

PREFERENCIAS

Conjunto indiferente
 $\{y \in X: y \sim x\}$

Conjunto contorno sup:
 $\{y \in X: y \succeq x\}$

(inf. al revés).

Convexidad \succeq convexa $\neq x$
 si el conjunto cont. sup es
 convexo

$\forall y, z: y \succeq x \wedge z \succeq x$

$\Rightarrow \lambda y + (1-\lambda)z \succeq x \forall \lambda \in (0,1)$

Funciones de UT

- z racional (cond. necesaria,
 no suficiente)

- x numerable, z racional
 $\Rightarrow \exists u: x \rightarrow \mathbb{R}$

- \succeq racional y continua
 $\Rightarrow \exists u: x \rightarrow \mathbb{R}$

Continuidad de \succeq

\rightarrow continua si sus conjuntos
 cont. sup e inf. son cerrados
 \rightarrow continua si pref prevalece
 en el límite.

Propiedades $u(\cdot)$

1) \succeq monótona $\Leftrightarrow u(x)$ creciente

2) convexidad:

si \succeq convexa $\Leftrightarrow u(x)$ cuasiconcava
 (con estricto \Leftrightarrow estricto)

$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min(u(x), u(y))$
 cuasiconcava ($\forall \alpha \in (0,1)$)

PROBLEMA DEL CONSUMIDOR

$B(p,w) = \{x \in \mathbb{R}^L: p \cdot x \leq w\}$

\rightarrow Homog. grado 0:
 $B(\lambda p, \lambda w) = B(p,w)$

\rightarrow si $p > 0 \Rightarrow B(p,w)$ compacto

Weierstrass \rightarrow Hay solución
 si $u(\cdot)$ continua (siempre x
 \succeq (continua) y $B(p,w)$ compac-
 to ($p > 0$)

\rightarrow solución $x^*(p,w) \rightarrow$ Dda
 Marshall.

Propiedades $x^*(p,w)$

- $x^*(p,w) \rightarrow$ ll de $u(\cdot)$
- $x^*(p,w)$ Homog. grado 0
- si \succeq convexa $\Rightarrow x^*(p,w)$ convexa
- si \succeq estricto $\Rightarrow x^*(p,w)$ singleton
 convexo
- si \succeq ins \rightarrow Walras: $p \cdot x = w$

Problema General ($\max u(x)$)
 s.a. $p \cdot x \leq w$
 $x \in \mathbb{R}^L$

CPD: $\nabla u(x^*) \leq \lambda p$
 $x^* \cdot [\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0$

\rightarrow si $x^* > 0 \Rightarrow \nabla u(x^*) = \lambda p$

TMS = $\frac{\partial u(x^*)/\partial x_l}{\partial u(x^*)/\partial x_k} = \frac{p_l}{p_k}$

* solución esquina ($x_2^* = 0$)
 $\Rightarrow \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_1} = p_1 \wedge \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_2} \leq \lambda p_2$

\Rightarrow TMS $\geq x_{p1}/x_{p2}$

si $x(p,w)$ función $\Rightarrow x(p,w)$
 continua si $(p,w) > 0$

Función UT. indirecta

$V(p,w) = u(x^*(p,w))$

- Homog. grado 0
- Estrict. crecient en w y
 no crecient en p
- continua en p y w
- cuasiconcava

$\frac{\partial V(p,w)}{\partial w} = \lambda \geq 0$

si es
 l.n.s.
 ut. mg del
 ingreso.

Función de gasto: dada
 una $u(\cdot)$ entrega el mín
 w para alcanzarlo
 $e(p,u)$

Problema mín gasto (PminG)

$\min p \cdot x$

s.a. $u(x) \geq \bar{u}$

$x \in \mathbb{R}^L$
 \rightarrow solución $h^*(p,u)$

Identidades importantes

$e(p,u) = p \cdot h(p,u)$

w mín. x que mín el
 gasto

$e(p, V(p,w)) = w$ (con $p > 0$)
 $V(p, e(p,u)) = u$ \rightarrow v inversa
 de e .

