CONTROL V – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: DIEGO FICA - NICOLÁS SUÁREZ

En el contexto de emparejamientos bilaterales uno-a-uno:

(i) Si comenzamos de un matching inestable y permitimos que se vayan generando bloqueos de forma secuencial, uno de cada vez, ¿siempre llegamos a un matching estable?

No necesariamente. Era suficiente dar un ejemplo (esta propiedad fue descubierta por Knuth (1976), cuyo ejemplo original lo reproducen Roth y Vande Vate (Econometrica, 1990)[1] en su Introducción, artículo al cual deberían haber llegado al investigar la respuesta de la pregunta (v)).

(ii) Suponga que todos los hombres consideran a Philippa la mejor alternativa. Demuestre que en cualquier matching estable ella tiene la misma pareja. Alternativamente, si Philippa es la peor alternativa para todos los hombres, ¿continua teniendo la misma pareja en todo matching estable?

Asuma que todos los hombres consideran a Philippa la mejor opción para formar una pareja. Para probar que en cualquier matching estable ella tiene la misma pareja, es suficiente probar que ella tiene la misma pareja en los matchings que se obtienen al aplicar el algoritmo de aceptación diferida. Efectivamente, sabemos que las parejas que Philippa tiene en esos matchings son su peor y mejor alternativa dentro de las que ella puede obtener en un matching estable. Por lo tanto, si coinciden, ella tendrá siempre la misma pareja en un matching estable.

Si Philippa no considera a ningún hombre aceptable, entonces cuando ellos hacen las propuestas ella no acepta ninguna y se queda sola. Alternativamente, cuando las mujeres hacen las propuestas, Philippa no participa activamente del proceso de aceptación diferida, pues prefiere quedarse sola. Esto es, ella está sin pareja en todo matching estable.

Suponga que Philippa considera que existe al menos un hombre aceptable. Si los hombres hacen las propuestas, entonces en la primera etapa del algoritmo de aceptación diferida todos le hacen propuestas a ella, que escoge al hombre que está en el primer lugar de sus preferencias. Más aún, su decisión es permanente, pues ella no recibirá propuestas mejores (tiene en la primera etapa a todos los hombres haciéndole ofertas). Alternativamente, si son las mujeres las que hacen las propuestas, en la primera etapa Philippa le hace una propuesta al hombre que está en el primer lugar de sus preferencias. Independiente de las otras propuestas que ese hombre pueda recibir, él acepta a Philippa, pues ella es su mejor alternativa. Y esa decisión es permanente, pues él nunca recibirá una propuesta mejor.

Por lo tanto, Philippa hace un par con su mejor opción (eventualmente, con ella misma) en los emparejamientos que se obtienen al aplicar el algoritmo de aceptación diferida. Concluimos que en cualquier matching estable ella tiene la misma pareja.

[1] Hay un *hyperlink*.

Si Philippa es la peor alternativa para todos los hombres, entonces ellos prefieren estar solos a estar con ella. Por lo tanto, cuando ellos hacen las propuestas, ella nunca recibirá una. Esto es, quedará sola en ese matching estable. Por lo visto en clases, sabemos que eso implica que ella quedará sola en todo matching estable. Por lo tanto, ella continua teniendo la misma pareja en todo matching estable: ella misma. □

(iii) Dado un matching estable entre n hombres y n mujeres en el cual nadie queda solo, ¿es posible encontrar tres parejas que si se redistribuyeran entre ellas los seis individuos mejorarían?

Sabemos que el conjunto de matching estables coincide con el conjunto de matchings en el núcleo. Por lo tanto, es imposible que un grupo de individuos desvíe de un matching estable para reemparejarse entre ellos de tal forma que al menos uno de ellos mejore. ¡Mucho menos conseguir que mejoren todos! Por lo tanto, partiendo de un matching estable, NO es posible encontrar tres parejas que si se redistribuyeran entre ellas los seis individuos mejorarían. □

(iv) Suponga que todos los hombres tienen las mismas preferencias sobre el conjunto de mujeres. Demuestre que existe un único emparejamiento estable.

Suponga que hay un conjunto M de hombres, los cuales tienen las mismas preferencias por el conjunto W de mujeres. Para asegurar que hay un único emparejamiento estable es necesario y suficiente probar que los emparejamientos estables que se consiguen aplicando el algoritmo de aceptación diferida coinciden, pues en ese caso la mejor y la peor pareja que un individuo puede tener en un matching estable coinciden.

