# PAUTA SOLEMNE I - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2024

**[1]** Considere una economía de intercambio estática con dos mercancías perfectamente divisibles, dos consumidores y una firma. Los consumidores son caracterizados por las siguientes funciones de utilidad y asignaciones iniciales:

$$u^1(x,y) = \sqrt{xy}, \qquad w^1 = (1,0);$$
$$u^2(x,y) = \min\{x,y\}, \qquad w^2 = (1,0).$$

La firma es propiedad del individuo $h = 1$ y es caracterizada por el conjunto de posibilidades de producción $Y = \left\{(-x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \leq \kappa x\right\}$, donde $\kappa > 1$ es un parámetro. Justificando detalladamente sus argumentos, encuentre los equilibrios competitivos de esta economía.

Note que, independiente de los precios, siempre habrá demanda por ambas mercancías, pues $u^1$ cumple la condición de Inada. Como las asignaciones iniciales no incluyen cantidades positivas de $y$, concluimos que la firma operará en equilibrio. Por lo tanto, la descripción de $Y$ nos asegura que $\kappa p_y - p_x = 0$. Además, la homogeneidad de grado cero de las restricciones presupuestarias y de la función de beneficios de la firma nos permite asumir que $p_x = 1$. Concluimos que los precios de equilibrio vienen dados por $(\overline{p}_x, \overline{p}_y) = (1, 1/\kappa)$. Dado que el consumidor 1 tiene utilidades Coob-Douglas, su demanda Marshalliana a precios $(\overline{p}_x, \overline{p}_y)$ viene dada por

$$(\overline{x}^1, \overline{y}^1) = \left(\frac{1}{2}\frac{\overline{p}\cdot w^1}{\overline{p}_x}, \frac{1}{2}\frac{\overline{p}\cdot w^1}{\overline{p}_y}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{\overline{p}_x}{\overline{p}_x}, \frac{1}{2}\frac{\overline{p}_x}{\overline{p}_y}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\kappa}{2}\right).$$

Ahora, como los precios son estrictamente positivos y el consumidor 2 tiene una función de utilidad Leontief, su demanda Marshalliana debe cumplir $\overline{x}^2 = \overline{y}^2$. Luego, sigue de la restricción presupuestaria que

$$\overline{x}^2 = \overline{y}^2 = \frac{\overline{p}\cdot w^2}{\overline{p}_x + \overline{p}_y} = \frac{\kappa}{1+\kappa}.$$

Concluimos que la demanda agregada viene dada por

$$\overline{x}^1 + \overline{x}^2 = \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{1+\kappa}, \qquad \overline{y}^1 + \overline{y}^2 = \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{1+\kappa}.$$

Por lo tanto, la firma utiliza

$$\overline{x}_f = (w_x^1 + w_x^2) - (\overline{x}^1 + \overline{x}^2) = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{1+\kappa}\right)$$

unidades de la primera mercancía para producir

$$\overline{y}_f = \kappa\left(2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{1+\kappa}\right)\right) = \frac{\kappa}{2} + \kappa\left(1 - \frac{\kappa}{1+\kappa}\right) = \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{1+\kappa}$$

unidades de la segunda mercancía. □

**[2]** Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio estática con $m \geq 2$ mercancías perfectamente divisibles y $n \geq 100$ consumidores. Cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$ es caracterizado por una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ continua, fuertemente cuasi-cóncava y sin máximos locales en $\mathbb{R}^m_+$, junto con una asignación inicial $w^i \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $w^i \neq (0, \ldots, 0)$. Además, asuma que $w^1 \in \mathbb{R}^m_{++}$.

(i) Demuestre o dé un contraejemplo: *la economía $\mathcal{E}$ tiene al menos un equilibrio competitivo.*

La afirmación es falsa. Por ejemplo, asumiendo que $m = 2$ y $n = 100$, suponga que $u^1(x,y) = x$, $w^1 = (1,1)$, $u^i(x,y) = \sqrt{xy}$ y $w^i = (0,1)$ para todo $i \in \{2, \ldots, 100\}$. Note que, aunque esta economía cumple con los supuestos del enunciado, nunca tiene equilibrio. Efectivamente, como la función $\sqrt{xy}$ es estrictamente creciente, los precios de equilibrio deberían ser estrictamente positivos. Luego, como el consumidor 1 solo se interesa por el consumo de la primera mercancía, siempre utilizará su renta monetaria para demandar más de una unidad de $x$, lo cual es incompatible con la oferta de mercado. $\square$

(ii) Dado $\epsilon > 0$, demuestre que $\mathcal{E}$ siempre tiene un *Equilibrio Walrasiano con Transferencias* en el cual la suma de los valores absolutos de las transferencias es menor o igual a $\epsilon$.

