SOLEMNE I – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: MARTÍN FERRARI - CATALINA GÓMEZ

Pregunta 1

Considere una economía de intercambio estática con dos mercancías y dos consumidores, los cuales están caracterizados por las siguientes funciones de utilidad y asignaciones iniciales:

$$U^a(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad U^b(x,y) = \sqrt{x} + \theta\sqrt{y}, \qquad w^a = (\theta, 1), \qquad w^b = (1, \theta),$$

donde $\theta \geq 0$ es un parámetro exógeno. En este contexto, responda las siguientes preguntas:

(i) ¿Para que valores de θ la economía tiene al menos un equilibrio Walrasiano?

Cuando $\theta > 0$, los consumidores tienen funciones de utilidad continuas, estrictamente crecientes y estrictamente cóncavas. Por lo tanto, el Teorema de Existencia de Equilibrio visto en clases nos asegura que siempre existe un equilibrio Walrasiano. Alternativamente, cuando $\theta = 0$, el consumidor b concentra toda la oferta de la primera mercanía y no tiene ningún interés en demandar la segunda mercancía. Así, independiente de los precios, él siempre demandará su asignación inicial de recursos. Eso no es compatible con el comportamiento del consumidor a: como $U^a(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ y $w^a = (0,1)$, la condición de Inada nos asegura que él siempre demandará una cantidad positiva de la primera mercancía. Esto es, para todo vector de precios habrá exceso de demanda por la primera mercancía.

Concluimos que la economía tiene un equilibrio Walrasiano si y solamente si $\theta > 0$. $\square$

(ii) ¿Para que valores de θ la distribución de recursos $\big((\frac{1+\theta}{2}, \frac{1+\theta}{2}), (\frac{1+\theta}{2}, \frac{1+\theta}{2})\big)$ es Pareto eficiente?

Como las funciones de utilidad son derivables y $\alpha(\theta) := \frac{1+\theta}{2} > 0$, la "distribución equitativa de los recursos entre los individuos" será una política Pareto eficiente si y solamente si las tasas marginales de sustitución coinciden. Esto es,

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha(\theta)}}}{\frac{1}{2\sqrt{\alpha(\theta)}}} = \frac{\theta\frac{1}{2\sqrt{\alpha(\theta)}}}{\frac{1}{2\sqrt{\alpha(\theta)}}} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 1.$$

Concluimos que $\big((\frac{1+\theta}{2}, \frac{1+\theta}{2}), (\frac{1+\theta}{2}, \frac{1+\theta}{2})\big)$ es Pareto eficiente si y solamente si $\theta = 1$. $\square$

Pregunta 2

Considere una economía estática con producción en la cual hay dos mercancías, n consumidores y una firma. Suponga que la oferta inicial de mercancías es $(W_1, W_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$ y que el conjunto de posibilidades de producción de la firma es $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq 0,\ y_2 \leq f(-y_1)\}$, donde $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función cóncava y continua tal que $f(0) = 0$. En este contexto, demuestre que el conjunto $\big\{\big((x_1^i, x_2^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}, (y_1, y_2)\big) \in \mathbb{R}^{2n}_+ \times Y : \sum_{i=1}^n (x_1^i, x_2^i) \leq (W_1, W_2) + (y_1, y_2)\big\}$ es compacto.

Note que $Y = \mathbb{R}^2 \cap G^{-1}((-\infty, 0] \times (-\infty, 0])$, donde $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la función continua definida por $G(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - f(-y_1))$. Por lo tanto, Y es un conjunto cerrado. Además, la concavidad de f nos asegura que Y es convexo. Como $f(0) = 0$ e $y_1 \leq 0$ para todo $(y_1, y_2) \in Y$, $Y \cap \mathbb{R}^2_+ = \{(0,0)\}$ e $Y \cap (-Y) = \{(0,0)\}$. Esas propiedades nos permiten concluir que el conjunto de *asignaciones alcanzables* $A = \big\{\big((x_1^i, x_2^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}, (y_1, y_2)\big) \in \mathbb{R}^{2n}_+ \times Y : \sum_{i=1}^n (x_1^i, x_2^i) \leq (W_1, W_2) + (y_1, y_2)\big\}$ es acotado.

