Microeconomía II - (ME)
Apunte de cátedra

Primavera 2024
Profesor: Juan Pablo Torres-Martínez

Jaime Aránguiz R-T. [1]

Última actualización: 9 de enero de 2025.

[1] Este resumen está hecho en base a las clases y diapositivas del profesor Juan Pablo Torres-Martínez, para la cátedra de Microeconomía II del Magíster en Economía. jaranguizr@fen.uchile.cl.

Índice

TEORÍA DE EQUILIBRIO GENERAL

1. Equilibrio Walrasiano en Economías de Intercambio Estáticas

1.1. Economías de intercambio estáticas

Este tipo de economías simplificadas no tienen dimensión temporal. Diremos que existen m individuos, con cierta asignación inicial, que utilizan sus recursos para demandar n mercancías.

Los individuos tienen preferencias representables por funciones de utilidad continuas y cuasicóncavas. Además, las mercancías son perfectamente divisibles.

Como hay muchos individuos, las decisiones individuales de cada uno no afectan los precios, que se toman como dados al momento de escoger las canastas de consumo.

Cada consumidor escoge la mejor canasta de consumo entre aquellas que son compatibles con su renta (que viene de su asignación inicial y los precios).

La pregunta será: ¿Existe un vector de precios para el cual la demanda agregada de cada bien es compatible con su oferta agregada (donde no hay exceso de demanda)?

Problema del consumidor

Dado el vector de precios $p \in \mathbb{R}^n_+$, cada individuo i va a demandar una canasta de mercancías $x^i(p) \in \mathbb{R}^n_+$ que cumple con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &u^i(x^i(p)) \geq u^i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x \leq p \cdot w^i \\ &p \cdot x^i(p) \leq p \cdot w^i \end{aligned}$$

donde $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ representa la función utilidad y $w^i \in \mathbb{R}^n_+$ la asignación inicial del individuo $i \in \{1, ..., m\}$.

1.2. Equilibrio en economías de intercambio

Diremos que $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ es un **precio de equilibrio** si no existe exceso de demanda por ninguna mercancía y no se destruyen recursos valiosos. Esto es, si se cumplen:

$$\begin{aligned} i) \quad & \sum_{i=1}^{m} x^i(\bar{p}) - w^i \leq 0 \\ ii) \quad & \bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} x^i(\bar{p}) - w^i = 0 \end{aligned}$$

Notemos que la condición ii) es lo mismo que decir que si algún bien sobra, es porque este no es valioso (su precio es cero):

$$\sum_{l=1}^{n} \left[\bar{p}_l \cdot \sum_{i=1}^{m} x^i_l(\bar{p}) - w^i_l \right] = 0 \iff \left[\sum_{i=1}^{m} x^i_l(\bar{p}) - w^i_l < 0 \implies p_l = 0 \right] \quad \forall l = 1, ..., n$$

Un **equilibrio Walrasiano** o equilibrio competitivo viene dado por un vector de precios de equilibrio $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ junto con todas las canastas de consumo óptimas $x^i(\bar{p})$ para cada i.

Ejemplos de equilibrio

Ejemplo 1: Una economía de dos mercancías y dos agentes con preferencias:

$$u^1(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \quad u^2(x_1,x_2) = \text{mín}\{x_1,x_2\}$$

donde $\alpha \in (0,1)$. Las asignaciones iniciales son $w^1 = (0,1)$ y $w^2 = (1,0)$. Estas funciones de utilidad tienen soluciones conocidas. Específicamente, tendremos que las demandas individuales a precios $p = (p_1, p_2) \gg 0$ y asignaciones iniciales w^1 y w^2 son:

$$x^1(p) = \left(\alpha \frac{p \cdot w^1}{p_1}, (1-\alpha)\frac{p \cdot w^1}{p_2}\right) = \left(\alpha \frac{p_2}{p_1}, (1-\alpha)\right)$$
$$x^2(p) = \left(\frac{p \cdot w^2}{p_1+p_2}, \frac{p \cdot w^2}{p_1+p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_1}{p_1+p_2}\right)$$

En general:

Solución general al problema Cobb-Douglas y Leontief

Frente a un problema del consumidor de la forma:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \\ s.a. \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución toma la siguiente forma conocida:

$$\bar{x}_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{m}{p_1}$$
$$\bar{x}_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{m}{p_2}$$

Frente a un problema del consumidor de la forma:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & \text{mín}\{x_1,x_2\} \\ s.a. \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución toma la siguiente forma conocida:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \frac{m}{p_1+p_2}$$

En este caso, podemos normalizar los precios en torno a cierta canasta $p\vec{v} = 1$. Lo común será normalizar que $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ o $p_1 + p_2 = 1$. Por ejemplo, normalizando la suma de los precios igual a uno, tenemos que el precio de equilibrio $(\bar{p}_1,\bar{p}_2) \gg 0$ (para el cual se cumplen las condiciones i) y ii) vistas anteriormente) debe cumplir con

$$\alpha\frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_1}+\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_1+\bar{p}_2}=1 \quad\Longrightarrow\quad \alpha\frac{1-\bar{p}_1}{\bar{p}_1}+\bar{p}_1=1 \quad\Longrightarrow\quad \alpha-\alpha\bar{p}_1=\bar{p}_1-\bar{p}_1^2$$
$$\bar{p}_1^2-(1+\alpha)\bar{p}_1+\alpha=0 \quad\Longrightarrow\quad p_1=\frac{1+\alpha\pm\sqrt{(1+\alpha)^2-4\alpha}}{2}=\frac{1+\alpha\pm(1-\alpha)}{2}$$

Como $p_1=1$ implica que $p_2=0$, descartamos esta solución[2] y tenemos que la solución es $p_1=\alpha$ y por tanto

$$(\bar{p}_1,\bar{p}_2)=(\alpha,1-\alpha)$$
$$x^1(\bar{p})=(1-\alpha,1-\alpha)$$
$$x^2(\bar{p})=(\alpha,\alpha)$$

Ejemplo 2: Una economía con dos mercancías y dos agentes con las mismas preferencias:

$$u^1(x_1,x_2)=u^2(x_1,x_2)=\text{mín}\{x_1,x_2\}$$

Las asignaciones iniciales son $w^1=(0,1)$ y $w^2=(4,2)$. Dada la forma de las preferencias de ambos agentes, estos no demandarán necesariamente toda la oferta del bien 1 (que "sobra"). En este caso, salvo normalización, existe un único precio de equilibrio $\bar{p}=(0,1)$ e infinitas canastas de equilibrio. Notemos que las asignaciones

$$x^1=(\gamma,1)$$
$$x^2=(\delta,2)$$

constituirán demandas compatibles con equilibrio siempre y cuando $\gamma\geq 1,\delta\geq 2$ y $\gamma+\delta\leq 4$. En este ejemplo, la multiplicidad de equilibrios no tiene efectos sobre los consumidores, en el sentido de que todos los equilibrios entregan el mismo nivel de utilidad para ambos individuos.

Ejemplo 3: Una economía de dos mercancías y dos agentes con las mismas preferencias:

$$u^1(x_1,x_2)=u^2(x_1,x_2)=\text{mín}\{x_1,x_2\}$$

Las asignaciones iniciales son $w^1=(1,0)$ y $w^2=(0,1)$. Normalizando los precios $p=(p_1,p_2)$ según $p_1+p_2=1$, las demandas son

$$x^1(p)=(p_1,p_1)$$
$$x^2(p)=(p_2,p_2)$$

con lo cual cualquier vector $(\bar{p}_1,\bar{p}_2)\geq 0$ tal que $\bar{p}_1+\bar{p}_2=1$ es precio de equilibrio. En este ejemplo, la multiplicidad de equilibrios sí tiene efectos reales sobre los consumidores (cada equilibrio tiene una utilidad diferente para cada individuo).

Ejemplo 4: Una economía con dos mercancías y dos agentes con preferencias:

$$u^1(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}+x_2, \quad u^2(x_1,x_2)=x_1$$

[2] Recordemos que el individuo 1 tiene una función de utilidad estrictamente creciente en ambos bienes, con lo cual ambos precios de equilibrio deben ser estrictamente positivos.

Las asignaciones iniciales son $w^1 = (0,1)$ y $w^2 = (1,0)$. Como podemos notar, a $i = 2$ solo le interesa la primera mercancía, de la cual tiene toda la oferta de la economía. Entonces, este individuo siempre va a demandar la canasta $(1,0)$. Como $i = 1$ tiene preferencias estrictamente monótonas, solo precios positivos son compatibles con equilibrio. Luego, $i = 1$ tendrá una renta positiva (porque tiene una segunda mercancía), que utilizará para demandar una cantidad positiva de la primera mercancía. Como $i = 2$ no cede nada de la primera mercancía, en este "equilibrio" existiría exceso de demanda por la primera mercancía, lo cual es una contradicción. En conclusión, no hay equilibrio.

Para solucionar matemáticamente este problema, tenemos (al menos) dos caminos posibles[3]:

- Modificar las preferencias de forma que los precios induzcan a $i = 2$ a vender parte de su asignación inicial para demandar x_2. Por ejemplo,

$$v^2(x_1, x_2) = x_1 + \delta x_2$$

  donde $\delta > 0$. En este caso, normalizando a $p_2 = 1$, el precio de equilibrio será $\bar{p} = (\frac{1}{\delta}, 1)$ las demandas de equilibrio serán:

$$\bar{x}^1 = (\frac{\delta^2}{4}, 1 - \frac{\delta}{4})$$
$$\bar{x}^2 = (1 - \frac{\delta^2}{4}, \frac{\delta}{4})$$

- Entregar recursos adicionales a $i = 1$ para que pueda cubrir las necesidades básicas por la primera mercancía tal que

$$w^1 = (\varepsilon, 1)$$

  donde $\varepsilon > 0$. En este caso, $i = 2$ sigue demandando la misma canasta porque solo valora el bien 1, pero ahora, a pesar de que $i = 1$ demanda una cantidad positiva del bien 1, no existe un exceso de demanda por la mercancía 1. Normalizando $p_2 = 1$, podemos despejar que $p_1 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$

1.3. Teorema de existencia de equilibrio Walrasiano

Teorema

Considere una economía de intercambio con m consumidores y n mercancías. Suponga que las mercancías son perfectamente divisibles y que las preferencias de cada individuo son localmente no saciadas y representables por funciones de utilidad continuas, estrictamente cuasicóncavas y que no tienen máximos locales en $\mathbb{R}^n_+$. Además, supongamos asignaciones iniciales $\sum_{i=1}^m w^i \gg 0$. Luego, si alguna de las siguientes condiciones es satisfecha:

(a) Las asignaciones iniciales $w^i \gg 0$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

(b) La función de utilidad de cada individuo es estrictamente creciente.

Entonces existe (al menos) un equilibrio Walrasiano.

Lo anterior **son condiciones suficientes, pero no necesarias**.

IR AL REPASO MATEMÁTICO (12)

[3] Revisar apunte iPad.

Dem. Probaremos ambas condiciones por separado:

(a) Dado que el conjunto presupuestario de los agentes no es acotado por arriba (y necesitamos que sea compacto), definamos un conjunto restringido al doble de la riqueza agregada, que es compacto:

$$K = \left\{ z \in \mathbb{R}^n_+ : z_l \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} w^i_l, \forall l \in \{1, ..., n\} \right\}$$

Además, definamos el Simplex $\Delta := \left\{ z \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{l=1}^{n} z_l = 1 \right\}$. Luego, consideremos un juego generalizado ficticio entre los consumidores y un jugador abstracto: Cada consumidor i toma los precios de las mercancías como dados, $p \in \Delta$, y maximiza su utilidad $u^i(x)$ escogiendo canastas $x \in B^i(p, K)$, donde este conjunto presupuestario está truncado por K:

$$B^i(p, K) := \left\{ x \in K : p \cdot x \leq p \cdot w^i \right\}, \quad \forall i \in \{1, ..., m\}$$

El jugador abstracto toma las demandas de los individuos como dadas, $\left\{ x^i(p) \right\}_{1 \leq i \leq m} \in K^m$, y escoge precios $p \in \Delta$ de tal forma de maximizar la función

$$p \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(x^i(p) - w^i \right)$$

Vemos que se cumplen los supuestos necesarios para el **Teorema de existencia de equilibrio en juegos generalizados**:

- Notemos que el conjunto Δ es compacto, convexo y diferente de vacío. Lo mismo para el conjunto K. Con lo cual todos los conjuntos de estrategias admisibles son compactos, convexos y diferentes de vacío.
- Por supuesto de la demostración, las funciones objetivo de los consumidores son continuas y cuasicóncavas en la propia estrategia. La función de utilidad del jugador abstracto es lineal, con lo cual también es continua y cuasicóncava en p. Todas las funciones de utilidad cumplen.
- Dado que la correspondencia de estrategias admisibles del jugador abstracto es constante e igual a Δ, por las propiedades de este, esta correspondencia es continua, con valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Por el lado de los consumidores, K es compacto convexo y diferente de vacío, ocupando que **las asignaciones iniciales son estrictamente positivas**, podemos aplicar la **Propiedad CdB** y decir que las correspondencias $B^i(p, K)$ son continuas con valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

Dado lo anterior, se cumplen todos los supuestos y sabemos que existe equilibrio en este juego, es decir, existe un vector $(\bar{p}, (\bar{x}^i)_{i \in \{1,...,m\}}) \in \Delta \times K^m$ tal que todos están en su mejor respuesta frente a la estrategia del resto:

$$\bar{x}^i \in \underset{x \in B^i(\bar{p}, K)}{\text{argmáx}} \; u^i(x), \quad \forall i \in \{1, ..., m\}$$

$$p \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{x}^i - w^i \right) \leq \bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{x}^i - w^i \right), \quad \forall p \in \Delta$$

Falta comprobar que el equilibrio de este juego ficticio es a su vez un equilibrio competitivo de la economía.

Como para todo $i \in \{1,...,m\}$ $\bar{x}^i \in B^i(\bar{p},K)$, reordenando y agregando la restricción de la correspondencia B^i sigue que $\bar{p} \cdot \sum_{i=1}^m (\bar{x}^i - w^i) \leq 0$. Como $\bar{p}$ es óptimo, esto implica que, $\forall p \in \Delta$, $p \cdot \sum_{i=1}^m (\bar{x}^i - w^i) \leq 0$. En particular, esto es cierto para los vectores canónicos de Δ, por ejemplo, para $p = (0,..., \underset{\#l}{1},...,0)$ se debe cumplir que

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_l^i - w_l^i) \leq 0$$

Esto es, **no existe exceso de demanda para ninguna mercancía** $l \in \{1,...,n\}$. Así, solo falta probar que cada consumidor i está maximizando dentro de la correspondencia no truncada $B^i(\bar{p})$, es decir, para cada i

$$u^i(\bar{x}^i) \geq u^i(x), \quad \forall x \in B^i(\bar{p}) := \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \bar{p} \cdot x \leq \bar{p} \cdot w^i\right\}$$

Supongamos, por contradicción, que existe un consumidor $i \in \{1,...,m\}$ tal que, para alguna canasta $y \in B^i(\bar{p})$, se tiene una mayor utilidad $u^i(y) > u^i(\bar{x}^i)$. Como $\bar{x}^i$ **está en el interior** del conjunto K, sabemos que existe un $\lambda \in (0,1)$, en particular, un $\lambda \approx 1$ tal que $z_\lambda := \lambda \bar{x}^i + (1-\lambda)y \in B^i(\bar{p},K)$. Sin embargo, por cuasiconcavidad estricta de u^i, tenemos que $u^i(z_\lambda) > u^i(\bar{x}^i)$, lo cual contradice que $\bar{x}^i$ sea un óptimo dentro de $B^i(\bar{p},K)$. Concluimos que **todos los consumidores maximizan dentro de** $B^i(\bar{p})$ y existe equilibrio walrasiano.

(b) En este caso es posible que algunos consumidores tengan asignaciones iniciales que no estén en el interior de $\mathbb{R}_+^n$ (no tienen de todos los bienes), definiremos una secuencia de economías $\mathcal{E}^T$ con $T \in \mathbb{N}$, con las mismas características que la economía original, pero con asignaciones iniciales que vienen dadas por

$$w^{i,T} = w^i + \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{m} w^k, \quad \forall i \in \{1,...,m\}$$

Es decir, para cada individuo i las asignaciones de estas nuevas economías, $\mathcal{E}^T$, vienen dadas por la asignación inicial de la economía original, w^i, más una fracción T de la riqueza agregada de la economía original, $\frac{1}{T}\sum_{k=1}^m w^k$. Notemos que las nuevas economías cumplen con las condiciones del ítem (a). Luego, para cada $\mathcal{E}^T$ existe un equilibrio walrasiano $\left(\bar{p}^T; (\bar{x}^{i,T})_{i\in\{1,...,m\}}\right) \in \Delta \times K^m$. Como $\Delta \times K^m$ es compacto, la secuencia $\left(\bar{p}^T; (\bar{x}^{i,T})_{i\in\{1,...,m\}}\right)_{T\in\mathbb{N}}$ tiene una subsecuencia convergente. Denotemos por $\left(\bar{p}; (\bar{x}^i)_{i\in\{1,...,m\}}\right)$ al límite de esa subsecuencia. Como en estas nuevas economías no existe exceso de demanda:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\bar{x}^{i,T} - w^{i,T}\right) \leq 0, \quad \forall T \in \mathbb{N}$$

sigue que en el límite $\sum_{i=1}^m \left(\bar{x}^i - w^i\right) \leq 0$. Así, para probar que la economía tiene equilibrio walrasiano es suficiente probar que para cada $i \in \{1,...,m\}$, la canasta $\bar{x}^i$ maximiza u^i en $B^i(\bar{p})$. Esto es equivalente a decir que cualquier otra canasta x que le entrega más utilidad cuesta más que su renta:

$$\forall i \in \{1,...,m\} : u^i(x) > u^i(\bar{x}^i) \quad \Longrightarrow \quad \bar{p} \cdot x > \bar{p} \cdot w^i$$

Probaremos primero que esta nueva canasta no puede costar menos ($\geq$) y después esta debe costar estrictamente más ($>$).

i. Supongamos que para algún consumidor i existe una canasta $x \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $u^i(x) > u^i(\bar{x}^i)$. Por continuidad de u^i sabemos entonces que existe un $\bar{T} \in \mathbb{N}$ tal que $u^i(x) > u^i(\bar{x}^{i,T})$ para todo $T \geq \bar{T}$. Dado que cada $\bar{x}^{i,T}$ es óptimo (porque constituyen EW), sabemos que $\bar{p}^T \cdot x > \bar{p}^T \cdot \bar{x}^{i,T}$ para todo

$T \geq \bar{T}$. Haciendo tender $T \to \infty$ obtenemos que esa canasta x no puede costar menos que $\bar{x}^i$, es decir, $\bar{p} \cdot x \geq \bar{p} \cdot w^i$.[4]

ii. Como por supuesto del teorema $\sum_{i=1}^m w^i \gg 0$, existe por lo menos un consumidor i_0 con renta positiva tal que $\bar{p} \cdot w^{i_0} > 0$. Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que para ese consumidor $u^{i_0}(x) > u^{i_0}(\bar{x}^{i_0})$. Terminaremos de demostrar por contradicción. Si $\bar{p} \cdot x = \bar{p} \cdot \bar{x}^{i_0}$, por la continuidad de u^i sabemos que existirá un $\theta \in (0,1)$, en particular un $\theta \approx 1$, tal que $u^{i_0}(\theta x) > u^{i_0}(\bar{x}^{i_0})$ y por lo tanto esta nueva canasta θx no puede costar menos que la óptima (por lo demostrado en i.). Sin embargo, dado que $\theta \in (0,1)$ sabemos que θx debe costar menos que x, que cuesta lo mismo que $\bar{x}^{i_0}$. Llegamos a una contradicción:

$$\bar{p} \cdot \theta x \geq \bar{p} \cdot \bar{x}^{i_0} = \bar{p} \cdot x > \bar{p} \cdot \theta x$$

Es decir, $\bar{x}^{i_0}$ es canasta óptima para i_0 a precios $\bar{p}$. Como i_0 tiene preferencias estrictamente monótonas (al igual que todos), sigue que $\bar{p} \gg 0$ y esto implica que podemos repetir el argumento anterior para todos los consumidores, ya que $\bar{p} \cdot w^i > 0, \forall i \in \{1, ..., m\}$. Concluimos que no es posible que $\bar{p} \cdot x = \bar{p} \cdot \bar{x}^{i_0}$

Demostramos que

$$\forall i \in \{1, ..., m\} : u^i(x) > u^i(\bar{x}^i) \quad \implies \quad \bar{p} \cdot x > \bar{p} \cdot w^i$$

es decir, que todos los consumidores maximizan en $\left(\bar{p}, (\bar{x}^i)_{i \in \{1,...,m\}}\right)$ y **existe equilibrio walrasiano**.

□

[4] Aquí ocupamos que, sin más información, en el límite las desigualdades estrictas se vuelven no estrictas. Por ejemplo, $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ implica que en el límite cuando $n \to \infty$, $0 = 0$.

2. Equilibrio y Bienestar Social

2.1. Eficiencia de Pareto

En el contexto de economías de intercambio que hemos visto hasta ahora, llamaremos **distribución de recursos** a cualquier familia de asignaciones individuales $(x^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$. Una distribución de recursos es **factible** si las asignaciones individuales son compatibles con la oferta de mercado:

$$\sum_{i=1}^{m} x^i \leq W$$

Distribución Pareto eficiente

Una distribución de recursos $(x^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ es **Pareto eficiente** (PE) si es factible y no existe otra distribución de recursos factible $(y^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ tal que $u^i(y^i) \geq u^i(x^i)$ para cada individuo i, con desigualdad estricta para al menos uno de ellos.

En otras palabras, una distribución de recursos es PE si es compatible con la oferta del mercado y no existe una redistribución de los recursos que permita mejorar a al menos un individuo sin perjudicar al resto.

Pareto Eficiencia $\neq$ Justicia o equidad

En cambio, la propiedad de PE es lo mínimo que deberíamos pedirle a un planificador central que, teniendo **información completa**, busca distribuir los recursos existentes de una forma centralizada.

Caracterización matemática

Una asignación $(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ es Pareto eficiente si y solo si, para cada individuo $i \in \{1,\ldots,m\}$, la asignación $\bar{x}^i$ es una solución del problema de optimización conjunto:

$$\begin{aligned} \max_{(y^j)_{j\in\{1,\ldots,m\}}\in(\mathbb{R}^n_+)^m} \quad & \begin{cases} u^i(y^i) \\ u^j(y^j) \geq u^j(\bar{x}^j), \quad \forall j \neq i \end{cases} \\ s.a. \quad & \sum_{j=1}^{m} y^j \leq W \end{aligned}$$

Propiedad

Si la asignación Pareto eficiente es interior (todos tienen un poco de todo) y las utilidades de los individuos son diferenciables, entonces las tasas de marginales de sustitución de los individuos entre cualquier par de mercancías deben coincidir. Esto es, $(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ es Pareto Eficiente si y solo si

$$\frac{\frac{\partial u^i(\bar{x}^i)}{\partial x_k}}{\frac{\partial u^i(\bar{x}^i)}{\partial x_\ell}} = \frac{\frac{\partial u^j(\bar{x}^j)}{\partial x_k}}{\frac{\partial u^j(\bar{x}^j)}{\partial x_\ell}}, \quad \forall i,j,k,\ell$$

En una economía $(m,n) = (2,2)$, el conjunto de todas las asignaciones Pareto eficientes es denominado como la **curva de contratos**.

2.2. Primer Teorema del Bienestar Social

Primer Teorema del Bienestar Social (PTBS)

Considere una economía de intercambio con m consumidores y n mercancías. Suponga que las mercancías son perfectamente divisibles y que las preferencias de cada individuo son racionales y l.n.s. Además, asuma que $\sum_{i=1}^m w^i \gg 0$, donde $w^i \in \mathbb{R}^n_+$ es la asignación inicial de recursos del individuo $i \in \{1,\ldots,m\}$. Entonces,

$$\left[(\bar{p};(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}) \text{ es EW}\right] \implies \left[(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}} \text{ es PE}\right]$$

Esto es, el mecanismo distributivo descentralizado de una economía walrasiana de intercambio nos lleva a asignaciones de recursos Pareto eficientes.

