GUÍA 1

María Jesús Negrete S. (19.562.341-4)
Emiliano Quinteros H. (20.286.206-3)

PREGUNTA 1

Sean preferencias que cumplen que:

(a) Completitud: $x \precsim y \vee x \succsim y$, $\forall x, y$

(b) Transitividad: $x \precsim y \wedge y \precsim z \Rightarrow x \precsim z$

(c) Reflexividad: $x = y \Rightarrow x \sim y$

(d) Monotonicidad: $x \gg y \Rightarrow x \succ y$

Por el cumplimiento de estos y dado que las preferencias son continuas, entonces sí que,

$$\exists\, u(x) \mid x \precsim y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$$

Ahora, una preferencia será homotética si

$$x \sim y \Rightarrow \lambda x \sim \lambda y \quad , \forall \lambda \geq 0$$

y que una función sea homogenea de grado 1,

$$\lambda u(x) = u(\lambda x)$$

Siguiendo con el desarrollo del texto Microeconomic Theory de Andreu Mas-Colell, vamos a demostrar que si la preferencia admite una función de utilidad homogenea de grado 1, ello será condición suficiente para que las preferencias sean homotéticas:

$$x \sim y$$
$$u(x) = u(y) \quad / \lambda$$
$$\lambda u(x) = \lambda u(y)$$

* por homogeneidad

$$u(\lambda x) = u(\lambda y)$$
$$\lambda x \sim \lambda y$$

$$\therefore x \sim y \Leftrightarrow \lambda x \sim \lambda y$$

Ahora comprobamos que si las preferencias son homotéticas ello será condición suficiente para admitir una representación funcional homogenea de grado 1.

Partimos definiendo un vector de unos, $e \in \mathbb{R}^L_+$, tal que αe será una canasta de consumo, donde el consumo de cada bien i será α, y esta canasta será indiferente de la canasta x.

Sabemos por continuidad y completitud que α será único, tal que $\alpha e \in \mathbb{R}^L_{++}$, $\alpha e \sim x$. Por eso, estas preferencias admiten una representación $u(x) \equiv \alpha$.

Partimos de la indiferencia entre canastas y desarrollamos,

$$\alpha e \sim x$$
$$\lambda \alpha e \sim \lambda x \rightarrow \text{Homoteticidad}$$
$$u(\lambda \alpha e) = u(\lambda x)$$
$$u(\lambda x) = \lambda \alpha$$
$$u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Así hemos comprobado que una preferencia será homotética si y solo si admite una función de utilidad homogénea de grado 1.

PREGUNTA 2

El problema de optimización será,

$$(P) \begin{cases} \text{Máx } u(x) \\ \text{s.a. } p \cdot x \leq w \\ \qquad x \in \mathbb{R}^L_+ \end{cases}$$

Ahora, notemos que $x \in \mathbb{R}^L_+ \equiv x_i \geq 0 \;\forall i$.

Por otro lado, planteamos el Lagrangeano del problema:

$$\mathcal{L}: u(x) + \lambda(w - p \cdot x) + \mu(x)$$

Planteamos la Condición de Primer Orden respecto x, ello de manera vectorial,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{L}: \quad \nabla_x u(x^*) - \lambda p + \mu = 0$$

Por enunciado, sabemos que los multiplicadores de Lagrange serán positivos.

Por tanto, $\nabla_x u(x^*) - \lambda p + \mu = 0$

$$\nabla_x u(x^*) - \lambda p = -\mu$$

$$\nabla_x u(x^*) - \lambda p = -\mu \leq 0 \quad / \mu \geq 0 \Rightarrow -\mu \leq 0$$

$$\therefore \nabla_x u(x^*) - \lambda p \leq 0$$

Así encontramos la primera condición del problema de Maximización.

[Notemos que,

$$\nabla_x u(x^*) - \lambda p \leq 0 \equiv \nabla_x u(x^*) \leq \lambda p$$
]

Ahora, para encontrar la segunda condición planteamos las restricciones del problema (de (a) hasta (d)) y del enunciado (de (e) a (f)).

(a) $\lambda, \mu \geq 0$
(b) $\nabla u(x^*) - \lambda p + \mu = 0$
(c) $\lambda(w - p \cdot x^*) = 0$
(d) $\mu \cdot x^* = 0$
(e) $p \cdot x^* \leq w$
(f) $x \geq 0$

Condiciones de Optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker

Sea que, x^* es la solución al problema de Optimización,

por condición (f) $x^* \geq 0$, tendremos dos soluciones potenciales.