Por otro lado, como $A = (\mathbb{R}^{2n}_+ \times Y) \cap T^{-1}((-\infty, 0] \times (-\infty, 0])$, donde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la función continua

$$T\left((x_1^i, x_2^i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}, (y_1, y_2)\right) = \sum_{i=1}^{n}(x_1^i, x_2^i) - (W_1, W_2) - (y_1, y_2),$$

concluimos que A es cerrado. □

Pregunta 3

Considere una economía con dos periodos, denotados por $t \in \{0,1\}$. No hay incertidumbre en $t = 0$, mientras que en $t = 1$ hay $S \geq 2$ estados de la naturaleza que se pueden realizar. En el primer periodo hay mercados para la negociación de un bien perecedero x y un bien durable y. En el segundo periodo, independiente del estado de la naturaleza, hay un único bien disponible para consumo (el bien durable del primer periodo). Denotaremos por $(p_x, p_y) \geq 0$ los precios de las mercancías en el primer periodo y normalizaremos a uno el precio de la única mercancía disponible en cada estado de la naturaleza en el segundo periodo.

Existen n individuos caracterizados por funciones de utilidad $U^i : \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^S_+ \to \mathbb{R}_+$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, las cuales son continuas, estrictamente cóncavas y estrictamente crecientes. Además, las asignaciones iniciales de mercancías del individuo i son $(w_x^i, w_y^i, (w_s^i)_{s\in\{1,\ldots,S\}}) \gg 0$.

Para suavizar el consumo, los individuos pueden negociar un *activo colateralizado*, esto es, un contrato que sólo puede ser vendido si se constituye una garantía que proteja a los inversores en caso de no-pago de las promesas futuras. Más formalmente, existe un único activo en la economía, el cual se negocia en el primer periodo y paga promesas $(A_s)_{s\in\{1,\ldots S\}} \in \mathbb{R}^S_+$ en el segundo periodo. Estas promesas, que son contingentes al estado de la naturaleza que se realiza, están en unidades de la única mercancía disponible en cada estado. Si un individuo vende $\varphi \geq 0$ unidades del activo (esto es, se endeuda haciendo una promesa futura), el mercado lo obliga a incluir $C\varphi$ unidades del bien durable dentro de su consumo del primer periodo, donde $C > 0$ es un parámetro exógeno. Como el embargo de esta garantía es el único mecanismo de recuperación de crédito, luego de la realización de la incertidumbre, el deudor pagará el mínimo entre la promesa original $A_s\varphi$ y el valor del colateral $C\varphi$. Por otro lado, un inversor que compra $\theta \geq 0$ unidades del activo en el primer periodo, esperará recibir un pago igual a $\min\{A_s, C\}\theta$ en el estado s.

Si el precio del activo es $q \geq 0$, cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$ maximizará su función de utilidad U^i escogiendo consumos y portafolios que sean presupuestariamente factibles y cumplan con los requerimentos de colateral. Esto es, escogerá canastas de consumo y portafolios $(x_0^i, y_0^i, (y_s^i)_{s\in\{1,\ldots,S\}}, \theta^i, \varphi^i) \geq 0$ que cumplan la siguientes restricciones:

$$p_x x_0^i + p_y y_0^i + q(\theta^i - \varphi^i) \leq p_x w_x^i + p_y w_y^i, \qquad y_0^i \geq C\varphi^i,$$

$$y_s^i \leq w_s^i + y_0^i + \min\{A_s, C\}(\theta^i - \varphi^i).$$

Denotaremos por $B^i(p_x, p_y, q)$ al conjunto de canastas de consumo y portafolios que son presupuestariamente factibles para el individuo i a precios (p_x, p_y, q) y que cumplen con los requerimentos de colateral.

