

Macroeconomía I
Otoño 2015
Examen (2da mitad del curso)

Profesor: Eduardo Engel
Ayudantes: Damián Vergara y Marco Rojas
Martes, 7 de julio, 2015

Instrucciones

1. Tiene 10 minutos para leer el enunciado antes de que se distribuyan los sets de respuestas.
2. Tiene 3 horas y 30 minutos para responder las preguntas.
3. El examen tiene 4 preguntas, cada pregunta vale 35 puntos, de modo que el número máximo de puntos que puede obtener es de 140.
4. Salvo que se indique explícitamente lo contrario, todas las partes de una pregunta dan el mismo puntaje.
5. Asigne su tiempo de modo de dedicar suficiente tiempo a al menos tres preguntas. No dedique demasiado tiempo a ninguna de ellas. Dedicar tantos minutos como puntos asignados a cada pregunta es una buena estrategia. Esto deja una hora de libre disposición.
6. Sus respuestas deben contener pasos intermedios para que el evaluador pueda estar seguro de que llegó al resultado correcto sabiendo lo que hacía. Esto también le permitirá al evaluador darle puntaje parcial cuando no obtenga la respuesta correcta.
7. Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
8. Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.

Una fórmula útil

Para $|a| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Expresiones para Equivalencia Cierta

Con la notación habitual ($R = 1 + r$) tenemos que C_t es una maringala ($E_t C_{t+k} = C_t$ para $k = 1, 2, 3, \dots$) y:

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{R-1}{R} \left\{ A_t + \sum_{s \geq 0} R^{-s} E_t Y_{t+s} \right\}, \\ \Delta C_t &= \frac{R-1}{R} \sum_{u \geq 0} R^{-u} \{ E_t Y_{t+u} - E_{t-1} Y_{t+u} \}. \end{aligned}$$

1. ¿Consumidores que comparten riesgos o consumidores inatentos? (35 puntos)

Consideramos un hogar que vive indefinidamente y que tiene ingresos que siguen un camino aleatorio:

$$Y_t = Y_{t-1} + v_t$$

donde los v_t son i.i.d. con media nula.

(a) Muestre que bajo equivalencia cierta se tiene

$$(1) \quad \Delta C_t = v_t.$$

RESPUESTA: Usamos la expresión para ΔC_t de la primera página del examen. Para $u = 0, 1, 2, \dots$ tenemos $E_t Y_{t+u} = Y_t$ y $E_{t-1} Y_{t+u} = Y_{t-1}$ de modo que

$$\Delta C_t = \frac{R-1}{R} \sum_{u \geq 0} R^{-u} \{E_t Y_{t+u} - E_{t-1} Y_{t+u}\} = \frac{R-1}{R} \sum_{u \geq 0} R^{-u} \Delta Y_t = \frac{R-1}{R} \frac{1}{1-R^{-1}} \Delta Y_t = \Delta Y_t.$$

(b) Una investigadora usa datos de consumo de hogares y estimaciones a nivel de hogar de v_t para estimar, mediante mínimos cuadrados ordinarios, la regresión

$$(2) \quad \Delta C_t = \phi v_t + \text{error}_t$$

y obtiene un valor de ϕ significativamente (en términos estadísticos y económicos) menor que uno. La investigadora concluye que los hogares comparten riesgos de ingresos más allá de lo que suponen los modelos de consumo con mercados incompletos (por ejemplo, el modelo de equivalencia cierta). Explique la lógica de esta conclusión.

RESPUESTA: Si los hogares comparten riesgos en sus ingresos y los shocks que sufren tienen una componente específica a cada hogar, la cual conlleva riesgos susceptibles de ser compartidos, el valor estimado de ϕ será menor que uno.

En este problema exploramos una interpretación alternativa. Suponemos que los consumidores prestan atención a sus decisiones de consumo sólo esporádicamente, es decir, que tenemos consumidores *inatentos* (*inattentive consumers* en inglés). Concretamente, en cada período hay una probabilidad $1 - \pi$ que un hogar simplemente repita su consumo del período anterior mientras que con probabilidad π puede reoptimizar y cambiar su nivel de consumo.