$x(p,w) = h(p, V(p,w))$

$h(p,u) = x(p, e(p,u))$

\rightarrow captura solo efecto sus-
 titución \rightarrow pues asume que
 w se puede COMPENSAR

Compensación de renta de
 Hicks

$\Delta W_{Hicks} = e(p',u) - w > 0$
 (si $p' > p$)

Ley de Demanda compen-
 sada ($u(\cdot)$ continua, \succeq l.n.s.,
 $h(p,u)$ singleton ($\forall p > 0$) $\Rightarrow h(p,u)$
 satisface la ley de D compen.

$(p'' - p') \cdot [h(p'',u) - h(p',u)] \leq 0 \forall p', p''$

Lema de Shepard

$h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$

(u continua, \succeq ins y convexa)

Propiedades de $\nabla_p h(p,u)$

\rightarrow matriz $D_p h(p,u)$:

$\frac{\partial h_1/\partial p_1} \quad \frac{\partial h_1/\partial p_2} \quad \frac{\partial h_2/\partial p_1} \quad \frac{\partial h_2/\partial p_2} \quad \dots$

- $D_p h(p,u) = D_p^2 e(p,u)$
- $D_p h(p,u)$ semi-def (-)
- $D_p h(p,u)$ simétrica
- Ley demanda diferencial
 $\frac{\partial h_l}{\partial p_l} \leq 0$ ($\times D_p h(p,u)$ def (-))

Por $\frac{\partial h_l}{\partial p_l} \leq 0$ y $D_p h(p,u) \cdot p = 0$

\Rightarrow cada bien tiene al menos
 un sustituto

Bienes k, l son
 sustitutos netos si $\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \geq 0$

incomplete netos si $\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \leq 0$

Ecuación Slutsky (relación entre
 $h(p,u)$ y $x^*(p,w)$)

$\frac{\partial h_l}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l}{\partial w} \cdot x_k(p,w) \forall l, k$

\rightarrow En particular $k=l$:

$\frac{\partial h_l}{\partial p_l} - \frac{\partial x_l}{\partial w} \cdot x_l = \frac{\partial x_l}{\partial p_l}$
 ef. sustitución ef. renta efecto total

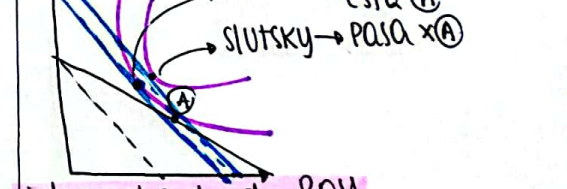
Notemos que
 $S_{lk} = \frac{\partial x_l}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l}{\partial w} \cdot x_k$
 $= D_p h(p,u)$

matriz ef. sust. de Slutsky

\rightarrow compensación de Slutsky
 compenso w para consumir lo
 mismo que antes

Hicks \rightarrow mantiene u igual

Slutsky \rightarrow mantiene consumo igual



Identidad de Roy

$x_l(p,w) = - \frac{\partial V(p,w) / \partial p_l}{\partial V(p,w) / \partial w}$

Cambios en Bienestar: $P_0 \rightarrow P_1$
(w se mantiene igual)

¿Cambio? \rightarrow NO USAMOS $V(P, w)$
pues valor depende
de la u escogida.
 \rightarrow usamos $e(P, u)$

\Rightarrow comparamos w necesario
para alcanzar una cierta
 u . Antes y después del ΔP .

