Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Departamento de Economía

Macroeconomía I
ENECO 670
Semestre Otoño 2020

Profesor: Eduardo Engel
Ayudante: Martín Ferrari & Catalina Gómez
12 de Junio, 2020

Solemne N° I

1. **Verdadero, falso, incierto (10 ptos)**

   ¿Verdadero, falso o incierto? Justifique su respuesta en no más de 70 palabras.

   (a) En el modelo de Shapiro y Stiglitz, una tasa de desempleo igual a cero no es socialmente óptima.

   (b) En el modelo de Diamond, Mortensen y Pisarides, una tasa de desempleo igual a cero no es socialmente óptima.

2. **Procesos de Poisson y modelos epidemiológicos (20 ptos)**

   Para modelar la evolución de una epidemia suponemos que en cada momento del tiempo un individuo está en uno de tres estados: susceptible (de contagiarse), infectado (con el virus) o recuperado (de la enfermdad). Los susceptibles son quienes no han cursado la enfermedad, los infectados son quienes la están cursando, los recuperados son quienes ya la cursaron.

   El tiempo es continuo. Entre t y $t+\Delta t$ los susceptibles pueden permanecer en dicho estado o pasar a infectados; los infectados permanecer en dicho estado o pasar a recuperados; y los recuperados permanecen en dicho estado indefinidamente.

   Las transiciones entre estados se modelan mediante procesos de Poisson.

   - El número de contactos que tiene cada individuo infectado por unidad de tiempo sigue un proceso de Poisson con tasa $b > 0$. Estos contactos involucran indistintamente personas susceptibles, infectadas y recuperadas. Cuando el contacto es con un susceptible, este pasa a infectado. En cambio, los contactos con infectados o recuperados no alteran el estado de estos.
   - El tiempo que dura enfermo un infectado viene dado por una distribución exponencial de parámetro $k > 0$, de modo que el tiempo esperado que un individuo permanece infectado es $1/k$.

   El número de susceptibles, infectados y recuperados en t se denota por S_t, I_t y R_t, respectivamente. Suponemos que la suma de las tres variables anteriores permanece constante en el tiempo (no hay inmigración y nadie fallece). Sin pérdida de generalidad suponemos la constante igual a 1.

   $$S_t + I_t + R_t = 1. \tag{1}$$

   (a) Exprese $\dot{S}_t$ en función de S_t, I_t y b. Justifique.

(b) Exprese $\dot{R}_t$ en función de I_t y k. Justifique.

(c) Exprese $\dot{I}_t$ en función de S_t, I_t, k y b. Justifique.

En lo que sigue suponemos $S_0 = 1$. Una epidemia ocurrirá si y solo si $\dot{I}_0 > 0$.

Definimos $R_0 \equiv b/k$. R_0 se conoce como la *tasa básica de reproducción* de la epidemia. R_0 es el número esperado de personas que infecta una persona contagiada en una población donde todos los individuos son susceptibles. En efecto, cada infectado contagia a b individuos por unidad de tiempo (aquí usamos que toda la población es susceptible) y permanece $1/k$ unidades de tiempo contagioso. Luego el número esperado de contagios que genera un individuo infectado es b/k.

(d) Muestre que la epidemia ocurrirá si y solo si $R_0 > 1$.

3. **Ahorro por precaución y límite natural de la deuda (30 ptos)**

En $t = 0$ el consumidor maximiza

$$\mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t), \tag{2}$$

donde

$$u(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \tag{3}$$

$\beta \in (0,1)$, $\gamma > 1$ y E_0 denota el valor esperado condicional en la información disponible en $t = 0$. El consumidor puede ahorrar y endeudarse en bonos de un periodo a tasa bruta $R = 1/\beta$, Los activos del consumidor evolucionan de acuerdo a:

$$A_{t+1} = R(A_t + Y_t - C_t), \tag{4}$$

donde A_t denota los activos al comienzo de t. Se tiene que $A_0 = 0$ y que Y_t satisface

$$Y_{t+1} = Y_t \exp(\mu + \sigma\varepsilon_{t+1}),$$

donde los ε_t son i.i.d. normales con media nula y varianza igual a uno, $\mu = \frac{1}{2}\gamma\sigma^2$ y $\sigma > 0$. El consumidor maximiza (2) sujeto a (4) y el límite natural de la deuda (NBL en inglés).

Propiedades de una log-normal: Si $\log X$ es normal con media μ y varianza σ^2 entonces (a) X puede tomar cualquier valor mayor que cero y (b) $\mathrm{E}(tX) = \exp(t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2)$, donde t es un número real cualquiera. O, equivalentemente, si $Y \sim N(\nu, \tau^2)$ entonces $\mathrm{E}[\exp(tY)] = \exp(\nu t + \frac{1}{2}\tau^2 t^2)$.

