Emparejamiento Bilateral uno - a - uno

Supuestos

- M, W grupos finitos de individuos
- Preferencias estrictas, completas y transitivas
- c/$w \in W$ tiene un ranking $R(w)$ de $M \cup \{w\}$ (y viceversa)

Emparejamiento: es una función $\mu: M \cup W \to M \cup W$: para c/par $(m, w) \in M \times W$ se cumple

i) $(\mu(m), \mu(w)) \in (W \cup \{m\}) \times (M \cup \{w\})$

ii) $m = \mu(w) \iff w = \mu(m)$

Bloqueo

A. Por un par de individuos:
si $\exists (m,w) \in M \times W$: m y w prefieren estar juntos en vez de estar con $\mu(m)$ y $\mu(w)$.

B. Por un individuo:
si $\exists z \in M \cup W$ que prefiere estar solo a mantenerse emparejado con $\mu(z)$

Individualmente racional
μ es I.R. si no puede ser bloqueado por ningún individuo

Estable: μ estable si es I.R. y no es bloqueable por un par de individuos

Teorema 1: Gale & Shapley (1962)

- El conjunto de emparejamientos estables $\neq \emptyset$
- Con A. Diferida siempre puedo obtener un μ estable.

↳ **Algoritmo de Aceptación Diferida**

ETAPA 1

A. c/$m \in M$ hace una propuesta a su w preferido (si es que hay alguno aceptable).

B. c/$w \in W$ acepta TEMPORALMENTE su oferta más atractiva y rechaza las otras.

ETAPA K

A. c/$m \in M$ que fue rechazado hace otra propuesta a su alt. preferida (dentro de las que aún no les ha propuesto)

B. c/$w \in W$ mantiene la alt. más atractiva entre las que escogió en la etapa previa y la actual.

→ cuando no hay + propuestas → PARA.

Emparejamientos óptimos

- M-óptimo si ningún individuo en M prefiere otro matching estable.
(análogo para W-óptimo)

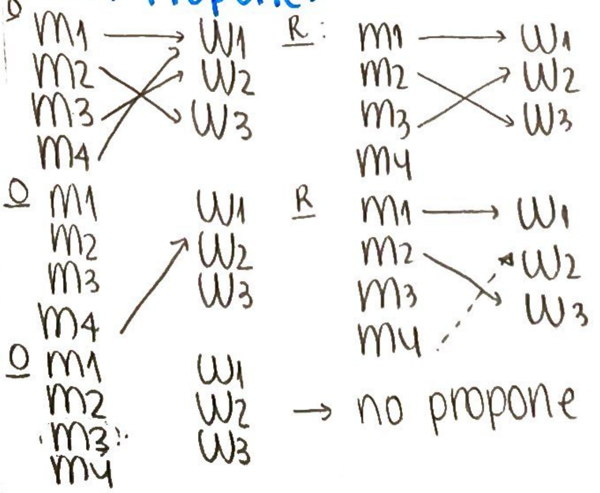
Teorema 2: Gale & Shapley (1962)
Si utilizamos A.D. y los individuos m proponen ⇒ se implementa el M-óptimo (análogo para W).

Ejemplo:

$R = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$
$W = \{w_1, w_2, w_3\}$

$R(m_1)$	$R(m_2)$	$R(m_3)$	$R(m_4)$	$R(w_1)$	$R(w_2)$	$R(w_3)$
w_1	w_3	w_2	w_1	m_2	m_4	m_1
w_3	w_1	m_3	w_2	m_1	m_2	m_4
w_2	w_2	w_1	w_3	m_4	m_3	m_2
m_1	m_2	w_3	m_4	w_1	m_1	m_3
				m_3	w_2	w_3

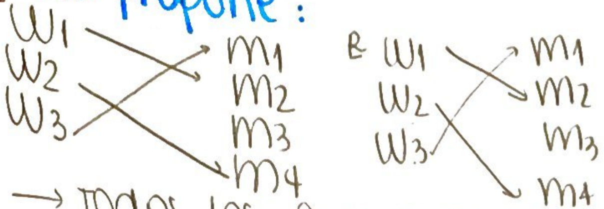
→ M Propone:



$\Rightarrow \mu_M(m_1) = w_1$; $\mu_M(m_2) = w_3$

$\mu_M(m_3) = m_3$; $\mu_M(m_4) = w_2$

→ W. propone:



→ Todos los que proponen son aceptados

$\Rightarrow \mu_W(m_1) = w_3,\ \mu_W(m_2) = w_1,$

$\mu_W(m_3) = m_3,\ \mu_W(m_4) = w_2$

⇒ no son idénticos siempre los M-óptimos de los W-óptimos. //

Def: un conjunto de individuos $A \subseteq M \cup W$ considera μ tan bueno cuanto μ' si:

para $\forall a \in A$: $\mu(a) \neq \mu'(a)$ tenemos que:

$$\boxed{\mu(a)\ R(a)\ \mu'(a) \Leftrightarrow \mu \geq_A \mu'}$$

Teorema 3: Knuth (1976)

Si μ, μ' son emparejamientos estables

$$\boxed{\mu \geq_M \mu' \Leftrightarrow \mu' \geq_W \mu}$$

Corolario: El emparejamiento M-óptimo junta a $\forall w \in W$ con la alternativa menos aceptable entre las implementables de forma estable.

Núcleo: $\mu \in$ Núcleo si $\nexists$ una coalición $\in M \cup W$ que puedan bloquearlo.
Es decir, que puedan emparejarse entre sí y generar una asignación Pareto superior para la coalición.

Teorema 4: Roth y Sotomayor (1990).

$$\boxed{\text{Núcleo (uno a uno)} \quad \text{conjunto } \mu \text{ estables.}}$$

Teorema 5: Gale & Sotomayor (1985)

En un μ estable los que quedan solos son siempre los mismos.

Teorema 6: Gale & Sotomayor (1985)

Cuando un nuevo individuo m entra al mercado, ningún agente en W está peor si se implementa μ_M o μ_W

Teorema 7: Roth, Gale y Sotomayor (1982-1985)

Para los $m \in M$ el emparejamiento μ_M es débilmente Pareto óptimo en el conjunto de los μ I.R.

Ahora estudiamos el comportamiento cuando hay un planner:

- Sea un mercado bilateral 1 a 1: $(M, W, (R(z))_{z \in M \cup W})$
Los individuos informan $[R' = (R'(z))_{z \in M \cup W}]$
El planner implementa $[\phi(R')]$

Emparejamiento centralizado estable: si $\forall R'$, $\phi(R')$ es estable.

Teorema 8: Roth (1982)

$\nexists\ \phi$ estable en el cual reportar las verdaderas preferencias es una estrategia dominante $\forall$ individuo

Compatible con incentivos: Dado un mercado bilateral 1 a 1 $(M, W, R(z))_{z \in M \cup W})$ y $S \in \{M, W\}$ diremos que un ϕ estable es compatible con incentivos para los $s \in S$ si: $\nexists\ s' \subseteq S$ que tenga incentivos a reportar pref. falsas dado los otros diciendo la verdad

Teorema 9 Dubins & Freedman

Todo ϕ estable: $\phi(R) = \mu_S$ es compatible con incentivos para los $s \in S$.

Emparejamientos Bilaterales muchos-a-uno

- mas de un individuo en W (estudiantes x ej) se puede emparejar con un mismo individuo en M (colegios x ej)

Emparejamiento: μ es una correspondencia.

$\mu : M \cup W \longrightarrow M \cup W$

que cumple

$w \in \mu(m) \iff m = \mu(w)$

$m_k = \mu(m_i) \iff k = i$

$w_s = \mu(w_s) \iff s = j$

$\# \{h \in M \cup W : h \in \mu(m)\} \leq \underbrace{q_m}_{\text{"capacidad"}} \forall m \in M$

Bloqueo: μ puede ser:

* Bloqueado por $w \in W$ si:

$\boxed{w \, P^w \, \mu(w)}$

* Bloqueado por $m \in M$ si:

$\exists w \in \mu(m)$ que es inaceptable para m

↳ Prefiere no llenar el cupo a aceptar a w.

