CONTROL III - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2020

[1] Considere una economía con $n \geq 3$ agentes y un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ de alternativas sociales. Cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$ tiene preferencias completas y transitivas por las alternativas sociales en A. Estas preferencias quedan determinadas por un parámetro θ_i, el cual no es observado por un planificador central, quien sólo sabe que θ_i está en un conjunto Θ_i. A pesar de esta asimetría de información, el planificador central consigue implementar en estrategias Nash una regla de elección social (univaluada) $f : \prod_{i=1}^{n} \Theta_i \to A$. Demuestre o dé un contraejemplo: f es Condorcet monótona.

Como f es univaluada, los conceptos de *implementación* e *implementación total* en estrategias Nash coinciden. Por lo tanto, el Teorema de Maskin nos asegura que f es monótona. Así, vamos a probar que la monotonía Maskin asegura la monotonía Condorcet. En otras palabras, vamos a demostrar que la monotonía Maskin nos asegura que, dados perfiles de características de los individuos $\theta, \theta' \in \prod_{h=1}^{n} \Theta_h$ y alternativas sociales $a_i, a_j \in A$ tales que:

(i) θ y θ' coinciden sobre $\{a_i, a_j\}$,

(ii) $\{a_i, a_j\}$ son top bajo θ',

(iii) $f(\theta) = a_i$,

tenemos que $f(\theta') = a_i$. Note que, para cada $h \in \{1, \ldots, n\}$ y $z \in A$, si a_i es tan buena cuanto z cuando h es del tipo θ_h, entonces a_i continua siendo tan buena cuanto z cuando h es del tipo θ'_h. Efectivamente, cuando h es del tipo θ'_h la única alternativa que puede ser mejor que a_i es a_j (por (ii)). Y el orden que h le da a las alternativas a_i y a_j es el mismo en θ a θ' (por (i)). Por lo tanto, $\{z \in A : a_i \succeq_h (\theta)\, z\} \subseteq \{z \in A : a_i \succeq_h (\theta')\, z\}$. Como $f(\theta) = a_i$, la monotonía Maskin nos asegura que $f(\theta') = a_i$. $\square$

[2] Andrea y Beatriz acuden al rey Zalomón en busca de ayuda. Ambas afirman ser madres de Felipe y quieren que el rey defina con cual de ellas se debe quedar el niño. Zalomón sabe que hay dos posibles estados de la naturaleza: Andrea es la madre (*estado* α) o Beatriz es la madre (*estado* β). Además, hay tres posibles alternativas sociales que él puede implementar: Felipe puede ser entregado a Andrea (*alternativa* a), puede ser entregado a Beatriz (*alternativa* b), o puede quedar bajo los cuidados de un centro social (*alternativa* c).[1] Las preferencias de Andrea y Beatriz dependen del estado del la naturaleza y vienen dadas por:

$$\text{Estado } \alpha: \qquad a \succ_A b \succ_A c\,; \qquad b \succ_B c \succ_B a;$$

$$\text{Estado } \beta: \qquad a \succ_A c \succ_A b\,; \qquad b \succ_B a \succ_B c.$$

El objetivo del rey Zalomón es implementar la regla de elección social $f : \{\alpha, \beta\} \to \{a, b, c\}$ caracterizada por $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$. Esto es, Zalomón quiere entregar Felipe a su madre.

[1] *Comentario anecdótico sobre la Pregunta [2]*: En el Antiguo Testamento se describe una situación similar que involucra al Rey Salomón. Sin embargo, la *alternativa* c ideada por Salomón es un poco más extrema que la propuesta por Zalomón (ver 1 Reyes, capítulo 3, versículos 16-28).

(i) Como el rey Zalomón no sabe cual es la madre de Felipe, decide implementar el siguiente mecanismo: pregunta a cada mujer cual es el estado de la naturaleza. Si las respuestas coinciden, entrega el niño a aquella que fue identificada por ambas como la madre. Si las respuestas no coinciden, deja a Felipe bajo la tutela de un centro social. Demuestre que este mecanismo no implementa f en estrategias Nash.

Independiente del verdadero estado de la naturaleza, la alternativa social que se implementa depende de los reportes de Andrea y Beatriz de la siguiente forma:

Andrea/Beatriz	α	β
α	a	c
β	c	b

Si Andrea es la madre de Felipe (i.e., el verdadero estado es α), entonces las preferencias de Andrea vienen dadas por $a \succ_A b \succ_A c$, mientras que las preferencias de Beatriz son $b \succ_B c \succ_B a$. Esto nos asegura que hay un único equilibrio de Nash: ambas mujeres reportan β. Por lo tanto, se implementa la alternativa social b—Beatriz se queda con Felipe—a pesar de que $f(\alpha) = a$. Concluimos que el mecanismo propuesto por Zalomón no implementa f en estrategias Nash. $\square$

(ii) ¿Existe algún mecanismo que implemente f en estrategias Nash?
Caso afirmativo, describa detalladamente el mecanismo.

