Guía 2, Segunda Parte

Nombre: Alberto Belmar
Rut: 19.801.271-8

1. Modelo de Ramsey con decisiones laborales

a.

Respuesta

Para comenzar, un equilibrio competitivo es un camino de asignaciones $[c(t),\ l(t),\ a(t),\ k(t)]$ y precios $[r(t),\ w(t)]$ tal que cada hogar resuelve el siguiente problema:

$$\max_{[c(t),l(t),a(t)]} U(0) = \int_0^\infty exp(-\rho t)u(c(t), 1-l(t))$$
$$s.a.\quad \dot{a}(t) = r(t)a(t) + w(t)l(t) - c(t) \quad y \quad \lim_{t\to\infty} a(t)exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) \geq 0$$

Por otra parte, el problema de la firma consiste en maximizar sus beneficios, de la forma:

$$\max_{k(t),l(t)} F(k(t), T(t)l(t)) - (r(t)+\delta)k(t) - w(t)l(t)$$

Luego, las condiciones de primer orden deben cumplir con:

$$r(t) + \delta = F_K(k(t), T(t)l(t)) \quad y \quad w(t) = T(t)F_L(k(t), T(t)l(t))$$

y adicionalmente, se debe cumplir la condición de *market clearing*, donde $a(t) = k(t)$ para todo t.

b.

Respuesta

En este caso, el Hamiltoniano se representa de la siguiente manera:

$$H = u(c, 1-l) + \lambda(r(t)a + w(t)l - c)$$

Luego, si agregamos como uno conveniente $\pm w(t)$, el Hamiltoniano quedaría:

$$H = u(c, 1-l) + \lambda(r(t)a - w(t)(1-l) + w(t) - c)$$

Donde este último Hamiltoniano se ocupa para realizar las CPO con respecto al ocio. De esta forma, tedremos una variable de estado a y dos variables de control, c y l. Por ende, si calculamos las CPO respecto a las variables antes mencionadas, quedaría:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u_c(\cdot) - \lambda = 0 \implies u_c(\cdot) = \lambda \tag{1}$$
$$\frac{\partial H}{\partial(1-l)} = u_2(\cdot) - \lambda w(t) = 0 \implies u_2(\cdot) = \lambda w(t) \tag{2}$$
$$\frac{\partial H}{\partial a} = -\lambda r(t) = \dot{\lambda} - \rho\lambda \implies \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - r(t) \tag{3}$$

La notación utilizada es la siguiente: $u_c(\cdot) = u_c(c, 1-l)$ y $u_2(\cdot) = \frac{\partial u(c,1-l)}{\partial(1-l)}$.

Ahora bien, si derivamos (1) con respecto al tiempo, obtenemos:

$$u_{cc}(\cdot)\dot{c} + u_{c2}(\cdot)\dot{l} = \dot{\lambda}$$

Reemplazando la ecuación anterior y (1) en (3):

$$\begin{aligned}
\frac{u_{cc}(\cdot)\dot{c} + u_{c2}(\cdot)\dot{l}}{u_c(\cdot)} &= \rho - r(t) \\
\frac{u_{cc}(\cdot)c}{u_c(\cdot)}\frac{\dot{c}}{c} + \frac{u_{2c}(\cdot)\dot{l}}{u_c(\cdot)} &= \rho - r(t) \\
\varepsilon_u(\cdot)\frac{\dot{c}}{c} - \frac{u_{2c}(\cdot)\dot{l}}{u_c(\cdot)} &= r(t) - \rho
\end{aligned}$$

Donde $\varepsilon_u(\cdot) = \varepsilon_u(c, 1-l) = -\frac{u_{cc}(\cdot)c}{u_c(\cdot)}$ representa la elasticidad de la utilidad marginal u_c respecto a c. Además, notar que la última expresión es la ecuación de Euler en este contexto.

Por otra parte, vemos que la ecuación (2) muestra el trade-off entre ocio y trabajo:

$$u_2(\cdot) = u_c(\cdot)w(t)$$

Además, también se necesita la versión fuerte de la condición de transversalidad, $\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)a(t) = 0$, que es:

$$\lim_{t\to\infty} a(t)\cdot exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\} = 0$$

Por último, como en este caso el Hamiltoniano maximizado es lineal, tendremos que será cóncavo en a. De esta forma, para cualquier $[\tilde{a}(t), \tilde{c}(t), \tilde{l}(t)]$, tendremos que por condición de no-Ponzi, se cumplirá que:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)\tilde{a}(t) \geq 0$$

Siendo todas estas condiciones suficientes para obtener optimalidad.

c.

