ENECO670/01 (Macroeconomía II) Otoño 2014
Profesor: E. Engel Universidad de Chile
Ayudantes: Marco Rojas y Damián Vergara

Guía 6: Soluciones

1. Modelo de q de Tobin con Depreciación

a. Siguiendo la notación de clases y la forma funcional del costo, tenemos que el problema es:

$$\begin{aligned} V(k_t) &= \max \int_0^{\infty} e^{-rt} \left(f(k_t)^{1-\eta} - i_t - \frac{b i_t^2}{2k_t} \right) dt \\ s.a: & \quad \dot{k} = i - \delta k_t \end{aligned}$$

Por tanto el Hamiltoniano corriente es:

$$H = f(k_t)^{1-\eta} - i_t - \frac{b i_t^2}{2k_t} + q_t(i_t - \delta k_t)$$

Note que el multiplicador se ha denotado como q_t dado que $q_t = \frac{\lambda_t}{p_t} = \lambda_t$ bajo los supuestos del enunciado.

Las condiciones de primer orden del problema son (para simplificar la notación se dejan de lado los t):

$$\frac{dH}{di} = -1 - \frac{bi}{k} + q = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dH}{dk} + \dot{q} - rq = (1-\eta) f(k)^{-\eta} f'(k) + \frac{b}{2}\left(\frac{i}{k}\right)^2 - \delta q + \dot{q} - rq = 0 \tag{2}$$

$$\frac{dH}{dq} = \dot{k} - i + \delta k = 0 \tag{3}$$

De (1) sigue que:

$$\frac{i}{k} = \frac{q-1}{b} \tag{4}$$

Con lo cual se obtiene lo pedido.

b. Escribamos (3) como:

$$\dot{k} = i\frac{k}{k} - \delta k$$

Luego, usando (4) obtenemos:

$$\dot{k} = \left(\frac{q-1}{b} - \delta\right) k$$

Imponiendo $\dot{k} = 0$, tenemos:

$$\overline{q} = 1 + b\delta$$

Luego, el q consistente con $\dot{k} = 0$ ($\overline{q}$) tanto dentro del estado estacionario ($\dot{k} = \dot{q} = 0$) como fuera es una función creciente de δ.

c. Recordemos que q es el precio sombra del capital instalado en la fábrica, es decir, es el monto que la firma estará dispuesta a pagar por una unidad marginal de capital. Luego, a mayor depreciación q deberá ser mayor para que la firma quiera invertir, dado el menor rendimiento obtenido por una unidad marginal de capital instalado.

d. El sistema dinámico está caracterizado por:

$$\dot{k} = \left(\frac{q-1}{b} - \delta\right) k \tag{5}$$

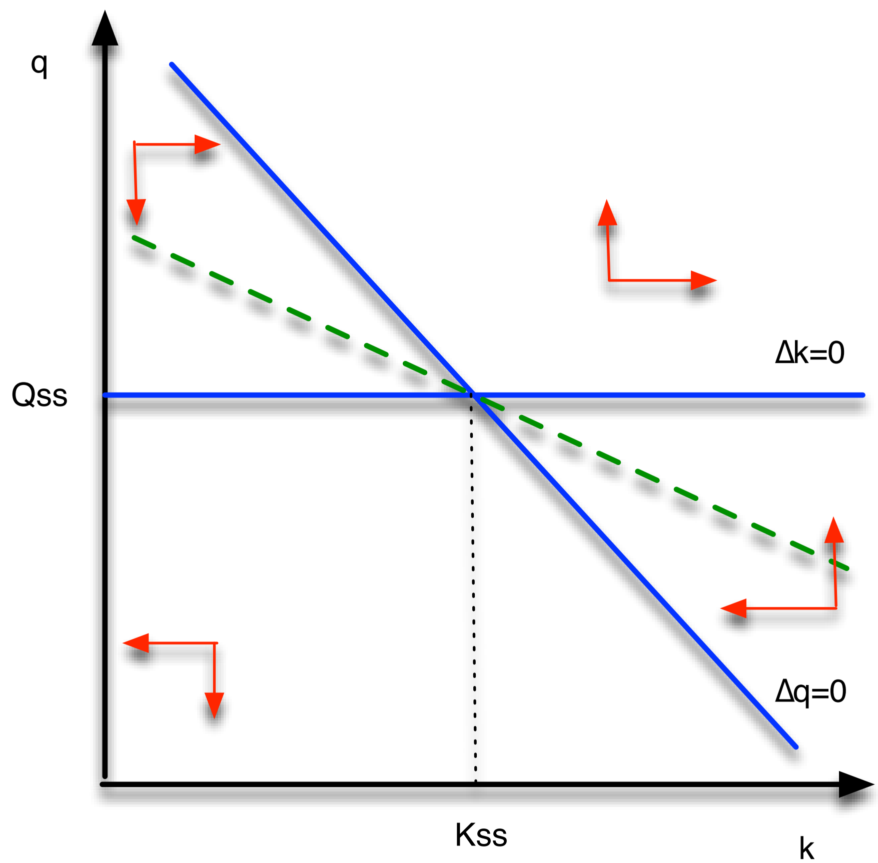
$$\dot{q} = (r+\delta)q - (1-\eta)f(k)^{-\eta}f'(k) - \frac{1}{2}\frac{(q-1)^2}{b} \tag{6}$$

La primera ecuación fue derivada en la parte (b.) y la segunda sigue de reordenar (2) y usar (4).

Como ya se derivó en (b), el espacio geométrico consistente con $\dot{k}$ es:

$$\overline{q} = 1 + b\delta \tag{7}$$

Por otro lado, el enunciado nos dice que supongamos que el espacio geométrico que caracteriza $\dot{q} = 0$ tiene pendiente negativa. Por tanto, el diagrama de fases será:



<u>Vientos:</u> De (5) tenemos que:

$$\dot{k} = \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad q > 1 + b\delta \\ < 0 & \text{si} \quad q < 1 + b\delta \end{cases}$$

Por otro lado, respecto a $\dot{q}$, hagamos el siguiente ejercicio. Supongamos estamos en la región a la izquierda de la curva que caracteriza $\dot{q} = 0$. Comparemos (6) en dicho punto (q, k) con (6) en otro punto con el mismo q pero sobre la curva en que $\dot{q} = 0$ $(q, k' > k)$. Entonces obtenemos:

$$\dot{q} = (1 - \eta)\left(f(k')^{-\eta} f'(k') - f(k)^{-\eta} f'(k)\right) < 0$$

Dado que f es creciente y cóncavo. Si hacemos el mismo ejercicio considerando un punto a la derecha de la curva obtendremos un resultado análogo con el signo contrario.

El sistema tiene un brazo estable, pues en la zona superior izquierda los vientos *soplan* hacia el centro, al igual que en la zona inferior derecha. Luego, por dichas zonas pasa el brazo estable que ha sido representado por la línea punteada verde.

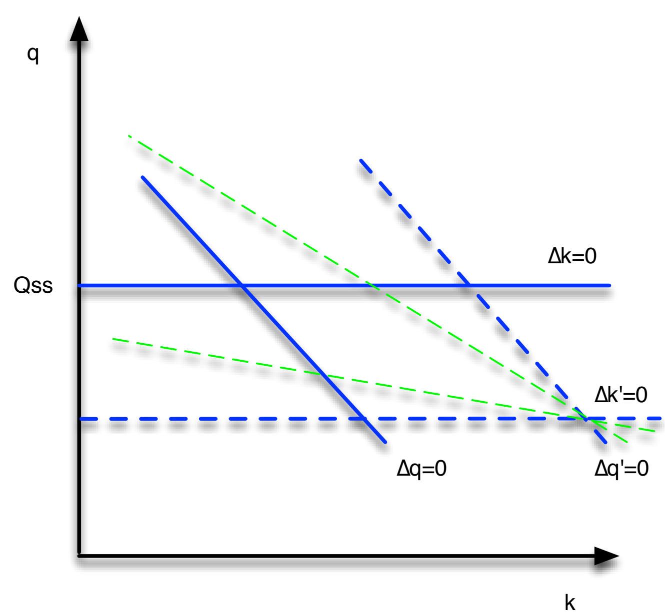
e. De (7) se puede concluir que $\overline{q}$ cae ante la caída de b.