* Bloqueado por el par de individuos: $(m, w) \in M \times W$ cuando se cumple:

(i) $m \, P^w \, \mu(w)$

(ii) $w \, P^m \, w'$ para algún $w' \in \mu(m)$ o bien $w \, P^m \, m$ si $\# \mu(m) < q_m$

Estable: μ es estable si no puede ser bloqueado por un individuo o por un par de individuos.

A. Aceptación Diferida

↳ lo modificamos de la siguiente forma:

- Reemplazamos c/$m \in M$ por q_m representantes con las pref. $m \rightarrow$ busca emparejarse con un $w \in W$.
- modifico las pref. de m para ordenar a los representantes.

Teorema: un emparejamiento muchos-a-uno es estable $\boxed{\text{SSI}}$ el emparejamiento asociado en el modelo uno-a-uno inducido es estable

→ comentarios:

- El A.D. aplicado al modelo uno-a-uno inducido genera modelos estables en el modelo muchos-a-uno.
- Para el que hace las propuestas → es su óptimo
- Conjunto de estudiantes que consiguen cupo
- nº vacantes llenas

→ coinciden en todos los estables.

Teorema Hospital Rural: Roth (1986)

cada hospital que no cubre sus cupos en un emparejamiento estable, mantendrá el mismo nº de vacantes en cualquier otro emparejamiento estable.

Elección de Colegios

↳ colegios: no tienen pref. sobre los estudiantes, pero sí un orden de prioridad

↳ solo nos interesa el bienestar del estudiante.

Boston → mecanismo de emparejamiento.

- Etapa 1: se empareja a c/colegio con los estudiantes que lo pusieron en 1era preferencia
  ↳ de uno en uno. siguiendo el ranking de prioridad y el max. de cupos
- Etapa k: Para los estudiantes que aún no se asignan se considera su k-ésima pref.
  ↳ se asignan a los colegios que aún tienen cupos de uno en uno siguiendo su ranking

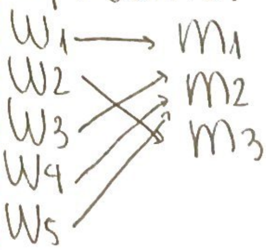
→ Es P.E., pero puede ser inestable e incentivar a mentir.

* Ejemplo:

$P(m_1)$	$P(m_2)$	$P(m_3)$	$P(w_1)$	$P(w_2)$	$P(w_3)$	$P(w_4)$	$P(w_5)$
w_1	w_2	w_3	m_1	m_3	m_2	m_2	m_2
w_5	w_3	w_5	m_2	m_2	m_3	m_3	m_1
w_4	w_5	w_4	m_3	m_1	m_1	m_1	m_3
w_2	w_1	w_2					
w_3	w_4	w_1					

$q_{m_1} = q_{m_2} = 2$; $q_{m_3} = 1$

Aplicamos Boston



→ m_1 acepta a w_1
→ m_3 acepta a w_2
→ m_2 acepta a w_3, w_5
→ w_4 queda sin colegio
→ iteramos

$w_4 \to m_3$

→ m_3 no acepta a w_4 porque no le quedan cupos

$w_4 \to m_1$

→ m_1 lo acepta

$\Rightarrow \mu(m_1) = \{w_1, w_4\}$
$\mu(m_2) = \{w_3, w_5\}$
$\mu(m_3) = \{w_2\}$

→ Notemos que $\{m_3, w_4\}$ bloquean ⇒ <u>no es estable</u>.