I) Solución 1: $x^* > 0$

Si $x^* > 0$, entonces, por (d) sabemos que $\mu = 0$
Reemplazando en (b),

$$\nabla u(x^*) - \lambda p = 0$$

De (c) sabemos que $\lambda p = \lambda w / x^*$, reemplazamos,

$$\nabla u(x^*) - \lambda p = 0$$

$$\nabla u(x^*) - \frac{\lambda w}{x^*} = 0$$

$$x^* \nabla u(x^*) = \lambda w \iff w = \frac{x^* \nabla u(x^*)}{\lambda}$$

Ahora, de (e) sabemos que,

$$px \leq w$$

Reemplazamos w,

$$p \cdot x^* \leq \frac{x^* \cdot \nabla u(x^*)}{\lambda}$$

$$\lambda p x^* - x^* \nabla u(x^*) \leq 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x^* \nabla u(x^*) - \lambda p x^* \geq 0$$

$$x^* [\nabla u(x^*) - \lambda p] \geq 0$$

Ahora, de (b) y $x^* > 0$, sé que,

$$\nabla u(x^*) - \lambda p = 0$$

Por cuanto,

$$x^* [\nabla u(x^*) - \lambda p] \geq 0$$

$$x^* [0] = 0$$

$\therefore \quad x^* [\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0 \rightarrow$ condición buscada

II) Solución 2: $x^* = 0$

Si $x^* = 0$, de (c) notamos que

$$\lambda (w - p x^*) = 0$$

$$\lambda (w - 0) = 0$$

$$\lambda w = 0$$

Ello equivale a decir que $\lambda = 0$ ó $w = 0$. Revisamos ambos casos,

- $\lambda = 0$

Sabiendo que $\nabla u(x^*) - \lambda p + \mu = 0$, de (b), entonces, por $\lambda = 0$,

$$\nabla u(x^*) - 0 \cdot p + \mu = 0$$

$$\nabla u(x^*) = -\mu \iff \nabla u(x^*) + \mu = 0$$

Por (a) sabemos que $\mu \geq 0$, por tanto,

$$-\mu \leq 0$$

5.

Por lo tanto,

$$\nabla u(x^*) - \lambda p = -\mu \quad \wedge \quad -\mu \leq 0$$

$$\nabla u(x^*) - \lambda p = -\mu \leq 0$$

$$\nabla u(x^*) - \lambda p \leq 0$$

$$\underbrace{\nabla u(x^*) \leq \lambda p}_{\text{condición buscada}}$$

- $w = 0$

Sabiendo (a) y (b), de forma análoga a cuando $\lambda = 0$, llegamos a que,

$$\underbrace{\nabla u(x^*) \leq \lambda p}_{\text{condición buscada}}$$

Así, para cuando $x^* = 0$ hemos mostrado que podemos derivar que,

$$\nabla u(x^*) \leq \lambda p$$

Pero notemos que, si $\nabla u(x^*) \leq \lambda p$, y que $x^* = 0$,

$$\left.\underbrace{x^*}_{=0}[\underbrace{\nabla u(x^*) - \lambda p}_{\leq 0}] = 0 \right\} \text{condición buscada}$$

$$0[\nabla u(x^* = 0) - \lambda p] = 0$$

$$0 = 0$$

Por cuanto, si $x^* = 0$ se cumplirá que

$$x^*[\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0$$

Independiente de si $\nabla u(x^*) = \lambda p$, o $\nabla u(x^*) < \lambda p$.

6.

Por otro lado, para la Solución I: $x^* > 0$, por (a) sabemos que $\mu \geq 0$, por cuanto $-\mu \leq 0$.

Desarrollando (b),

$$\nabla u(x^*) - \lambda p + \mu = 0$$

$$\nabla u(x^*) - \lambda p = -\mu \leq 0$$

$$\nabla u(x^*) - \lambda p \leq 0$$

$$\underbrace{\nabla u(x^*) \leq \lambda p}_{\text{condición Buscada}}$$

Así podemos concluir que, independiente del valor que tome x^* ya sea $x^* > 0$ o $x^* = 0$, entonces se cumplió que,

$$\nabla u(x^*) \leq \lambda p$$

$$x^* [\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0$$

7 PREGUNTA 3

[a] Sea $\rho = 1$, $\rho \to 0$, $\rho \to -\infty$

y sabiendo que, $u(x_1, x_2) = [x_1^\rho + x_2^\rho]^{1/\rho}$

Caso 1: $\rho = 1$

$$u(x_1, x_2) = [x_1^\rho + x_2^\rho]^{1/\rho} \quad / \rho = 1$$
$$= [x_1^1 + x_2^1]^{1/1}$$

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Así si $\rho = 1$ entonces la función de utilidad será lineal.