Los shocks que determinan si un consumidor ajustará su consumo en un período dado son i.i.d. entre consumidores y para un consumidor a lo largo del tiempo.

Si un consumidor ajusta su consumo en t elige su nuevo nivel de consumo, C_t , resolviendo:

$$(3) \quad \min_{C_t} E_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \{\gamma(1-\pi)\}^k (C_t - C_{t+k}^*)^2 \right]$$

donde γ denota el factor subjetivo de descuento y C_t^* lo que sería el consumo óptimo bajo equivalencia cierta.

(c) De la intuición tras la función objetivo en (3), en particular, para los términos $(C_t - C_{t+k}^*)^2$ y $\{\gamma(1-\pi)\}^k$.

RESPUESTA: El término $(C_t - C_{t+k}^*)^2$ captura una pérdida cuadrática de no estar en el nivel de consumo que sería óptimo (bajo equivalencia cierta) si el consumidor pudiera ajustar su consumo todos los períodos. Se justifica vía un desarrollo de Taylor de segundo orden en torno de C_{t+k}^* . El factor de descuento $\{\gamma(1-\pi)\}^k$ combina el factor subjetivo de descuento con la probabilidad de que la decisión de consumo que se está por tomar siga estando vigente en el período $t+k$.

- (d) Resuelva (3) y concluya que en períodos donde el consumidor ajusta su consumo elige $C_t = C_t^*$.

RESPUESTA: Desarrollando el término cuadrático en (3) se obtiene que se está minimizando una función cuadrática en C_t :

$$aC_t^2 - 2bC_t + c$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=0}^{\infty} \{\gamma(1-\pi)\}^k = 1/[1-\gamma(1-\pi)], \\ b &= \sum_{k=0}^{\infty} \{\gamma(1-\pi)\}^k E_t C_{t+k}^*. \end{aligned}$$

Se sigue que el valor óptimo de C_t viene dado por b/a , es decir, por:

$$C_t = [1-\gamma(1-\pi)] \sum_{k=0}^{\infty} \{\gamma(1-\pi)\}^k E_t C_{t+k}^*.$$

Pero, como C_t^* corresponde a consumo óptimo bajo equivalencia cierta tendremos que sigue una martingala, de modo que $E_t C_{t+k}^* = C_t^*$ y la expresión anterior lleva a $C_t = C_t^*$.

- (e) Ahora considere un gran número, n , de consumidores como aquel de las partes (c) y (d), y denote el consumo del i -ésimo consumidor mediante C_{it} y defina el consumo agregado mediante $C_t \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_{it}$. Asuma que las innovaciones v_t son las mismas para todos los consumidores. Encuentre una expresión para C_t en términos de C_{t-1} y C_t^* .

RESPUESTA: C_t será la suma del consumo de quienes no se ajustan y quienes se ajustan. Como n es grande, por la Ley de los Grandes Números la fracción de consumidores en cada uno de estos grupos será $1-\pi$ y π , respectivamente. Luego la contribución al consumo agregado de quienes no se ajustan será $(1-\pi)C_{t-1}$. La contribución de quienes se ajustan, en cambio, será igual a la fracción que se ajusta multiplicada por el consumo de cada uno de estos individuos, es decir, πC_t^* . Entonces:

$$C_t = (1-\pi)C_{t-1} + \pi C_t^*.$$

- (f) Tome la primera diferencia de la expresión que obtuvo en (e) y note que (1) aplica a C^* para expresar ΔC_t en términos de ΔC_{t-1} y v_t . A continuación utilice este resultado para expresar ΔC_t en términos de $v_t, v_{t-1}, v_{t-2}, v_{t-3}, \dots$ (la idea es deshacerse de valores rezagados de ΔC).

