Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Departamento de Economía

Macroeconomía I - ENECO 630
Prueba Solemne
Semestre Otoño 2024

Profesor: Eduardo Engel
Ayudantes: Miguel del Valle y Gabriela Jaque
11 de mayo

Instrucciones

1. Tiene 10 minutos para leer el enunciado antes de que se repartan los folios para responder
2. Luego tiene 3 horas para responder esta solemne.
3. La solemne tiene 5 preguntas, el número máximo de puntos que otorga cada pregunta se indica en cada caso, el número máximo de puntos que puede obtener en la Solemne es 120.
4. Salvo que se indique lo contrario, todas las partes de una pregunta dan el mismo puntaje.
5. Asigne su tiempo de modo de dedicar suficiente tiempo a todas las preguntas. No dedique demasiado tiempo a ninguna de ellas. Se recomienda dedicar tantos minutos como puntos asignados a cada pregunta. Esto deja una hora de libre disposición, sin contar los 10 minutos que dedicará a leer el enunciado.
6. Sus respuestas deben contener pasos intermedios para que el evaluador pueda estar seguro de que llegó al resultado correcto sabiendo lo que hacía. Esto también permitirá al evaluador darle puntaje parcial cuando no obtenga la respuesta correcta.
7. Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
8. Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.

1. **Verdadera, falsa o incierta (20 puntos)**

   Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera, falsa o incierta. Justifique en no más de 70 palabras en cada caso. Su evaluación dependerá de su justificación.

   (a) La función de respuesta al impulso unitario de un proceso AR(2) estacionario siempre tiene forma de joroba. 4 puntos

   (b) El modelo de equivalencia cierta sirve para capturar el ahorro por precaución. 4 puntos

   (c) La evidencia sugiere que los consumidores hand-to-mouth son casi exclusivamente hogares de bajos ingresos. 4 puntos

   (d) La curva de Beveridge es útil para proyectar el desempleo en el corto plazo. 4 puntos

   (e) Los modelos con costos de ajuste no convexos generan funciones de respuesta al impulso unitario que varían en el tiempo. 4 puntos

   Solución:

   (a) La afirmacion es falsa (o incierta) porque solo se cumple si $a1 + a2 > 1$, donde el polinimio autoregresivo es de la forma $(1 - a_1 L)(1 - a_2 L)$, con a_1 y a_2 números reales de valor absoluto menor que uno. (También se podía poner un contraejemplo).

   (b) Falso, bajo ahorro por precaución tenemos que cambios en la varianza del ingreso futuro, manteniendo el valor esperado de este constante, debiese llevar a una disminución del consumo corriente, y, por lo tanto, a un mayor ahorro. Bajo el modelo de equivalencia cierta, el consumo óptimo de los hogares corresponde a:

   $$C_t = \frac{r}{R}\left[A_t + \sum_{s \geq 0} \beta^s E_t(Y_{t+s})\right]$$

   Manteniendo la esperanza del ingreso constante, vemos que un aumento en la varianza del ingreso futuro no se ve reflejado en el consumo de equivalencia cierta, por lo tanto, este modelo no captura el ahorro por precaución. (También se podía argumentar por el lado de que equivalencia cierta usa funciones de utilidad con $u''' = 0$, y en clases se vió que para que haya ahorro por precaución, $u''' > 0$.

   (c) Falso, de acuerdo con Kaplan, Violante y Weidner (2014) existen los wealthy hand-to-mouth households, los cuales poseen una gran cantidad de activos ilíquidos (inmuebles, por ejemplo), y una baja cantidad de activos líquidos. De acuerdo con el paper, en EEUU entre un 20 y 40% de los hogares son hand-to-mouth, y de estos aproximadamente 2/3 son hogares ricos.

   (d) Falso, la curva de Beveridge simplemente nos define el par tasa de desempleo - tasa de vacantes en un periodo particular, sin embargo, no podemos hacer proyecciones de ningún tipo. (También es válido responder que se obtiene a partir del estado estacionario de la tasa de desempleo, y, por lo tanto, define un equilibrio de largo plazo).