Respuesta

En este caso, tendremos que el planificador social resolverá el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned}
&\max_{[c(t),l(t),k(t)]} U = \int_0^\infty e^{-\rho t}u(c(t), 1-l(t)) \\
&s.a \quad \dot{k}(t) = F(k(t), T(t)l(t)) - \delta k(t) - c(t) \quad y \quad k(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Luego, el Hamiltoniano será:

$$\begin{aligned}
H &= u(c, 1-l) + \lambda(F(k, T(t)l) - \delta k - c) \\
&= u(c, 1-l) + \lambda(F(k, -(1-l)T(t) + T(t)) - \delta k - c)
\end{aligned}$$

Notar que al igual que en la letra anterior, se utiliza la última expresión encontrada para obtener las CPO en función del ocio $(1-l)$. De esta forma, tendremos una variable de estado que será $k(t)$ y dos variables de control, $c(t), l(t)$. Por ende, las CPO quedarían de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial c} &= u_c(\cdot) - \lambda = 0 \implies u_c(\cdot) = \lambda && (4)\\
\frac{\partial H}{\partial(1-l)} &= u_2(\cdot) - \lambda T(t)F_L(\cdot) = 0 \implies u_2(\cdot) = \lambda T(t)F_L(\cdot) && (5)\\
\frac{\partial H}{\partial k} &= -\lambda F_K(\cdot) + \lambda\delta = \dot{\lambda} - \rho\lambda \implies \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \delta + \rho - F_K(\cdot) && (6)
\end{aligned}$$

La notación utilizada es similar a la anterior: $u_c(\cdot) = u_c(c, 1-l)$, $u_2(\cdot) = \frac{\partial u(c,1-l)}{\partial(1-l)}$, $F_L(\cdot) = F_L(k, T(t)l)$ y lo mismo para $F_K(\cdot)$.

Ahora bien, derivamos (4) con respecto al tiempo, resultando:

$$u_{cc}(\cdot)\dot{c} + u_{c2}(\cdot)\dot{l} = \dot{\lambda}$$

Si reemplazamos la ecuación anterior y (4) en (6), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{cc}(\cdot)\dot{c} + u_{c2}(\cdot)\dot{l}}{u_c(\cdot)} &= \delta + \rho - F_K(\cdot)\\
\frac{u_{cc}(\cdot)c}{u_c(\cdot)}\frac{\dot{c}}{c} + \frac{u_{2c}(\cdot)\dot{l}}{u_c(\cdot)} &= \delta + \rho - F_K(\cdot)\\
\varepsilon_u(\cdot)\frac{\dot{c}}{c} - \frac{u_{2c}(\cdot)\dot{l}}{u_c(\cdot)} &= F_K(\cdot) - \rho - \delta
\end{aligned}$$

Así, las CPO de este problema son:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_u(\cdot)\frac{\dot{c}}{c} - \frac{u_{2c}(\cdot)\dot{l}}{u_c(\cdot)} &= F_K(\cdot) - \rho - \delta\\
u_2(\cdot) &= u_c(\cdot)T(t)F_L(\cdot)
\end{aligned}$$

Por otra parte, tendremos la condición de transversalidad, que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}k(t)\int_0^t -(F_K(k(s), T(s)l(s) - \delta)ds = 0$$

Donde para llegar a la última expresión, se utiliza el hecho de que: $r(s) = F_K(k(s), T(s)l(s) - \delta$ y $a(t) = k(t)$, donde la primera es la condición de mercado competitivo.

Finalmente, con $g(1-\theta) < \rho$, tendremos que se satisfacen todas las condiciones para que exista una única trayectoria que satisface las CPO.

De esta forma, asumiendo que u es conjuntamente cóncava en c y l, tendremos que el Hamiltoniano es cóncavo y se cumplirá que:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)\tilde{k}(t) \geq 0$$

Lo anterior, para todas las trayectorias factibles dado $\tilde{k}(t) \geq 0$. Entonces, se cumplen las condiciones para la optimalidad, dado que la trayectoria mostrada con antelación es la única capaz de resolver el problema del planificador.

d.

Respuesta

Para mostrar que ambos problemas son equivalentes en mercados competitivos, comenzamos por reemplazar $a(t) = k(t)$ y $r(t), w(t)$ en la restricción de activos del problema de maximización del hogar:

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= (F_K(\cdot) - \delta)k(t) + F_L(\cdot)T(t)l(t) - c(t) \\ &= F(k(t), T(t)l(t)) - \delta k(t) - c(t)\end{aligned}$$

Donde la última expresión se obtiene de reemplazar: $F(k(t), T(t)l(t)) = F_K(\cdot)k(t) + F_L(\cdot)T(t)l(t)$.

A la vez, tendremos que para las CPO:

$$\begin{aligned}\varepsilon_u(\cdot)\frac{\dot{c}}{c} - \frac{u_{2c}(\cdot)\dot{l}}{u_c(\cdot)} &= r(t) - \rho \\ &= F_K(\cdot) - \delta - \rho \\ u_2(\cdot) &= u_c(\cdot)w(t) \\ &= u_c(\cdot)F_L(\cdot)T(t)\end{aligned}$$

Luego, tendremos que también se cumple la condición de transversalidad por el resultado mostrado en la letra anterior. Por ende, tendremos exactamente los mismos resultados que para el problema del planificador social.

De esta forma, dada cualquier asignación de equilibrio $[a(t), k(t), c(t), r(t), w(t)]$, tendremos que, por una parte, la asignación $[c(t), k(t)]$ resolverá el problema del planificador social y por otra parte, la solución del problema del planificador, seguirá los precios $r(t), w(t)$ obtenidos del mercado competitivo. Lo anterior lleva a que estas sean también las soluciones para el problema de maximización del hogar.

Por último, notar que la asignación $[a(t), k(t), c(t), r(t), w(t)]$ es un equilibrio competitivo, por lo que ambos problemas son equivalentes cuando los precios $r(t)$ y $w(t)$ son competitivos.