Un equilibrio competitivo vendrá dado por precios $(\overline{p}_x, \overline{p}_y, \overline{q})$, junto con consumos y posiciones financieras para cada individuo, $(\overline{x}_0^i, \overline{y}_0^i, (\overline{y}_s^i)_{s\in\{1,\ldots,S\}}, \overline{\theta}^i, \overline{\varphi}^i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, tales que:

- Para cada agente i, $(\overline{x}_0^i, \overline{y}_0^i, (\overline{y}_s^i)_{s\in\{1,\ldots,S\}}, \overline{\theta}^i, \overline{\varphi}^i)$ maximiza U^i en $B^i(\overline{p}_x, \overline{p}_y, \overline{q})$.
- La oferta se iguala a la demanda en los mercados de bienes y activos:

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}_0^i, \overline{y}_0^i, \overline{\theta}^i) = \sum_{i=1}^{n}(w_x^i, w_y^i, \overline{\varphi}^i).$$

(i) Demuestre que el siguiente conjunto es compacto:

$$A = \left\{ (x_0^i, y_0^i, \theta^i, \varphi^i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}_+^{4n} : \quad \sum_{i=1}^n (x_0^i, y_0^i, \theta^i) \leq \sum_{i=1}^n (w_x^i, w_y^i, \varphi^i), \quad y_0^i \geq C\varphi^i, \ \forall i \in \{1,\dots,n\} \right\}.$$

A es cerrado, pues coincide con $\mathbb{R}_+^{4n} \cap H^{-1}\left((-\infty, 0]^{3+n}\right)$, donde $H : \mathbb{R}_+^{4n} \to \mathbb{R}^{3+n}$ es la función continua

$$H\left((x_0^i, y_0^i, \theta^i, \varphi^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}\right) = \left(\sum_{i=1}^n (x_0^i - w_x^i), \sum_{i=1}^n (y_0^i - w_y^i), \sum_{i=1}^n (\theta^i - \varphi^i), (C\varphi^i - y_0^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}\right).$$

Sea $W_x = \sum_i w_x^i$ y $W_y = \sum_i w_y^i$. Por definición, sabemos que dado $(x_0^i, y_0^i, \theta^i, \varphi^i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in A$, las siguientes propiedades se cumplen para cada $i \in \{1,\dots,n\}$: $x_0^i \in [0, W_x]$, $y_0^i \in [0, W_y]$, $\varphi^i \in [0, W_y/C]$ y $\theta^i \in [0, (n-1)W_y/C]$. Note que la penúltima propiedad es consecuencia directa de la restricción de colateral, $y_0^i \geq C\varphi^i$, mientras que la última propiedad sigue del hecho que la inversión agregada es menor o igual que la deuda total. Por lo tanto, A es acotado. □

(ii) Utilice el resultado del ítem anterior para construir un juego generalizado cuyos equilibrios de Nash sean equilibrios competitivos de la economía con colateral.

No nos piden probar equilibrio. Solamente tenemos que definir un juego generalizado $\mathcal{G}$ cuyos equilibrios de Nash sean equilibrios de la economía. Obviamente, hay que explicar (brevemente) las razones que aseguran que $\mathcal{G}$ tiene equilibrios de Nash y que los equilibrios de Nash y que estos coinciden con los equilibrios competitivos de la economía con colateral.

Por el resultado del ítem previo, sabemos que existe $K \subseteq \mathbb{R}_+^{(4+S)n}$ compacto tal que el conjunto

$$\widehat{A} = \Big\{ (x_0^i, y_0^i, (y_s^i)_{s\in\{1,\dots,S\}}, \theta^i, \varphi^i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}_+^{(4+S)n} : \quad (x_0^i, y_0^i, \theta^i, \varphi^i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in A, \quad \sum_{i=1}^n y_s^i \leq \sum_{i=1}^n \left(w_s^i + y_0^i\right) \Big\}$$

está en el interior (relativo) de K. Sea $\Delta = \{(p_x, p_y, q) \in \mathbb{R}_+^3 : p_x + p_y + q = 1\}$.