   (e) Los modelos con costos no convexos de ajuste llevan a que la política óptima de inversión de las firmas sea del tipo SS. Esto es, ajustan su capital cuando la brecha entre su capital óptimo y el capital que tienen es lo suficientemente grande en valor absoluto. Esto lleva a que la respuesta de las firmas a shocks dependa de la cantidad de capital que tengan, y tenemos una IRF que varía en el tiempo. Específicamente, el margen extensivo, que son la cantidad de firmas que se ajustan frente a un shock, depende tanto de la magnitud del shock como de la posición del capital de las firmas con respecto a su capital óptimo, lo que no se mantiene constante en el tiempo. El margen intensivo también varía, ya que puede que un mismo shock induzca un gran o un pequeño ajuste dependiendo de la distancia del capital de las firmas con respecto a su capital óptimo.

2. **Suma de procesos AR(1) independientes (20 puntos)**

Los procesos x_t y y_t siguen procesos AR(1) estacionarios, de modo que

$$\begin{aligned} x_t &= a x_{t-1} + e_t, \\ y_t &= b y_{t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

donde $0 < a < b < 1$, e_t y ε_t denotan procesos i.i.d. de innovación, con media nula y varianzas σ_e^2 y σ_ε^2, respectivamente. Además, e_t es independiente de ε_s, para todo s, t.

Este problema se centra en la suma de los procesos anteriores,

$$z_t = x_t + y_t.$$

(a) Muestre que z_t es un proceso ARMA(p,q) estacionario. Indique los valores de p y q. (6,67 puntos)

(b) Indique el polinomio autoregresivo del proceso ARMA que obtuvo en (a). (6,67 puntos)

(c) ¿Cambian sus respuestas en (a) y (b) si suponemos que e_t y ε_s están correlacionados cuando $s = t$? Justifique su respuesta. Note que mantenemos el supuesto de que e_t y ε_s son independientes cuando $s \neq t$. (6,67 puntos)

Solución

(a) Reescribiendo las expresiones para x_t e y_t usando el operador L,

$$\begin{aligned} (1 - aL)x_t &= e_t, \\ (1 - bL)y_t &= \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Aplicando $(1 - bL)$ a ambos lados de la primera igualdad y $(1 - aL)$ a ambos lados de la segunda,

$$\begin{aligned} (1 - bL)(1 - aL)x_t &= (1 - bL)e_t, \\ (1 - aL)(1 - bL)y_t &= (1 - aL)\varepsilon_t. \end{aligned}$$

Sumando las dos expresiones anteriores, usando que $(1 - bL)(1 - aL) = (1 - aL)(1 - bL)$ y notando que $z_t = x_t + y_t$,

$$(1 - aL)(1 - bL)z_t = (1 - bL)e_t + (1 - aL)\varepsilon_t.$$

Denotando

$$v_t = (1 - bL)e_t + (1 - aL)\varepsilon_t = e_t - b e_{t-1} + \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1},$$

se tiene que

$$\mathrm{E} v_t v_{t-1} = \mathrm{E}(e_t - b e_{t-1} + \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1})(e_{t-1} - b e_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - a\varepsilon_{t-2}) = -b\sigma_e^2 - a\sigma_\varepsilon^2 < 0.$$

Un cálculo análogo muestra que $\mathrm{E} v_t v_{t-k} = 0$ para $k \geq 2$, de modo que v_t sigue un MA(1) y z_t un ARMA(2,1).

(b) Denotando por $c(z)$ el polinomio autoregresivo, de la derivación anterior,

$$c(z) = (1 - az)(1 - bz) = 1 - (a + b)z + abz^2.$$

(c) Las derivaciones de las partes anteriores siguen siendo válidas, incluyendo que $\mathrm{E}v_t v_{t-k} = 0$ para $k \geq 2$. Lo único que cambia es la expresión para $\mathrm{E}v_t v_{t-1}$. Luego z_t sigue siendo un ARMA(2,1) con el polinomio autoregresivo obtenido en (b).

