Microeconomía I
Ayudantía 2

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Valeria Ulloa, Benjamín Peña, Marcelo Gómez

Pregunta 1

Sea $f : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ una función que tiene derivadas continuas de primer y segundo orden. Definimos $v : \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ como

$$v(p, w) = \alpha + f(p)w$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ constante.

1. Demuestre que para que $v(p, w)$ pueda ser una función de utilidad indirecta obtenida a partir de preferencias $\succeq$ racionales, continuas, y localmente no saciadas, $f(p)$ debe cumplir las siguientes propiedades:
   - f homogénea de grado -1.
   - f cuasiconvexa.
   - $f(p) > 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^L_+$
   - $\nabla f(p) \leq 0$
2. Si sabemos que la demanda marshalliana es $x_l(p, w) = -\frac{w}{f(p)} \frac{\partial f(p)}{\partial p_l}$. Calcule la matriz de Slutsky.

Pregunta 2

Preferences are represented by $u = \phi(x)$ and a expenditure function, indirect utility function and demands are calculated. If the same preferences are now represented by $u^* = \psi(\phi(x))$ for a monotone increasing function $\psi(\cdot)$, show that $e(p, u)$ is replaced by $e(p, \psi^{-1}(u^*)), v(p, m)$ by $\psi(v(p, m))$, and $h(p, u)$ by $h(p, \psi^{-1}(u^*))$. Also, check that the Marshallians demands $x(p, m)$ are unaffected.

Pregunta 3

Sea $b \in \mathbb{R}^L_+$ y $X = \mathbb{R}^L_+$. Las preferencias están representadas por la siguiente función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = \text{mín}\{x_1 - b_1, \ldots, x_L - b_L\}.$$

1. ¿Qué puede decir sobre la convexidad y monotonocidad de las preferencias?

Solution:

- **Convexidad:** Tomamos dos canastas $y \succeq x$ y $z \succeq x$. Para que se cumple convexidad

$$\lambda y + (1-\lambda)z \succeq x$$

Debe cumplirse $\lambda u(y) + (1-\lambda)u(z) \geq u(x)$, esto equivale a

$$\lambda \min\{y\} + (1-\lambda)\min\{z\} \geq \min\{x\}$$

Esto último se cumple dado las preferencias que supusimos al inicio, dado que son equivalentes a $\min\{y\} \geq \min\{x\}$ y $\min\{z\} \geq \min\{x\}$, estos últimos pueden ser multiplicados por λ y $(1-\lambda)$. Por ende las preferencias son convexas.

- **Monotonicidad:** Dados vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, con $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$, se cumplirá:

$$\min\{x_1 - b_1, \ldots, x_L - b_L\} > \min\{y_1 - b_1, \ldots, y_L - b_L\}$$

Esto implica que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Por tanto, las preferencias son monotónas.

2. ¿Tiene el problema del consumidor una solución única? Encuentre la demanda Marshaliana y su dominio.

Solution: Para obtener la demanda marshalliana, se debe cumplir:

$$x_1 - b_1 = x_2 - b_2 = \cdots = x_L - b_L \tag{1}$$

Es decir $x_1 - b_1 = x_j - b_j$ para $j = 2, \ldots, L$. Por otro lado, la restricción presupuestaria cumple:

$$\begin{aligned} p \cdot x &= w \\ p \cdot (x-b) &= w - p \cdot b \end{aligned}$$

En sumatorias se ve como,

$$\sum_{k=1}^{L} p_k(x_k - b_k) = w - \sum_{k=1}^{L} p_k b_k$$

Dada la ecuación () tendremos,

$$\begin{aligned} (x_j - b_j)\sum_{k=1}^{L} p_k &= w - \sum_{k=1}^{L} p_k b_k \\ x_j - b_j &= \frac{w - \sum_{k=1}^{L} p_k b_k}{\sum_{k=1}^{L} p_k} \end{aligned}$$

Finalmente, las demandas marshalliana están dadas por:

$$x_j^* = \frac{w - \sum_{k=1}^{L} p_k b_k}{\sum_{k=1}^{L} p_k} + b_j \quad j \in \{1, \ldots, L\}$$

Solución única: Notemos que la restricción la escribimos de la siguiente forma: $p\cdot(x-b) = w - p\cdot b$. Luego, no existirá restricción presupuestaria si:

$$w - p\cdot b < 0 \implies w < p\cdot b$$

Por otro lado, la demanda marshaliana será unica en el caso contrario, cuando $w \geq p\cdot b$. En el caso que $w = p\cdot b \implies p\cdot(x-b) = 0 \implies x^* = b$, ya que $p \gg 0$. Por último, si $w > p\cdot b$ tendremos la demanda antes encontrada.

3. ¿Son todos los bienes normales? ¿Superiores? (Sugerencia: estudie primero el caso $L = 2$).