Considere un juego generalizado $\mathcal{G}$ con $n+1$ jugadores, los cuales están caracterizados por:

- Cada $i \in \{1,\dots,n\}$ toma precios $(p_x, p_y, q) \in \Delta$ como dados y maximiza la función U^i en el conjunto $B^i(p_x, , p_y, q) \cap K$.
- Un jugador abstracto toma $(x_0^i, y_0^i, (y_s^i)_{s\in\{1,\dots,S\}}, \theta^i, \varphi^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ como dado y escoje $(p_x, p_y, q) \in \Delta$ para maximizar la función

$$p_x \sum_{i=1}^n (x_0^i - w_x^i) + p_y \sum_{i=1}^n (y_0^i - w_y^i) + q \sum_{i=1}^n (\theta^i - \varphi^i).$$

$\mathcal{G}$ siempre tendrá un equilibrio de Nash. Note que las asignaciones iniciales son interiores y todos los individuos tienen acceso a crédito. Así, es posible probar que las correspondencias de estrategias admisibles de todos los jugadores son continuas y tienen valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Como las funciones objetivo son continuas y cuasi-cóncavas en la propia estrategia, podemos aplicar el Teorema del Máximo de Berge para concluir que las correspondencias de estratégias óptimas son hemicontinuas superiores y tienen valores compactos, convexos y diferentes de vacío. A partir de eso podemos construir una correspondencia que asocia a cada vector de precios y posiciones individuales las reacciones óptimas de los diferentes individuos. Aplicando el Teorema del Punto Fijo de Kakutani a esa correspondencia, obtenemos un equilibrio de Nash para el juego generalizado $\mathcal{G}$.

Los equilibrios de $\mathcal{G}$ son equilibrios de la economía. A partir de un equilibrio de Nash de $\mathcal{G}$ podemos agregar las restricciones presupuestarias del primer periodo para obtener la función objetivo del jugador abstracto. Dado que ese jugador ha tomado una decisión óptima, aprendemos que no hay exceso de demanda. Esto es, las decisiones óptimas de los individuos están en el conjunto $\widehat{A}$, lo cual implica que estań en el interior (relativo) del conjunto compacto K. Luego, la monotonía estricta de las preferencias implica que los individuos se gastan todos sus recursos y que la oferta es igual a la demanda en todos los mercados. Además, la concavidad estricta de las funciones objetivo, junto con la interioridad de las decisiones individuales, nos permiten asegurar que las decisiones que los individuos tomaron en el juego seguirían siendo óptimas si ellos no hubiesen restringido sus alternativas factibles a aquellas que están en K. Así, todo equilibrio de Nash de $\mathcal{G}$ es un equilibrio competitivo de la economía con colateral. $\square$

Pregunta 4

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dos veces derivable que cumple las siguientes propiedades:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=+\infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} f(t)=-\infty, \qquad \left[f(x)=0 \implies f'(x)\neq 0\right].$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, sabemos que $A=\{x\in\mathbb{R}: f(x)=0\}$ es un conjunto diferente de vacío. Inspirándose en los resultados de unicidad local de equilibrio, demuestre que A es finito.

Las propiedades asintóticas de f nos aseguran que existe $\alpha>0$ tal que $A\subseteq[-\alpha,\alpha]$. Por lo tanto, A es acotado. Además, como f es continua y $A=f^{-1}(\{0\})$, sabemos que A es cerrado. Esto es, A es compacto.