2. Modelo de Ramsey y un caso particular de preferencias

a.

Respuesta

La función de utilidad corresponde a una *CES* y viene representada por:

$$u(c) = \frac{(c - \gamma)^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}$$

A partir de esta, se observa que existe un mínimo nivel de consumo que el consumidor tiene que consumir cada período (γ). Por tanto, el parámetro γ puede ser visto como un nivel de consumo de subsistencia (similar al consumo autónomo en la teoría keynesiana).

b.

Respuesta

El equilibrio competitivo en esta economía consiste en asignaciones de consumo, capital, salarios y tasas de interés en el tiempo $[c(t), k(t), w(t), r(t)]_{t=0}^{\infty}$ tales que los consumidores maximicen su utilidad y las firmas su beneficio tomando los precios como dados y satiafaciendo *market clearing*.

Luego, como esta economía es *labor augmenting*, para definir el equilibrio competitivo, se utiliza el ratio capital-trabajo efectivo, que sería:

$$k(t) = \frac{K(t)}{T(t)L(t)} = \frac{K(t)}{T(t)L}$$

Notar que no se ocupa el ratio usual de capital-trabajo $\frac{K(t)}{L(t)}$.

c.

Respuesta

Para caracterizar el equilibrio de esta economía, comenzamos realizando el Hamiltoniano, que sería:

$$H = \frac{(c(t)-\gamma)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda(t)(r(t)a(t) + w(t) - c(t))$$

Notamos que la variable estado es $a(t)$ y la de control $c(t)$. Luego, realizando las CPO con respecto a c/u de las variables antes mencionadas:

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0 \implies (c(t)-\gamma)^{-\theta} - \lambda(t) = 0 \implies (c(t)-\gamma)^{-\theta} = \lambda(t) \quad (7)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial a(t)} = \dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) \implies -\lambda(t)r(t) = \dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) \implies \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \rho - r(t) \quad (8)$$

Diferenciando (7) respecto al tiempo:

$$\dot{\lambda}(t) = -\theta(c(t)-\gamma)^{-\theta-1}\dot{c}(t)$$

Reemplazando la ecuación anterior y (7) en (8):

$$\begin{aligned} -\frac{\theta(c(t)-\gamma)^{-\theta-1}\dot{c}(t)}{(c(t)-\gamma)^{-\theta}} &= \rho - r(t) \\ \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= \frac{c(t)-\gamma}{\theta c(t)}(r(t)-\rho) \end{aligned}$$

Notar que se llega a la última expresión utilizando como uno conveniente el término $c(t)/c(t)$. Por otro lado, la condición de primer orden que se debe cumplir para una firma que maximiza beneficios es:

$$r(t) = F_K(K(t), T(t)L(t)) - \delta$$

Si trabajamos la expresión anterior en términos de trabajador efectivo, sería, $k(t) = \frac{K(t)}{T(t)L(t)} \implies F\left(\frac{K(t)}{T(t)L(t)}, \frac{T(t)L(t)}{T(t)L(t)}\right) = f(k(t), 1) = f(k(t))$, por lo que la condición de optimalidad cambiaría a:

$$r(t) = f'(k(t)) - \delta$$

Reemplazando en la ecuación de Euler, nos quedaría:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{c(t) - \gamma}{\theta c(t)}(f'(k(t)) - \delta - \rho)$$

Por otra parte, vamos a caracterizar la dinámica del capital por trabajador efectivo. Sabemos que la restricción de recursos de la economía viene dada por:

$$\dot{K}(t) = F(K(t), T(t)L(t)) - \delta K(t) - C(t)$$

Si dividimos la expresión anterior por $T(t)L(t)$, para dejarla expresada en términos de trabajador efectivo, quedaría:

$$\frac{\dot{K}(t)}{T(t)L(t)} = f(k(t)) - \delta k(t) - \frac{c(t)}{T(t)} \tag{9}$$

Para encontrar el término $\frac{\dot{K}(t)}{T(t)L(t)}$, consideremos que $k(t) = \frac{K(t)}{T(t)L(t)}$ y tomemos la derivada en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)}{T(t)L(t)} - k(t)g \\ \frac{\dot{K}(t)}{T(t)L(t)} &= \dot{k}(t) + k(t)g \end{aligned}$$

Juntando la ecuación (9) con el resultado anterior, llegamos a que:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \frac{c(t)}{T(t)} - (\delta + g)k(t)$$

Al observar la expresión anterior, notamos que no se puede normalizar el consumo respecto al progreso tecnológico, ya que la dinámica del capital depende de la evolución de $T(t)$. Por ende, también se necesitará la dinámica de $T(t)$ para caracterizar el equilibrio de esta economía. Luego, como $T(t)$ crece exponencialmente, tendremos que:

$$\dot{T}(t) = gT(t)$$

También tenemos dos condiciones iniciales dadas: $k(0)$, $T(0)$, junto con la condición de transversalidad acorde a este problema, que es:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0$$

De esta forma, tedremos 3 ecuaciones diferenciales y 3 condiciones, lo que permite encontrar la trayectoria completa de $[c(t), k(t), T(t)]_{t=0}^{\infty}$. A su vez, los precios se pueden recuperar a partir de las condiciones de optimalidad de la firma maximizadora de beneficios:

$$\begin{aligned} r(t) &= f'(k(t)) - \delta \\ w(t) &= f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) \end{aligned}$$

