *riesgo de crédito*. Esto es, quienes reciben recursos en $t = 0$ a cambio de una promesa futura pueden no honrar sus compromisos. Con el objetivo de proteger a los inversores, los deudores deberán constituir garantías subsidiarias (*colateral*) al momento de hacer una promesa: se deberá poner como garantía una unidad de la mercancía y por cada unidad del activo que se vende al descubierto. Los deudores pueden consumir estas garantías en $t = 0$, pero deben entregarlas en los estados de la naturaleza donde no cumplan con sus promesas.

Como no existen efectos reputacionales asociados al no cumplimiento de los compromisos financieros, quienes invierten saben que estarán sujetos a *default estratégico* por parte de los deudores: se entregará el colateral si y solamente si su valor es inferior a la promesa. Dicho de otra forma, por cada unidad demandada en $t = 0$, el activo pagará $\min\{p_{s,x}, p_{s,y}\}$ en el estado $s \in \{u, d\}$.

(a) Describa analíticamente las restricciones a las cuales se enfrenta cada individuo y las características de un equilibrio competitivo. Además, demuestre que en equilibrio el precio del activo es menor que el precio del bien durable en $t = 0$. Interprete.

Dados precios para las mercancías y para el activo $((p_{s,x}, p_{s,y})_{s\in\{0,u,d\}}, q) \in \mathbb{R}^6_+ \times \mathbb{R}_+$, cada individuo $i \in \{1, \ldots, n\}$ escogerá un plan de consumo $(x_s, y_s)_{s\in\{0,u,d\}} \geq 0$ y una posición financiera $z \in \mathbb{R}$ sujeto a las siguientes restricciones presupuestarias:

$$\begin{aligned}
p_{0,x}x_0 + p_{0,y}y_0 &\leq p_{0,x}w^i_{0,x} + p_{0,y}w^i_{0,y} - qz \\
p_{s,x}x_s + p_{s,y}y_s &\leq p_{s,x}w^i_{s,x} + p_{s,y}w^i_{s,y} + p_{s,y}y_0 + \min\{p_{s,x}, p_{s,y}\}z, \quad \forall s \in \{u, d\}; \\
y_0 &\geq \max\{-z, 0\}.
\end{aligned}$$

Note que las restricciones presupuestarias del segundo periodo consideran la existencia de colateral como garantía a las promesas y la durabilidad de la mercanía y. Además, la tercera restricción asegura que los individuos demandan la cantidad de bien durable necesario para cubrir sus promesas.

Denotaremos por $B^i(p,q)$ al conjunto de vectores $((x,y),z) \equiv ((x_s,y_s)_{s\in\{0,u,d\}}, z) \in \mathbb{R}^6_+ \times \mathbb{R}$ que cumplen las restricciones antes descritas a precios $(p,q) \equiv ((p_{s,x}, p_{s,y})_{s\in\{0,u,d\}}, q)$.

Un equilibrio competitivo es caracterizado por precios y decisiones individuales que hacen posible que todos los individuos maximizen sus preferencias y las demandas agregadas sean compatibles con la oferta de mercado. Esto es, un equilibrio es dado por un vector $[(\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}^i, \overline{y}^i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}]$ tal que:
- Para cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(\overline{x}^i, \overline{y}^i) \in B^i(\overline{p}, \overline{q})$.
- Para cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U^i(\overline{x}^i, \overline{y}^i) \geq U^i(x^i, y^i)$, $\forall (x^i, y^i) \in B^i(\overline{p}, \overline{q})$.
- La oferta se iguala a la demanda en cada mercado,

$$\sum_{i=1}^n (\overline{x}^i_0 - w^i_{0,x}) = \sum_{i=1}^n (\overline{y}^i_0 - w^i_{0,y}) = \sum_{i=1}^n \overline{z} = 0; \qquad \sum_{i=1}^n (\overline{x}^i_s - w^i_{s,x}) = \sum_{i=1}^n (\overline{y}^i_s - (w^i_{s,y} + w^i_{0,y})) = 0,\ \forall s \in \{u, d\}.$$

Nos piden probar que en todo equilibrio $\overline{q} < \overline{p}_{0,y}$. Note que $\overline{p}_{0,y} - \overline{q}$ es el costo de la operación conjunta asociada a vender una unidad del activo y constituir el colateral requerido. Esa operación genera pagos no-negativos en el segundo periodo, pues el deudor tiene el colateral y nunca paga más que el mínimo entre su valor y el valor de la promesa. Por lo tanto, como las preferencias son estrictamente monótonas y el colateral es consumido por el deudor, por no-arbitrage, el costo $\overline{p}_{0,y} - \overline{q}$ debe ser positivo.