Solution: Cuando $L = 2$ tenemos que la demanda marshalliana es:

$$x_j = \frac{w - p_1 b_1 - p_2 b_2}{p_1 + p_2} + b_j$$

El efecto de un aumento de la riqueza sobre la demanda es:

$$\frac{\partial x_j}{\partial w} = \frac{1}{p_1 + p_2} > 0$$

Luego, llevando la situación a dimensión L:

$$\frac{\partial x_j}{\partial w} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{L} p_k} > 0$$

Por tanto, todos los bienes son normales.

Para saber si los bienes son superiores nos fijamos en la elasticidad demanda-ingreso, si esta es mayor a 1, entonces estamos frente a bienes superiores:

$$\begin{aligned}
\eta_{x_j,w} &= \frac{\partial x_j}{\partial w}\frac{w}{x_j} \\
&= \frac{1}{\sum_{k=1}^{L} p_k}\frac{w}{\frac{w - \sum_{k=1}^{L} p_k b_k}{\sum_{k=1}^{L} p_k} + b_j} \\
&= \frac{w}{w + \sum_{k=1}^{L} p_k (b_j - b_k)}
\end{aligned}$$

Entonces, para que los bienes sean superiores, debe cumplirse que $b_j < b_k$ para todo $k = \{1, \ldots, L\}$, pero esto no se cumple, por ende, no puede pasar que todos los bienes sean superiores.

4. Obtenga la función de utilidad indirecta.

Solution: Evaluando las demandas marshallianas en la función de utilidad obtendremos la FUI:

$$\text{mín}\left\{\frac{w-\sum_{k=1}^{L}p_kb_k}{\sum_{k=1}^{L}p_k},\ldots,\frac{w-\sum_{k=1}^{L}p_kb_k}{\sum_{k=1}^{L}p_k}\right\}$$

Dado que todos los argumentos son iguales, la FUI es:

$$v=\frac{w-\sum_{k=1}^{L}p_kb_k}{\sum_{k=1}^{L}p_k}$$

Para chequear la identidad de Roy, aplicamos la fórmula:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial p_l} &= \frac{-b_l\sum_{k=1}^{L}p_k-(w-\sum_{k=1}^{L}p_kb_k)}{(\sum_{k=1}^{L}p_k)^2}\\ \frac{\partial v}{\partial w} &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{L}p_k}\end{aligned}$$

Luego, la identidad es:

$$\begin{aligned}x_l^* &= -\frac{\frac{-b_l\sum_{k=1}^{L}p_k-(w-\sum_{k=1}^{L}p_kb_k)}{(\sum_{k=1}^{L}p_k)^2}}{\frac{1}{\sum_{k=1}^{L}p_k}}\\ &= -\frac{-b_l\sum_{k=1}^{L}p_k-(w-\sum_{k=1}^{L}p_kb_k)}{\sum_{k=1}^{L}p_k}\\ &= \frac{w-\sum_{k=1}^{L}p_kb_k}{\sum_{k=1}^{L}p_k}+b_l\end{aligned}$$

Por ende, se cumple.

5. Obtenga la función de gasto y chequee que sus propiedades se cumplen.

Solution: Sabemos que se cumple $v(p,e(p,u_0))=u_0$ y $w=e(p,u_0)=e$, por tanto, tenemos:

$$v(p,e(p,u_0))=\frac{e-\sum_{k=1}^{L}p_kb_k}{\sum_{k=1}^{L}p_k}=u_0$$

Entonces, despejamos la función de gasto,

$$e=u_0\sum_{k=1}^{L}p_k+\sum_{k=1}^{L}p_kb_k$$

Propiedades de la función de gasto:

- **Homogénea de grado 1 en precios:**

$$e(\alpha p, u_0) = u_0\sum_{k=1}^{L}\alpha p_k + \sum_{k=1}^{L}\alpha p_k b_k = \alpha(u_0\sum_{k=1}^{L}p_k + \sum_{k=1}^{L}p_k b_k) = \alpha e(p, u_0)$$

- **Estrictamente creciente en u y no-decreciente en p_l para cualquier l:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial u_0} &= \sum_{k=1}^{L}p_k > 0\\ \frac{\partial e}{\partial p_l} &= u_0 + b_l \geq 0\end{aligned}$$

- **Cóncava en precios:** La función de gasto es lineal en precios: $e = \sum_{k=1}^{L} p_k(u_0+b_k)$. Luego, la segunda derivada de e respecto a p_k es 0, por tanto, se cumple que al función es cóncava en precios, ya que para concavidad se necesita que la segunda derivada sea menor o igual a cero.

- **Continua en p y u:** A partir de la representación de la función de gasto, podemos ver que es lineal tanto en precios (p_k) como en utilidad (u_0), por tanto, se cumple la continuidad, ya que dicha función no presenta saltos o no existen valores de p_k y/o u_0 que hagan que se indetermine.