Dado $\alpha \in (0,1)$, sea $\mathcal{E}_\alpha$ la economía que se obtiene a partir de $\mathcal{E}$ al cambiar las asignaciones iniciales para $(\tilde{w}^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, donde $\tilde{w}^1 = w^1 - \alpha w^1$ y $\tilde{w}^i = w^i + \alpha w^1/(n-1)$ para cada $i \neq 1$. Como $w^1 \gg 0$, en la economía $\mathcal{E}_\alpha$ todos los consumidores tienen asignaciones iniciales interiores. Por lo tanto, sigue de las hipótesis sobre $(u^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ que $\mathcal{E}_\alpha$ tiene al menos un equilibrio Walrasiano, el cual denotaremos por $[\overline{p}, (\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n)]$. Como podemos asumir que $\overline{p} = (\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_m)$ cumple $\overline{p}_1 + \ldots + \overline{p}_m = 1$, si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos $\tau^i = \overline{p}\cdot\tilde{w}^i - \overline{p}\cdot w^i$, entonces $[\overline{p}, (\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n), (\tau^1, \dots, \tau^n)]$ es un equilibrio Walrasiano con transferencias (EWT) para la economía $\mathcal{E}$, pues para cada $i$ la canasta $\overline{x}^i$ maximiza $u^i$ en el conjunto $\{x^i \in \mathbb{R}^m_+ : \overline{p}\cdot x^i \leq \overline{p}\cdot w^i + \tau^i\}$ y se cumple que $\sum_{i=1}^n \tau^i = 0$. Note que

$$\sum_{i=1}^{n} |\tau^i| = \alpha\overline{p}\cdot w^1 + \frac{\alpha}{n-1}\sum_{i\neq 1}\overline{p}\cdot w^1 = 2\alpha\overline{p}\cdot w^1 \leq 2\alpha \max_{k\in\{1,\dots,m\}} w^1_k.$$

Por lo tanto, si escogemos $\alpha$ de tal forma que

$$0 < \alpha \leq \frac{\epsilon}{2\displaystyle\max_{k\in\{1,\dots,m\}} w^1_k},$$

entonces $\sum_{i=1}^n |\tau^i| \leq \epsilon$. Esto implica que $[\overline{p}, (\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n), (\tau^1, \dots, \tau^n)]$ es un EWT de $\mathcal{E}$ en el cual la suma de los valores absolutos de las transferencias es menor o igual a $\epsilon$. $\square$

**[3]** Considere una economía en la cual se cumplen las siguientes propiedades:

- Hay dos periodos $t \in \{0,1\}$. No hay incertidumbre en $t = 0$ y existen dos estados de la naturaleza que se pueden realizar en $t = 1$, los cuales denotaremos por $u$ y $d$.
- En $t = 0$ y en cada estado $s \in \{u,d\}$ hay solo una mercancía disponible para intercambio.
- Existen dos individuos, $a$ y $b$, los cuales son caracterizados por:
  - Funciones de utilidad $U^a, U^b : \mathbb{R}^3_{++} \to \mathbb{R}$ tales que

    $$U^a(x_0, x_u, x_d) = \ln(x_0) + \beta(\gamma\ln(x_u) + (1-\gamma)\ln(x_d)),$$

    $$U^b(x_0, x_u, x_d) = \ln(x_0) + \beta((1-\gamma)\ln(x_u) + \gamma\ln(x_d)),$$

    donde $\beta$ y $\gamma$ son parámetros que están en $(0,1)$.
  - Asignaciones iniciales $w^a = w^b = (2,2,2)$.