Variación equivalente (VE)

$$VE(P^0, P^1, w) = e(P^0, v(P^1, w)) - w$$

$\underbrace{\quad}_{\text{UT con nuevos precios}}$

"Cuanto w necesito para
alcanzar mi u . actual a
los precios de antes"

Variación compensatoria

$$VC(P^0, P^1, w) = w - e(P^1, v(P^0, w))$$

$\underbrace{\quad}_{\text{UT inicial}}$

"Cuanto w necesito para
tener mi misma u inicial
a los precios nuevos"

$$VC \geq 0 \Leftrightarrow VE \geq 0 \Leftrightarrow \nexists \text{UT con el } \Delta P$$

**Otras equivalencias para las
formulas**

$$VE(P^0, P^1, w) = e(P^0, v(P^1, w)) - \underbrace{e(P^1, v(P^1, w))}_w$$

$$= \int_{P_1^1}^{P_1^0} h(P_1, P_{-1}, v(P^1, w)) dP_1$$

$$VE(P^0, P^1, w) = \underbrace{e(P^0, v(P^0, w))}_w - e(P^1, v(P^0, w))$$

$$= \int_{P_1^1}^{P_1^0} h(P_1, P_{-1}, v(P^0, w)) dP_1$$

$$EC = \int_{P_0}^{\infty} x(P, w) dP \Rightarrow \Delta EC = EC|_{P_1} - EC|_{P_0}$$

\downarrow
excedente
consumidor

$$= \int_{P_1^1}^{P_1^0} x(P_1, P_{-1}, w) dP_1$$

\rightarrow Aproximación para VE, VC

\rightarrow si ΔP pequeño
 $\Rightarrow VE \approx VC \approx \Delta EC$

* sin efecto renta $\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial w} = 0 \Rightarrow VE = VC = \Delta EC$

* bien normal $\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial w} > 0 \Rightarrow VC \leq \Delta EC \leq VE$

Índices

Laspeyres: $\frac{P^1 \cdot x^0}{P^0 \cdot x^0}$

Pasche: $\frac{P^1 \cdot x^1}{P^0 \cdot x^1}$

ideal: $\frac{P^1 \cdot x}{P^0 \cdot x}$

Teoría de la Producción

SUPUESTOS:

- Tomadoras de P
- Tecnología exógena
- $\max \pi$
- Sin incertidumbre

Plan de Producción: Vector

$\in \mathbb{R}^L$ $y: (y_1, \dots, y_L)$
 $y_i > 0 \rightarrow$ Producto
 $y_i < 0 \rightarrow$ Insumo
 $y_i = 0 \rightarrow i$ no \in proceso de producción

* caso particular \rightarrow 1 producto (el último y_L)

Conjunto de posibilidades de producción ($Y \subset \mathbb{R}^L$) \rightarrow conjunto de los planes de producción viables (factibles)

\rightarrow se representa con la **función de transformación**
 $T: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$
 $T(y) \leq 0 \rightarrow$ Factible
 $T(y) > 0 \rightarrow$ no factible
 $\{y \in \mathbb{R}^L / T(y) = 0\} \rightarrow$ frontera de transformación

* **Tasa Mq. transformación entre los bienes l y k :**
 $TMT = \frac{\partial T(y)/\partial y_l}{\partial T(y)/\partial y_k}$ (con $T(y) = 0$)
 uso eficiente de los insumos

* **Tasa Mq. transformación entre los bienes l y k :**

$TMT = \frac{\partial T(y)/\partial y_l}{\partial T(y)/\partial y_k}$ (con $T(y) = 0$)
 uso eficiente de los insumos

Propiedades y :

- y no vacío y cerrado
- No free-lunch (si insumos = 0 \rightarrow producción = 0)
- Shut down \rightarrow posibilidad de inacción
- Free disposal (elimino sin costo el exceso de y_i)

Otras propiedades que podría tener y

- Rendimientos de escala:
 a). no crecientes a escala: $\alpha \in [0, 1]$
 $\Rightarrow \alpha y \in y$

no decreciente a escala
 $\alpha \geq 1 \Rightarrow \alpha y \in y$

c) constante a escala
 $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha y \in y$

ii) Aditividad (free entry)
 $y + y' \in y$ ($y, y' \in y \Rightarrow y + y' \in y$)

iii) Convexidad \Rightarrow "retornos no crecientes a la especialización"

$\rightarrow y, y' \in y, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \alpha y + (1-\alpha)y' \in y$