Por otro lado,de (6) imponiendo $\dot{q} = 0$ tenemos:

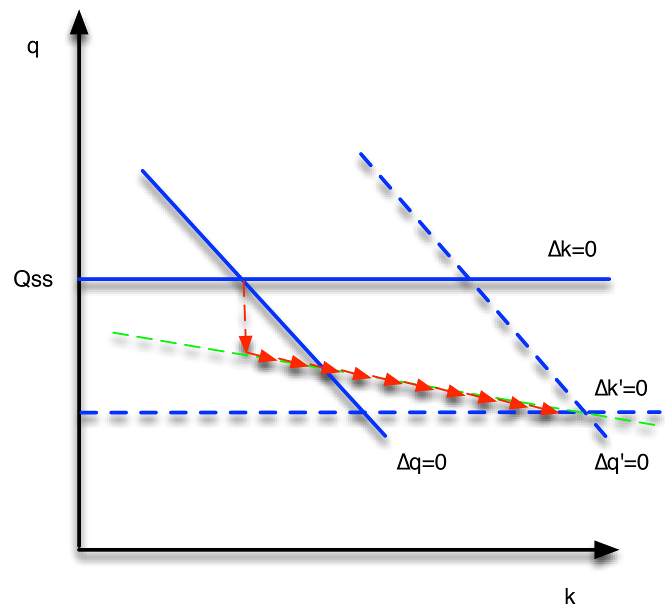
$$(r + \delta)q = (1 - \eta)f(k)^{-\eta}f'(k) + \frac{1}{2}\frac{(q-1)^2}{b}$$

Para un q dado, la única manera de mantener la igualdad dada la caída de b es que aumente k. Luego, dado el movimiento de ambas curvas, k sube y q baja en el nuevo estado estacionario.

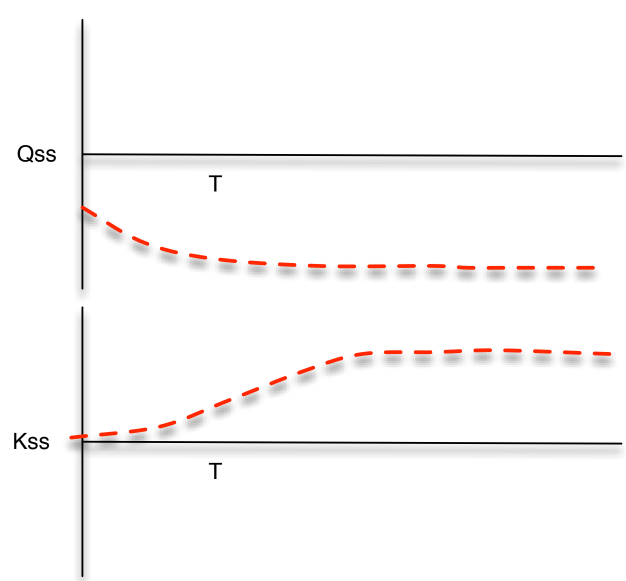
f. El efecto es ambiguo. Dependerá de si el nuevo brazo estable pasa por sobre o bajo el antiguo estado estacionario. Recordando que q es el valor presente del valor del capital instalado, los dos efectos contrapuestos son: (i) El menor costo de ajuste asociado a invertir aumenta el valor del capital instalado hoy (desplazamiento hacia la derecha de la curva $\dot{q} = 0$) y (ii) Dado que en el nuevo estado estacionario habrá mayor capital, el capital instalado hoy tendrá una menor productividad marginal en el futuro (desplazamiento hacia abajo de $\dot{k} = 0$).