Justificando detalladamente sus argumentos, encuentre precios de equilibrio para las mercancías y los activos en los siguientes escenarios:

(i) Hay dos activos, $j_1$ y $j_2$. Cada activo $j$ está disponible para negociación en $t = 0$ y promete pagar en el estado $s \in \{u,d\}$ el equivalente al valor de mercado de $A_{s,j}$ unidades de la mercancía disponible para consumo, donde $(A_{u,j_1}, A_{d,j_1}) = (1,0)$ y $(A_{u,j_2}, A_{d,j_2}) = (1,1)$.

Buscamos precios $(\overline{p}_0, \overline{p}_u, \overline{p}_d, \overline{q}_{j_1}, \overline{q}_{j_2})$ para las mercancías y los activos. Como los activos son reales y en cada estado de la naturaleza hay una única mercancía, la homogeneidad de grado cero de las restricciones presupuestarias nos asegura que podemos asumir que $\overline{p}_u = \overline{p}_d = 1$. Además, como los mercados son completos, si $(\widehat{p}_0, \widehat{p}_u, \widehat{p}_d)$ son precios de equilibrio en <u>mercados contingentes</u>, entonces podemos asumir que

$$\overline{p}_0 = \widehat{p}_0, \qquad \overline{q}_{j_1} = \widehat{p}_u A_{u,j_1} + \widehat{p}_d A_{d,j_1} = \widehat{p}_u, \qquad \overline{q}_{j_2} = \widehat{p}_u A_{u,j_2} + \widehat{p}_d A_{d,j_2} = \widehat{p}_u + \widehat{p}_d,$$

donde las últimas dos identidades siguen de la ausencia de oportunidades de arbitraje en equilibrio.

Por lo tanto, debemos encontrar precios de equilibrio para la economía en la cual se negocian todos los contratos contingentes para consumo inmediato o futuro de las mercancías. Se trata de una economía estática con tres mercancías y dos consumidores caracterizados por

$$U^a(x_0,x_u,x_d)=\ln(x_0)+\beta\gamma\ln(x_u)+\beta(1-\gamma)\ln(x_d), \qquad w^a=(2,2,2),$$
$$U^b(x_0,x_u,x_d)=\ln(x_0)+\beta(1-\gamma)\ln(x_u)+\beta\gamma\ln(x_d), \qquad w^b=(2,2,2).$$

Como las funciones de utilidad son Coob-Douglas, las demandas Marshallianas a precios $\widehat{p}=(\widehat{p}_0,\widehat{p}_u,\widehat{p}_d)$ tales que $\widehat{p}_0+\widehat{p}_u+\widehat{p}_d=1$ quedan caracterizadas por:

$$(\overline{x}_0^a,\overline{x}_u^a,\overline{x}_d^a)=\left(\frac{1}{1+\beta}\frac{\widehat{p}\cdot w^a}{\widehat{p}_0},\frac{\beta\gamma}{1+\beta}\frac{\widehat{p}\cdot w^a}{\widehat{p}_u},\frac{\beta(1-\gamma)}{1+\beta}\frac{\widehat{p}\cdot w^a}{\widehat{p}_d}\right)=\left(\frac{2}{(1+\beta)\widehat{p}_0},\frac{2\beta\gamma}{(1+\beta)\widehat{p}_u},\frac{2\beta(1-\gamma)}{(1+\beta)\widehat{p}_d}\right),$$
$$(\overline{x}_0^b,\overline{x}_u^b,\overline{x}_d^b)=\left(\frac{1}{1+\beta}\frac{\widehat{p}\cdot w^b}{\widehat{p}_0},\frac{\beta(1-\gamma)}{1+\beta}\frac{\widehat{p}\cdot w^b}{\widehat{p}_u},\frac{\beta\gamma}{1+\beta}\frac{\widehat{p}\cdot w^b}{\widehat{p}_d}\right)=\left(\frac{2}{(1+\beta)\widehat{p}_0},\frac{2\beta(1-\gamma)}{(1+\beta)\widehat{p}_u},\frac{2\beta\gamma}{(1+\beta)\widehat{p}_d}\right).$$

Igualando la oferta a la demanda obtenemos que

$$\widehat{p}_0=\frac{1}{1+\beta}, \qquad \widehat{p}_u=\frac{\beta}{2(1+\beta)}, \qquad \widehat{p}_d=1-(\widehat{p}_0+\widehat{p}_u)=\frac{\beta}{2(1+\beta)}.$$

Concluimos que los precios de equilibrio para las mercancías y los activos vienen dados por:

$$(\overline{p}_0,\overline{p}_u,\overline{p}_d,\overline{q}_{j_1},\overline{q}_{j_2})=\left(\frac{1}{1+\beta},\,1,\,1,\,\frac{\beta}{2(1+\beta)},\,\frac{\beta}{(1+\beta)}\right).$$

□

(ii) Hay un único activo disponible en $t=0$, el cual promete pagar en el estado $s\in\{u,d\}$ el equivalente al valor de mercado de $A_s$ unidades de la mercancía disponible para consumo, donde $(A_u,A_d)=(1,0)$.

