Profesor	: Eduardo Engel	03 de agosto, 2018
Ayudantes	: Francisco Díaz-Valdés y Nicolás Suárez	
Curso	: Macroeconomía II	
Semestre	: Primavera 2018	
Guía	: No. 1 - Soluciones	
Entrega	: 14 de agosto, 8:00 am	

1. **Verdadero, Falso o Incierto**

   Decida si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera, falsa o no se puede decidir respecto de su grado de veracidad ('incierta'). Justifique su elección en no más de 50 palabras. Su evaluación dependerá de su justificación.

   (a) La teoría neoclásica de inversión en realidad es una teoría de demanda por capital.

   RESPUESTA: Verdadero. En este caso las firmas se ajustan inmediatamente al nivel de capital óptimo en cada periodo. Esto implíca que las tasas de inversión pueden ser infinitas en un modelo de tiempo continuo.

   (b) El gran mérito, desde un punto de vista conceptual, de la teoría q de inversión fue que introdujo los precios en las ecuaciones de inversión.

   RESPUESTA: Falso. El gran mérito es incluir costos de ajuste que llevan a que el nivel de capital no se ajuste de inmediato al óptimo.

   (c) Un incremento de los impuestos corporativos reduce la inversión.

   RESPUESTA: Falso. Las firmas pueden compensar un aumento de los impuestos con endeudamiento para financiar la inversión.

   (d) La teoría q de inversión es una teoría donde la inversión depende de las expectativas futuras de profitabilidad del capital.

   RESPUESTA: Verdadero. La teoría q señala que la variable q-marginal resume toda la información acerca del futuro que es relevante para la decisión de inversión de la firma. En específico, la variable q-marginal muestra cómo un peso utilizado en capital afecta el valor presente de los beneficios de la empresa[1]. Por lo que cualquier cambio, anticipado o no anticipado, en la profitabilidad del capital tendrá impacto en q-marginal, lo que, a su vez, inducirá un cambio en las decisiones de inversión de la firma.

[1] Esto último se puede demostrar: considere la teoría q vista en clases y suponga que $P_{k,t} = 1$ y que $\delta = 0$. Luego, haciendo un poco de álgebra e integrando la ecuación de optimalidad: $rq_t = \dot{q}_t + \pi_k(k_t, x_t) - C_k(I_t, k_t)$ obtenemos que:

$$q_t = \int_{s=t}^{\infty} e^{-r(s-t)} \left[\pi_k(k_s, x_s) - C_k(I_s, k_s)\right] ds$$

2. **Inversión con costos convexos de ajuste**

El tiempo $t \geq 0$ es continuo. Una firma elige la trayectoria óptima de inversión I_t en su capital físico k_t de modo de maximizar el valor de su flujo de caja descontado a tasa r. La firma comienza con k_0 y produce un bien usando su capital instalado k_t y otros insumos. Luego de elegir los insumos restantes (tales como trabajo) de manera óptima y dada la curva de demanda que enfrenta por su bien, la firma obtiene un flujo de caja $\pi(k_t) = k_t - k_t^2/2$. El capital instalado se deprecia a tasa δ. La oferta de capital es infinitamente elástica a un precio p. Instalar nuevo capital requiere que la firma lo compre y el capital instalado puede venderse, ambos a precio p por unidad de capital. Invertir y desinvertir conllevan además un costo de ajuste igual a I_t^2/k_t unidades de capital perdidas en el proceso de ajuste.

(a) Escriba el problema de optimización de la firma.

RESPUESTA:

$$\begin{aligned} \max_{I_t} \quad & \int_0^\infty \left\{ k_t - \frac{k_t^2}{2} - pI_t - p\frac{I_t^2}{k_t} \right\} e^{-rt} dt \\ \text{s.a.} \quad & \dot{k}_t = I_t - \delta k_t \\ & k_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

(b) Escriba las condiciones necesarias para optimalidad. Derive inversión óptima como función de q marginal.

