Series de tiempo

En macro usamos series de tiempo por:

- dinámica
- agregación
- expectativas
- compromiso

INPUT → MODEL → OUTPUT

shocks (innovación) → optimiz. - Hogar - firma - estado → variables macro

$\underbrace{\text{shocks (innovación)}}_{\text{exógeno}}$ ... $\underbrace{\text{variables macro}}_{\text{endógeno}}$

* En general tenemos mayor (o igual) variables endógenas que exógenas

* Aveces observamos los shocks otras veces los inferimos del modelo.

* En teoría según el modelo sabemos que es exógeno o endógeno (pues sino todo sería endógeno).

→ Luego, sabemos que la mayoría de los datos macro vienen de las series de tiempo.

$X_t = X_1, X_2, X_3, \ldots$

Que sabemos que corresponde a una variable aleatoria (es decir, el valor numérico que corresponde al resultado de un experimento).

⇒ Cuando pensamos en la serie como V.A. ⇒ los modelos macro tratan sobre la distribución conjunta de vectores aleatorios.

(* Distribución conjunta: Distrib de Pr de que ocurra x e y simultáneamente)

MOMENTOS

Dada una serie de tiempo X_t como es una V.A podemos calcularle sus momentos → estos son los valores esperados de ciertas funciones de x

- 1er momento: $E(X_t)$
- 2do momento: $E(X_t X_s)$
- 3er momento: $E(X_t X_s X_u)$

* Momento no centrado de una V.A. (m_k)

$$m_k \sum_{x \in E_x} x^k P(X=x)$$

$$\hookrightarrow m_1 = E(X) = X \cdot P(X=x) + \ldots$$

* momento centrado en la media (μ_k)

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k]$$

PROCESO GAUSSIANO

Una serie de tiempo se dice Gaussiana si todas las combinaciones lineales de X_t distribuyen como una normal

$$\sum a_i x_i \sim \text{Normal}$$

* La media y varianza depende de esta combinación.

* Distribución Normal

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma^2}(u)\,du$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du$$

* como la normal depende de su μ, σ^2 ⇒ los momentos sobre 3 de un proceso Gaussiano están determinados x su 1er y 2do momento

→ con la media y matriz var/cov caracterizo un proceso Gauss estacionario

ESTACIONARIEDAD

Una serie X_t en tiempo discreto es **fuertemente estacionaria** si $\forall$ $k, h \in \mathbb{Z}$ la distribución conjunta:

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \overset{dist}{\sim} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$$

son la misma
$\iff$ la distribución de las trayectorias no cambia si muevo los t. $\iff$ invariante bajo Δt.

① $\Rightarrow$ la distribución de X_t no depende de t, esto significa que:

$$Pr(X_t \leq u)$$

no depende de t

En consecuencia, $E(X_t)$ tampoco depende de t

② $\Rightarrow$ la distribución de (X_{t+h}, X_{s+h}) no depende de h significa que:

$$Pr(X_{t+h} \leq u_1, X_{s+h} \leq u_2)$$

no depende de h, solo depende de $t-s$

③ $\Rightarrow$ la covarianza entre X_t y X_{t+h} solo depende de la distancia entre los dos términos en el tiempo, es decir depende de h

$$COV(X_t, X_{t+h}) \equiv E[X_t X_{t+h}] - E[X_t]E[X_{t+h}]$$

* la covarianza refleja en qué cuantía 2 variables varían de forma conjunta respecto de sus medias aritméticas
* si las variables son $\perp\!\!\!\perp$:

$$E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow COV = 0$$

- Propiedades
  - $COV(XY) = COV(YX)$
  - $COV(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta COV(X,Y)$
  - $COV(\alpha + X, \beta + Y) = COV(X+Y)$
  - $COV(X, \beta) = 0$
  - $COV(X, X) = Var(X)$

Luego, un proceso es **débilmente estacionario** (o covarianza estacionario) si

$E(X_t) < \infty$, $E(X_t^2) < \infty$,
$E(X_t)$ no depende de t,
$E(X_t X_{t+h})$ no depende de t.

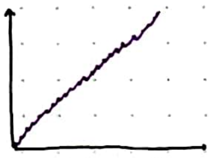
$\iff E(X_t) = E(X_{t+k}) = \mu$
$Var(X_t) = Var(X_{t+k}) = \sigma^2$
$COV(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k$

* $\gamma_k = \gamma_{-k}$

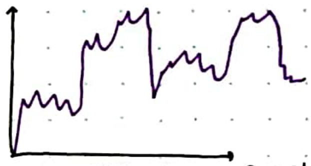
$\rightarrow$ es lo mismo que fuerte excepto x la condición de distribución igual y var cte en el t (fuerte no lo tiene)

* comentarios

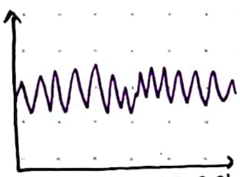
- Fuertemente estacionaria $\not\Rightarrow$ débilmente "
- Fuerte est. + var finita $\Rightarrow$ débil est.
- Proceso Gauss. + débil est $\Rightarrow$ fuerte est.



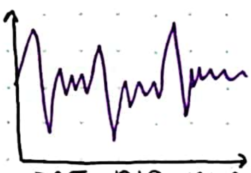
NO est. en media



no est en media y varianza



EST. en media y varianza



EST. en media no en var.

ARMA

RUIDO BLANCO

Lo básico para construir modelos de series de tiempo.

Def: ε_t sigue un proceso de ruido blanco si

ε_t es iid $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

* un proceso iid es una secuencia de variables $\perp\!\!\!\perp$, idénticamente distribuidas

• Propiedades del Ruido Blanco:

1) Impredecible (1):
$[E(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} \dots) = 0]$

2) Impredecible (2):
$[E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0]$

3) Homocedasticidad condicional
$[Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} \dots) = \sigma_\varepsilon^2]$

* La normalidad de la distribución no es 100% necesaria

* Prop 1 clave! → "martingale difference": su expectativa c/ respecto al pasado es 0.

* cuaderno: $E(\varepsilon_t) = 0$
$Var(\varepsilon_t) = 0$

→ En síntesis, ε_t es $\perp\!\!\!\perp$ en el t de sí mismo.

MODELOS ARMA

AR(1): $X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t$

MA(1): $X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$

ARMA(1,1): $X_t = a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$

→ De forma genérica

AR(p): $X_t = \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t-k} + \varepsilon_t$

MA(q): $X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{t-k}$

ARMA(p,q): $X_t = \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t-k} + \varepsilon_t + \sum_{k=}^{q} b_k \varepsilon_{t-k}$

* un proceso de innovación es cuando X_t es una comb. lineal de los X_t pasados y los valores actuales y pasados de los shocks

* Todos estos modelos tienen media = 0 → se utilizan para representar desviaciones de la media.

OPERADOR L

• Operador de rezago:

$[L X_t = X_{t-1}]$

* $L^2 X_t = X_{t-2}$

→ en modo general

$$\boxed{\begin{array}{l} L^j X_t = X_{t-j} \\ L^{-j} X_t = X_{t+j} \end{array}}$$

→ Podemos escribir un ARMA con esta notación

• Ej: AR(1): $X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t$
$\Leftrightarrow X_t = a L(X_t) + \varepsilon_t$
$\Leftrightarrow \underbrace{(1 - aL)}_{a(L)} X_t = \varepsilon_t$

a(L): Polinomio de rezago

⇒ [AR(1): $a(L) X_t = \varepsilon_t$]

• Ej: ARMA(p,q):

$a(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p$
$b(L) = 1 + b_1 L + b_2 L^2 + \dots + b_q L^q$

⇒ ARMA(p,q): $[a(L) X_t = b(L) \varepsilon_t]$

AR(1) como MA(∞)

sabemos que AR(1): $X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t$
→ entonces recursivamente:

$$X_t = a(a X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$
$$= a^2 X_{t-2} + a\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\vdots$$
$$= a^k X_{t-k} + a^{k-1}\varepsilon_{t-k+1} + \ldots + a\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

→ luego si $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} a^k X_{t-k} = 0$

$$\Rightarrow \left[X_t = \sum_{k \geq 0} a^k \varepsilon_{t-k} \right]$$

→ Podemos hacer lo mismo usando polinomio de rezago

si se cumple que $|a| < 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{1-aL} = \sum_{k \geq 0} (aL)^k = \sum_{k \geq 0} a^k L^k \rightarrow \text{sum geométrica}$$

Entonces

AR(1): $(1-aL)X_t = \varepsilon_t$

$$\Rightarrow X_t = \frac{\varepsilon_t}{1-aL}$$
$$= \sum_{k \geq 0} (aL)^k \varepsilon_t$$
$$\left[X_t = \sum_{k \geq 0} a^k \varepsilon_{t-k} \right]$$

* Podemos definir las raíces del polinomio de rezago:

$$a(L) = 1 - aL \rightarrow a(z) = 1 - az = 0$$

$\Rightarrow z = 1/a \Rightarrow |z| > 1$ para que podamos escribir un AR(1) como MA(∞)

AR(P) como MA(∞)

AR(P) = $a(L)X_t = \varepsilon_t$ con $a(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 \ldots$

$$\rightarrow X_t = \frac{1}{a(L)} \cdot \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow a(z) = \underbrace{1 - a_1 L - a_2 L^2 - \ldots = 0}$$

si cada raíz z_i cumple $|z_i| > 1 \Rightarrow$ polinomio es invertible $\Rightarrow$ puedo escribir AR(P) como MA(∞)

MA(q) como AR(∞)

MA(q): $X_t = b(L)\varepsilon_t$

$$b(L) = 1 + b_1 L + b_2 L^2 + \ldots$$

$\Rightarrow$ si $|z_i| > 1 \Rightarrow$ MA(q) $\Leftrightarrow$ AR(∞)

ARMA estacionario

Un proceso MA(∞): $X_t = \sum_{k \geq 0} b_k \varepsilon_{t-k}$ tiene un segundo momento finito si:

$$\sum_{k \geq 0} b_k^2 < \infty$$

→ si esto se cumple, entonces el MA(∞) es estacionario (fuerte y débil)

$\Rightarrow$ un AR(P) es estacionario ssi las raíces de $a(z)$ están fuera del círculo unitario $\Leftrightarrow |z_i| > 1$
(): si no se cumple → el proceso explota

$\Rightarrow$ un ARMA(p,q) estacionario ssi el polinomio del AR cumple que sus raíces están fuera del círculo unitario.

* **comentarios:**

- vamos a definir un ruido blanco generalizado un ε_t no correlacionado con media 0 y var finita $= \sigma^2_\varepsilon$
  - * Generalizado es + débil que el normal (si no es Gauss.)
    - general → no corr
    - normal → independiente

→ Un ARMA generalizado tiene este ruido → las cond. de estacionariedad son las mismas que en el caso Gauss.

* Si ARMA no tiene ruido Gauss $\Rightarrow X_t$ no es Gauss

Autocovarianzas

La autocovarianza de un proceso estacionario X_t:

- $\gamma_X(j) = COV(X_t, X_{t-j})$

→ Para 2 V.A Y, Z:

- $COV(Y,Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z)$

→ Si X_t tiene media igual a 0 entonces

$$\boxed{\gamma_X(j) \equiv E(X_t X_{t-j})}$$

* $\gamma_X(0) = Var(X_t)$
$\gamma_X(j) = \gamma_X(-j)$

Luego, tenemos que la autocorrelación del proceso X_t:

$$\boxed{\rho_X(j) = corr(X_t, X_{t-j}) = \frac{\gamma_X(j)}{\gamma_X(0)}}$$

→ Notar que la autocov y autocorr. depende únicamente de la separación entre los X_t = j y no del t → esto porque asumimos un proceso de covarianza estacionaria.

RUIDO BLANCO

Asumimos $\varepsilon_t \sim iid \ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

- $\gamma_X(0) = \sigma_\varepsilon^2$
- $\gamma_X(j) = 0 \quad j \neq 0$
- $\rho_X(0) = 1$
- $\rho_X(j) = 0 \quad j \neq 0$

MA(1)

Asumimos $X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$

Nota: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
$E(\alpha X) = \alpha E(X)$
$Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$
$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2COV(X,Y)$

Sabiendo eso calculamos $\gamma_X \wedge \rho_X$:

$$\gamma_X(0) = Var(X_t) = Var(\varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1})$$
$$= \underbrace{Var(\varepsilon_t)}_{\sigma_\varepsilon^2} + b^2 \underbrace{Var(\varepsilon_{t-1})}_{\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{COV(\ ,\ )}_{0}$$

- $\gamma_X(0) = (1+b^2)\sigma_\varepsilon^2$

$$\gamma_X(1) = E(X_t X_{t-j}) = E[(\varepsilon_t - b\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - b\varepsilon_{t-2})]$$
$$= \underbrace{E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}]}_{0} - \underbrace{E[\varepsilon_t b \varepsilon_{t-2}]}_{0} - E(b\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}) + \underbrace{E(b\varepsilon_{t-1} b\varepsilon_{t-2})}_{0}$$
$$= E(b\varepsilon_{t-1}^2)$$
$$= b\underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{var(\varepsilon_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2}$$

- $\gamma_X(1) = b\sigma_\varepsilon^2$
- $\gamma_X(2) = 0 \Rightarrow \gamma_X(j) = 0 \quad j = 2, 3 \ldots$
- $\rho_X(1) = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} = \frac{b}{1+b^2}$
- $\rho_X(j) = 0 \quad j = 2, 3 \ldots$

MA(∞)

Asumimos: $X_t = \sum_{j \geq 0} b_j \varepsilon_{t-j}$

- $\gamma_X(0) = Var(X_t) = Var(\sum b_j \varepsilon_{t-j})$
$$= \left[\sum_{j \geq 0} b_j^2\right] \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

- $\gamma_X(K) = E\left[\sum_{j \geq 0} b_j \varepsilon_{t-j} \cdot \sum_{j=}^{K} b_j \varepsilon_{t-j}\right]$
$$= E\left[\sum_{j \geq 0} b_j \varepsilon_{t-j} \cdot \sum_{j \geq 0} b_{j+K} \varepsilon_{t-j+K}\right]$$
$$= \left(\sum_{j \geq 0} b_j b_{j+K}\right)\sigma_\varepsilon^2$$

AR(1)

Asumimos $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$
$|a| < 1$

→ sabemos que podemos escribirlo como un MA(∞)

→ en específico $b_j = a^j$

Esto implica que:

- $\gamma_x(k) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a^j a^{j+k}\right)\sigma_\varepsilon^2$
$$= \frac{a^k}{1-a^2}\sigma_\varepsilon^2$$

$\Rightarrow$ • $\rho_x(k) = a^k$

*** Forma alternativa AR(P)**

Como X_{t-1} y ε_t son $\perp\!\!\!\perp$, entonces si aplicamos /var( ) al AR(1):

$$Var(X_t) = a^2 Var(X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_x^2 = a^2\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{1}{1-a^2}\sigma_\varepsilon^2 = \gamma_x(0)$$

Luego podemos ver que:

- $\gamma_x(1) = E(X_t X_{t-1}) = E((aX_{t-1}+\varepsilon_t)X_{t-1})$
$$= a\sigma^2$$
- $\gamma_x(k) = a^k\sigma_x^2 = \frac{a^k}{1-a^2}\sigma_\varepsilon^2$

AR(P)

Asumimos $X_t = \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t-k} + \varepsilon_t$

→ tomamos como supuesto que el polinomio del AR es invertible
$\Rightarrow$ puedo escribirlo como MA(∞)

* X_t es independiente de ε_{t-j}

- $\gamma_x(k) = E(X_t X_{t-k})$
$$= E\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j}\right) X_{t-k}\right)$$

$$= \underbrace{a_1\gamma_x(k-1) + a_2\gamma_x(k-2) + \dots}_{\text{ecuación en diferencia}}$$

→ se puede resolver con condiciones iniciales.

*** Comentario: Gauss**

- ARMA Gaussiano
  ↳ representado x μ, σ^2 y γ

→ si $\mu = 0 \Rightarrow$ solo necesitamos las autocovarianzas.

$\Rightarrow$ si 2 ARMA Gauss. tienen las mismas funciones de autocov.
$\Rightarrow$ son el mismo proceso, es decir la Pr de algún evento sobre el proceso es la misma en ambos ARMA.

ESTACIONARIEDAD/ERGODICIDAD Y MEZCLA

Asumimos X_t proceso estacionario de media μ_x y función de covarianza γ_x: ie:

$$E(X_t) = \mu_x$$
$$COV(X_t, X_{t+s}) = \gamma_x(s)$$

→ luego si tenemos $X_1, \dots, X_T$ observaciones vamos a querer estimar la media y las cov como:

$$\bar{X} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$$

$$\hat{\gamma_s} = \frac{1}{T}\sum_{t=s+1}^{T}(X_t - \bar{X})(X_{t-s} - \bar{X})$$

↳ Estas son medidas de la muestra, no poblacionales. Entonces ¿bajo qué condiciones convergen?

Antes: Decimos que

$$\bar{X} \longrightarrow \bar{X}_{POB} = \mu_x$$

cuando X_t es iid (por ley de los grandes números)

PERO: Por construcción X_t no es iid, sino que está correlacionado.

Escaneado con CamScanner

Dicho eso no sabemos si se cumple que

$$\lim_{T\to\infty} E(\overline{X_T}-\mu)^2 = 0 \quad (1)$$

⇒ vamos a calcularlo y ver que necesitamos:

$$(1) = \lim_{T\to\infty}\left[E\left(\frac{1}{T}\sum X_t - \mu\right)\right]^2$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[E\left(\frac{1}{T}\sum X_t-\mu \cdot \frac{1}{T}\sum X_s-\mu\right)\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} E\left[\sum\sum \underbrace{(X_t-\mu)(X_s-\mu)}_{\text{COV.}}\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \underbrace{\sum_{T=1}^{T}\sum_{S=1}^{T} \gamma(t-s)}_{\begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\left[T\gamma(0) + 2(T-1)\gamma(1) + 2(T-2)\gamma(2) + \cdots\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\gamma(0) + 2\,\frac{T-1}{T}\gamma(1) + \cdots\right] = MSE_T$$

$$\leq \frac{1}{T}\left[\gamma(0) + 2|\gamma(1)| + 2|\gamma(2)| \cdots\right]$$

$$\leq \frac{1}{T}\left[\gamma(0) + 2\sum_{K=1}^{\infty}|\gamma(K)|\right]$$

→ Entonces para que el limite converja a 0 la sumatoria debe ser menor a ∞

→ condición de ergodicidad

(* tambien mezcla, pero no lo explica).

Representación de Wold

- La representación de Wold nos dice que dado un proceso de covarianza estacionario de media 0, existen v_t, η_t (únicos) tales que

v_t: Proceso de innovación lineal

η_t: Proceso determinístico

Tales que:

ruido blanco

$$\boxed{X_t^{WOLD} = \sum_{j\geq 0} \psi_j v_{t-j} + \eta_t}$$

Tiene la misma media y función de autocovarianza que X_t.

Propiedades de v_t:

1. $E[v_t X_{t-j}^{WOLD}] = 0 \quad \forall j$
2. v_t es un ruido blanco generalizado
3. v_t puede escribirse como una combinación lineal de X_t^{WOLD}, X_{t-1}^{WOLD}, ...

Propiedades de η_t:

1. $\eta_t = LP(\eta_t \mid X_{t-1}^{WOLD}, \dots)$

Otras Propiedades

1. $\psi_0 = 1 \wedge \sum_{j\geq 0} \psi_j^2 < \infty$
2. $E[v_t \eta_s] = 0 \quad \forall n, s$

* comentarios:

* La representación de Wold nos dice que todos los procesos estacionarios en cov pueden representarse como una media móvil infinita

* El proceso v_t es el pronóstico lineal del error de X_t basado en $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$

$$v_t = X_t - LP(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

* La representación es única

* La representación solo se refiere a los primeros 2 momentos

* Definimos $H_t(y)$ como el set de V.A. que se pueden escribir como comb. lineal de $y_t, y_{t-1}, \dots$

$$\Rightarrow H_t(X^{WOLD}) = H_t(v)$$

EJEMPLOS

1) AR(1) estacionario

$$X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$|a| < 1 \wedge \varepsilon \sim$ ruido blanco gen.

$\rightarrow$ Buscamos Representación de Wold:

1) Buscamos la innovación v:

$$\begin{aligned} v_t &= X_t - LP(X_t \mid X_{t-1}, \dots) \\ &= X_t - E(aX_{t-1} + \varepsilon_t \mid X_{t-1} \dots) \\ &= X_t - aX_{t-1} + 0 \\ &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

- Traducción

Toda serie estacionaria y no determinística tiene repres. de Wold

$$Y_t = \underbrace{\mu}_{E(Y_t)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \cdot \varepsilon_{t-1}}_{\text{suma de ruidos blancos rezagados}}$$

- $\psi(0) = 1$
- $\sum \psi_i^2 < \infty$