Macroeconomía I - ENECO 630
Control 5
FEN, U. de Chile, Semestre Otoño 2024

Profesor: Eduardo Engel
Ayudantes: Miguel Del Valle y Gabriela Jaque
10 de mayo, 2024

1. **Procesos de Poisson y modelos epidemiológicos**

En esta pregunta lo exponemos a aplicaciones de las ideas que vimos en la sección de desempleo a campos del conocimiento distintos de la economía, concretamente a modelos epidemiológicos.

Para modelar la evolución de una epidemia suponemos que en cada momento del tiempo un individuo está en uno de tres estados: susceptible (de contagiarse), infectado (con el virus) o recuperado (de la enfermedad). Los susceptibles no han cursado la enfermedad, los infectados la están cursando y los recuperados ya la cursaron.

El tiempo es continuo. Entre t y $t+\Delta t$ los susceptibles pueden permanecer en dicho estado o pasar a infectados y los infectados permanecer en dicho estado o pasar a recuperados. Los recuperados permanecen en dicho estado indefinidamente.

Las transiciones entre estados se modelan mediante variables aleatorias exponenciales:

- El número de contactos que tiene cada individuo infectado en un intervalo de tiempo pequeño Δt es $b\Delta t$ con $b>0$. Estos contactos involucran indistintamente a personas susceptibles, infectadas y recuperadas. Cuando el contacto es con un susceptible, este pasa a infectado. En cambio, los contactos con infectados o recuperados no alteran el estado de estos.
- El tiempo que dura enfermo un infectado viene dado por una distribución exponencial de parámetro $k>0$, de modo que el tiempo esperado que un individuo permanece infectado es $1/k$.

$I_t \cdot b$

El número de susceptibles, infectados y recuperados en t se denota por S_t, I_t y R_t, respectivamente. Suponemos que la suma de las tres variables anteriores permanece constante en el tiempo (no hay inmigración y nadie fallece). Sin pérdida de generalidad suponemos la constante igual a 1.

$S_t b\,[\cancel{I}$

$$S_t + I_t + R_t = 1. \tag{1}$$

$\hat{S}_t = S_t \cdot \cancel{I}$

$\dot{S}_I = S_t[1-b]$

(a) Exprese $\dot{S}_t$ en función de S_t, I_t y b. Justifique.

(b) Exprese $\dot{R}_t$ en función de I_t y k.

(c) Exprese $\dot{I}_t$ en función de S_t, I_t, k y b.

En lo que sigue suponemos $S_0 = 1$. También suponemos que $I_0 > 0$, es decir, que existe al menos un infectado. Una epidemia ocurrirá si y solo si $\dot{I}_0 > 0$.

Definimos $R_0 \equiv b/k$. R_0 se conoce como la *tasa básica de reproducción* de la epidemia. R_0 es el número esperado de personas que infecta una persona contagiada en una población donde todos los individuos son susceptibles. En efecto, cada infectado contagia a b individuos por unidad de tiempo (aquí usamos que toda la población es susceptible) y permanece $1/k$ unidades de tiempo contagioso. Luego el número esperado de contagios que genera un individuo infectado es b/k.

(d) Muestre que la epidemia ocurrirá si y solo si $R_0 > 1$.

$\hat{I}_t = b I_t \cdot S_t - I_t k$

$\dfrac{\dot{I}_t}{k} = \dfrac{b}{k} I_t S_t - I \qquad / S_t = 1$

$= I_t \left[\dfrac{b}{k} - 1 \right]$

2. **Salario mínimo y desempleo**

En este problema analizamos el impacto del salario mínimo sobre el desempleo en un modelo donde, a diferencia de los modelos que vimos en clases, los desempleados eligen su esfuerzo de búsqueda óptimamente.

El tiempo es continuo, los individuos son neutros al riesgo y viven indefinidamente, la tasa de descuento es $r > 0$. El esfuerzo, $e > 0$, que realiza un individuo desempleado determina el parámetro de la distribución exponencial con que recibe ofertas de empleo, μe, donde $\mu > 0$ captura el estado del mercado laboral independiente del esfuerzo del trabajador. El salario toma un único valor, w, conocido por los trabajadores. Este salario satisface $w > z$, donde z denota el ingreso, por unidad de tiempo, que recibe un trabajador desempleado. Denotamos por $\phi(e) = e^{\gamma+1}/(\gamma+1)$, $\gamma > 0$, el costo que tiene para el trabajador realizar un esfuerzo e. De modo que la utilidad instantánea de un trabajador desempleado es $z - \phi(e)$. En cambio, la utilidad instantánea de un trabajador empleado es w. La tasa de separación es $\lambda > 0$ y es exógena. Denotamos el valor presente descontado de la utilidad de un trabajador empleado y desempleado por V_e y V_u, respectivamente. En lo que sigue consideramos estados estacionarios.

Ayuda: Puede (y es relativamente fácil) responder las partes (c) y (d) aun si no respondi'o las partes (a) y (b).

(a) Escriba las ecuaciones de Bellman para V_e y V_u.

(b) Plantee el problema de maximización que permite obtener el esfuerzo óptimo, e^*. Es decir, debe plantear una función que se debe maximizar respecto de e y cuyo máximo se alcanza en el esfuerzo óptimo del trabajador desempleado. No es necesario que realice la optimización.

Se puede mostrar (*no* le recomendamos hacer la derivación) que la c.p.o. de la parte (b) equivale a:

$$\frac{\gamma}{1+\gamma}e^{\gamma+1} + \frac{r+\lambda}{\mu}e^{\gamma} = w - z.$$

En lo que sigue puede suponer que el esfuerzo óptimo es el único $e^* > 0$ que satisface la ecuación anterior.

(c) Muestre que e^* es creciente en w y μ y decreciente en z, r, λ y γ . Dé la intuición en cada caso.

(d) Derive el valor de estado estacionario de la tasa de desempleo como función de e^*, λ y μ. Concluya que un incremento de w reduce el desempleo en este modelo.

$\lambda(1-u_t) = u \cdot e\mu$

$\lambda - \lambda u = u e\mu$

$\frac{\lambda}{\lambda + e\mu} = u$