Profesor	: Eduardo Engel	Abril 11, 2023
Ayudantes	: Miguel Del Valle y Gabriela Jaque	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2024	
Guía	: No. 2	
Entrega	: Lunes 15 de abril, antes de las 8am	

1. **El Teorema de Muth y la Crítica de Lucas**

   El ingreso, Y_t, es exógeno e igual a la suma de un camino aleatorio (shocks permanente), P_t, y un ruido blanco (componente transitoria), u_t,

   $$\begin{aligned} Y_t &= P_t + u_t, \\ P_t &= P_{t-1} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

   Donde ε_t es i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, u_t i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_u^2)$, ε_t y u_t independientes.

   A diferencia del análisis que vimos en cátedra, ahora suponemos que los agentes observan las Y_t pero no sus componentes.

   (a) Muestre que ΔY_t sigue un MA(1)
   $$\Delta Y_t = v_t - \theta v_{t-1}, \tag{1}$$
   y derive una expresión para θ como función de $Q \equiv \sigma_\varepsilon^2/\sigma_u^2$, donde $|\theta| < 1$. Use esta expresión para expresar las innovaciones v_t, en términos de valores presentes y pasados de ΔY.

   Ayuda: La expresión que debiera obtener es
   $$\theta = \frac{1}{2}\left[Q + 2 - \sqrt{(Q+2)^2 - 4}\right].$$
   Si no la obtiene, úsela igual en lo que sigue.

   (b) Para $k = 1, 2, 3, 4, ...$ encuentre $\mathrm{E}_t[\Delta Y_{t+k}]$ (donde la información disponible en t son todos los valores pasados y presentes de Y, lo cual significa que también se conocen todos los valores presentes y pasados de ΔY). Use la expresión que obtuvo para mostrar que para todo $k \geq 1$:
   $$\mathrm{E}_t[Y_{t+k}] = (1-\theta)\sum_{j\geq 0}\theta^j Y_{t-j}. \tag{2}$$
   Se sigue que las proyecciones de valores futuros de Y no dependen del horizonte de proyección, En lo que sigue, denotamos $\mathrm{E}_t[Y_{t+k}]$ por $\hat{Y}_t$.

   (c) A continuación suponga que la relación ente ΔC_t y el proceso de ingreso está determinada por el modelo de equivalencia cierta visto en clases, de modo que
   $$\Delta C_t = \frac{r}{R}\sum_{u\geq 0}\beta^u\{\mathrm{E}_t Y_{t+u} - \mathrm{E}_{t-1}Y_{t+u}\}.$$

Use esta expresión para mostrar que ΔC_t se puede escribir como:

$$\Delta C_t = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \Delta Y_{t-k}.$$

Encuentre expresiones para los α_k.

(d) En $t = 0$ la macroeconomista usa las series agregadas para estimar

$$\Delta C_t = \sum_{k \leq 0} \alpha_k \Delta Y_{t-k}. \tag{3}$$

Poco después, la varianza de la componente cíclica del ingreso aumenta de manera inesperada y permanente (todo lo restante no cambia). La macroeconomista está consciente del cambio en el entorno económico pero confía que los nuevos valores de ΔY lo van a capturar adecuadamente, por lo cual sigue usando (3) para proyectar el consumo. ¿Es correcto este supuesto? Justifique.

2. **Consumo y formación de hábitos**

Varios trabajos exploran el impacto de la formación de hábitos sobre el consumo. La idea es que niveles altos de consumo en el pasado reciente llevarán a una mayor utilidad marginal del consumo presente, porque el consumo es adictivo o formador de hábitos.

Un enfoque para modelar la formación de hábitos es suponer que la función de utilidad instantánea toma la forma $u(c_t - bc_{t-1})$ o la forma $u[c_t/(c_{t-1}^p)]$, donde $u(\cdot)$ tiene las propiedades habituales de una función de utilidad y b y p toman valores entre 0 y 1. Los términos bc_{t-1} y c_{t-1}^p representan el "hábito" del hogar: un valor más alto del consumo reciente reduce la utilidad del consumo presente aumentando la utilidad marginal del consumo de hoy.

Considere la formulación secuencial del hogar con formación de hábitos. En $t = 0$ el hogar maximiza la utilidad descontada esperada:

$$\max \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t u(c_t, c_{t-1})$$

sujeto a la riqueza inicial, A_0, a la condición de no Ponzi y a la restricción presupuestaria intertemporal

$$A_{t+1} = R(A_t + Y_t - C_t),$$

donde γ denota el factor subjetivo de descuento, $R = (1 + r)$ con r igual a la tasa de interés (constante), A_t denota riqueza financiera al comienzo de t y Y_t denota el ingreso laboral del hogar en el período t, el cual sigue un proceso Markoviano. La función de utilidad $u(c_t, c_{t-1})$ representa el flujo de utilidad experimentado por el hogar en el período t. Esta función permite capturar de manera general que el consumo presente y del período anterior afectan la utilidad presente; esta formulación incluye como casos particulares los dos ejemplos de formación de hábitos antes mencionados.

(a) Identifique las variables de estado y variables de decisión. Indique cuáles variables de estado son endógenas y cuáles exógenas, donde las endógenas son determinadas por acciones del agente económico y la exógenas no dependen de dichas acciones.

(b) Escriba la ecuación de Bellman del problema. Determine la condición de primer orden para el lado derecho de la ecuación de Bellman y las condiciones de la envolvente para cada una de las variables de estado endógenas.

