Guía 1

Nombre: Alberto Belmar
Rut: 19.801.271-8

Pregunta 1

– Ejercicio 1: Procesos estacionarios con muchos ceros

Datos: 1.- $\varepsilon_t \sim iid.\ N(0,1)$

2.- $x_t = \varepsilon_t$

3.- $y_t = (-1)^t \varepsilon_t$

a) Un proceso z es débilmente estacionario si su esperanza, varianza (que debe ser acotada) y cov. (entre z_t y z_{t-j}) no dependen del tiempo para ningún $j \geq 0$. Probaremos que esto se cumple para x_t e y_t:

– Primero para x_t:

(1) $E(x_t) = E(\varepsilon_t)$ $\longrightarrow$ pero sabemos que $\varepsilon_t \sim iid.$ con media cero

$E(x_t) = 0$

(2) $E(x_t x_{t-j}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j})$

$E(x_t x_{t-j}) = E(\varepsilon_t) E(\varepsilon_{t-j})$ $\longrightarrow$ por propiedad de la esperanza

$E(x_t x_{t-j}) = 0$ $\longrightarrow$ por el mismo argumento que antes, $\varepsilon_t \sim iid$ con media cero

(3) $V(x_t) = E(x_t^2) - E^2(x_t)$

$V(x_t) = E(\varepsilon_t^2) - \cancel{E^2(\varepsilon_t)}^{0}$

$V(x_t) = 1$ $\longrightarrow$ ya que $V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) - \cancel{E^2(\varepsilon_t)}^{0} = E(\varepsilon_t^2)$ y sabemos que $\varepsilon_t \sim iid$ con varianza 1.

(*) Podemos decir entonces que x_t es débilmente estacionario.

– Ahora veremos el caso para y_t:

(1) $E(y_t) = E[(-1)^t \varepsilon_t]$ $\longrightarrow$ el $(-1)^t$ es una constante, sale de la $E(\cdot)$

$E(y_t) = (-1)^t \cancel{E(\varepsilon_t)}^{0}$

$E(y_t) = 0$

(2) $V(y_t) = E(y_t^2) - \cancel{E^2(y_t)}^{0}$ por la parte anterior

$V(y_t) = E[(-1)^{2t} \varepsilon_t^2]$ $\longrightarrow$ notamos que $(-1)^{2t}$ es 1, pq (-1) estará elevado siempre a un número par

$V(y_t) = E(\varepsilon_t^2)$ $\longrightarrow$ recordemos que $V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) - \cancel{E^2(\varepsilon_t)}^{0} = 1$

$V(y_t) = 1$

(3) $E(y_t y_{t-j}) = E\left[(-1)^t \varepsilon_t \cdot (-1)^{t-j} \varepsilon_{t-j}\right]$

$E(y_t y_{t-j}) = E\left[(-1)^{2t-j} \varepsilon_t \varepsilon_{t-j}\right]$

$E(y_t y_{t-j}) = (-1)^{2t-j} E(\cancel{\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}})^0$

$E(y_t y_{t-j}) = 0$

(*) También podemos afirmar que y_t es débilmente estacionario, ya que ni su esperanza, ni varianza ni cov. (entre y_t e y_{t-j}) dependen del tiempo.

R: Por lo tanto y según lo visto en clases, como x_t e y_t son procesos Gausianos y a la vez débilmente estacionarios, esto implica estacionariedad fuerte.

b) Veremos si se cumplen las tres condiciones para $z_t \equiv x_t + y_t$

(1) $E(z_t) = E(\varepsilon_t + (-1)^t \varepsilon_t)$

$E(z_t) = E(\varepsilon_t) + (-1)^t E(\varepsilon_t)$

$E(z_t) = 0$

(2) $E(z_t z_{t-j}) = E\left[(\varepsilon_t + (-1)^t \varepsilon_t)(\varepsilon_{t-j} + (-1)^{t-j} \varepsilon_{t-j})\right]$

$E(z_t z_{t-j}) = E\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-j} + (-1)^{t-j} \varepsilon_{t-j} \varepsilon_t + (-1)^t \varepsilon_t \varepsilon_{t-j} + (-1)^{2t-j} \varepsilon_t \varepsilon_{t-j}\right]$