Note que la monotonía estricta de las preferencias nos asegura que, en la ausencia de mecanismos de recuperación de crédito adicionales al embargo del colateral, los deudores harán *default estratégico*. Por lo tanto, la propiedad $\overline{q} < \overline{p}_{0,y}$ es una simple reacción del mercado a este comportamiento a nivel individual: siempre se prestará un monto inferior al valor de la garantía. $\square$

(b) Asuma que el bien durable es relativamente escaso: $\sum_{i=1}^{n}(w^i_{0,y} + w^i_{s,y}) < \sum_{i=1}^{n} w^i_{s,x}, \ \forall s \in \{u,d\}$. Demuestre que en equilibrio los deudores siempre cumplen sus promesas.

Sabemos que en equilibrio los deudores siempre cumplirán sus promesas si y solamente si los precios de las mercancías cumplen $\overline{p}_{s,x} \leq \overline{p}_{s,y}$, $\forall s \in \{u,d\}$. ¿Como podemos obtener este tipo de información sobre los precios a partir de una hipótesis sobre la oferta de mercancías? Es probable que utilizando las condiciones de primer orden del problema individual y la factibildiad de mercado.

Efectivamente, como las utilidades son separables, luego de la realización de la incertidumbre los individuos no se arrepienten del consumo que planificaron para ese estado. Además, para cada i el núcleo de la utilidad separable U^i es una función Coob-Douglas, lo cual nos asegura que en cada estado $s \in \{u,d\}$ las demandas cumplen

$$\overline{x}^i_s = \frac{1}{2}\frac{m(\overline{p}_s, \overline{y}^i_0, w^i_s, \overline{z}^i)}{\overline{p}_{s,x}}, \qquad \overline{y}^i_s = \frac{1}{2}\frac{m(\overline{p}_s, \overline{y}^i_0, w^i_s, \overline{z}^i)}{\overline{p}_{s,y}},$$

donde $m(\overline{p}_s, \overline{y}^i_0, w^i_s, \overline{z}^i)$ es la renta monetaria que el individuo i tiene disponible para consumo en el estado s. Por lo tanto, manipulando estas condiciones obtenemos que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}: \quad \frac{\overline{p}_{s,x}}{\overline{p}_{s,y}}\overline{x}^i_s = \overline{y}^i_s \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\overline{p}_{s,x}}{\overline{p}_{s,y}}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^i_s = \sum_{i=1}^{n}\overline{y}^i_s.$$

La hipótesis sobre escasez relativa del bien durable y las condiciones de factibilidad de mercado implican que $\overline{p}_{s,x} < \overline{p}_{s,y}$, $\forall s \in \{u,d\}$. $\square$

(c) Asumiendo todas las propiedades de continuidad que necesite sobre las correspondencias de alternativas presupuestariamente factibles, demuestre la existencia de al menos un equilibrio competitivo.

Para probar la existencia de equilibrio es recomendable seguir los mismos pasos de la demostración de existencia de equilibrio en economías de intercambio Walrasianas. Esencialmente, hay que truncar la economía, para luego definir un juego generalizado donde los individuos maximizan su utilidad en conjuntos presupuestarios truncados, al mismo tiempo que jugadores abstractos escogen precios en cada estado de la naturaleza con el objetivo de maximizar el valor del exceso de demanda. Luego de probar la existencia de equilibrio en el juego generalizado, la concavidad estricta de las funciones de utilidad permite probar que todo equilibrio del juego generalizado es también un equilibrio de la economía original (*Ud. tenía que desarrollar estos argumentos en detalle al responder esta pregunta*).

En esta pauta enfocaremos en el paso inicial, que es la clave para implementar la estrategia de demostración: la existencia de límites endógenos para las variables del modelo.