(c) **U**tilice las expresiones de la parte (b) para mostrar que la ecuación de Euler viene dada por:

$$u_1(c_t, c_{t-1}) + \gamma \mathrm{E}_t u_2(c_{t+1}, c_t) = \gamma R E_t[u_1(c_{t+1}, c_t) + \gamma u_2(c_{t+2}, c_{t+1})], \tag{4}$$

donde u_1 y u_2 denotan la derivada parcial de u con respecto a su primer y segundo argumento, respectivamente.

(d) En esta parte derivamos (4) de una manera alternativa.[1] Suponga que c_{t-1}, c_t, c_{t+1} y c_{t+2} son los valores que toma el consumo en la trayectoria óptima y suponga que se reduce c_t en Δ, ahorrando dicho monto y consumiendo lo ahorrado en $t+1$. Planteando la condición que para Δ pequeño esta variante en la trayectoria del consumo no altera la utilidad descontada esperada del hogar, derive (4).

(e) En esta parte considere el caso en que $u(c_t, c_{t-1}) = \log(c_t/c_{t-1}^p)$, con $0 < p < 1$. Utilice (4) para derivar la ecuación de Euler. Compare con la ecuación de Euler en el caso sin hábito. De ser iguales, explique por qué. Si son distintas, interprete la diferencia.

(f) Ahora considere el caso de utilidad cuadrática, es decir, estudiamos cómo el caso de equivalencia cierta con hábito:

$$u(c_t, c_{t-1}) = [c_t - \eta c_{t-1}] - \frac{b}{2}[c_t - \eta c_{t-1}]^2,$$

donde $b > 0$ y $0 < \eta < 1$. Suponga que $\gamma R = 1$. Utilice (4) para derivar la ecuación de Euler para este caso. Suponga que la solución es un proceso AR(1) para ΔC_t, de modo que

$$\Delta C_t = \phi \Delta C_{t-1} + e_t,$$

donde los e_t son innovaciones. Determine el único valor de $\phi \in (0, 1)$ consistente con la ecuación de Euler que obtuvo. Compare con el caso sin hábito. De ser iguales, explique por qué. Si son distintas, interprete la diferencia. **Sugerencia**: Para que el álgebra sea más simple, le sugerimos proceder como sigue: Primero, obtenga expresiones para $u_{1,t} \equiv u_1(c_t, c_{t-1})$ y $u_{2,t} \equiv u_2(c_t, c_{t-1})$. Segundo, exprese $u_{2,t}$ en términos de $u_{1,t}$. Tercero, use (4) y la relación anterior para concluir que la ecuación de Euler equivale a:

$$\mathrm{E}_t \Delta u_{1,t+1} = \eta \gamma \mathrm{E}_t \Delta u_{1,t+2}$$

Ahora exprese $\Delta u_{1,t}$ en términos de ΔC_t y ΔC_{t-1} para mostrar que la expresión anterior lleva a una ecuación de diferencias en expectativas y luego use el supuesto que ΔC_t sigue un AR(1) para determinar el único valor de $\phi \in [0, 1]$ que cumple esta ecuación.

3. **Ahorro por precaución, función de utilidad CARA e ingreso i.i.d.**

Considere el modelo del de consumo con función de utilidad instantánea con coeficiente de aversión absoluta al riesgo constante:

$$u(c) = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta c},$$

[1] Lo que sigue se conoce como un argumento de perturbación, porque se analiza una leve desviación ('perturbación') de la trayectoria óptima.

donde $\theta > 0$ denota el coeficiente de aversión absoluta al riesgo. La tasa de descuento subjetiva es δ, la tasa de interés es r y las dos son constantes. El ingreso laboral, y_t, es i.i.d., de modo que

$$y_t = \bar{y} + \varepsilon_t,$$

con ε_t i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Los activos del hogar al comienzo de un período evolucionan de acuerdo a

$$A_{t+1} = (1 + r)[A_t + y_t - c_t]. \tag{5}$$

Se puede mostrar que existe una solución única a la ecuación de Bellman y que existe una correspondencia uno-a-uno entre esta solución y la solución a la ecuación de Euler. No es necesario que demuestre lo anterior. Se sigue que la ecuación de Euler tiene una única solución, en la cual nos enfocamos en lo que sigue.

Suponemos que la solución de la ecuación de Euler toma la forma:

$$c_t = \frac{r}{1 + r} \left\{ A_t + y_t + \frac{1}{r}\bar{y} \right\} - P(r, \theta, \delta, \sigma), \tag{6}$$

donde P es una constante (que depende de r, θ, δ y σ). A continuación encontramos el valor de P para el cual (6) resuelve la ecuación de Euler.

(a) Asumiendo que se cumple (6), use (5) y un poco de álgebra para mostrar que:

$$\Delta c_t = \frac{r}{1 + r}\varepsilon_t + rP. \tag{7}$$

(b) Use (7) y la ecuación de Euler para derivar una expresión explícita para P.

(c) Muestre que P es creciente en σ y decreciente en δ. Interprete los dos resultados.

(d) Ahora asuma que $r = \delta$. El ahorro por precaución se define como la diferencia entre el ahorro efectivo y el ahorro que prescribe el modelo de equivalencia cierta. Muestre que el ahorro por precaución será igual a P y que P es estrictamente positivo.