Fuente: Examen Final de Econometría II (2013)

3. (30 puntos) El proceso descrito corresponde a un modelo de umbral.

- **a) (15 puntos)** Es fácil demostrar que

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{\sum \theta_\tau \theta_{\tau-1}}{\sum \theta_{\tau-1}^2} && (1)\\
\hat{\omega}_\nu^2 &= \frac{\sum \hat{\nu}_\tau^2}{T} && (2)\\
\hat{\phi} &= \arg\min_{\phi} \hat{\omega}_\nu^2(\phi) && (3)\\
\hat{\omega}_u^2 &= \frac{\sum \hat{u}_\tau^2(\hat{\phi})}{T} && (4)\\
\hat{\omega}_{uv} &= \frac{\sum \hat{\nu}_\tau \hat{u}_\tau(\hat{\phi})}{T} && (5)
\end{aligned}
$$

  son consistentes. Finalmente, $\hat{\gamma}$ y $\hat{\rho}$ son los estimadores OLS de la regresión de ξ en ξ_{-1} para el valor del umbral estimado.

- **b) (15 puntos)** La función de impulso-respuesta para θ_τ es:

$$\frac{\partial \theta_{\tau+\phi}}{\partial \nu_\tau} = \rho^\phi \tag{6}$$

  Para el caso de ξ, la respuesta dependerá del valor inicial en el que se encuentre θ, del signo del shock y del valor de ϕ. Por ejemplo, si el shock es positivo, $0 > \phi$, tendremos:

$$\frac{\partial \xi_{\tau+\phi}}{\partial \nu_\tau} = 0 \tag{7}$$

  porque los cambios en θ producidos por ν no modificarán la trayectoria de ξ. En cambio, shocks que cambien la trayectoria de θ de modo tal se modifique la trayectoria de ξ (fruto de la activación de un umbral) tendrán efectos sobre ξ.

  Note que la discusión anterior cambiaría de manera importante si permitimos que u y ν covarien contemporaneamente. En ese caso, un shock en ν tendrá efectos sobre u y generará una respuesta (seguramente no lineal en ξ).