Caso 2: $\rho \to 0$

Sabemos que podemos aplicar una transformación monotónica creciente sin cambiar el orden de las preferencias:

$$u(\cdot) = [x_1^\rho + x_2^\rho]^{1/\rho} \quad / \ln()$$
$$\ln(u) = (1/\rho)\ln(x_1^\rho + x_2^\rho)$$

Aplicamos límite,

$$\lim_{\rho \to 0} \ln(u) = \lim_{\rho \to 0}\left[\frac{\ln(x_1^\rho + x_2^\rho)}{\rho}\right]$$

aplicamos L'Hopital,

$$= \lim_{\rho \to 0}\left[\frac{(\ln(x_1^\rho + x_2^\rho))'}{\rho'}\right]$$

Propiedad usada:

$\boxed{\partial/\partial x \, a^x = a^x \ln(a)}$

$$\hookrightarrow (\ln(x_1^\rho + x_2^\rho))' =$$
$$\left(\frac{1}{x_1^\rho + x_2^\rho}\right) \cdot (x_1^\rho + x_2^\rho)'$$
$$= \left(\frac{1}{x_1^\rho + x_2^\rho}\right) \cdot (x_1^\rho \ln(x_1) + x_2^\rho \ln(x_2))$$

$$\hookrightarrow \rho' = 1$$

aplicamos las derivadas en el límite,

$$\lim_{\rho \to 0} \ln(u) = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{\ln(x_1^{\rho} + x_2^{\rho})}{\rho} \right]$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{\left(\frac{x_1^{\rho} \ln(x_1) + x_2^{\rho} \ln(x_2)}{x_1^{\rho} + x_2^{\rho}} \right)}{1} \right]$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{x_1^{\rho} \ln(x_1) + x_2^{\rho} \ln(x_2)}{x_1^{\rho} + x_2^{\rho}} \right]$$

$$= \frac{\cancel{x_1^{0}}^{1} \ln(x_1) + \cancel{x_2^{0}}^{1} \ln(x_2)}{\cancel{x_1^{0}}^{1} + \cancel{x_2^{0}}^{1}}$$

$$\ln(u) = \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2)}{2}$$

aplicamos euler,

$$e^{\ln(u)} = e^{\left(\frac{\ln(x_1) + \ln(x_2)}{2}\right)}$$

$$(*) \qquad u(x_1, x_2) = e^{\left(\frac{\ln(x_1) + \ln(x_2)}{1+1}\right)}$$

$$= x_1^{1} \cdot x_2^{1}$$

$$u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

Así hemos obtenido una función de utilidad parecida a una Cobb-Douglas, cuando $\alpha = \beta = 1$. En (*) aplicamos la siguiente propiedad,

$$e^{(\alpha_1 + \alpha_2)(\ln(x_1) + \ln(x_2))} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}$$

Caso $\rho \to \infty$

Aplicamos euler elevado a logaritmo natural,

$$u(x_1, x_2) = [x_1^\rho + x_2^\rho]^{1/\rho} \quad / e^{\ln(\cdot)}$$

$$e^{\ln(u(x_1,x_2))} = e^{\ln(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}}$$

$$u(x_1, x_2) = e^{1/\rho \ln(x_1^\rho + x_2^\rho)}$$

Aplicamos límite,

$$\lim_{\rho \to -\infty} u(x_1, x_2) = \lim_{\rho \to \infty} \left[e^{(1/\rho) \ln(x_1^\rho + x_2^\rho)} \right]$$

Transformamos el límite tal que $\rho \to \infty$,

$$\lim_{\rho \to -\infty} u(x_1, x_2) = \lim_{\rho \to \infty} \left[e^{-(1/\rho) \ln(1/x_1^\rho + 1/x_2^\rho)} \right]$$

Dado que euler será una transformación continua, entonces genéricamente se tendrá que,

$$\lim e^x = e^{\lim x}$$

por tanto,

$$\lim_{\rho \to -\infty} u(x_1, x_2) = e^{\lim_{\rho \to \infty} [(-1/\rho) \ln(1/x_1^\rho + 1/x_2^\rho)]}$$

$$= e^{[(-1/\infty) \ln(1/x_1^\infty + 1/x_2^\infty)]}$$

$$= e^0$$

$$u(x_1, x_2) = 1$$

Así, bajo esta especificación, la utilidad será constante e igual a 1.

10

b

Resolvemos el Problema de Maximización.

$$\text{Máx } (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$
$$\text{s.a. } x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq w$$
$$x \in \mathbb{R}^2_+$$

Dado que la función de utilidad es fuertemente monótona, entonces será localmente no saciada. Esto hace que se cumpla la ley de Walras, por tanto,

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$$

Por tanto,

$$\text{Máx } (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$
$$\text{s.a. } x_1 p_1 + x_2 p_2 = w$$
$$x \in \mathbb{R}^2_+$$

El Lagrangiano,

$$\mathcal{L}: (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} - \lambda(x_1 p_1 + x_2 p_2 - w)$$

Las Condición de Primer Orden,

$$CPO(x_1) \rightarrow \cancel{(1/\rho)}(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho - 1} \cancel{(\rho)}(x_1^{\rho-1}) - \lambda p_1 = 0$$
$$CPO(x_2) \rightarrow \cancel{(1/\rho)}(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho - 1} \cancel{(\rho)}(x_2^{\rho-1}) - \lambda p_2 = 0$$
$$CPO(\lambda) \rightarrow (-1)(x_1 p_1 + x_2 p_2 - w) = 0$$