Dem. Demostraremos por contradicción. Dado un equilibrio walrasiano $(\bar{p};(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}})$, suponga que la distribución de recursos $(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ no es Pareto eficiente. Esto es lo mismo que decir que existe una asignación $(\bar{y}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ factible tal que $u^i(y^i) \geq u^i(\bar{x}^i)$ $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ con al menos una desigualdad estricta.

Dado que las preferencias son localmente no saciadas, los consumidores gastan toda su renta al demandar $\bar{x}^i$, es decir, para todos los individuos que quedan igual o mejor:

$$u^i(y^i) \geq u^i(\bar{x}^i) \implies \bar{p}\cdot y^i \geq \bar{p}\cdot\bar{x}^i = \bar{p}\cdot w^i$$

Además, la optimalidad de la demanda original implica que, para el/los individuo/s que mejoran estrictamente

$$u^i(y^i) > u^i(\bar{x}^i) \implies \bar{p}\cdot y^i > \bar{p}\cdot\bar{x}^i = \bar{p}\cdot w^i$$

Pero la factibilidad de y^i implica que $\bar{p}\cdot\sum_{i=1}^m y^i \leq \bar{p}\cdot\sum_{i=1}^m w^i$. Dado que alguien mejora con y^i, agregando encontramos una contradicción:

$$\bar{p}\cdot\sum_{i=1}^m y^i > \bar{p}\cdot\sum_{i=1}^m w^i \geq \bar{p}\cdot\sum_{i=1}^m y^i$$

Con lo cual concluimos que la distribución de recursos $(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ es Pareto eficiente. □

2.3. Estabilidad del equilibrio y núcleo

Tomemos un conjunto de individuos $N = \{1,\ldots,n\}$. Diremos que $\mathcal{S} \subseteq N$ con $\mathcal{S} \neq \emptyset$ es una coalición de individuos. Nos gustaría responder bajo qué condiciones a la coalición le conviene "bloquear" el EW, es decir, dejar de participar del mercado, aun cuando la distribución de recursos final sea Pareto eficiente.

Dada la distribución $(\bar{x}^i)_{i\in N}$ factible, la coalición $\mathcal{S}$ bloquea $(\bar{x}^i)_{i\in N}$ si:

1. Existe otra $(y^i)_{i\in N}$ factible para $\mathcal{S}$: $\sum_{i\in\mathcal{S}} y^i \leq \sum_{i\in\mathcal{S}} w^i$.
2. $u^i(y^i) \geq u^i(\bar{x}^i) \quad \forall y \in \mathcal{S}$.
3. $\exists h \in \mathcal{S}$ tal que $u^h(y^h) > u^h(\bar{x}^h)$.

Definición de núcleo y sus aplicaciones

- La distribución de recursos $(\bar{x}^i)_{i\in N}$ está en el núcleo si es factible y no es bloqueada por ninguna coalición.
- Una asignación es Pareto óptima cuando no es bloqueada por la "Gran coalición" (la coalición de todos los individuos, $\mathcal{S} = N$).
- El Primer Teorema del Bienestar nos dice que el equilibrio walrasiano está en el núcleo.

2.4. Segundo Teorema del Bienestar

Equilibrio Walrasiano con Transferencias

Un Equilibrio Walrasiano con Transferencias (EWT) es dado por precios $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ y asignaciones individuales $(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ tales que se cumple:

(i) Factibilidad de mercado: $\sum_{i=1}^m \bar{x}^i \leq \sum_{i=1}^m w^i$.

(ii) Optimalidad ex-post: Existe un vector de transferencias $(t_1,\dots,t_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que no se inyectan recursos a la economía $\sum_{i=1}^m t_i \leq 0$ y
$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(\bar{p}, \bar{p}\cdot w^i + t_i)$$

De forma equivalente, podemos decir que un EWT es caracterizado por precios $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$, una distribución de recursos factible $(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}} \geq 0$ y transferencias de renta $(\bar{t}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ tales que no se inyectan recursos, $\sum_{i=1}^m \bar{t}^i = 0$ y para cada individuo $i \in \{1,\dots,m\}$ la canasta $\bar{x}^i$ es su demanda marshaliana a precios $\bar{p}$ y renta $\bar{p}\cdot w^i + \bar{t}^i$.

Segundo Teorema del Bienestar Social (STBS)

Considere una economía de intercambio con m consumidores y n mercancías perfectamente divisibles. Supongamos que las preferencias de cada individuo son racionales, continuas, convexas y estrictamente monótonas. Entonces,

$$\left[(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}} \gg 0 \text{ es PE}\right] \quad \Longrightarrow \quad \exists \bar{p} \in \mathbb{R}^n_+ : \left[(\bar{p}; (\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}) \text{ es un EWT}\right]$$

Esto es, si un planificador central tiene información completa sobre las asignaciones iniciales y los precios resultantes de una cierta distribución de recursos Pareto eficiente, este puede implementar esta distribución a través de redistribuir las dotaciones iniciales con transferencias entre agentes.
Cabe destacar que la implementación del STBS requiere que el planificador central tenga información muy precisa sobre las características de los consumidores, cosa que puede no ser muy creíble en la realidad.

Dem. Dada la asignación Pareto eficiente interior $(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}} \gg 0$, para probar EWT es suficiente probar que existe un $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ tal que cualquier otra canasta que entregue más utilidad cuesta más que la renta con transferencias. Esto es,

$$u^i(x^i) > u^i(\bar{x}^i) \quad \Longrightarrow \quad \bar{p}\cdot x^i > \bar{p}\cdot \bar{x}^i = \bar{p}\cdot w^i + \bar{t}^i \quad \forall i \in \{1,\dots,m\} \tag{2.1}$$

De hecho, si lo anterior se cumple, $(\bar{p}, (\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}})$ es un EWT donde cada $\bar{t}^i = \bar{p}\cdot\bar{x}^i - \bar{p}\cdot w^i$.

Probaremos lo anterior usando el Teorema de Separación de Convexos. Definamos el conjunto de la suma de todas las canastas que entregan una mayor utilidad que la demanda $\bar{x}^i$ para cada $i \in \{1,\dots,m\}$:

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x^i \in \mathbb{R}^n_+ : \forall i \in \{1,\dots,m\}, u^i(x^i) > u^i(\bar{x}^i) \right\}$$

La convexidad de preferencias implica la cuasiconcavidad de las funciones de utilidad, que nos asegura que el conjunto A es convexo. Entonces,

- Dados dos elementos de A,

$$z_1 = \sum_{i=1}^{m} x_1^i : u^i(x_1^i) > u^i(\bar{x}^i)$$
$$z_2 = \sum_{i=1}^{m} x_2^i : u^i(x_2^i) > u^i(\bar{x}^i)$$

  Si tomamos la combinación convexa entre ellos definida por

$$z_\lambda := \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\lambda x_1^i + (1-\lambda) x_2^i\right)$$

  Notamos que por la cuasiconcavidad de u^i:

$$u^i\left(\lambda x_1^i + (1-\lambda)x_2^i\right) \geq \text{mín}\left\{u^i(x_1^i), u^i(x_2^i)\right\} > u^i(\bar{x}^i) \quad \Longrightarrow \quad z_\lambda \in A$$

Teorema de Separación de Convexos

Dados dos conjuntos disjuntos A, B convexos y distintos de vacío, sabemos que $\exists \beta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$\beta \cdot a \leq \beta \cdot b \quad \forall a \in A, b \in B$$

(Volvemos a la demostración principal) Además, dado que la distribución $(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ es Pareto eficiente, la distribución inicial no puede pertenecer a A, $\sum_{i=1}^m w^i \notin A$. Entonces, usamos el Teorema de Separación de Convexos sobre los conjuntos A y $\left\{\sum_{i=1}^m w^i\right\}$, y deducimos que existe un vector $\bar{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que,

$$\bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i = \bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} w^i \leq \bar{p} \cdot z, \quad \forall z \in A \tag{2.2}$$

donde agregamos la primera igualdad, que viene asegurada por la monotonía estricta de las preferencias y por la no-inyección de recursos. Además, si e_l es la canasta que solo contiene una unidad de la mercancía l, entonces el vector $z = \sum_{i=1}^m \left(\bar{x}^i + \frac{1}{m} e_l\right)$ pertenece al conjunto A y, evaluando este z en (2.2),

$$\bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i \leq \bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{x}^i + \frac{1}{m} e_l\right) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \bar{p}_l$$

Repitiendo esto para todo $l \in \{1,\dots,n\}$ notamos que $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$. Ahora solo falta probar que este vector $\bar{p}$ cumple con la propiedad (2.1). Primero probaremos que la relación se cumple con desigualdad no estricta en la derecha, luego terminaremos con probar desigualdad estricta:

- Supongamos que para algún consumidor $i \in \{1,...,m\}$ existe $x^i \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $u^i(x^i) > u^i(\bar{x}^i)$. Entonces, por continuidad de u^i, sabemos que existe un $\theta \in (0,1)$, en particular un $\theta \approx 1$, tal que se sigue cumpliendo que $u^i(\theta x^i) > u^i(\bar{x}^i)$. Luego, si le repartimos a todo el resto la diferencia entre las canastas x^i y θx^i, por monotonía estricta de las preferencias sabemos que $u^j\left(\bar{x}^j + \frac{1-\theta}{m-1}x^i\right) > u^j(\bar{x}^j)\ \forall j \neq i$. Es decir, todas estas canastas cumplen con la definición del conjunto A. Reordenando la suma,

$$z = \theta x^i + \sum_{j\neq i}\left(\bar{x}^j + \frac{1-\theta}{m-1}x^i\right) = x^i + \sum_{j\neq i}\bar{x}^j \in A$$

  Evaluando este elemento de A en (2.2):

$$\bar{p}\cdot\sum_{i=1}^{m}\bar{x}^i \leq \bar{p}\cdot\left(x^i + \sum_{j\neq i}\bar{x}^j\right) \implies \bar{p}\cdot\bar{x}^i \leq \bar{p}\cdot x^i$$

  Así, probamos que $u^i(x^i) > u^i(\bar{x}^i) \implies \bar{p}\cdot x^i \geq \bar{p}\cdot\bar{x}^i$. Falta probar la desigualdad estricta.

- Demostramos por contradicción. Supongamos que $u^i(x^i) > u^i(\bar{x}^i)$ y $\bar{p}\cdot x^i = \bar{p}\cdot\bar{x}^i$. Nuevamente, la continuidad de las preferencias nos asegura que existe un $\theta \in (0,1)$, en particular un $\theta \approx 1$, tal que $u^i(\theta x^i) > u^i(\bar{x}^i)$. Luego, por lo demostrado en el párrafo anterior, $\bar{p}\cdot\theta x^i \geq \bar{p}\cdot\bar{x}^i$. Pero habíamos supuesto que $\bar{p}\cdot\bar{x}^i = \bar{p}\cdot x^i$. Como $\bar{x}^i \gg 0$ y $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$, $\bar{p}\cdot\bar{x}^i > 0$ y podemos simplificar la desigualdad anterior y logramos una contradicción:

$$\bar{p}\cdot\bar{x}^i > 0 \implies \theta(\bar{p}\cdot x^i) \geq \bar{p}\cdot x^i > 0 \implies \theta \geq 1$$

  Concluimos que $u^i(x^i) > u^i(\bar{x}^i) \implies \bar{p}\cdot x^i > \bar{p}\cdot\bar{x}^i$ y con eso terminamos de demostrar que se cumple la propiedad (2.1) y queda demostrado el STBS:

$$\left[(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}} \gg 0 \text{ es PE}\right] \implies \exists\bar{p}\in\mathbb{R}^n_+ : \left[(\bar{p};(\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}) \text{ es un EWT}\right]$$

□

2.5. Unicidad del equilibrio walrasiano

Para asegurar la unicidad del equilibrio walrasiano requeriremos agregar muchos supuestos (y muy restrictivos).

Consideremos una economía de intercambio estática con L mercancías perfectamente divisibles, que son demandadas por N individuos. Cada agente $i \in \{1,...,N\}$ es caracterizado por una función de utilidad continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava $u^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathcal{E}(w)$ a la economía donde los individuos tienen asignaciones iniciales dadas por $w = (w^i)_{i\in\{1,..,N\}} \in (\mathbb{R}^L_+\setminus\{0\})^N$, donde $\sum_{i=1}^N w^i \gg 0$.

Dados precios $p \in \mathbb{R}^L_+$, cada individuo i maximiza su función de utilidad u^i escogiendo una canasta en el conjunto $B^i(p) := \{x^i \in \mathbb{R}^L_+ : p\cdot x^i \leq p\cdot w^i\}$. Como u^i es continua y estrictamente cuasi-cóncava, mientras que $B^i(p)$ es compacto, convexo y diferente de vacío, sabemos que existe una única canasta $x^i(p)$ que maximiza las preferencias del individuo i a precios p.

Proposición 1: Unicidad de asignación inicial

Si $w \gg 0$ es Pareto Eficiente, entonces la asignación inicial es el único equilibrio en $\mathcal{E}(w)$.

Dem. Como la asignación inicial es interior y es equilibrio PE, por el STBS sabemos que existe un $\bar{p} \in \mathbb{R}^L_{++}$ tal que $(\bar{p}, (w^i)_{i\in\{1,...,N\}})$ es un EWT de $\mathcal{E}(w)$. Supongamos que este equilibrio no es único. Sea $\hat{p} \in \mathbb{R}^L_{++}$ otro precio de equilibrio. Como cada agente i puede demandar su asignación inicial a cualquier precio y $(x^i(\hat{p}))_{i\in\{1,...,N\}}$ es asignación de equilibrio, tenemos que $u^i(x^i(\hat{p})) \geq u^i(w^i)$. Además, la Pareto eficiencia de w implica que nadie puede mejorar con esta otra asignación, esto es, $u^i(x^i(\hat{p})) = u^i(w^i)$, $\forall i \in \{1,...,N\}$. Por lo tanto, si existe un i tal que $x^i(\hat{p}) \neq w^i$, la cuasi-concavidad estricta de u^i implica que, por ejemplo,

$$u^i(0{,}5x^i(\hat{p}) + 0{,}5w^i) > u^i(x^i(\hat{p}))$$

Además, como B^i es convexo, la canasta $(0{,}5x^i(\hat{p}) + 0{,}5w^i)$ es factible a precios $\hat{p}$. Luego, obtenemos una contradicción, pues si lo anterior es cierto, entonces $x^i(\hat{p})$ no era demanda óptima. Concluimos que $x^i(\hat{p}) = w^i$ para todo $i \in \{1,...,N\}$. $\square$

Definamos la **función de exceso de demanda** de la economía $\mathcal{E}(w)$, $z : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}^L$, como

$$z(p,w) = \sum_{i=1}^{N} x^i(p) - w^i$$

Además, definiremos que las mercancías son (en el agregado) **sustitutos brutos** si, dados precios $p,q \in \mathbb{R}^L_{++}$ tales que $p_j > q_j$ y $p_l = q_l$ para todo $l \neq j$, tenemos que $(z_l(p,w))_{l\neq j} \gg (z_l(q,w))_{l\neq j}$. Esto es que, si *ceteris paribus* la mercancía j es más cara bajo precios p, en el agregado se sustituye esa mercancía j con todo el resto de mercancías $l \neq j$ (el exceso de demanda de las mercancías $l \neq j$ es estrictamente mayor bajo precios p que bajo precios q).

Proposición 2: Unicidad por sustitutos brutos

Si la función de exceso de demanda de la economía $\mathcal{E}(w)$ satisface la propiedad de sustitutos brutos, entonces el conjunto

$$\mathcal{P}(w) := \left\{p \in \mathbb{R}^L_{++} : z(p,w) = 0 \wedge p_L = 1\right\}$$

tiene un único elemento. Esto es, salvo normalización ($p_L = 1$) el equilibrio walrasiano es único.

Dem. Supongamos por contradicción que existen precios $p,q \in \mathcal{P}(w)$ tales que $p \neq q$. Entonces, podemos encontrar un $\theta > 0$ tal que $\theta p \leq q$, con al menos una mercancía $l \in \{1,...,L\}$ para la cual $\theta p_l = q_l$. Luego, la homogeneidad de grado cero de la función de exceso de demanda agregada nos asegura que $z(p,w) = 0 \implies z(\theta p, w) = 0$. Podríamos ir de θp a q aumentando el precio coordenada a coordenada, sin nunca alterar el precio de la mercancía l. Como las mercancías son sustitutos brutos, cada vez que se aumenta una coordenada de θp para que iguale a la de q, el exceso de demanda por la mercancía l crece. Es decir, al final del proceso de aumento de coordenadas, llegamos a que $z_l(q,w) > 0$, una contradicción con $q \in \mathcal{P}(w)$. Concluimos que $\mathcal{P}(w)$ es un conjunto unitario. $\square$

3. Equilibrio en Economías Estáticas con Producción

Expandiremos el modelo de economías estáticas incluyendo producción. El siguiente párrafo resume el funcionamiento de este modelo.

Sea $\mathcal{E}(\mathbb{R}^L_+, (U^i, w^i, \theta^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}, (Y^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}})$ una economía estática con producción en la cual hay L mercancías perfectamente divisibles, N consumidores y J firmas. Cada consumidor $i \in \{1,\ldots,N\}$ es caracterizado por una función de utilidad $U^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$, asignaciones iniciales de mercancías $w^i \in \mathbb{R}^L_+$ y derechos de propiedad $\theta^i = (\theta^i_j)_{j\in\{1,\ldots,J\}} \in [0,1]^J$ sobre las firmas. Cada firma $j \in \{1,...,J\}$ es caracterizada por un conjunto de producción $Y^j \subseteq \mathbb{R}^L$ que determina las combinaciones de insumos y recursos que son tecnológicamente factibles para ella.

En este contexto, un "equilibrio Walrasiano" es caracterizado por un vector de precios y decisiones de consumo y producción $(\bar{p}, (\bar{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}, (\bar{y}^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}})$ tal que:

(i) Para cada consumidor $i \in \{1,\ldots,N\}$, la canasta $\bar{x}^i$ maximiza la función de utilidad U^i en el conjunto presupuestario

$$B^i(\bar{p}) = \left\{ x^i \in \mathbb{R}^L_+ : \bar{p}\cdot x^i \leq \bar{p}\cdot \left(w^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^i_j \bar{y}^j \right) \right\}.$$

donde $\bar{p}\cdot\sum_{j=1}^{J}\theta^i_j\bar{y}^j$ representa el ingreso que obtiene el individuo por propiedad de sus firmas.

(ii) Para cada firma $j \in \{1,\ldots,J\}$,

$$\bar{y}^j \in \underset{y^j\in Y^j}{\text{argmáx}}\ \bar{p}\cdot y^j.$$

(iii) No existe exceso de demanda o desperdicio de recursos:

$$\sum_{i=1}^{N}\bar{x}^i \leq \sum_{i=1}^{N} w^i + \sum_{j=1}^{J}\bar{y}^j, \quad \bar{p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\bar{x}^i - \sum_{i=1}^{N} w^i - \sum_{j=1}^{J}\bar{y}^j\right) = 0.$$

3.1. Teorema de existencia de equilibrio walrasiano con producción

Teorema

Dada una economía estática con producción $\mathcal{E}(\mathbb{R}^L_+, (U^i, w^i, \theta^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}, (Y^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}})$, supongamos que:

(a) Para cada consumidor $i \in \{1,...,N\}$, la función de utilidad U^i es continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava; y las asignaciones iniciales son interiores $w^i \gg 0$.[a]

(b) Para cada firma $j \in \{1,...,J\}$, el conjunto Y^j es cerrado, convexo y contiene al vector cero; y el conjunto $Y = \sum_{j=1}^{J} Y^j$ cumple con $Y \cap \mathbb{R}^L_+ = \{0\}$[b] e $Y \cap (-Y) = \{0\}$[c].

Entonces, existe un equilibrio walrasiano.

[a] La condición de asignaciones iniciales interiores se puede relajar y demostrar existencia análogamente al item b) de la demostración de economías sin producción.
[b] Esto es equivalente a asumir que no se puede producir de la nada.
[c] Esto es equivalente a asumir que la producción es completamente reversible.

Dem. Demostraremos análogamente a las economías sin producción.

Con tal de acotar el conjunto de decisión de los consumidores y las firmas, definamos el siguiente conjunto de asignaciones alcanzables:

$$A = \left\{ \left((x^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}, (y^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}}\right) \in \mathbb{R}_+^{LN} \times \prod_{j=1}^{J} Y^j : \sum_{i=1}^{N} x^i \leq \sum_{i=1}^{N} w^i + \sum_{j=1}^{J} y^j \right\}$$

Este conjunto es por definición cerrado y podemos demostrar que es acotado (Proposición de más adelante). Como es acotado, sabemos que para todo $\left((x^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}, (y^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}}\right) \in A$, $\exists \alpha > 0$ tal que:

$$-\alpha \leq x_l^i \leq \alpha \quad \wedge \quad -\alpha \leq y_l^j \leq \alpha, \quad \forall i, j, l$$

Con esto, tanto para los consumidores como para las firmas podremos definir un conjunto de decisión compacto para las canastas de consumo y planes de producción alcanzables respectivamente. Para los consumidores definimos el siguiente conjunto K, que es compacto:

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^L : x_l \leq 2\alpha, \ \forall l \in \{1, \ldots, L\} \right\}$$

Para cada firma $j \in \{1, \ldots, J\}$ definiremos su conjunto de planes de producción factibles y alcanzables como:

$$\bar{Y}^j = \left\{ y^j \in Y^j : -2\alpha \leq y_l^j \leq 2\alpha, \ \forall l \in \{1, \ldots, L\} \right\}$$

Además, definiremos el Simplex de precios $\Delta := \left\{ p \in \mathbb{R}_+^L : \sum_{l=1}^{L} p_l = 1 \right\}$ y consideraremos un juego generalizado ficticio entre los consumidores, las firmas y un jugador abstracto: Cada consumidor i toma los precios p y los planes de producción $(y^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}}$ como dados y maximiza su utilidad U^i en el conjunto presupuestario truncado $B^i(p,K)$, donde:

$$B^i(p,K) := \left\{ x \in K : p \cdot x \leq p \cdot \left(w^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_j^i y^j \right) \right\}$$

Cada firma j toma los precios p como dados y maximiza su utilidad en el conjunto de planes de producción truncado $\bar{Y}^j$. Es decir, resuelve:

$$\max_{y^j \in \bar{Y}^j} p \cdot y^j$$

El jugador abstracto toma las demandas $(x^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}} \in K^N$ y los planes de producción $(y^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}} \in \prod_{j=1}^{J} \bar{Y}^j$ como dados y escoge precios $p \in \Delta$ de tal forma que maximiza la función:

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x^i - \sum_{i=1}^{N} w^i - \sum_{j=1}^{J} y^j \right)$$

Luego, notamos que se cumplen los supuestos del Teorema de existencia de equilibrio en juegos generalizados:

- El conjunto Δ es compacto, convexo y diferente de vacío por definición. Lo mismo para el conjunto K y todos los conjuntos $\bar{Y}^j$. Es decir, todos los conjuntos de estrategias admisibles son compactos, convexos y diferentes de vacío.

- La función objetivo del jugador abstracto es lineal, con lo cual es continua y cuasicóncava en p. Lo mismo para la función objetivo de toda firma j, que es lineal y por tanto continua y cuasicóncava en y^j. Por supuesto de la demostración, las funciones de utilidad de los consumidores U^i son continuas y cuasicóncavas en x^i. Es decir, todas las funciones de utilidad son continuas y cuasicóncavas en la propia estrategia.

- Dado que la correspondencia de estrategias admisibles del jugador abstracto es constante e igual a Δ, sabemos que es una correspondencia continua con valores compactos convexos y diferentes de vacío. Lo mismo ocurre para todas las firmas, ya que $\bar{Y}^j$ es una correspondencia constante (es un conjunto). Para los consumidores, ocupando que las asignaciones iniciales son estrictamente positivas, podemos aplicar la **Propiedad CdB**[5] y decir que las correspondencias $B^i(p,K)$ son continuas con valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Es decir, todas las correspondencias de decisión son continuas con valores compactos convexos y diferentes de vacío.