RESPUESTA:
El Hamiltoniano de valor presente es

$$H = k_t - \frac{k_t^2}{2} - pI_t - p\frac{I_t^2}{k_t} + \lambda_t (I_t - \delta k_t).$$

Las condiciones necesarias para inversión óptima es que $\partial H / \partial I = 0$:

$$-p - 2p\frac{I_t}{k_t} + \lambda_t = 0,$$

y que $r\lambda_t = \dot{\lambda}_t + \partial H / \partial k$:

$$r\lambda_t = \dot{\lambda}_t + 1 - k_t + p\frac{I_t^2}{k_t^2} - \delta\lambda_t$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} \lambda_t k_t = 0.$$

Defina q marginal como

$$q_t = \frac{\lambda_t}{p}$$

de modo que la primera condición de optimalidad pasa a

$$\frac{I_t}{k_t} = \frac{q_t - 1}{2}.$$

(c) Determine el estado estacionario ($\dot{k} = \dot{q} = 0$) y dibuje en diagrama de fase en el espacio (k, q) en el entorno del estado estacionario.

RESPUESTA: El brazo estable $\dot{k} = 0$ viene dado por $I = \delta k$, lo cual combinado con la expresión anterior da

$$\frac{q-1}{2} = \delta$$

de modo que

$$q = 1 + 2\delta.$$

De la ecuación de Euler para el co-estado se obtiene que el brazo estable $\dot{q} = 0$ viene dado por la cuadrática

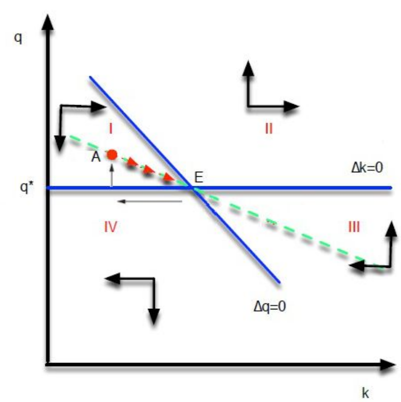
$$rq = \frac{1-k}{p} + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 - \delta q.$$

(d) Las siguientes preguntas tienen como objetivo analizar la dinámica del modelo en diversos escenarios. Teniendo en cuenta lo anterior, apoye sus argumentos con el uso de diagramas de fase en el espacio $(x, y) = (K_t, q_t)$ y en gráficos en el espacio $(x, y) = (K_t, t)$ y $(x, y) = (q_t, t)$.

i. Suponga que la firma está en estado estacionario en $t = 0$ cuando un terremoto destruye un 20% del stock de capital. Describa la dinámica de inversión posterior al terremoto.

RESPUESTA: En estado estacionario tenemos que la firma está en (k_E, q^*). El terremoto es un evento no anticipado. Destruye de forma inmediata 20% del capital. Dado el nuevo nivel de capital $k' = 0.8k_E$, q salta desde q^* hasta un q' tal que el punto (k', q') pertenece al brazo estable (A en la figura). Luego, con el paso del tiempo, la firma converge al estado estacionario (E en la figura). En términos de inversión tenemos que: ocurre el terremoto, luego $I > \delta k$ mientras se de que $q > q^*$. En otras palabras, se invierte más de lo que se deprecia con el fin de reestablecer el capital al nivel anterior al terremoto.