RESPUESTA: Tomando primera diferencia:

$$\Delta C_t = (1-\pi)\Delta C_{t-1} + \pi\Delta C_t^* = (1-\pi)\Delta C_{t-1} + \pi v_t.$$

Aplicando esta expresión recursivamente se obtiene:

$$(4) \quad \Delta C_t = \pi v_t + \pi(1-\pi)v_{t-1} + \pi(1-\pi)^2 v_{t-2} + \dots$$

- (g) Concluya que bajo los supuestos del modelo desarrollado en las partes (c)–(f), la investigadora obtendrá un valor de ϕ aproximadamente igual a π al estimar (2). Concluya que valores estimados de ϕ menores que uno no necesariamente implican que los consumidores comparten riesgos más allá de lo sugerido por los modelos estándar de consumo.

RESPUESTA: Como las variables del lado derecho de (4) son independientes, si se estima (2) bajo los supuestos del modelo de consumidores inatentos, el coeficiente de v_t será aproximadamente igual a π . Se concluye que existe una segunda interpretación del hallazgo de la investigadora y que esta es consistente con modelos de mercados incompletos.

2. Inversión con costos convexos de ajuste (35 puntos)¹

El tiempo $t \geq 0$ es continuo. Una firma elige la trayectoria óptima de inversión I_t en su capital físico k_t de modo de maximizar el valor de su flujo de caja descontado a tasa r . La firma comienza con k_0 y produce un bien usando su capital instalado k_t y otros insumos. Luego de elegir los insumos restantes (tales como trabajo) de manera óptima y dada la curva de demanda que enfrenta por su bien, la firma obtiene un flujo de caja $\pi(k_t) = k_t - k_t^2/2$. El capital instalado se deprecia a tasa δ . La oferta de capital es infinitamente elástica a un precio p . Instalar nuevo capital requiere que la firma lo compre y el capital instalado puede venderse, ambos a precio p por unidad de capital. Invertir y desinvertir conllevan además un costo de ajuste igual a I_t^2/k_t unidades de capital perdidas en el proceso de ajuste.

- a) Escriba el problema de optimización de la firma.

RESPUESTA:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{I_t} \quad & \int_0^\infty \left\{ k_t - \frac{k_t^2}{2} - pI_t - p\frac{I_t^2}{k_t} \right\} e^{-rt} dt \\ \text{s.a.} \quad & \dot{k}_t = I_t - \delta k_t \\ & k_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

- b) Escriba las condiciones necesarias para optimalidad. Derive inversión óptima como función de q marginal.

RESPUESTA:

El Hamiltoniano de valor presente es

$$H = k_t - \frac{k_t^2}{2} - pI_t - p\frac{I_t^2}{k_t} + \lambda_t (I_t - \delta k_t).$$

Las condiciones necesarias para inversión óptima es que $\partial H/\partial I = 0$:

$$-p - 2p\frac{I_t}{k_t} + \lambda_t = 0,$$

y que $r\lambda_t = \dot{\lambda}_t + \partial H/\partial k$:

$$r\lambda_t = \dot{\lambda}_t + 1 - k_t + p\frac{I_t^2}{k_t^2} - \delta\lambda_t$$

¹La parte (a) vale 5 puntos, las partes (b), (c) y (d) 10 puntos cada una

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} \lambda_t k_t = 0.$$

Defina q marginal como

$$q_t = \frac{\lambda_t}{p}$$

de modo que la primera condición de optimalidad pasa a

$$\frac{I_t}{k_t} = \frac{q_t - 1}{2}.$$

- c) Determine el estado estacionario ($\dot{k} = \dot{q} = 0$) y dibuje en diagrama de fase en el espacio (k, q) en el entorno del estado estacionario.