Para evaluar si existe un BGP de equilibrio, se debe cumplir que la razón capital-producto debe ser constante. En este caso:

$$\frac{K(t)}{Y(t)} = \frac{\frac{K(t)}{T(t)L(t)}}{\frac{F(K_t,T(t)L(t))}{T(t)L(t)}} = \frac{k(t)}{f(k(t))}$$

Luego, teniendo en cuenta que f es estrictamente cóncava, la única forma de que la expresión sea constante es que $k(t)$ sea una constante, es decir, k^*. Tomando $\dot{k}(t) = 0$, la dinámica del capital puede reescribirse como:

$$\frac{c(t)}{T(t)} = f(k^*) - (\delta + g)k^*$$

Lo que implica que $\frac{c(t)}{T(t)}$ debe ser constante y como $T(t)$ crece a tasa g, entonces $c(t)$ también debe crecer a tasa g, es decir, tomando la ecuación de Euler:

$$g = \frac{c(t) - \gamma}{\theta c(t)}(f'(k^*) - \delta - \rho)$$

No obstante, lo anterior es una contradicción, puesto que el lado izquierdo es una constante, mientras que el lado derecho varía en el tiempo ($c(t)$), lo cual prueba que la economía no presenta un BGP cuando posee una tasa de crecimiento positiva.

La razón de lo anterior, es que la elasticidad intertemporal de sustitución (definida a partir de la ecuación de Euler) no es constante, sino más bien decreciente en el nivel de consumo:

$$\varepsilon(c(t)) = -\frac{u''(c(t))c(t)}{u'(c(t))} = \frac{\theta c(t)}{c(t) - \gamma} \implies \frac{\partial \varepsilon(c(t))}{\partial c(t)} < 0$$

Así, para $r > \rho$, el crecimiento del consumo será creciente. De manera intuitiva, tendremos que a niveles más altos de consumo, el consumidor está más dispuesto a retrasar su consumo dado que el nivel de subsistencia pierde importancia.

d.

Respuesta

De la parte anterior, tenemos que la condición de transversalidad para esta economía viene representada por:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0$$

Además, desde la segunda CPO obtuvimos:

$$\dot{\lambda}(t) + \lambda(t)[f'(k(t)) - \delta - g - \rho] = 0$$

Integrando esta última expresión con respecto al tiempo:

$$\lambda(t) = \lambda(0) \cdot exp\left\{-\int_0^t (f'(k(s)) - \delta - \rho - g)ds\right\}$$

donde el término $\lambda(0)$ es positivo. Luego, reemplazando esto en la condición de transversalidad:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(0)\cdot exp\left\{-\int_0^t (f'(k(s))-\delta-\rho-g)ds\right\}k(t) &= 0\\ \lim_{t\to\infty} \lambda(0)\cdot exp\left\{-\int_0^t (f'(k(s))-\delta-g)ds\right\}k(t) &= 0\end{aligned}$$

De esta forma, a pesar que la economía no admite un BGP, se puede mostrar que el crecimiento será asintóticamente balanceado.

Partamos por considerar los siguientes resultados asintóticos:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} k(t) &= k^*\\ \lim_{t\to\infty} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= g = \frac{f'(k^*)-\delta-\rho}{\theta}\end{aligned}$$

Donde se utiliza el hecho de que $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(c(t)) = \theta\lim_{t\to\infty}\frac{c(t)}{c(t)-\gamma} = \theta$. Luego, considerando que se cumple $g\theta+\rho = f'(k^*)-\delta$, si se aplica el límite de la condición de transversalidad, se obtiene:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mu(0)\cdot exp\left\{-\int_0^t (g\theta+\rho-g)ds\right\}k^* &= 0\\ \lim_{t\to\infty} exp\{-(g\theta+\rho-g)t\} &= 0\end{aligned}$$

Se llega a la última expresión al eliminar constantes y resolver la integral. Por último, para que se cumpla que la exponencial tienda a 0, debe cumplirse que:

$$(\theta-1)g+\rho>0 \implies \rho>(1-\theta)g$$

Siendo esta última, la equivalencia que asegura condición de transversalidad.

e.

Respuesta

Como por enunciado nos dicen que $x(t) = c(t)-\gamma$, esto implica que $\dot{x}(t) = \dot{c}(t)$. Luego, si ocupamos la ecuación de Euler, tendremos que:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} &= \frac{\dot{c}(t)}{c(t)-\gamma}\\ &= \frac{1}{\theta}(f'(k(t))-\delta-\rho)\end{aligned}$$

Por otra parte, si reemplazamos $c(t) = x(t)+\gamma$ en la dinámica del capital que veníamos trabajando en letras anteriores, llegamos a:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \frac{x(t)}{T(t)} - \frac{\gamma}{T(t)} - (\delta+g)k(t)$$

De esta forma, podemos construir una variable auxiliar, $\tilde{x}(t) = \frac{x(t)}{T(t)} \implies \dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{T(t)} - \tilde{x}(t)g$.