Buscamos eliminar los λ,

$$(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho - 1}(x_1^{\rho-1}) = \lambda p_1$$
$$(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho - 1}(x_2^{\rho-1}) = \lambda p_2$$

igualamos,

$$\frac{\cancel{(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho - 1}}(x_1^{\rho-1})}{p_1} = \frac{\cancel{(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho - 1}}(x_2^{\rho-1})}{p_2}$$

$$\left.\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1} = \frac{p_1}{p_2}\ \right\}\ TMgS_{x_2,x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

11 Despejamos x_1 de la igualdad anterior.

$$x_1 = (P_1/P_2)^{1/\rho-1}\, x_2$$

Reemplazamos en restricción presupuestaria,

$$x_1 = \frac{w - x_2 P_2}{P_1}$$

$$x_2 = \frac{w - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x_1 \cdot P_2}{P_1}$$

$$x_2^* + \frac{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} P_2}{P_1}\, x_2^* = \frac{w}{P_1}$$

$$x_2^* + \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(\frac{P_2}{P_1}\right) x_2^* = \frac{w}{P_1}$$

$$x_2^* \left(1 + \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right) = \frac{w}{P_1}$$

$$x_2^* = \frac{\frac{w}{P_1}}{\left(1 + \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)} = \frac{w}{P_1 + P_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

$$x_2^* = \frac{w}{P_1 + P_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \cdot \left(\frac{P_1}{P_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right)} \qquad \frac{P_1}{P_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}} = P_1^{\frac{-1}{\rho-1}}$$

$$x_2^* = \frac{w}{P_1 + \left(\frac{1}{P_1^{1/\rho-1}}\right) P_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

$$x_2^* = \frac{w}{\frac{P_1 \cdot P_1^{\frac{1}{\rho-1}} + P_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{P_1^{1/\rho-1}}} = \frac{w \cdot P_1^{1/\rho-1}}{P_1^{\rho/\rho-1} + P_2^{\rho/\rho-1}}$$

Las expresiones para las demandas marshallianas serán,

$$x_1^* = \frac{w \cdot \left(P_1^{\frac{1}{\rho-1}}\right)}{P_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + P_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \quad , \quad x_2^* = \frac{w \cdot \left(P_2^{\frac{1}{\rho-1}}\right)}{P_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + P_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

12

Para encontrar la función de utilidad Indirecta, reemplazamos las demandas marshallianas en la función de utilidad,

$$u(x_1, x_2) = [x_1^{\rho} + x_2^{\rho}]^{1/\rho}$$

$$v(x_1^*, x_2^*) = \left[\left(\frac{w \cdot p_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right)^{\rho} + \left(\frac{w \cdot p_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right)^{\rho}\right]^{1/\rho}$$

$$v(x_1^*, x_2^*) = \left[\left(\frac{1}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right)^{\rho/\rho} \cdot \left(w^{\rho} p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w^{\rho} p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{1/\rho}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right) \cdot \left(w^{\rho}\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)\right)^{1/\rho}\right]$$

$$= \left[w \cdot \left(\frac{1}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right)\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{1/\rho}\right]$$

$$= w\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{(1/\rho)-1}$$

$$v(x_1^*, x_2^*) = w \cdot \left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$\boxed{c}$

Sabiendo que las demandas marshallianas serán,

$$x_i^* = \frac{w \cdot p_i^{\frac{1}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

Analizaremos tres casos posibles para esta dda. marshalliana genérica.

<u>Caso</u> $\rho = 1$,

$$x_i^* = \frac{w \cdot p_i^{\frac{1}{1-1}}}{p_1^{\frac{1}{1-1}} + p_2^{\frac{1}{1-1}}} = \text{INDETERMINADO}$$

Dado que los precios quedan elevados a 1/0, entonces habrá indeterminación.

13 Caso $\rho \to 0$

Aplicamos en el límite,

$$\lim_{\rho \to 0} x_i^* = \lim_{\rho \to 0}\left(\frac{w \cdot P_i^{\frac{1}{\rho-1}}}{P_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + P_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right)$$

$$= \left(\frac{w \cdot P_i^{1/-1}}{P_1^0 + P_2^0}\right)$$

$$x_i^* = \frac{w \; P_i^{-1}}{2} = \left(\frac{w}{2P_i}\right)$$

Cuando $\rho \to 0$, x_i^* tendrá un valor definido creciente en w y decreciente en P_i.

Caso $\rho \to \infty^+$

Aplicamos en el límite,

$$\lim_{\rho \to \infty} x_i^* = \lim_{\rho \to \infty}\left[\frac{w \; P_i^{\frac{1}{\rho-1}}}{P_1^{\rho/\rho-1} + P_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right]$$

$$= \frac{w \cdot P_i^{\frac{1}{\infty-1}}}{P_1^{\infty/\infty-1} + P_2^{\infty/\infty-1}}$$

$$= \frac{w \cdot P_i^0}{P_1^1 + P_2^1}$$

$$x_i^* = \left(\frac{w}{P_1 + P_2}\right)$$

Así, cuando $\rho \to \infty^+$, la demanda será igual para ambos bienes, demanda que será creciente en precios y cantidad.

