SOLEMNE I - PAUTA
MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: MOHIT KARNANI - MICHAEL LLAUPI

Pregunta 1

Considere una economía de intercambio con dos mercancías y un conjunto H de individuos, todos con las mismas preferencias $u^h(x,y) = \sqrt{xy}/(1+\sqrt{xy})$, $\forall h \in H$. Si los recursos agregados son dados por $W \gg 0$, demuestre que independiente de la distribución de recursos existe un único equilibrio Walrasiano. Además, encuentre los precios relativos de equilibrio p_2/p_1 para cada distribución de recursos en $\{(w^h)_{h\in H} \in (\mathbb{R}^2_+)^H : \sum_{h\in H} w^h = W\}$.

Las preferencias individuales son idénticas y homotéticas, pues pueden ser representadas por una transformación monótona creciente de una función homogenea de grado uno: $u^h(x,y) = f \circ g(x,y)$, donde $f(t) = t/(1+t)$ es estrictamente creciente y $g(x,y) = \sqrt{xy}$ es homogenea de grado uno. Por lo tanto, sabemos que existe un agente representativo, lo cual nos permite asegurar que, salvo normalización, los precios de equilibrio $(p_1,p_2) \gg 0$ quedan caracterizados por

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial_y f \circ g(W)}{\partial_x f \circ g(W)} = \frac{\partial_y g(W)}{\partial_x g(W)} = \frac{W_x}{W_y},$$

donde $W = (W_x, W_y)$. Esto es, los precios relativos coinciden con la escasez relativa de recursos y *no dependen de la distribución de los recursos entre los individuos*. □

Pregunta 2

Considere una economía de intercambio con dos individuos A y B y dos mercancías. A diferencia del modelo clásico Walrasiano, asumiremos que el consumo de uno de los individuos genera externalidades en el nivel de bienestar del otro individuo:

$$V^A(x^A, y^A, x^B) = \ln(x^A + x^B) + \ln(y^A), \qquad w^A = (1,2);$$
$$V^B(x^B, y^B) = \ln(x^B) + \ln(y^B), \qquad w^B = (2,1).$$

(a) Encuentre los equilibrios competitivos de esta economía.

Las condiciones de primer orden de los problemas individuales nos aseguran que a precios $(p_x, p_y) = (\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$, tendremos que

$$\frac{\overline{y}^A}{3} = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \qquad \overline{y}^B = \frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)}.$$

Por lo tanto, como $\overline{y}^A + \overline{y}^B = 3$, tenemos que

$$3 = \frac{6\alpha + (1+\alpha)}{2(1-\alpha)} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{5}{13}.$$

Concluimos que la economía tiene un único equilibrio competitivo:

$$\left[(\overline{p}_x, \overline{p}_y)\,;\, \left(\overline{x}^A, \overline{y}^A\right)\,;\, \left(\overline{x}^B, \overline{y}^B\right)\right] = \left[\left(\frac{5}{13}, \frac{8}{13}\right); \left(\frac{6}{5}, \frac{15}{8}\right); \left(\frac{9}{5}, \frac{9}{8}\right)\right].$$

□

(b) Encuentre la curva de contrato. ¿Se cumple el Primer Teorema del Bienestar Social?

Por monotonía de las preferencias, en una asignación Pareto eficiente $((\overline{x}^A, \overline{y}^A), (\overline{x}^B, \overline{y}^B))$ se cumple que $\overline{x}^B = 3 - \overline{x}^A$ y $\overline{y}^B = 3 - \overline{x}^A$. Por lo tanto, $(\overline{x}^A, \overline{y}^A)$ hace parte de una distribución Pareto eficiente si y sólo las siguientes condiciones sin satisfechas

$$(\overline{x}^A, \overline{y}^A) \in \text{argmax}\left\{\ln(3) + \ln(y) : (x, y) \in [0, 3] \times [0, 3] \ \wedge \ (3 - x)(3 - y) \geq (3 - \overline{x}^A)(3 - \overline{y}^A)\right\}.$$

$$(\overline{x}^A, \overline{y}^A) \in \text{argmax}\left\{(3 - x)(3 - y) : (x, y) \in [0, 3] \times [0, 3] \ \wedge \ \ln(y) \geq \ln(\overline{y}^A)\right\}.$$

En el problema de optimización que caracteriza la segunda condición la función objetivo es decreciente en $x \in [0, 3]$ asegurando que $\overline{x}^A = 0$. Por otro lado, ninguna de las dos condiciones determina restricciones sobre $\overline{y}^A$. Concluimos que la curva de contrato viene dada por $\overline{x}^A = 0$. El resultado del ítem anterior nos asegura que que la distribución de recursos determinada por el equilibrio competitivo NO es Pareto eficiente, i.e., no se cumple el Primer Teorema del Bienestar Social. Efectivamente, la distribución alcanzada por el mercado competitivo es Pareto dominada por $\left((0, \frac{15}{8}) ; (3, \frac{9}{8})\right)$. $\square$

Pregunta 3

Considere el sistema no-lineal de n ecuaciones y n incognitas $\Phi(\eta, x) = 0$, donde $\Phi : U \times V \to \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable definida en el abierto $U \times V \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ y η es un vector de parametros. Dado un compacto $K \subseteq V$, sea $\mathcal{S}(K, \eta) = \{x \in K : \Phi(\eta, x) = 0\}$.