Figure 1: Terremoto

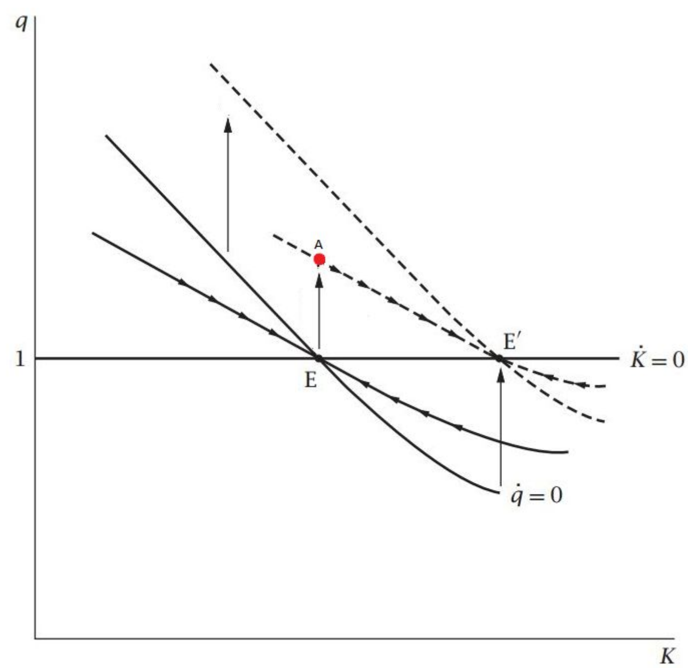


ii. Asuma ahora que la firma está en estado estacionario en $t = 0$. Considere que el flujo de caja está dado por $\tilde{\pi}(k_t) = Z_t \pi(k_t)$. Donde Z_t es un término de productividad. Hasta ahora hemos trabajado con $Z_t = 1, \forall t$. Suponga que en $t = 0$ ocurre un shock de productividad permanente tal que $Z_t = b > 1, \forall t \geq 0$. Utilizando un diagrama de fases describa la dinámica de q y k. ¿Cómo cambia su respuesta si el shock que ocurre en $t = 0$ es transitorio y es de común conocimiento que termina en el periodo $t = T$. Es decir, a partir de $t = T$ la productividad vuelve a $Z_t = 1$.

RESPUESTA:

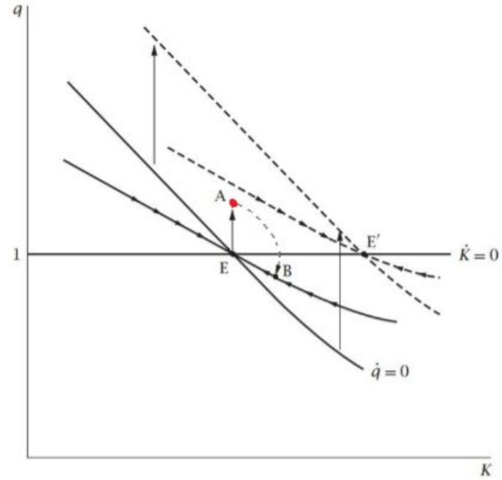
- Shock Permanente en $t = 0$: q salta al nuevo brazo estable, al ser q es mayor que 1 existen incentivos a las firmas a invertir, por lo que las firmas invierten hasta que $q = 1$ y obtener un capital de estado estacionario $K_{E'}$.

Figure 2: Shock permanente en $t = 0$



- Shock transitorio en $t = 0$: q salta menos que en el caso del shock permanente, es decir, no salta hasta el nuevo brazo estable. (Si saltara hasta el brazo estable tendríamos que en $t = T$, que es cuando termina el shock, q y k empezarían a diverger, lo que no es posible debido a la condición de transversalidad). Mientras la productividad está alta las firmas empiezan a acumular capital. Sin embargo, a medida que se acerca el término de alta productividad las firmas deben empezar a deshacerse del capital extra acumulado, como el ajuste es costos, empiezan a ajustar el capital hacia la baja antes de que termine el shock de productividad. En $t = T$ la economía se encuentra en el brazo estable anterior (B en la figura) y la economía converge al estado estacionario inicial (E en la figura).

