Microeconomía I
Ayudantía 1

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Valeria Ulloa, Benjamín Peña, Marcelo Gómez

Pregunta 1

Sea $\succsim$ una relación de preferencias completa sobre el conjunto X, y sea $u : X \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) u representa a $\succsim$

b) Para todo $x, y \in X$:

- Si $x \succ y$, entonces $u(x) > u(y)$
- Si $x \sim y$, entonces $u(x) = u(y)$

Pregunta 2

Una relación de preferencias $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$ es *débilmente monótona* si y solamente si $x \geq y$[1] implica $x \succsim y$.

a) Demuestre que si una relación de preferencias es monótona entonces es débilmente monótona.

b) Demuestre que si $\succsim$ es transitiva, localmente no saciada, y débilmente monótona entonces es monótona.

Pregunta 3

Demuestre que si $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa la relación de preferencias $\succsim$, entonces $\succsim$ es continua.

Pregunta 4

Encuentre las funciones de demanda Marshallianas de un consumidor de dos bienes, que enfrenta precios e ingresos positivos, con la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = \max\{ax_1, ax_2\} + \min\{x_1, x_2\} \text{ , } a \in (0, 1)$$

[1]Nota: $x \geq y$ cuando x e y son vectores significa que $x_i \geq y_i$ para todo $i = \{1, 2, ..., L\}$. No cambia en nada la demostración que vimos, pero formalmente no se agrega que al menos un elemento de x sea estrictamente mayor que el elemento correspondiente en y.

Pregunta 5

Supongamos que un consumidor tiene preferencias $\succsim$ racionales, continuas, y localmente no saciadas, que son representadas por una función de utilidad continua $u(x) : X \to \mathbb{R}$, con $X = \mathbb{R}^2_+$. El consumidor resuelve el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & x_1^k x_2^k \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 36 \end{aligned}$$

con $k > 0$.

a) Resuelva el problema del consumidor. ¿Depende de k el nivel de consumo de cada bien?

Respuesta

El problema es más simple si tomamos una transformación monótona y creciente de la función de utilidad, que nos va a llevar al mismo máximo. Entonces, maximizamos $g(u(x_1, x_2))$, con $g(\cdot) = (\cdot)^{\frac{1}{2k}}$. Si tomamos en cuenta además que la función de utilidad es estrictamente creciente en x_1 y x_2, y que por lo tanto el individuo va a gastar toda su riqueza, el problema a resolver pasa a ser el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & x_1^{1/2} x_2^{1/2} \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 2x_2 = 36 \end{aligned}$$

Luego, el Lagrangeano es el siguiente:

$$L = x_1^{1/2} x_2^{1/2} + \lambda(36 - 2x_1 - 2x_2)$$

Resolviendo de la manera usual, se llega a $x_1^* = x_2^* = 9$. Luego, el nivel de consumo no depende de k. Esto se debe a que lo relevante de la función de utilidad es que le asigna el mismo peso a ambos bienes, por lo que para cualquier $k > 0$ se va a cumplir que la máxima utilidad se alcanza consumiendo la misma cantidad de ambos bienes.

Más en general, se puede comprobar que si tenemos una función de utilidad Cobb-Douglas ($u(x) = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_L^{\alpha_L}$, con $\sum_i \alpha_i = 1$) y resolvemos el problema del consumidor con una restricción presupuestaria estándar ($p >> 0$ y $w > 0$), entonces se cumple que las demandas Marshallianas toman la siguiente forma:

$$x_i^* = \alpha_i \frac{w}{p_i}, \forall i \in \{1, 2, ..., L\}$$

Tomando en cuenta lo anterior, es directo el consumidor tiene las siguientes demandas Marshallianas:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{1}{2}\frac{36}{2} = 9 \\ x_2^* &= \frac{1}{2}\frac{36}{2} = 9 \end{aligned}$$