Suponga que $n = \#M$ y $m = \#W$. Además, denote por w_i a la i-ésima mejor opción de los hombres entre las $a \leq m$ mujeres que ellos consideran aceptables. Si $m_1 \in M$ es la mejor opción de w_1 entre los hombres que ella considera aceptables, defina recursivamente a m_i como la mejor opción de w_i en el conjunto $M(w_i) \cup \{w_i\} \setminus \{m_1, \ldots, m_{i-1}\}$, donde $M(w_i)$ son los hombres que w_i considera aceptables e $i \in \{2, \ldots, a\}$. Note que, sin perdida de generalidad, podemos suponer que $a > 0$ y $M(w_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, a\}$, pues siempre podemos sacar del mercado a los hombres o mujeres que no consideran a nadie aceptable, ya que siempre optarán por estar solos en un matching estable. Además, cuando $a \geq 2$, es posible que $m_i = w_i$ para algún $i \in \{2, \ldots, a\}$.

Suponga que los hombres hacen las propuestas. Entonces, en la i-ésima etapa del proceso, con $i \in \{1, \ldots, \min\{a, n\}\}$, $n-i+1$ hombres le hacen propuestas a w_i, quien no ha recibido propuestas en las etapas previas. Por lo tanto, en la primera etapa se forma el par (m_1, w_1), en la segunda etapa se forma el par (m_2, w_2) y así sucesivamente hasta llegara una familia de parejas $((m_1, w_1), (m_2, w_2), \ldots, (m_\alpha, w_\alpha))$, donde $\alpha = \min\{a, n\}$. Los individuos que no aparecen en el conjunto de parejas $((m_1, w_1), (m_2, w_2), \ldots, (m_\alpha, w_\alpha))$ quedan solos y dentro de ese conjunto de parejas puede haber individuos que están emparejados con ellos mismos (cuando $m_i = w_i$).

Alternativamente, suponga que las mujeres son las que hacen las propuestas en el algoritmo de aceptación diferida. Entonces, en la primera etapa w_1 se empareja con su mejor opción, m_1, pues ella es su mejor alternativa. Es más, como ambos son la mejor alternativa uno del otro, esa pareja no se separará durante la implementación del algoritmo. En la primera o en la segunda etapa, w_2 le hará una propuesta a m_2, quien la aceptará, pues nunca recibirá una propuesta de w_1 (la única mujer que podría hacerlo separarse de w_2). En la primera, segunda o tercera etapa, w_3 le hará una propuesta a m_3, quien la aceptará, pues nunca recibirá una propuesta de w_1 o w_2 (las únicas mujeres que podrían hacerlo separarse de w_2). Con este proceso se forma la familia de parejas $((m_1, w_1), (m_2, w_2), \ldots, (m_\alpha, w_\alpha))$, donde $\alpha = \min\{a, n\}$ y los individuos que no aparecen en esa lista quedan solos. Como en el caso anterior, dentro de ese conjunto de parejas puede haber individuos que están emparejados con ellos mismos, pues por construcción permitimos que m_i pueda ser igual a w_i.

En resumen, independiente del lado del mercado que hace las propuestas, el algoritmo de aceptación diferida genera el emparejamiento $\mu : M \cup W \to M \cup W$ caracterizado por $\mu(m_i) = w_i$ para todo $i \in \{1, \dots, \alpha\}$ y $\mu(x) = x$ para todo $x \notin \{m_1, w_1, \dots, m_\alpha, w_\alpha\}$. $\square$

(v) A partir de un matching inestable un planificador central coordina un proceso secuencial de tal forma que en cada etapa, caso no haya llegado a un matching estable, él decide que individuo o pareja pueden desviar. ¿El planificador central podrá llegar a un matching estable?

Si, podrá hacerlo. En esta pregunta se debían comentar los resultados de Roth y Vande Vate (1990) o de artículos similares. $\square$

(vi) En un modelo con n hombres y n mujeres, demuestre que el algoritmo de aceptación diferida termina en a lo más $(n-1)^2+1$ etapas. De un ejemplo donde efectivamente el algoritmo requiere de $(n-1)^2+1$ etapas para ser implementado.

Sin perdida de generalidad, vamos a suponer que las mujeres hacen las propuestas. Si queremos que el algoritmo de aceptación diferida se prolongue por el número máximo de etapas, hay que asegurar que cada mujer esté interesada en seguir participando mientras haya hombres con los cuales no ha intentado emparejarse. Esto es, hay que asumir que todos los hombres son aceptables para todas las mujeres. Como hay n hombres, para que el número de etapas del algoritmo sea máximo, hay que asegurar que:

(i) solo una mujer haga propuestas en cada etapa $k \geq 2$.[2]
(ii) todas las mujeres sean rechazadas por al menos $(n-1)$ hombres.
(iii) la n-ésima propuesta de cada mujer sea aceptada—eventualmente, solo de forma temporal—por un hombre que está emparejado con una mujer que aún no ha hecho sus n propuestas, caso un hombre con esas características exista.