* rend. a escala decreciente \Rightarrow shut down

Si $0 \in y, y$ convexo \Rightarrow rend. a escala decreciente

Problema de Maximización

$\max_y P \cdot y = \pi(P)$

s.d. $T(y) \leq 0$

* $P \cdot y =$ Ingresos - costos

$y(P) = \{y \in Y : P \cdot y = \pi(P)\} \rightarrow$ correspondencia de oferta

* Podría no estar bien definida (ej: rend. crecientes)

\rightarrow si $T(y)$ diferenciable:

$L: P \cdot y - \lambda T(y)$

$\frac{\partial L}{\partial y_i} \Rightarrow P_i = \lambda \frac{\partial T(y)}{\partial y_i}$

$\Leftrightarrow P = \lambda \nabla T(y^*)$

$\Rightarrow TMT = P_l / P_k$

Si y convexo \Rightarrow las CPO son suficientes

(y convexo $\Leftrightarrow T(y)$ cóncava)

Propiedades función de beneficios $\pi(\cdot)$

sea y cerrado y no vacío:

* $\pi(\cdot)$ homogénea de grado 1

* $\pi(\cdot)$ es cóncava

$\pi(\alpha P + (1-\alpha)P') \leq \alpha \pi(P) + (1-\alpha)\pi(P')$

* y convexo $\Rightarrow y = \{y \in \mathbb{R}^L : P \cdot y \leq \pi(P) \forall P\}$

* Si y convexo y satisface free disposal \Rightarrow

$y = \{y \in \mathbb{R}^L : P \cdot y \leq \pi(P) \forall P \geq 0\}$

Propiedades de la correspondencia de oferta $y(\cdot)$

* $y(\cdot)$ homogénea grado 0

* si y convexo $\Rightarrow y(P)$ conjunto convexo $\forall P$

$\rightarrow y$ estrictamente convexo $\Rightarrow y(P)$ es un singleton (si $y(P) \neq \emptyset$)

* Lema de Hotelling: si $y(P)$ consiste en un único punto $\Rightarrow \pi(\cdot)$ es diferenciable en P

$y(P) \nabla \pi(P) = y(P)$

* Ley de oferta

$(P - P') \cdot (y - y') \geq 0 \forall P, P', y \in y(P), y' \in y(P')$

* Producción con producto único

f : función de producción

si $f: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$

$Y = \{(z_1, \dots, z_{L-1}, q) : q - f(z_1, \dots, z_{L-1}) \geq 0 \text{ y } (z_1, \dots, z_{L-1}) \geq 0\}$

Tasa Mq. de sustitución técnica

$TMT_{k,l}(y) = \frac{\partial f(z)/\partial z_l}{\partial f(z)/\partial z_k}$

* cuanto de k necesito para producir q si quito una unidad de l

\rightarrow max con producto único:

$\max_{z \geq 0} P \cdot f(z) - W \cdot z$ (s.d. $(f(z), q) \in y$)

* z^* óptimo cumple C.P.O

$L: P \cdot f(z) - W \cdot z + \sum_{k=1}^L \mu_k z_k$

$\frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 = P \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} - W_i + \mu_i = 0$

$\mu_k \geq 0$

$\mu_i \cdot z_i = 0 \rightarrow$ si $z_i > 0 \Rightarrow \mu_i = 0$

$\Rightarrow P \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} = W_i$

\rightarrow si no $|P \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} \leq W_i|$

si y convexo, y eficiente \Rightarrow $P \geq 0$ y $\max UT$ paralelo a P

Vectorialmente:

$P \cdot \nabla f(z^*) \leq W \wedge (P \cdot \nabla f(z^*) - W) \cdot z^* = 0$

si $z_k, z_l > 0 \Rightarrow TMT = W_l / W_k$

Minimización de costos (Producto único)