RESPUESTA: El brazo estable $\dot{k} = 0$ viene dado por $I = \delta k$, lo cual combinado con la expresión anterior da

$$\frac{q - 1}{2} = \delta$$

de modo que

$$q = 1 + 2\delta.$$

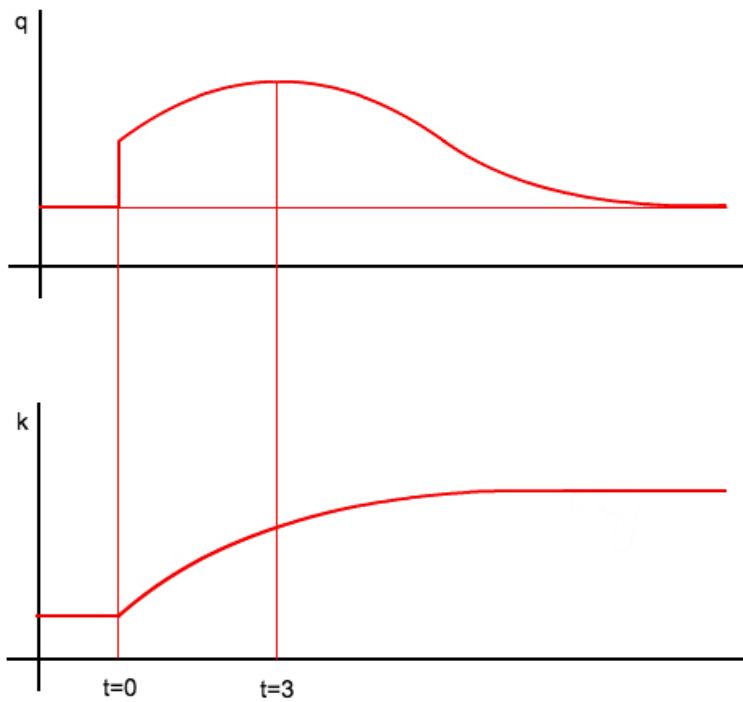
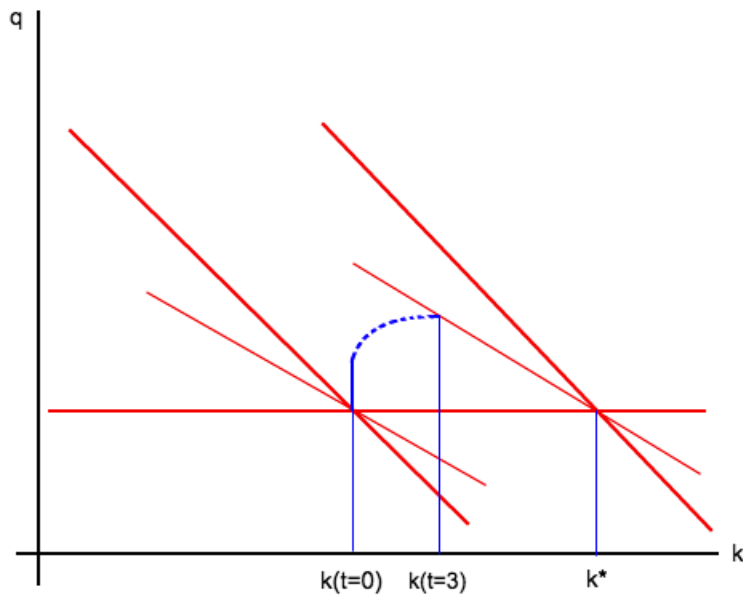
De la ecuación de Euler par el co-estado se obtiene que el brazo estable $\dot{q} = 0$ viene dado por la cuadrática

$$rq = \frac{1 - k}{p} + \left(\frac{q - 1}{2} \right)^2 - \delta q.$$

- d) Suponga que la firma esté en estado estacionario en $t = 0$ cuando el gobierno, sorpresivamente, anuncia un subsidio que equivale a reducir el precio del capital a partir de un $t = 3$ en una fracción determinada y por un tiempo indefinido. Describa la dinámica de inversión desde $t = 0$ a infinito.

RESPUESTA: Primero se debe notar que sólo la curva $\dot{q} = 0$ es la que varía, y no así $\dot{k} = 0$, la que no depende del precio del capital. En efecto, esta primera curva se desplaza hacia afuera, puesto que para cualquier valor de q ahora siempre se deseará mayor nivel de k .

