PAUTA SOLEMNE II - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ

SEMESTRE PRIMAVERA - 2021

[1] Considere un mercado habitacional con cinco individuos y cinco casas, las cuales denotaremos por h_1, h_2, h_3, h_4, h_5. Cada individuo $i \in \{1,2,3,4,5\}$ es propietario de la casa h_i y tiene una relación de preferencias $\succ_i$ por las casas, la cual es completa, transitiva y estricta:

$$h_5 \succ_1 h_3 \succ_1 h_1 \succ_1 h_2 \succ_1 h_4,$$

$$h_2 \succ_2 h_5 \succ_2 h_1 \succ_2 h_4 \succ_2 h_3,$$

$$h_5 \succ_3 h_3 \succ_3 h_4 \succ_3 h_1 \succ_3 h_2,$$

$$h_4 \succ_4 h_3 \succ_4 h_2 \succ_4 h_1 \succ_4 h_5,$$

$$h_1 \succ_5 h_3 \succ_5 h_5 \succ_5 h_4 \succ_5 h_2.$$

Justificando detalladamente sus afirmaciones:

(i) Encuentre las distribuciones de casas que están en el núcleo. Además, encuentre las distribuciones de casas que son Pareto eficientes e individualmente racionales.

En un mercado habitacional como el descrito en el enunciado, donde solo hay propietarios y las preferencias son estrictas, sabemos que existe una única distribución de casas en el núcleo, la cual se puede encontrar aplicando el algoritmo *Top Trading Cycles* (TTC). Aplicando TTC, en la primera etapa cada individuo apunta a aquel que es propietario de la casa que más le gusta. Entonces, se forman tres ciclos: $(1,5)$, (2) y (4). Por lo tanto, los individuos 1 y 5 se intercambian sus casas, mientras que los individuos 2 y 4 se quedan con sus casas originales. Los cuatro salen del mercado. En la segunda etapa de TTC, solo queda el individuo 3 y la única alternativa que este tiene es quedarse con su casa original. Por lo tanto, la única distribución de casas en el núcleo es $(h_5, h_2, h_3, h_4, h_1)$, entendiendo que el individuo i recibe la propiedad que está en la i-ésima coordenada del vector.

Sabemos que una distribución de casas es individualmente racional si deja a cada individuo con una propiedad tan buena cuanto la que tenía originalmente. Por lo tanto, los individuos 2 y 4 van a mantener su propiedad. Para determinar como los otros tres individuos se redistribuyen las casas $\{h_1, h_3, h_5\}$ de forma de obtener una asignación Pareto eficiente, podemos aplicar el algoritmo *serial dictatorship* (SD). Hay seis formas de ordenar a los individuos $\{1,3,5\}$ para determinar el orden de prioridad al momento de escoger. Note que, independiente del orden, el individuo 5 se quedará con la casa h_1 y los individuos 1 y 3 se disputarán la casa h_5. Si 1 escoge primero, él se quedará con h_5 y el individuo 3 mantendrá su casa original. Alternativamente, si 3 escoge primero, él se quedará con h_5 y el individuo 1 se quedará con h_3. Por lo tanto, hay dos distribuciones de casas que son Pareto eficientes e individualmente racionales: $(h_5, h_2, h_3, h_4, h_1)$ y $(h_3, h_2, h_5, h_4, h_1)$. $\square$

(ii) ¿Hay distribuciones de casas Pareto eficientes e individualmente racionales que no están en el núcleo? En caso afirmativo, para cada una de ellas encuentre una coalición que la bloquee.

La distribución de casas $(h_3, h_2, h_5, h_4, h_1)$ es Pareto eficiente e individualmente racional. Sin embargo, no está en el núcleo, ya que puede ser bloqueada por la coalición $\{1, 5\}$. Efectivamente, al desviar los individuos 1 y 5 pueden redistribuirse su propiedades originales de tal forma de mejorar la situación de 1 sin empeorar a 5. $\square$

En las preguntas **[2]** y **[3]** consideraremos un modelo de emparejamiento bilateral uno-a-uno con dos grupos de individuos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Suponga que las preferencias son estrictas y cada individuo en $A \cup B$ considera a todos los agentes del grupo contrario aceptables.

[2] Justificando detalladamente sus argumentos, resuelva las siguientes cuestiones:

(i) Demuestre o dé un contraejemplo:

(a) Todo emparejamiento estable es Pareto eficiente para los individuos de A.