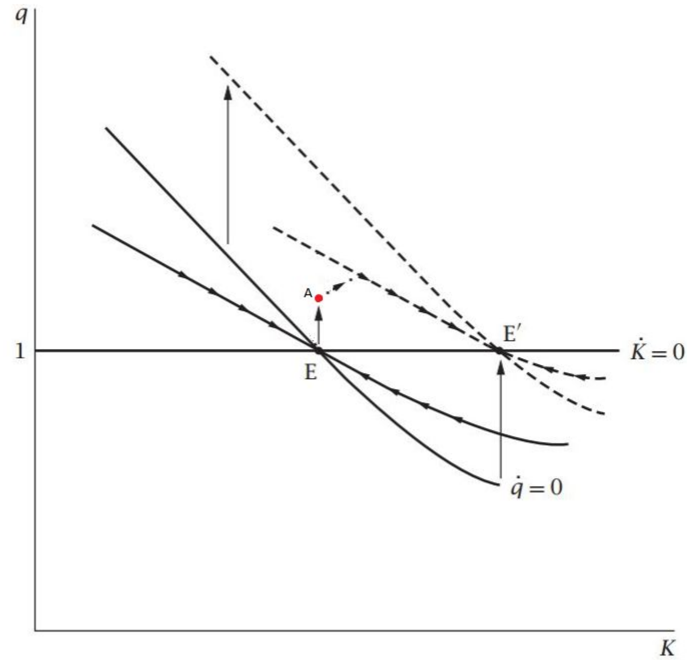
Figure 3: Shock transitorio en $t = 0$



iii. Continuación del item anterior. Suponga que la firma está en estado estacionario en $t = 0$ y que $Z_t = 1$. La firma recibe en $t = 0$ la noticia de que a partir de $t = T$ la productividad aumentará de manera permanente a $Z_t = b > 1$. Describa la dinámica de q y k en un diagrama de fases. ¿Cómo cambia su respuesta si el futuro aumento de productividad es transitorio?

- Futuro aumento permanente de productividad: como el aumento de productividad se producirá en el futuro no existe un nuevo brazo estable al que q salte. Por lo que q salta a un q^* tal que en $t = T$ se encuentre en el nuevo brazo estable (en otras palabras, q salta a un nivel q^*, luego empieza a aumentar, debido a los vientos correspondientes al sistema inicial, y en $t = T$ se encuentra en el brazo estable del nuevo sistema). Luego, la economía converge al nuevo estado estacionario E'.

Figure 4: En $t = 0$ se sabe de un aumento de productividad de forma parmanente en $t = T$



- Futuro aumento transitorio de productividad: en este caso tenemos una dinámica similar al caso del shock de productividad transitoria en el item d). q salta, empieza a aumentar hasta que $t = T$, luego empieza a disminuir para que cuando termine el shock de productividad q se encuentre en el brazo estable del sistema inicial. Como es de esperar, el capital aumenta lentamente desde $t = 0$ y sigue aumentando hasta unos periodos antes de se acabe el shock. Antes de que se termine el shock el capital comienza a disminuir, esto se debe a que las empresas quieren deshacerse del capital extra acumulado.

3. **Modelo de q de Tobin y Subsidio a la Inversión**

Considere una firma que enfrenta una tasa de interés constante, r; tiene una función de producción cóncava $F(K)$,[2] paga $p \equiv 1$ por unidad de capital y enfrenta costos cuadráticos de ajustar su stock de capital, con parámetro de convexidad b. Los costos de instalar capital se pueden descontar para efectos contables. Suponga que $\delta = 0$. En clases estudiamos el efecto del impuesto a las utilidades, ahora estudiamos el efecto de un subsidio a la inversión.

Suponga que el gobierno instituye un subsidio σ a la inversión, de modo que el costo de invertir I se reduce de $I + C(I, K)$ a $(1 - \sigma)I + C(I, K)$.

(a) Estamos suponiendo que el subsidio del gobierno no involucra los costos de ajuste. Discuta cuán razonable es este supuesto para distintas interpretaciones de los costos de ajuste.

RESPUESTA:

Generalmente, los costos de ajuste no forman parte del costo de capital y su medición no es trivial. Bajo este supuesto, sería razonable que el subsidio del gobierno no los involucrara. Si los costos de ajuste pudieran incluirse como costo de capital, por ejemplo instalación de nuevo capital que requiriera capacitación de la mano de obra para ser puesto en operación, podría argumentarse a favor de considerarlos en el subsidio. Por lo tanto, el uso del supuesto depende de si es que se consideran los costos de instalación, reemplazo y aprendizaje que implica la inversión en capital.