Como se cumplen todos los supuestos, sabemos que existe un equilibrio de Nash en este juego, esto es, existe un vector $(\bar{p}, (\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}, (\bar{y}^j)_{j\in\{1,\dots,J\}}) \in \Delta \times K^N \times \prod_{j=1}^J \bar{Y}^j$ tal que todos están en su mejor respuesta frente a la estrategia del resto:

$$\bar{x}^i \in \underset{x^i \in B^i(\bar{p},K)}{\text{argmáx}}\ U^i(x^i), \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}$$

$$\bar{y}^j \in \underset{y^j \in \bar{Y}^j}{\text{argmáx}}\ \bar{p} \cdot y^j, \quad \forall j \in \{1,\dots,J\}$$

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^N x^i - \sum_{i=1}^N w^i - \sum_{j=1}^J y^j \right) \leq \bar{p} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \bar{x}^i - \sum_{i=1}^N w^i - \sum_{j=1}^J \bar{y}^j \right), \quad \forall p \in \Delta$$

Falta comprobar que el equilibrio de este juego ficticio es a su vez un equilibrio competitivo de la economía, esto es, que tanto consumidores como firmas estén maximizando en sus conjuntos de decisión originales.

Como para todo consumidor i, $\bar{x}^i \in B^i(\bar{p},K)$, reordenando, agregando la restricción y ocupando que $\sum_{i=1}^N \theta^i = 1$ aprendemos que

$$\bar{p} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \bar{x}^i - \sum_{i=1}^N w^i - \sum_{j=1}^J \bar{y}^j \right) \leq 0$$

Como $\bar{p}$ es óptimo, esto implica que lo anterior también es cierto $\forall p \in \Delta$. En particular, es cierto para los vectores canónicos, con lo cual aprendemos que no existe exceso de demanda para ninguna mercancía:

$$\sum_{i=1}^N \bar{x}^i_l - \sum_{i=1}^N w^i_l - \sum_{j=1}^J \bar{y}^j_l \leq 0, \quad \forall l \in \{1,\dots,L\} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^N \bar{x}^i \leq \sum_{i=1}^N w^i + \sum_{j=1}^J \bar{y}^j$$

Es decir, $\left((\bar{x}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}, (\bar{y}^j)_{j\in\{1,\dots,J\}}\right) \in A$ y tenemos que cada $\bar{x}^i$ está en el interior de K y cada $\bar{y}^j$ en el interior[6] de $\bar{Y}^j$. Falta probar que consumidores y firmas maximizan en $B^i(\bar{p})$ e Y^j respectivamente. Ambos se demuestran por contradicción.

[5] Esto se cumple porque K es compacto, convexo y diferente de vacío, $\Delta \times \prod_{j=1}^J \bar{Y}^j$ es diferente de vacío, la restricción $p \cdot \left(x^i - w^i - \sum_{j=1}^J \theta^i_j y^j\right) \leq 0$ es convexa en x^i y para todo $(p, (y^j)_{j\in\{1,\dots,J\}}) \in \Delta \times \prod_{j=1}^J \bar{Y}^j$ existe un $x^i_0 \in K$ tal que $p \cdot \left(x^i - w^i - \sum_{j=1}^J \theta^i_j y^j\right) < 0$ (porque las asignaciones iniciales son interiores), entonces $B^i(p,K) : \Delta \times \prod_{j=1}^J \bar{Y}^j \twoheadrightarrow K$ es una correspondencia continua con valores compactos convexos y diferentes de vacío.

[6] Esto ocurre porque definimos K y $\bar{Y}^j$ con una holgura suficiente (2α), y sabemos que los elementos de A están acotados por α.

Supongamos que existe una firma j tal que para algún plan de producción $\hat{y}^j \in Y^j$ su utilidad es mayor: $\bar{p} \cdot \hat{y}^j > \bar{p} \cdot \bar{y}^j$. Como $\bar{y}^j$ está en el interior del conjunto $\bar{Y}^j$, que es convexo, sabemos que existe un $\lambda \in (0,1)$, en particular un $\lambda \approx 1$, tal que $z_\lambda := \lambda \bar{y}^j + (1-\lambda)\hat{y}^j \in \bar{Y}^j$. Sin embargo, como $p \cdot y^j$ es lineal y creciente en y^j,

$$\hat{y}^j > \bar{y}^j \implies z_\lambda > \bar{y}^j \implies \bar{p} \cdot z_\lambda > \bar{p} \cdot \bar{y}^j$$

Lo cual contradice la optimalidad de $\bar{y}^j$ en $\bar{Y}^j$. Concluimos que todas las firmas maximizan en Y^j. Para los consumidores es análogo.

Supongamos que existe un consumidor i tal que para alguna canasta $\hat{x}^i \in B^i(\bar{p})$ su utilidad es mayor: $U^i(\hat{x}^i) > U^i(\bar{x}^i)$. Como $\bar{x}^i$ está en el interior del conjunto K, que es convexo, sabemos que existe un $\lambda \in (0,1)$, en particular un $\lambda \approx 1$, tal que $z_\lambda := \lambda \bar{x}^i + (1-\lambda)\hat{x}^i \in B^i(\bar{p}, K)$. Sin embargo, U^i es estrictamente cuasicóncava, por lo tanto $U^i(z_\lambda) > U^i(\bar{x}^i)$, lo cual contradice la optimalidad de $\bar{x}^i$ en $B^i(\bar{p}, K)$. Concluimos que todos los consumidores maximizan en $B^i(\bar{p})$ y **existe equilibrio walrasiano**. $\square$

Proposición: A es acotado.

Supongamos que se cumplen los supuestos del ítem (b) del Teorema anterior. Esto es, supongamos que los conjuntos $\{Y^j\}_{j\in\{1,\ldots,J\}}$ son cerrados, convexos y contienen al vector cero. Además, que $Y = \sum_{j=1}^J Y^j$ cumple con $Y \cap \mathbb{R}^L_+ = \{0\}$ e $Y \cap (-Y) = \{0\}$. Entonces, el conjunto de asignaciones alcanzables:

$$A = \left\{ \left((x^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}, (y^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}}\right) \in \mathbb{R}^{LN}_+ \times \prod_{j=1}^J Y^j : \sum_{i=1}^N x^i \leq \sum_{i=1}^N w^i + \sum_{j=1}^J y^j \right\}$$

es acotado.

Dem. Dado que las canastas de consumo son no-negativas, A es acotado por abajo y es suficiente probar que el conjunto

$$B = \left\{ (y^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}} \in \prod_{j=1}^J Y^j : W + \sum_{j=1}^J y^j \geq 0 \right\}$$

es acotado, donde $W = \sum_{i=1}^N w^i$. Supongamos por contradicción que B no es acotado. Esto es, supongamos que existe una secuencia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ con $y_n = (y_n^j)_{j\in\{1,\ldots,J\}}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{j\in\{1,\ldots,J\}} ||y_n^j|| = +\infty$$

Además, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda_n := \max_{j\in\{1,\ldots,J\}} ||y_n^j|| > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si cada conjunto Y^j es convexo y contiene al vector cero, entonces la siguiente combinación convexa pertenece a Y^j

$$\frac{y_n^j}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} y_n^j + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)\vec{0} \in Y^j, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1,\ldots,J\}$$

Luego, para cada j la secuencia $\left\{y_n^j/\lambda_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en el conjunto Y^j y es acotada, porque $\max_j ||\frac{y_n^j}{\lambda_n}|| = 1$. Por lo tanto, si cada Y^j es cerrado, el conjunto $\prod_{j=1}^J Y^j$ es cerrado y, salvo subsecuencia, $\left\{y_n^j/\lambda_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un vector $(\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^J) \in \prod_{j=1}^J Y^j$. Notemos que como para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un j tal que $||\frac{y_n^j}{\lambda_n}|| = 1$, el vector

$(\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^J) \neq \vec{0}$. Además, como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$, tenemos que

$$\frac{W}{\lambda_n} + \sum_{j=1}^{J} \frac{y_n^j}{\lambda_n} \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Haciendo tender al límite, esto implica que $\sum_{j=1}^{J} \bar{y}_n^j \geq 0$. De hecho, si $Y = \sum_{j=1}^{J} Y^j$ y asumimos que $Y \cap \mathbb{R}_+^L = \{0\}$, concluimos que $\sum_{j=1}^{J} \bar{y}_n^j = 0$. Sin pérdida de generalidad, fijemos un $k \in \{1, \ldots, J\}$ tal que $\bar{y}^k \neq 0$. Como la suma de todos es igual a cero, notamos que $\bar{y}^k = -\sum_{j\neq k} \bar{y}^j$. Además, como $\vec{0} \in \bigcap_{j=1}^{J} Y^j$, sabemos que $y^k = -\sum_{j\neq k} \bar{y}^j \in Y$ y $\sum_{j\neq k} y^j \in Y$. Finalmente, si asumimos que $Y \cap (-Y) = \{0\}$, el resultado anterior implica que $\bar{y}^k = 0$. Una contradicción. Concluimos que B es acotado y por lo tanto A es acotado. $\square$

4. Equilibrio en Mercados Contingentes y en Mercados Financieros

4.1. Introducción a mercados incompletos

Extenderemos el modelo para incorporar una dimensión temporal e incertidumbre.

Mercados contingentes de Arrow-Debreu

Podríamos pensar que una economía de intercambio no ignora realmente el tiempo y la incertidumbre, sino que simplemente asume que existen hoy mercados para la negociación de **todos** los contratos contingentes para el futuro.

Esto es, para cada posible estado de la naturaleza s y para cada mercancía l, los consumidores pueden transar hoy un contrato que especifica la entrega de una unidad de l en cada realización s.

Bajo esta hipótesis (fuerte) podemos asegurar que las decisiones individuales podrían ser centralizadas por precios de equilibrio, llevando a distribuciones Pareto eficiente y socialmente estables. Notemos que este supuesto es poco creíble, ya que implica que todos los agentes conocen los contratos para todos los posibles futuros y que estos contratos existen.

Mercados financieros

En vez de asumir que existen todos los contratos contingentes y que pueden ser negociados hoy, vamos a suponer que existen activos financieros que funcionan como contratos contingentes que le permiten a los individuos endeudarse o ahorrar para suavizar su consumo a través del tiempo.

Si los activos financieros permiten implementar todas las transferencias de renta posibles, lo cual requiere la existencia de al menos tantos contratos como estados de la naturaleza, entonces las decisiones de consumo que se toman a lo largo del tiempo son tan efectivas como las que se hubiesen tomado en una economía estática con mercados contingentes.

Cuando esto ocurra diremos que los **mercados financieros son completos**. En estos casos tendremos existencia de equilibrio, eficiencia y estabilidad social.

Introducción a mercados financieros incompletos

No es creíble que economías con gran cantidad de posibles contingencias los mercados sean completos. Cuando los instrumentos financieros no permiten implementar todas las transferencias de renta posibles, se comprometerá la existencia de equilibrio y la eficiencia.

Por ejemplo, consideremos una economía con dos periodos y S estados de la naturaleza en el segundo periodo. Hay una mercancía y J activos reales, que hacen promesas indexadas en cantidades de la mercancía. Si $J < S$ los mercados son incompletos. Cada contrato j promete un pago equivalente al valor de mercado de $A_{s,j}$ unidades de la mercancía en el estado s. Si el agente i tiene asignaciones iniciales w_s^i en el estado $s \in \{0, 1, ..., S\}$, entonces sus restricciones presupuestarias vienen dadas por:

$$x_0^i + \sum_{j=1}^{J} q_j z_j \leq w_0^i$$

$$x_s^i \leq w_s^i + \sum_{j=1}^{J} A_{s,j} z_j, \quad \forall s \in \{1, ..., S\}$$

Asumamos que las preferencias del consumidor i vienen dadas por la función de utilidad estrictamente creciente:

$$U^i(x^i) := u^i(x_0^i) + \beta \sum_{s=1}^{S} \pi_s u^i(x_s^i)$$

Entonces, dados precios de los activos $q = (q_1, ..., q_j)$, el consumidor i buscará el portafolio z^i que maximice

$$V^i(z^i) := u^i(w_0^i - q \cdot z^i) + \beta \sum_{s=1}^{S} \pi_s u^i \left(w_s^i + \sum_{j=1}^{J} A_{s,j} z_j \right)$$

En esta economía, un equilibrio competitivo es dado por un vector $(\bar{q}, (\bar{z})_{i\in\{1,...,m\}})$ tal que

$$V^i(\bar{z}^i) \geq V^i(\bar{z}^i), \quad \forall z^i \in \mathbb{R}^J$$

donde $\sum_{i=1}^{N} \bar{z}^i = 0$. En este contexto siempre hay equilibrio. Sin embargo, es clave que no existan restricciones financieras.

Inexistencia de equilibrio en mercados incompletos

Supongamos que $m = 2, S = J = 1$, un activo $A_{1,1} = 1$ y que las utilidades vienen dadas por

$$U^1(x_0, x_1) = U^2(x_0, x_1) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2}\sqrt{x_1}$$

Además, las asignaciones iniciales son $w^1 = (1,1)$ y $w^2 = (1,0)$. Luego, si el agente $i = 1$ no puede endeudarse ($z^1 \geq 0$), entonces no hay equilibrio. Sabemos que $i = 2$ siempre ahorrará recursos para asegurar un consumo positivo en el segundo periodo. Sin embargo, como $i = 1$ no se puede endeudar no existe una contraparte para la inversión de $i = 2$. No hay equilibrio.

Por otro lado, si $i = 1$ tiene un poco de acceso a deuda, los problemas desaparecen y sí hay equilibrio. Efectivamente, si $z^1 \geq -\delta$ para algún $\delta > 0$ pequeño, entonces la economía tiene un único equilibrio competitivo, el cual es caracterizado por los precios:

$$\bar{q} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{1 + \frac{16}{\delta}} - 1 \right)$$

4.2. Mercados financieros: Definiciones y Teoremas

Modelo

Considere una economía $\mathcal{E}$ con dos periodos, $t \in \{0,1\}$, en la cual hay incertidumbre sobre el estado de la naturaleza $s \in \{1,\ldots,S\}$ que se realizará en $t = 1$. Estos estados pueden afectar las promesas de los activos, las preferencias de los consumidores o sus asignaciones iniciales.

En cada periodo hay mercados para el intercambio de L mercancías perfectamente divisibles por parte de H individuos, los cuales tienen asignaciones iniciales $w^h = (w_s^h)_{s\in\{0,\ldots,S\}} > 0$ y buscan maximizar funciones de utilidad $U^h : \mathbb{R}_+^{L(S+1)} \to \mathbb{R}$ continuas, estrictamente crecientes y estrictamente cóncavas, donde $h \in \{1,\ldots,H\}$. Así, cada individuo h recibe utilidad por su consumo en el primer periodo, x_0^h, y por su plan de consumo para el segundo periodo, $(x_s^h)_{s\in\{1,\ldots,S\}}$, el cual determina canastas contingentes a los diferentes estados de la naturaleza. Denotaremos por $p = (p_s)_{s\in\{0,\dots,S\}} \in \mathbb{R}^L_+$ al vector de precios de las mercancías, donde $p_s = (p_{s,l})_{l\in\{1,\dots,L\}}$ son los precios de los bienes en el estado de la naturaleza $s \in \{0,1,\dots,S\}$.

Existen J instrumentos financieros a los cuales todos los individuos tienen acceso y pueden ser utilizados para suavizar la riqueza. Cada activo $j \in \{1,\dots,J\}$ es negociado en el primer periodo por un precio q_j y promete un pago $V_{s,j}(p) \geq 0$ en el estado de la naturaleza s del segundo periodo[7]. Denotaremos por $q = (q_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J_+$ al vector de precios de los activos. Note que diversos tipos de activos son compatibles con este modelo:

- **Activos nominales**: las promesas no dependen de precios. Esto es, j es un activo nominal si para cada $s \in \{1,\dots,S\}$ existe $N_{s,j} \geq 0$ tal que $V_{s,j}(p) = N_{s,j}$ para todo $p \in \mathbb{R}^{L(S+1)}_+$.
- **Activos reales**: las promesas coinciden con el valor de mercado de canastas de mercancías. Así, j es un activo real si para cada $s \in \{1,\dots,S\}$ existe $A_{s,j} \in \mathbb{R}^L_+$ tal que $V_{s,j}(p) = p_s \cdot A_{s,j}$.
- **Activos numerarios**: activos reales en que las promesas son proporcionales a una misma canasta. Esto es, j es un activo numerario si existe $A \in \mathbb{R}^L_+$ tal que $V_{s,j}(p) = p_s \cdot (\delta_s A)$ donde $\delta_s \geq 0$.

Por conveniencia de notación, denotaremos por

$$B^h(p,q) = \left\{ x^h \in \mathbb{R}^{L(S+1)}_+ : \begin{array}{c} \text{Existe un portafolio } z^h \in \mathbb{R}^J \text{ tal que,} \\ p_0 \cdot (x^h_0 - w^h_0) = -\sum_{j=1}^J q_j z^h_j, \\ p_s \cdot (x^h_s - w^h_s) = \sum_{j=1}^J V_{s,j}(p) z^h_j, \quad \forall s \in \{1,\dots,S\} \end{array} \right\}$$

al conjunto de planes de consumo $x^h = (x^h_s)_{s\in\{0,1,\dots,S\}}$ que el individuo h puede implementar cuando los precios de las mercancías y de los activos son $(p,q) \in \mathbb{R}^{L(S+1)}_+ \times \mathbb{R}^J_+$.

Definición 1

Un equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ es caracterizado por un vector de precios y decisiones individuales $(\bar{p},\bar{q},(\bar{x}^h,\bar{z}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}})$ que cumple con las siguientes propiedades:

(i) Cada individuo $h \in \{1,\dots,H\}$ maximiza utilidad en $B^h(\bar{p},\bar{q})$:

$$\bar{x}^h \in B^h(\bar{p},\bar{q}), \qquad U^h(\bar{x}^h) \geq U^h(x^h),\ \forall x^h \in B^h(\bar{p},\bar{q})$$

(ii) La oferta se iguala a la demanda en todos los mercados:

$$\sum_{i=1}^H (\bar{x}^h_s - w^h_s) = 0,\ \forall s \in \{0,1,\dots,S\}, \qquad \sum_{i=1}^H \bar{z}^h_j = 0,\ \forall j \in \{1,\dots,J\}$$

[7] Al negociar $z^h_j > 0$ unidades del activo j el individuo h invierte una cantidad $q_j z^h_j$ en el primer periodo a cambio del derecho a recibir un pago $V_{s,j}(p) z_j$ en cada estado de la naturaleza s del segundo periodo. Análogamente, si h negocia $z^h_j < 0$ unidades de j, recibe $q_j z^h_j$ en el primer periodo a cambio de promesas $V_{s,j}(p) z^h_j$ en $t = 1$.

Mercados financieros versus mercados contingentes

Demostraremos que existe una correspondencia inequívoca entre los equilibrios de la economía $\mathcal{E}$ y los equilibrios de una economía estática en la cual se negocian contratos contingentes sujetos a restricciones en las posibilidades de intercambio.

Para esto, primero necesitamos caracterizar la relación entre los precios de los activos y sus promesas futuras, para asegurar que no hay oportunidades de ganar recursos sin incurrir en riesgos. Notemos que este tipo de oportunidades inviabiliza la existencia de demandas marshalianas acotadas.

Definición 2

Diremos que el vector de precios $(p,q) \gg 0$ son precios **libres de arbitraje** si **no existe** ningún portafolio de activos $\theta \in \mathbb{R}^J$ tal que:

$$\left(-\sum_{j=1}^{J} q_j\theta_j, \sum_{j=1}^{J} V_{1,j}(p)\theta_j, \ldots, \sum_{j=1}^{J} V_{S,j}(p)\theta_j\right) \in \mathbb{R}_+^{S+1}\backslash\{0\}$$

Esto es, no existe ningún portafolio que hace que un agente:

- Reciba recursos hoy $(-\sum_{j=1}^{J} q_j\theta_j > 0)$ y no tenga que pagar nada en el futuro $(\sum_{j=1}^{J} V_{s,j}(p)\theta_j = 0\ \forall s)$. O,
- No invierta nada hoy $(-\sum_{j=1}^{J} q_j\theta_j = 0)$ y reciba recursos en el futuro $(\exists s : \sum_{j=1}^{J} V_{s,j}(p)\theta_j > 0)$.

Lo anterior es equivalente a decir que no hayan oportunidades de arbitraje.

Teorema 1

Para toda economía $\mathcal{E}$ las siguiente propiedades son equivalentes:

- Los precios $(p,q) \gg 0$ son libres de arbitraje.
- Existen deflactores $(\pi_s)_{s\in\{1,\ldots,S\}} \gg 0$ tal que

$$q_j = \sum_{s=1}^{S} \pi_s V_{s,j}(p), \quad \forall j \in \{1,\ldots,J\}$$

Esto es, cualquier vector de precios $(p,q) \gg 0$ es libre de arbitraje si y solo si los precios de los activos pueden ser representados como el valor descontado de los pagos futuros, donde la fórmula para descontar cada estado $s \in \{1,\ldots,S\}$ aplica para todos los activos $j \in \{1,\ldots,J\}$ al mismo tiempo.

Esta caracterización de los precios q_j nos permitirá identificar la economía $\mathcal{E}$ con una economía estática con restricciones de intercambio.

Definición 3

Dados precios $p \gg 0$ para las mercancías, el **espacio de transferencias**

$$\mathbb{T}_{\mathcal{E}}[p] = \left\{ \tau \in \mathbb{R}^S : \exists \theta \in \mathbb{R}^J, \tau_s = \sum_{j=1}^{J} V_{s,j}(p)\theta_j,\ \forall s \in \{1,...,S\} \right\}$$

es el conjunto de transferencias de renta $\tau = (\tau_s)_{s\in\{1,...,S\}}$ que puede ser implementadas en el segundo periodo utilizando las promesas de los activos a precios p.[a] El τ es el flujo de renta que los activos generan en los diferentes estados de la naturaleza.

[a] Notemos que $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}[p]$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^S$.

Sea $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_{\mathcal{E}})$ la economía estática que se obtiene si los individuos sólo pueden transar mercancías en el primer periodo, pero tienen acceso a contratos contingentes sujetos a las restricciones al intercambio de $\mathcal{E}$. De forma más precisa, $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_{\mathcal{E}})$ es una economía estática con $L(S+1)$ mercancías en la cual cada individuo h maximiza su función de utilidad U^h en el conjunto

$$C^h(p,\gamma) = \left\{ x^h \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} : \begin{array}{c} p_0 \cdot (x_0^h - w_0^h) + \sum_{s=1}^{S} \gamma_s p_s \cdot (x_s^h - w_s^h) = 0 \\ (p_s \cdot (x_s^h - w_s^h))_{s\in\{1,...,S\}} \in \mathbb{T}_{\mathcal{E}}[p] \end{array} \right\}$$

donde $\gamma = (\gamma_s)_{s\in\{1,...,S\}}$ es un vector de deflactores que permiten traer a valor presente los precios futuros de las mercancías $(p_s)_{s\in\{1,...,S\}}$. En particular, el individuo h solo puede demandar cancastas que sean compatibles con las restricciones al intercambio determinadas por $\mathcal{E}$. El equilibrio competitivo de $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_{\mathcal{E}})$ viene dado por un vector de precios, deflactores y canastas, $(\bar{p}, \bar{\gamma}, (\bar{x}^h)_{h\in\{1,...,H\}})$ tal que para cada consumidor h, la canasta $\bar{x}^h$ maximiza U^h en $C^h(\bar{p},\bar{\gamma})$ y la oferta se iguala a la demanda en los mercados: $\sum_{h=1}^{H}(\bar{x}^h - w^h) = 0$.

Definición 4

Diremos que **no existen activos redundantes a precios p** si los vectores de promesas financieras $\{(V_{s,j}(p))_{s\in\{1,...,S\}}; j \in \{1,\dots,J\}\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^S$.

Los siguientes resultados utilizan la caracterización de precios libres de arbitraje para relacionar los equilibrios competitivos de la economía con mercados financieros $\mathcal{E}$ con los equilibrios de la economía estática con restricciones al intercambio $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_{\mathcal{E}})$.