Por lo tanto, $(n-1)$ mujeres se emparejan—eventualmente, solo de forma temporal—al hacer su n-ésima propuesta, momento en el cual inducen un rechazo contra otra mujer, haciendo que el algoritmo continúe. Concluimos que lo peor que puede ocurrir es que las n mujeres reciban $(n-1)$ rechazos y en la última etapa, la mujer que aún no está emparejada, tenga su n-ésima propuesta aceptada o rechazada y se termine el proceso: $n(n-1)+1$ etapas.

Para ver que este límite superior para el número de etapas del algoritmo de aceptación diferida puede estar activo, considere el siguiente ejemplo para $n = 3$, donde $n(n-1)+1 = 7$:

$$
\begin{array}{llcll}
w_1: & m_1 \succ m_2 \succ m_3 \succ w_1, & \qquad & m_1: & m_1 \succ w_2 \succ w_3 \succ w_1, \\
w_2: & m_2 \succ m_1 \succ m_3 \succ w_2, & & m_2: & w_3 \succ w_2 \succ w_1 \succ m_2, \\
w_3: & m_3 \succ m_1 \succ m_2 \succ w_3, & & m_3: & w_1 \succ w_2 \succ w_3 \succ m_3.
\end{array}
$$

Note que, cuando las mujeres hacen las propuestas en el algoritmo de aceptación diferida, en la primera etapa se forman las parejas $\{(w_2, m_2), (w_3, m_3)\}$ y w_1 tiene su propuesta rechazada por m_1. En la segunda etapa, w_1 le hace una propuesta a m_2 y es rechazada. En la tercera etapa, w_1 le hace una propuesta a m_3 y es aceptada, quedando w_3 sin pareja. En la cuarta etapa, w_3 le hace una propuesta a m_1 y es rechazada. En la quinta etapa, w_3 le hace una propuesta a m_2 y es aceptada, quedando w_2 sin pareja. En la sexta etapa, w_2 le hace una propuesta a m_1 y es rechazada. Finalmente, en la séptima etapa, w_2 le hace una propuesta

[2]Por definición, en la primera etapa todas las mujeres hacen propuestas.

a m_3 y es rechazada, con lo cual queda sola y el algoritmo termina.

En el ejemplo anterior hay un hombre que no considera a ninguna mujer aceptable. ¿Que ocurre si todas las mujeres son aceptables para todos los hombres? En ese caso, el algoritmo de aceptación diferida podría ser compatible con la propiedad (i), pero las propiedades (ii) y (iii) ya no son viables. Efectivamente, al cumplirse (i), el hombre que queda sólo al final de la primera ronda de propuestas—-por no haber recibido ninguna propuesta en esa ronda—no debería recibir ofertas adicionales hasta la última etapa del algoritmo. Caso contrario, como (i) se cumple y él siempre acepta alguna de las propuestas que recibe, el proceso terminaría antes del número máximo de etapas. Por lo tanto, si queremos extender el algoritmo por el máximo número de etapas, solamente una mujer será rechazada $(n-1)$ veces, mientras que las otras $(n-1)$ mujeres serán rechazadas $(n-2)$ veces (al evitar hacer propuestas al hombre que queda solo al final de la primera ronda de propuestas). Esto implica que el número máximo de etapas es $(n-1)+(n-1)(n-2)+1=(n-1)^2+1$, pues luego de que la última mujer ha completado su "cota máxima de rechazos" el hombre que queda sólo en la primera etapa recibe una propuesta de ella.

Para ver que este límite superior para el número de etapas del algoritmo de aceptación diferida puede estar activo, considere el siguiente ejemplo para $n=3$, donde $(n-1)^2+1=5$:

$$\begin{array}{llll} w_1: & m_2 \succ m_3 \succ m_1 \succ w_1, & m_1: & w_2 \succ w_3 \succ w_1 \succ m_1, \\ w_2: & m_2 \succ m_3 \succ m_1 \succ w_2, & m_2: & w_3 \succ w_2 \succ w_1 \succ m_2, \\ w_3: & m_3 \succ m_2 \succ m_1 \succ w_3, & m_3: & w_1 \succ w_2 \succ w_3 \succ m_3. \end{array}$$

Note que, cuando las mujeres hacen las propuestas en el algoritmo de aceptación diferida, en la primera etapa se forman las parejas $\{(w_2,m_2),(w_3,m_3)\}$ y w_1 tiene su propuesta rechazada por m_2. En la segunda etapa, w_1 le hace una propuesta a m_3, la cual es aceptada, formándose la pareja (w_1,m_3) y quedando w_3 sin pareja. En la tercera etapa, w_3 le hace una propuesta a m_2 y es aceptada, quedando w_2 sin pareja y (w_3,m_2) juntos. En la cuarta etapa, w_2 le hace una propuesta a m_3 y es rechazada. Finalmente, en la quinta etapa, w_2 le hace una propuesta a m_1 y es aceptada, con lo cual el algoritmo termina. $\square$