(a) Si rango$(D_x\Phi(\eta, x)) = n$ para todo $x \in \mathcal{S}(K, \eta)$, demuestre que $\mathcal{S}(K, \eta)$ es finito.

Fije $\overline{x} \in \mathcal{S}(K, \eta)$. Como Φ es diferenciable, dado $x \in V$ tenemos que $\Phi(\eta, x) = D_x\Phi(\eta, \overline{x})(x - \overline{x}) + \varepsilon(\eta, x - \overline{x})$, donde $\lim_{v \to 0} \varepsilon(\eta, v)/\|v\| = 0$. Vamos a probar que $\overline{x}$ es un punto aislado de V, i.e., existe $\delta > 0$ tal que $\|x - \overline{x}\| < \delta \implies \Phi(\eta, x) \neq 0$. Suponga por contradicción que existe una secuencia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ tal que $\|x_n - \overline{x}\| < 1/n$ y $\Phi(\eta, x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como la secuencia $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $v_n = (x_n - \overline{x})/\|x_n - \overline{x}\|$ es limitada, tiene una subsecuencia $\{v_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Así, existe $\overline{v} \neq 0$ tal que

$$D_x\Phi(\eta, \overline{x})\overline{v} = \lim_{k \to +\infty} D_x\Phi(\eta, \overline{x})v_{n_k} = \lim_{k \to +\infty} D_x\Phi(\eta, \overline{x})\frac{(x_{n_k} - \overline{x})}{\|x_{n_k} - \overline{x}\|} = -\lim_{k \to +\infty} \frac{\varepsilon(\eta, x_{n_k} - \overline{x})}{\|x_{n_k} - \overline{x}\|} = 0,$$

lo cual nos asegura que las columnas de $D_x\Phi(\eta, \overline{x})$ son linealmente dependientes, una contradicción ya que $D_x\Phi(\eta, \overline{x})$ es invertible. Por lo tanto, para cada $x \in \mathcal{S}(K, \eta)$ existe $\delta_x > 0$ tal que $B_{\delta_x}(x) \cap \mathcal{S}(K, \eta) = \{x\}$. Esto nos asegura que $\mathcal{S}(K, \eta) = \bigcup_{x \in \mathcal{S}(K, \eta)} B_{\delta_x}(x)$. En otra palabras, $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in \mathcal{S}(K, \eta)}$ es una cobertura abierta de $\mathcal{S}(K, \eta)$. Note que $\mathcal{S}(K, \eta)$ es compacto, pues es un subconjunto cerrado del compacto K (siempre podemos escribir $\mathcal{S}(K, \eta) = \Phi^{-1}(\eta, \{0\})$ y $\Phi(\eta, \cdot)$ es continua por ser diferenciable). Luego, $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in \mathcal{S}(K, \eta)}$ tiene una subcobertura finita. Esto implica que $\mathcal{S}(K, \eta)$ es finito. $\square$

(b) Asuma que $n = m = 1$ y $U = V = (0, +\infty)$. Demuestre o de un contra-ejemplo: si $\nabla\Phi(\eta, x) \neq 0$ para todo par $(\eta, x) \gg 0$ tal que $\Phi(\eta, x) = 0$, entonces para casi todo $\eta > 0$ el sistema $\Phi(\eta, x) = 0$ tiene un número finito de soluciones.

El Teorema de Transversalidad nos permite afirmar que, bajo las condiciones del enunciado, para casi todo $\eta > 0$ las soluciones del sistema $\Phi(\eta, x) = 0$ son puntos aislados de V. Sin embargo, para concluir que el número de soluciones es finito requerimos más que tener puntos aislados. Por supuesto, utilizando los mismos argumentos del ítem anterior podemos concluir que: *para casi todo $\eta > 0$ el sistema $\Phi(\eta, x) = 0$ tiene un número finito de soluciones <u>dentro de cada compacto $K \subseteq V$</u>*.

Para construir un contraejemplo necesitamos un sistema que tenga un número infinito de soluciones localmente aisladas. Cualquier función $\Phi(\eta, \cdot)$ cuyo gráfico oscile alrededor del eje de las abscisas resultará. Por ejemplo $\Phi(\eta, x) = cos(\eta x)$. $\square$