Luego, si dividimos esta expresión por $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\tilde{x}}(t)}{\tilde{x}(t)} &= \frac{\dot{x}(t)}{\tilde{x}(t)T(t)} - g \\ &= \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} - g \\ &= \frac{1}{\theta}(f'(k(t)) - \delta - \rho - g) \end{aligned}$$

Por tanto, la dinámica del capital queda:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \tilde{x}(t) - \frac{\gamma}{T(t)} - (\delta + g)k(t)$$

Si juntamos esta última expresión con la condición de transversalidad encontrada en la letra anterior, donde $\lim_{t\to\infty} exp\left\{-\int_0^t (f'(k(s)) - \delta - g)ds\right\} k(t) = 0$; notamos que estamos en presencia de una economía casi idéntica a la vista en clases, excepto por el término $\gamma/T(t)$.

Ahora bien, si hacemos que t tienda a infinito en ambas dinámicas, tendremos que $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{k}(t) = \gamma/T(t) = 0$, lo que nos lleva al estado estacionario, que es representado por:

$$\begin{aligned} f'(k^*) &= \delta + \rho + g \\ \tilde{x}^* &= f(k^*) - (\delta + g)k^* \end{aligned}$$

Donde por convención se escoge $x(0)$, con el fin de asegurar que la solución se encuentre en el brazo estable del sistema que converge al estado estacionario. Por lo cual, el estado estacionario es exactamente el mismo que el visto en clases.

Por otra parte, sabemos que $k(t)$ y $\tilde{x}(t)$ serán constantes en el estado estacionario. En el caso de $\tilde{x}(t)$, debe cumplirse que $x(t)$ crezca a tasa g, por lo que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \frac{c(t)}{c(t) - \gamma} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = g$$

Con lo cual, hemos mostrado que el crecimiento será asintóticamente balanceado. No obstante, debemos hacer la distinción de que esta economía, en términos de transición hacia el estado estacionario, es diferente a lo visto en clases, ya que en este caso, tendremos que $\dot{k}(t) = 0$ nos lleva a:

$$\tilde{x}(t) = f(k(t)) - \frac{\gamma}{T(t)} - (\delta + g)k(t)$$

De esta forma, tendremos que en el espacio $(k, \tilde{x})$, $\tilde{x}(t)$ crecerá en el tiempo, dado que el término $\frac{\gamma}{T(t)}$ se irá haciendo cada vez más pequeño. Posteriormente, en el infinito, llegaremos a la ecuación que vimos anteriormente para el estado estacionario. De todas maneras, debemos tener claro que el sistema seguirá la trayectoria estable que converge hacia el estado estacionario.

3. Shocks anticipados, no anticipados, permanentes y temporales

a.

Respuesta

En clases desarrollamos el problema de Ramsey en unidades por trabajador, donde llegamos a la siguiente ecuación de Euler:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{r(t) - \rho}{\theta}$$

De esta forma, para encontrar la dinámica por trabajador efectivo, tomamos $\tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{T(t)}$ y diferenciamos con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\tilde{c}}(t)}{\tilde{c}(t)} &= \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - g \\
&= \frac{r(t) - \rho}{\theta} - g \\
&= \frac{r(t) - \rho - \theta g}{\theta} \\
&= \frac{(1-\tau)f'(k(t)) - \rho - \theta g}{\theta}
\end{aligned}$$

Donde para llegar a la última expresión, se utilizó $r(t) = (1-\tau)f'(k(t))$. Luego, en estado estacionario, como $\dot{\tilde{c}}(t) = 0$, se cumple que $(1-\tau)f'(k^*) = \rho + \theta g$. Por ende, si lo comparamos con el modelo visto en clases $f'(k)$ debe ser mayor y de esta forma, k debe ser menor para alcanzar $\dot{c}(t) = 0$. De esta forma, concluímos que la recta relacionada con $\dot{c}(t) = 0$ se mueve hacia la izquierda.

Por otra parte, para la dinámica del capital por trabajador efectivo, tenemos que la restricción de recursos de esta economía viene dada por:

$$\dot{K}(t) = F(K(t), T(t)L(t)) - \delta K(t) - C(t)$$

Luego, diviendo todo por $T(t)L(t)$, tenemos que:

$$\frac{\dot{K}(t)}{T(t)L(t)} = f(k(t)) - \delta k(t) - \tilde{c}(t) \tag{10}$$

Para conocer el término $\frac{\dot{K}(t)}{T(t)L(t)}$, tomamos $k(t) = \frac{K(t)}{T(t)L(t)}$ y derivamos con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)}{T(t)L(t)} - k(t)g \\
\frac{\dot{K}(t)}{T(t)L(t)} &= \dot{k}(t) + k(t)g
\end{aligned}$$

Si juntamos la expresión anterior con la ecuación (10), obtenemos:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \tilde{c}(t) - (\delta + g)k(t)$$

Así, vemos que la dinámica de capital por trabajador efectivo no varía si lo comparamos con el modelo visto en clases. Luego, tenemos que en estado estacionario:

$$\tilde{c}^* = f(k^*) - (n+g)k^*$$

De esta forma, dado que el impuesto es devuelto a los hogares por medio de transferencias a suma alzada, no se ve afectada la recta asociada a $\dot{k}(t) = 0$.

b.

