

Fuente: Examen Final de Econometría II 2021

1. (25 puntos) Dado el modelo GARCH(q, m):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^m \delta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (1)$$

(a) (5 puntos) Para que la varianza incondicional esté bien definida se requiere que:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^m \delta_j < 1. \quad (2)$$

En ese caso tenemos que la varianza incondicional es:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^m \delta_j}. \quad (3)$$

(b) (10 puntos) Es posible mostrar que un proceso GARCH(q, m) es similar a procesos ARMA. Para ello, definimos $v_t = u_t^2 - \sigma_t^2$ y utilizamos esta expresión para derivar:

$$u_t^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=0}^r \gamma_j v_{t-j}. \quad (4)$$

donde $p = q$, $r = m$, $\beta_0 = \alpha_0$, $\beta_i = \alpha_i + \delta_i$, $\gamma_0 = 1$, $\gamma_j = -\delta_j$ (para $j > 0$). (c) (10 puntos) Recordar la manera en que estimamos los modelos ARMA.