$E(z_t z_{t-j}) = E(\cancel{\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}})^0 + (-1)^{t-j} E(\cancel{\varepsilon_{t-j} \varepsilon_t})^0 + (-1)^t E(\cancel{\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}})^0 + (-1)^{2t-j} E(\cancel{\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}})^0$

$E(z_t z_{t-j}) = 0$

(3) $V(z_t) = E(z_t^2) - E^2(\cancel{z_t})^0$

$V(z_t) = E(\varepsilon_t^2 + (-1)^{2t} \varepsilon_t^2 + 2\varepsilon_t (-1)^t \varepsilon_t)$

$V(z_t) = E(\varepsilon_t^2) + (-1)^{2t} E(\varepsilon_t^2) + 2(-1)^t E(\varepsilon_t^2) \longrightarrow$ con $(-1)^{2t} = 1$

$V(z_t) = 1 + 1 + 2(-1)^t$

$V(z_t) = 2 + 2(-1)^t$

$V(z_t) = 2(1 + (-1)^t)$

R: De esta forma, como $V(z_t) = E(z_t^2)$ depende del valor de t (es cero si t es un número impar y cuatro si t es par), decimos que z_t no es débilmente estacionario.

c) Con $u_t \equiv \xi_t \varepsilon_t$, veremos si es débilmente estacionario:

(1) $E(u_t) = E(\xi_t \varepsilon_t)$

$E(u_t) = E(\xi_t) E(\cancel{\varepsilon_t})$ ^{0}

$E(u_t) = 0$

(2) $E(u_t u_{t-j}) = E(\xi_t \varepsilon_t \xi_{t-j} \varepsilon_{t-j})$

$E(u_t u_{t-j}) = E(\xi_t \xi_{t-j}) E(\cancel{\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}})$ ^{0}

$E(u_t u_{t-j}) = 0$

(3) $V(u_t) = E(\xi_t^2 \varepsilon_t^2) - E^2(\cancel{\xi_t \varepsilon_t})$ ^{0}

$V(u_t) = E(\xi_t^2) E(\varepsilon_t^2) \longrightarrow$ Sabemos que $E(\xi_t) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto $E(\xi_t^2) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$.

$V(u_t) = \frac{1}{2} \cdot 1$

$V(u_t) = \frac{1}{2}$

R: Así, afirmamos que u_t es débilmente estacionario

d) La diferencia fundamental radica en que un proceso es determinístico y el otro es estocástico. Es decir, sabemos con seguridad cuando z_t es igual a cero (cuando t es impar), mientras que u_t cambiará entre cero y uno de manera aleatoria.

Pregunta 2

- Ejercicio 2: Transmisión de innovaciones correlacionadas

Datos: 1.- $x_t = \alpha_x x_{t-1} + \varepsilon_t^x$ con $V(\varepsilon_t^x) = \sigma^2_{\varepsilon,x}$

2.- $y_t = \alpha_y y_{t-1} + \varepsilon_t^y$ con $V(\varepsilon_t^y) = \sigma^2_{\varepsilon,y}$

(*) Para el desarrollo de este ejercicio, es importante recordar que para cualquier proceso x e y se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\mathrm{cov}\left(\sum_k x_k, y\right) = E\left(\sum_k x_k y\right) - E\left(\sum_k x_k\right) E(y)$

$= \sum_k E(x_k y) - \sum_k E(x_k) E(y)$ → ya que la $E(\cdot)$ es un operador lineal que se puede intercambiar con la sumatoria

$= \sum_k \left[E(x_k y) - E(x_k) E(y) \right]$

$= \sum_k \mathrm{cov}(x_k, y)$

Pd: Esta igualdad anterior es rigurosamente cierta solo cuando $\sum_k$ es una suma finita $(0 \leq k \leq N)$. Por lo tanto, aquí estaríamos escribiendo que:
$\mathrm{cov}\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} x_k, y\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \mathrm{cov}(x_k, y)$, lo cual asumimos que se cumple.