Buscamos precios $(\overline{p}_0,\overline{p}_u,\overline{p}_d,\overline{q})$ para las mercancías y el activo real. Como en cada estado de la naturaleza hay una única mercancía, la homogeneidad de grado cero de las restricciones presupuestarias nos asegura que podemos asumir que $\overline{p}_u=\overline{p}_d=1$. Además, como no hay forma de transfererir recursos desde/hacia $s=d$, podemos separarlo de lo que ocurre en el resto de la economía. Note que la economía sin incertidumbre inducida (en la cual siempre se realiza el estado $s=u$ en el segundo periodo), tiene mercados completos. Por lo tanto, si $(\widehat{p}_0,\widehat{p}_u)$ son precios de equilibrio en mercados contingentes, entonces podemos asumir que

$$\overline{p}_0=\widehat{p}_0, \qquad \overline{q}=\widehat{p}_uA_u=\widehat{p}_u,$$

donde la última identidad sigue de la ausencia de oportunidades de arbitraje en equilibrio. Por lo tanto, debemos encontrar precios de equilibrio para la economía estática con dos mercancías y dos consumidores caracterizados por

$$\widehat{U}^a(x_0,x_u)=\ln(x_0)+\beta\gamma\ln(x_u), \qquad \widehat{w}^a=(2,2),$$
$$\widehat{U}^b(x_0,x_u)=\ln(x_0)+\beta(1-\gamma)\ln(x_u), \qquad \widehat{w}^b=(2,2).$$

Como las funciones de utilidad son Coob-Douglas, las demandas Marshallianas a precios $\widehat{p}=(\widehat{p}_0,\widehat{p}_u)$ tales que $\widehat{p}_0+\widehat{p}_u=1$ quedan caracterizadas por:

$$(\overline{x}_0^a,\overline{x}_u^a)=\left(\frac{1}{1+\beta\gamma}\frac{\widehat{p}\cdot\widehat{w}^a}{\widehat{p}_0},\frac{\beta\gamma}{1+\beta\gamma}\frac{\widehat{p}\cdot\widehat{w}^a}{\widehat{p}_u}\right)=\left(\frac{2}{(1+\beta\gamma)\widehat{p}_0},\frac{2\beta\gamma}{(1+\beta\gamma)\widehat{p}_u}\right),$$
$$(\overline{x}_0^b,\overline{x}_u^b)=\left(\frac{1}{1+\beta(1-\gamma)}\frac{\widehat{p}\cdot\widehat{w}^b}{\widehat{p}_0},\frac{\beta(1-\gamma)}{1+\beta(1-\gamma)}\frac{\widehat{p}\cdot\widehat{w}^b}{\widehat{p}_u}\right)=\left(\frac{2}{(1+\beta(1-\gamma))\widehat{p}_0},\frac{2\beta(1-\gamma)}{(1+\beta(1-\gamma))\widehat{p}_u}\right).$$

Igualando la oferta a la demanda obtenemos que

$$\widehat{p}_0=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\beta\gamma}+\frac{1}{1+\beta(1-\gamma)}\right), \qquad \widehat{p}_u=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta\gamma}{1+\beta\gamma}+\frac{\beta(1-\gamma)}{1+\beta(1-\gamma)}\right).$$

Concluimos que los precios de equilibrio para las mercancías y parsa el activo vienen dados por:

$$(\overline{p}_0,\overline{p}_u,\overline{p}_d,\overline{q})=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\beta\gamma}+\frac{1}{1+\beta(1-\gamma)}\right),\,1,\,1,\,\frac{1}{2}\left(\frac{\beta\gamma}{1+\beta\gamma}+\frac{\beta(1-\gamma)}{1+\beta(1-\gamma)}\right)\right).$$

□