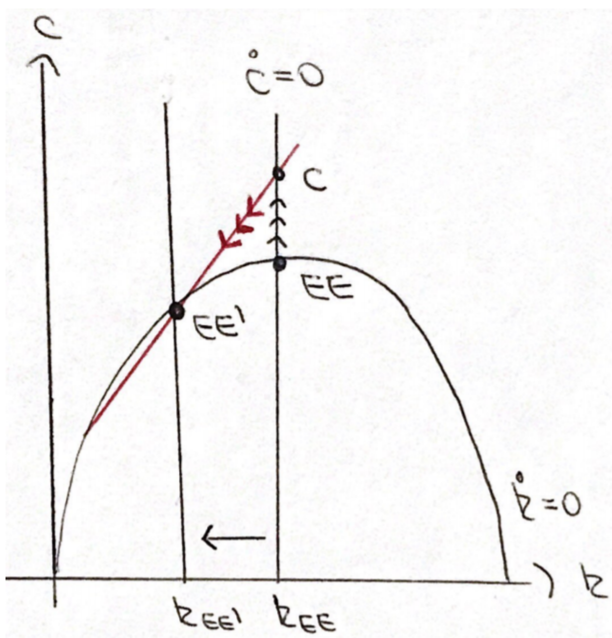
Respuesta

En este caso, tenemos que el consumo por trabajador efectivo puede saltar al momento en que se introduce el impuesto. No obstante, este salto no es inconsistente con la suavización de consumo derivada del comportamiento maximizador, puesto que el impuesto no podía ser previsto.

En cambio, el capital por trabajador efectivo viene dado y no puede saltar discontinuamente. Por lo tanto, cuando se introduce el impuesto, se mantiene el capital de estado estacionario del BGP anterior.

En síntesis, lo que ocurre es que cuando se introduce el impuesto en t_0, el consumo salta en dirección hacia arriba, desde EE al punto C. En este último punto, el retorno al ahorro y a acumular capital es menor, por lo que la gente pasa a tener un menor ahorro y mayor consumo. Luego, los vientos del diagrama, mueven a la economía de forma gradual hacia el nuevo estado estacionario (de C a EE'), donde se alcanza un menor nivel de consumo y capital que en el estado estacionario anterior (EE).

De forma gráfica:



c.

Respuesta

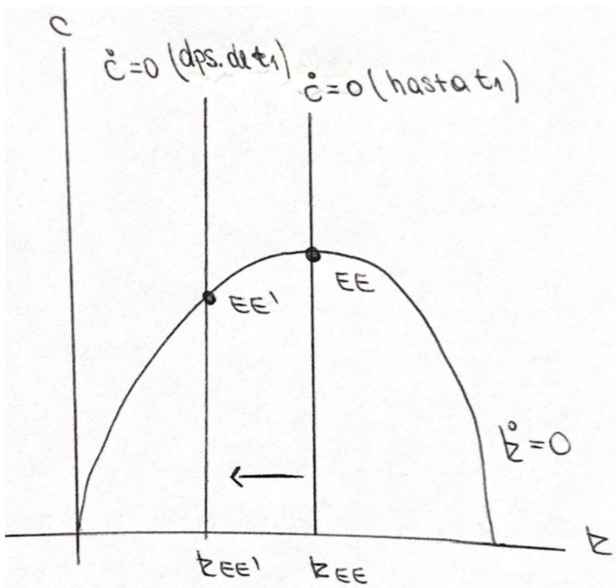
Antes de introducir el impuesto, es decir, hasta t_1, la dinámica del consumo viene dada por:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \rho - \theta g}{\theta}$$

De esta forma, en estado estacionario ($\dot{c}(t) = 0$), se cumple que: $f'(k(t)) = \rho + \theta g$. Posterior a t_1, en estado estacionario, se debe cumplir que: $(1 - \tau)f'(k(t)) = \rho + \theta g$.

Además, como la dinámica del capital no varía con la introducción del impuesto, tendremos que para mantener el lado izquierdo igual a $\rho + \theta g$, debe aumentar $f'(k(t))$, por lo que debe disminuir $k(t)$. Esto hace mover $\dot{c} = 0$ hacia la izquierda.

De forma gráfica:

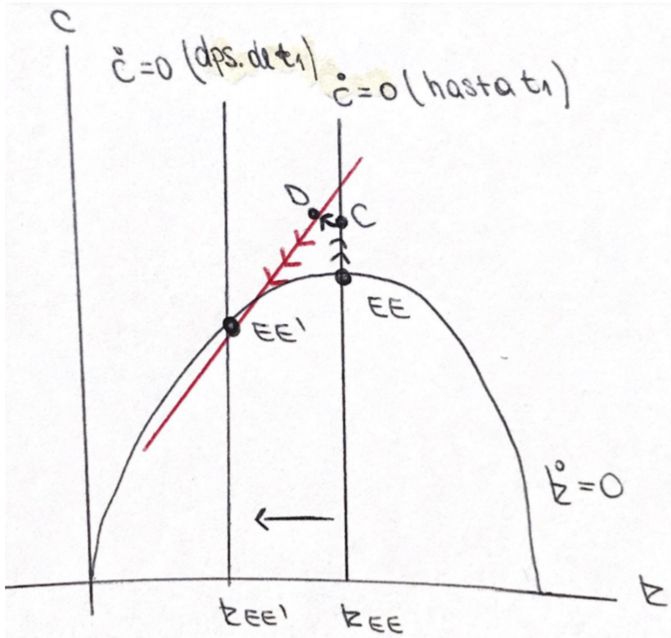


Notar que cuando se coloca el impuesto en t_1, el consumo no puede saltar discontinuamente, puesto que los agentes logran preveer que, al llegar el impuesto, el consumo debe ser más alto con el fin de aprovechar la mayor utilidad marginal. Sin embargo, como los agentes suavizan consumo, en el período entre t_0 y t_1 estos forman una trayectoria que evita el salto discontinuo de $c(t)$.