Las homogeneidades de grado cero en precios de las restricciones presupuestarias nos permiten asumir que $p_{0,x} + p_{0,y} + q = 1$, $p_{s,x} + p_{s,y} = 1$, $\forall s \in \{u,d\}$. Además, las condiciones de factibilidad de mercado y la no-negatividad del consumo nos aseguran que las demandas individuales por mercancías son limitadas.

Por lo tanto, la clave está en demostrar la existencia de límites endógenos para las posiciones financieras. Aunque los activos no son nominales, ni existen límites de Radner, la existencia de garantias subsidiarias hace que el volumen de deuda esté asociado a la disponibilidad del bien durable, al menos cuando la factibilidad de mercado se cumple. Efectivamente, como $\max\{-z^i, 0\} \leq y_0^i$, tenemos que $\max\{-z^i, 0\} \leq W_{0,y} := \sum_{i=1}^n w_{0,y}^i$. Por lo tanto, para cada individuo i, $z^i \geq -W_{0,y}$. Hemos encontrado así un *"límite de Radner endógeno"* que nos permite acotar las inversiones al utilizar la factibilidad de mercado, $\sum_{i=1}^n z^i = 0$. □

Pregunta 3

(a) De ejemplos de preferencias sociales no dictatoriales que cumplen los axiomas del Teorema de Imposibilidad de Arrow excepto: (i) transitividad; (ii) independencia de alternativas irrelevantes.

Se podían repetir los ejemplos discutidos en clase: *voto mayoritario dos-a-dos* para obtener una preferencia social que no es transitiva y *Conteo de Borda* para obtener una preferencia que no cumple con la Independencia de Alternativas Irrelevantes. □

(b) De ejemplos que muestren que ninguna de las tres propiedades consideradas en el Teorema de May se puede relajar sin perder el resultado.

El Teorema de May caracteriza el *voto mayoritario* a partir de axiomas básicos y en un contexto donde sólo hay dos alternativas $\{A, B\}$ y un número finito de individuos $i \in \{1, \dots, n\}$. Como hay dos alternativas, los perfiles de preferencias individuales se pueden representar por un vector $(a_1, \dots, a_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$ de tal forma que $a_i = 1$ significa que el individuo i prefiere A sobre B, $a_i = 0$ indica indiferencia de i en relación a las alternativas, mientras que $a_i = -1$ significa que B es preferida a A.

El Teorema de May caracteriza $W(a) = \text{signo} \sum_{i=1}^n a_i$ como la única preferencia social que cumple tres propiedades: *neutralidad*, *simetría* y *sensibilidad a preferencias*. *Neutralidad* exige que la preferencia social no dependa de la identidad de los individuos. *Simetría* exige que cuando los individuos invierten su preferencia, la preferencia social también se invierta. *Sensibilidad a preferencias* exige que un aumento del apoyo hacia una alternativa, que ya es socialmente tan buena cuanto la otra, genere una definición de la sociedad a favor de ella.

Los siguientes ejemplos muestran que no sepuede relajar ninguna de esas propiedades sin perder el resultado:

- Suponga que la preferencia social se determina contando los votos de los individuos a favor de cada alternativa, pero considerando dos veces el voto del primero de la lista: $F(a) = \text{signo}\left(2a_1 + \sum_{i=2}^n a_i\right)$. Entonces, perdemos la *neutralidad* pues $F(1, -1, 0, \dots, 0) = 1$ mientras que $F(-1, 1, 0, \dots, 0) = -1$. Sin embargo, simetría y sensibilidad a preferencias siguen cumpliéndose.

- Considere la preferencia social que siempre escoge la alternativa A, independiente de las preferencias de los individuos. Entonces la *simétría* se pierde, pues los cambios de opinión de los individuos no afectan en nada la preferencia social. Sin embargo, neutralidad y sensibilidad a preferencias son satisfechas.

- Si la preferencia social se determina pidiéndole a cada individuo que vote por su alternativa preferida y eligiendo como socialmente superior a la que recibe *menos* votos, entonces la *sensibilidad a preferencias* deja de cumplirse. En efecto, el aumento del apoyo de los individuos a una alternativa generará una caída en su ranking. Sin embargo, neutralidad y simetría siguen siendo satisfechas. □