• Pregunta 4

a) Sea $u((x_1, x_2)) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ con $\alpha, \beta > 0$ mostraremos que puede ser representada como $u(x_1, x_1) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$.

Notemos que la funcion logaritmo es estrictamente creciente → entonces sea $f(x) = \ln(x)$, esto implica que $f \circ u(x) = f(u(x)) = \ln(u(x))$ representa las preferencias puesto que si $u(x) \geq u(y)$ tambien se cumple que

$$f(u(x)) \geq f(u(y)) \iff u(x) \geq u(y) \text{ para cualquier } x, y$$

Por lo tanto, le aplicamos $\ln(\,)$ a la funcion Cobb-Douglas:

$$\ln(x_1^{\alpha} x_2^{\beta}) = \alpha \ln(x_1) + \beta \ln(x_2)$$ (Por propiedad del logaritmo)

luego definiendo: $u_1(x_1) = \alpha \ln(x_1)$

: $u_2(x_2) = \beta \ln(x_2)$

mostramos que la funcion Cobb-Douglas puede ser representada como una funcion aditivamente separable pues

$$\underbrace{f(u(x))}_{\ln(u(x))} = \underbrace{u_1(x_1)}_{\alpha \ln(x_1)} + \underbrace{u_2(x_2)}_{\beta \ln(x_2)}$$

con $f(u(x))$ una nueva funcion de utilidad que representa mis mismas preferencias (con $\alpha, \beta > 0$)

b) Sin perdida de generalidad (y por simplicidad) lo demostraremos para $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Por enunciado sabemos que tanto u_1 como u_2 son concavas. Por lo tanto, cumplen la condicion de concavidad:

→ Sean: $x_1, x_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$:

$$u_1(\lambda x_1 + (1-\lambda) z_1) > \lambda u_1(x_1) + (1-\lambda) u_1(z_1) \quad (1)$$

$$u_2(\lambda x_2 + (1-\lambda) z_2) > \lambda u_2(x_2) + (1-\lambda) u_2(z_2) \quad (2)$$

→ luego, notemos que podemos sumar (1) y (2):

$$u_1(\lambda x_1 + (1-\lambda) z_1) + u_2(\lambda x_2 + (1-\lambda) z_2) > \lambda[u_1(x_1) + u_2(x_2)] + (1-\lambda)[u_1(z_1) + u_2(z_2)] \quad (3)$$

→ Ahora, definimos los vectores $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Además, sabemos que:

$u(\vec{y}) = u_1(y_1) + u_2(y_2)$ (4) para cualquier vector $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

por propiedad de aditivamente separable.

→ Por otra parte, notemos que si definimos el vector

$\vec{w} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda) z_1 \\ \lambda x_2 + (1-\lambda) z_2 \end{bmatrix} = [\lambda \vec{x} + (1-\lambda)\vec{z}]$ cumple (4) si le aplicamos $u(\cdot)$

Entonces:

$$u(\vec{w}) = u(\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{z}) \underset{\text{Por (4)}}{=} u_1(\lambda x_1 + (1-\lambda) z_1) + u_2(\lambda x_2 + (1-\lambda) z_2) \quad (5)$$

→ luego reemplazando (5) en (3):

$$u(\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{z}) > \lambda \underbrace{[u_1(x_1) + u_2(x_2)]}_{(7)} + (1-\lambda)\underbrace{[u_1(z_1) + u_2(z_2)]}_{(8)} \quad (6)$$

Por último, podemos reescribir (7) y (8) utilizando nuevamente la utilidad (4)

(7): $u_1(x_1) + u_2(x_2) = u(\vec{x})$ (9)

(8): $u_1(z_1) + u_2(z_2) = u(\vec{z})$ (10)

→ (9) y (10) en (6):

$$u(\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{z}) > \lambda u(\vec{x}) + (1-\lambda) u(\vec{z})$$

Por lo tanto, $u(\cdot)$ cumple la condición de concavidad ⇒ es cóncavo.