(b) Muestre que el q de estado estacionario, q^*, es igual a $1-\sigma$. Interprete económicamente este resultado. Caracterice el stock de capital de estado estacionario, K^*.

RESPUESTA:

Tenemos que: $C(I_t, K_t) = \frac{1}{2} b \frac{I_t^2}{K_t}$, por lo que el Hamiltoniano corriente es:

$$H(I_t, K_t) = \pi(K_t, x_t) - (1 - \sigma)I_t - C(I_t, K_t) + \lambda_t I_t.$$

Obtenemos la condición de primer orden con respecto al control:

$$H_I = 0 \Leftrightarrow q_t = (1 - \sigma) + b\frac{I_t}{K_t},$$

donde utilizamos que $p = 1$ y $q_t = \frac{\lambda_t}{p}$.

Despejando para I_t y considerando la dinámica de K_t sin depreciación:

$$I_t = \left[\frac{q_t - (1 - \sigma)}{b}\right] K_t = \dot{K}_t.$$

Finalmente se tiene que en estado estacionario ($\dot{K}_t = 0$), $q^* = (1 - \sigma)$. El subsidio a la inversión disminuye su costo, con lo que en este caso las firmas invertirán hasta que el valor del capital y el subsidio excedan el costo del capital.

[2] Por simplicidad ignoramos el factor trabajo; esto no afecta ninguna de las conclusiones que siguen.

Tenemos que $\pi(K_t, x_t) = [F(K_t)]^{1-\eta}$, luego obtenemos la condición de primer orden con respecto al estado :

$$-H_k = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t \Leftrightarrow rq_t = \dot{q}_t + \pi_k(K_t, x_t) + C_k(I_t, K_t),$$
$$con\ C_k(I_t, K_t) = -\frac{1}{2b}(I_t/K_t)^2\ y$$
$$\pi_k(K_t, x_t) = (1-\eta)F(K_t)^{-\eta}F_K(K_t).$$

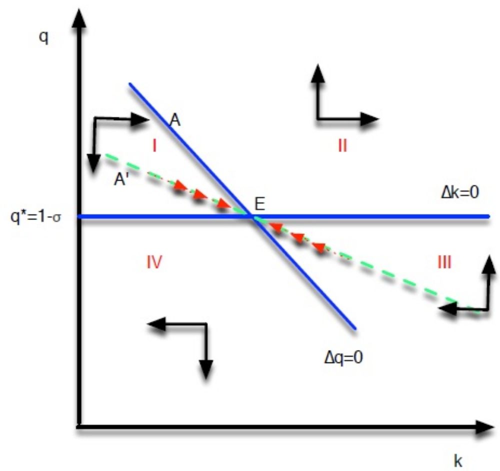
Utilizando los valores de estado estacionario para $\dot{q}_t$ y q_t, el capital de estado estacionario se determina por:

$$F_K(K^*) = [r(1-\sigma)]\,\frac{1}{(1-\eta)F(K^*)^{-\eta}}.$$

(c) Determine el diagrama de fase en el espacio (K, q). Justifique las flechas en cada región y muestre que hay un brazo estable.

RESPUESTA:
Para $\dot{q}_t$, en las regiones I y IV:
Sabemos que $\dot{q} = rq - \pi_k(K, x) - c_k(I, k) = rq_t - (1-\eta)F(K)^{-\eta}F_k(K) - \frac{1}{2}\frac{(q-(1-\sigma))^2}{b}$. Si nos paramos en la recta $\dot{K} = 0$ es decir, evaluando en $q = 1-\sigma$, tenemos que:
$\dot{q} = r(1-\sigma) - (1-\eta)F(K)^{-\eta}F_k(K)$. Debido a la concavidad de $F(K)$, si evaluamos en $K = \epsilon$, con $\epsilon > 0$ un número muy pequeño, tenemos que $\dot{q} < 0$ (ya que $F_k(\epsilon)$ se hace muy grande y $F(\epsilon)$ pequeño). Esto lleva a que el movimiento de la flecha bajo $\dot{q} = 0$ sea hacia el origen del gráfico. En las regiones II y III: contrario al caso anterior, sobre $\dot{q} = 0$ la flecha se desplaza en dirección contraria al origen.