$\min_n W \cdot z$ s.d. $f(z) \geq q, z \geq 0$ } PMC

$c(w, q) \rightarrow$ óptimo del PMC

correspondencia de la dda condicionada de factores

$z(w, q) : w \cdot z = c(w, q) \forall z \in z(w, q)$

$\rightarrow z^*$ óptimo cumple C.P.O

$\lambda \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l} \leq W_l$ (con = si $z_l^* > 0$)

Vectorialmente:

$\lambda \nabla f(z^*) \leq W \wedge [W - \lambda \nabla f(z^*)] \cdot z^* = 0$

\rightarrow Por Teo. Envolvente:

$\frac{\partial c(w, q)}{\partial q} = \lambda \rightarrow$ cmg. producir una unidad más de q .

Propiedades $c(w, q)$ y $z(w, q)$

* $c(w, q)$ Homog. grado 1 en w , crecient en q

* $c(w, q)$ cóncava en w

* $z(w, q)$ homog. grado 0 en w

* si $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ convexo $\Rightarrow z(w, q)$ convexo

estricto $\Rightarrow z(w, q)$ singleton

si $z(w, q)$ difer. en $w \Rightarrow D_w z(w, q)$

$= D_w c(w, q)$ matriz simétrica y semi-def. \rightarrow con $D_w z(w, q) \cdot w = 0$

* si $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ convexo $\forall q \Rightarrow y = \{(z, q) : w \cdot z \geq c(w, q) \forall w \geq 0\}$

* Lema Shepard: si $z(w, q)$ es singleton $\Rightarrow c(w, q)$ dif. con respecto a w en w

y $\nabla_w c(w, q) = z(w, q)$

* si $f(z)$ homog. grado 1 $\Rightarrow c(w, q)$ y $z(w, q)$ homog. grado 1 en q

* $f(z)$ cóncava $\Rightarrow c(w, q)$ convexa en q

* Agregación Tecnológica (PF1JO) \gg

Decision centralizada = Dec. Privada

$\pi^*(P) = \sum_j \pi_j(P) ; y^*(P) = \sum_j y_j(P)$

\rightarrow se cumple ley of. agregada.

Eficiencia: $y \in y$ eficiente $\Leftrightarrow \exists y' \in y : y' \gg y$

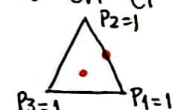
si $y \max UT (P \gg 0) \Rightarrow y$ eficiente

Decisiones Bajo Incertidumbre

El tomador de decisión se enfrenta a un conjunto de alternativas riesgosas \rightarrow cada alternativa es representada por una lotería

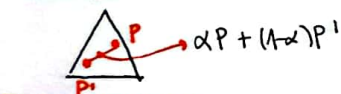
* **Lotería**: lista de probabilidades $L = (p_1, \dots, p_n)$ donde p_i es la probabilidad que se realice la consecuencia c_i

* n° finito de alternativas \rightarrow se puede representar como punto en el simplex



* **Lotería compuesta**: Dadas k loterías: $L_k = (p_1^k, \dots, p_n^k)$, $k = 1, \dots, N$ y $\text{Pr } \alpha_k \geq 0$ con $\sum \alpha_k = 1$ la lotería compuesta $(L_1, \dots, L_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ es la alternativa riesgosa que entrega la lotería L_i con $\text{Pr } \alpha_i$

Lotería compuesta \Leftrightarrow Lotería simple



Axiomas

* El individuo tiene una \succeq sobre el espacio \mathcal{L} que satisface

- completitud
- transitividad
- continuidad: $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$: $L \succeq L' \succeq L'' \exists \alpha \in [0, 1]: L \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L'' \sim L'$

- independencia: $\forall L, L', L'' \wedge \forall \alpha \in [0, 1]$
 $L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L''$