Este resultado se puede extender para $\mathbb{R}^L$ utilizando la misma lógica.

c) lo queremos demostrar es que $\frac{\partial x_i}{\partial w} > 0$ ⇒ bien normal $\forall i$

Entonces, sea $p>0, w>0$ sabemos que

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial w}$$

Por lo tanto, para determinar el signo de $\frac{\partial x^*}{\partial w}$ debemos conocer el signo de $\frac{\partial u}{\partial w}$ y $\frac{\partial u}{\partial x^*}$

- $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x^*}$ $\rightarrow$ nos dan como instrucción (sugerencia) utilizar las condiciones encontradas en la pregunta 2

  Como $u(\cdot)$ es l.n.s. sabemos que la restricción está activa, esto implica:

$$\nabla u(x^*) = \lambda P$$

  Luego, también por l.n.s $\lambda > 0$ (Propiedad Mas-Colell)

$$\Rightarrow \nabla u(x^*) = \underset{(+)}{\lambda} \cdot \underset{(+)}{P} \Rightarrow \text{Derivadas son positivas}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x^*} > 0$$

- $\frac{\partial u(x^*)}{\partial w} = \frac{\partial v(P,w)}{\partial w}$ $\longrightarrow$ sabemos por propiedad de la función de utilidad indirecta que será estrictamente creciente en w

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x^*)}{\partial w} > 0$$

En consecuencia,

$$\underbrace{\frac{\partial u(x^*)}{\partial w}}_{(+)} = \underbrace{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x^*}}_{(+)} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial w}$$

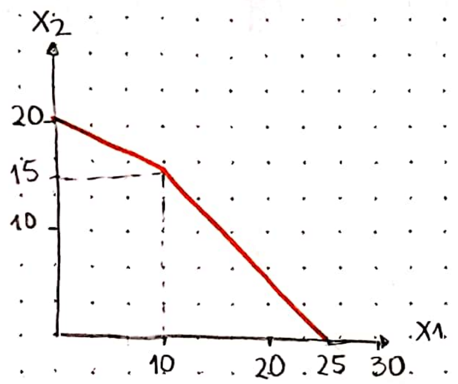
$$\Rightarrow \frac{\partial x^*}{\partial w} > 0 \Rightarrow \text{bienes son normales}$$

Pregunta 5

Lo primero que haremos será dibujar los conjuntos presupuestarios para el caso a, b y c.

Entonces, el primer caso el conjunto $B(P,W)^A$ es el siguiente:

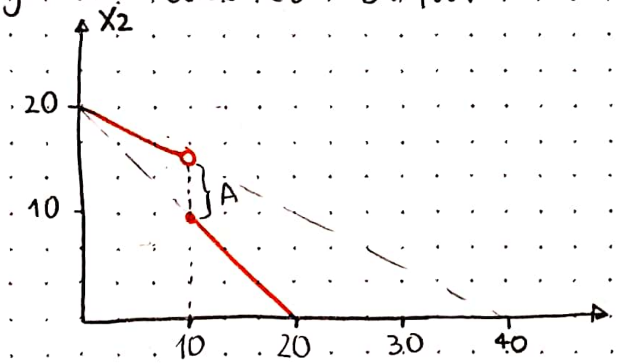
a)



→ Pagamos $P_1 = 1$ en las primeras 10 un. y $P_1 = 2$ en las siguientes.
↳ subsidio no se pierde
⇒ solamente tenemos un quiebre en $x_1 = 10$ un.

El segundo caso es $B(P,W)^B$

b)

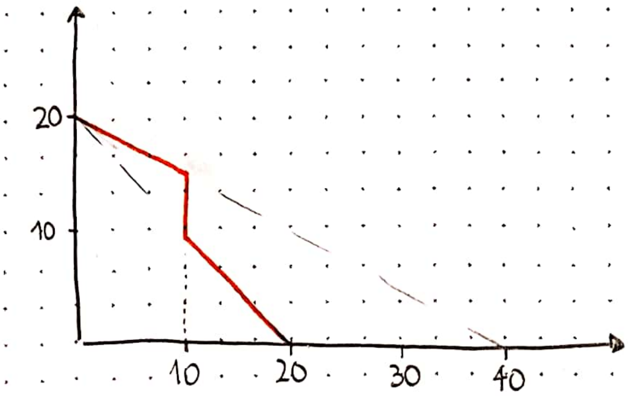


→ En este caso $P_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < 10 \\ 2 & \text{si } x_1 \geq 10 \end{cases}$

↳ Aquí se pierde el subsidio, por lo tanto tenemos un "salto" en $x_1 = 10$, pues empezamos a pagar todas las unidades al precio $P_1 = 2$.

Y el tercero $B(P,W)^C$

c)



→ Este caso es casi igual al anterior, con la diferencia de que el subsidio llega hasta $x_1 = 10$ (incluido).

$\Rightarrow P_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \leq 10 \\ 2 & \text{si } x_1 > 10 \end{cases}$

Ahora, debemos comentar acerca de la existencia de solución, unicidad de la solución, ley de Walras y qué ocurre si $\succsim$ monótona.

