Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	Abril 07, 2025
Semestre	: Otoño 2025	
Profesor	: Eduardo Engel	
Ayudantes	: Miguel Del Valle, Agustín Farías y María Jesús Negrete	
Ayudantía	: No. 4	

1. **Consumo y formación de hábitos**

   Varios trabajos exploran el impacto de la formación de hábitos sobre el consumo. La idea es que niveles altos de consumo en el pasado reciente llevarán a una mayor utilidad marginal del consumo presente, porque el consumo es adictivo o formador de hábitos.

   Un enfoque para modelar la formación de hábitos es suponer que la función de utilidad instantánea toma la forma $u(c_t - bc_{t-1})$ o la forma $u[c_t/(c_{t-1}^p)]$, donde $u(\cdot)$ tiene las propiedades habituales de una función de utilidad y b y p toman valores entre 0 y 1. Los términos bc_{t-1} y c_{t-1}^p representan el "hábito" del hogar: un valor más alto del consumo reciente reduce la utilidad del consumo presente aumentando la utilidad marginal del consumo de hoy.

   Considere la formulación secuencial del hogar con formación de hábitos. En $t = 0$ el hogar maximiza la utilidad descontada esperada:

$$\max \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t u(c_t, c_{t-1})$$

   sujeto a la riqueza inicial, A_0, a la condición de no Ponzi y a la restricción presupuestaria intertemporal

$$A_{t+1} = R(A_t + Y_t - C_t),$$

   donde γ denota el factor subjetivo de descuento, $R = (1 + r)$ con r igual a la tasa de interés (constante), A_t denota riqueza financiera al comienzo de t y Y_t denota el ingreso laboral del hogar en el período t, el cual sigue un proceso Markoviano. La función de utilidad $u(c_t, c_{t-1})$ representa el flujo de utilidad experimentado por el hogar en el período t. Esta función permite capturar de manera general que el consumo presente y del período anterior afectan la utilidad presente; esta formulación incluye como casos particulares los dos ejemplos de formación de hábitos antes mencionados.

   a) Escriba la ecuación de Bellman del problema. Determine la condición de primer orden para el lado derecho de la ecuación de Bellman y las condiciones de la envolvente para cada una de las variables de estado endógenas.

   b) Utilice las expresiones de la parte (a) para mostrar que la ecuación de Euler viene dada por:

$$u_1(c_t, c_{t-1}) + \gamma \mathrm{E}_t u_2(c_{t+1}, c_t) = \gamma R E_t[u_1(c_{t+1}, c_t) + \gamma u_2(c_{t+2}, c_{t+1})], \tag{1}$$

   donde u_1 y u_2 denotan la derivada parcial de u con respecto a su primer y segundo argumento, respectivamente.

c) En esta parte considere el caso en que $u(c_t, c_{t-1}) = \log(c_t/c_{t-1}^p)$, con $0 < p < 1$. Utilice (1) para derivar la ecuación de Euler. Compare con la ecuación de Euler en el caso sin hábito. De ser iguales, explique por qué. Si son distintas, interprete la diferencia.

d) Ahora considere el caso de utilidad cuadrática, es decir, estudiamos cómo el caso de equivalencia cierta con hábito:

$$u(c_t, c_{t-1}) = [c_t - \eta c_{t-1}] - \frac{b}{2}[c_t - \eta c_{t-1}]^2,$$

donde $b > 0$ y $0 < \eta < 1$. Suponga que $\gamma R = 1$. Utilice (1) para derivar la ecuación de Euler para este caso. Suponga que la solución es un proceso AR(1) para ΔC_t, de modo que

$$\Delta C_t = \phi \Delta C_{t-1} + e_t,$$

donde los e_t son innovaciones. Determine el único valor de $\phi \in (0, 1)$ consistente con la ecuación de Euler que obtuvo. Compare con el caso sin hábito. De ser iguales, explique por qué. Si son distintas, interprete la diferencia. **Sugerencia**: Para que el álgebra sea más simple, le sugerimos proceder como sigue: Primero, obtenga expresiones para $u_{1,t} \equiv u_1(c_t, c_{t-1})$ y $u_{2,t} \equiv u_2(c_t, c_{t-1})$. Segundo, exprese $u_{2,t}$ en términos de $u_{1,t}$. Tercero, use (1) y la relación anterior para concluir que la ecuación de Euler equivale a:

$$\mathrm{E}_t \Delta u_{1,t+1} = \eta \gamma \mathrm{E}_t \Delta u_{1,t+2}$$

Ahora exprese $\Delta u_{1,t}$ en términos de ΔC_t y ΔC_{t-1} para mostrar que la expresión anterior lleva a una ecuación de diferencias en expectativas y luego use el supuesto que ΔC_t sigue un AR(1) para determinar el único valor de $\phi \in [0, 1]$ que cumple esta ecuación.