Luego, al ser un cambio anunciado, tenemos que la dinámica comienza a ocurrir desde $t = 0$. En específico, cuando se anuncia el subsidio, el q marginal salta, puesto que el precio futuro de reposición del capital disminuye. Después, los vientos llevan a que empiece a aumentar el k , así como también el q . Para el momento en que se hace efectivo el subsidio, la dinámica es tal que k y q se encuentran en el nuevo brazo estable, desde donde empieza a aumentar el capital hasta llegar al nuevo estado estacionario k^* y a disminuir el q , puesto que la mayor cantidad de capital disminuye su productividad marginal.



3. Inversión irreversible (35 puntos)

Una firma puede invertir irreversiblemente en un proyecto que, una vez iniciado, rinde una suma fija Π en valor presente. El costo de la inversión, I_t , es descrito por el siguiente movimiento browniano

geométrico:

$$dI_t = \mu I_t dt + \sqrt{2\mu} I_t dW_t$$

donde W_t denota un proceso de Wiener (MB(0,1)) e $I_0 > 0$ es dado. La firma es neutra al riesgo y descuenta su flujo de caja a tasa $r > 0$. Si la firma decide invertir en $t = T$ paga I_T y recibe Π . Si I_t cae por debajo de I_T en un momento posterior $t > T$, la firma no puede vender el proyecto y comprar uno nuevo a un costo inferior I_t porque la inversión inicial es completamente irreversible y la firma tiene solo una oportunidad para invertir.

Denotando por $v(I)$ el valor que tiene esperar para invertir en el momento óptimo cuando el costo corriente de invertir es I se tiene que

$$(5) \quad v(I_0) = \max \left\{ \max_{T \geq 0} E_0 \left[e^{-rT} (\Pi - I_T) \right], 0 \right\}.$$

a) Explique la expresión anterior.

RESPUESTA: Se elige entre invertir (primer término del lado derecho) y no invertir (segundo término). Si se invierte, se obtiene la diferencia entre el beneficio y costo correspondientes, descontados desde $t = 0$. Si no se invierte, no hay costos ni beneficios.

b) De la intuición de por qué $v(I) \in [0, \Pi]$, es decir, de por qué $v(I)$ no puede ser negativo ni mayor que Π .

RESPUESTA: Como un movimiento browniano geométrico no toma valores negativos, el costo de inversión no puede ser negativo, luego en el mejor de los casos $I_t = 0$ y el beneficio de invertir será Π . Por otra parte, siempre existe la opción de no invertir, por lo cual $v(I) \geq 0$.

c) Escriba la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) para la evolución de v mientras la firma aun no ha invertido. Recuerde que mientras espera invertir la firma no obtiene ingresos ni tiene costos, solo se dedica a esperar.

RESPUESTA: La ecuación de HJB viene dada por:

$$rv(I) = \mu I v'(I) + \mu I^2 v''(I).$$

d) Muestre que la solución de la ecuación de HJB es de la forma:

$$v(I) = kI^\alpha,$$

para constantes α y k , con k positivo. Determine α en función de los parámetros.

RESPUESTA: Reemplazando $v(I) = kI^\alpha$ en la ecuación de HJB:

$$rkI^\alpha = k\mu I \alpha I^{\alpha-1} + k\mu \alpha(\alpha-1) I^2 I^{\alpha-2}$$

lo cual se cumple para todo I si α satisface

$$r = \mu\alpha + \mu\alpha(\alpha-1) = \mu\alpha^2$$

de modo que

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{r}{\mu}}.$$

Solo consideramos la raíz negativa porque la raíz positiva implicaría que $v(I)$ tiende a $\pm\infty$ cuan-

do I tiende a infinito lo cual contradice que $v(I) \in [0, \Pi]$. Luego suponemos

$$\alpha = -\sqrt{\frac{r}{\mu}}.$$

Que k es positivo también se desprende de que $v(I) \in [0, \Pi]$.