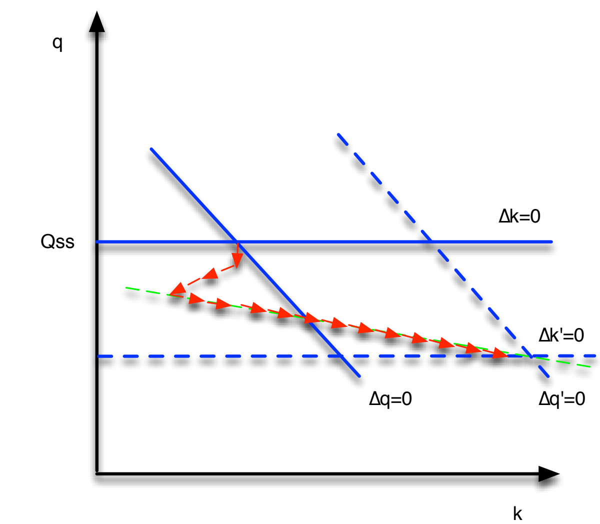
g. La siguiente figura muestra el trayecto en el diagrama de fase (flechas rojas). Como se puede apreciar, en el momento del cambio q cae discontinuamente hasta el nuevo brazo estable:

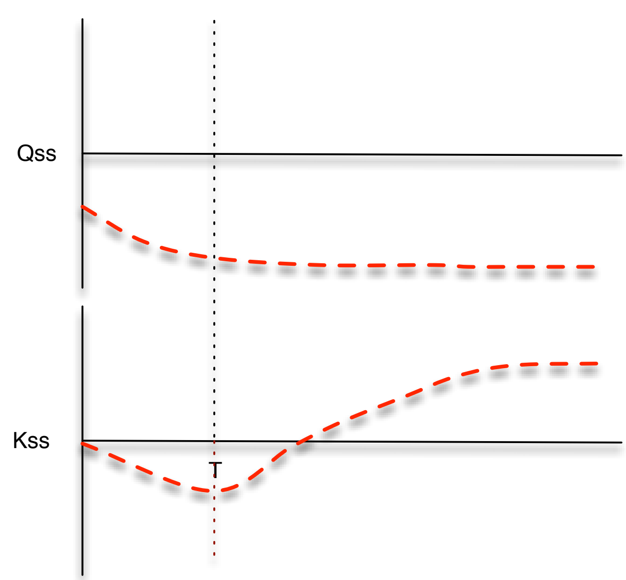


La siguiente figura muestra las trayectorias de q y k:



h. La siguiente figura muestra en rojo la trayectoria de q y k hacia el nuevo equilibrio en este caso. Cabe mencionar, con respecto al caso anterior, que ahora las firmas se adelantan postergando la inversión para más adelante, dado que será más barato hacerlo (eligen el único salto de q en $t = 0$ tal que en $t = T$ llegan al brazo estable del nuevo equilibrio):