Para $\dot{K}$: las firmas aumentan su capital cuando su valor marginal es mayor al costo de reposición de equilibrio, $q^* = (1-\sigma)$. Luego, sobre $\dot{K} = 0$, donde $q^* = (1-\sigma)$, la flecha se mueve hacia la derecha, y bajo hacia la izquierda. En las regiones I y III se forma un brazo estable debido a que los vientos del sistema empujan hacia E.


q
A
I
II
A'
E
Δk=0
q*=1-σ
IV
III
Δq=0
k

4. **Modelo de q de Tobin cuando $\delta > 0$**

El tiempo $t \geq 0$ es continuo. Una firma elige la trayectoria óptima de inversión I_t de modo de maximizar el valor de su flujo de caja descontado a tasa $r > 0$. La firma comienza con K_0 y tiene un flujo de caja igual a $\pi(K_t)$, con $\pi_k(K_t) > 0$ y $\pi_{kk}(K_t) < 0$, y existe la inversa de $\pi_k(K_t)$. El capital instalado se deprecia a tasa δ, con $0 < \delta < 1$. La oferta de capital es infinitamente elástica a un precio $p_t = 1, \forall t$. Invertir y desinvertir conllevan un costo de ajuste igual a $C(I_t, K_t)$ unidades de capital perdidas en el proceso de ajuste, es decir, invertir en 1 unidad de capital tiene un costo total de $p_t(1 + C(I_t, K_t))$.

(a) Plantee el problema de la firma.

RESPUESTA:

$$\begin{aligned} V(K_0) = \max_{\{I_t\}_{t\geq 0}} & \int e^{-rt} \left[\pi(K_t) - (I_t + C(I_t, K_t))\right] dt \\ s.t. \qquad & \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \end{aligned}$$

(b) Asuma en todo lo que sigue que los costos de ajuste tienen la siguiente forma funcional: $C(I_t, K_t) = \frac{b}{2}\left(\frac{I_t^2}{K_t}\right)$.
Resuelva el problema de la firma y encuentre el sistema de ecuaciones diferenciales que caracterizan el sistema.

RESPUESTA:

$$\begin{aligned} H_t &= \pi(K_t) - (I_t + C(I_t, K_t)) + \lambda_t(I_t - \delta K_t) \\ \frac{\partial H_t}{\partial I_t} &= 0 \Leftrightarrow 1 + C_I(I_t, K_t) = q_t, \quad q_t = \lambda_t / p_t = \lambda_t \\ -\frac{\partial H_T}{\partial K_t} &= \dot{\lambda}_t - r\lambda_t \Leftrightarrow C_K(I_t, K_t) + (\delta + r) q_t = \dot{q}_t + \pi_k(K_t) \end{aligned}$$

Notando que $I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$ y haciendo un poco de álgebra se obtiene que las dos ecuaciones que caracterizan el sistema son:

$$\dot{K}_t = \frac{(q_t - (1 + b\delta))\, K_t}{b} \tag{1}$$

$$\dot{q}_t = (r + \delta) q_t - \pi_k(K_t) - \frac{1}{2b}(q_t - 1)^2 \tag{2}$$

(c) ¿Cómo se interpreta el parámetro b? Encuentre las curvas asociadas a $\dot{K}_t = 0$ y $\dot{q}_t = 0$. Provea una explicación intuitiva de la expresión para la curva asociada a $\dot{K}_t = 0$

