ENECO610

Tarea II, Parte I

1. **Función de gasto.**
   Considere la siguiente función de gasto:
$$\ln(e(\mathbf{p},u)) = \alpha_0 + \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell \ln(p_\ell) + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{\jmath=1}^{L} \gamma_{\ell\jmath} \ln(p_\ell)\ln(p_\jmath) + u\prod_{\ell=1}^{L} p_\ell^{\beta_\ell}.$$
   Esta función se le conoce como función de gasto à la Deaton-Muellbauer. Asumamos que $\gamma_{\ell\jmath} = \gamma_{\jmath\ell}$.
   (a) Encuentre la función de utilidad indirecta.
   (b) Encuentre la demanda hicksiana $\mathbf{h}(\mathbf{p},u)$.
   (c) Encuentre la demanda walrasina $\mathbf{x}(\mathbf{w},\omega)$. Utilice los resultados anteriores.

2. **Excedente del Consumidor**
   Sea $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ diferenciable y $\varphi(0) = 0$. Considere la función de utilidad:
$$u(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + x_2$$
   Finalmente asuma que la demanda walrasiana por el bien 1 viene dada por las condiciones de primer orden.
   (a) Demuestre que:
$$\varphi(\bar{x}_1) = \int_0^{\bar{x}_1} \varphi'(x_1)dx_1.$$
   (b) Dado un vector de precios $\bar{\mathbf{p}} \gg 0$, represente gráficamente el excedente del consumidor.

3. **Excedente del Consumidor Revisited.**
   Escribiremos un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$ como $\mathbf{x} = (x_L, x_{-L})$ donde $x_{-L} \in \mathbb{R}^{L-1}$ y $x_L \in \mathbb{R}_L$. Definiremos la función de utilidad $u : \mathbb{R}^{L-1} \times \mathbb{R} \to \mathbf{R}$ como:
$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}_{-L} - \frac{1}{2}\mathbf{x}_{-L}\cdot\mathbf{B}\mathbf{x}_{-L} + x_L.$$
   Donde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{L-1}_{++}$ y $\mathbf{B}$ es una matriz de $L-1 \times L-1$ simétrica, definida positiva.
   (a) Muestre que la solución al problema de maximización de utilidad es único. Encuentre las demandas Walrasianas asumiendo solución interior.
   (b) Calcule el excedente del consumidor.
   (c) Encuentre la función de utilidad indirecta mediante:
      i. El cálculo del excedente del consumidor.
      ii. Directamente de la definición.
   (d) Para el caso $L = 2$, grafique la demanda Walrasiana del bien 1 y el excedente del consumidor.

4. **Impuestos y Preferencias Reveladas.**
   Asumamos que existen dos alternativas de impuestos (tal como vimos en clases). La primera impone un impuesto específico al bien uno:
$$p_1^1 = p_1^0 + t, \quad p_\ell^1 = p_\ell^0, \;\; \ell \neq 2.$$
   La segunda es un impuesto al ingreso T que recauda lo mismo que el primer caso.
   Demuestre que un consumidor está no puede estar peor en el primer caso que en el segundo.

5. **CV I**
Asumamos que la función de utilidad viene dada por:

$$u(x_1, x_2, x_3) = \beta_1 \ln(x_1 - \alpha_1) + \beta_2 \ln(x_2 - \alpha_2) + \beta_3 \ln(x_3)$$

Los precios son $\mathbf{p} = (p_1, p_2, 1)$ tal que una solución interior existe. El ingreso es en especies del bien 3 y viene dado por $\omega > 0$, i.e., el agente posee $\omega > 0$ unidades del bien 3.

   (a) Encuentre la función de utilidad indirecta y la función de gasto para esta utilidad llamada Stone-Geary.

   (b) Encuentre la CV.

   (c) Para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ y $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.4$ encuentre la CV para una reforma tributaria tal que $(q_1, q_2, \omega) = (1, 1, 5)$ cambian a $(2, 1.5, 5)$. Encuentre la PNB.

6. **CV II**
Considere un agente que consume 2 bienes y cuya función de utilidad viene dada por:

$$u(x, y) = x + y - \frac{1}{2}y^2.$$

Asumiremos que el bien x es el numerario. El vector de precios es $\mathbf{p} = (1, p_y) \gg 0$ y el ingreso del agente es $\omega > 0$.

   (a) Encuentre la demanda Walrasiana, función de utilidad indirecta y función de gasto.

   (b) Asuma que a precios $(1, p_y)$ e ingreso ω el agente consume de ambos bienes. Los precios cambian a $(1, p'_y)$. Encuentre la CV para este cambio en precios.

   (c) Demuestre que CV y EV son iguales.

   (d) Si $p_y = 1/2$ y $p'_y = 1/4$, encuentre la CV para un cambio de precios de p_y a p'_y, explique el signo.

7. **CV y EV.**
Consideremos un agente con una riqueza exógena $\omega > 0$. El nivel de precios inicial es $\mathbf{p}^0$ y, luego de una reforma tributaria, los precios son $\mathbf{p}^0$. Sabemos que tanto CV como EV dan nociones de ranking de bienestar cuando cambian los precios de $\mathbf{p}^0$ a $\mathbf{p}^1$. Asumamos ahora que queremos comparar 2 sistemas tributarios que implican precios $\mathbf{p}^1$ y $\mathbf{p}^2$ (por ejemplo, el gobierno está analizando qué bienes gravar).

   (a) Muestre que el agente está mejor bajo $\mathbf{p}^1$ que $\mathbf{p}^2$ si $EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \omega) < EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^2, \omega)$. En otras palabras, $EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \omega)$ y $EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^2, \omega)$ no sólo sirven para comparar $\mathbf{p}^0$ con ambos precios, sino que también sirve para rankear estos precios entre sí.

   (b) Mediante un ejemplo, demuestre que la CV no necesariamente rankean $\mathbf{p}^1$ y $\mathbf{p}^2$ correctamente.