3. **Costos de ajuste convexos y no convexos (20 puntos)**

La función de producción de la firma es

$$Y = 2AL^{1/2},$$

donde Y denota la producción, A un shock de productividad y L el empleo. El precio del bien y el salario que paga la firma permanecen constantes en el tiempo, puede suponer que las dos constantes son iguales a uno.

El shock de productividad del período t, A_t, puede tomar dos valores, e^{σ} y $e^{-\sigma}$, cada uno con probabilidad $1/2$, donde $\sigma > 0$ es un parámetro que mide la volatilidad de los shocks. Los shocks de productividad son independientes entre períodos.

La firma maximiza el valor presente descontado esperado de sus beneficios.

(a) **(4 ptos)** Suponga que la firma puede ajustar su empleo sin costo alguno. Determine el empleo óptimo de la firma en el período t, como función de A_t. Concluya que

$$l_t = 2a_t,$$

donde $a_t = \log A_t$ y $l_t = \log L_t$. ¿Qué proceso ARIMA sigue l_t?

Ayuda: Puede usar la expresión anterior en las partes que siguen aun si no la pudo derivar.

(b) **(8 ptos)** Suponga ahora que la firma tiene costos de ajuste cuadráticos en el logaritmo del empleo, de modo que

$$l_t = \alpha l_{t-1} + (1 - \alpha) l_t^*$$

con

$$l_t^* = (1 - \delta) \sum_{k \geq 0} \delta^k \mathrm{E}_t \hat{l}_{t+k},$$

donde α y δ son constantes en $(0, 1)$ y $\hat{l}_t$ denota el óptimo estático sin fricciones que derivamos en la parte (a).

Obtenga una expresión para l_t^* que dependa solo de a_t (y parámetros).

¿Qué proceso ARIMA sigue l_t?

(c) **(8 ptos)** Finalmente, considere el caso en que la firma paga un costo fijo $C > 0$ cada vez que ajusta su empleo.

Determine el valor de l_t que elige la firma como función de A_t (y, eventualmente, de valores pasados del shock) cuando C es pequeño. Justifique.

Determine el valor de l_t que elige la firma como función de A_t (y, eventualmente, de valores pasados del shock) cuando C es grande. Justifique.

Ayuda: En la parte (c) los cálculos que debe hacer son muy pocos, basta con apelar a la intuición para determinar las políticas de empleo que seguirá la firma en cada caso.

Solución

(a) Resolvemos

$$\max_L \Pi(L) = 2AL^{1/2} - L.$$

La CPO es

$$AL^{-1/2} - 1 = 0,$$

de modo que

$$L = A^2 \Longrightarrow l = 2a.$$

Concluimos que $l_t = 2a_t$, de modo que l_t es i.i.d. (ruido blanco).

(b) Tenemos que $\hat{l}_{t+k}$ es igual al l_{t+k} que obtuvimos en (a). Luego, $\hat{l}_{t+k} = 2a_{t+k}$ y $\mathrm{E}_t[\hat{l}_{t+k}] = \mathrm{E}_t[2a_{t+k}] = 2\mathrm{E}_t[a_{t+k}] = 0$ cuando $k \geq 1$. En cambio, cuando $k = 0$, $\mathrm{E}_t\hat{l}_{t+k} = l_t = 2a_t$. Entonces,

$$l_t^* = (1-\delta)\sum_{k\geq 0}\delta^k \mathrm{E}_t\hat{l}_{t+k} = (1-\delta)\left[\mathrm{E}_t\hat{l}_t + \sum_{k\geq 1}\delta^k \mathrm{E}_t\hat{l}_{t+k}\right] = (1-\delta)\left[2a_t + 0\right] = 2(1-\delta)a_t$$

y tenemos que

$$l_t = \alpha l_{t-1} + (1-\alpha)l_t^* = \alpha l_{t-1} + 2(1-\alpha)(1-\delta)a_t.$$

Como los a_t son i.i.d., concluimos que l_t sigue un AR(1) con coeficiente autoregresivo α.

