CONTROL III (RECUPERATIVO) - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2024

Pregunta 1. Considere un modelo de emparejamiento bilateral uno-a-uno entre agentes de los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ en el cual las preferencias cumplen

$\succ_{a_1}$	$\succ_{a_2}$	$\succ_{a_3}$	$\succ_{b_1}$	$\succ_{b_2}$	$\succ_{b_3}$
b_1	b_1	b_2	a_3	a_1	a_3
b_3	b_3	b_3	a_2	a_2	a_1
b_2	b_2	b_1	a_1	b_2	a_2
a_1	a_2	a_3	b_1	a_3	b_3

(i) **(15 puntos)** Justificando sus argumentos, encuentre los emparejamientos que son Pareto eficientes para los individuos de A. Además, determine si alguno de esos emparejamientos es estable.

Los emparejamientos Pareto eficientes para los individuos de A se pueden encontrar aplicando el mecanismo *serial dictatorship* para todos los posibles órdenes de prioridad de los agentes de A (con ellos haciendo las propuestas y tratando a los agentes de B como "objetos").

La siguiente tabla describe el resultado de ese proceso:

Orden	a_1	a_2	a_3	Emparejamiento
a_1, a_2, a_3	b_1	b_3	b_2	$[(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)]$
a_1, a_3, a_2	b_1	b_3	b_2	$[(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)]$
a_2, a_1, a_3	b_3	b_1	b_2	$[(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_2)]$
a_2, a_3, a_1	b_3	b_1	b_2	$[(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_2)]$
a_3, a_1, a_2	b_1	b_3	b_2	$[(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)]$
a_3, a_2, a_1	b_3	b_1	b_2	$[(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_2)]$

Luego, $[(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)]$ y $[(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_2)]$ son los emparejamientos Pareto eficientes para los individuos de A. Ninguno de ellos es estable: $[(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)]$ es bloqueado por la pareja (a_2, b_1), mientras que $[(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_2)]$ es bloqueado por b_2. □

(ii) **(15 puntos)** Asumiendo que los agentes de A son colegios con un cupo y los agentes de B son estudiantes, determine si el resultado de TTC es estable.

Al aplicar TTC, en la primera etapa cada estudiante/colegio anuncia a su colegio/estudiante preferido. Se forma el ciclo (b_1, a_3, b_2, a_1). Luego, se forman las parejas (a_3, b_1) y (a_1, b_2), pues se empareja a cada estudiante en el ciclo con el colegio que anunció. En la segunda etapa, al solo quedar a_2 y b_3 en la plataforma, ellos forman un ciclo y se genera la pareja (a_2, b_3). Por lo tanto, TTC induce el emparejamiento $[(a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1)]$, el cual no es estable pues puede ser bloqueado por (a_1, b_3) y (a_3, b_3). □

Pregunta 2 (15 puntos)

Considere un modelo de emparejamiento bilateral uno-a-uno entre los agentes de $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Sea $\mathcal{P}$ el dominio de perfiles de preferencia $(\succ_h)_{h\in A\cup B}$ tales que:

- Para cada $a \in A$, $\succ_a$ es completa, transitiva, estricta y está definida sobre B.
- Para cada $b \in B$, $\succ_b$ es completa, transitiva, estricta y está definida sobre A.

Esto es, en el dominio $\mathcal{P}$ los agentes consideran admisibles a todas sus potenciales parejas.

Dado $(\succ_h)_{h\in A\cup B} \in \mathcal{P}$, denote por $\mathcal{B}[(\succ_h)_{h\in A\cup B}]$ al emparejamiento que se obtiene al aplicar el mecanismo de Boston al mercado $[A, B, (\succ_h)_{h\in A\cup B}]$ considerando a los individuos de A como colegios con un cupo y a los individuos de B como estudiantes.

Demuestre o dé un contra-ejemplo para cada una de estas afirmaciones:

- $\mathcal{B}$ es Pareto eficiente para los colegios.

  La afirmación es falsa. Intuitivamente, como los colegios llenan sus cupos con los estudiantes admisibles que mejor los posicionan, pueden terminar aceptando estudiantes con baja prioridad. Y eso puede abrir espacio para mejoras de bienestar entre los colegios, al intercambiarse estudiantes.