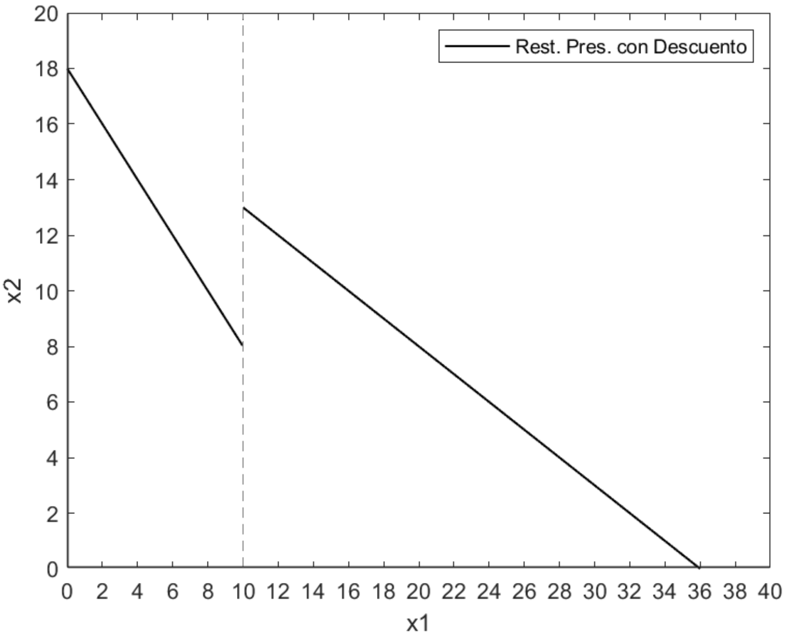
b) Suponga que se introduce un descuento por volumen para el bien 1, y que ahora su precio es el siguiente:

$$p_1 = \begin{cases} 2 \text{ si } x_1 < 10 \\ 1 \text{ si } x_1 \geq 10 \end{cases}$$

Grafique el conjunto presupuestario. ¿Qué característica lo diferencia de los conjuntos presupuestarios usuales?

Respuesta:

La restricción presupuestaria es la siguiente:



En $x_1 = 10$ hay una discontinuidad, ya que el hecho de que el precio baje a la mitad a partir de ese punto lleva a que el consumidor pueda pasar a comprar la canasta $(10, 13)$. Desde este punto la pendiente de la restricción pasa a ser $-\frac{1}{2}$.

La diferencia con los conjuntos presupuestarios usuales es que hay una discontinuidad en $x_1 = 10$.

c) Resuelva el problema del consumidor en presencia del descuento por volumen.

Respuesta

Guiándonos en la solución para el problema sin descuentos por cantidad, sabemos que una posible solución es $(9,9)$. Por otra parte, supongamos que el bien 1 cuesta 1 siempre. Entonces, ocupando el resultado de la parte a), tendríamos lo siguiente:

$$x_1^* = \frac{1}{2}\frac{36}{1} = 18$$
$$x_2^* = \frac{1}{2}\frac{36}{2} = 9$$

Que es una canasta admisible con la nueva restricción presupuestaria, ya que como $x_1^* \geq 10$ se tiene que $p_1 = 1$, y el consumidor está gastando exactamente $w = 36$.

De lo anterior, tenemos que en el primer segmento de la recta la canasta preferida por el consumidor es $(9,9)$ (resultado parte a)) y que en el segundo segmento de la recta la canasta preferida por el consumidor es $(18,9)$. No necesitamos tomar en cuenta otras canastas en los respectivos segmentos dado que al maximizar su utilidad el consumidor eligió las dos canastas anteriores teniendo las demás canastas disponibles. Luego, basta comparar las dos opciones para ver cuál es la demanda del consumidor con el descuento. Es claro que $u(18,9) > u(9,9)$. Luego, la demanda óptima del consumidor en presencia del descuento por volumen será $(18,9)$.Las soluciones a las partes a) y c) del problema también se pueden ver gráficamente con sus curvas de indiferencia: