Profesor	: Eduardo Engel	Abril 15, 2024
Ayudantes	: Miguel Del Valle y Gabriela Jaque	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2024	
Guía	: No. 2	
Entrega	: Lunes 15 de abril, antes de las 8am	

1. **El Teorema de Muth y la Crítica de Lucas**

El ingreso, Y_t, es exógeno e igual a la suma de un camino aleatorio (shocks permanente), P_t, y un ruido blanco (componente transitoria), u_t,

$$\begin{aligned} Y_t &= P_t + u_t, \\ P_t &= P_{t-1} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Donde ε_t es i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, u_t i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_\mathrm{u}^2)$, ε_t y u_t independientes.

A diferencia del análisis que vimos en cátedra, ahora suponemos que los agentes observan las Y_t pero no sus componentes.

a) Muestre que ΔY_t sigue un MA(1)

$$\Delta Y_t = v_t - \theta v_{t-1}. \tag{1}$$

y derive una expresión para θ como función de $Q \equiv \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\mathrm{u}^2$, donde $|\theta| < 1$. Use esta expresión para expresar las innovaciones v_t, en términos de valores presentes y pasados de ΔY.

Ayuda: La expresión que debiera obtener es

$$\theta = \frac{1}{2}\left[Q + 2 - \sqrt{(Q+2)^2 - 4}\right].$$

Si no la obtiene, úsela igual en lo que sigue.

Respuesta:

En primer lugar, es podemos notar que ΔY_t sigue un MA(1) ya que:

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= Y_t - Y_{t-1} \\ &= (P_t + u_t) - (P_{t-1} + u_{t-1}) \\ &= P_t - P_{t-1} + u_t - u_{t-1} \\ &= \varepsilon_t + u_t + u_{t-1} \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\Delta P_t = \varepsilon_t$ y $\Delta u_t = u_t - u_{t-1}$ y que ε_t y u_t son independientes. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) &= \mathrm{Cov}(\Delta P_t, \Delta P_{t-k}) + Cov(\Delta u_t, \Delta u_{t-k}) \\ &= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) + Cov(u_t - u_{t-1}, u_{t-k} - u_{t-k-1}) \\ &= \begin{cases} -\sigma_u^2, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k = 2, 3, 4, \cdots. \end{cases} \end{aligned}$$

También:

$$\mathrm{Var}(\Delta Y_t) = \mathrm{Var}(\Delta P_t + \Delta u_t) = \mathrm{Var}(\varepsilon_t) + \mathrm{Var}(u_t - u_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_\mathrm{u}^2.$$

Sigue que:

$$\begin{aligned}
\rho_{\Delta Y}(0) &= 1 \\
\rho_{\Delta Y}(1) &= \frac{-\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_\mathrm{u}^2} = -\frac{1}{Q+2} \\
\rho_{\Delta Y}(k) &= 0,\ \ k \geq 2
\end{aligned}$$

Por tanto, sigue un proceso MA(1).

Pero en clases vimos que para un proceso MA(1) se cumple que

$$\rho_{\Delta Y}(1) = -\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

Con $|\theta| < 1$ Por tanto, tenemos que $\theta/(1+\theta^2) = 1/(Q+2)$, lo que nos permite obtener que

$$\theta = \frac{1}{2}\left[Q + 2 - \sqrt{(Q+2)^2 - 4}\right]$$

En donde no consideramos la raíz de suma porque genera un θ mayor a 1.

Finalmente, de (1) y que $|\theta| < 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta Y_t &= v_t - \theta v_{t-1} \\
\Delta Y_t &= v_t(1 - \theta L) \\
v_t &= \frac{\Delta Y_t}{1 - \theta L} \\
v_t &= \sum_{k \geq 0} \theta^k \Delta Y_{t-k}
\end{aligned}$$

b) Para $k = 1, 2, 3, 4, ...$ encuentre $\mathrm{E}_t[\Delta Y_{t+k}]$ (donde la información disponible en t son todos los valores pasados y presentes de Y, lo cual significa que también se conocen todos los valores presentes y pasados de ΔY). Use la expresión que obtuvo para mostrar que para todo $k \geq 1$:

$$\mathrm{E}_t[Y_{t+k}] = (1-\theta)\sum_{j \geq 0} \theta^j Y_{t-j}. \tag{2}$$

Se sigue que las proyecciones de valores futuros de Y no dependen del horizonte de proyección, En lo que sigue, denotamos $\mathrm{E}_t[Y_{t+k}]$ por $\hat{Y}_t$.

Respuesta:

Para $k = 1$, usando la expresión v_t derivada en la parte (a) tenemos que:

$$\mathrm{E}_t \Delta Y_{t+1} = \mathrm{E}_t[v_{t+1} - \theta v_t] = -\theta v_t = -\sum_{k \geq 0} \theta^{k+1} \Delta Y_{t-k}.$$

Mientras que para $k \geq 2$:

$$\mathrm{E}_t \Delta Y_{t+k} = \mathrm{E}_t[v_{t+k} - \theta v_{t+k-1}] = 0.$$

Sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t Y_{t+k} &= \mathrm{E}_t[\Delta Y_{t+k} + \cdots \Delta Y_{t+1} + Y_t] = Y_t + \mathrm{E}_t \Delta Y_{t+1} = Y_t - \sum_{k \geq 0} \theta^{k+1} \Delta Y_{t-k} \\
&= Y_t - \theta \Delta Y_t - \theta^2 \Delta Y_{t-1} - \theta^3 \Delta Y_{t-2} - \cdots \\
&= (1-\theta) Y_t + (\theta - \theta^2) Y_{t-1} + (\theta^2 - \theta^3) Y_{t-2} + \cdots = (1-\theta) \sum_{k \geq 0} \theta^k Y_{t-k}.
\end{aligned}$$

c) A continuación asuma suponga que la relación ente ΔC_t y el proceso de ingreso está determinada por el modelo de equivalencia cierta visto en clases, de modo que

$$\Delta C_t = \frac{r}{R} \sum_{u \geq 0} \beta^u \{\mathrm{E}_t Y_{t+u} - \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+u}\}.$$

Use esta expresión para mostrar que ΔC_t se puede escribir como:

$$\Delta C_t = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \Delta Y_{t-k}.$$

Encuentre expresiones para los α_k.

Respuesta:
Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta C_t &= \frac{r}{R} \left\{ Y_t - \hat{Y}_{t-1} + \sum_{u \geq 1} \beta^u (\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1}) \right\} \\
&= \frac{r}{R} \left\{ Y_t - \hat{Y}_{t-1} + \frac{\beta}{1-\beta} (\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1}) \right\} \\
&= \frac{r}{R} \left\{ \frac{1}{1-\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right\} \Delta \hat{Y}_t = \frac{R-\theta}{R(1-\theta)} \Delta \hat{Y}_t = \frac{R-\theta}{R} \sum_{j \geq 0} \theta^j \Delta Y_{t-j},
\end{aligned}$$

En donde es importante notar que el primer término en la primera suma es simplemente Y_t. Dado lo anterior, sigue que $\alpha_k = (R-\theta)\theta^k / R$.

d) En $t = 0$ la macroeconomista usa las series agregadas para estimar

$$\Delta C_t = \sum_{k \leq 0} \alpha_k \Delta Y_{t-k}. \tag{3}$$

Poco después, la varianza de la componente cíclica del ingreso aumenta de manera inesperada y permanente (todo lo restante no cambia). La macroeconomista está consciente del cambio en el entorno económico pero confía que los nuevos valores de ΔY lo van a capturar adecuadamente, por lo cual sigue usando (3) para proyectar el consumo. ¿Es correcto este supuesto? Justifique.

Respuesta:
El problema central es que el valor de θ y por tanto el de α_k a cambiado. Un aumento en la varianza de la componente ciclica baja Q y por tanto, aumenta θ. Por tanto, usar los coeficientes de la regresión del regimen anterior va a generar un sesgo en el forecast.

2. **Consumo y formación de hábitos**

Varios trabajos exploran el impacto de la formación de hábitos sobre el consumo. La idea es que niveles altos de consumo en el pasado reciente llevarán a una mayor utilidad marginal del consumo presente, porque el consumo es adictivo o formador de hábitos.

Un enfoque para modelar la formación de hábitos es suponer que la función de utilidad instantánea toma la forma $u(c_t - bc_{t-1})$ o la forma $u[c_t/(c_{t-1}^p)]$, donde $u(\cdot)$ tiene las propiedades habituales de una función de utilidad y b y p toman valores entre 0 y 1. Los términos bc_{t-1} y c_{t-1}^p representan el "hábito" del hogar: un valor más alto del consumo reciente reduce la utilidad del consumo presente aumentando la utilidad marginal del consumo de hoy.

Considere la formulación secuencial del hogar con formación de hábitos. En $t = 0$ el hogar maximiza la utilidad descontada esperada:

$$\max \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t u(c_t, c_{t-1})$$

sujeto a la riqueza inicial, A_0, a la condición de no Ponzi y a la restricción presupuestaria intertemporal

$$A_{t+1} = R(A_t + Y_t - C_t),$$

donde γ denota el factor subjetivo de descuento, $R = (1 + r)$ con r igual a la tasa de interés (constante), A_t denota riqueza financiera al comienzo de t y Y_t denota el ingreso laboral del hogar en el período t, el cual sigue un proceso Markoviano. La función de utilidad $u(c_t, c_{t-1})$ representa el flujo de utilidad experimentado por el hogar en el período t. Esta función permite capturar de manera general que el consumo presente y del período anterior afectan la utilidad presente; esta formulación incluye como casos particulares los dos ejemplos de formación de hábitos antes mencionados.

a) Identifique las variables de estado y variables de decisión. Indique cuáles variables de estado son endógenas y cuáles exógenas, donde las endógenas son determinadas por acciones del agente económico y la exógenas no dependen de dichas acciones.

Solución:
Variables de estado endógenas: c_{t-1}, A_t
Variables de estado exógenas: Y_t
Variables de control: c_t, A_{t+1}

b) Escriba la ecuación de Bellman del problema. Determine la condición de primer orden para el lado derecho de la ecuación de Bellman y las condiciones de la envolvente para cada una de las variables de estado endógenas.

Solución:

$$V\left(c_{t-1}, A_t\right) = \underset{c_t, A_{t+1}}{max} \left\{u\left(c_t, c_{t-1}\right) + \gamma E_t V\left(c_t, A_{t+1}\right)\right\}$$
$$s.a.\ A_{t+1} = (1+r)\left(A_t + Y_t - c_t\right)$$

Las condiciones de primer orden y de envolvente son

$$c_t : u_1\left(c_t, c_{t-1}\right) + \gamma E_t V_1\left(c_t, A_{t+1}\right) = \gamma R E_t V_2\left(c_t, A_{t+1}\right) \quad (1)$$
$$c_{t-1} : V_1\left(c_{t-1}, A_t\right) = u_2\left(c_t, c_{t-1}\right) \quad (2)$$
$$A_t : V_2\left(c_{t-1}, A_t\right) = \gamma R E_t V_2\left(c_t, A_{t+1}\right) \quad (3)$$

c) Utilice las expresiones de la parte (b) para mostrar que la ecuación de Euler viene dada por:

$$u_1(c_t, c_{t-1}) + \gamma \mathrm{E}_t u_2(c_{t+1}, c_t) = \gamma R E_t[u_1(c_{t+1}, c_t) + \gamma u_2(c_{t+2}, c_{t+1})], \tag{4}$$

donde u_1 y u_2 denotan la derivada parcial de u con respecto a su primer y segundo argumento, respectivamente.

Solución:
Adelantando (2) y reemplazándola en (1) junto con (3) se tiene que

$$V_2\left(c_{t-1}, A_t\right) = u_1\left(c_t, c_{t-1}\right) + \gamma E_t u_2\left(c_{t+1}, c_t\right) \tag{4}$$

Adelantando (4) y reemplazándola en (3) junto con (4) se llega a la ecuación de Euler, utilizando además la Ley de Expectativas Iteradas.

d) En esta parte derivamos (4) de una manera alternativa.[1] Suponga que c_{t-1}, c_t, c_{t+1} y c_{t+2} son los valores que toma el consumo en la trayectoria óptima y suponga que se reduce c_t en Δ, ahorrando dicho monto y consumiendo lo ahorrado en $t+1$. Planteando la condición que para Δ pequeño esta variante en la trayectoria del consumo no altera la utilidad descontada esperada del hogar, derive (4).

Solución:
Consideremos que la utilidad perturbada debe ser igual a la inicial

$$\begin{aligned} u\left(c_t - \Delta, c_{t-1}\right) + \gamma E_t u\left(c_{t+1} + R\Delta, c_t - \Delta\right) + \gamma^2 E_t u\left(c_{t+2}, c_{t+1} + R\Delta\right) = \\ u\left(c_t, c_{t-1}\right) + \gamma E_t u\left(c_{t+1}, c_t\right) + \gamma^2 E_t u\left(c_{t+2}, c_{t+1}\right) \end{aligned}$$

Restando y dividiendo por Δ

$$\begin{aligned} \frac{u\left(c_t - \Delta, c_{t-1}\right) - u\left(c_t, c_{t-1}\right)}{\Delta} + \frac{\gamma E_t\left[u\left(c_{t+1} + R\Delta, c_t - \Delta\right) - u\left(c_{t+1}, c_t\right)\right]}{\Delta} \\ + \frac{\gamma^2 E_t\left[u\left(c_{t+2}, c_{t+1} + R\Delta\right) - u\left(c_{t+2}, c_{t+1}\right)\right]}{\Delta} = 0 \end{aligned}$$

Luego si $\Delta \to 0$

$$u_1\left(c_t, c_{t-1}\right) + \gamma E_t\left[u_1\left(c_{t+1}, c_t\right) - u_2\left(c_{t+1}, c_t\right)\right] + \gamma^2 E_t u_2\left(c_{t+2}, c_{t+1}\right) = 0$$

Reordenado se llega a lo pedido.

[1] Lo que sigue se conoce como un argumento de perturbación, porque se analiza una leve desviación ('perturbación') de la trayectoria óptima.

Alternativamente: Un cambio en el consumo en t y en $t+1$ lleva a cambios en la utilidad del hogar en t, $t+1$, y $t+2$. Los cambios en cada período son los siguientes:

$$\begin{aligned} t :&\Delta u_1(c_t, c_{t-1}) \cdot (-1) \\ t+1 :&\Delta R u_1(c_{t+1}, c_t) - \Delta u_2(c_{t+1}, c_t) \\ &\Delta \left[R u_1(c_{t+1}, c_t) - u_2(c_{t+1}, c_t)\right] \\ t+2 :&\Delta R u_2(c_{t+2}, c_{t+1}) \end{aligned}$$

Dado que el hogar estaba en la trayectoria óptima de consumo, su utilidad no debería cambiar producto de los cambios anteriores. Esto es lo mismo que decir que los cambios en las utilidades anteriores **en valor presente** tienen que sumar 0. Tomando en cuenta además las esperanzas condicionales:

$$-\Delta u_1(c_t, c_{t-1}) + \gamma\Delta\left[R\mathrm{E}_t u_1(c_{t+1}, c_t) - \mathrm{E}_t u_2(c_{t+1}, c_t)\right] + \gamma^2 \Delta R \mathrm{E}_t u_2(c_{t+2}, c_{t+1}) = 0$$
$$-u_1(c_t, c_{t-1}) + \gamma R \mathrm{E}_t u_1(c_{t+1}, c_t) - \gamma \mathrm{E}_t u_2(c_{t+1}, c_t) + \gamma^2 R \mathrm{E}_t u_2(c_{t+2}, c_{t+1}) = 0$$