También es importante notar que la trayectoria entre t_0 y t_1 está gobernada por el estado estacionario inicial, es decir, $\dot{c}$ inicial, lo que definirá la trayectoria de suavización que tomará entre t_0 y t_1 el consumo.

La diferencia más importante es que los agentes reaccionan distinto ahora que saben que el impuesto será introducido en t_1; osea que son capaces de prever la situación y maximizar su consumo acorde con esto.

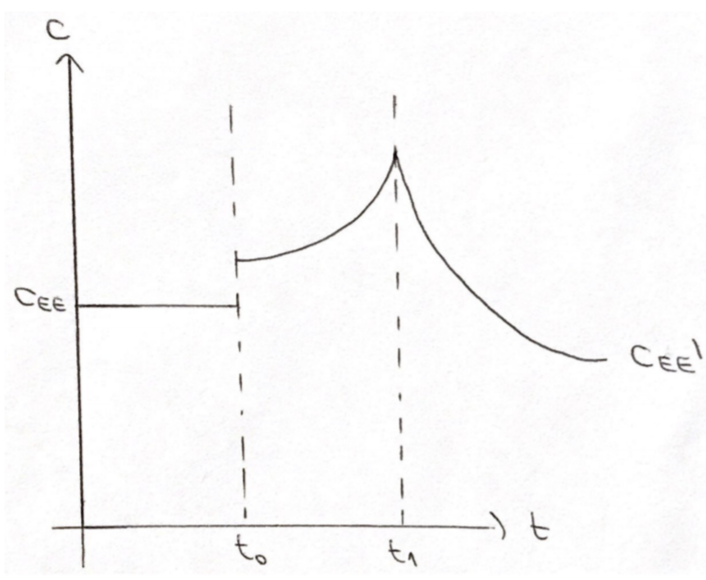
De esta manera, la economía debe estar en la nueva trayectoria hacia el nuevo estado estacionario para el momento en que se pone en marcha el impuesto. Así, en t_0, cuando se da aviso del impuesto, la economía pasa de EE a C. Posteriormente, entre t_0 y t_1 los vientos del diagrama hacen que nos movamos a un menor nivel de capital y mayor nivel de consumo, de forma que justo en t_1, la economía llega al punto D, es decir, sobre el nuevo brazo estable. Finalmente, el consumo y el capital empiezan a caer hasta llegar a EE'.



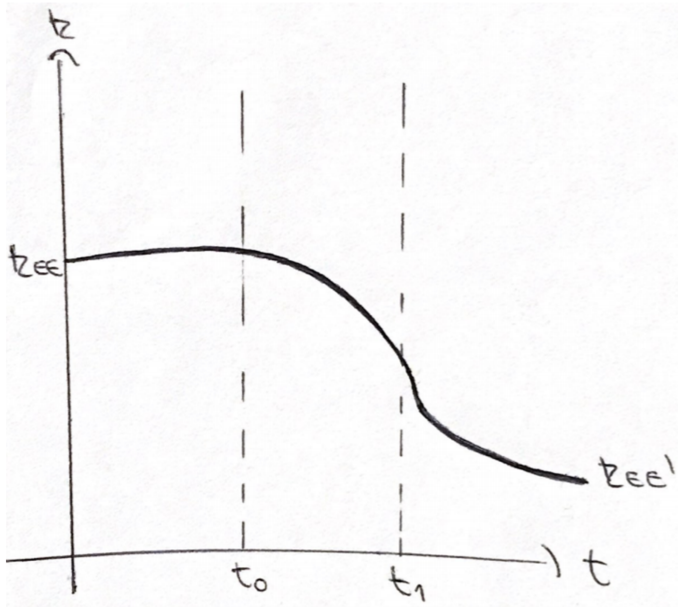
d.

Respuesta

Si seguimos trabajando la idea postulada en la letra anterior, tendremos que, por un lado, la variación del consumo en el tiempo será:



Por otro lado, la variación del capital en el tiempo viene representada por:



e.