Teorema 2

Suponga que $(\bar{p}, \bar{q}, (\bar{x}^h, \bar{z}^h)_{h\in\{1,...,H\}})$ es un equilibrio competitivo de la economía financiera $\mathcal{E}$ y no hay activos redundantes a precios $\bar{p}$. Entonces, existe un vector de deflactores $\bar{\pi} \gg 0$ tal que $(\bar{p}, \bar{\pi}, (\bar{x}^h)_{h\in\{1,...,H\}})$ es un equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_{\mathcal{E}})$.
Esto es, dado un equilibrio en una economía financiera sin activos redundantes, ese equilibrio también lo es para una economía estática con restricciones de intercambio.

Dem. Como los individuos tienen preferencias estrictamente monótonas y no hay activos redundantes a precios $\bar{p}$, tenemos que $(\bar{p},\bar{q}) \gg 0$. Además, como $(\bar{p}, \bar{q}, (\bar{x}^h, \bar{z}^h)_{h\in\{1,...,H\}})$ es un equilibrio competitivo de $\mathcal{E}$, no hay oportunidades de arbitraje a precios $(\bar{p},\bar{q})$. Luego, el Teorema 1 nos asegura que existe un vector de deflactores $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_s)_{s\in\{1,\dots,S\}} \gg 0$ tal que

$$\bar{q}_j = \sum_{s=1}^{S} \bar{\pi}_s V_{s,j}(\bar{p}), \quad \forall j \in \{1,\dots,J\}$$

Por lo tanto, para concluir la demostración es suficiente probar que $B^h(\bar{p},\bar{q}) = C^h(\bar{p},\bar{\pi})$:

- Comenzamos por probar que $B^h(\bar{p},\bar{q}) \subseteq C^h(\bar{p},\bar{\pi})$: Por definición, sabemos que para cada $x^h \in B^h(\bar{p},\bar{q})$ existe $z^h \in \mathbb{R}^J$ tal que:

  $$\bar{p}_0 \cdot (x_0^h - w_0^h) = -\sum_{j=1}^{J} \bar{q}_j z_j^h, \quad \bar{p}_s \cdot (x_s^h - w_s^h) = \sum_{j=1}^{J} V_{s,j}(\bar{p}) z_j^h, \quad \forall s \in \{1,\dots,S\}$$

  Multiplicando las últimas S restricciones (derecha) por los deflactores $(\bar{\pi}_s)_{s\in\{1,\dots,S\}}$ y sumándolas:

  $$\sum_{s=1}^{S} \bar{\pi}_s \bar{p}_s \cdot (x_s^h - w_s^h) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{s=1}^{S} \bar{\pi}_s V_{s,j}(\bar{p}) z_j^h = \sum_{j=1}^{J} \bar{q}_j z_j^h$$

  Sigue que

  $$\bar{p}_0 \cdot (x_0^h - w_0^h) + \sum_{s=1}^{S} \bar{\pi}_s \bar{p}_s \cdot (x_s^h - w_s^h) = 0$$

  Falta la segunda restricción del conjunto $C^h(\bar{p},\bar{\pi})$. Como $(\bar{p}_s \cdot (x_s^h - w_s^h))_{s\in\{1,\dots,S\}}$ es de equilibrio, pertenece a $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}[\bar{p}]$, concluimos que cada $x^h \in B^h(\bar{p},\bar{q})$ también pertenece a $C^h(\bar{p},\bar{\pi})$.

- Luego probamos que $C^h(\bar{p},\bar{\pi}) \subseteq B^h(\bar{p},\bar{q})$: Dado cualquier $x^h \in C^h(\bar{p},\bar{\pi})$, como $(\bar{p}_s \cdot (x_s^h - w_s^h))_{s\in\{1,\dots,S\}} \in \mathbb{T}_{\mathcal{E}}[\bar{p}]$, por definición de $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}$ sabemos que existe $z^h \in \mathbb{R}^J$ tal que

  $$\bar{p}_s \cdot (x_s^h - w_s^h) = \sum_{j=1}^{J} V_{s,j}(\bar{p}) z_j^h, \quad \forall s \in \{1,\dots,S\}$$

  Luego, multiplicando cada una de estas ecuaciones por $(\bar{\pi}_s)_{s\in\{1,\dots,S\}}$ y sumándolas:

  $$\sum_{s=1}^{S} \bar{\pi}_s \bar{p}_s \cdot (x_s^h - w_s^h) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{s=1}^{S} \bar{\pi}_s V_{s,j}(\bar{p}) z_j^h = \sum_{j=1}^{J} \bar{q}_j z_j^h$$

  Por la restricción del agente en $s = 0$, entonces, también sabemos que existe z^h tal que

  $$\bar{p}_0 \cdot (x_0^h - w_0^h) = -\sum_{j=1}^{J} \bar{q}_j z_j^h$$

  Concluimos que cada $x^h \in C^h(\bar{p},\bar{\pi})$ también pertenece a $B^h(\bar{p},\bar{q})$.

Es decir, $B^h(\bar{p},\bar{q}) = C^h(\bar{p},\bar{\pi})$. $\square$

Teorema 3

Suponga que $(\bar{p}, \bar{\pi}, (\bar{x}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}})$ es un equilibrio competitivo de la economía estática $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_\mathcal{E})$. Si no hay activos redundantes a precios $\bar{p}$, entonces existe un vector de precios para los activos $\bar{q} \gg 0$ y portafolios $(\bar{z}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}}$ tales que $(\bar{p}, \bar{q}, (\bar{x}^h, \bar{z}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}})$ es un equilibrio de la economía financiera $\mathcal{E}$.

Dem. Como $(\bar{p}, \bar{\pi}, (\bar{x}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}})$ es un equilibrio de $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_\mathcal{E})$, sabemos que $(\bar{p}\cdot(\bar{x}^h_s - w^h_s))_{s\in\{1,\dots,S\}} \in \mathbb{T}_\mathcal{E}[\bar{p}]$. Esto es, existe $\bar{z}^h \in \mathbb{R}^J$ tal que

$$\bar{p}\cdot(\bar{x}^h_s - w^h_s) = \sum_{j=1}^{J} V_{s,j}(p)\bar{z}^h_j,\ \forall s \in \{1,\dots,S\}$$

Entonces, aplicando esto y definiendo los precios de los activos que estamos buscando como $\bar{q}_j = \sum_{s=1}^{S} \bar{\pi}_s V_{s,j}(\bar{p})$ (lo cual se cumple por precios libres de arbitraje), notamos que, además de las restricciones de $s \in \{1,\dots,S\}$, tenemos que

$$\bar{p}\cdot(\bar{x}^h_0 - w^h_0) = -\sum_{s=1}^{S} \bar{\pi}_s \bar{p}_s \cdot (\bar{x}^h_s - w^h_s) = -\sum_{j=1}^{J} \bar{q}_j \bar{z}^h_j$$

Con lo cual, $\bar{x}^h \in B^h(\bar{p}, \bar{q})$. Los mismos argumentos hechos en la demostración del Teorema 2 nos permiten probar que $B^h(\bar{p}, \bar{q}) = C^h(\bar{p}, \bar{\pi})$ y esto significa que $\bar{x}^h$ maximiza U^h en $B^h(\bar{p}, \bar{q})$. Finalmente, como no hay activos redundantes a precios $\bar{p}$ y

$$\sum_{j=1}^{J} (V_{s,j}(\bar{p}))_{s\in\{1,\dots,S\}} \sum_{h=1}^{H} \bar{z}^h_j = \left(\sum_{h=1}^{H} (\bar{x}^h_s - w^h_s)\right)_{s\in\{1,\dots,S\}} = 0$$

Como no hay activos redundantes, los vectores $(V_{s,j}(\bar{p}))_{s\in\{1,\dots,S\}}$ son linealmente independientes, entonces, la única manera de que la expresión de la izquierda sea cero es que los portafolios $(\bar{z}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}}$ cumplan con $\sum_{h=1}^{H} \bar{z}^h_j = 0$ para cada $j \in \{1,\dots,J\}$. Con esto concluimos que $(\bar{p}, \bar{q}, (\bar{x}^h, \bar{z}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}})$ es un equilibrio de $\mathcal{E}$. $\square$

4.3. Mercados financieros completos

Diremos que una economía financiera $\mathcal{E}$ tiene **mercados completos** si los activos financieros permiten hacer todas las transferencias de renta posibles entre los estados de la naturaleza del segundo periodo. Es decir, los mercados son completos si y solo si para todo $p \gg 0$ tenemos que $\mathbb{T}_\mathcal{E}[p] = \mathbb{R}^S$.

Teorema 4

Supongamos que la economía tiene mercados completos y no hay activos redundantes, es decir, $J = S$. Entonces, siempre existe al menos un equilibrio competitivo y todo equilibrio es Pareto eficiente.

Dem. Por el Teorema 3 sabemos que un equilibrio de la economía financiera $\mathcal{E}$ con activos no redundantes $(J = S)$ implica que existe equilibrio en la economía contingente $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_\mathcal{E})$. Además, sabemos que $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_\mathcal{E})$ puede ser entendida como una economía estática clásica, sin restricciones al intercambio. Por lo tanto, sabemos que tiene al menos un equilibrio competitivo, porque las asignaciones iniciales son interiores, las utilidades son continuas, estrictamente crecientes y estrictamente cóncavas.

Por otro lado, dado que $\mathcal{E}_c(\mathbb{T}_{\mathcal{E}})$ es una economía estática clásica, sabemos que todo equilibrio competitivo de esta es Pareto Eficiente por el Primer Teorema del Bienestar Social. $\square$

4.4. Mercados financieros incompletos

La economía $\mathcal{E}$ tiene **mercados financieros incompletos** si existe $p \gg 0$ tal que $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}[p] \neq \mathbb{R}^S$. Notamos que si hay menos activos que estados de la naturaleza, entonces los mercados son siempre incompletos. Más aún, si no hay activos redundantes, los mercados son incompletos si y solo si $J < S$.

No existencia de equilibrio

Si la estructura financiera no incluye suficientes contratos, la existencia de equilibrio puede verse comprometida. Esencialmente, cuando el espacio de transferencias $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}[p]$ depende de precios (los activos no son todos nominales) las posibilidades de intercambio pueden ser muy sensibles a los cambios en los costos de las mercancías, con lo cual pueden aparecer discontinuidades en las demandas individuales. Estas discontinuidades pueden comprometer la existencia de un equilibrio competitivo. El siguiente ejemplo ilustra esta posibilidad.

Ejemplo: no existencia de equilibrio con mercados incompletos

revisar en apunte.

Existencia de equilibrio con activos nominales

Dado que en mercados incompletos la única dificultad para encontrar equilibrio mediante juegos generalizados es la imposibilidad de encontrar límites a los portafolios, veremos que en el caso de activos nominales esta dificultad desaparece.

Cuando los activos son nominales el espacio de transferencias $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}[p]$ no depende de los precios y esto nos permite encontrar límites endógenos para los portafolios a partir de las restricciones del segundo periodo.

Para cada $s \in \{1,\ldots,S\}$ definamos como $F_s^h : \mathbb{R}_+^{L(S+1)} \times \mathbb{R}_+^{LS} \to \mathbb{R}$ a la función continua definida por

$$F_s^h(p_s, x_s^h) := p_s \cdot (x_s^h - w_s^h)$$

Luego, si $N = (N_{s,j})_{s\in\{1,\ldots,S\};j\in\{1,\ldots,J\}}$ es la matriz de pagos nominales de los activos disponibles, entonces para todo portafolio $z^h \in \mathbb{R}^J$ que implementa un plan de consumo $x^h \in B^h(p,q)$ tenemos que

$$(F_s^h(p_s, x_s^h))_{s\in\{1,\ldots,S\}} = Nz^h$$

Esto no es más que expresar todas las restricciones del segundo periodo de forma vectorial[8]. Luego, dado que no hay activos redundantes, $J \leq S$ y la matriz N tiene sus columnas linealmente independientes. Como un resultado de álgebra lineal, sabemos entonces que N tiene una submatriz $\hat{N}$ de $J \times J$ invertible. Por lo tanto, si S^* es el conjunto de las filas de N que permanecen en $\hat{N}$, podemos expresar que

$$z^h = (\hat{N})^{-1}(F_s^h(p_s, x_s^h))_{s\in S^*}$$

[8]Notemos que como las preferencias son localmente no saciadas las restricciones se cumplirán con igualdad

Dado que en la demostración pondremos a $p \in \Delta$ y a $x^h \in B^h(p,q) \cap [0,2W]$, ambos conjuntos compactos, $(\hat{N})^{-1}$ son parámetros que no cambian con los precios y la función $F_s^h(p_s, x_s^h)$ es continua, podemos aplicar el **Teorema de Weierstrass** y encontrar límites superiores e inferiores para z^h. Con esto, podremos limitar la elección de portafolios en el juego generalizado ficticio y demostrar equilibrio usando las mismas técnicas que antes.

Existencia de equilibrio bajo límites de Radner

De forma análoga a los activos nominales, podríamos imponer que la deuda de la economía $\mathcal{E}$ está restringida exógenamente a través de un límite de Radner, y esto nos permitirá demostrar la existencia de equilibrio. Esto es, para cada activo $j \in \{1,\ldots,J\}$ (no necesariamente nominal), impondremos que los portafolios admisibles deben cumplir con $z_j^h \geq -m_j$, donde $m_j > 0$ es un parámetro del modelo.

TEORÍA DE ELECCIÓN SOCIAL

5. Introducción a la Elección Social

5.1. El problema de elección social

Consideraremos una economía con un conjunto finito de individuos N, los cuales tienen preferencias sobre un conjunto **finito** de alternativas $A = \{a_1, ..., a_M\}$. Asumiremos que

$$\#N \geq 2, \qquad M \geq 3 (\#A \geq 3)$$

A su vez, cada individuo $n \in N$ es caracterizado por una preferencia completa, transitiva y estricta[9], denotada por $\succ_n$, y que está definida sobre el conjunto de alternativas A.

Denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todos los posibles perfiles de preferencias $P = (\succ)_{n \in N}$ que cumplen las hipótesis descritas anteriormente.

Reglas de elección social

Una **regla de elección social** es una función[10] $f : \mathcal{P} \to A$ que asocia a cada posible perfil de preferencias $(\succ)_{n \in N}$ una alternativa socialmente factible $f((\succ)_{n \in N})$. Notemos que f está definido sobre todo el conjunto $\mathcal{P}$, es decir, debe entregar una alternativa para cualquier preferencia social que se evalúa (supuesto medianamente fuerte). Además, la regla de elección social puede ser entendida como una decisión de política pública: frente a las preferencias de la sociedad, nos dice que alternativa se debe escoger.

- Diremos que una regla de elección social $f : \mathcal{P} \to A$ es **strategy-proof** si para todo par de perfiles de preferencias $P, P' \in \mathcal{P}$ se tiene que

  $$f(P'_n, P_{-n}) \neq f(P) \implies f(P) \succ_n f(P'_n, P_{-n})$$

  Es decir, si solo un individuo $n \in N$ cambiara su preferencia respecto a un perfil de preferencias P, y la regla de elección no es la misma que la que sería si no hubiera cambiado de preferencia, entonces este individuo n prefiere no cambiar su preferencia. Esto se puede leer como que no hay incentivos a mentir, pues decir la verdad es estrategia débilmente dominante.

Funcionales de bienestar social

Un **funcional de bienestar social** $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ asocia a cada perfil de preferencias $(\succ)_{n \in N}$ una preferencia social $R((\succ)_{n \in N})$ donde $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}^*)^{\#N}$. El funcional de bienestar social se puede entender como una forma de resumir las preferencias de la sociedad en un único ranking de alternativas.

- Diremos que un funcional de bienestar social $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ cumple la propiedad de **unanimidad** si para todo perfil de preferencias $P = (\succ)_{n \in N} \in \mathcal{P}$ tal que $a_i \succ_n a_j$ para todo $n \in N$, se tiene que $a_i R(P) a_j$.[11]

[9] Que sea estricta significa que nunca estará indiferente entre dos alternativas.
[10] También puede ser una correspondencia $f : \mathcal{P} \twoheadrightarrow A$.
[11] Esto se lee, a_i está por sobre a_j en la preferencia resultado del funcional de bienestar social.

- Diremos que un funcional de bienestar social $R:\mathcal{P}\to\mathcal{P}^*$ cumple la propiedad de **independencia de alternativas irrelevantes** (IAI) si dados dos perfiles de preferencias $P,P'\in\mathcal{P}$ que coinciden sobre $\{a_i,a_j\}$, tenemos que
$$a_i R(P) a_j \iff a_i R(P') a_j$$

Nuestro objetivo será caracterizar reglas de elección social y funcionales de bienestar social que sean compatibles con estas "propiedades deseables".

5.2. Teorema de Imposibilidad Yu

Este teorema nos servirá para demostrar los principales teoremas de imposibilidad respecto a reglas de elección y funcionales de bienestar. Primero, es importante hacer algunas definiciones. Dados perfiles de preferencias $P=(\succ)_{n\in N}$ y $P'=(\succ'_n)_{n\in N}$, diremos que:

- P y P' **coinciden** sobre $\{a_i,a_j\}\subseteq A$ si $a_i\succ_n a_j \iff a_i\succ'_n a_j$, $\forall n\in N$. Similar a IAI.
- a_i **domina** a_j bajo P si $a_i\succ_n a_j$, $\forall n\in N$. Similar a unanimidad.
- $A'\subseteq A$ son **top** bajo P si $a_i\succ_n a_j$, $\forall(n,a_i,a_j)\in N\times A'\times(A\backslash A')$. Esto es, si las alternativas dentro de A' son preferidas (en cualquier orden) a todo el resto de alternativas en A.

Denotaremos por $T_{i,j}:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ a la **función top**, que modifica cada perfil de preferencias $P\in\mathcal{P}$ de forma tal que las alternativas $\{a_i,a_j\}$ se transformen en top, sin alterar el orden interno en $\{a_i,a_j\}$ y en $A\backslash\{a_i,a_j\}$.

Monotonía Condorcet

Diremos que una regla de elección social f es **Condorcet monótona** si dados perfiles de preferencias $P,P'\in\mathcal{P}$ que coinciden sobre las alternativas $\{a_i,a_j\}$, las cuales son top bajo P', tenemos que

$$f(P)=a_i \implies f(P')=a_i$$

Notemos que, esto es equivalente a que, bajo monotonía Condorcet, para todo $P\in\mathcal{P}$ se tiene que

$$f(P)=a_i \implies f(T_{i,j}(P))=a_i$$

Con esto, ya podemos enunciar el teorema.

Teorema de imposibilidad Yu (2013)

Sea $f:\mathcal{P}\to A$ una regla de elección social Condorcet monótona tal que $f(\mathcal{P})=A$.[a] Entonces, existe un individuo $h\in N$ tal que para todo $P\in\mathcal{P}$ se tiene que

$$f(P)\succ_h a,\quad \forall a\notin f(P)$$

[a] Lo importante de esta hipótesis es que $f(\mathcal{P})\geq 3$, donde $f(\mathcal{P})=\{a\in A:\exists P\in\mathcal{P}, f(P)=a\}$. Esto es, hay un número de posibles resultados que es mayor o igual a 3.

En otras palabras, si una regla de elección es Condorcet monótona y cumple con $f(\mathcal{P})=A$, entonces esta regla es "dictatorial", en el sentido de que "imita" lo que escogería algún individuo h para cualquier $P\in\mathcal{P}$. Este teorema nos permitirá demostrar fácilmente los teoremas de imposibilidad clásicos.

5.3. Teorema de Imposibilidad de Arrow

Teorema de imposibilidad de Arrow (1966)

Sea $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ un funcional de bienestar social que cumple las propiedades de unanimidad e independencia de alternativas irrelevantes. Entonces, existe un individuo $h \in N$ tal que para todo $a_i, a_j \in A$ y para todo $P \in \mathcal{P}$ se cumple que

$$a_i \succ_h a_j \implies a_i R(P) a_j$$

En otras palabras, si un funcional de bienestar social cumple unanimidad e independencia de alternativas irrelevantes, entonces este funcional "imita" las preferencias de un único individuo ("el dictador de Arrow"), aunque este no lo sepa. A continuación la demostración.

Dem. Sea $f^R : \mathcal{P} \to A$ la regla de elección social que asocia a cada perfil de preferencias $P \in \mathcal{P}$ la alternativa mejor posicionada bajo el funcional de bienestar social $R(P)$, la cual existe y es única (dado que las preferencias son completas, transitivas y estrictas).

Dado que el dominio de f^R es maximal[12], por unanimidad sabemos que $f^R(\mathcal{P}) = A$.

Luego, sean $P, P' \in \mathcal{P}$ perfiles de preferencia que coinciden sobre $\{a_i, a_j\}$, las cuales son top bajo P', si $f^R(P) = a_i$, entonces $a_i R(P) b, \forall b$ y la IAI implica que $a_i R(P') a_j$. Además, como $\{a_i, a_j\}$ son top bajo P' y R satisface unanimidad, tenemos que $a_i R(P') a_k$ para todo $k \neq i$. Luego, por definición $f^R(P') = a_i$. Es decir, f^R es Condorcet monótona.

Sigue del Teorema de Yu que existe un $h \in N$ tal que para todo $P \in \mathcal{P}$ se tiene que $f^R(P) \succ_h a$ para toda alternativa $a \notin f^R(P)$.

Dado un perfil $P \in \mathcal{P}$, supongamos un $a_i \in A$ tal que $a_i \succ_h a_j$. Entonces, $f^R(T_{i,j}(P)) = a_i$ y $a_i R(T_{i,j}(P)) a_j$. Como P y $T_{i,j}(P)$ coinciden sobre $\{a_i, a_j\}$, la IAI nos asegura que $a_i R(P) a_j$. Es decir, concluimos que

$$\exists h \in N : \quad a_i \succ_h a_j \implies a_i R(P) a_j$$

□

5.4. Teorema de Imposibilidad de Gibbard-Satterthwaite

Como respuesta al Teorema de imposibilidad de Arrow, surgen intentos de emular la misma idea pero en un contexto menos exigente, buscando reglas de elección y no funcionales de bienestar. El siguiente teorema de imposibilidad descubre una conclusión análoga pero respecto a las reglas de elección social.

Teorema de imposibilidad Gibbard-Satterthwaite (1973)

Sea $f : \mathcal{P} \to A$ una regla de elección social strategy-proof tal que $f(\mathcal{P}) = A$.[a] Entonces, existe un individuo $h \in N$ tal que para todo $P \in \mathcal{P}$ se tiene que

$$f(P) \succ_h a, \quad \forall a \notin f(P)$$

[a] Lo importante de esta hipótesis es que $f(\mathcal{P}) \geq 3$, donde $f(\mathcal{P}) = \{a \in A : \exists P \in \mathcal{P}, f(P) = a\}$. Esto es, hay un número de posibles resultados que es mayor o igual a 3.

[12] Esto quiere decir que la función está definida para todo perfil de preferencias P completas, transitivas y estrictas (incluyendo las preferencias en que todos prefieren cualquier alternativa a_i por sobre todo el resto).

En otras palabras, si una regla de elección social cumple con ser strategy-proof y que $f(\mathcal{P}) = A \geq 3$, entonces esa regla de elección siempre "imita" las elecciones que tomaría un único individuo (decimos que es una "regla dictatotial"). A continuación la demostración.

Dem. Dadas las hipótesis y que la conclusión del teorema es la misma que la del Teorema de Yu, es suficiente probar que

$$[f \text{ es strategy-proof}] \implies [f \text{ es Condorcet monótona}]$$

Sean $P, P' \in \mathcal{P}$ dos perfiles de preferencias que coinciden sobre las alternativas $\{a_i, a_k\}$, las cuales son top bajo P'. Buscamos probar que

$$f(P) = a_i \implies f(P') = a_i$$

Supongamos que $f(P) = a_i$ y que existe algún $k \neq i$ tal que si el individuo 1 (sin pérdida de generalidad) pasa a tener preferencias P', entonces se escoge a_k, es decir, $f(P'_1, P_{-1}) = a_k$. Entonces, dado que f es strategy-proof y las preferencias son estrictas, sabemos por definición que $a_i \succ_1 a_k$ y $a_k \succ'_1 a_i$. Sin embargo, como $\{a_i, a_j\}$ son top bajo P', solo puede darse que $a_j \succ'_1 a_i$, es decir, $a_k = a_j$. Esto último contradice el hecho de que P y P' coinciden en $\{a_i, a_j\}$, con lo cual concluimos que $f(P'_1, P_{-1}) = a_i$.