- e) Suponga que la política óptima de la firma consiste en esperar hasta que I_t caiga por debajo de un umbral \bar{I} para invertir. Escriba la condición de pareo de valores ('value matching condition') correspondiente. Justifique.

RESPUESTA: Cuando $I = \bar{I}$, la firma debe estar indiferente entre invertir y no invertir. Si invierte, obtiene $\Pi - \bar{I}$, si no invierte vale $v(\bar{I})$. Luego:

$$v(\bar{I}) = \Pi - \bar{I}.$$

- f) La condición de empaste suave ('smooth pasting condition') correspondiente (no necesita derivarla ni explicarla) es:

$$v'(\bar{I}) = -1.$$

Use esta expresión y los resultados de las partes anteriores para derivar una expresión para \bar{I} en término de Π , r y μ .

RESPUESTA: De las condiciones de pareo de valores y empaste suave tenemos

$$\begin{aligned} k\bar{I}^\alpha &= \Pi - \bar{I}, \\ \alpha k\bar{I}^{\alpha-1} &= -1. \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda identidad por $-\bar{I}$ y dividiendo la expresión resultante por la primera identidad se obtiene:

$$-\alpha = \frac{\bar{I}}{\Pi - \bar{I}}$$

de donde

$$\bar{I} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \Pi = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r} + \sqrt{\mu}} \Pi.$$

- g) De la intuición para cómo varía \bar{I} con cada uno de los parámetros anteriores.

RESPUESTA: A mayores valores de Π la firma invierte antes (el umbral bajo el cual invierte es mayor). Como el beneficio de invertir es mayor la firma está dispuesta a pagar un precio mayor por invertir y así recibir los beneficios antes.

Una tasa de descuento más pequeña significa que la firma es más paciente y espera un valor menor de I para invertir. Como descuenta menos el futuro está dispuesta a esperar valores más convenientes del costo de invertir.

\bar{I} es decreciente en μ lo cual es un tanto sorprendente ya que mayores valores de μ significan que el costo de invertir crece más rápido, lo cual sugiere que se debiera invertir antes y que \bar{I} debiera ser creciente en μ . Pero μ también controla la varianza de las innovaciones, de modo que el valor de la opción de esperar es creciente en μ . Lo que prima es este último efecto.

4. Indemnizaciones y desempleo (35 puntos)²

Una indemnización es un pago a suma alzada F que la firma debe pagar cuando, en jerga de modelos de búsqueda y pareo ('search-and-matching'), una fuente de trabajo y un trabajador se separan. Las indemnizaciones son una forma habitual de protección de empleo. Analizamos las consecuencias de indemnizaciones en el modelo estándar de Pissarides visto en clases que comenzamos por recapitular.

Existe una masa 1 de trabajadores y un gran número de firmas. Todos son neutros al riesgo y descuentan ingresos a tasa $r > 0$. Producen un producto que vale p por unidad de tiempo en pares conformados por un trabajador y una firma que se disuelven a tasa de Poisson λ . Cuando la fuente de trabajo se disuelve, la firma instantáneamente paga al trabajador una indemnización F . Los trabajadores desempleados reciben valor z por unidad de tiempo. u trabajadores están desempleados y existen $v = \theta u$ fuentes de trabajo vacantes, de modo que θ denota la tirantez o estrechez del mercado del trabajo. Existe libre entrada para crear vacantes. Mantener una vacante cuesta c por unidad de tiempo. Pareos de vacantes y trabajadores desempleados ocurren a tasa $m(u, v) = \sqrt{uv}$. Nos centramos en equilibrios de estado estacionario.

- a) Escriba la ecuación que describe la curva de Beveridge, esto es, el conjunto de pares (v, u) para los cuales el desempleo u permanece constante.

RESPUESTA: Trabajadores desempleados encuentran trabajo a una tasa $\sqrt{uv}/u = \sqrt{\theta}$ y los pierden a tasa λ . Luego la igualdad de flujos implica:

$$\lambda(1 - u) = \sqrt{\theta}u,$$

de donde

$$u = \frac{\lambda}{\lambda + \sqrt{\theta}}.$$

- b) Escriba las ecuaciones de Bellman para los valores de un trabajador desmpleado U y de un trabajador empleado W , ambos en estado estacionario. Puede suponer que en equilibrio un trabajador siempre acepta una oportunidad de trabajar.