2. Impuesto anticipado y modelo q

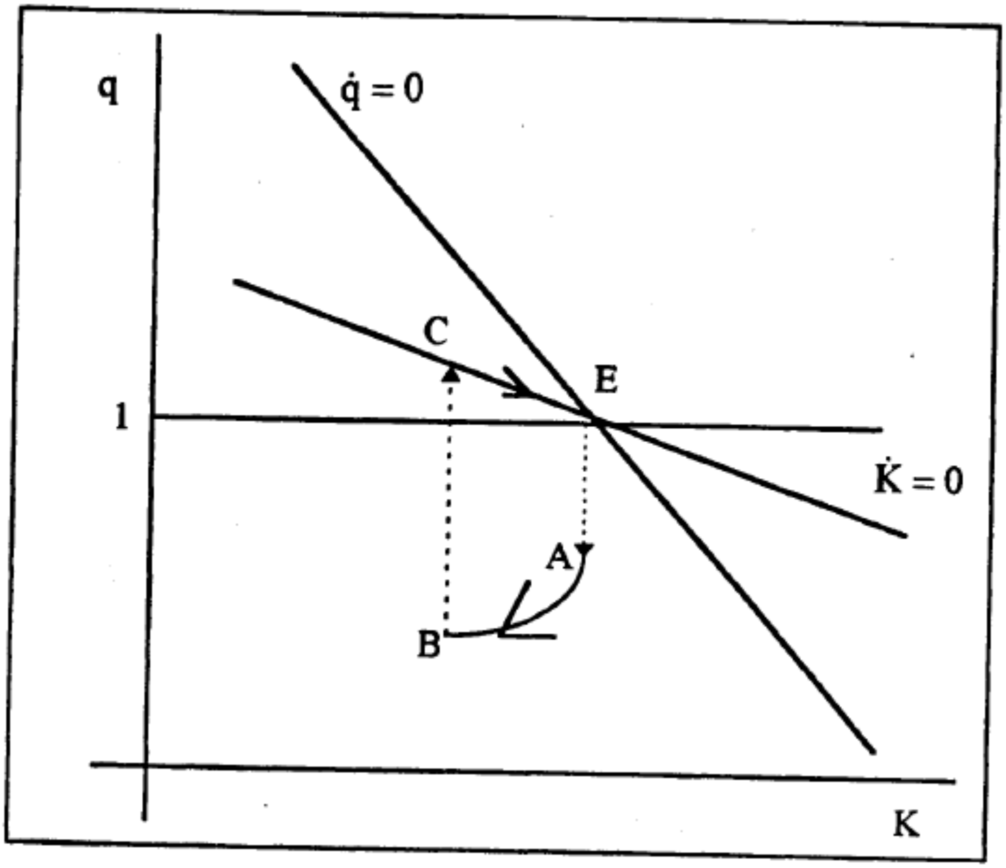
En primer lugar, mostraremos que existirá un salto discontinuo anticipado de q justo en T. Supongamos existe un mercado de acciones de la firma. Luego, el precio de mercado del capital justo antes de T, $q(T-\epsilon)$, debe ser $(1-f)$ veces el valor del mercado del capital un instante después de T, $q(T+\epsilon)$. De lo contrario, los accionistas soportarían pérdidas anticipadas que si podrían evitar vendiendo las acciones.

En otras palabras, dado que en T se paga $1-f$ por unidad de capital, entonces la única manera que los dueñños de capital no quieran librarse de él es que justo antes del pago del impuesto éste valga $(1-f)$ veces lo que vale justo después del pago del impuesto.

Por tanto, se cumplirá la siguiente relación:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{q(T-\epsilon)}{q(T+\epsilon)} = 1-f$$

Así, al momento del anuncio q debe caer discontinuamente desde el equilibrio de largo plazo, de tal manera que justo en $t=T$ pueda subir $\frac{1}{1-f}$ veces su valor para caer en el brazo estable que lo lleve al equilibrio de largo plazo nuevamente. Esta dinámica se muestra en la siguiente figura:



La intuicióón es bastante directa. Las firmas disminuyen su stock de capital suavemente para así no pagar tanto impuesto. Luego, una vez pagado el impuesto, el valor marginal del capital instalado sube de golpe incentivando a las firmas así a acumular capital nuevamente.

Con la discusión anterior en mente, se pueden responder las preguntas del enunciado:

a. Inmediatamente después del anuncio cae q y el capital no se ve afectado.

b. Ambos caen suavemente.

c. K no se ve afectado en el instante, pero q sube discontinuamente $\frac{1}{1-f}$ su valor para llegar al brazo estable.

