PAUTA CONTROL II - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2024

[1] En el contexto de una economía con tres individuos y dos alternativas sociales, siguiendo la notación usual, considere las reglas de elección social $f, g : \{-1,0,1\}^3 \to \{-1,0,1\}$ caracterizadas por

$$\begin{aligned} f(\theta_1,\theta_2,\theta_3) &= \max\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}, \\ g(\theta_1,\theta_2,\theta_3) &= \text{signo}\left(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\frac{1}{3}\theta_1\theta_2\theta_3\right). \end{aligned}$$

Para cada una de esas reglas determine si se cumplen las siguientes propiedades (demuestre o dé un contraejemplo): *simetría*, *neutralidad*, *responsividad*.

Análisis de la regla f. Dada una función bijectiva $\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$,

$$f(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \max\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\} = \max\{\theta_{\sigma(1)},\theta_{\sigma(2)},\theta_{\sigma(3)}\} = f(\theta_{\sigma(1)},\theta_{\sigma(2)},\theta_{\sigma(3)}).$$

Por lo tanto, f es simétrica. Como $f(1,-1,0) = 1 = f(-1,1,0)$, no es verdad que $f(\theta) = -f(-\theta)$ para todo $\theta \in \{-1,0,-1\}^3$. Luego, f no cumple la propiedad de neutralidad. Finalmente, como $(0,0,-1) < (0,0,0)$ y $f(0,0,-1) = 0 = f(0,0,0)$, no es verdad que dados $\theta,\theta' \in \{-1,0,-1\}^3$ tales que $f(\theta) \geq 0$ y $\theta' > \theta$, se tenga que $f(\theta') = 1$. Por lo tanto, f no cumple la propiedad de responsividad.

Análisis de la regla g. Dado $(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in \{-1,0-1\}^3$, $(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ es un entero y $\frac{1}{3}\theta_1\theta_2\theta_3 \in \{-1/3,0,1/3\}$. Así, cuando $\theta_1+\theta_2+\theta_3 \neq 0$, los números $(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ y $(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\frac{1}{3}\theta_1\theta_2\theta_3)$ tienen el mismo signo. Además, cuando $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = 0$, al menos una de las coordenadas de $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ debe ser igual a cero, lo cual implica que $\theta_1\theta_2\theta_3 = 0$. Concluimos que g coincide con el voto mayoritario. Por lo tanto, sigue del Teorema de May que g cumple las tres propiedades: simetría, neutralidad y responsividad. $\square$

[2] Considere una economía en la cual hay un conjunto finito $N = \{1,\ldots,n\}$ de individuos, los cuales tienen preferencias por las alternativas sociales en $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. Denote por $\mathcal{P}$ a la colección de perfiles preferencia $P = (\succ_i)_{i\in N}$ tales que cada $\succ_i$ está definida sobre A y es completa, transitiva y estricta.

Sea $f : \mathcal{P} \to A$ la regla de elección social caracterizada por

$$f(P) = \begin{cases} a_1 & \text{cuando } a_1 \succ_1 a \text{ para todo } a \in \{a_2,a_3,a_4\}; \\ a_2 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Justificando sus argumentos, determine si f es Condorcet monótona, Maskin monótona o *strategy-proof*.

La regla de elección f no cumple ninguna de las tres propiedades. Para demostrar esto, considere los perfiles de preferencias $P = (\succ_i)_{i\in N}$ y $P' = (\succ'_i)_{i\in N}$ tales que

$$a_3 \succ_1 a_1 \succ_1 a_2 \succ_1 a_4, \qquad a_1 \succ'_1 a_2 \succ'_1 a_3 \succ'_1 a_4, \qquad \succ_i = \succ'_i, \quad \forall i \in N\setminus\{1\}.$$

Además, para cada $i \in N\setminus\{1\}$, asuma que las alternativas $\{a_1,a_2\}$ son top bajo $\succ'_i$.