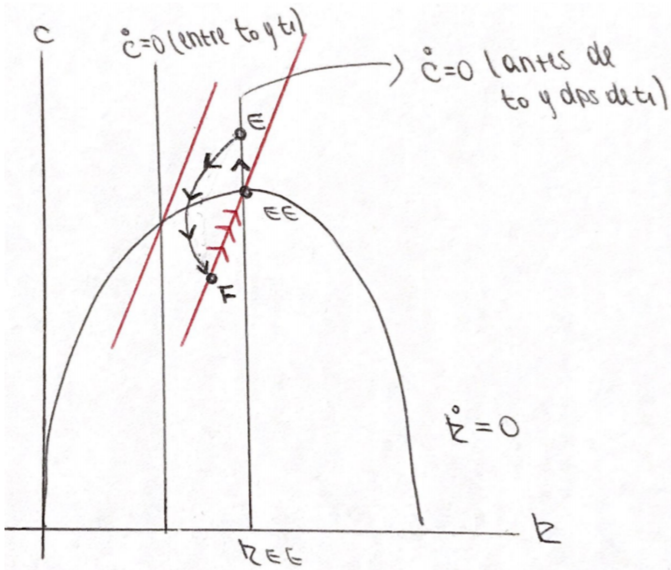
Respuesta

De la misma forma que antes, al haber impuestos entre t_0 y t_1, el consumo no puede saltar discontinuamente puesto que el agente suaviza consumo. Sin embargo, como después de t_1 no hay impuestos, se debe volver al equilibrio de estado estacionario inicial, es decir, el de antes de impuestos. Luego, para que esto ocurra, en t_1 se debe estar sobre el brazo estable que lleva al estado estacionario inicial.

Además, sabemos que $\dot{c}(t) = 0$ se desplaza hacia la izquierda puesto que necesitamos un mayor $f'(k(t))$ (análisis similar al anterior), la diferencia está en que esta dinámica gobierna sólo entre t_0 y t_1.

Por otra parte, en t_0 la economía se guía por el nuevo locus $\dot{c}(t) = 0$ que está más a la izquierda, por lo que, en ese instante, la economía salta a un punto E, y los vientos del diagrama hacen disminuir el capital y el consumo mientras se está sobre la curva $\dot{k}(t) = 0$ y posteriormente, bajo $\dot{k}(t) = 0$, disminuye el consumo y aumenta el capital.

Esta trayectoria permite que se pase del punto E al F. Entonces, justo en t_1 la economía está en F y vuelve al estado estacionario inicial, por lo que, se rige también por el locus $\dot{c}(t) = 0$ inicial, que lo lleva de F a EE por medio del brazo estable. Gráficamente:



Que el capital vuelva a subir bajo el locus $\dot{k}(t) = 0$ puede interpretarse como que los hogares anticipan que el impuesto se va (posterior a t_1) y, por lo tanto, estos tienen incentivos para volver a acumular capital.

f.

Respuesta

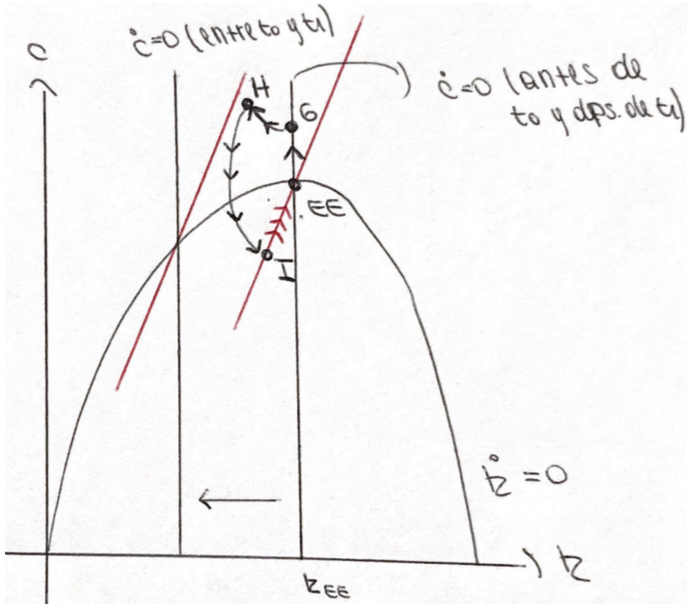
En este caso, como el gobierno anuncia con anticipación el impuesto a los ingresos por inversión y habrán dos períodos donde se pasa de no haber a haber impuestos, que es $t1$ y $t2$, los hogares anticipan esta situación y no pueden haber saltos discontinuos en dichos momentos del tiempo. Luego, como a partir de t_2 no habrán impuestos, en este momento la economía debe estar en el brazo estable del estado estacionario inicial.

Ahora bien, el locus $\dot{c}(t) = 0$ entre los períodos t_1 y t_2 se desplazará hacia la izquierda por las razones mencionadas en letras anteriores. No obstante, el resto del tiempo, el locus $\dot{c}(t) = 0$ que gobierna es el del estado estacionario inicial.

Por lo tanto, tendremos que en t_0 la economía salta de EE a G ya que los hogares anticipan el impuesto en t_1 (por el anuncio del gobierno), por lo que los vientos del locus $\dot{c}(t) = 0$ inicial lleva a un menor capital pero mayor consumo.

Así, en t_1, se llega al punto H, donde gobiernan los vientos del nuevo locus $\dot{c}(t) = 0$, provocando que el capital y el consumo disminuyan mientras se encuentren sobre la curva $\dot{k}(t) = 0$. Luego, una vez bajo el locus $\dot{k}(t) = 0$, el consumo sigue disminuyendo, pero el capital comienza a aumentar (todo de forma gradual). Así, en t_2, la economía llega al punto I y como vuelve a regir el locus $\dot{c}(t) = 0$ del principio, el brazo estable lleva a la economía desde I a EE que era el estado estacionario inicial.

Gráficamente:


c
ċ=0 (entre t0 y t1)
ċ=0 (antes de t0 y dps. de t1)
H
G
EE
I
k̇=0
k
kEE