→ si w_4 miente y reporta a m_3 como mejor opción ⇒ Hubiera quedado mejor

→ Hay incentivos a <u>mentir</u>

→ Este μ es <u>PE</u>

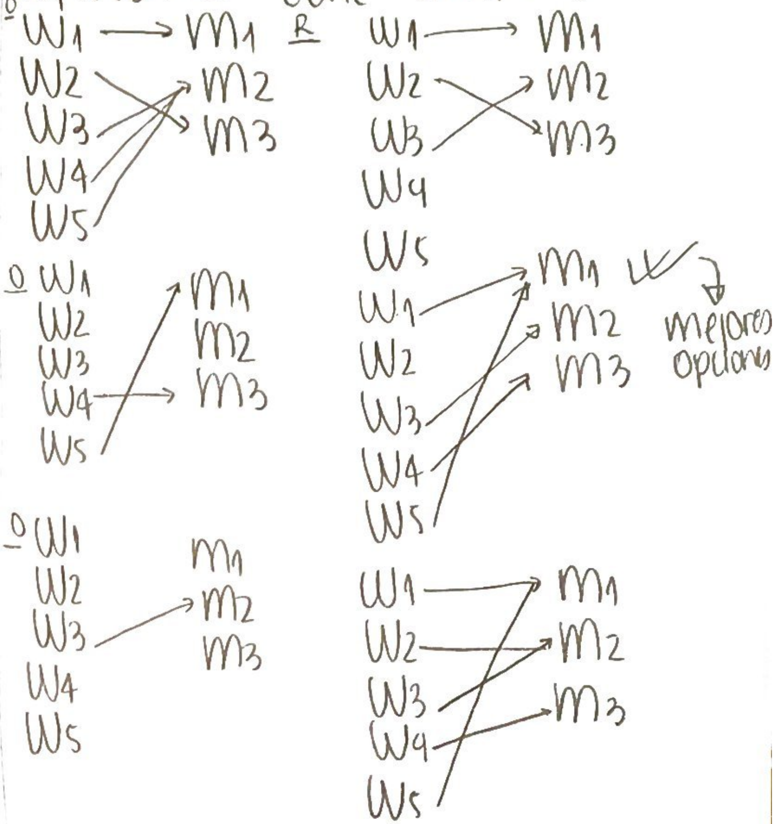
Gale-Shapley: Aplica A.D. con los estudiantes haciendo las propuestas y los colegios aceptando de uno en uno.

Teorema: El mecanismo G-S W-óptimo es estable y strategy proof para los estudiantes. Pero no siempre es P.E.

* Ejemplo

→ misma matriz anterior y mismos cupos

Aplicamos Gale-Shapley



$\Rightarrow \mu(m_1) = \{w_1, w_5\}$
$\mu(m_2) = \{w_2, w_3\}$
$\mu(m_3) = \{w_4\}$

→ Es estable y no hay incentivo a mentir.

→ $\{w_2, w_4\}$ podrían intercambiar y ambos estarían mejor → No es P.E

Top Trading cycles

Definimos un ciclo como una lista ordenada de colegios y estudiantes:

m_{i1} anuncia a w_{i1} que anuncia a m_{i2} ... etc hasta que un alumno anuncia a m_{i1}.

ciclo = $(m_{i1}, \_\_, w_{ik})$

Etapa 1: c/ estudiante anuncia su colegio preferido y c/ colegio anuncia su estudiante 1ero en prioridad.

↳ Para c/ ciclo los estudiantes son asignados al colegio que anunciaron.

↳ Los que llenan sus vacantes salen.

Etapa k: c/ estudiante sin colegio anuncia su colegio favorito entre los que tienen vacantes. Y c/ colegio anuncia su alumno favorito

↳ Para c/ ciclo los estudiantes son asignados a su colegio favorito

↳ Los que se llenan (colegios) se van.

STOP: cuando todos los estudiantes han sido asignados.

Teorema Abdulkadiroglu & Sonmez (2003)

El mecanismo Top trading cycles es P.E. y s. proof para los estudiantes. Pero puede ser inestable

* Ejemplo:

→ misma matriz y cupos.

E1 $m_1 \rightleftarrows w_1$: ciclo 1

$m_2 \to w_2 \to m_3 \to w_3$: ciclo 2

$m_3 \to w_3 \to m_2 \to w_2$: ciclo 3

→ $w_1 \to m_1$

→ $w_2 \to m_3$

→ $w_3 \to m_2$

→ sale del algoritmo m_3, w_1, w_2, w_3

E2 $m_1 \to w_5 \to m_2$ ↳ ciclo 1

→ $w_5 \to m_2$

→ sale del algoritmo m_2, w_5

$m_1 \to w_4$

→ $m_1 \to w_4$

→ Es decir,

$\mu(m_1) = \{w_1, w_4\}$

$\mu(m_2) = \{w_3, w_5\}$

$\mu(m_3) = \{w_2\}$

→ Esto es P.E (para los estudiantes), pero no estable. (m_3, w_4) bloquean.