Note que los perfiles de preferencias P y P' coinciden sobre las alternativas $\{a_1,a_2\}$, las cuales son top bajo P'. Sin embargo, $f(P) = a_2$ y $f(P') = a_1$. Por lo tanto, f no es Condorcet monótona. Aunque $f(P) = a_2$ y $\{a \in A : a_2 \succeq_i a\} \subseteq \{a \in A : a_2 \succeq'_i a\}$ para todo $i \in N$, tenemos que $f(P') \neq a_2$. Luego, f no es Maskin monótona. Finalmente, como $f(\succ'_1,\succ_{-1}) = f(P') = a_1 \succ_1 a_2 = f(P) = f(\succ_1,\succ_{-1})$, f no es strategy-proof.[1] $\square$

[1] Alternativamente, usted podía demostrar que f no es Maskin monótona ni *strategy-proof* apelando a que cualquiera de estas dos propiedades asegura la monotonía Condorcet (resultados vistos en la Ayudantía 6).

[3] Considere una subasta de Vickrey-Clarke-Groves en la cual se venden dos objetos, a y b. Asuma que en la subasta participan tres potenciales compradores, $i \in \{1, 2, 3\}$, cuyas valoraciones vienen dadas por:

i	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
1	4	3	6
2	3	2	α
3	2	4	7

donde $\alpha > 0$ es un parámetro. Explicando detalladamente sus argumentos:

(i) Determine la distribución de los objetos y el precio que paga cada comprador.

Adjudicando ambos objetos a un mismo comprador, el bienestar social máximo es igual a $\max\{7, \alpha\}$, mientras que distribuyendo los objetos entre individuos diferentes se obtiene un bienestar social máximo de 8.

Por lo tanto, existen dos casos relevantes para analizar:

- Si $\alpha < 8$, el vendedor le adjudicará el objeto a al individuo 1 y el objeto b al individuo 3. Cuando el individuo 1 no está en el mercado, el bienestar social máximo es $\max\{7, \alpha\}$, mientras que el bienestar de los individuos $\{2, 3\}$ cuando 1 está en el mercado es igual a 4. Luego, el individuo 1 debe pagar un precio igual a $\max\{7, \alpha\} - 4$ por el objeto a. Por otro lado, cuando 3 no está en el mercado, el bienestar social máximo es $\max\{6, \alpha\}$, mientras que el bienestar de los individuos $\{1, 2\}$ cuando 3 está en el mercado es igual a 4. Luego, el individuo 3 debe pagar un precio igual a $\max\{6, \alpha\} - 4$ por el objeto b. Note que los ingresos del vendedor son iguales a $\max\{7, \alpha\} + \max\{6, \alpha\} - 8$.
- Si $\alpha \geq 8$, el vendedor le adjudicará ambos objetos al individuo 2. Cuando el individuo 2 no está en el mercado, el bienestar social máximo es igual a 8, mientras que el bienestar de los individuos $\{1, 3\}$ cuando 2 está en el mercado es igual a cero. Luego, el individuo 2 debe pagar un precio igual 8 por los objetos.

(ii) Determine para que valores de α el vendedor podría aumentar su recaudación empaquetando los objetos antes de subastarlos.

Sigue de los argumentos previos que, cuando el vendedor *no* empaqueta los objetos, sus ingresos en la subasta VCG vienen dados por:

$$\pi = \begin{cases} 5 & \text{cuando } \alpha \leq 6; \\ \alpha - 1 & \text{cuando } \alpha \in (6, 7); \\ 2\alpha - 8 & \text{cuando } \alpha \in [7, 8); \\ 8 & \text{cuando } \alpha \geq 8. \end{cases}$$

Alternativamente, si se empaquetan los objetos antes de venderlos, la subasta VCG coincide con una subasta a sobre cerrado de segundo mayor precio. Por lo tanto, los ingresos del vendedor vienen dados por:

$$\widehat{\pi} = \begin{cases} 6 & \text{cuando } \alpha \leq 6; \\ \alpha & \text{cuando } \alpha \in (6, 7); \\ 7 & \text{cuando } \alpha \in [7, 8); \\ 7 & \text{cuando } \alpha \geq 8. \end{cases}$$

Concluimos que el vendedor aumenta su recaudación empaquetando los objetos antes de subastarlos si y solamente si α es menor que 7.5. $\square$