Repitiendo el mismo argumento para todo individuo $n \in N$, demostramos que $f(P') = a_i$ y f es Condorcet monótona. $\square$

5.5. Elección social entre dos alternativas

Consideremos ahora una economía con n individuos, pero con solo dos alternativas $A = \{a_1, a_2\}$. En este contexto, las preferencias de cada agente i se pueden representar por $\theta_i \in \{-1, 0, 1\}$, tal que

$$\begin{aligned} a_1 \succ_i a_2 &\iff \theta_i = -1 \\ a_1 \sim_i a_2 &\iff \theta_i = 0 \\ a_2 \succ_i a_1 &\iff \theta_i = 1 \end{aligned}$$

Así, el espacio de preferencias pasará a ser $\mathcal{P} = \{-1, 0, 1\}^n$, donde las preferencias ya no son estrictas. También, las **reglas de elección social** estarán caracterizadas por funciones $f : \{-1, 0, 1\}^n \to \{-1, 0, 1\}$. Además, en este contexto un funcional de bienestar será indistinguible de una regla social, ya que escoger una alternativa ordena por definición a la otra.

Una familia de reglas de elección social son, dado un vector $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ y la función de signo, $sgn : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$,

$$f_\beta(\theta_1, ..., \theta_n) = sgn\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \theta_i\right)$$

Notamos que:

- Cuando $\beta = (\alpha, \alpha, ..., \alpha)$ con $\alpha > 0$, f_β es la regla de voto mayoritario.
- Cuando β es un vector canónico, f_β es la regla dictatorial.
- Cuando existe algún $\lambda \in (0, 1)$ tal que:

$$\beta_i = \begin{cases} \lambda n & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$$

entonces f_β escoge la alternativa que escogería $i = 1$, a menos que más del λ % de la población quiera la otra.

Notemos que, como regla de elección social, f_β es strategy-proof (porque no se gana nada mintiendo), es Condorcet monótona (porque coincidir en $\{a_1, a_2\}$ implica $P = P'$), y cumple con $f_\beta(\mathcal{P}) = A$. Además, como funcional de bienestar social, f_β siempre cumple con la unanimidad (por construcción) e independencia de alternativas irrelevantes (porque no existen). Sin embargo, siempre que β no es un vector canónico, la regla/funcional no es dictatorial. Es decir, notamos que, cuando tenemos dos alternativas, los resultados de imposibilidad no se sostienen.

Voto mayoritario

Consideremos la regla de elección social de voto mayoritario, esto es:

$$\nu(\theta_1, ..., \theta_n) = sgn\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right)$$

Notamos que esta regla cumple con las siguientes propiedades deseables:

- **Simetría**: Para todo perfil de preferencias $\theta \in \{-1, 0, 1\}^n$ y para toda función biyectiva $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$,
$$\nu(\theta) = \nu(\theta_{\sigma(1)}, ..., \theta_{\sigma(n)})$$
Esto es, da igual cuál sea el ordenamiento de los individuos en el perfil de preferencias, se elige la misma alternativa.
- **Neutralidad**: Para todo perfil de preferencias $\theta \in \{-1, 0, 1\}^n$,
$$\nu(\theta) = -\nu(-\theta)$$
Esto es, da igual el orden de las alternativas (en con si se identifican con -1 o con 1).
- **Responsividad**: Dados $\theta, \theta' \in \{-1, 0, 1\}^n$ tales que $\theta' > \theta$,
$$\nu(\theta) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(\theta') = 1$$
Esto es, si la sociedad está indiferente o decidida por la alternativa a_2, entonces un perfil de preferencias con cualquier cantidad de votos mayor por a_2 escoge inequívocamente a_2.

Teorema de May

Teorema de May (1952)

El voto mayoritario es la única regla de elección social que cumple las propiedades de simetría, neutralidad y responsividad.

Dem. La implicancia “hacia la derecha”, se demuestra trivialmente: (1) Por la conmutatividad de la suma, (2) porque $sgn\left(\sum_{i=1} \theta_i\right) = -sgn\left(\sum_{i=1} -\theta_i\right)$ y (3) por propiedad de los números enteros.

La implicancia "hacia la izquierda" requiere más demostración. Dado un $\theta \in \{-1,0,1\}^n$, definamos al número de votantes de cada alternativa como:

$$n_+(\theta) = \#\{i : \theta_i = 1\}, \quad n_-(\theta) = \#\{i : \theta_i = -1\}$$

Y sea f una regla de elección social que cumple las propiedades de simetría, neutralidad y responsividad. Por simetría, no importa el orden de los individuos, sino que la regla es función únicamente de n_+ y n_-. Es, decir, $f(\theta) = G(n_+(\theta), n_-(\theta))$. Entonces, dado un θ tal que $n_+(\theta) = n_-(\theta)$, la neutralidad nos asegura que

$$f(\theta) = G(n_+(\theta), n_-(\theta)) = G(n_+(-\theta), n_-(-\theta)) = f(-\theta) = -f(\theta)$$

Por lo tanto, $n_+(\theta) = n_-(\theta) \implies f(\theta) = 0$. Falta comprobar que cuando $n_+(\theta) > n_-(\theta)$, $f(\theta) = 1$ y que cuando $n_+(\theta) < n_-(\theta)$, $f(\theta) = -1$.

Definamos $H = n_+(\theta)$ y $J = n_-(\theta)$. Si $H > J$, por simetría podemos asumir que el perfil de preferencias es tal que $\theta_i = 1$ para todo $i \leq H$ y $\theta_i \leq 0$ para todo $i > H$. Sea otro perfil de preferencias θ' tal que:

- $\theta'_i = \theta_k = 1$ para todo $i \leq J$.
- $\theta'_i = 0$ para todo i tal que $J < i \leq H$.
- $\theta_i = \theta_k \leq 0$ para todo $i \geq H$.

Entonces, tenemos que $n_+(\theta') = J$ y $n_-(\theta') = n_-(\theta) = J$. Ya aprendimos que $n_+(\theta') = n_-(\theta')$ implica que $f(\theta') = 0$. Por responsividad, dado que $\theta > \theta'$, sabemos que $f(\theta) = 1$. Es decir, demostramos que $n_+(\theta) > n_-(\theta) \implies f(\theta) = 1$.

Asumiendo $n_+(\theta) < n_-(\theta)$, podemos plantear que $n_+(-\theta) > n_-(-\theta)$, lo cual implica $f(-\theta) = 1$. Por neutralidad, sabemos que $f(\theta) = -f(-\theta) = -1$. Es decir, demostramos que $n_+(\theta) < n_-(\theta) \implies f(\theta) = -1$. En resumen, demostramos que si f cumple las propiedades de simetría, neutralidad y responsividad, entonces:

- $n_+(\theta) = n_-(\theta) \implies f(\theta) = 0$.
- $n_+(\theta) > n_-(\theta) \implies f(\theta) = 1$.
- $n_+(\theta) < n_-(\theta) \implies f(\theta) = -1$

Esto es, por definición, la regla de voto mayoritario. $\square$

6. Elección social e Implementación en Estrategias Dominantes con Transferencias

6.1. Mecanismos para la provisión de un bien público

En esta parte, revisaremos un problema de implementación en estrategias dominantes con las siguientes hipótesis:

- El conjunto de alternativas socialmente factibles son:

$$A = \{(x, t_1, ..., t_n) : x \in \{0, 1\}, (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

donde $x = 1$ representa que se provee el bien, y $x = 0$ que no; y el vector $(t_1, ..., t_n)$ representa **transferencias** a los individuos.

- Para cada individuo $i \in \{1, ..., n\}$ y preferencia $\theta_i \in \Theta_i$, su preferencia es representable por una función de **utilidad cuasi-lineal**:

$$u_i(x, t_i) = \theta_i x + t_i$$

- Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\Theta_i \subseteq \mathbb{R}$ contiene una vecindad del cero. Esto es, se permite que todo individuo no valore el bien público.

En este contexto, las utilidades son cardinales y comparables entre individuos (podemos pensar en ellas como unidades monetarias). Además, asumimos que el costo del bien público ya está incorporado en las valoraciones individuales $(\theta_1, ..., \theta_n)$. Diremos que el resultado de la implementación es eficiente cuando maximiza la suma de las utilidades individuales sin incurrir en costos para el planificador central. Esto es,

$$\begin{aligned} \max_{(x,t)\in A} \quad & \left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} t_i \\ s.a. \quad & \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 0 \end{aligned}$$

Es decir, en el óptimo social, el bien público se provee si y solamente si $\sum_{i=1}^{n} \theta_i \geq 0$. Además, las transferencias socialmente óptimas cumplen con $\sum_{i=1}^{n} t_i^* = 0$.

Dada una regla de elección social $f : \Theta \to \{0, 1\} \times \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), ..., t_n(\theta))$$

diremos que f es:

- **Factible** cuando $\sum_{i=1}^{n} t_i(\theta) \leq 0$ para todo $\theta \in \Theta$.
- **Presupuestariamente balanceada** cuando $\sum_{i=1}^{n} t_i(\theta) = 0$ para todo $\theta \in \Theta$.
- **Exitosa** cuando $x(\theta) = 1 \iff \sum_{i=1}^{n} \theta_i \geq 0$.
- **Ex-post eficiente** si es exitosa y presupuestariamente balanceada.

Definiciones previas

Mecanismos de Groves

Un mecanismo de Groves $\Gamma_G = (\Theta, f)$ es un mecanismo directo caracterizado por una regla

$$f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), \ldots, t_n(\theta))$$

donde

$$x(\hat{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i \geq 0 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i < 0 \end{cases}$$

y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe una función (cualquiera) $h_i : \Theta_{-i} \to \mathbb{R}$ tal que

$$t_i(\hat{\theta}) = \begin{cases} h_i(\hat{\theta}_{-i}) + \sum_{i \neq j} \hat{\theta}_j & \text{si } \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i \geq 0 \\ h_i(\hat{\theta}_{-i}) & \text{si } \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i < 0 \end{cases}$$

Teorema (Groves, 1973)

En un mecanismo de Groves decir la verdad es una estrategia dominante.

Teorema (Green y Laffont, 1977)

Sea Γ_d un mecanismo que implementa de forma veraz en estrategias dominantes una regla de elección social exitosa. Entonces, Γ_d es un mecanismo de Groves.

Mecanismo de Clarke

Un mecanismo de Clarke $\Gamma_C = (\Theta, f)$ es un mecanismo de Groves donde para cada individuo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$h_i(\hat{\theta}_{-i}) = \text{mín}\left\{ -\sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j, 0 \right\}$$

Entonces, las transferencias $t_i(\hat{\theta})$ permiten que el individuo i compense al resto por la externalidad que les genera:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i < 0 \quad \wedge \quad \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j < 0 \quad \Longrightarrow \quad t_i(\hat{\theta}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i \geq 0 \quad \wedge \quad \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad t_i(\hat{\theta}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i < 0 \quad \wedge \quad \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad t_i(\hat{\theta}) = -\left| \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j \right|$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i \geq 0 \quad \wedge \quad \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j < 0 \quad \Longrightarrow \quad t_i(\hat{\theta}) = -\left| \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j \right|$$

Esto es, el individuo solo debe "pagar" en caso de que su valoración haga que la decisión de la sociedad cambie.

Teoremas del Mecanismo de Clarke

1. El mecanismo de Clarke no es presupuestariamente balanceado.
2. No existe un mecanismo de Groves factible cuyas transferencias agregadas sean dominadas por las transferencias que implementa el mecanismo de Clarke

El corolario de estos teoremas es que no existen reglas de elección social ex-post eficientes que sean implementables de forma veraz en estrategias dominantes. Sin embargo, sí existen reglas de elección social exitosas, factibles e implementables de forma veraz en estrategias dominantes (por ejemplo, el mecanismo de Clarke).

Mecanismos con participación voluntaria

Hasta ahora, hemos supuesto que el planificador puede obligar a los individuos a participar en el juego que define el mecanismo. En cambio, si la participación es voluntaria, entonces lo mínimo que se requiere de un mecanismo directo y veraz es que, al revelar su tipo, los individuos no se arrepientan de haber participado, cosa que obviamente es más exigente.

Diremos que una regla de elección social $f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), ..., t_n(\theta))$ es **ex-post individualmente racional** si para todo $\theta \in \Theta$ se tiene que:

$$\theta_i x(\theta) + t_i(\theta) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Esto es, que todo individuo i obtiene más utilidad participando que no participando (donde obtiene 0).

Teorema de Mecanismos de participación voluntaria

No existen reglas de elección social exitosas, factibles, implementables de forma veraz en estrategias dominantes y ex-post individualmente racionales.

6.2. Mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves (VCG)

Este es un mecanismo eficiente y strategy-proof, basado en el cobro de compensaciones sociales en escenarios donde las preferencias de los agentes son cuasi-lineales y no son observables. Un caso particular de este, es la **subasta de Vickrey-Clarke-Groves**, que permite vender múltiples objetos simultáneamente de forma eficiente y maximizando los beneficios esperados del vendedor.

Consideremos una economía con $n \geq 3$ agentes y un conjunto finito A de alternativas sociales. Las valoraciones que el agente $i \in \{1, ...n\}$ da a las alternativas quedan determinadas por una función de utilidad $u^i : A \to \mathbb{R}$.

Un planificador central busca proveer una alternativa social que maximice la suma de las valoraciones individuales. Sin embargo, el planificador central no conoce las funciones $\{u^i\}_{i\in\{1,...,n\}}$, por lo cual diseña el siguiente mecanismo:

(i) Le pide a cada agente reportar una función $f^i : A \to \mathbb{R}$ que determine sus valoraciones, que, en principio, no es necesariamente u^i.

(ii) Basado en los reportes $\left\{f^j\right\}_{j\in\{1,\dots,n\}}$, escoge la alternativa a^* que cumple con:

$$a^* \in \underset{a\in A}{\text{argmáx}} \sum_{j=1}^{n} f^j(a)$$

(iii) Implementa la alternativa a^* y cobra a cada agente una cantidad

$$t_i(f^1,\dots,f^n) = \max_{a\in A}\sum_{j\neq i} f^j(a) - \sum_{j\neq i} f^j(a^*)$$

Esto es, el costo social que genera el individuo i. Luego, la utilidad del individuo i cuando el planificador implementa a^* y le cobra $t_i(f^1,\dots,f^n)$ viene dada por:

$$u^i(a^*) - t_i(f^1,\dots,f^n)$$

Reemplazando la definición de t_i, notamos que esto es igual a:

$$u^i(a^*) + \sum_{j\neq i} f^j(a^*) - \max_{a\in A}\sum_{j\neq i} f^j(a)$$

Además, notemos que podemos reordenar que:

$$a^* \in \underset{a\in A}{\text{argmáx}} \sum_{j=1}^{n} f^j(a) = \underset{a\in A}{\text{argmáx}} \left(u^i(a) + \sum_{j\neq i} f^j(a) + f^i(a) - u^i(a) \right)$$

Dado que el término en rojo no depende de f^i, entonces la estrategia óptima del agente i es asegurar que a^* maximice el término en azul, para lo cual debe reportar $f^i(a) = u^i(a)$ y hacer cero el término en morado. En otras palabras, todos reportarán su verdadera función de utilidad.

6.3. Subasta de Vickrey-Clarke-Groves

Caso 1: Venta de un objeto

Supongamos que el planificador central decide la adjudicación de un único objeto indivisible. Entonces, las alternativas sociales son $A = \{e_1,\dots,e_n\}$, donde cada e_i representa la decisión de entregar el objeto al individuo i.

Asumiremos que no hay externalidades y que $u^i(e_j) = 0$ para todo $j \neq i$. Dado esto, la única información relevante sobre las preferencias del agente i es la valoración que le da al objeto: $\theta^i \equiv u^i(e_i)$. Así, el mecanismo de VCG le pide reportar a los agentes sus valoraciones, $\left\{b^i\right\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$, le adjudica el objeto al agente que reporta la mayor valoración, y a este le cobra la segunda mayor valoración, y al resto nada.

$$t_i(b^1,\dots,b^n) = \begin{cases} \max_{j\neq i} b^j & \text{si } b^i \geq \max_{j\neq i} b^j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Por lo tanto, en este caso el mecanismo de VCG es equivalente a una **subasta a sobre cerrado de segundo mayor precio**.

Caso 2: Venta de múltiples objetos

Dada una colección finita de objetos, M, denotamos por $\mathcal{M}$ al conjunto de todas las posibles distribuciones de objetos entre n individuos. Esto es, toda distribución en la cual se asignen todos los objetos, y ningún objeto se asigne a dos personas diferentes.

$$(S^1,\dots,S^n) \in \mathcal{M} \quad \implies \quad M = \bigcup_{i=1}^{n} S^i \quad \wedge \quad S^i \cap S^j = \emptyset \ \forall i \neq j$$

En este caso, la **subasta de Vickrey-Clarke-Groves** permite implementar la venta simultánea de varios objetos de forma eficiente y strategy-proof. Para esto:

(i) Cada potencial comprador $i \in \{1,\dots,n\}$ reporta cuánto está dispuesto a pagar por cada subconjunto de objetos (o cuánto valora cada subconjunto): $\left\{b^i(S)\right\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$.

(ii) Basado en los reportes, se escoge la distribución de objetos, $(\bar{S}^1,\dots,\bar{S}^n) \in \mathcal{M}$, que maximiza el bienestar social.

(iii) Cada agente i recibe el conjunto de objetos $\bar{S}^i$ y paga el costo social que le genera al resto:

$$\max_{(S^{-i})\subseteq\mathcal{M}} \sum_{j\neq i} b^j(S^j) - \sum_{j\neq i} b^j(\bar{S}^j)$$

Dentro de este caso de subastas, existen sub-casos, como la venta de múltiples objetos idénticos y valoraciones aditivas.

<u>Caso 2.1</u>**: Venta de objetos idénticos**

Es una situación donde en la cual se buscan vender m objetos idénticos y cada potencial comprador $i \in \{1\dots,n\}$ tiene una valoración v^i_k por cada k-ésimo objeto de recibe, y donde $v^i_k \geq v^i_{k+1}$.

Dado lo anterior, la valoración de cada agente para cada conjunto S viene dada por

$$u^i(S) = \sum_{r=1}^{\#S} v^i_r$$

La siguiente subasta es eficiente, strategy-proof y maximiza los beneficios del vendedor:

(i) Cada potencial comprador $i \in \{1,\dots,n\}$ hace pujas $\left\{f^i_r\right\}_{r\in\{1,\dots,m\}}$ por cada unidad del objeto, donde $f^i_k \geq f^i_{k+1}$ para cada $k \in \{1,\dots,m-1\}$.

(ii) El vendedor adjudica los objetos a los agentes que hacen las m pujas más altas.

(iii) Cada agente que recibe k objetos paga la suma de las k pujas más altas de los otros agentes que no fueron consideradas dentro de las m mayores pujas originales.

Revisar ejemplo p.18 PPT 2.2.

<u>Caso 2.2</u>**: Valoraciones aditivas**

Es una situación en la cual la valoración que cada individuo i le da a un conjunto $S \subseteq M$ de objetos viene dada por

$$u^i(S) = \sum_{a\in S} v^i_a$$

donde v^i_a es la valoración que i le da al objeto a. La siguiente subasta es eficiente, strategy-proof y maximiza los beneficios esperados del vendedor:

(i) Cada potencial comprador $i \in \{1,\dots,n\}$ hace pujas $\left\{f_a^i\right\}_{a\in M}$ por los objetos.

(ii) El vendedor adjudica cada objeto a al agente que hizo la mayor puja por él.

(iii) Cada agente que recibe el objeto a paga la segunda mayor puja del conjunto $\left\{f_a^i\right\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$.

Revisar ejemplo p.20 PPT 2.2.

Empaquetamiento de objetos

Empaquetar los objetos y venderlos como un único bien puede aumentar o disminuir los ingresos del vendedor, independientemente de si los bienes son o no complementarios. Ver ejemplo p.21 PPT 2.2.

Supongamos que hay dos potenciales compradores, y que cada uno valora cada conjunto de objetos $S \subseteq M$ mediante $u^i(S)$. Además, supongamos que $u^i(S) \leq u^i(T)$, para toda $S \subseteq T$. Esto es, cada agente valora tener más objetos.

Si el vendedor empaqueta los objetos en lotes $\mathcal{L} = \{L_1,\dots,L_r\}$ y los vende en una subasta de VCG, este determinará una distribución $(S^1,S^2) \in \mathcal{M}$, donde cada $S^i \neq \emptyset$ es una unión de conjuntos en $\mathcal{L}$ y tendrá ingresos

$$\pi(\mathcal{L}) = t_1 + t_2 = (u^2(M) - u^2(S^2)) + (u^1(M) - u^1(S^1))$$

Luego, como la distribución determinada por la subasta es eficiente, sabemos que el bienestar social que logra es mayor o igual al que se lograría en cualquier otra distribución. En particular:

$$u^1(S^1) + u^2(S^2) \geq \text{máx}\left\{u^1(M), u^2(M)\right\}$$

Fijemos (sin pérdida de generalidad) que $\text{máx}\left\{u^1(M),u^2(M)\right\} = u^1(M)$. Entonces, podemos desarrollar que

$$\begin{aligned} u^1(S^1) + u^2(S^2) &\geq u^1(M) \\ 0 &\geq -u^2(S^2) + u^1(M) - u^1(S^1) \\ u^2(M) &\geq u^2(M) - u^2(S^2) + u^1(M) - u^1(S^1) \end{aligned}$$

Con lo cual, encontramos un límite superior a la utilidad del vendedor:

$$\text{mín}\left\{u^1(M), u^2(M)\right\} \geq \pi(\mathcal{L})$$

Luego, la estrategia óptima del vendedor será (siempre que sea posible) empaquetar los productos y vendérselos a un solo agente, para cobrarle $\text{mín}\left\{u^1(M),u^2(M)\right\}$.

Teorema

Supongamos que se quieren vender varios objetos utilizando una subasta de VCG y que solo hay dos potenciales compradores, los cuales tienen valoraciones monótonas en la cantidad de objetos.

En ese contexto, una de las subastas que maximiza los ingresos del vendedor es aquella en la cual se venden los objetos empaquetados en un único lote, aunque pueden existir otras subastas que generen los mismos ingresos.

Además, cuando es ineficiente entregar todos los objetos a un único individuo[a], entonces vender en un lote es la única estrategia óptima.

[a] Esto es, cuando $u^1(S^1) + u^2(S^2) > \text{máx}\left\{u^1(M), u^2(M)\right\}$

7. Implementación en Estrategias Nash

Sabemos que hay pocas reglas de elección social que son totalmente implementables en estrategias dominantes. Un paso natural en la búsqueda de resultados positivos de implementación es reducir los requisitos de compatibilidad de incentivos que impone el concepto de equilibrio en estrategias dominantes. En este sentido, nos enfocaremos en la implementación de reglas de elección social como equilibrios de Nash de algún mecanismo.

Ahora, además de las hipótesis originales del modelo, asumiremos que los individuos conocen las características de los otros agentes. Entonces, solo el planificador central tiene información incompleta.

7.1. Reglas de elección social TINS

En este contexto, una regla de elección social $f : \Theta \twoheadrightarrow A$ es **implementable de forma veraz en estrategias Nash** si existe un mecanismo directo $\Gamma_d = (g, \Theta_1, ..., \Theta_n)$ que cumpla con las siguientes propiedades:

- Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y $\theta \in \Theta$:

  $$g(\theta_i, \theta_{-i}) R_i(\theta_i) g(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \quad \forall \hat{\theta}_i \in \Theta_i$$

  Esto es, decir la verdad es una respuesta óptima frente a la decisión de los otros individuos de también decir la verdad. Es decir, que todos digan la verdad es un Equilibrio de Nash.[13]

- Para cada $\theta \in \Theta$ se tiene que $g(\theta) \in f(\theta)$. Esto es, que la decisión resultante del mecanismo directo implementa la regla de elección social.