(2) $\mathrm{cov}(\alpha x, y) = E(\alpha x y) - E(\alpha x) E(y)$ → con α una constante

$= \alpha E(x y) - \alpha E(x) E(y)$

$= \alpha \left[E(xy) - E(x) E(y) \right]$

$= \alpha \, \mathrm{cov}(x, y)$

- Ahora bien, dado que x_t e y_t son procesos estacionarios $AR(1)$, los podemos representar como procesos $MA(\infty)$ de la siguiente forma

$$x_t = \sum_{k \geq 0} (\alpha_x)^k \varepsilon_{t-k}^x$$

$$y_t = \sum_{j \geq 0} (\alpha_y)^j \varepsilon_{t-j}^y$$

- Por lo tanto, con esta representación de los procesos x_t e y_t, tenemos que:

$$cov(x_t, y_t) = cov\left(\sum_{k\geq 0} (\alpha_x)^k \varepsilon^x_{t-k}, \sum_{j\geq 0} (\alpha_y)^j \varepsilon^y_{t-j}\right)$$

- Ahora, reescribimos la ecuación anterior pero utilizando las propiedades (1) y (2) del comienzo:

$$\begin{aligned} cov(x_t, y_t) &= \sum_k cov\left((\alpha_x)^k \varepsilon^x_{t-k}, \sum_j (\alpha_y)^j \varepsilon^y_{t-j}\right) \\ &= \sum_k \sum_j cov\left((\alpha_x)^k \varepsilon^x_{t-k}, (\alpha_y)^j \varepsilon^y_{t-j}\right) \\ &= \sum_k \sum_j (\alpha_x)^k (\alpha_y)^j \, cov\left(\varepsilon^x_{t-k}, \varepsilon^y_{t-j}\right) \end{aligned}$$

(*) Por indicación del enunciado, sabemos que cuando $k=j$:

$$\rho = \frac{cov(\varepsilon^x_{t-k}, \varepsilon^y_{t-j})}{\sigma_{\varepsilon,x}\,\sigma_{\varepsilon,y}}$$

$$cov(\varepsilon^x_{t-k}, \varepsilon^y_{t-j}) = \rho\,\sigma_{\varepsilon,x}\,\sigma_{\varepsilon,y}$$

- Por lo tanto, si seguimos trabajando la expresión para $cov(x_t, y_t)$ cuando $k=j$, tendríamos que:

$$\begin{aligned} cov(x_t, y_t) &= \sum_i (\alpha_x)^i (\alpha_y)^i \, cov(\varepsilon^x_{t-i}, \varepsilon^y_{t-i}) \\ &= \sum_i (\alpha_x)^i (\alpha_y)^i \rho\,\sigma_{\varepsilon,x}\,\sigma_{\varepsilon,y} \quad \rightarrow \text{reemplazamos } cov(\varepsilon^x_{t-k}, \varepsilon^y_{t-j}) = \rho\,\sigma_{\varepsilon,x}\,\sigma_{\varepsilon,y} \text{ cdo. } k=j \\ &= \rho\,\sigma_{\varepsilon,x}\,\sigma_{\varepsilon,y} \sum_i (\alpha_x \alpha_y)^i \\ &= \frac{\rho\,\sigma_{\varepsilon,x}\,\sigma_{\varepsilon,y}}{1-\alpha_x\alpha_y} \quad \rightarrow \text{Por la propiedad de sumatoria en que } \sum_{k=0}^{\infty} B^k = \frac{1}{1-B} \end{aligned}$$

(*) De esta forma, la correlación entre x_t e y_t sería:

$$\rho(x_t, y_t) = \frac{cov(x_t, y_t)}{\sigma(x_t)\,\sigma(y_t)}$$

$$\rho(x_t, y_t) = \frac{\rho\,\sigma_{\varepsilon,x}\,\sigma_{\varepsilon,y}}{(1-\alpha_x\alpha_y)\sigma(x_t)\sigma(y_t)} \longrightarrow$$ (solo reemplazamos la expresión que teníamos para $cov(x_t, y_t)$)

(*) Además, dado que x_t e y_t son procesos AR(1) estacionarios, podemos escribir:

$$\sigma(x_t) = (V(x_t))^{1/2} \longrightarrow$$ (con $(1-\alpha_x L)x_t = \varepsilon_t^x \Rightarrow x_t = \varepsilon_t^x/(1-\alpha_x L) \Rightarrow x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_x^i \varepsilon_{t-i}^x$)