Como f es univaluada, los conceptos de *implementación* e *implementación total* coinciden. Por lo tanto, sigue del Teorema de Maskin que una condición necesaria para la existencia de un mecanismo que implemente f en estrategias Nash es que f sea Maskin monótona. Y esto último no se cumple. Efectivamente, aunque $f(\alpha) = a$ y todas al alternativas sociales que eran peores que a para Andrea (resp., Beatriz) en el estado α continúan siendo peores que a en el estado β, tenemos que $f(\beta) \neq a$. Por lo tanto, no existe ningún mecanismo que implemente f en estrategias Nash. $\square$

[3] Considere una economía con $n \geq 3$ agentes y un conjunto finito A de alternativas sociales. Las valoraciones que el agente $i \in \{1, \ldots, n\}$ le da a las alternativas sociales quedan determinadas por una función $u^i : A \to \mathbb{R}$. Un planificador central busca proveer una alternativa social que maximice la suma de las valoraciones individuales. Desafortunadamente, el planificador central no conoce las funciones $\{u^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ que determinan las valoraciones de los agentes. Por esta razón, diseña el siguiente mecanismo basado en impuestos:

(i) Le pide a cada agente reportar la *función* que determina sus valoraciones.

(ii) Basado en los reportes recibidos, los cuales denotaremos por $\{f^j\}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$, escoge

$$a^* \in \operatorname*{argmax}_{a\in A} \sum_{j=1}^{n} f^j(a).$$

(iii) Implementa la alternativa social a^* y cobra a cada agente $i \in \{1, \ldots, n\}$ un impuesto

$$t_i(f^1, \ldots, f^n) = \max_{a\in A} \sum_{j\neq i} f^j(a) - \sum_{j\neq i} f^j(a^*).$$

Suponga que la utilidad del individuo i cuando el planificador implementa a^* y le cobra el impuesto $t_i(f^1, \ldots, f^n)$ viene dada por $u^i(a^*) - t_i(f^1, \ldots, f^n)$. Demuestre que para cada agente es una estrategia dominante revelar su verdadera función de valoraciones.

La utilidad del individuo $i \in \{1, \ldots, n\}$, cuando el reporta una función f^i y los otros individuos reportan funciones $\{f^j\}_{j \neq i}$, viene dada por

$$u^i(a^*) - t_i(f^1, \ldots, f^n) \;=\; u^i(a^*) + \sum_{j \neq i} f^j(a^*) - \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} f^j(a),$$

donde

$$a^* \in \operatorname*{argmax}_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} f^j(a) = \operatorname*{argmax}_{a \in A} \left(u^i(a) + \sum_{j \neq i}^{n} f^j(a) + f^i(a) - u^i(a) \right).$$

Dado que el término destacado en verde no depende f^i, la estrategia óptima del agente i es asegurar que a^* maximize el término destacado en azul. Para alcanzar este objetivo es suficiente hacer que el término destacado en rojo desaparezca. Esto es, independiente de las funciones reportadas por los otros agentes, es óptimo para el individuo i revelar su verdadera función de valoraciones. $\square$

Observaciones sobre el mecanismo descrito en [3]:

(1) Este mecanismo se conoce como *mecanismo de Groves-Clarke-Vickrey*.

(2) Cuando el planificador central debe decidir sobre la provisión de un bien público indivisible, se puede suponer que las alternativas sociales son $A = \{0, 1\}$. Además, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $u^i(0) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, la única información relevante sobre las preferencias del agente i es el valor de $\theta^i \equiv u^i(1)$ (la valoración que i le da al bien público). En este contexto, los impuestos vienen dados por las transferencias asociadas al mecanismo de Clarke estudiado en clases.

(3) Cuando el planificador central debe decidir sobre la adjudicación de un bien indivisible a alguno de los individuos, se puede suponer que las alternativas sociales son $A = \{e_1, \ldots, e_n\}$, donde e_i representa la decisión de entregar el objeto al individuo i. Además, en al ausencia de externalidades, se puede asumir que $u^i(e_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Por lo tanto, la única información relevante sobre las preferencias del agente i es el valor de $\theta^i \equiv u^i(e_i)$ (la valoración que i le da al objeto cuando se lo entregan). En este contexto, si se reportan valoraciones $\{b^j\}_{j \in \{1, \ldots, n\}}$, se adjudica el objeto al individuo que reporta la mayor valoración y los impuestos vienen dados por

$$t_i(b^1, \ldots, b^n) = \begin{cases} \max\limits_{j \neq i} b^j & \text{cuando } b^i \geq \max\limits_{j \neq i} b^j, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto, el mecanismo coincide con una *subasta de segundo precio* o *subasta de Vickrey*.