(c) Cuando C es pequeño, la firma paga el costo fijo de ajuste en todos los períodos, para luego elegir el valor de L que maximiza su beneficio de ese período. Esto la lleva a elegir el l_t de la parte (a).

En cambio, cuando C es grande, la firma no paga nunca el costo de ajuste y mantiene su empleo constante en todo período. Elegirá aquel valor de L que maximiza su beneficio esperado, antes de conocer A. Repitiendo los pasos de la parte (a) con $\mathrm{E}(A)$ en lugar de A, se obtiene $L_t = [\mathrm{E}(A)]^2$.

4. **Modelo de pareo de exportadores y barcos (20 puntos)**

El tiempo es discreto. Hay dos tipos de agentes, exportadores y barcos. Ambos son neutros al riesgo y tienen factor de descuento β. Hay I puertos y S barcos. En cada puerto i residen e_i exportadores que desean enviar una carga fija (un contenedor) a un puerto determinado j distinto de i, por lo cual recibirá un beneficio de \$1 y pagará un costo de transporte τ_{ij}. Este precio, que se determina en equilibrio, es tomado como un dato por los agentes. Denotamos por p_{ij} la fracción de exportadores en el puerto i que desea enviar su container al puerto j.

En cada periodo, un barco está en algún puerto i o está viajando, con o sin carga, desde un puerto i hacia otro puerto j. Un barco en el puerto i incurre un costo de espera c_i^w por periodo, mientras que un barco viajando de i a j incurre en un costo c_{ij}^s por periodo (que no depende de si va cargado o no). La duración del viaje es estocástica: un barco viajando de i a j arriba a j al final del periodo actual con probabilidad d_{ij}, de modo que la duración promedio de un viaje entre i y j es $1/d_{ij}$.

Denotamos por $m = m_i(s_i, e_i)$ los nuevos emparejamientos, por período, en el puerto i, donde s_i es el número de barcos sin pareo en el puerto i y recordamos que e_i denota el número de exportadores en i. Al igual que en clases, m es una función creciente y cóncava en cada uno de sus argumentos. Denotando por λ_i la probabilidad de que un barco sin pareo en i encuentre un exportador, $\lambda_i = m_i/s_i$. De manera similar, denotando por λ_i^e la probabilidad de que un exportador sin pareo encuentre un barco, $\lambda_i^e = m_i/e_i$.

Denote por V_{ij} el valor de un barco que parte el periodo viajando desde i a j (cargado o vacío, dados los supuestos que hicimos el valor es el mismo), por V_i el valor de un barco que comienza el período en i y por U_i el valor de un barco que termina el período en i sin pareo.

En lo que sigue, todas las funciones de valor son de estado estacionario.

(a) Use un argumento recursivo (ecuación de Belllman) para expresar V_{ij} en función de V_j, V_{ij}, c_{ij}^s, β y d_{ij}.

(b) Use un argumento recursivo (ecuación de Belllman) para expresar V_i en función de c_i^w, λ_i, U_i y los p_{ij}, τ_{ij} y V_{ij}.

Las partes anteriores no involucraban decisión alguna de los agentes del modelo, la que sigue sí. Un barco que está en el puerto i al final de un período, debe elegir entre permanecer en i el periodo siguiente y llevar una carga desde i a otro puerto. Y si opta por viajar, debe decidir a cuál puerto.

(c) Escriba la ecuación de Bellman para un barco en i. Al lado izquierdo va U_i. Esta vez no le damos ninguna indicación sobre cuáles variables van al lado derecho.

Finalmente consideramos las funciones de valor de los exportadores. Un exportador en i que tiene un pareo para llevar su producto al puerto j recibe un ingreso igual a uno y paga un costo de transporte τ_{ij}.