3. Modelo de q de Tobin y Subsidio a la Inversión

a. Generalmente, los costos de ajuste no forman parte del costo de capital y su medición no es trivial. Bajo este supuesto, seriá razonable que el subsidio del gobierno no los involucrara. Si los costos de ajuste pudieran incluirse como costo de capital, por ejemplo instalación de nuevo capital que requiriera capacitación de la mano de obra para ser puesto en operación, podría argumentarse a favor de considerarlos en el subsidio. Por lo tanto, el uso del supuesto depende de si es que se consideran los costos de instalación, reemplazo y aprendizaje que implica la inversión en capital.

b. Escribiendo el Hamiltoniano corriente:

$$H\left(I_t, K_t\right) = \pi\left(K_t, x_t\right) - (1-\sigma) I_t - C\left(I_t, K_t\right) + \lambda_t I_t.$$

Obtenemos la condición de primer orden con respecto al control:

$$H_I = 0 \Leftrightarrow q_t = (1-\sigma) + b\tfrac{I_t}{K_t},$$

en donde se utilizó que $p \equiv 1$ y $q_t = \frac{\lambda_t}{p}$.

Despejando para I_t y considerando la dinámica de K_t sin depreciación:

$$I_t = \left[\tfrac{q_t - (1-\sigma)}{b}\right] K_t = \dot{K}_t.$$

Finalmente se tiene que en estado estacionario ($\dot{K}_t = 0$), $q^* = (1-\sigma)$. El subsidio a la inversión disminuye su costo, con lo que en este caso las firmas invertirán hasta que el valor del capital y el subsidio excedan el costo de capital.

Obtenemos la condición de primer orden con respecto al estado:

$$-H_K = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t \Leftrightarrow rq_t = \dot{q}_t + \pi_k\left(K_{t,}x_t\right) + C_K\left(I_t, K_t\right),$$

$$\text{con } C_K\left(I_t, K_t\right) = -\tfrac{1}{2b}\left(q_t - 1\right)^2 \text{ y}$$

$$\pi_k\left(K_{t,}x_t\right) = (1-\eta)F\left(K_t\right)^{-\eta} F_K\left(K_t\right)$$

.

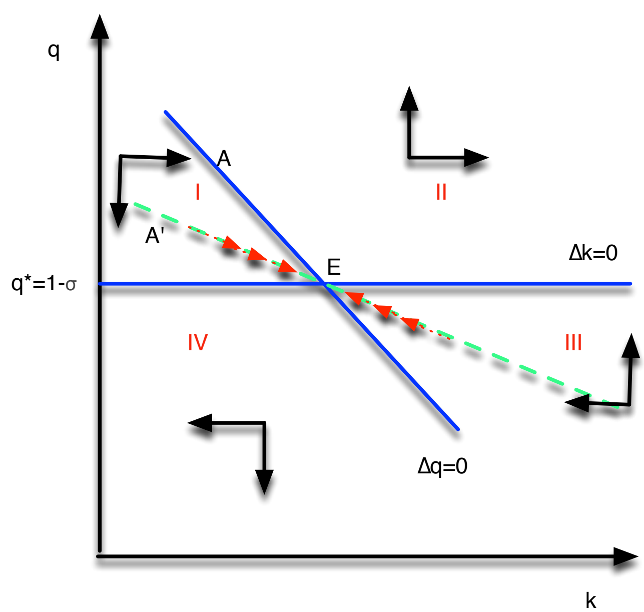
Utilizando los valores de estado estacionario para $\dot{q}_t$ y q_t, el capital de estado estacionario se determina por:

$$F_K(K^*) = \left[r(1-\sigma) + \frac{\sigma^2}{2b}\right] \frac{1}{(1-\eta)F(K^*)^{-\eta}}$$