Reordenando:

$$u_1(c_t, c_{t-1}) + \gamma \mathrm{E}_t u_2(c_{t+1}, c_t) = \gamma R \mathrm{E}_t \left[u_1(c_{t+1}, c_t) + \gamma u_2(c_{t+2}, c_{t+1})\right]$$

e) En esta parte considere el caso en que $u(c_t, c_{t-1}) = \log(c_t/c_{t-1}^p)$, con $0 < p < 1$. Utilice (4) para derivar la ecuación de Euler. Compare con la ecuación de Euler en el caso sin hábito. De ser iguales, explique por qué. Si son distintas, interprete la diferencia.

Solución:
En este caso, la ecuación de Euler corresponderá a

$$\tfrac{1}{c_t} = \gamma R E_t \tfrac{1}{c_{t+1}}.$$

Sin formación de hábitos se obtiene exactamente la misma ecuación. Debido a la separabilidad aditiva de la función de utilidad en c_t y c_{t-1}, los hábitos disminuyen la utilidad actual pero no afectan las decisiones óptimas, en comparación al caso sin hábitos.

f) Ahora considere el caso de utilidad cuadrática, es decir, estudiamos cómo el caso de equivalencia cierta con hábito:

$$u(c_t, c_{t-1}) = [c_t - \eta c_{t-1}] - \frac{b}{2}[c_t - \eta c_{t-1}]^2,$$

donde $b > 0$ y $0 < \eta < 1$. Suponga que $\gamma R = 1$. Utilice (4) para derivar la ecuación de Euler para este caso. Suponga que la solución es un proceso AR(1) para ΔC_t, de modo que

$$\Delta C_t = \phi \Delta C_{t-1} + e_t,$$

donde los e_t son innovaciones. Determine el único valor de $\phi \in (0, 1)$ consistente con la ecuación de Euler que obtuvo. Compare con el caso sin hábito. De ser iguales, explique por qué. Si son distintas, interprete la diferencia. **Sugerencia**: Para que el álgebra sea más simple, le sugerimos proceder como sigue: Primero, obtenga expresiones para $u_{1,t} \equiv u_1(c_t, c_{t-1})$ y $u_{2,t} \equiv u_2(c_t, c_{t-1})$. Segundo, exprese

$u_{2,t}$ en términos de $u_{1,t}$. Tercero, use (4) y la relación anterior para concluir que la ecuación de Euler equivale a:

$$\mathrm{E}_t \Delta u_{1,t+1} = \eta\gamma \mathrm{E}_t \Delta u_{1,t+2}$$

Ahora exprese $\Delta u_{1,t}$ en términos de ΔC_t y ΔC_{t-1} para mostrar que la expresión anterior lleva a una ecuación de diferencias en expectativas y luego use el supuesto que ΔC_t sigue un AR(1) para determinar el único valor de $\phi \in [0,1]$ que cumple esta ecuación.

Solución:
Seguimos los pasos de la sugerencia. Primero, obtenemos expresiones para $u_{1,t}$ y $u_{2,t}$:

$$\begin{aligned} u_{1,t} &= 1 - b(c_t - \eta c_{t-1}) \\ u_{2,t} &= -\eta + \eta b(c_t - \eta c_{t-1}) \end{aligned}$$

Expresamos $u_{2,t}$ en términos de $u_{1,t}$:

$$\begin{aligned} u_{2,t} &= -\eta + \eta b(c_t - \eta c_{t-1}) \\ &= -\eta(1 - b(c_t - \eta c_{t-1})) \\ &= -\eta u_{1,t} \end{aligned}$$