  Para ilustrar esto, considere las siguientes preferencias:

$\succ_{a_1}$	$\succ_{a_2}$	$\succ_{a_3}$	$\succ_{a_4}$	$\succ_{b_1}$	$\succ_{b_2}$	$\succ_{b_3}$	$\succ_{b_4}$
b_4	b_3	b_2	b_1	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4	a_2	a_3	a_4	a_1
b_3	b_1	b_4	b_3	a_3	a_1	a_1	a_2
b_2	b_4	b_1	b_2	a_4	a_4	a_2	a_3
a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4

  Al aplicar el mecanismo de Boston, en la primera etapa todos los estudiantes postulan a sus mejores colegios y son aceptados, formándose el emparejamiento $[(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4)]$. Esta distribución es Pareto ineficiente para los colegios, pues todos mejoran en $[(a_1, b_4), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_4, b_1)]$. $\square$

- $\mathcal{B}$ es strategy-proof para los estudiantes.

  La afirmación es falsa. Intuitivamente, un estudiante puede tener incentivos a no postular a su colegio preferido, para evitar que se llenen los cupos en su segunda mejor alternativa antes de que él postule a ella.

  Para ilustrar esto, considere las siguientes preferencias:

$\succ_{a_1}$	$\succ_{a_2}$	$\succ_{a_3}$	$\succ_{a_4}$	$\succ_{b_1}$	$\succ_{b_2}$	$\succ_{b_3}$	$\succ_{b_4}$
b_4	b_3	b_2	b_1	a_1	a_2	a_1	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4	a_2	a_3	a_2	a_1
b_3	b_1	b_4	b_3	a_3	a_1	a_3	a_2
b_2	b_4	b_1	b_2	a_4	a_4	a_4	a_3
a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4

  Al aplicar el mecanismo de Boston, en la primera etapa los estudiantes b_1 y b_3 postulan al colegio a_1, el estudiante b_2 postula a a_2 y el estudiante b_4 postula a a_4. La postulación de b_3 es rechazada y se forman las parejas (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_4, b_4). En la segunda etapa, solo quedan a_3 y b_3 en la plataforma, por lo cual el emparejamiento final es $[(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4)]$. Note que, si el estudiante b_3 reporta preferencias que ponen al colegio a_2 como su mejor alternativa, en la primera etapa del mecanismo de Boston obtendrá un cupo en ese colegio, pues $b_3 \succ_{a_2} b_2$. Como $a_2 \succ_{b_3} a_3$, el estudiante b_3 tiene incentivos a reportar preferencias falsas. $\square$

Pregunta 3 (15 puntos)

Considere un mercado bilateral uno-a-uno entre un conjunto F de firmas y un conjunto T de trabajadores. Hay mil firmas y mil trabajadores. Sea $\succ_f$ la relación de preferencias de $f \in F$, la cual es completa, transitiva, estricta y está definida sobre T. Análogamente, sea $\succ_t$ la relación de preferencias de $t \in T$, la cual es completa, transitiva, estricta y está definida sobre F.

Dado un perfil de preferencias $\succ = (\succ_h)_{h \in F \cup T}$, denotaremos por $\mathrm{AD}[\succ]$ al emparejamiento que se obtiene al aplicar el algoritmo de aceptación diferida con los trabajadores haciendo las propuestas. Además, sea $\Omega[\succ]$ el emparejamiento que se obtiene cuando luego de obtener $\mathrm{AD}[\succ]$ se aplica el algoritmo *Top Trading Cycles* (TTC) tratando a las firmas como objetos y a la firma con la cual está emparejado $t \in T$ en $\mathrm{AD}[\succ]$ como su asignación inicial.

Asumiendo que $\mathrm{AD}[\succ]$ no es Pareto eficiente para los trabajadores, demuestre que $\Omega[\succ]$ domina en el sentido de Pareto a $\mathrm{AD}[\succ]$ desde la perspectiva de los trabajadores. Además, pruebe que $\Omega[\succ]$ es inestable.

Asuma que $\mathrm{AD}[\succ]$ no es Pareto eficiente para los trabajadores. Como el resultado de aplicar TTC es Pareto eficiente para los trabajadores y $\Omega[\succ]$ se obtiene al aplicar el algoritmo TTC al mercado en el cual cada $t \in T$ tiene como asignación inicial la firma $\mathrm{AD}[\succ](t)$, concluimos que $\Omega[\succ] \neq \mathrm{AD}[\succ]$.

Luego, como TTC implementa un emparejamiento individualmente racional, al menos un trabajador mejora su situación en $\Omega[\succ]$ en relación a $\mathrm{AD}[\succ]$, sin que ninguno de ellos empeore. Esto es, $\Omega[\succ]$ domina en el sentido de Pareto a $\mathrm{AD}[\succ]$ desde la perspectiva de los trabajadores. Finalmente, como $\mathrm{AD}[\succ]$ deja a cada trabajador con la mejor firma en la cual puede estar en un emparejamiento estable, el hecho que $\Omega[\succ]$ domine a $\mathrm{AD}[\succ]$ desde la perspectiva de los trabajadores nos asegura que $\Omega[\succ]$ es inestable. $\square$