Para eso partiremos hablando acerca de todos estos tópicos:

- Existencia de solución

Dada $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y $S \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto compacto, entonces el problema de optimización con

Función objetivo: $f(x)$ $\Rightarrow$ Tiene solución (Apunte M. Matemáticos)
Restricción: $x \in S$

$\Leftrightarrow$ si $u(\cdot)$ es función de utilidad continua y los $p \gg 0$
$\Rightarrow \max u(x)$ s.a. $p \cdot x \leq w$ tiene solución. (Mas-Colell)

- Solución única

Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto compacto y convexo y sea $f: S \to \mathbb{R}$ continua y convexa, entonces

$\min f(x)$ s.a $x \in S$ $\to$ tiene solución única

Por otra parte, si f es continua y cóncava, entonces

$\max f(x)$ s.a $x \in S$ $\to$ tiene solución única.
(Apunte M. Matemáticos)

- Ley de Walras

Sabemos que si $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa a $\succsim$ l.n.s definida en $X = \mathbb{R}^L_+$ $\Rightarrow$ la solución cumple la ley de Walras $p \cdot x = w$

- $\succsim$ monótona

La preferencia es monótona si $y \gg x \Rightarrow y \succ x$.

Dicho esto, analizaremos cada caso:

- Caso a: Como nos dicen que $\succsim$ es continua $\Rightarrow u(x)$ será continua (propiedad)

  Luego, el conjunto $B(p,w)^A$ es cerrado y acotado $\Rightarrow$ compacto.

  Todo esto implica que va a existir solución

  Al mismo tiempo, $B(p,w)^A$ también es convexo (pues su combinación convexa $\in B(p,w)^A$), entonces para asegurar unicidad debemos asumir que $\succsim$ convexa estrictamente, en ese caso, la solución es única (sino, no podemos asegurar nada). (Propiedad).

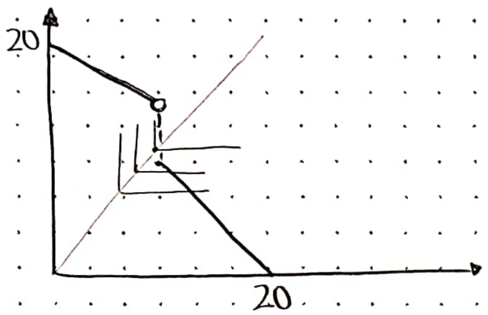
  Por otra parte, la ley de Walras asume p constantes para todo x_i y en este caso, no se cumple, sin embargo, si $\succsim$ monótona $\Rightarrow u(x)$ es creciente y en ese caso no tiene sentido la solución interior

Por lo tanto, si se cumpliría la ley de Walras en ese caso.

<u>Caso B:</u> En este caso $B(P,W)^B$ es abierto en el intervalo A, por lo tanto, no podemos asegurar que haya solución.

Dicho esto, obviamente tampoco podemos decir que hay solución única.

En cuanto a Walras, tampoco podemos asegurar que se cumpla, es fácil verlo con el siguiente contra ejemplo



→ Función UT → complementos perfectos

→ la solución convergerá a un punto en el intervalo abierto → no está en la frontera del conjunto

⟹ no se cumple Walras.

Luego, monotonía no aporta información suficiente como para cambiar algún resultado ya mencionado.

<u>CASO C:</u> $B(P,W)^C$ es un conjunto cerrado y acotado, por lo tanto, es compacto, luego como $u(\cdot)$ continua esto implica que existirá solución.

Por otra parte, como el conjunto no es convexo no podemos asegurar la unicidad de la solución.

Por otra parte, si queremos asegurar que se cumpla Walras debemos asumir monotonicidad (pues ⟹ $u(x)$ creciente en x), en ese caso, nuevamente la solución interior no tiene sentido → me sobra dinero para comprar más $x_1 \wedge x_2$ y en consecuencia ser más feliz.

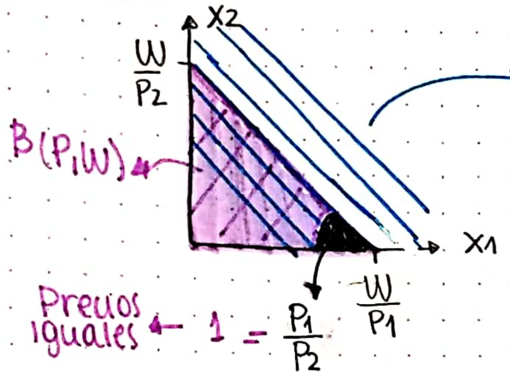
Pregunta 6

a) La demanda Marshaliana se obtiene al resolver el problema de optimización:

$$\max u(x) \quad \text{s.a.} \quad p\cdot x \leq w \quad \Longleftrightarrow \quad \max_{x_1, x_2} \; x_1 + x_2 \quad \text{s.a.} \quad p\cdot x \leq w$$

→ Notemos que este es un problema lineal-lineal, en consecuencia, hay dos opciones de solución