* **Lotería degenerada** \rightarrow sin incertidumbre

Teoría Utilidad Esperada (Neuman - Morgan)

una función de ut. $U: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene forma de ut esperada si $\exists (u_1, \dots, u_n)$, para

cada uno de los N resultados posibles de la lotería $(x_1, \dots, x_N): \forall L \in \mathcal{L}$

$$U(L) = \sum p_i \cdot u_i \rightarrow \text{valor optimo}$$

* **Proposición**: una función $U: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene forma de ut. esperada ssi es lineal, i.e.:
 $U(\sum \alpha_k L_k) = \sum \alpha_k U(L_k)$
 $\forall L_k \in \mathcal{L}, \alpha_k \geq 0: \sum \alpha_k = 1$

* **Proposición**: $V(L) = a + bU(L)$ también representa \succeq ($a, b > 0$)

* **teorema Representación**: una preferencia \succeq racional sobre \mathcal{L} cumple las propiedades de continuidad e independencia ssi admite una representación de ut. esperada

* **Loterías monetarias**: consecuencias en \$

* consecuencias \rightarrow conjunto $C \in \mathbb{R}$ puede ser continuo
 \rightarrow una lotería se representa por una función de distribución de Pr $F: C \rightarrow [0, 1]$

$F(x)$: Pr obtener un pago menor o = a $x \in C$.

$F: C \rightarrow [0, 1]$ cumple:

- * F no decreciente
- * F continua x la derecha
- * $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

$\rightarrow U$ es una representación de \succeq si

$$U(F) = \int u(x) dF(x)$$

ut. gonor \leftarrow

u : función de Bernoulli (continua y creciente).

* se sigue cumpliendo Teo. Representación

* CASOS PARTICULARES

* F derivable:

$$U(L) = \int u(x) F'(x) dx$$

* caso discreto

$$U(L) = \sum_{i=1} p_i \cdot u(c_i)$$

* **Aversión al Riesgo**

$\int x dF(x) \rightarrow$ riqueza esperada en la lotería $F(\cdot)$

\rightarrow comparemos:

$$\int u(x) dF(x) \geq u\left(\int x dF(x)\right)$$

$\leq \rightarrow$ **Averso al riesgo**

$\Leftrightarrow U$ cóncava

* **Equivalente cierto**

la E.C. de $F(\cdot)$ denotada $c(F, u)$ es la cantidad de \$ donde el individuo es indiferente entre el juego $F(\cdot)$ y el monto $c(F, u)$:

$$U(c(F, u)) = \int u(x) dF(x)$$

\Rightarrow un individuo es **avverso al riesgo** ssi

$$c(F, u) \leq \int x dF(x) \neq \text{lotería } F(\cdot)$$

* **Coefficiente Arrow-Pratt** \neq

ut. U Bernoulli, 2 veces diferenciable, el coef. de A-P de aversión absoluta al riesgo es:

$$A(x, u) = - \frac{u''(x)}{u'(x)}$$

* **Proposición**: av, av agentes con funciones de Bernoulli u, v $av +$ averso al riesgo que av

* si v prefiere F a un pago cierto $x \Rightarrow u$ también

* Para c lotería F $c(F, v) \leq c(F, u)$

* La función v es + cóncava que $u \rightarrow v(x) = g(u(x))$ (g cóncava creciente)

* Para $c/x \in \mathbb{R}$ $A(x, v) \geq A(x, u)$

* **DARA** (aversión absoluta al riesgo decreciente) si $A(x, u) = - \frac{u''(x)}{u'(x)}$ decrece en x

\rightarrow sea $u(x)$ DARA. Definimos

$$u_1(x) = u(x + w_1)$$

$$u_2(x) = u(x + w_2)$$

$$\Rightarrow A(x, u_2) \geq A(x, u_1) \forall x \text{ ssi } w_1 \geq w_2$$

\rightarrow si acepto riesgo con $w \rightarrow$ lo sigo aceptando si $\uparrow w$

Coefficiente de Aversión relativa al riesgo en x

$$R(x, u) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} = x A(x, u)$$

si R decreciente en $x \Rightarrow$ DRRA (Aversión relat. al riesgo decreciente)

$R(x, u)$ decreciente en $x \Leftrightarrow$ El E.C. $c(F, u)$ creciente