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_x^{2i}\,V(\varepsilon_{t-i}^x)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\sigma_{\varepsilon,x}^2}{1-\alpha_x^2}\right)^{1/2} \longrightarrow$$ (se ocupa la propiedad de la sumatoria en que $\sum_{n=0}^{\infty} B^{2n} = \frac{1}{1-B^2}$)

$$= \frac{\sigma_{\varepsilon,x}}{(1-\alpha_x^2)^{1/2}}$$

$$\sigma(y_t) = \frac{\sigma_{\varepsilon,y}}{(1-\alpha_y^2)^{1/2}} \longrightarrow$$ (siguiendo la misma lógica anterior)

- Luego, reemplazando estas expresiones encontrados para $\sigma(x_t)$ y $\sigma(y_t)$ en la expresión que teníamos para $\rho(x_t, y_t)$:

$$\rho(x_t, y_t) = \frac{\rho\,\cancel{\sigma_{\varepsilon,x}}\,\cancel{\sigma_{\varepsilon,y}}}{(1-\alpha_x\alpha_y)} \cdot \frac{(1-\alpha_x^2)^{1/2}(1-\alpha_y^2)^{1/2}}{\cancel{\sigma_{\varepsilon,x}}\,\cancel{\sigma_{\varepsilon,y}}}$$

$$\rho(x_t, y_t) = \frac{\cancel{\rho}\,(1-\alpha_x^2)^{1/2}(1-\alpha_y^2)^{1/2}}{1-\alpha_x\alpha_y} \leq \cancel{\rho} \longrightarrow$$ (Lo que nos piden, mostrar que $\rho(x_t,y_t) \leq \rho$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(1-\alpha_x^2)^{1/2}(1-\alpha_y^2)^{1/2}}{1-\alpha_x\alpha_y}} \leq 1 \longrightarrow$$ (Lo que debemos probar que se cumple bajo ciertas condiciones)

(*) Además, dado que x_t e y_t son procesos estacionarios, tenemos que α_x y α_y están dentro del círculo unitario, es decir, $0 \leq \alpha_x \leq 1$ y $0 \leq \alpha_y \leq 1$. Así, la expresión $(1-\alpha_x^2)$, $(1-\alpha_y^2)$ y $(1-\alpha_x\alpha_y)$ son positivas y por lo tanto:

$$\frac{(1-\alpha_x^2)^{1/2}(1-\alpha_y^2)^{1/2}}{1-\alpha_x\alpha_y} \leq 1 \quad , \text{ si:}$$

$$\longrightarrow (1-\alpha_x^2)^{1/2}(1-\alpha_y^2)^{1/2} \leq (1-\alpha_x\alpha_y) \quad / \text{ elevamos al cuadrado}$$

$$(1-\alpha_x^2)(1-\alpha_y^2) \leq (1-\alpha_x\alpha_y)^2 \longrightarrow$$

Se sigue manteniendo el signo $\leq$ de la desigualdad, ya que: $0{,}4 \leq 0{,}5 \Rightarrow (0{,}4)^2 \leq (0{,}5)^2$ ✓✓

$$\cancel{1} - \alpha_x^2 - \alpha_y^2 + \cancel{\alpha_x^2\alpha_y^2} \leq \cancel{1} - 2\alpha_x\alpha_y + \cancel{\alpha_x^2\alpha_y^2}$$

$$0 \leq \alpha_x^2 + \alpha_y^2 - 2\alpha_x\alpha_y$$

$$0 \leq (\alpha_x - \alpha_y)^2 \longrightarrow$$

Lo cual siempre se cumplirá ya que un número al cuadrado es siempre mayor o igual que cero. Se cumplirá con igualdad si y sólo si $\alpha_x = \alpha_y$.

R: Por lo tanto, concluímos que la correlación entre x_t e y_t es siempre menor o igual que ρ, con igualdad si y sólo si $\alpha_x = \alpha_y$.