Teorema

Una regla de elección social es implementable de forma veraz en estrategias de Nash (TINS)[a] si y solamente si es implementable de forma veraz en estrategias dominantes (TIDS)[b].

$$[f \text{ es TINS}] \quad \Longleftrightarrow \quad [f \text{ es TIDS}]$$

[a] *Truthfully implementable in Nash strategies.*
[b] *Truthfully implementable in dominant strategies.*

Dem. La implicancia hacia la izquierda ($\Longleftarrow$) es trivial, porque si f es TIDS, entonces para cada $i \in \{1, ..., n\}$

$$g(\theta_i, \hat{\theta}_{-i}) R_i(\theta_i) g(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_{-i}), \quad \forall \hat{\theta}_i \in \Theta_i, \forall \hat{\theta}_{-i} \in \Theta_{-i}$$

En particular, decir la verdad es respuesta óptima frente a que los otros digan la verdad, con lo cual f es TINS. La implicancia hacia la derecha ($\Longrightarrow$) es menos intuitiva, pero cierta. Si f es TINS, entonces para cada individuo i es óptimo decir la verdad (reportar su verdadero θ_i) frente a que el resto diga la verdad (reporte sus verdaderos θ_{-i}). Sin embargo, dado que la definición de TINS debe sostenerse para cualquier conjunto de verdades $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$, sigue que decir la verdad debe ser óptimo frente a cualquier posible verdad del resto, esto es, decir la verdad es estrategia dominante y f es TIDS. □

Si expandiésemos el espacio de estrategias individuales a Θ, esto es, si le pedimos a los individuos que reporten las valoraciones de todos al mismo tiempo, entonces el resultado del teorema anterior no se sostiene. En este caso, las reglas de elección social que son TINS no necesariamente son TIDS.

[13] En este ítem, $R_i(\theta_i)$ denota las preferencias del individuo i bajo valoración θ_i.

Dado lo anterior, es interesante estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que que una regla de elección social sea TINS. En ese sentido, una propiedad clave es la Monotonía Maskin.

7.2. Monotonía Maskin

Dada una alternativa social $a \in A$ y un vector de características $\theta \in \Theta$, definiremos el **conjunto de alternativas sociales que no son mejores** que a para el individuo i como

$$L_i(a,\theta) := \{z \in A : aR_i(\theta_i)z\}$$

Diremos que una regla de elección social $f : \Theta \twoheadrightarrow A$ es **monótona Maskin** si para cada par de perfiles de características $\theta, \theta' \in \Theta$ se cumple que:

$$\left[a \in f(\theta) \quad \wedge \quad L_i(a,\theta) \subseteq L_i(a,\theta'),\ \forall i\right] \quad \Longrightarrow \quad a \in f(\theta')$$

En otras palabras, si bajo características θ, la regla de elección escoge la alternativa a, y para todo individuo i las alternativas sociales "no preferidas" a a son un subconjunto de las alternativas sociales "no preferidas" a a bajo características θ', entonces la alternativa a también es escogida por la regla de elección bajo θ'.

Condiciones necesarias para TINS

Teorema de Maskin (1977): Condición necesaria

Si una regla de elección social $f : \Theta \twoheadrightarrow A$ es totalmente[a] implementable en estrategias Nash, entonces es Maskin monótona.

$$[f \text{ es TINS}] \quad \Longrightarrow \quad [f \text{ es Maskin monótona}]$$

[a]Totalmente implementable significa que todas las alternativas sociales pueden ser alcanzables (implementables) por un equilibrio de Nash del juego inducido por el mecanismo, y viceversa. $g(E(\Gamma,\theta)) = f(\theta)$.

Dem. Si f es totalmente implementable en estrategias Nash, sabemos que existe un mecanismo $\Gamma = (S_1,\ldots,S_n,g)$ tal que para cada $\theta \in \Theta$ el conjunto de equilibrios de Nash del juego inducido por Γ cuando los individuos tienen características θ, denotado por $E(\Gamma_\theta)$, cumple con $g(E(\Gamma_\theta)) = f(\theta)$.

Para probar el enunciado, tenemos que fijar $\theta, \theta' \in \Theta$, suponer que $a \in f(\theta)$ y

$$\{z \in A : aR_i(\theta)z\} \subseteq \{z \in A : aR_i(\theta')z\}, \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

Y probar que $a \in f(\theta')$. Como f es totalmente implementable en estrategias Nash, existe un equilibrio

$$\bar{s}(\theta) = (\bar{s}_1(\theta),\ldots,\bar{s}_n(\theta)) \in E(\Gamma_\theta)$$

tal que $a = g(\bar{s}(\theta))$. Esto es, por la definición de equilibrio de Nash,

$$g(\bar{s}_i(\theta),(\bar{s}_j(\theta))_{j\neq i})R_i(\theta)g(s_i(\theta),(\bar{s}_j(\theta))_{j\neq i}), \quad \forall s_i \in S_i,\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

Por el supuesto de las alternativas peores que a que hicimos sobre θ, θ', esto implica que

$$g(\bar{s}_i(\theta),(\bar{s}_j(\theta))_{j\neq i})R_i(\theta')g(s_i(\theta),(\bar{s}_j(\theta))_{j\neq i}), \quad \forall s_i \in S_i,\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

Lo cual por definición de equilibrio de Nash implica que $\bar{s}(\theta) \in E(\Gamma_{\theta'})$. Finalmente, como f es totalmente implementable es estrategias Nash, $a = g(\bar{s}(\theta)) \in f(\theta')$. $\square$

Condiciones suficientes para TINS

Diremos que, dada una regla de elección social $f : \Theta \twoheadrightarrow A$, **no hay poder de veto** si se cumple que $\forall i \in \{1,...,n\}$ y $\forall a \in A$,

$$[aR_j(\theta_j)z,\ \forall j \neq i,\ \forall z \in A] \quad \Longrightarrow \quad a \in f(\theta)$$

Esto es, que si todo el resto de individuos ($j \neq i$) prefieren la alternativa a frente a cualquier otra, entonces esa alternativa es escogida independientemente de si el individuo i la prefiere o no. En otras palabras, ningún individuo i puede vetar ninguna alternativa a por sí solo.

Teorema de Maskin (1977): Condición suficiente

Si $n \geq 3$ y la regla de elección social $f : \Theta \twoheadrightarrow A$ es monótona y no hay poder de veto, entonces f es totalmente implementable en estrategias Nash.

$$[n \geq 3 \quad \wedge \quad f \text{ es monónota} \quad \wedge \quad \nexists \text{ poder de veto}] \quad \Longrightarrow \quad [f \text{ es TINS}]$$

TEORÍA DE EMPAREJAMIENTOS

8. Modelos Bilaterales Uno-a-Uno

8.1. Introducción a Teoría de emparejamientos y conceptos previos

La pregunta que buscaremos contestar en esta sección es, dados dos grupos de individuos, ¿es posible distribuirlos de forma estable o eficiente en parejas formadas por miembros de grupos diferentes?

Esta pregunta no es trivial, ya que los individuos tienen preferencias sobre sus parejas y pueden actuar estratégicamente. Algunas aplicaciones de esta teoría son el emparejamiento de estudiantes con universidades, la elección escolar, la distribución de tareas entre empleados, etc.

En este sentido, buscaremos soluciones con "buenas" propiedades: estables, eficientes, individualmente racionales, y mecanismos que no incentiven a los individuos a mentir sobre sus preferencias verdaderas.

Emparejamientos uno-a-uno

Tendremos dos grupos de individuos, M y W. Cada individuo tiene dos preferencias completas, transitivas y estrictas por los miembros del otro grupo. Además, cada individuo puede considerar inadmisible a algunos miembros del otro grupo. Entonces, las preferencias de cada individuo $m \in M$ quedarán caracterizadas por un ranking P^m de los miembros del otro grupo y para sí mismo, es decir, para el conjunto $W \cup \{m\}$. Y análogamente para cada individuo $w \in W$.

En este contexto, un **emparejamiento** es una función $\mu : M \cup W \to M \cup W$ que cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} m_i = \mu(w_j) \quad &\Longrightarrow \quad w_j = \mu(m_i) \\ m_k = \mu(m_i) \quad &\Longrightarrow \quad k = i \\ w_s = \mu(w_j) \quad &\Longrightarrow \quad s = j \end{aligned}$$

Esto es, que las parejas son las mismas viéndolas desde cualquier grupo, y que si una persona es emparejada con alguien de su mismo grupo, entonces ese alguien es él/ella misma/o.

Ejemplo de emparejamiento

Ver página 5 del PPT 3.1.

Racionalidad individual y estabilidad

Diremos que un emparejamiento μ puede ser bloqueado por un individuo si existe un $h \in M \cup W$ que prefiere estar solo a ser emparejado con $\mu(h)$. Esto es, $hP^h\mu(h)$.

Un emparejamiento es **individualmente racional** si no puede ser bloqueado por ningún individuo.

Además, diremos que un emparejamiento μ puede ser bloqueado por un par de individuos (m, w) cuando $m \neq \mu(w)$ y ambos individuos prefieren estar juntos entre ellos a ser emparejados con los individuos determinados por μ. Esto es, $wP^m\mu(m)$ y $mP^w\mu(w)$.

Un emparejamiento es **estable** si es individualmente racional y no puede ser bloqueado por ningún par de individuos.

Núcleo y Pareto Eficiencia

Decimos que un emparejamiento μ puede ser bloqueado por una coalición $A \subseteq M \cup W$ si existe un emparejamiento $\eta : A \to A$ tal que:

(i) para algún $h \in A$, se tiene que $\eta(h) \neq \mu(h)$.

(ii) para cada $h \in A$, se tiene que $\eta(h) \neq \mu(h) \implies \eta(h) P^h \mu(h)$.

Esto es, si existe al menos un miembro de la coalición para el cual su pareja cambia, y que cada miembro de la coalición que cambia mejora.

El **núcleo** es el conjunto de emparejamientos que no pueden ser bloqueados por ninguna coalición.

Un emparejamiento es **Pareto eficiente** si no puede ser bloqueado por la "gran" coalición $M \cup W$.

8.2. Núcleo versus estabilidad

Teorema: Roth y Sotomayor (1990)

El núcleo coincide con el conjunto de emparejamientos estables. En particular, todo emparejamiento estable es Pareto eficiente.

$$[\mu \text{ está en el núcleo}] \iff [\mu \text{ es estable}]$$

En general, el núcleo es mucho más exigente que la estabilidad (que solo concierne a pares de individuos), pero en este caso específico de mercados de emparejamiento se da este resultado, por el hecho de que las asignaciones son justamente parejas. Por este motivo, solo nos preocuparemos de los emparejamientos estables, ya que estos serán socialmente estables.

Dem. La implicancia hacia la derecha es trivial, ya que sabemos que si μ está en el núcleo, entonces tiene que ser estable. Si un emparejamiento no es bloqueado por ninguna coalición, entonces en particular no es bloqueado por las coaliciones de uno o dos individuos.

La implicancia hacia la izquierda la demostramos por contradicción. Sea μ un emparejamiento estable, asumamos que no está en el núcleo. Esto es, existe una coalición $A \subseteq M \cup W$ y un emparejamiento $\eta : A \to A$ tal que:

(i) para algún $h \in A$, se tiene que $\eta(h) \neq \mu(h)$.

(ii) para cada $h \in A$, se tiene que $\eta(h) \neq \mu(h) \implies \eta(h) P^h \mu(h)$.

Como μ es estable, nadie que estaba emparejado bajo μ cambia a estar solo bajo η (por individualmente racional). Es decir, existe algún $w \in A \cup W$ tal que $\eta(w) \neq \mu(w)$ y $\eta(w) \in M$. Esto significa que existe una nueva pareja de w, $\eta(w)$, y que esta nueva pareja también está mejor con w que con su pareja anterior, $\mu(\eta(w))$. Pero esto implica que μ es bloqueado por el par de individuos $(\eta(w), w)$, lo cual contradice la estabilidad de μ. □

8.3. Existencia de emparejamientos estables

Gale y Shapley (1962) probaron que todo mercado bilateral uno-a-uno tiene al menos un emparejamiento estable.

Además, conocemos un algoritmo simple para encontrar siempre un emparejamiento estable.

Algoritmo de aceptación diferida (Deffered Acceptance)

El algoritmo de aceptación diferida (AD) consiste en las siguientes etapas:

Etapa 1-a: Cada $m \in M$ le hace una propuesta a su individuo preferido de los individuos de W, si hay alguno que sea admisible. Si no, se queda solo.

Etapa 1-b: Cada $w \in W$ acepta temporalmente la propuesta más atractiva según sus preferencias, rechazando el resto y todas aquellas que son inadmisibles.

Etapa k-a: Cada $m \in M$ que fue rechazado en la etapa previa, le hace una nueva propuesta a la alternativa admisible más preferida entre las cuales todavía no ha mandado propuesta. Si no quedan alternativas admisibles, no hace propuesta.

Etapa k-b: Cada $w \in W$ elige entre la alternativa más atractiva entre la que escogió en la etapa previa, y las nuevas propuestas que recibió.

Se repiten las etapas k-a y k-b hasta que no se hagan más propuestas.

Notemos que el resultado de emparejamiento alcanzado por este mecanismo puede depender del lado del mercado que hace las propuestas. Por ejemplo, si $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ y las preferencias son dadas por:

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{m_3}	P^{m_4}	P^{w_1}	P^{w_2}	P^{w_3}
w_1	w_3	w_2	w_1	m_2	m_4	m_1
w_3	w_1	m_3	w_2	m_1	m_2	m_4
w_2	w_2	w_1	w_3	m_4	m_3	m_2
m_1	m_2	w_3	m_4	w_1	m_1	m_3
				m_3	w_2	w_3

entonces los emparejamientos implementados por el algoritmo de aceptación diferida, dependiendo de quién hace las propuestas, vienen dados por

$$\mu_M(m_1) = w_1, \quad \mu_M(m_2) = w_3, \quad \mu_M(m_3) = m_3, \quad \mu_M(m_4) = w_2;$$

$$\mu_W(m_1) = w_3, \quad \mu_W(m_2) = w_1, \quad \mu_W(m_3) = m_3, \quad \mu_W(m_4) = w_2.$$

Emparejamientos óptimos

Diremos que un emparejamiento estable es **M-óptimo** si ningún individuo de M prefiere otro emparejamiento estable. Análogamente, diremos que un emparejamiento estable es **W-óptimo** si ningún individuo de W prefiere otro emparejamiento estable.

Teorema: Gale y Shapley (1962)

Supongamos que se utiliza el algoritmo de aceptación diferida. Entonces, si los individuos de M hacen las propuestas, el emparejamiento **M-óptimo** es implementado. Análogamente, si los individuos de W hacen las propuestas, el emparejamiento **W-óptimo** es implementado.

$$[G \in \{M, W\} \text{ hace las propuestas}] \implies [\text{emparejamiento es } G\text{-óptimo}]$$

Adicionalmente, podemos darle cierta estructura a los emparejamientos estables. Usaremos la notación $\mu \succeq_M \eta$ para indicar que cada individuo en M considera a su pareja en μ al menos tan buena como su pareja en η (y viceversa con W).

Teorema: Knuth (1976)

Si μ y η son emparejamientos estables, entonces $\mu \succeq_M \eta$ si y solamente si $\eta \succeq_W \mu$.

$$[\mu, \eta \text{ estables}] \implies [\mu \succeq_M \eta \iff \eta \succeq_W \mu]$$

Esto es, para cada par de emparejamientos estables en el cual todos los individuos de un grupo prefieren (débilmente) uno de los dos emparejamientos, todos los individuos del otro grupo prefieren el otro emparejamiento (débilmente).

Dem. Sean μ y η dos emparejamientos estables diferentes tales que $\mu \succeq_M \eta$, supongamos por contradicción que existe $w \in W$ tal que $\mu(w) P^w \eta(w)$. Entonces, el emparejamiento η es preferido tanto por w como por su pareja y puede ser bloqueado por el par $(\mu(w), w)$. Repitiendo análogamente queda demostrado. □

Corolario

El emparejamiento M-óptimo (W-óptimo) junta a cada individuo de W (M) con su alternativa menos aceptable entre todos los emparejamientos estables.
Es decir, el mecanismo de AD resulta en el mejor de los estables para el grupo que hace las propuestas y el peor para el otro.

Este corolario será muy útil como test de unicidad, ya que si el emparejamiento M-óptimo y W-óptimo son el mismo, entonces podemos deducir que hay un único emparejamiento estable.

Teorema: Gale y Sotomayor (1985)

En todo emparejamiento estable, los individuos que quedan solos con los mismos.

Dem. Fijemos dos emparejamientos estables μ, μ'. Sea M_μ el subconjunto de M que prefiere μ a μ', y las definiciones análogas para $M_{\mu'}, W_\mu, W_{\mu'}$.

Entonces, sea $m \in M_\mu$, sabemos que $\mu(m) P^m \mu'(m)$. Por estabilidad de μ' sabemos que $w := \mu(m)$ cumple con $\mu'(w)P^w\mu(w)$, ya que de otra forma el par (m,w) bloquearía μ'. Así, tenemos que $\mu(M_\mu) \subseteq W_{\mu'}$.

De forma análoga, sea cualquier $w \in W_{\mu'}$ que cumple $\mu'(w)P^w\mu(w)$, sabemos que $m := \mu'(w)$ debe cumplir que $\mu(m)P^m\mu'(m)$, pues de otra forma el par (m,w) bloquearía μ. Así, también tenemos que $\mu'(W_{\mu'}) \subseteq M_\mu$.

Como μ y μ' son funciones inyectivas, los conjuntos de individuos cuyas parejas prefieren un emparejamiento deben ser iguales a los conjuntos de individuos para los cuales el otro emparejamiento es mejor. Esto es,

$$\mu(M_\mu) = W_{\mu'}, \quad \mu'(W_{\mu'}) = M_\mu$$

Luego, supongamos que existe un $m \in M$ tal que está solo en solo uno de los dos emparejamientos, es decir, que $\mu'(m) = m$ y $\mu(m) \neq m$. Entonces, la estabilidad de μ nos asegura que $\mu(m)P^m m$ y $m \in M_\mu$. Sin embargo, como $\mu'(W_{\mu'}) = M_\mu$, sabemos que existe un $w \in W$ tal que $\mu'(m) = w$. Una contradicción. Si m está solo en un emparejamiento estable, está solo en todos. □

8.4. Comportamiento estratégico

Como motivación para entender el comportamiento estratégico, imaginaremos un mercado bilateral uno-a-uno en el cual un planificador central, que no observa las preferencias verdaderas de los individuos, desea implementar un emparejamiento estable.

Un **mecanismo centralizado estable** (MCE) es una función Φ que asocia a cada perfil de preferencias $P = (P^h)_{h\in M\cup W}$ un emparejamiento estable $\Phi(P)$.

Un mecanismo centralizado estable es **strategy-proof** si para cada individuo es una estrategia débilmente dominante reportar sus verdaderas preferencias.

Una pregunta interesante es si es que existen mecanismos de emparejamiento estables y a la vez strategy-proof. La pregunta hace sentido, ya que el Teorema de Imposibilidad de Gibbard-Satterthwaite no es aplicable, pues las preferencias ya no son estrictas.

Teorema: Roth (1982)

No existe ningún mecanismo de emparejamiento centralizado estable que sea strategy-proof.

$$[\Phi \text{ es estable}] \implies [\Phi \text{ no es strategy-proof}]$$
$$[\Phi \text{ es strategy-proof}] \implies [\Phi \text{ no es estable}]$$

Dem. Dado el teorema, es suficiente probar que existe un mercado bilateral donde no hayan MCE en los cuales reportar la verdad sea una estrategia dominante.

Supongamos el mercado donde $M = \{m_1, m_2\}$ $W = \{w_1, w_2\}$ y las preferencias vienen dadas por

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{w_1}	P^{w_2}
w_1	w_2	m_2	m_1
w_2	w_1	m_1	m_2
m_1	m_2	w_1	w_2

Luego, los únicos emparejamientos estables son:

$$\mu = [(m_1, w_1), (m_2, w_2)] \quad \mu' = [(m_1, w_2), (m_2, w_1)]$$

donde es directo notar que los m prefieren μ y los w prefieren μ'. Si Φ es un MCE, entonces, $\Phi(P) \in \{\mu, \mu'\}$. Sin embargo, vamos a probar que tanto en μ como en μ', alguien tiene incentivos a mentir.

Por un lado, si $\Phi(P) = \mu$ y $M \cup \{w_1\}$ están reportando sus verdaderas preferencias, entonces w_2 tiene incentivos a mentir y reportar como inadmisible a m_2, es decir, $m_1 \hat{P}^{w_2} w_2 \hat{P}^{w_2} m_2$, con lo cual el único emparejamiento estable es μ', que w_2 prefiere antes que μ.

Por otro lado, cuando $\Phi(P) = \mu'$ y $W \cup \{m_1\}$ están reportando sus verdaderas preferencias, entonces m_2 tiene incentivos a mentir y reportar como inadmisible a w_1, es decir, $w_2 \hat{P}^{m_2} m_2 \hat{P}^{m_2} w_1$, con lo cual el único emparejamiento estable es μ, que m_2 prefiere antes que μ'.

Concluimos que bajo cualquier emparejamiento estable alcanzado por Φ reportar las verdaderas preferencias no es estrategia dominante. $\square$

Algunas regularidades interesantes que se pueden extraer son:

- No existe ningún MCE strategy-proof.
- No existe ningún MCE en el cual decir la verdad sea estrategia de Nash.
- Bajo AD, los que tendrán incentivos a mentir son los del grupo que recibe propuestas.
- Los que mienten consiguen su mejor estable.

Una consecuencia de la demostración anterior es el siguiente teorema.

Teorema: Dubins y Freeman (1981)

El mecanismo que lleva al emparejamiento M-óptimo es strategy-proof para los individuos en M.

Este resultado nos será muy útil en contexto bajo los cuales uno de los dos grupos no puede mentir, por ejemplo, porque sus preferencias son observables. Entonces, haciendo que este grupo reciba las propuestas, podemos asegurar que el MCE sea strategy-proof.

Otros resultados interesantes conversados en clase son los siguientes.

El mecanismo que lleva al emparejamiento M-óptimo no es **group-strategy-proof** para los individuos en M.

En otras palabras, no es posible asegurar que no hayan incentivos de desvío para grupos de individuos en M. Un ejemplo de lo anterior es:

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{m_3}	P^{w_1}	P^{w_2}	P^{w_3}
w_2	w_1	w_1	m_1	m_3	m_1
w_1	w_3	w_2	m_2	m_1	m_2
w_3	w_2	w_3	m_3	m_2	m_3

Bajo este perfil de preferencias, AD con M haciendo las propuestas, el emparejamiento que se genera es:

$$\mu = [(m_1, w_1), (m_2, w_3), (m_3, w_2)]$$

Sin embargo, m_1 y m_3 tienen incentivos de convencer a m_2 para reportar preferencias $w_3 P^{m_2} w_1 P^{m_2} w_2$. En ese caso, el emparejamiento será:

$$\mu' = [(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1)]$$

donde tanto m_1 como m_3 mejoran, y m_2 se mantiene igual.

El algoritmo de aceptación diferida con el grupo M haciendo las propuestas es el único mecanismo de emparejamiento estable que es strategy-proof para los individuos de M.

Dem.(Por contradicción) Sea Φ un MCE y strategy-proof para M tal que $\Phi(P) \neq AD_M(P)$ para algún $P \in \mathcal{P}$, esto implica que

$$\exists m \in M : \Phi(P)(m) \neq AD_M(P)(m)$$

Además, como aceptación diferida entrega el mejor emparejamiento dentro de los estables para cada $m \in M$, sabemos que $AD_M(P)(m) P^m \Phi(P)(m)$. Denotemos por $\bar{w} \equiv AD_M(P)(m)$ a la pareja de m bajo AD, y supongamos que m miente y reporta solo a $\bar{w}$ como admisible, esto es, reporta $\hat{P}^m = (\bar{w}, m, \ldots)$.