RESPUESTA:

$$\begin{aligned} rU &= z + \sqrt{\theta}(W - U), \\ rW &= w + \lambda(U + F - W). \end{aligned}$$

Notar la indemnización en la expresión para W .

- c) Escriba las ecuaciones de Bellman para el valor de una fuente de trabajo ocupada J y una fuente de trabajo vacante V . Puede suponer que en equilibrio la firma siempre acepta la oportunidad de llenar una vacante.

RESPUESTA:

$$\begin{aligned} rJ &= p - w + \lambda(V - J - F), \\ rV &= -c + \frac{1}{\sqrt{\theta}}(J - V). \end{aligned}$$

Notar la indemnización en la expresión para J .

²Todas las partes valen 5 puntos, con la excepción de la parte (c) que vale 10 puntos.

- d) Imponemos la condición de libre entrada y negociaciones de salarios a la Nash: la fracción del excedente total que reciben los trabajadores es β . Escriba la condición de libre entrada en función del excedente de un trabajador $W - U$ e iguale esta expresión a una expresión que depende de los parámetros y θ .

RESPUESTA: Libre entrada implica $V = 0$ en todo momento, de modo que

$$J = c\sqrt{\theta}$$

Negociaciones a la Nash implican:

$$W - U = \beta(W - U + J)$$

de modo que

$$W - U = \frac{\beta}{1 - \beta} J = \frac{\beta}{1 - \beta} c\sqrt{\theta}.$$

- e) Muestre que el salario de equilibrio, dado θ , es:

$$w = (1 - \beta)z + \beta p - \lambda F + \beta c\theta.$$

Utilice la expresión anterior en lo que sigue, aun si no pudo derivarla.

RESPUESTA: Reescribimos las ecuaciones de Bellman como sigue:

$$\begin{aligned} r(1 - \beta)W &= (1 - \beta)w + (1 - \beta)\lambda(U + F - W) \\ r(1 - \beta)U &= (1 - \beta)z + (1 - \beta)\sqrt{\theta}(W - U) \\ r\beta J &= \beta p - \beta w - \beta\lambda(J + F). \end{aligned}$$

Restando la segunda y tercera ecuación de la primera y usando la regla para compartir excedentes:

$$0 = (1 - \beta)w + (1 - \beta)\lambda F - (1 - \beta)z - \beta p + \beta w - (1 - \beta)\sqrt{\theta}(W - U) + \beta\lambda F.$$

Despejando el salario w y usando libre entrada obtenemos la expresión deseada.

- f) Compute beneficios de equilibrio J como función de parámetros y estrechez de mercado θ . Basado en esta expresión, en la curva de Beveridge y en la condición de libre entrada, ¿cuál es el efecto de un incremento de las indemnizaciones, F , sobre el desempleo? De la intuición para su resultado.

RESPUESTA: De la ecuación de Bellman:

$$J = \frac{p - w - \lambda F}{r + \lambda}.$$

Reemplazando en la ecuación de salarios:

$$J = \frac{(1 - \beta)(p - z) - \beta c\theta}{r + \lambda}$$

¡que no depende de F ! Intuitivamente, la indemnización no afecta el excedente que crea un pareo, solo es un pago lateral. Como las partes se reparten el excedente, negociaciones a la Nash implican que neutralizan la indemnización mediante una reducción apropiada del salario. Pero F

podría afectar los beneficios de la firma por intermedio de la variable endógena θ . Sin embargo, por libre entrada de firmas, se tiene que la tirantez del mercado laboral θ es independiente de F , y de la curva de Beveridge se concluye que lo mismo sucede con el desempleo. Se concluye que F no tiene ningún efecto sobre el desempleo de equilibrio.