FALSO. Suponga que $n = 6$ y las preferencias vienen dadas por

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_1	b_2	b_3	b_4	b_3	b_4		a_2	a_1	a_3	a_4	.	.
b_2	b_1	$\vdots$	$\vdots$	b_1	b_2		a_5	a_6	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	b_5	b_6		a_1	a_2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuando aplicamos el *algoritmo de aceptación diferida* con los individuos de A haciendo las propuestas, llegamos a un emparejamiento μ_A en el cual se forman las parejas

$$\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_6, b_6)\}.$$

Aunque sabemos que μ_A es estable, no es eficiente para los individuos de A. Efectivamente, desde la perspectiva de ellos, μ_A es dominado en el sentido de Pareto por el emparejamiento que induce las parejas $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_6, b_6)\}$. $\square$

(b) Siempre hay un emparejamiento estable que es Pareto eficiente para los agentes de A.

FALSO. Considere el ejemplo dado en el ítem anterior. El emparejamiento μ_A es el mejor de los emparejamientos estables para todos los individuos de A, pues es el que se obtiene al aplicar aceptación diferida con ellos haciendo las propuestas. Por lo tanto, si hubiera un emparejamiento estable que fuera Pareto eficiente para los agentes de A, μ_A (también) tendría que cumplir esa propiedad. Sin embargo, si a partir de μ_A, los individuos a_1 y a_2 se intercambian sus parejas, entonces ellos mejoran sin afectar la situación de los otros miembros en A. $\square$

(ii) Si todos los individuos de A tienen las mismas preferencias, demuestre o dé un contraejemplo:

(a) Hay alguien en B que tiene la misma pareja en todo emparejamiento estable.

VERDADERO. Note que, cuando aplicamos aceptación diferida con los individuos de A haciendo las propuestas, en la primera etapa todos le proponen al mismo individuo de B, aquel que todos ellos consideran como la mejor alternativa. Sin perdida de generalidad, supongamos que ese individuo es b_1. Por lo tanto, b_1 se empareja con su mejor alternativa. Sin perdida de generalidad, supongamos que esas pareja es a_1. Como el emparejamiento μ_A que se obtiene al aplicar aceptación diferida con los agentes de A haciendo las propuestas deja a los individuos de B con la *peor alternativa* entre los emparejamientos estables y a_1 es la *mejor alternativa* de b_1, concluimos que b_1 tiene la misma pareja en todo emparejamiento estable. □

(b) Existe un único emparejamiento estable.
VERDADERO. Siguiendo la notación del ítem previo, sabemos que en cualquier emparejamiento estable los individuos a_1 y b_1 están emparejados. Sin perdida de generalidad, asuma que la segunda mejor alternativa para los individuos de A es b_2. Entonces, al aplicar aceptación diferida con los individuos de A haciendo las propuestas, b_2 se empareja con su mejor alternativa en $A \setminus \{a_1\}$. Como es imposible que b_2 se junte con a_1 en un emparejamiento estable y μ_A lo deja con su peor opción entre las parejas que puede tener en un emparejamiento estable, concluimos que b_2 tiene la misma pareja en todo emparejamiento estable. Siguiendo argumentos análogos, podemos concluir que cada individuo en B tiene la misma pareja en todo emparejamiento estable. Por lo tanto, hay un único emparejamiento estable. □

[3] Asumiendo que todos los individuos de $A \cup B$ conocen las preferencias de los otros individuos, demuestre o dé un contraejemplo: *la regla de elección social que asocia a cada perfil de preferencias el conjunto de los emparejamientos estables es totalmente implementable en estrategias Nash*. En caso afirmativo, describa un mecanismo que alcance este objetivo.

Dada una relación de preferencias $\succ_h$ de un individuo $h \in A \cup B$ por sus potenciales parejas, siempre podemos definir preferencias R^h (no necesariamente estrictas) sobre los emparejamientos de tal forma que

$$\mu R^h \eta \qquad \Longleftrightarrow \qquad [\mu(h) \succ_h \eta(h) \quad \vee \quad \mu(h) = \eta(h)]$$

Para simplificar la notación, y sin perdida de generalidad, nuestros argumentos se enfocarán en las preferencias $(R^h)_{h \in A \cup B}$ inducidas por $(\succ_h)_{h \in A \cup B}$. Además, utilizaremos el símbolo P^h para denotar la preferencia estricta inducida por R^h.

Por el Teorema de Maskin (1977), sabemos que la regla de elección social Φ que asocia a cada perfil de preferencias $R = (R^h)_{h \in A \cup B}$ el conjunto de los emparejamientos estables $\Phi(R)$ es totalmente implementable en estrategias Nash si es *Maskin monótona* y cumple con la propiedad de *no existencia de poder de veto*.