Más aún, como $[f(x)=0 \implies f'(x)\neq 0]$, los elementos de A son localmente aislados. Para demostrar esta afirmación, fije $\overline{x}\in A$. Como f es dos veces derivable, para todo $x\in\mathbb{R}$ tenemos que $f(x)=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x-\overline{x})+e(x-\overline{x})$, donde la función que determina el error en la aproximación de primer orden, $e:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, es tal que $\lim_{h\to 0} e(h)/h=0$. Suponga, por contradicción, que existe una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n=\overline{x}$, con $x_n\neq\overline{x}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces, $0=f'(\overline{x})\frac{(x_n-\overline{x})}{|x_n-\overline{x}|}+\frac{e(x_n-\overline{x})}{|x_n-\overline{x}|}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como $\frac{(x_n-\overline{x})}{|x_n-\overline{x}|}\in\{-1,1\}$, salvo subsecuencia, podemos tomar el límite y obtener $f'(\overline{x})=0$, una contradición.

Por lo tanto, A es compacto y sus puntos son aislados. Esto es suficiente para asegurar que A es finito. Efectivamente, suponga por contradicción que existe una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ cuyos términos son todos diferentes. Entonces, la compacidad de A nos asegura que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsecuencia convergente a un punto $\overline{x}\in A$. En particular, para todo $\epsilon>0$ existe $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n-\overline{x}|<\epsilon$ para todo $n\geq n_\epsilon$. Esto es, $\overline{x}$ no es un punto aislado. Una contradicción. $\square$

Pregunta 5

Considere una economía con n individuos los cuales tienen preferencias completas, transitivas y estrictas por las alternativas sociales en un conjunto finito A. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los posibles perfiles de preferencias $P=(\succ_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, donde $\succ_i$ denota las preferencias del individuo i por las alternativas en A.

Sea $f:\mathcal{P}\to A$ una regla de elección social tal que, para todo $P\in\mathcal{P}$, la alternativa social $f(P)$ es Pareto eficiente en la sociedad $P=(\succ_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$. Esto es, si $f(P)=a$ entonces no existe $b\in A$ tal que $b\succ_i a$ para todo $i\in\{1,\dots,n\}$. Demuestre o dé un contraejemplo: f es Condorcet monótona.

La monotonía Condorcet será válida si dados dos perfiles de preferencias $P,P'\in\mathcal{P}$ que coinciden sobre un par de alternativas sociales $\{a_i,a_j\}$, las cuales son top bajo P', tenemos que $f(P)=a_i$ implica que $f(P')=a_i$. En nuestro contexto, $f(P)=a_i$ significa que no existe otra alternativa $b\in A$ que todos consideran mejor que a_i cuando las preferencias son determinadas por P. Evidentemente, si en P' yo mantengo el ranking relativo que cada individuo daba a las alternativas $\{a_i,a_j\}$, pero las posiciono en los dos primeros lugares del ranking de cada individuo, entonces sigue sin existir una alternativa que todos consideren mejor que a_i. Esto es, a_i sigue cumpliendo la propiedad que debe cumplir la alternativa $f(P')$. El punto clave es que a_j tambien puede cumplir esa propiedad!!! Y esto abre espacio para que f no sea Condorcet monótona. Esto es, hay que ir por un contraejemplo.

Suponga que $n = 3$ y $A = \{a, b, c\}$. Sea f una regla de elección social que cumple las condiciones del enunciado y es tal que, para los perfiles de preferencias

$$P = (c \succ_1 a \succ_1 b,\ a \succ_2 b \succ_2 c,\ b \succ_3 a \succ_3 c), \qquad P' = (a \succ_1 b \succ_1 c,\ a \succ_2 b \succ_2 c,\ b \succ_3 a \succ_3 c)$$

cumple $f(P) = a$ y $f(P') = b$. Entonces, f no es Condorcet Monótona. Efectivamente, $f(P') \neq a$ a pesar de que P y P' coinciden sobre las alternativas $\{a, b\}$, las cuales son top bajo P'. $\square$