(d) El caso de un exportador en i que no está pareado y opta por una chance de ser pareado para enviar su producto al puerto j es más interesante. Denote su valor por U_{ij}^e y obtenga una ecuación de Bellman para U_{ij}^e. Suponga que los exportadores que se quedan sin pareo al final de un período sobreviven hasta el próximo período con una probabilidad exógena δ,

Solución

(a) Tenemos
$$V_{ij} = -c_{ij}^s + \beta \left[d_{ij} V_j + (1 - d_{ij}) V_{ij} \right].$$
Como está viajando, tiene que pagar el costo de transporte c_{ij}^s. El próximo período llega a j con probabilidad d_{ij}, en cuyo caso su valor es V_j. Y, con probabilidad $1 - d_{ij}$, sigue navegando con valor V_{ij}.

(b) Tenemos
$$V_i = -c_i^w + \lambda_i \sum_j p_{ij}(\tau_{ij} + V_{ij}) + (1 - \lambda_i) U_i.$$

Cuando está en el puerto, tiene un costo de espera c_i^w. Luego, con probabilidad λ_i encuentra un pareo con una firma exportadora. Con probabilidad p_{ij} ésta le paga τ_{ij} y se vuelve un barco en tránsito de i a j. Con probabilidad $1 - \lambda_i$ no encuentra un exportador y su valor es el de no pareo, U_i.

(c) Tenemos

$$U_i = \max(\beta V_i, \max_{j \neq i} V_{ij}).$$

Una firma sin pareo tiene que decidir si quedarse en i y obtener V_i o escoger algún puerto y viajar hacia él teniendo valor V_{ij}. Elige la opción que le da mayor valor.

Que se aplique el factor de descuento β solo a V_i me parece debatible, me parece igualmente correcto si se aplica también a $\max_{j \neq i} V_{ij}$.

(d) La ecuación de Bellman para el exportador sin pareo es,

$$U_{ij}^e = \beta\delta \left[\lambda_i^e(1 - \tau_{ij}) + (1 - \lambda_i^e)U_{ij}^e\right].$$

En palabras, los exportadores no reciben pagos en el periodo y sobreviven con tasa δ; si lo hacen, con probabilidad λ_i^e en el siguiente período encuentra un barco, recibe 1 y paga τ_{ijr}, con la probabilidad restante, $1 - \lambda_i^e$, se mantiene sin pareo

5. **Volatilidad del gasto en durables (40 puntos)**

Tal como vimos al analizar los datos de Chile en la unidad de consumo, el gasto en bienes de consumo durables (casas, automóviles, etc.) es mucho más volátil que el gasto en bienes de consumo no durables. En esta pregunta exploramos una posible explicación para esta observación, basada en que el beneficio que los hogares derivan de la compra de durables se extiende más allá del período en que se realiza dicha compra.

Un hogar consume un bien durable (D) y un bien no durable (C), maximizando su utilidad

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(C_t) + v(D_t)].$$

Donde $\beta \in (0, 1)$ y u y v son crecientes, cóncavas y satisfacen condiciones de Inada que aseguran óptimos interiores. Los servicios que proporciona el bien durable son proporcionales al stock del durable: $D_t = \alpha K_t$ con $\alpha > 0$. El stock del durable evoluciona de acuerdo a:

$$K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + E_t,$$

donde $\delta \in [0, 1]$ es la tasa a la cual se deprecia el durable y E denota el gasto en durables. Note el timing que asumimos: los durables adquiridos en t llevan a mayor utilidad en el mismo período. En cada período el hogar recibe un ingreso fijo $Y_t = Y$; los hogares no pueden endeudarse ni prestar.

(a) Escriba la ecuación de Bellman para este problema. ¿Que restricción deben cumplir E_t, C_t y Y en cada período? Indique cuáles son las variable de estado y cuáles son las variables de decisión. (8 puntos)

(b) A partir de la condición de primer orden de la ecuación de Bellman y el teorema de la envolvente derive la siguiente ecuación de Euler:

$$u'(C_t) = \alpha v'(\alpha K_t) + \beta(1-\delta)u'(C_{t+1}). \tag{1}$$

(8 puntos)

(c) Denote mediante $\overline{K}$, $\overline{C}$ y $\overline{E}$ los valores de estado estacionario del stock del durable, consumo del no durable y gasto en el durable, respectivamente. Derive una expresión que determina unívocamente $\overline{E}$. (8 puntos)

A continuación utilizamos este simple modelo para proveer una explicación de por qué el gasto en durables fluctúa más que el gasto en no durables.

