PAUTA SOLEMNE I - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2023

[1] Considere una economía de intercambio estática con $m \geq 100$ mercancías perfectamente divisibles y $n \geq 15$ consumidores. Cada consumidor $i \in \{1,\dots,n\}$ tiene una asignación inicial $w^i \in \mathbb{R}^m_{++}$ y una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente cóncava y estrictamente creciente.

A diferencia del modelo clásico, vamos a permitir que la *renta monetaria* de los consumidores difiera del valor de mercado de sus asignaciones iniciales.[1] Más formalmente, dado un vector de precios p en $\Delta = \{(p_1,\dots,p_m) \in \mathbb{R}^m_+ : \sum_{l=1}^m p_l = 1\}$, asumiremos que la renta monetaria del consumidor i viene dada por $v^i(p)$ y que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, $v^i : \Delta \to \mathbb{R}$ es una función continua.

(ii) Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, $v^i(p) > 0$ para todo $p \in \Delta$.

(iii) Para cada $p \in \Delta$,

$$\sum_{i=1}^n v^i(p) = p \cdot \sum_{i=1}^n w^i.$$

Justificando detalladamente sus argumentos, demuestre que existen precios $\overline{p} \in \Delta$ y canastas de consumo $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in (\mathbb{R}^m_+)^n$ tales que:

$$\overline{x}^i \in \underset{x^i \in \mathbb{R}^m_+ :\, \overline{p}\cdot x^i \,\leq\, v^i(\overline{p})}{\operatorname{argmax}} u^i(x^i), \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \qquad \sum_{i=1}^n \overline{x}^i = \sum_{i=1}^n w^i.$$

En su demostración, destaque los pasos en los cuales utiliza los supuestos (i), (ii) y (iii).

Es suficiente adaptar el juego generalizado que se utiliza en la demostración de existencia de equilibrio en economías de intercambio estáticas. Esencialmente, al definir la correspondencia de estrategias admisibles de cada consumidor i hay que cambiar $p \cdot w^i$ por $v^i(p)$. Los supuestos (i) y (ii) permitirán asegurar, utilizando la Propiedad [CdB], que este cambio no compromete la continuidad de esas correspondencias de estrategias admisibles. A su vez, el supuesto (iii) permitirá obtener información sobre el valor óptimo de la función objetivo del jugador abstracto luego de agregar las restricciones $p \cdot x^i \leq v^i(p)$ en $i \in \{1,\dots,n\}$.

Más formalmente, considere un juego generalizado $\mathcal{G}$ en el cual:

- Dados precios $\overline{p} \in \Delta$, cada consumidor $i \in \{1,\dots,n\}$ escoge una canasta $\overline{x}^i \in [0,2W]^m$ con el objetivo de $\max\limits_{x^i \in [0,2W]^m :\, \overline{p}\cdot x^i \,\leq\, v^i(\overline{p})} u^i(x^i)$, donde $W = \max\limits_{l\in\{1,\dots,m\}} \sum_{k=1}^n w^k_l$.
- Dadas canastas de consumo $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in [0,2W]^{mn}$, existe un jugador abstracto que escoge precios $\overline{p} \in \Delta$ con el objetivo de $\max\limits_{p\in\Delta} p \cdot \sum_{i=1}^n (\overline{x}^i - w^i)$.

Para asegurar que el juego generalizado $\mathcal{G}$ tiene un equilibrio es suficiente demostrar que para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ la correspondencia $\gamma^i : \Delta \twoheadrightarrow [0,2W]^m$ definida por $\gamma^i(p) = \{x^i \in [0,2W]^m : p \cdot x^i \leq v^i(p)\}$ es continua y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Efectivamente, las otras características de $\mathcal{G}$ son idénticas a las del juego generalizado utilizado para probar la existencia de equilibrio en una economía de intercambio clásica (por lo tanto, cumplen los supuestos requeridos).