6. Obtenga la demanda Hicksiana.

Solution: Usando el lema de shepard:

$$h_j(p, u_0) = \frac{\partial e}{\partial p_j} = u_0 + b_j$$

7. Obtenga la matriz de Slutsky y chequee que es semi definida negativa y simétrica.

Solution: Sabemos que la matriz de Slutsky se define como:

$$S_{l,k} = \frac{\partial x_l(p,\omega)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,\omega)}{\partial \omega}x_k(p, w)$$

con:

$$x_l^* = \frac{w - \sum_{k=1}^{L} p_k b_k}{\sum_{k=1}^{L} p_k} + b_l$$

Primero haremos el caso para $L = 2$ y luego lo expandimos. Por lo tanto, nos quedaría:

$$\begin{aligned}
s_{1,1} &= -\frac{w}{(p_1+p_2)^2} - \left(\frac{b_1(p_1+p_2) - (p_1b_1+p_2b_2)}{(p_1+p_2)^2}\right) + \frac{1}{p_1+p_2}x_1^* \\
&= -\frac{w}{(p_1+p_2)^2} - \frac{p_2(b_1-b_2)}{(p_1+p_2)^2} + \frac{1}{p_1+p_2}\left(\frac{w-(p_1b_1+p_2b_2)}{p_1+p_2} + b_1\right) \\
&= -\frac{w}{(p_1+p_2)^2} - \frac{p_2(b_1-b_2)}{(p_1+p_2)^2} + \frac{w}{(p_1+p_2)^2} + \frac{p_1b_1+p_2b_1-p_1b_1-p_2b_2}{(p_1+p_2)^2} \\
&= \frac{p_2(b_1-b_2)-p_2(b_1-b_2)}{(p_1+p_2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{1,2} &= -\frac{w}{(p_1+p_2)^2} - \left(\frac{b_2(p_1+p_2) - (p_1b_1+p_2b_2)}{(p_1+p_2)^2}\right) + \frac{1}{p_1+p_2}x_2^* \\
&= -\frac{w}{(p_1+p_2)^2} - \frac{p_1(b_2-b_1)}{(p_1+p_2)^2} + \frac{1}{p_1+p_2}\left(\frac{w-(p_1b_1+p_2b_2)}{p_1+p_2} + b_2\right) \\
&= -\frac{w}{(p_1+p_2)^2} - \frac{p_1(b_2-b_1)}{(p_1+p_2)^2} + \frac{w}{(p_1+p_2)^2} + \frac{p_1b_2+p_2b_2-p_1b_1-p_2b_2}{(p_1+p_2)^2} \\
&= \frac{p_1(b_2-b_1)-p_1(b_2-b_1)}{(p_1+p_2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego, notamos que $s_{2,1} = s_{1,1} = 0$, lo mismo para $s_{2,2} = s_{1,2} = 0$. Por lo tanto, la matriz quedaría:

$$S(p,w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si expandimos el caso en que $L = 2$, todas las componentes $s_{l,k}$ con $l, k = 1, \cdots, L$ resultan 0. Por lo tanto, la matriz de Slutsky es semi definida negativa y simétrica, ya que la matriz nula cumple con estas propiedades.

Pregunta 4

Verify that the expenditure function obtained from the CES direct utility function $e(p,u) = u(p_1^r + p_2^r)^{1/r}$ where $r = \rho/(\rho-1)$, satisfies the following properties:

1. Zero when u takes on the lowest level of utility in U.

Solution: El menor u es $u(0) = 0$. Esto implica que $e(p, u(0)) = 0$.

2. For all $p \gg 0$, strictly increasing and unbounded above in u.

Solution: Tenemos

$$\frac{\partial e}{\partial u} = (p_1^r + p_2^r)^{1/r} > 0$$

Puesto que $p \in \mathbb{R}^2_{++}$.

Por otro lado, dado que u toma valores en $\mathbb{R}_+$ (no acotado por arriba), y la función de gasto está compuesta de precios (no acotados por arriba) y utilidad, tenemos que su contradominio no está acotado por arriba (*quizás es fácil de ver simplemente mirando la expresión analítica de* e).

3. Increasing in p.

Solution:

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = u p_i^{r-1}(p_1^r + p_2^r)^{\frac{1}{r}-1} \geq 0$$

4. Homogeneous of degree 1 in p.

Solution:

$$\begin{aligned} e(\lambda p, u) &= u[(\lambda p_1)^r + (\lambda p_2)^r]^{1/r} \\ &= \lambda u(p_1^r + p_2^r)^{1/r} \\ &= \lambda e(p, u) \end{aligned}$$

5. Concave in p.

Solution: Podemos probar que la función de gasto es cóncava en p calculando el Hessiano y chequeando que sea semi-definido negativo.