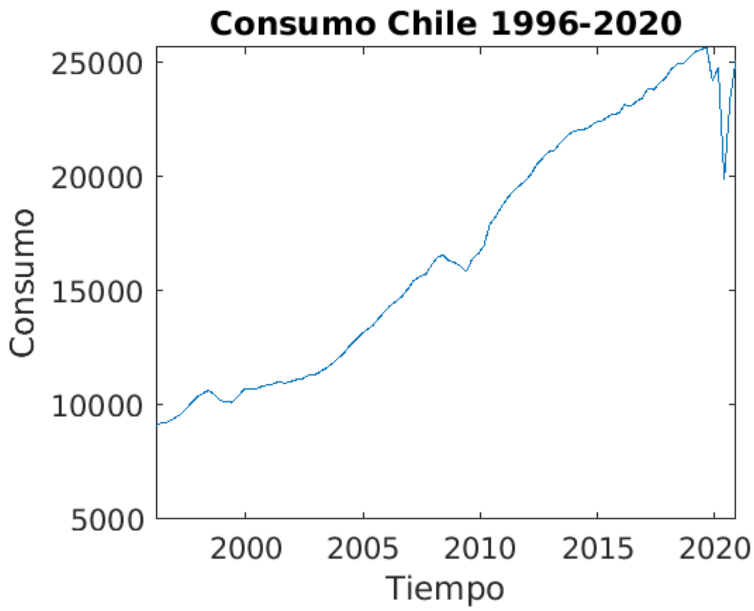
(*) La intuición detrás de este resultado es que la correlación entre x_t e y_t se ve influenciada por otros términos (como α_x, α_y), por lo que, cuando estos son iguales, es decir, $\alpha_x = \alpha_y$, la correlación va a ser provocada o dirigida por la correlación entre las innovaciones. Lo que quiere decir que en dicho caso, donde $\alpha_x = \alpha_y$, $\rho(x_t, y_t) = \rho$. En los otros casos, $\rho(x_t, y_t) < \rho$.

Pregunta 3

(a)

Respuesta

A continuación se presenta el gráfico para la serie de consumo:



(b)

Respuesta

Se realiza en el mfile.

(c)

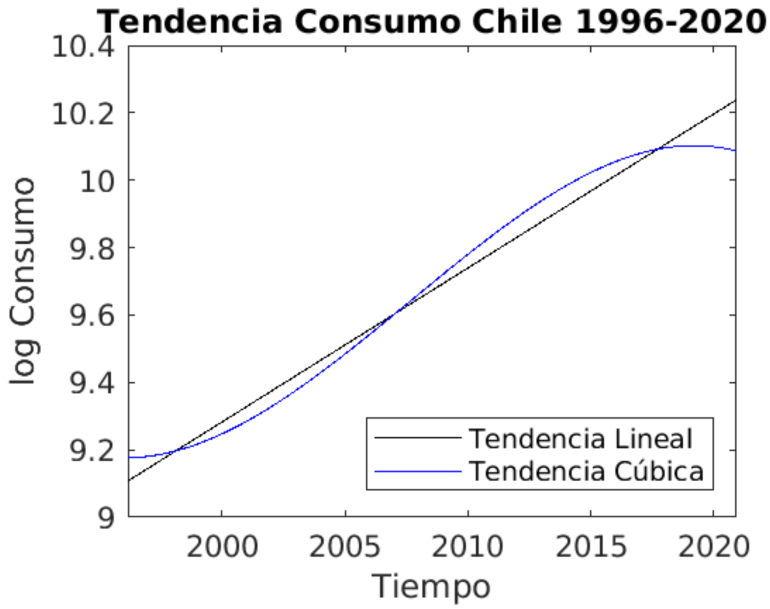
Respuesta

Se realiza en el mfile.

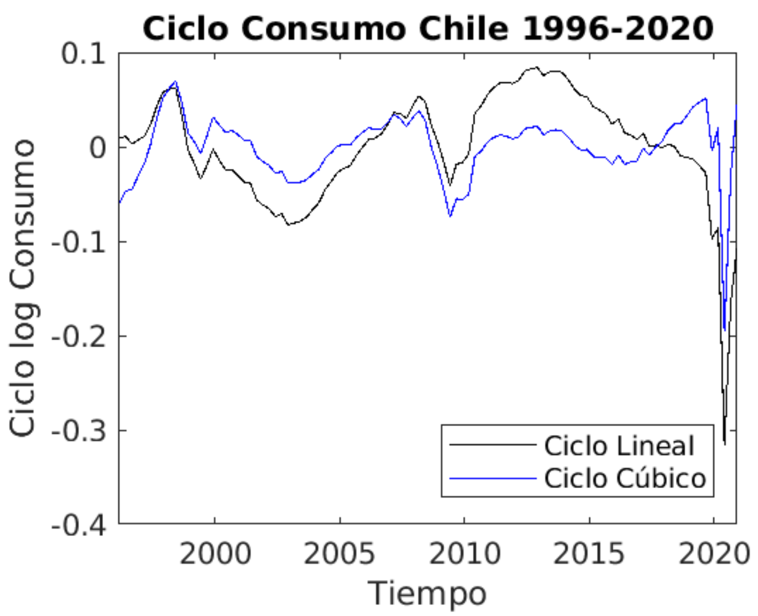
(d)