[1] Esto puede ocurrir, por ejemplo, cuando un planificador central implementa de una política tributaria que induce transferencias de renta entre los agentes.

El conjunto $[0, 2W]^m$ es compacto, convexo y diferente de vacío y la función $f^i : \Delta \times [0, 2W]^m \to \mathbb{R}$ definida por $f^i(p, x^i) = p \cdot x^i - v^i(p)$ es convexa en las variables $(x^i_1, \ldots, x^i_m)$. Además, el supuesto (i) nos asegura que f^i es continua y el supuesto (ii) implica que para cada precio $p \in \Delta$ existe una canasta $x^i_p \in [0, 2W]^m$ tal que $f^i(p, x^i_p) < 0$. Por lo tanto, sigue de la Propiedad [CdB] que la correspondencia γ^i es continua y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

Dado un equilibrio $[\overline{p}, (\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}]$ del juego generalizado $\mathcal{G}$, agregando las restricciones presupuestarias de los consumidores y utilizando el supuesto (iii) tenemos que

$$\overline{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^i \leq \sum_{i=1}^{n} v^i(\overline{p}) = \overline{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} w^i.$$

Como los precios $\overline{p}$ maximizan la función objetivo del jugador abstracto cuando los consumidores escogen canastas $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, tenemos que $p \cdot \sum_{i=1}^{n}(\overline{x}^i - w^i) \leq 0$ para todo $p \in \Delta$. Evaluando en los vectores canónicos de $\mathbb{R}^m$, los cuales son elementos de Δ, obtenemos que $\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}^i - w^i) \leq 0$.

Esto nos asegura que $\overline{x}^i \leq W(1, \ldots, 1)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, los límites superiores al consumo no son activos. Por lo tanto, la monotonía estricta de las preferencias de los consumidores implica que sus restricciones presupuestarias se cumplen con igualdad y que $\overline{p} \gg 0$. Luego, agregándo las restricciones presupuestarias (nuevamente) y utilizando el supuesto (iii) llegamos a que $\overline{p} \cdot \sum_{i=1}^{n}(\overline{x}^i - w^i) = 0$. Como $\overline{p} \gg 0$ y $\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}^i - w^i) \leq 0$, concluimos que $\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}^i - w^i) = 0$.

Solamente nos falta probar que, para cada consumidor $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\left[\overline{x}^i \in \underset{x^i \in [0,2W]^m : \, \overline{p} \cdot x^i \, \leq \, v^i(\overline{p})}{\operatorname{argmax}} u^i(x^i) \quad \wedge \quad \overline{x}^i \ll 2W(1, \ldots, 1)\right] \implies \overline{x}^i \in \underset{x^i \in \mathbb{R}^m_+ : \, \overline{p} \cdot x^i \, \leq \, v^i(\overline{p})}{\operatorname{argmax}} u^i(x^i).$$

Pero esta propiedad es una consecuencia de la concavidad estricta de la funciones $(u^i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, como ya sabemos de la demostración de existencia de equilibrio en economías de intercambio estáticas. $\square$

[2] Considere una economía de intercambio estática con tres mercancías perfectamente divisibles, <u>once consumidores</u> y dos firmas. Los consumidores son caracterizados por las siguientes funciones de utilidad y asignaciones iniciales:

$$u^1(x, y, z) = \sqrt{xyz}, \qquad w^1 = (1, 0, 0);$$
$$u^i(x, y, z) = \min\{x, 2y, z\}, \qquad w^i = (1, 0, 0), \qquad \forall i \in \{2, \ldots, 11\}.$$

La firma $j = 1$ es propiedad del individuo $h = 1$, utiliza la primera mercancía como insumo en la producción de la tercera y es caracterizada por el conjunto de posibilidades de producción

$$Y^1 = \left\{(-x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \geq 0, \; y = 0, \; z \leq x\right\}.$$

La firma $j = 2$ le pertenece a los individuos $\{2, \ldots, 11\}$, cada uno de los cuales tiene un 10% de su propiedad. Esta firma utiliza la primera mercancía como insumo en la producción de la segunda y es caracterizada por el conjunto de posibilidades de producción

$$Y^2 = \left\{(-x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \geq 0, \; y \leq 2x, \; z = 0\right\}.$$

Justificando detalladamente sus argumentos, encuentre los equilibrios competitivos de esta economía.