Notamos que bajo las preferencias $(\hat{P}^m, P^{-m})$, $AD_M(\hat{P}^m, P^{-m})$ sigue siendo estable. Entonces, sabemos que bajo cualquier P, m está con pareja, porque en todo emparejamiento estable los que se quedan solos son los mismos. Es decir, solo puede ocurrir que $\Phi(\hat{P}^m, P^{-m}) = \bar{w}$. Sin embargo,

$$\Phi(\hat{P}^m, P^{-m}) = \bar{w} = AD_M(\hat{P}^m, P^{-m}) P^m \Phi(P)(m)$$

Es decir, m mejora mintiendo y Φ no es un MCE strategy-proof para M. Concluimos que solo puede ocurrir que $\Phi(P) = AD_M(P)$. $\square$

9. Modelos Bilaterales Muchos-a-Uno

En esta sección expanderemos el modelo del emparejamiento bilateral uno-a-uno para permitir que más de un individuo de W (que pasarán a representar, por ejemplo, estudiantes o trabajadores) se empareje con un mismo individuo de M (colegios, empresas, universidades).

En este contexto, un **emparejamiento** será dado por una correspondencia $\mu : M \cup W \twoheadrightarrow M \cup W$ (y no por una función) que cumple con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \{w\} \in \mu(m) &\implies m = \mu(w) \\ m_k = \mu(m_i) &\implies k = i \\ \{w_s\} = \mu(w_j) &\implies s = j \end{aligned}$$

Y donde cada institución (M) tiene una restricción de cupos:

$$\#\{h \in M \cup W : h \in \mu(m)\} \leq q_m, \quad \forall m \in M$$

9.1. Emparejamientos muchos-a-uno

En este contexto, diremos que un emparejamiento μ puede ser bloqueado por el individuo $w \in W$ si $wP^w\mu(w)$, y puede ser bloqueado por la institución $m \in M$ si existe $w \in \mu(m)$ que es inadmisible para m (prefiere no llenar un cupo antes que aceptar a m).

Además, diremos que un emparejamiento μ puede ser bloqueado por el par $(m, w) \in M \times W$ cuando se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $mP^w\mu(w)$.

(ii) wP^mw' para algún $w' \in \mu(m)$, o bien si wP^wm si $\#\mu(m) < q_m$.

Esto es, si es que el individuo w prefiere m a $\mu(w)$, y que la institución preferiría tener a w, ya sea porque algún w' menos preferido está ocupando una vacante, o porque w es admisible y quedan vacantes disponibles. Nuevamente:

> Un emparejamiento es **estable** si no puede ser bloqueado por un individuo o por un par de individuos.

Modelo uno-a-uno inducido

Para conseguir emparejamientos estables ocuparemos el algoritmo de aceptación diferida (AD), asociando el modelo muchos-a-uno a un modelo uno-a-uno. Para eso:

1. Reemplazaremos cada $m \in M$ por q_m representantes que tienen las mismas preferencias de la institución y buscan emparejarse con un miembro de W.

2. Modificaremos las preferencias de cada $w \in W$ de tal forma que todos los representantes de $m \in M$ sean ordenados de forma consecutiva. Esto es, de las preferencias originales repetiremos q_m veces consecutivas cada $m \in M$.

Un emparejamiento en el modelo muchos-a-uno es estable si y solo si el emparejamiento asociado al modelo uno-a-uno inducido es estable.

Propiedades heredadas del modelo uno-a-uno

Primero, el algoritmo de aceptación diferida aplicado al modelo uno-a-uno inducido genera emparejamientos estables en el modelo muchos-a-uno.

Segundo, para el grupo que hace las propuestas, el emparejamiento que se obtiene por AD es el óptimo dentro de los emparejamientos estables.

Tercero, el conjunto de estudiantes que consiguen un cupo en una universidad y el número de vacantes que cada universidad llena coinciden en todos los emparejamientos estables. Esto se cumple solo si m no llena todos sus cupos.

Teorema del Hospital Rural: Roth (1986)

Cada $m \in M$ que no llena sus cupos en un emparejamiento estable, mantendrá el mismo número de vacantes en cualquier otro emparejamiento estable.

9.2. Problema de elección escolar

Una aplicación muy exitosa de este modelo es la asignación óptima de estudiantes a colegios, donde puede ocurrir que los colegios tengan prohibido tener preferencias sobre los estudiantes. A pesar de esto, si permitimos que los colegios generen un orden de prioridad sobre los estudiantes[14], podremos seguir aplicando las técnicas que hemos discutido.

En los problemas de elección escolar solo el bienestar de los estudiantes nos interesa, con lo cual el concepto de eficiencia pasará a estar definido únicamente sobre el grupo W. Además, existirá un **conflicto entre estabilidad y eficiencia**.

Mecanismo de Boston

Este mecanismo era el aplicado en los inicios de los 2000 en la ciudad de Boston, y es expuesto en la literatura como un mal mecanismo. El proceso es conocido como **aceptación inmediata** y sigue el siguiente algoritmo:

> **Etapa 1**: Se empareja a cada colegio con los estudiantes que los hayan posicionado como primera preferencia, de uno en uno, siguiendo el orden de prioridad y restringido por el número de cupos.
>
> **Etapa k**: Para cada estudiante que no fue emparejado en las etapas anteriores, se considera únicamente su k-ésima mayor preferencia. Así, a los colegios que aún tienen cupos se les asignan los estudiantes que lo escogieron como su k-ésima preferencia, siguiendo el orden de prioridad y restringido por el número de cupos.

[14] Por ejemplo, un orden por sorteo, basado en distancia, en orden de llegada, en cantidad de hermanos en el colegio, etc.

Se repite la etapa k hasta que no queden cupos o no queden alumnos buscando colegio.

El mecanismo de Boston es Pareto eficiente. Sin embargo, puede generar emparejamientos inestables e incentivar a los estudiantes a reportar preferencias falsas.

Consideramos que este mecanismo no es bueno, porque si bien genera resultados eficientes, da lugar a envidia justificada[15] y da incentivos a los estudiantes a mentir para favorecer a los colegios que ellos "creen" que los van a aceptar, y no a sus verdaderos favoritos.

Un ejemplo donde se observan estos problemas es... revisar p.8 PPT 3.2.

Gale-Shapley W-óptimo

Este mecanismo se basa simplemente en aplicar aceptación diferida con los estudiantes haciendo las propuestas a los colegios.

El mecanismo Gale-Shapley W-óptimo es estable y strategy-proof para los estudiantes. Sin embargo, no siempre genera resultados Pareto eficientes.

Un ejemplo es... revisar p.10 PPT 3.2.

Top Trading Cycles (TTC)

Definiremos un **ciclo** como una lista ordenada $(m_{i_1}, w_{i_1}, \ldots, m_{i_k}, w_{i_k})$ de colegios y estudiantes tal que m_{i_1} anuncia al estudiante w_{i_1} como su mejor preferencia, quien anuncia al colegio m_{i_2}, que anuncia al estudiante w_{i_2} y así sucesivamente hasta que w_{i_k} anuncia al colegio m_{i_1}. El algoritmo es el siguiente:

Etapa 1: Cada estudiante anuncia su colegio preferido y cada colegio anuncia al estudiante en primer orden de prioridad según su ranking. Para cada ciclo que se forme, los estudiantes son asignados al colegio que anunciaron. Los colegios que llenan sus vacantes se retiran del mecanismo y los que no continúan a la siguiente etapa.

Etapa k: Cada estudiante que no tiene colegio anuncia su colegio preferido entre aquellos que tienen vacantes disponibles. Cada colegio anuncia al estudiante con mayor orden de prioridad entre los que no han sido asignados. Para cada ciclo que se forme, los estudiantes son asignados al colegio que anunciaron. Los colegios que llenan sus vacantes se retiran del mecanismo y los que no continúan a la siguiente etapa.

Se repite la etapa k hasta que no queden cupos o no queden alumnos buscando colegio.

Abdulkadiroğlu y Sönmez (2003): El mecanismo Top Trading Cycles es Pareto eficiente y strategy-proof para los estudiantes. Sin embargo, puede generar resultados inestables.

Un ejemplo es... revisar p.12 PPT 3.2.

[15] Esto es, que estudiantes con mejor orden de prioridad no queden en colegios que ellos prefieren más que otros estudiantes con menor prioridad

10. Asignación de Objetos Indivisibles sin Transferencias

En esta sección revisaremos la teoría de emparejamientos unilaterales, que se enfoca en la asignación de bienes indivisibles entre individuos. En este contexto, un emparejamiento será una función que asigna objetos a individuos.

En particular, estudiaremos tres modelos de emparejamiento unilateral de objetos, que se pueden contextualizar en un hipotético mercado de casas, donde cada individuo puede intercambiar su casa por la de otro agente, pero no existen precios. En estos modelos, al igual que antes, buscaremos que se cumplan propiedades deseables como estabilidad, eficiencia y ser strategy-proof.

10.1. Modelo habitacional de Shapley-Scarf (1974)

Consideraremos un mercado con un número finito de individuos, N, cada uno de los cuales es propietario de (estrictamente) una casa. Asumiremos que cada individuo tiene preferencias completas, transitivas y estrictas sobre el conjunto de casas.

En este contexto, un **emparejamiento** es una función biyectiva $\mu : \{1,...,N\} \to \{1,...,N\}$, que asocia a cada individuo h la casa del individuo $\mu(h)$.

> Un emparejamiento está en el **núcleo** si asigna las casas de tal forma que ningún grupo de individuos tiene incentivos para abandonar el mercado y distribuirse sus casas de otra forma (que prefieran débilmente).

En este modelo, un algoritmo que funciona bien es el de TTC. En este contexto, un ciclo será una lista ordenada de agentes $(m_{i_1},...,m_{i_k})$ tal que m_{i_1} anuncia a la casa de m_{i_2} como su preferida, m_{i_2} anuncia la de m_{i_3}, y así sucesivamente hasta que m_{i_k} anuncia la de m_{i_1}. Entonces, el mecanismo de TTC funcionará de la siguiente forma:

Etapa 1: Cada agente anuncia al propietario de la casa que prefiere más, pudiendo ser él/ella misma/o. Para cada ciclo que se forme, los agentes son asignados a la casa del individuo que anunciaron y salen del mecanismo.

Etapa k: Cada agente que no obtuvo una casa en las etapas previas anuncia al propietario de su casa preferida entre aquellos que aún están disponibles. Para cada ciclo que se forme, los agentes son asignados a la casa del individuo que anunciaron y salen del mecanismo.

Se repite la etapa k hasta que todos los agentes tengan una casa asignada.

> **Teorema: Shapley y Scarf (1974), Roth y Postlewaite (1977), Roth (1982)**
>
> El mecanismo TTC implementa el único emparejamiento en el núcleo del mercado habitacional. Además, se trata de un mecanismo strategy-proof y su resultado puede ser descentralizado como la única asignación de casas de un mercado competitivo con precios.

> **Teorema: Ma (2001)**
>
> El mecanismo TTC es el único mecanismo Pareto Eficiente, strategy-proof e individualmente racional en este contexto.

10.2. Modelo de asignación habitacional de Svensson (1994)

En este modelo consideraremos un mercado donde **no hay propietarios** y a cada individuo se le buscar adjudicar una sola casa. Asumiremos que el conjunto de individuos y el conjunto de casas tienen el mismo número de elementos.

En este contexto, el mecanismo de **Serial Dictatorship (SD)** será Pareto Eficiente y strategy-proof. El algoritmo es el siguiente:

Cada agente es ordenado siguiendo algún criterio.

Etapa 1: Al agente en primera posición se le adjudica la casa que considera mejor.

Etapa k: Al agente k se le adjudica la casa que considera mejor dentro de las disponibles.

Se repite la etapa k hasta que todos los agentes tengan una casa asignada.

Notemos que, como no hay propietarios, los conceptos de núcleo e individualmente racional no son relevantes en este contexto.

Teorema

Toda distribución Pareto Eficiente es implementable por Serial Dictatorship y todo Serial Dictatorship implementa una distribución Pareto Eficiente.

$$(h_i)_{i\in\{1,\ldots,N\}} \text{ es PE} \quad \Longleftrightarrow \quad (h_i)_{i\in\{1,\ldots,N\}} \text{ es implementable por SD}$$

De hecho, mirando todos los resultados de SD, podemos encontrar todas las asignaciones PE.

Dem. ($\Longrightarrow$): Si la asignación es PE, entonces al menos alguien está con su mejor opción[16]. A esa persona se le da la prioridad 1. De los que quedan, al menos alguien está en su mejor alternativa (sin contar la alternativa que ya salió). A esa persona se le da la prioridad 2, y así sucesivamente. Con ese orden de prioridad, SD implementa tal asignación.

($\Longleftarrow$): Si la asignación es implementable por SD, entonces sabemos que el individuo que tenía la primera prioridad está en su mejor alternativa, el individuo que está en segunda prioridad está en su mejor alternativa (quitando la alternativa ocupada por el primero), y así sucesivamente. Es decir, la única forma que el individuo en la prioridad k mejore respecto a la asignación original, es quitándole una alternativa a los que venían antes que ella/él, empeorando la situación de ese otro agente. Esto demuestra que la asignación original es PE.

10.3. Modelo de asignación habitacional de Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999)

Este modelo considera un mercado donde **hay propietarios y no propietarios**, es decir, hay un conjunto de propietarios y un conjunto de entrantes, que tienen preferencias sobre un conjunto de casas ocupadas y un conjunto de casas vacías. Por simplicidad asumiremos que el conjunto de entrantes y el conjunto de casas vacías tienen el mismo número de elementos.

Es directo notar que este modelo es una generalización de los dos anteriores. Cuando no hay entrantes, se obtiene el modelo de Shapley-Scarf. Cuando no hay propietarios, se obtiene el modelo de Svensson.

[16] Si no existiese alguien en su mejor opción, se podría encontrar un ciclo entre dos agentes o más (una mejora de Pareto). Contradicción con PE.

Problema de los mecanismos originales

Dado lo anterior, hay dos mecanismos que podrían parecer naturales. Sin embargo, veremos que estos generan ineficiencias.

1. Entre los individuos que quieran participar, determinar una distribución inicial sobre las casas (exógena) y luego aplicar TTC.

2. Entre los individuos que quieran participar, determinar un orden de prioridad y aplicar SD.

La clave del problema es que **la posibilidad de quedar peor que en la situación inicial puede desincentivar a los propietarios a participar en el mecanismo**. Esta "fuga de recursos" implica que se pierden oportunidades de intercambio valiosas y se genera ineficiencia.

Dado que ambos mecanismos tienen un componente estocástico (la asignación inicial y el orden de prioridad), los asocian a cada problema de asignación habitacional una lotería, i.e., una distribución de probabilidad sobre el conjunto de emparejamientos. Sería ideal, que estos mecanismos le asignaran probabilidad positiva solo a aquellos emparejamientos Pareto Eficientes e individualmente racionales, pero este no es el caso.

Se puede probar (revisar apuntes de clase y ejercicio resuelto ?) que ambos mecanismos llevan al mismo resultado. Una de las dos opciones, es el llamado **Random Serial Dictatorship (RSD)**:

> Cada propietario decide si entrar en el sorteo o si mantener su propiedad. Todos los que deciden entrar reportan sus preferencias. Cada agente es ordenado siguiendo algún criterio.
>
> **Etapa 1**: Al agente en primera posición se le adjudica la casa que considera mejor.
>
> **Etapa k**: Al agente k se le adjudica la casa que considera mejor dentro de las disponibles.
>
> Se repite la etapa k hasta que todos los agentes tengan una casa asignada.

Si bien este mecanismo es utilizado, entre otras cosas, para asignar estudiantes a dormitorios universitarios, este no es ex-post Pareto Eficiente ni ex-post individualmente racional. El siguiente ejemplo es instructivo: Consideremos tres individuos i_1, i_2, i_3, y tres casas, h_1, h_2, h_3, donde solo el agente i_1 es propietario de la casa h_1. Supongamos que las preferencias por las casas son representables por los niveles de utilidad:

$$i_1 : (3,4,1), \quad i_2 : (4,3,1), \quad i_3 : (3,4,1)$$

Como es propietario, i_1 puede quedarse con h_1, que le da utilidad $u^{i_1}(h_1) = 3$, o entrar al RSD, que asumiremos que construye la prioridad desde una distribución uniforme. Si evalúa el resultado del sorteo a través de la utilidad esperada, y este nivel es menor que 3, le conviene quedarse con su casa inicial. Las posibles realizaciones son:

Orden sorteado	i_1	i_2	i_3
i_1, i_2, i_3	h_2	h_1	h_3
i_1, i_3, i_3	h_2	h_3	h_1
i_2, i_1, i_3	h_2	h_1	h_3
i_2, i_3, i_1	h_3	h_1	h_2
i_3, i_1, i_2	h_1	h_3	h_2
i_3, i_2, i_1	h_3	h_2	h_1

Con lo cual la utilidad esperada para i_1 de entrar al sorteo es:

$$\frac{1}{6}u^{i_1}(h_1)+\frac{3}{6}u^{i_1}(h_1)+\frac{2}{6}u^{i_1}(h_3)=\frac{17}{6}$$

Dado que $\frac{17}{6}<3$, la estrategia óptima de i_1 es no entrar al sorteo y decidir mantener su casa. En ese caso, el sorteo se realiza únicamente entre i_2 y i_3 con las casas h_2 y h_3, y como ambos prefieren h_2 a h_3, las dos posibles asignaciones finales son:

$$[(i_1,h_1),(i_2,h_2),(i_3,h_3)] \quad [(i_1,h_1),(i_2,h_3),(i_3,h_2)]$$

Es fácil notar que, por ejemplo, la primera asignación no es Pareto Eficiente, pues es Pareto dominada por $[(i_1,h_2),(i_2,h_1),(i_3,h_3)]$

Mecanismo YRMH-IGYT

Para solucionar el problema anterior, Adbulkadiroglu y Sonmez (1999) proponen el mecanismo **You request my house - I get yout turn (YRMH-IGYT)**:

Todos los individuos reportan sus preferencias. Se asigna un orden de prioridad según algún criterio.

Etapa 1: Si la propiedad que es mejor opción para el individuo con primera prioridad está libre (o es la suya), se le adjudica esa propiedad y continúa el algoritmo. Si tal propiedad está ocupada por otro, el propietario de esa casa obtiene la prioridad y se le aplica lo mismo. Si se forma un ciclo, se le asignan las casas a los involucrados y continua el algoritmo.

Etapa k: Si la propiedad que es mejor opción (de las disponibles) para el individuo con prioridad k está libre (o es la suya), se le adjudica esa propiedad y continúa el algoritmo. Si tal propiedad está ocupada por otro, el propietario de esa casa obtiene la prioridad y se le aplica lo mismo. Si se forma un ciclo, se le asignan las casas a los involucrados y continua el algoritmo.

Se repite la etapa k hasta que todos los agentes tengan una casa asignada.

El mecanismo YRMH-IGYT implementa emparejamientos ex-post Pareto eficientes, ex-post individualmente racionales, estables a desvíos de grupos de propietarios y es strategy-proof.

Ver ejemplo p.15 PPT 3.3.

11. Implementación Eficiente de Trasplantes de Riñón

El problema de los trasplantes de riñón puede entenderse como un problema de asignación. Consideraremos un contexto en el cual pueden haber pacientes que están solos, donadores altruistas, y pares paciente-donante. Asumiremos que solos los pacientes tienen preferencias, que están definidas sobre el conjunto de posibles donantes y son completas, estrictas y transitivas. Así, los donantes son indiferentes sobre la identidad del beneficiario.

11.1. Modelos restringidos

Supongamos la siguiente hipótesis:

$[H]$: Todos los pares paciente-donante son compatibles y hay suficientes donantes altruistas para implementar los trasplantes requeridos por los pacientes que están solos.

Si se cumple $[H]$ y no hay pacientes que están solos, el problema es análogo al modelo habitacional de Shapley-Scarf (1974).

> Cuando se cumple $[H]$ y no hay pacientes solos, el mecanismo TTC es strategy-proof e implementa una asignación Pareto Eficiente, individualmente racional y estable a desvíos de grupos de pares paciente-donante.

Más en general, si se cumple $[H]$, el problema es análogo al modelo habitacional de Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999).

> Cuando se cumple $[H]$, el mecanismo YRMH-IGYT es strategy-proof e implementa una distribución de pacientes y donantes que es ex-post Pareto Eficiente, ex-post individualmente racional y estable a desvíos de grupos de pares paciente-donante.

Evidentemente, la hipótesis $[H]$ es muy restrictiva. Si esta no se cumple, un paciente puede no tener donantes compatibles o quedarse sin un donante compatible durante la implementación del mecanismo. Dado este problema, surge la **lista de espera**, en la cual todo paciente puede inscribirse para recibir eventualmente una donación de un donante cadavérico. Sin embargo, la lista de espera puede entenderse como una lotería, pues existe incertidumbre respecto a los plazos y compatibilidades.

11.2. Plataformas de Trasplantes de Riñón

Para efectos del modelo, entenderemos a los donantes altruistas como pares paciente-donante donde el paciente es **virtual** y tiene preferencias que ponen siempre como primera opción la lista de espera. Del mismo modo, entenderemos a los pacientes que están solos como pares paciente-donante cuyo donante no es compatible con nadie. Así, sin pérdida de generalidad, podemos pensar que solo hay pares paciente-donante.

En este contexto, una **cadena** es una lista ordenada de pacientes $(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_k})$, donde cada uno anuncia al siguiente paciente de la lista, excepto el último, que anuncia la lista de espera.

Mecanismo TTCC

En este contexto, el mecanismo **Top Trading Cycles and Chains (TTCC)** funcionará bien:

Etapa 1: Cada paciente anuncia al paciente del par paciente-donante cuyo donante prefiere. Puede anunciarse a sí mismo o solicitar el ingreso a la lista de espera. Luego de esto, se forma al menos un ciclo, una cadena, o ambos.

Etapa 2.1: Si hay ciclos de la etapa anterior, se implementan los intercambios de órganos entre los pacientes involucrados y estos salen del mecanismo. Luego, cada paciente que queda anuncia al paciente del par paciente-donante cuyo donante prefiere y que aún está disponible. Puede anunciarse a sí mismo o solicitar el ingreso a la lista de espera. Si hay ciclos, se implementa y se repite el proceso hasta que no aparecen más ciclos.

Etapa 2.2: Si no hay ciclos y aún quedan pares paciente-donante, entonces cada paciente está en una cadena. Utilizando alguna **regla de elección de cadenas**, se selecciona una de las cadenas existentes y se implementan las donaciones asociadas, incluyendo el ingreso del último paciente a la lista de espera.

La **regla de selección de cadenas** determinará si el órgano del donante asociado al primer paciente va directo a la lista de espera o si continua en el algoritmo. Si continua, la cadena se mantiene de forma virtual en la plataforma, permitiendo que otros pacientes apunten al origen de ella (al donante que no ha donado).

Etapa 3: Luego de la eliminación de una cadena se pueden formar nuevos ciclos. En este caso, se repiten las etapas 2.1 y 2.2 hasta que no queden pacientes.

Teorema 1: Roth, Sonmez y Unver (2004)

El intercambio implementado por el mecanismo TTCC es Pareto Eficiente si, en cada etapa no-terminal, toda cadena que se implementa se mantiene de forma virtual en la plataforma.

Teorema 2: Roth, Sonmez y Unver (2004)

Existen varias reglas de selección de cadenas bajo las cuales el mecanismo TTCC es strategy-proof.

Por ejemplo, TTCC es Pareto Eficiente y strategy-proof cuando se considera la siguiente regla de selección de cadenas: Utilizando un orden de prioridad para los pacientes, se escoge la cadena que empiece con el paciente de mayor prioridad. Luego de implementar la cadena, esta se mantiene de forma virtual en la plataforma.

Revisar ejemplo p.9 PPT 3.4.

