Fuente: Examen Final de Econometría II 2021

2. (35 puntos) Considere el siguiente modelo:

$$y_t = \beta x_t + u_t \tag{1}$$

que satisface los siguientes momentos:

$$0 = E(u_t) = E(u_t x_t) \tag{2}$$

donde x es una variable i.i.d. A su vez, se tiene que $E(x_t) = \mu$, $E(x_t^2) = \tau^2$, $E(u_t^2) = \sigma^2$, $E(u_t^2 x_t) = \delta$ y $E(u_t^2 x_t^2) = \gamma$ (todos parámetros no conocidos).

- **a) (5 puntos)** Sea $\hat{\beta}_1$ el estimador que resulta de minimizar la función objetivo GMM con los momentos de la ecuación (1) y la matriz de ponderaciones:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

  Derive su distribución asintótica.

- **b) (5 puntos)** Sea $\hat{\beta}_2$ el estimador que resulta de minimizar la función objetivo GMM con los momentos de la ecuación (1) y la matriz de ponderaciones:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

  Derive su distribución asintótica.

- **c) (20 puntos)** Derive la varianza asintótica del estimador GMM con la matríz de ponderación óptima.

- **d) (5 puntos)** Suponga ahora que los momentos de u y x satisfacen que $\delta = \sigma^2 \mu$ y $\gamma = \sigma^2 \tau^2$ (que ocurriría si u y x son independientes). Encuentre la varianza asintótica del estimador GMM con la matriz de ponderación óptima en este caso. ¿Se parece a alguna de las que obtuvo antes?