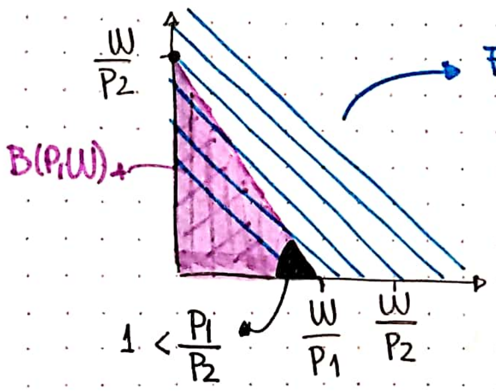
• Caso 1 $\quad p_1 = p_2$



→ Funciones de utilidad

$$\Rightarrow x^*(p,w) = \{x \in X : p\cdot x = w\}$$

• Caso 2 $\quad p_1 \neq p_2 \rightarrow$ s.p.g asumimos $p_1 > p_2$



→ Funciones de utilidad → solución esquina (consumo sólo del bien más barato)

$$\Rightarrow x^*(p,w) = \left\{\frac{w}{p_2}\right\}$$

→ Es fácil notar que los bienes son sustitutos perfectos

Entonces

$$x^*(p,w) = \begin{cases} \left\{\frac{w}{p_2}\right\} & \text{si } p_2 < p_1 \\ \left\{\frac{w}{p_1}\right\} & \text{si } p_1 < p_2 \\ \{x \in X : p\cdot x = w\} & \text{si } p_1 = p_2 \end{cases}$$

b) Para que $x^*(P,w)$ sea solo un punto debe cumplirse que existe un precio mayor al otro (como se mostró en a) — asumimos $P_1, P_2 > 0$ —

En cuanto a w basta con que sea mayor o igual a 0

c) Verificaremos semi-continuidad superior para $x^*((5,5),10)$

Entonces, dado:

$(P_n, w_n) \rightarrow [(5,5),10]$

$x_n \in x^*(P_n, w_n)$

$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$

Queremos demostrar que $\bar{x} \in x^*((5,5),10)$

→ lo haremos por absurdo, asumiremos que $\bar{x} \notin x^*((5,5),10)$

⇒ Pueden estar ocurriendo dos cosas:

① $\bar{x} \notin B((5,5),10)$

② $\exists\ \tilde{x} \in B((5,5),10) : u(\tilde{x}) > u(\bar{x}) \Leftrightarrow \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 > \bar{x}_1 + \bar{x}_2$

→ Analicemos la opción ①

Sabemos que $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ y que $x_n \in x^*((5,5),10)$

esto implica que $x_n \in B((5,5),10)$ pues es solución, luego cumple:

$$P_n \cdot x_n \leq w_n \quad / \lim_{n\to\infty}$$
$$(5,5)\cdot \bar{x} \leq 10$$

$\Rightarrow \bar{x} \in B((5,5),10) \Rightarrow$ esta opción no es factible

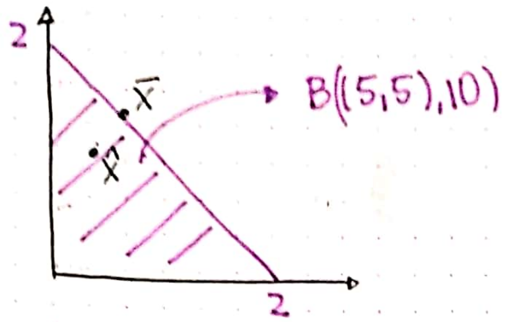
→ Analizamos en consecuencia la opción ②

Es fácil notar que $u(x)$ es una función continua por lo tanto siempre $\exists\ \hat{x}$:

$$u(\tilde{x}) > u(\hat{x}) > u(\bar{x})$$

donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ y cumple $\hat{x}_1 \in]\tilde{x}_1, \bar{x}_1[\ \wedge\ \hat{x}_2 \in]\tilde{x}_2, \bar{x}_2[$

Además, por conveniencia escogeremos $\hat{x} \in \operatorname{int}(B(5,5),10)$ es decir:



→ sabemos que $\bar{x}$ cumple

$$(5,5)\,\bar{x} = 10$$

por ley de walras, por otro lado $\hat{x} \in INT(B((5,5),10))$

$$\Rightarrow (5,5)\,\hat{x} < 10$$

Luego, podemos tomar la sucesión p_n y w_n lo suficientemente cerca de $(5,5)$ y 10 (respectivamente), es decir (formalmente):

$\exists N$ (momento) : $\forall n \geq N$ p_n esta suficiente cerca de $(5,5)$ y w_n de 10.

$$\Rightarrow p_n \cdot \hat{x} < w_n \quad \forall n \geq N$$

Esto implica que $\hat{x} \in B(p_n, w_n)$ $\forall n \geq N$, luego también tenemos como dado que $x_n \in x^*(p_n, w_n)$

Esto implica que $u(x_n) \geq u(\hat{x})$ / $\lim\limits_{n\to\infty}$

$$\Rightarrow u(\bar{x}) \geq u(\hat{x})$$

Pero habíamos asumido $u(\hat{x}) > u(\bar{x})$

$\Rightarrow$ contradicción

$\Rightarrow$ $\bar{x} \in x^*((5,5),10)$, por lo tanto, $x^*((5,5),10)$ es semi-continua superior en el punto $((5,5),10)$