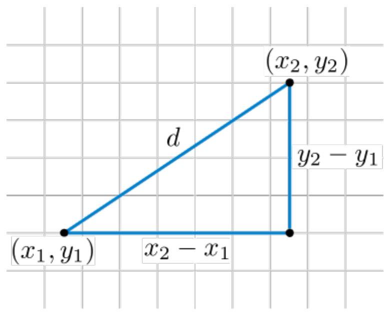
REPASO MATEMÁTICO

12. Conceptos previos

A través del curso mediremos "distancias" mediante la **norma euclidiana** $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ donde para dos vectores x, y de largo n tenemos que:

$$d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

A esto lo denominamos "distancia euclidiana".



En general, las métricas cumplen las siguientes propiedades: Para $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Desigualdad triangular)

Ejemplos de otras métricas es la métrica discreta:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

o la medida de "todos por la capital":[17]

$$d(x,y) = \begin{cases} ??? \end{cases}$$

13. Conjuntos abiertos

$A \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto si $\forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0$ tal que

$$\{y \in \mathbb{R}^n : ||x-y|| < \varepsilon\} \in A$$

[17] revisar bien

Esto se puede entender como que "siempre hay tolerancia al movimiento dentro del conjunto". Por ejemplo, $A = (0,1)$. Un posible contraejemplo es $B = [0,1]$, donde, por ejemplo, para $0 \in B, \nexists \varepsilon > 0$ tal que

$$\{y \in \mathbb{R} : ||0 - y|| < \varepsilon\} \in [0,1]$$

Notemos que con la métrica discreta todos los conjuntos son abiertos.

13.1. Propiedades de conjuntos abiertos

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y dada una familia de conjuntos $A_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda$, donde Λ es algún conjunto de indexación finito o infinito, se tiene que:

(a) Si los A_λ son abiertos, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es abierto, sea Λ finito o infinito.

(b) Si los A_λ son abiertos y Λ es finito, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es abierto.

13.2. Conjuntos abiertos relativos

Un conjunto $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto relativo al conjunto A** si para cada $x_0 \in B$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{x \in A : ||x - x_0|| < \varepsilon\} \in B$$

Notemos que si B es abierto en A no necesariamente este es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, el conjunto $B = (0,1]$ es abierto en $A = [0,1]$, pero no es abierto en $\mathbb{R}$.

En general, dado $A \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto $B \subset A$ es abierto en A si y solo si existe otro conjunto abierto $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B = A \cap C$. Por ejemplo, $A = [0,1]$, $C = (0,+\infty)$ y $B = (0,1]$.

Dem. Demostramos la doble implicancia hacia ambos lados:

$$B \text{ es abierto en } A \iff \exists C \text{ abierto tal que } B = A \cap C$$

- ($\Longrightarrow$): Si B es abierto en A, para cada $x_0 \in B$, existe una bola abierta $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \in B_\varepsilon(x_0)$ y $A \cap B_\varepsilon(x_0) \subset B$. Indexemos cada bola abierta como C_i donde $i \in I$. Entonces, podemos definir
$$C = \bigcup_{i \in I} C_i$$
Como C es la unión de abiertos, C es un conjunto abierto. Como para cada punto $x_0 \in B$, existe un C_i tal que $x_0 \in C_i \subset C$, sabemos que $x_0 \in C$ y por lo tanto $B \subseteq A \cap C$. Ahora, si cada $x_0 \in A \cap C$, entonces $x_0 \in A$ y $x_0 \in C$. Por construcción de C, existe un C_i abierto tal que $x_0 \in C_i$ y por lo tanto $C_i \cap A \subset B$. Como esto ocurre para todos los puntos $x_0 \in B$, $C \cap A \subseteq B$. Concluimos que $B = C \cap A$.

- ($\Longleftarrow$): Si existe un abierto $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B = A \cap C$, entonces cada $x_0 \in B$ cumple que $x_0 \in A$ y $x_0 \in C$, como C es abierto, por definición para cada x_0 existe una bola abierta $B_\varepsilon(x_0)$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset C$. Entonces, cada $x_0 \in B_\varepsilon(x_0) \cap A \subset C \cap A = B$. Esto implica que para cada $x_0 \in B$ existe una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \in B_\varepsilon(x_0)$ y $B_\varepsilon(x_0) \cap A \subset C$. Como todos los puntos de C que se encuentran en A pertenecen a B, esto demuestra por definición que B es abierto relativo a A.

14. Conjuntos cerrados

$B \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado si B^c es abierto. Es decir, siempre que su complemento en $\mathbb{R}^n$ sea abierto.

14.1. Propiedades de conjuntos cerrados

Dado $B \subseteq \mathbb{R}^n$ y dada una familia de conjuntos cerrados $B_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$, donde Λ es algún conjunto de indexación finito o infinito, se tiene que:

(a) Si los B_λ son cerrados, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ es cerrado, cualquiera sea el conjunto de índices.

(b) Si los B_λ son cerrados y Λ es finito, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ es cerrado.

14.2. Conjuntos cerrados relativos

Un conjunto $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado en A si el complemento de B en A, $A\backslash B$, es abierto.

15. Convergencia

Una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es convergente si existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_n - \bar{x}|| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

En tal caso, denominamos "límite de la secuencia" a $\bar{x}$.

15.1. Conjuntos cerrados a través de convergencia

$B \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si y solo si toda secuencia convergente de B tiene su límite en B.

Dem. Demostramos la doble implicancia hacia ambos lados:

$$B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ es cerrado} \iff \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \text{ convergente a } \bar{x} \text{ se tiene que } \bar{x} \in B$$

- ($\Longrightarrow$): Supongamos que B es cerrado y tomemos una secuencia convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$. Por definición de convergencia existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $||x_n - \bar{x}||$ tiende a cero cuando $n \to \infty$. Supongamos que $\bar{x} \notin B$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que hay una bola abierta $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset B^c$, donde B^c es abierto. Pero, dada la definición de convergencia anterior, esto implica que para n suficientemente grande existe algún $x_n \notin B$. Una contradicción. Concluimos que $\bar{x} \in B$.
- ($\Longleftarrow$): Supongamos que toda secuencia convergente tiene su límite en B. Si B no es cerrado, entonces B^c no es abierto. Luego, ???

16. Continuidad

Una función $f(x): U \to \mathbb{R}^m$ es continua en el punto x_0 si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U, ||x - x_0|| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Esta es la definición del símbolo "lím" y significa que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dado cierto conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$, nos referimos al conjunto

$$f^{-1}(A) := \{x \in U : f(x) \in A\}$$

como la ***preimagen de A por f***.

Proposición: Una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $x_0 \in U$ si y solo si la preimagen por f de cada conjunto $A \in \mathbb{A}_m$ que contiene al vector $f(x_0)$ es un subconjunto de U que contiene una vecindad de x_0. En otras palabras, si para todo $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, se tiene que la preimagen $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en U. O, alternativamente, si para todo $B \subseteq \mathbb{R}^m$ cerrado, se tiene que la preimagen $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en U.[18]. Para $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$f \text{ continua} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^m \text{ abierto}, f^{-1}(A) \text{ abierto en } U \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^m \text{ cerrado}, f^{-1}(B) \text{ cerrado en } U$$

17. Conjuntos compactos

Ocuparemos 3 definiciones que son equivalentes. El conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si

1. K es cerrado y acotado/limitado.
2. Para toda secuencia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, existe una subsecuencia que converge y tiene límite en K.
3. Para toda familia de conjuntos abiertos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, existe un subconjunto finito $\Lambda^* \subset \Lambda$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda^*} A_\lambda$. Esto equivale a decir que todo conjunto que es cobertura abierta de K tiene una subcobertura finita.

Proposición: Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Si $K \subset U$ es compacto, entonces $f(K) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in K, y = f(x)\}$ también es compacto. "Funciones continuas llevan compactos a compactos".

Dem. Dada la imagen $f(K)$ con K compacto, fijamos una cobertura abierta de $f(K)$, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Esto es, una familia de conjuntos abiertos tal que $f(K) \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Es directo ver que la preimagen de esta unión de conjuntos abiertos contiene a K, porque la imagen de K está dentro de la unión:

$$K \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$$

[18] Cuando $U = \mathbb{R}^m$ es directo que la condición es análoga respecto a $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ con $\mathbb{R}^n$.

Esto es, $\left\{f^{-1}(A_\lambda)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cobertura abierta de K. Como K es compacto, sabemos que existe un subconjunto finito $\Lambda^* \subset \Lambda$ que también resulta en una cobertura de K:

$$K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda^*} f^{-1}(A_\lambda)$$

Por definición de la preimagen, también existe una subcobertura finita para $f(K)$:

$$f(K) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda^*} A_\lambda$$

y $f(K)$ es compacto.

18. Teorema de Weierstrass

Teorema: Toda función continua $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto compacto K alcanza su máximo y su mínimo en K. En otras palabras, dado un problema de optimización definido por

$$\begin{cases} f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ continua} \\ K \text{ compacto} \end{cases}$$

Entonces, $\exists \bar{x}, \underline{x} \in K : f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in K$. Para probar lo anterior, necesitamos recordar el **axioma del supremo** y el **axioma del ínfimo**.

Axioma del supremo: Dado $Y \in \mathbb{R}$ limitado superiormente, $\exists \bar{y}$ tal que

$$y \leq \bar{y}, \quad \forall y \in Y$$

donde $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in Y : \bar{y} - \varepsilon < y$, entonces $\bar{y} = \sup\ Y$ existe.

Axioma del ínfimo: Dado $Y \in \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $\exists \underline{y}$ tal que

$$y \geq \underline{y}, \quad \forall y \in Y$$

donde $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in Y : \underline{y} + \varepsilon > y$, entonces $\underline{y} = \text{ínf}\ Y$ existe.

Dem. Como K es compacto y f es continua, $f(K)$ es compacto. Dado que $f(K)$ es compacto, es limitado superior e inferior. Entonces, tiene supremo e ínfimo: $\exists \bar{x}, \underline{x}$ tal que

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \quad \forall x \in f(K)$$

Por definición del ínfimo y supremo, existen secuencias $\{x_n^s\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ y $\left\{x_n^i\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ que convergen a $\bar{x}$ y $\underline{x}$ respectivamente. Como $f(K)$ es cerrado, $\bar{x}$ y $\underline{x}$ están dentro de $f(K)$.

En este curso, nos interesan los problemas del tipo:

$$\begin{cases} \text{máx}_x \; f(x,y) \\ x \in B(y) \end{cases}$$

donde el conjunto donde los individuos escogen depende de variables endógenas. En general, trabajaremos donde este conjunto de decisión es trivialmente compacto. Por ejemplo, en el problema del consumidor:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sqrt{xy} \\ s.a. \quad & px + qy \leq m \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, el conjunto presupuestario $B(p,q,m)$ es cerrado y acotado superior (por la primera restricción) e inferior (por la segunda y tercera). Notemos que este conjunto presupuestario depende de p,q y m. Ante cambios en estas variables, queremos que el conjunto presupuestario cambie de manera suave, pero esto no ocurre trivialmente.

Por ejemplo, para $w = (1,0)$ y $p = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}$. A medida que $n \to \infty$, el vector de precios se acerca cada vez más a $p = (0,1)$, en cuyo caso, dada la renta del individuo, este podrá consumir cada vez menos del bien 2, pero sigue pudiendo consumir el bien 1. En el límite, el bien 1 es gratis, por lo que el individuo puede consumir entre 0 e ∞ y 0 del bien 2. Este cambio en el conjunto presupuestario no es suave. Por este motivo exigiremos que las asignaciones iniciales sean interiores.[19]

19. Unicidad de la solución al problema del consumidor

19.1. Condiciones para existencia de la solución

Por Weierstrass, sabemos que el siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{argmáx } u(x,y) \\ y \in K \end{cases}$$

donde $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es distinto de vacío y compacto, y $u : \mathbb{R}^n \times K \to \mathbb{R}$ es continua, la **solución existe**. Sin embargo, para asegurar una solución única, requerimos dos condiciones extra.

19.2. Condiciones para unicidad de la solución

1. K sea convexo.[20]
2. u sea estrictamente cuasicóncavo en la variable en la que se escoge.[21]

[19] Revisar gráfico anotado en iPad.

[20] $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es convexo si $\forall x, y \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda) y \in K$.

[21] u es estrictamente cuasicóncavo si $\forall \lambda \in (0,1), \forall x \neq y$ tenemos que $u(\lambda x + (1-\lambda) y) > \text{mín}\{u(x), u(y)\}$. Recordemos que las preferencias son convexas si y solo si la función de utilidad es cuasicóncava.

Dem. Supongamos que hay dos soluciones al problema, $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ donde $u(\bar{x}_1) = u(\bar{x}_2)$. Por convexidad de K, $\lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2 \in K$. Pero por cuasiconcavidad de u, $u(\lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2) > u(\bar{x}_1) = u(\bar{x}_2)$. Entonces $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ no son solución. Queda demostrado unicidad por contradicción.

Si se cumple unicidad, entonces para cada condición y, se tendrá una única respuesta óptima, es decir,

$$b(y) = \underset{x}{\operatorname{argmáx}}\, u(x,y)$$

es una función y no una correspondencia. Además, dada las condiciones anteriores, podemos probar que **b(y) es continua**.

Dem. Imaginemos una secuencia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \to y$. Necesitamos mostrar que $b(y_n) \to b(y)$. Llamemos $x_n \equiv b(y_n)$ y notemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$. Por definición, para cada y_n, tendremos que $u(x_n, y_n) \geq u(x, y_n)\ \forall x \in K$. Dado K compacto, sabemos que existe una subsecuencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\exists \bar{x}$ tal que $x_n \to \bar{x}$. Entonces, la condición anterior converge a la siguiente condición:

$$u(x_n, y_n) \geq u(x, y_n)\ \forall x \in K \to u(\bar{x}, \bar{y}) \geq u(x, \bar{y})\ \forall x \in K$$

Esto implica que, efectivamente, $b(y_n) = x_n \to b(\bar{y}) = \bar{x}$ y "salvo subsecuencia", $b(y)$ es continua. Falta mostrar que esto ocurre también para la secuencia original. Supongamos que la secuencia completa no converge, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon \geq N_\varepsilon : x_n \equiv b(y_n), ||x_n - x|| < \varepsilon$ (definición de no-convergencia). Entonces, podemos construir una subsecuencia de los componentes que no convergen. Sin embargo, como K compacto, existe una subsecuencia de esta subsecuencia que converge (¿al mismo punto?). Podemos repetir esto y notar una contradicción. Concluimos que toda la secuencia converge y $b(y)$ es continua.

20. Juegos Generalizados y Correspondencias

20.1. Existencia de Equilibrio de Nash en Juegos Convexos

Sea $\mathcal{G} = (N, (u^i, s^i)_{i\in\mathbb{N}})$ un juego de N individuos. Un equilibrio de Nash (EN) es por definición la situación en que $\forall i = 1, \ldots, N$:

$$u^i(\bar{s}^i, \bar{s}_{-i}) \geq u^i(s^i, \bar{s}_{-i}) \quad \forall s^i \in S^i$$

Que sale del problema:

$$\bar{s}^i \in \underset{s^i}{\operatorname{argmáx}}\, u^i(s^i, \bar{s}_{-i})$$
$$s^i \in S^i$$

Supongamos que para cada i:

- $S^i \neq \emptyset$, compacto y convexo.
- u^i continua y cuasicóncava en s^i.

Luego, ya demostramos que la mejor respuesta de cada individuo será única, es decir:

$$\bar{s}^i = b^i(\bar{s}_{-i})$$

es una función continua $\forall i$. Juntando a todos los individuos, podemos construir

$$(\bar{s}^1, \ldots, \bar{s}^N) = (b^1(\bar{s}_{-1}), \ldots, b^N(\bar{s}_{-N}))$$
$$\bar{s} = B(\bar{s})$$

Dado que las b^i son continuas, $B(\bar{s})$ es continua y está definida en

$$B(\bar{s}) : \prod_{i \in \mathbb{N}} S^i \to \prod_{i \in \mathbb{N}} S^i$$

Es decir, si existe un EN, implica que existe esta función continua B, definida de un conjunto diferente de vacío, compacto y convexo al mismo conjunto, y que tiene un punto fijo $B(\bar{s}) = \bar{s}$.

Aplicando el Teorema del Punto Fijo de Brouwer a esta función B se demuestra la existencia de un punto fijo y por lo tanto de un Equilibrio de Nash (en estrategias puras).

Teorema del Punto Fijo de Brouwer

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto y diferente de vacío.
Si $f : K \to K$ es continua, entonces existe $\bar{x} \in K$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

20.2. Correspondencias

Dados conjuntos $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, una **correspondencia** $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ es una aplicación que asocia a cada $x \in X$, un **subconjunto** $\Gamma(x) \subseteq Y$.

Continuidad de correspondencias

Mientras en las funciones la continuidad la podemos definir simplemente mediante:

$$f \text{ continua} \iff f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} \text{ abierto en } X \ \forall A \in Y \text{ abierto en } Y$$

En correspondencias, hay más de una forma de definir la preimagen $\Gamma^{-1}(A) \subseteq X$, por lo que necesitaremos más definiciones de continuidad.

Hemicontinuidad superior e inferior

Una correspondencia $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ es hemicontinua superior en $\bar{x} \in X$ si para cada abierto $A \subseteq Y$ tal que $\Gamma(\bar{x}) \subseteq A$, el conjunto

$$\Gamma^+(A) = \{x \in X : \Gamma(\bar{x}) \subseteq A\}$$

contiene una vecindad de $\bar{x}$.

Una correspondencia $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ es hemicontinua inferior en $\bar{x} \in X$ si para cada abierto $A \subseteq Y$ tal que $\Gamma(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$, el conjunto

$$\Gamma^-(A) = \{x \in X : \Gamma(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset\}$$

contiene una vecindad de $\bar{x}$.

Cuando una correspondencia cumple ambas, decimos que esta correspondencia es continua.

Es difícil demostrar cualquier tipo de hemicontinuidad sin una caracterización secuencial.

- Hemicontinuidad superior: Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, una correspondencia $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ con **valores compactos** es hemicontinua superior en $x \in X$ si y solo si:
    - Dada $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ convergente para x.
    - Dada $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$.

  existe un $y \in \Gamma(x)$ tal que para alguna subsecuencia $\{y_{n_k}\}_{k\in N}$ de $\{y_n\}_{n\in N}$:

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$$

- Hemicontinuidad inferior: Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, una correspondencia $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ es hemicontinua inferior en $x \in X$ si y solo si:
    - Dada $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ convergente para x.
    - Dado $y \in \Gamma(x)$.

  existe un $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$ y se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y$$

20.3. Propiedad CdB

La propiedad "caballito de batalla" nos va a permitir demostrar las propiedades de continuidad, compacidad, convexidad y ser diferente de vacío para ciertas correspondencias.

Propiedad CdB

Dados $A \subseteq \mathbb{R}^a$ y $B \subseteq \mathbb{R}^b$ diferentes de vacío y funciones continuas $f_1, ..., f_m : A \times B \to \mathbb{R}$, asumiendo que se cumplen las siguientes propiedades:

- El conjunto B es compacto y convexo.
- Las funciones $f_1, ..., f_m$ son convexas en la variable b.
- Para cada $a \in A$ existe $b_a \in B$ tal que $f_k(a, b_a) < 0$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$.

Entonces, la correspondencia $\Gamma : A \twoheadrightarrow B$ definida por

$$\Gamma(a) = \{b \in B : f_k(a,b) \leq 0, \quad \forall k \in \{1, ..., m\}\}$$

es continua y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

20.4. Teorema del Máximo de Berge

Teorema del Máximo de Berge

Dadas $F : X \times Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y la correspondencia $\Gamma : Y \twoheadrightarrow X$, definimos

$$v(y) = \max_{x \in \Gamma(y)} F(x,y) \qquad \Omega(y) = \operatorname*{argmáx}_{x \in \Gamma(y)} F(x,y)$$

siendo $v(y)$ la utilidad indirecta y $\Omega(y)$ el conjunto de soluciones correspondientes. Supongamos que F es continua, Γ es continua con valores compactos y diferentes de vacío. Entonces, v es continua y Ω es hemicontinua superior con valores compactos y diferentes de vacío.

Además, bajo las condiciones del Máximo de Berge:

- Si F es cuasi-cóncava en x y Γ tiene valores convexos, entonces la correspondencia Ω tiene valores convexos.
- Si F es estrictamente cuasi-cóncava en x y Γ tiene valores convexos, entonces la correspondencia Ω es identificable con una función continua. Es decir, hay solución única.

20.5. Teorema del Punto Fijo de Kakutani

Este resultado generaliza el Teorema del Punto Fijo de Brouwer al contexto correspondencias.

Teorema del Punto Fijo de Kakutani

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto y diferente de vacío.
Si $\Gamma : K \twoheadrightarrow K$ es hemicontinua superior y tienen valores compactos, convexos y diferentes de vacío, entonces existe $\bar{x} \in K$ tal que $\bar{x} \in \Gamma(\bar{x})$.

20.6. Juegos Generalizados

Un juego generalizado o juego social

$$\mathcal{S}(I,(u^i,S^i,\Gamma^i)_{i\in I})$$

es un juego estático, no cooperativo, con información completa y con un conjunto finito de jugadores.

Cada jugador $i \in I$ considera el efecto que las estrategias escogidas por los otros individuos tienen sobre su conjunto de estrategias admisibles S^i y sobre su función objetivo $u^i : \prod_{j\in I} S^j \to \mathbb{R}$. Entonces, cada jugador i toma en cuenta las estrategias del resto, s_{-i}, para maximizar u^i en el conjunto $\Gamma^i(s_{-i}) \subseteq S^i$, que no es necesariamente igual a todo su conjunto de decisión S^i.

Luego, un equilibrio para el juego generalizado es dado por un vector de estrategias $\bar{s} = (\bar{s}^i, i \in I)$ tal que para cada $i \in I$:

$$u^i(\bar{s}^i,\bar{s}_{-i}) \geq u^i(s^i,\bar{s}_{-i}), \quad \forall s \in \Gamma^i(\bar{s}_{-i})$$

donde $\bar{s}_{-i} := (\bar{s}^j; j \neq i)$.

Existencia de equilibrio en Juegos Generalizados

Teorema

Dado un juego generalizado $\mathcal{S}(I,(u^i,S^i,\Gamma^i)_{i\in I})$, suponga que las características de cada jugador $i \in I$ cumple con las siguientes propiedades:

- El conjunto S^i es convexo, compacto y diferente de vacío.
- La función u^i es continua y cuasicóncava en la variable s^i.
- La correspondencia Γ^i es continua y tiene valores compacto, convexos y diferentes de vacío.

Entonces, existe un equilibrio para $\mathcal{S}(I,(u^i,S^i,\Gamma^i)_{i\in I})$.

Dem. Dado que I es finito, sin pérdida de generalidad podemos identificarlo con el conjunto $\{1,\dots,N\}$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Para cada jugador $i \in I$ podemos definir la correspondencia $\Phi^i : \prod_{j\neq i} S^j \twoheadrightarrow S^i$ como el conjunto de respuestas óptimas frente a las estrategias del resto y dentro del conjunto de respuestas factibles correspondiente, es decir,

$$\Phi^i(s_{-i}) := \underset{s\in\Gamma^i(s_{-i})}{\text{argmáx}}\, u^i(s^i,s_{-i})$$

Aplicamos el Teorema del Máximo de Berge. Dado que u^i es continua y cuasicóncava en s^i, y Γ^i es continua con valores compactos y diferentes de vacío, entonces Φ^i es hemicontinua superior con valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

Luego, podemos definir la correspondencia $\Phi : \prod_{i=1}^{N} S^i \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^{N} S^i$, como el producto cartesiano de las correspondencias de mejor respuesta

$$\Phi(s) = \Phi^1(s_{-1}) \times \dots \times \Phi^N(s_{-N})$$

Aplicamos el Teorema del Punto Fijo de Kakutani. Dado que S^i es convexo, compacto y diferente de vacío, $\prod_{i=1}^{N} S^i$ también lo es. Dado que $\Phi^i(s_{-i})$ es hemicontinua superior con valores compactos, convexos y diferentes de vacío, $\Phi(s)$ también lo es. Entonces, se cumplen las hipótesis del Teorema y concluimos que existe punto fijo, es decir, existe $\bar{s} \in \prod_{i=1}^{N} S^i$ tal que $\bar{s} \in \Phi(\bar{s})$.

VOLVER AL APUNTE (1.3)