Como el consumidor $i = 1$ tiene una función de utilidad estrictamente creciente, en equilibrio los precios cumplirán $\overline{p} = (\overline{p}_x, \overline{p}_y, \overline{p}_z) \gg 0$. Así, $i = 1$ tendrá una renta monetaria mayor a cero y demandará cantidades positivas de todas las mercancıas (pues tiene utilidades Cobb-Douglas). Lo anterior implica que ambas firmas operarán en equilibrio.

Sabemos que las firmas maximizarán beneficios:

$$
\begin{aligned}
\max_{(-x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\geq 0,\ y=0,\ z\leq x} \ \overline{p}\cdot(-x,y,z) \quad &\equiv \quad \max_{x\geq 0}\ (\overline{p}_z-\overline{p}_x)x,\\
\max_{(-x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\geq 0,\ y=2x,\ z=0} \ \overline{p}\cdot(-x,y,z) \quad &\equiv \quad \max_{x\geq 0}\ (2\overline{p}_y-\overline{p}_x)x.
\end{aligned}
$$

Dado que ambas firmas operarán y tendrán beneficios finitos en equilibrio, $\overline{p}_z-\overline{p}_x=0$ y $2\overline{p}_y-\overline{p}_x=0$. Por lo tanto, la homogeneidad de grado cero en precios de las restricciones presupuestarias nos permite concluir que los precios de equilibrio vienen dados por $(\overline{p}_x,\overline{p}_y,\overline{p}_z)=(2,1,2)$ (salvo normalización).

Como las firmas tienen tecnologías con retornos constantes de escala, en equilibrio tendrán beneficios iguales a cero. Luego, las demandas Marshallianas de los consumidores vendrán dadas por

$$
\begin{aligned}
(\overline{x}^1,\overline{y}^1,\overline{z}^1) &= \left(\frac{1}{3}\frac{\overline{p}_x}{\overline{p}_x},\frac{1}{3}\frac{\overline{p}_x}{\overline{p}_y},\frac{1}{3}\frac{\overline{p}_x}{\overline{p}_z}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\\
(\overline{x}^i,\overline{y}^i,\overline{z}^i) &= \left(\frac{4}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right), \qquad \forall i\in\{2,\dots,11\},
\end{aligned}
$$

donde la demanda de cada $i\neq 1$ se obtiene a partir del hecho que $\overline{x}^i=2\overline{y}^i=\overline{z}^i$, pues u^i es Leontief.

Concluimos que el *exceso de demanda* viene dado por

$$
\left(\frac{43}{9}-11,\frac{26}{9},\frac{43}{9}\right)=\left(-\frac{56}{9},\frac{26}{9},\frac{43}{9}\right).
$$

Por lo tanto, la firma $j=1$ utiliza $43/9$ unidades de la primera mercancía para producir $43/9$ unidades de la tercera mercancía, mientras que la firma $j=2$ utiliza $13/9$ unidades de la primera mercancía para producir $26/9$ unidades de la tercera mercancía. Evidentemente, la cantidad de x utilizada como insumo en la producción de las otras mercancías, $43/9+13/9$, coincide con lo que queda disponible de la oferta de x luego de satisfacer la demanda de los agentes. □

[3] Considere una economía en la cual se cumplen las siguientes propiedades:

- Hay dos periodos $t\in\{0,1\}$. No hay incertidumbre en $t=0$ y existen dos estados de la naturaleza que se pueden realizar en $t=1$, los cuales denotaremos por u y d.
- En el periodo $t=0$ se pueden intercambiar dos mercancías, mientras que en cada estado $s\in\{u,d\}$ hay solo una mercancía disponible para intercambio.
- Existen dos individuos, A y B, los cuales son caracterizados por:
  - Funciones de utilidad $U^A,U^B:\mathbb{R}^4_+\to\mathbb{R}$ tales que

$$
U^A(x_{0,1},x_{0,2},x_u,x_d)=\ln(x_{0,1})+2\ln(x_{0,2})+2\ln(x_u)+\ln(x_d),
$$
$$
U^B(x_{0,1},x_{0,2},x_u,x_d)=2\ln(x_{0,1})+\ln(x_{0,2})+\ln(x_u)+2\ln(x_d).
$$

  - Asignaciones iniciales $w^A=w^B=(1,1,1,1)$.
- Existen dos activos reales disponibles para negociación en $t=0$, denotados por j_1 y j_2.
- En cada estado $s\in\{u,d\}$ del segundo periodo, el activo $j\in\{j_1,j_2\}$ promete pagar el equivalente al valor de mercado de $A_{s,j}$ unidades de la mercancía disponible para consumo. Asumiremos que $(A_{u,j_1},A_{d,j_1})=(1,1)$ y $(A_{u,j_2},A_{d,j_2})=(1,\kappa)$, donde $\kappa\geq 0$.

Justificando detalladamente sus argumentos, encuentre el consumo de cada agente en equilibrio.

Cuando $\kappa \neq 1$, los mercados son completos y los consumos de equilibrio coinciden con aquellos que se harían en una economía de mercados contingentes en la cual toda la demanda se hace en $t = 0$.

Como las funciones de utilidad son Cobb-Douglas, las demandas Marshallianas a precios $(p_{0,1}, p_{0,2}, p_u, p_d) \gg 0$ tales que $p_{0,1} + p_{0,2} + p_u + p_d = 1$ vienen dadas por:

$$(\overline{x}^A_{0,1}, \overline{x}^A_{0,2}, \overline{x}^A_u, \overline{x}^A_d) = \left(\frac{1}{6}\frac{1}{p_{0,1}}, \frac{2}{6}\frac{1}{p_{0,2}}, \frac{2}{6}\frac{1}{p_u}, \frac{1}{6}\frac{1}{p_d}\right),$$
$$(\overline{x}^B_{0,1}, \overline{x}^B_{0,2}, \overline{x}^B_u, \overline{x}^B_d) = \left(\frac{2}{6}\frac{1}{p_{0,1}}, \frac{1}{6}\frac{1}{p_{0,2}}, \frac{1}{6}\frac{1}{p_u}, \frac{2}{6}\frac{1}{p_d}\right).$$

Luego, igualando la oferta a la demanda, llegamos a que (salvo normalización) los precios de equilibrio en mercados contingentes vienen dados por $(\overline{p}_{0,1}, \overline{p}_{0,2}, \overline{p}_u, \overline{p}_d) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$, lo cual implica que en equilibrio los consumo de cada agente vienen dados por:

$$(\overline{x}^A_{0,1}, \overline{x}^A_{0,2}, \overline{x}^A_u, \overline{x}^A_d) = \left(\frac{4}{6}, \frac{8}{6}, \frac{8}{6}, \frac{4}{6}\right), \qquad (\overline{x}^B_{0,1}, \overline{x}^B_{0,2}, \overline{x}^B_u, \overline{x}^B_d) = \left(\frac{8}{6}, \frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{8}{6}\right).$$