• *Monotonía Maskin.* Sean $R = (R^h)_{h \in A \cup B}$ y $\widetilde{R} = (\widetilde{R}^h)_{h \in A \cup B}$ dos perfiles de preferencias tales que $\mu \in \Phi(R)$ y $\{\eta \in \mathcal{M} : \mu R^h \eta\} \subseteq \{\eta \in \mathcal{M} : \mu \widetilde{R}^h \eta\}$ para todo $h \in A \cup B$, donde $\mathcal{M}$ es el conjunto de emparejamientos entre individuos de A y B. Nuestro objetivo es probar que $\mu \in \Phi(\widetilde{R})$.

Asuma que μ no es estable cuando las preferencias son caracterizadas por $(\widetilde{R}^h)_{h \in A \cup B}$. Entonces, existen individuos $a \in A$ y $b \in B$ tales que $\mu(a) \neq b$ y cualquier emparejamiento σ tal que $\sigma(a) = b$ cumple $\sigma \widetilde{P}^a \mu$ y $\sigma \widetilde{P}^b \mu$. Como asumimos que $\{\eta \in \mathcal{M} : \mu R^a \eta\} \subseteq \{\eta \in \mathcal{M} : \mu \widetilde{R}^a \eta\}$ y $\{\eta \in \mathcal{M} : \mu R^b \eta\} \subseteq \{\eta \in \mathcal{M} : \mu \widetilde{R}^b \eta\}$, concluimos que para cualquier emparejamiento σ tal que $\sigma(a) = b$ tenemos que $\sigma P^a \mu$ y $\sigma P^b \mu$. Esto nos asegura que μ no es estable bajo el perfil de preferencias $(R^h)_{h \in A \cup B}$, lo cual contradice el hecho que $\mu \in \Phi(R)$. Por lo tanto, Φ es Maskin monótona.

• *No existencia de poder de veto.* Sea $R = (R^h)_{h \in A \cup B}$ un perfil de preferencias tal que, para algún agente $i \in A \cup B$, tenemos que $\mu R^h \eta$ para todo $\eta \in \mathcal{M}$ y $h \neq i$. Entonces, los individuos en $A \cup B \setminus \{i\}$ se emparejan con su mejor alternativa en μ, lo cual implica que ninguno de ellos tendrá incentivos a desviar. Como i considera a todos los individuos aceptables, tampoco querrá desviar para quedarse solo. Luego, $\mu \in \Phi(R)$.

Concluimos que Φ es totalmente implementable en estrategias Nash.

Un mecanismo que permite implementar totalmente Φ en estrategias Nash es el siguiente: se le pide a cada individuo que reporte las preferencias de los individuos en la sociedad (incluidas las suyas), un emparejamiento y un número entero positivo. Entonces, a partir de la información recibida, el planificador central decide emparejar a los individuos de la siguiente forma:

(i) Si todos reportaron el mismo perfil de preferencias R y el mismo emparejamiento $\mu \in \mathcal{M}$, tal que $\mu \in \Phi(R)$, entonces se implementa μ.

(ii) Si todos excepto $h \in A \cup B$ reportan el mismo perfil de preferencias R y el mismo emparejamiento $\mu \in \Phi(R)$, lo que se haga dependerá del reporte hecho por h:

   (a) Si h reporta un perfil de preferencias $\widetilde{R}$ y un matching $\widetilde{\mu} \in \mathcal{M}$ tal que,

$$\mu R^h \widetilde{\mu}, \qquad \mu \notin \Phi(\widetilde{R}), \qquad \widetilde{\mu} \widetilde{P}^h \mu,$$

   entonces se implementa $\widetilde{\mu}$.

   (b) Caso contrario, se implementa μ.

(iii) En cualquier otra situación se implementa el emparejamiento anunciado por el individuo que reportó el mayor número entero. Si hay más de un individuo en esta situación, el planificador usa algún criterio pre-fijado para escoger a uno de ellos y poder decidir que emparejamiento implementar.

Note que, hemos asumido que $n \geq 2$, pues hay $2n$ individuos en el mercado y el Teorema de Maskin (1977) que determina condiciones suficientes para implementación total en estrategias Nash requiere que haya al menos tres individuos. Esta hipótesis estaba implícita en el enunciado, pues la forma en la cual se describía a los miembros de $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ debería haber dejado claro que $n \geq 2$.

De cualquier forma, el resultado también es válido cuando $n = 1$ y su demostración es inmediata. Efectivamente, en este caso, las preferencias de los únicos individuos, a_1 y b_1, son triviales y el conjunto de emparejamiento estables siempre tiene un único elemento. Por estas razones, la regla de elección social Φ es totalmente implementable en estrategias Nash a través del mecanismo: *estimados a_1 y b_1, independiente de lo que me digan, los voy a emparejar!* □