(a) Muestre que
$$u'(Y_t) = \beta R \mathrm{E}_t u'(Y_{t+1}).$$

(b) Determine expresiones cerradas (nada de sumas, pero pueden depender de los ingresos) para C_t y A_{t+1} en todo $t \geq 0$. **Indicación**: Muestre que la política óptima cumple $A_t = 0$ para $t \geq 1$.

(c) Determine el límite natural a la deuda para este problema y concluya que la solución de (b) cumple con esta condición.

(d) El plan óptimo que obtuvo en (a), ¿contempla ahorro por precaución? Justifique cuidadosamente, teniendo en cuenta que la solución debe satisfacer la NBL.

4. **Procrastinación (30 ptos)**

Considere a una persona que vive T períodos $t = 1,2,3,\dots T$. El agente tiene la siguiente función de utilidad en $t = 1$:

$$c_1 + \sum_{t=1}^{T} \beta c_t \tag{5}$$

(a) Las preferencias descritas por la ecuación (5) son "estandar" si $\beta = 1$, en cuyo caso el individuo no descontaría el futuro. Sin embargo si asumimos que $0 < \beta < 1$ nos aproximamos al descuento hiperbólico que se ha observado en sicología. Comente y justifique su respuesta.

El agente tiene que completar una tarea para la Universidad con plazo en T. El **costo** (sin descuento) de no terminarla en cada período es de $(\frac{3}{2})^t$ con $t = 1,2,3,\dots T$, es decir, es creciente en el tiempo. Si un periodo comienza, con la tarea incompleta, el agente paga un costo de $(\frac{3}{2})^t$, y luego decide si quiere completar la tarea.

Una vez que la tarea es completada se mantiene así para siempre y no debe pagar costos extra. Considere que si llega al período T, sin completar la tarea aún, deberá completarla obligatoriamente pues vence la fecha límite.

(b) Si $\beta = 1$ ¿En qué período el agente completa la tarea? Justifique.

(c) Si $\beta = 1/2$ y el agente es hiperbólico ingenuo, es decir, no juega juegos con su persona futura ¿En qué período completará la tarea? Justifique.

(d) Si $\beta = 1/2$ y el agente es hiperbólico sofisticado, de modo que juega juegos con su persona futura. Demuestre que si T es un número par, la estrategia óptima del individuo será completar la tarea en cualquier periodo par ($t = 2,4,6,\cdots$) y posponerla en cualquier periodo impar ($t = 1,3,5\cdots$). Justifique.

5. **Aplicación de la q de Tobin: Mercado inmobiliario (30 ptos)**

Una variación interesande del modelo de q de Tobin aparece al estudiar la inversión en el mercado inmobiliario. Asumimos que las personas que son dueñas de una casa lo hacen para ganar el retorno de esta. Existe una masa de individuos normalizada a 1. No hay crecimiento de la población.

Denotaremos H como el *stock* de casas, es el capital en este modelo. R es la renta de tener una casa, que es una función decreciente de H. Es decir, $R = R(H)$ y $R'(H) < 0$.

El precio de las casas q se fija por la condición de no arbitraje, con r la tasa de interés:

$$r = \frac{R + \dot{q}}{q}$$

Sea I la tasa de inversión que es creciente en q tal que $I = I(q)$ con $I'(q) > 0$. La ley de movimiento de H es:

$$\dot{H} = I - \delta H$$

(a) Encuentre las ecuaciones para $\dot{H} = 0$ y $\dot{q} = 0$. Grafique ambas ecuaciones en el espacio (H, q). **Indicación:** Calcule la pendiente de cada curva y muestre que $\dot{H} = 0$ tiene pendiente positiva y $\dot{q} = 0$ pendiente negativa.

(b) ¿Por qué la curva $\dot{H} = 0$ *no* es horizontal en este modelo? Interprete.

(c) ¿Cuáles son las dinámicas de H y q en cada región del diagrama de fase resultante? Dibuje el diagrama de fase, con los vientos y el *saddle path*.

(d) Suponga que los mercados está en su equilibrio de largo plazo y que hay un incremento permanente e inesperado sobre r. ¿Qué pasa con H y q al momento del cambio? ¿Cómo se comporta H, q, I y R a través del tiempo, luego del cambio? Explique y grafique. **Indicación:** Fíjese no solo en desplazamiento de las curvas, sino también en cambios de pendientes de estas.

(e) En este modelo, ¿los costos de invertir son *internos* o *externos*? Justifique.