Respuesta

Primero, se grafican las tendencias para ambos polinomios:



Ahora, se grafican los ciclos de los polinomios:



(e)

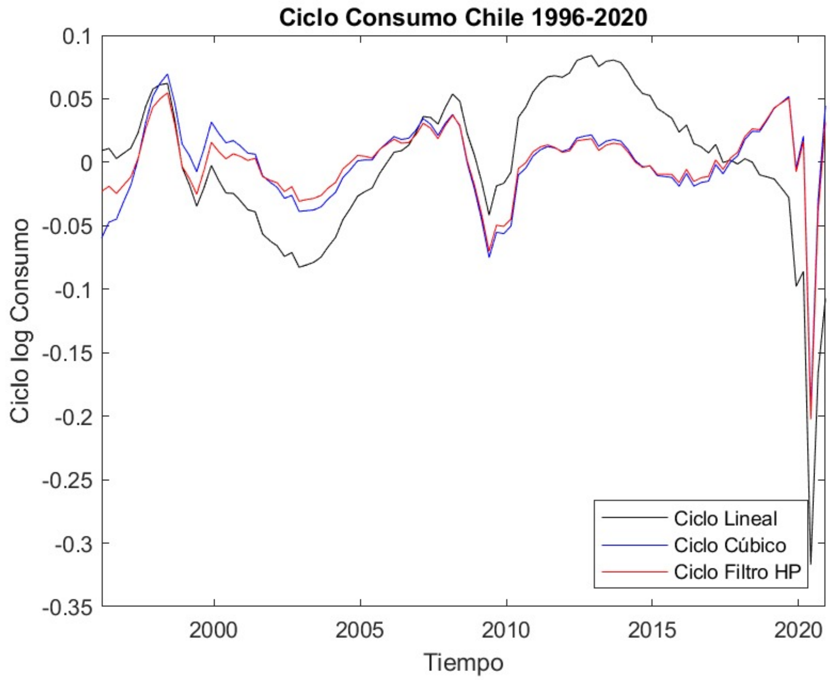
Respuesta

Se realiza en el mfile.

(f)

Respuesta

Se grafican las 3 componentes cíclicas de la serie:



También se presentan las desviaciones estándar (σ) para cada ciclo:

σ *Lineal*	σ *Cúbico*	σ *Filtro HP*
0.0594	0.0343	0.0310

A partir de este último gráfico y las desviaciones estándar calculadas para cada ciclo, podemos decir que el ciclo cúbico y del filtro HP son similares en cuanto a volatilidad, siendo un poco menos volátil el del filtro HP.

Además, notamos que ambos ciclos a partir del año 2007 aproximadamente son prácticamente iguales, indicando que a partir de dicho año, el ciclo de un polinomio cúbico se ajusta prácticamente de igual manera que el ciclo con filtro HP al ciclo original de la serie.

Por otra parte, vemos que el ciclo asociado a un polinomio lineal es más volátil que los otros dos. Esto ocurre porque la cúbica tiene un mayor número de parámetros asociados (o más grados de libertad), por lo que la tendencia cúbica captura una mayor parte de las fluctuaciones y el componente cíclico es menos volátil. A su vez, el ciclo con filtro HP es el que ocupa más grados de libertad, por lo que es el menos volátil.

Por lo tanto, el ciclo cúbico y con filtro HP se ajustan mejor al verdadero ciclo de la serie que el ciclo de un polinomio lineal y a partir del año 2007 aproximadamente, tanto el ciclo cúbico como el del filtro HP se ajustan casi de la misma forma. Sin embargo, si consideramos todos los periodos de tiempo, el ciclo con filtro HP es menos volátil y se ajusta mejor al ciclo de la serie original.