Cuando $\kappa = 1$, los dos activos son redundantes. Por esta razón, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que en equilibrio solo se negociará el activo j_1 (caso se negocie algún activo). Dado que podemos normalizar el precio de la mercancía en los estados $s \in \{u, d\}$, si denotamos por (z^A_1, z^B_1) las cantidades negociadas del activo j_1, las restricciones de no-negatividad del consumo en el segundo periodo implican que $z^h \geq -1$ para cada $h \in \{A, B\}$. Por lo tanto, el problema de cada consumidor viene dado por

$$\max_{(\overline{x}^A_{0,1}, \overline{x}^A_{0,2}, z^A_1) \in \mathbb{R}^2_+ \times [-1, +\infty)} \ln(x^A_{0,1}) + 2\ln(x^A_{0,2}) + 3\ln(1 + z^A_1) \qquad p_{0,1}x^A_{0,1} + p_{0,2}x^A_{0,2} + q_1 z^A_1 \leq p_{0,1} + p_{0,2}$$

$$\max_{(\overline{x}^B_{0,1}, \overline{x}^B_{0,2}, z^B_1) \in \mathbb{R}^2_+ \times [-1, +\infty)} 2\ln(x^B_{0,1}) + \ln(x^B_{0,2}) + 3\ln(1 + z^B_1) \qquad p_{0,1}x^B_{0,1} + p_{0,2}x^B_{0,2} + q_1 z^B_1 \leq p_{0,1} + p_{0,2}$$

Como la utilidades son Cobb-Douglas y los problemas anteriores son equivalentes a

$$\max_{(\overline{x}^A_{0,1}, \overline{x}^A_{0,2}, z^A_1) \in \mathbb{R}^2_+ \times [-1, +\infty)} \ln(x^A_{0,1}) + 2\ln(x^A_{0,2}) + 3\ln(1 + z^A_1) \qquad p_{0,1}x^A_{0,1} + p_{0,2}x^A_{0,2} + q_1(1+z^A_1) \leq p_{0,1} + p_{0,2} + q_1$$

$$\max_{(\overline{x}^B_{0,1}, \overline{x}^B_{0,2}, z^B_1) \in \mathbb{R}^2_+ \times [-1, +\infty)} 2\ln(x^B_{0,1}) + \ln(x^B_{0,2}) + 3\ln(1 + z^B_1) \qquad p_{0,1}x^B_{0,1} + p_{0,2}x^B_{0,2} + q_1(1+z^B_1) \leq p_{0,1} + p_{0,2} + q_1,$$

las demandas vienen dadas por

$$(\overline{x}^A_{0,1}, \overline{x}^A_{0,2}, \overline{z}^A_1) = \left(\frac{1}{6}\frac{1}{p_{0,1}}, \frac{2}{6}\frac{1}{p_{0,2}}, \frac{3}{6}\frac{1}{q_1} - 1\right), \qquad (\overline{x}^B_{0,1}, \overline{x}^B_{0,2}, \overline{z}^B_1) = \left(\frac{2}{6}\frac{1}{p_{0,1}}, \frac{1}{6}\frac{1}{p_{0,2}}, \frac{3}{6}\frac{1}{q_1} - 1\right).$$

Luego, igualando la oferta a la demanda, llegamos a que (salvo normalización) los precios de equilibrio vienen dados por $(\overline{p}_{0,1}, \overline{p}_{0,2}, \overline{q}_1) = (0.25, 0.25, 0.5)$, lo cual implica que no hay negociación de activos en equilibrio y los consumos de cada agente vienen dados por:

$$(\overline{x}^A_{0,1}, \overline{x}^A_{0,2}, \overline{x}^A_u, \overline{x}^A_d) = \left(\frac{4}{6}, \frac{8}{6}, 1, 1\right), \qquad (\overline{x}^B_{0,1}, \overline{x}^B_{0,2}, \overline{x}^B_u, \overline{x}^B_d) = \left(\frac{8}{6}, \frac{4}{6}, 1, 1\right).$$

Note que la incompletitud de los mercados financieros genera un costo de eficiencia para los consumidores, en relación a la situación que tendrían en mercados completos. □