El ingreso del hogar en estado estacionario experimenta una caía inesperada a $Y - \Delta y$ en el período 0 y el hogar sabe con certeza que su ingreso será $Y + \Delta y$ en el período siguiente, retornando a continuación a Y, su valor de estado estacionario.

Denote $K_0 = \bar{K} - \lambda\Delta y$ y $C_0 = \bar{C} - (1-\lambda)\Delta y$, donde $\lambda \in [0, 1]$ captura la medida en que el ajuste al shock negativo de ingreso se realiza mediante una reducción del consumo del durable y, nuevamente, $\bar{C}$ y $\bar{K}$ denotan los valores de estado estacionario de C y K. Para simplificar el álgebra, suponemos $\beta = 1$ e imponemos que K regresa a su valor de estado estacionario en el período 1 (lo cual significa que C retorna a $\bar{C}$ en el período 2).

(d) Partiendo de la ecuación de Euler (1), use una expansión de Taylor de primer orden alrededor de los valores de estado estacionario de C y K para derivar el valor óptimo de λ. [**Indicación:** Primero exprese C_1 como una función de los parámetros y variable de estado estacionario, luego use esta expresión y las expresiones para C_0 y K_0 para escribir la ecuación de Euler en el período 0, y sólo entonces use la aproximación de Taylor de primer orden. La relación de estado estacionario que derivó en (c) le será útil para simplificar la expresión que obtenga.] (8 puntos)

(e) Ahora suponga $\alpha = \delta$ y $u = v$. Explique por qué estos supuestos proveen un benchmark razonable. Use la expresión que derivó en (d) para mostrar que $\lambda = 0.5$ para $\delta = 1$ mientras que $\lambda = 1$ para $\delta = 0$. Lo anterior sugiere (no es necesario que lo demuestre) que λ es creciente en la durabilidad del bien (es decir, es decreciente en δ). (8 puntos)

Solución

(a) Denote by K^I the beginning-of-period durable stock, before expenditures take place. This is the state variable. Denoting by $W(K^I)$ the household's present discounted utility from having a stock K^I we have the Bellman equation:

$$W(K^I) = \max_E \left\{u(Y-E) + v(\alpha[K^I + E]) + \beta W((1-\delta)(K^I + E))\right\},$$

where E denotes durable expenditure and is the decision variable, and we have used the budget constraint $C_t + E_t = Y$. You could have an intermediate step with C and E as decision variables. Again, notice the timing: E becomes immediately part of the usable stock of durables, and affects utility from durable consumption in the current period, so next period only $(1-\delta)E$ of that expense remains. Also note that an alternative state variable would be the stock of capital at the end of the previous period, and that you could write the problem in such a way that current period consumption, C, or the durable stock available for current durable services, K, could be the decision variable.

(b) The FOC from the r.h.s. of the Bellman equation yields:

$$u'(Y-E) = \alpha v'(\alpha(K^I + E)) + \beta(1-\delta)W'((1-\delta)(K^I + E)),$$

and letting $C_t = Y - E$, $K_t = K^I + E$ and $K^I_{t+1} = (1-\delta)(K^I + E)$:

$$u'(C_t) = \alpha v'(\alpha K_t) + \beta(1-\delta)W'(K^I_{t+1}). \tag{2}$$

Applying the Envelope Theorem to the Bellman equation:

$$W'(K^I_t) = \alpha v'(\alpha K_t) + \beta(1-\delta)W'(K^I_{t+1}). \tag{3}$$

From the FOC (2) we have:

$$\begin{aligned} W'(K^I_{t+1}) &= \frac{u'(C_t) - \alpha v'(\alpha K_t)}{\beta(1-\delta)}, \\ W'(K^I_t) &= \frac{u'(C_{t-1}) - \alpha v'(\alpha K_{t-1})}{\beta(1-\delta)}, \end{aligned}$$

and substituting these expressions in the Envelope condition (3) yields

$$u'(C_{t-1}) = \alpha v'(\alpha K_{t-1}) + \beta(1-\delta)u'(C_t)$$

which is equivalent to (1).