RESPUESTA:
El parámetro b se interpreta cómo la sensilidad de los costos de ajuste.
Dado $\dot{K}_t = 0$ obtenemos de la ecuación (1) que:

$$q_t = 1 + b\delta \tag{3}$$

Dado $\dot{q}_t = 0$ obtenemos de la ecuación (2) que:

$$\pi_k(K_t) = (r+\delta)q_t - \frac{1}{2b}(q_t - 1)^2 \tag{4}$$

Intuitivamente, como $\delta > 0$ y $\dot{K}_t = 0$, significa que todos los periodos debe invertirse δ unidades de capital para reponer el que se va depreciando. Esto se interpreta como: el costo de adquirir una unidad de capital es igual al precio de compra (que fijamos en 1) más la depreciación por el parámetro de sensibilidad de los costos de ajuste (esta última expresión es igual a el costo marginal de ajustar). En consecuencia, la ecuación (4) nos dice que la firma invierte hasta el punto en el que el costo de adquirir capital es igual al valor del capital (Ver Romer, página 410).

(d) Usando que $\dot{q}_t = 0$ encuentre una expresión para $dq_t(K_t)/dK_t$. ¿Es está expresión siempre negativa? Explique en qué casos podría ser esta expresión positiva.

RESPUESTA:
Derivando la ecuación (4) respecto a K_t:

$$\pi_{kk}(K_t) = (r+\delta)\frac{dq_t(K_t)}{dK_t} - \frac{1}{b}(q_t(K_t) - 1)\frac{dq_t(K_t)}{dK_t}$$

Reordenando lo anterior podemos encontrar una expresión para $dq_t(K_t)/dK_t$:

$$\frac{dq_t(K_t)}{dK_t} = \frac{-b\pi_{kk}(K_t)}{b(r+\delta) - (q_t(K_t) - 1)}$$

Como $b > 0$ y $\pi_{kk}(K_t) < 0$, el numerador es positivo, por lo que, para que la expresión sea negativa, necesitamos que el denominador sea negativo:

$$q_t(K_t) < 1 + b(r+\delta)$$

La expresión será positiva si el denominador es positivo, lo que se cumple si: $q_t(K_t) > 1 + b(r+\delta)$. Notar que a pesar de que la curva $q(K_t)$ pueda tener pendiente positiva cuando $K_t \to 0$, se puede demostrar que la senda de equilibrio siempre tendrá pendiente negativa (Ver libro Economic Growth de Barro y Xala-i-Martin, página 157).

(e) Demuestre la existencia de un estado estacionario, caracterizado por q_{EE} y K_{EE}. En la vecindad del estado estacionario, la expresión $dq_t(K_t)/dK_t$ ¿es negativa o positiva?
Ayuda: le puede ser útil volver a leer las propiedades del flujo de caja de la firma que se especifican en el enunciado.

RESPUESTA:
Sabemos por el item anterior que si $q_t(K_t) = 1 + b(r + \delta) < 0$. También sabamos que en estado estacionario se cumple que $\dot{K}_t = 0$ y $\dot{q}_t = 0$, por lo tanto, $q_{EE} = 1 + b\delta$. Sea $\epsilon > 0$ un número muy pequeño y sea $q_{\text{vecindad(+)}} = 1 + b\delta + \epsilon$ y $q_{\text{vecindad(-)}} = 1 + b\delta - \epsilon$. Por lo tanto, $\dfrac{dq_t(K_t)}{dK_t} < 0$ si $q_t \in \left[q_{\text{vecindad(-)}}, q_{\text{vecindad(+)}}\right]$.
Para demostrar la existencia del estado estacionario nos falta por encontrar que existe K_{EE} tal que:

$$\pi_k(K_{EE}) = (r + \delta)q(K_{EE}) - \frac{1}{2b}(q(K_{EE}) - 1)^2$$

Pero, en estado estacionario $q(K_{EE}) = 1 + b\delta$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}\pi_k(K_{EE}) &= (r + \delta)(1 + b\delta) - \frac{1}{2b}(b\delta)^2 \\ \Leftrightarrow K_{EE} &= \pi_k^{-1}\left((r + \delta)(1 + b\delta) - \frac{1}{2b}(b\delta)^2\right)\end{aligned}$$