2. **Ecuación para tiempos tormentosos**

La prensa frecuentemente afirma que una caída en el ahorro corriente presagia menor crecimiento futuro. En este problema veremos que no necesariamente es así.

a) Considere el modelo de equivalencia cierta (utilidad cuadrática, no hay activo riesgoso, $r = \delta$). Entonces el consumo óptimo viene dado por:

$$C_t = \frac{r}{1+r} \left\{ \sum_{k \geq 0} \beta^k \mathrm{E}_t Y_{L,t+k} + A_t \right\},$$

donde $\beta = 1/(1+r)$, $Y_{L,t}$ denota el ingreso laboral en t, A_t activos financieros al comienzo del período t y suponemos que el timing es tal que el ingreso financiero durante el período t, $Y_{K,t}$, es igual a $r(A_{t-1} + Y_{L,t-1} - C_{t-1})$.

Recordando que, por definición, ahorro durante t, S_t, es igual a la diferencia entre ingreso total y consumo, muestre que:

$$S_t = Y_{L,t} - r \sum_{k \geq 0} \beta^{k+1} \mathrm{E}_t Y_{L,t+k}.$$

A continuación muestre, a partir de la expresión anterior, que:

$$S_t = -\sum_{k \geq 1} \beta^k \mathrm{E}_t [\Delta Y_{L,t+k}], \tag{2}$$

donde $\Delta Y_{L,t} \equiv Y_{L,t} - Y_{L,t-1}$. Explique por qué este resultado muestra que una reducción en el ahorro no necesariamente presagia menor crecimmiento en el futuro. También explique por qué esta ecuación se conoce como la "ecuación de días tormentosos".

b) A continuación usamos el resultado anterior para predecir cambios futuros en el ingreso en base al ahorro corriente. Suponemos que el ingreso sigue un proceso ARIMA(0,1,1):

$$\Delta Y_t = g + \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1},$$

con ε_t i.i.d. con media nula y varianza σ^2. Use la ecuación de días tormentosos (2) para mostrar cómo se puede utilizar los ahorros del período t para predecir el cambio de ingreso entre t y $t+1$.

3. **Evidencia sobre compartición de riesgo**

Un hogar que vive indefinidamente tiene ingresos que siguen un camino aleatorio:

$$Y_t = Y_{t-1} + v_t$$

donde v_t son innovaciones i.i.d., de media nula.

a) Muestre que bajo equivalencia cierta tendremos

$$\Delta C_t = v_t. \tag{3}$$

Una investigadora usa datos agregados de consumo y v_t para estimar la regresión

$$\Delta C_t = \phi v_t + \text{error}_t \tag{4}$$

y obtiene un valor de ϕ significativamente (en términos estadísticos y económicos) menor que uno. La investigadora concluye que los hogares tienen acceso a mecanismos que les permiten compartir riesgos más allá de lo que suponen los modelos estándar de consumo (equivalencia cierta, ahorro por precaución, etc.).

En este problema exploramos una interpretación alternativa. Suponemos que los consumidores prestan atención a sus decisiones de consumo sólo esporádicamente (se les conoce como *consumidores inatentos*, *inattentive consumers* en inglés). Concretamente, en cada período hay una probabilidad $1-\pi$ de que un hogar repita su consumo del período anterior y una probabilidad π de que cambie su consumo.

Los shocks que determinan si un consumidor ajustará su consumo en un período dado son i.i.d. entre consumidores y para un consumidor a lo largo del tiempo.

Si un consumidor ajusta su consumo en t, elige su nuevo nivel de consumo, C_t, resolviendo:

$$\text{mín}_{C_t} \, \mathbb{E}_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \{\gamma(1-\pi)\}^k (C_t - C^*_{t+k})^2 \right] \tag{5}$$

donde γ denota la tasa subjetiva de descuento y C^*_t lo que sería el consumo óptimo bajo equivalencia cierta.

b) Dé la intuición para la función objetivo en (5), en particular, para los términos $(C_t - C^*_{t+k})^2$ y $\{\gamma(1-\pi)\}^k$.

c) Resuelva (5) y concluya que en períodos donde el consumidor ajusta su consumo elige $C_t = C_t^*$.

d) Ahora considere un gran número, n, de consumidores como aquel de las partes (b) y (c), y denote el consumo del i-ésimo consumidor mediante C_{it} y el consumo agregado mediante $C_t \equiv \sum_{i=1}^{n} C_{it}$. Asuma que las innovaciones v_t son las mismas para todos los consumidores. Encuentre una expresión para C_t in términos de C_{t-1} y C_t^*.

e) Tome la primera diferencia de la expresión que obtuvo en (d) y note que (3) aplica a C^* para expresar ΔC_t en términos de ΔC_{t-1} y v_t. A continuación utilice este resultado para expresar ΔC_t en términos de v_t y sus rezagos (la idea es deshacerse de ΔC_{t-1}).

f) Concluya que bajo los supuestos del modelo desarrollado en las partes (b)–(e), la investigadora obtendrá un valor de ϕ aproximadamente igual a π al estimar (4). Concluya que valores estimados de ϕ menores que uno no necesariamente implican compartición de riesgo más allá del sugerido por los modelos estándar de consumo.