(c) Letting $C_t = C_{t+1} = \bar{C}$ and $K_t = \bar{K}$ in (1) yields:

$$[1 - \beta(1-\delta)]u'(\bar{C}) = \alpha v'(\alpha \bar{K}). \tag{4}$$

From

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + E_t$$

we have that in steady state ($K_t = K_{t-1} = \bar{K}$):

$$\bar{E} = \delta \bar{K},$$

and from (4) we therefore have that $\bar{E}$ is determined from

$$[1 - \beta(1-\delta)]u'(Y - \bar{E}) = \alpha v'\left(\frac{\alpha}{\delta}\bar{E}\right).$$

This uniquely determines $\bar{E}$ because the LHS is increasing in E and the RHS is decreasing.

(d) Resources available for expenditure on durables and non-durables in period 1 (i.e., $C_1 + K_1$) will be $Y + \Delta y + (1-\delta)[\bar{K} - \lambda \Delta y]$ and therefore, given that we are imposing $K_1 = \bar{K}$ we will have

$$\begin{aligned} C_1 &= Y + \Delta y + (1-\delta)[\bar{K} - \lambda \Delta y] - \bar{K} \\ &= Y + [1 - \lambda(1-\delta)]\Delta y - \delta \bar{K} \\ &= Y + [1 - \lambda(1-\delta)]\Delta y - \bar{E} \\ &= \bar{C} + [1 - \lambda(1-\delta)]\Delta y, \end{aligned}$$

where we used the identities $\bar{E} = \delta\bar{K}$ and $\bar{C} = Y - \bar{E}$. Substituting the expressions for C_0, K_0 and C_1 in the Euler equation (1) and imposing $\beta = 1$:

$$u'(\bar{C} - (1-\lambda)\Delta y) = \alpha v'(\alpha[\bar{K} - \lambda\Delta y]) + (1-\delta)u'(\bar{C} + [1 - \lambda(1-\delta)]\Delta y).$$

A Taylor expansion around $\bar{C}$ (for u') and $\alpha\bar{K}$ (for v'), and using the fact that steady state values satisfy the Euler equation (i.e.: $u'(\bar{C}) = \alpha v'(\alpha\bar{K}) + (1-\delta)u'(\bar{C})$), leads to:

$$-(1-\lambda)u''(\bar{C}) = -\alpha^2\lambda v''(\alpha\bar{K}) + (1-\delta)[1 - \lambda(1-\delta)]u''(\bar{C})$$

and therefore, with $\bar{D} = \delta\bar{K}$ denoting the steady state value of D and assuming an interior solution for λ:

$$\lambda = \frac{(2-\delta)u''(\bar{C})}{\alpha^2 v''(\bar{D}) + [1 + (1-\delta)^2]u''(\bar{C})}. \tag{5}$$

(e) If we want to consider the case where $u = v$, a reasonable benchmark is obtained by imposing that the marginal utility from durable and non-durable services in the steady state are the same, that is, $u'(\bar{C}) = v'(\bar{D})$. From part (d) and the assumption $\beta = 1$ this implies $\alpha = \delta$.

Next, letting $\alpha = \delta$ and $u'' = v''$ in (5) we obtain:

$$\lambda = \frac{2-\delta}{2(1-\delta+\delta^2)},$$

and we have that $\lambda(\delta = 1) = 1/2$ and $\lambda(\delta = 0) = 1$, suggesting that λ is decreasing in δ. This is all you were asked to do. A straightforward calculation shows that the expression above is larger than one for $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, thus $\lambda = 1$ in this range. And another straightforward calculation shows that the expression above is decreasing in δ for $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$.