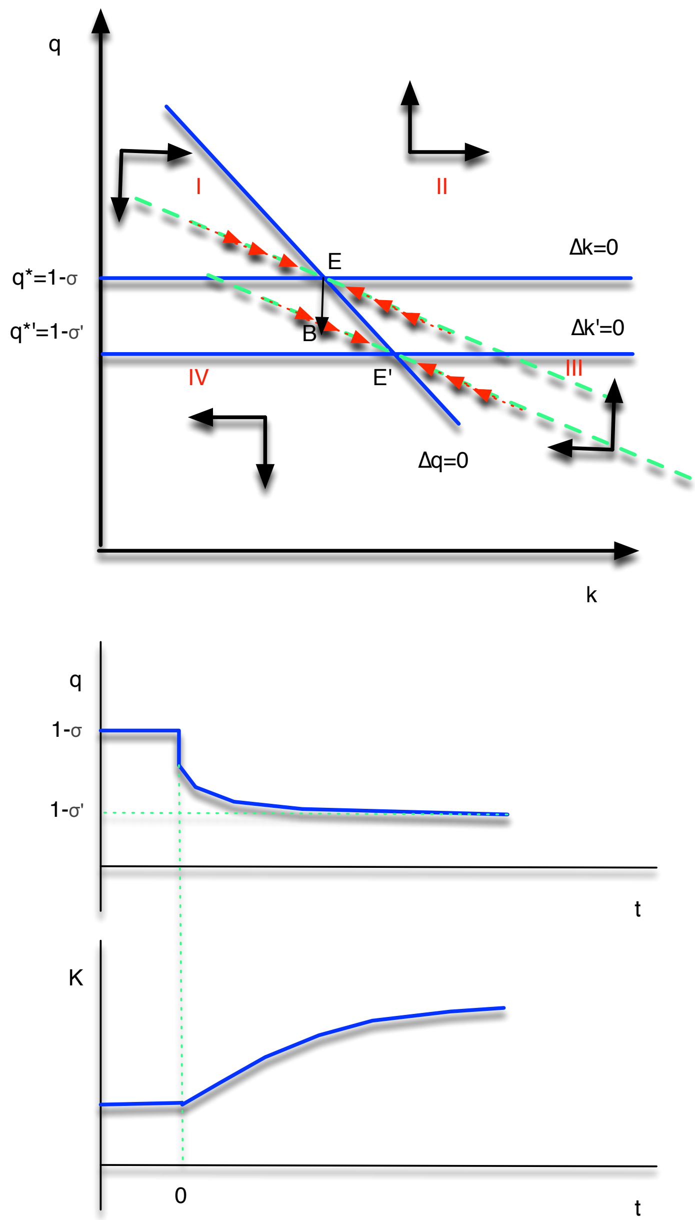
.

c. Para $\dot{q}$, en las regiones I y IV: de las condiciones de primer orden con respecto al estado para los puntos A y A', restándolas, se satisface $\dot{q} = \pi_K\left(K_t^{A'}, x_t\right) - \pi_K\left(K_t^A, x_t\right) < 0$, ya que $K_t^{A'} > K_t^A$. Esto lleva a que el movimiento de la flecha bajo $\dot{q} = 0$ sea hacia el origen del gráfico. En las regiones II y III: contrario al caso anterior, sobre $\dot{q} = 0$ la flecha se desplaza en dirección contraria al origen.

Para $\dot{K}$: las firmas aumentan su capital cuando su valor marginal es mayor al costo de reposición de equilibrio, $q^* = (1-\sigma)$. Luego, sobre $\dot{K} = 0$, donde $q^* = (1-\sigma)$, la flecha se mueve hacia la derecha, y bajo hacia la izquierda. En las regiones I y III se forma un brazo estable, debido a que los vientos del sistema empujan hacia E.



d. Dado el aumento no anticipado del subsidio a la inversión, en $t = 0$ (E a B) el valor del capital q disminuye fuertemente hasta alcanzar la trayectoria del nuevo brazo estable. De B a E', el valor del capital va convergiendo paulatinamente hasta su nuevo estado estacionario. Por su parte, en $t = 0$ el capital no se modifica pues en el corto plazo es fijo. De $t = 0$ en adelante, comienza a aumentar gradualmente a consecuencia del incentivo dado por el subsidio, hasta llegar a su nuevo estado estacionario en E'.



e. Al anticipar el futuro subsidio, el valor presente del capital instalado disminuye, pues una caída de éste en σ, en T, implica mayor capital en el futuro, y por lo tanto una menor productividad futura del capital instalado hoy. Luego, hasta C se desacumula capital, para finalmente producirse un boom de inversión al momento en que se materializa el subsidio.