Llegamos a la forma alternativa para la ecuación de Euler, partiendo de (4) y ocupando que $\gamma R = 1$:

$$\begin{aligned} u_{1,t} + \gamma \mathrm{E}_t u_{2,t+1} &= \mathrm{E}_t \left[u_{1,t+1} + \gamma u_{2,t+2}\right] \\ u_{1,t} - \gamma\eta \mathrm{E}_t u_{1,t+1} &= \mathrm{E}_t u_{1,t+1} - \gamma\eta \mathrm{E}_t u_{1,t+2} \\ \mathrm{E}_t \Delta u_{1,t+1} &= \gamma\eta \mathrm{E}_t \Delta u_{1,t+2} \end{aligned}$$

Expresamos $\Delta u_{1,t}$ en términos de Δc_t y Δc_{t-1}:

$$\begin{aligned} \Delta u_{1,t} &= 1 - bc_t + b\eta c_{t-1} - (1 - bc_{t-1} + b\eta c_{t-2}) \\ &= -b\Delta c_t + b\eta \Delta c_{t-1} \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo en la expresión para la condición de Euler:

$$-b\mathrm{E_t}\Delta c_{t+1} + b\eta \Delta c_t = \eta\gamma \mathrm{E_t}\left(-b\Delta c_{t+2} + b\eta \Delta c_{t+1}\right)$$

Dividiendo por b a ambos lados y reordenando:

$$-\eta \Delta c_t + (1 + \gamma\eta^2)\mathrm{E_t}\Delta c_{t+1} - \eta\gamma \Delta c_{t+2} = 0$$

Utilizando que Δc_t sigue un $AR(1)$

$$\mathrm{E}_t \Delta c_{t+1} = \phi \Delta c_t$$
$$\mathrm{E}_t \Delta c_{t+2} = \phi^2 \Delta c_t$$

Reemplazando en lo obtenido para la ecuación de Euler

$$\left(-\gamma\eta\phi^2 + \left(1 + \eta^2\gamma\right)\phi - \eta\right)\Delta c_t = 0,$$

por lo que la constante que acompaña a Δc_t debe ser igual a cero. Esta ecuación tiene dos raíces, $\phi = \eta$ y $\phi = \frac{1}{\eta\gamma}$, en donde solo la primera se encuentra dentro del círculo unitario. Se obtiene lo mismo que para el caso sin hábitos.

3. **Ahorro por precaución, función de utilidad CARA e ingreso i.i.d.**

Considere el modelo de consumo con función de utilidad instantánea con coeficiente de aversión absoluta al riesgo constante:

$$u(c) = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta c},$$

donde $\theta > 0$ denota el coeficiente de aversión absoluta al riesgo. La tasa de descuento subjetiva es δ, la tasa de interés es r y las dos son constantes. El ingreso laboral, y_t, es i.i.d., de modo que

$$y_t = \bar{y} + \varepsilon_t,$$

con ε_t i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Los activos del hogar al comienzo de un período evolucionan de acuerdo a

$$A_{t+1} = (1 + r)[A_t + y_t - c_t]. \tag{5}$$

Se puede mostrar que existe una solución única a la ecuación de Bellman y que existe una correspondencia uno-a-uno entre esta solución y la solución a la ecuación de Euler. No es necesario que demuestre lo anterior. Se sigue que la ecuación de Euler tiene una única solución, en la cual nos enfocamos en lo que sigue.

Suponemos que la solución de la ecuación de Euler toma la forma:

$$c_t = \frac{r}{1 + r}\left\{A_t + y_t + \frac{1}{r}\bar{y}\right\} - P(r, \theta, \delta, \sigma), \tag{6}$$

donde P es una constante (que depende de r, θ, δ y σ). A continuación encontramos el valor de P para el cual (6) resuelve la ecuación de Euler.

a) Asumiendo que se cumple (6), use (5) y un poco de álgebra para mostrar que:

$$\Delta c_t = \frac{r}{1 + r}\varepsilon_t + rP. \tag{7}$$

Respuesta:

Ocupando (6) para c_t y c_{t-1} tenemos lo siguiente:

$$\Delta c_t = c_t - c_{t-1} = \frac{r}{1+r}[A_t + y_t - A_{t-1} - y_{t-1}]$$

Ocupando (5)

$$\begin{aligned}\Delta c_t &= \frac{r}{1+r}[(1+r)(A_{t-1} + y_{t-1} - c_{t-1}) + y_t - A_{t-1} - y_{t-1}] \\ &= \frac{r}{1+r}[rA_{t-1} + ry_{t-1} - (1+r)c_{t-1} + y_t]\end{aligned}$$

Finalmente, usamos (6) para c_{t-1} de nuevo:

$$\begin{aligned}\Delta c_t &= \frac{r}{1+r}[y_t - \bar{y} + (1+r)P] \\ &= \frac{r}{1+r}\varepsilon_t + rP\end{aligned}$$

b) Use (7) y la ecuación de Euler para derivar una expresión explícita para P.

Respuesta:
Definiendo $\beta \equiv 1/(1+\delta)$, la ecuación de Euler es la siguiente:

$$u'(c_t) = \beta(1+r)E_t[u'(c_{t+1})]$$

donde ocupando la función de utilidad del enunciado, tenemos lo siguiente:

$$1 = \beta(1+r)E_t[e^{-\theta\Delta c_{t+1}}]$$

Ocupando (6):

$$1 = \beta(1+r)e^{-r\theta P}E_t[e^{-\frac{r\theta}{1+r}\varepsilon_{t+1}}]$$

Luego, ocupamos el siguiente resultado: si X es una variable aleatoria con una distribución normal de media μ y varianza σ^2, entonces para cualquier número real t,

$$E[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

Aplicamos lo anterior

$$1 = \beta(1+r)e^{-r\theta P}e^{\frac{(\sigma r\theta)^2}{2(1+r)^2}}$$

y tomamos logaritmos a ambos lados.

$$0 = \log(\beta(1+r)) - r\theta P + \frac{(\sigma r\theta)^2}{2(1+r)^2}$$

Finalmente, despejando P se tiene lo pedido:

$$P = \frac{\log(\beta(1+r))}{\theta r} + \frac{\sigma^2 r\theta}{2(1+r)^2}$$

c) Muestre que P es creciente en σ y decreciente en δ. Interprete los dos resultados.

Respuesta:
De la parte anterior tenemos que $\frac{\partial P}{\partial \beta} > 0$, por lo que P depende negativamente de δ. Esto es, a medida que una persona se vuelve más impaciente consumen más hoy y por lo tanto tiene menos ahorro por precaución. Además, $\frac{\partial P}{\partial \sigma} > 0$. Luego, a medida que hay más incertidumbre en los ingresos las personas tienen mayores niveles de ahorro por precaución.

d) Ahora asuma que $r = \delta$. El ahorro por precaución se define como la diferencia entre el ahorro efectivo y el ahorro que prescribe el modelo de equivalencia cierta. Muestre que el ahorro por precaución será igual a P y que P es estrictamente positivo.

Respuesta:
En este caso,

$$P = \frac{\sigma^2 r \theta}{2(1+r)^2} > 0$$

Ocupando la ecuación para el consumo bajo equivalencia cierta (y que $r = \delta$),

$$C_t = \frac{r}{1+r} \left\{ A_t + \sum_{s \geq 0} \frac{E_t[y_{t+s}]}{(1+r)^s} \right\}$$

Desarrollando lo anterior:

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{r}{1+r} \left\{ A_t + y_t + E_t \sum_{s \geq 1} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} \right\} \\ &= \frac{r}{1+r} \left\{ A_t + y_t + \bar{y} \sum_{s \geq 1} \frac{1}{(1+r)^s} \right\} \\ &= \frac{r}{1+r} \left\{ A_t + y_t + \frac{\bar{y}}{r} \right\} \end{aligned}$$

así, el ahorro por precaución está dado por

$$S_t - S_t^{certain} = C_t^{certain} - C_t = P$$