Microeconomía I
Ayudantía 4

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

Pregunta 1

Suponga que una firma utiliza capital y trabajo para producir unidades de un producto final mediante la siguiente función de producción $F(K, L)$, que representa su tecnología. Los costos del capital y trabajo son respectivamente $r > 0$ y $w > 0$.

a) Suponga que F es dos veces diferenciable. Encuentre las condiciones de optimalidad interiores del problema de minimización de costos para una producción de q_0 unidades del bien final.

b) Encuentre el capital y trabajo que minimizan el costo de producir q_0 unidades del bien final para la función de producción Cobb-Douglas $F = K^\alpha L^{1-\alpha}$, con $\alpha \in (0, 1)$. Encuentre el costo mínimo.

c) Encuentre el capital y trabajo que minimizan el costo de producir q_0 unidades del bien final para la función de producción Leontief $F = min\{\alpha K, \beta L\}$, con $(\alpha, \beta) \gg 0$. Encuentre el costo mínimo.

Pregunta 2

Suponga que una firma tiene una tecnología de producción representada por la función $F(K, L)$. Los costos del capital y trabajo son respectivamente $r > 0$ y $w > 0$.

a) Suponga que F es dos veces diferenciable. Encuentre las condiciones de optimalidad del problema de maximización de beneficios para una solución interior.

b) Encuentre el capital y trabajo que maximizan los beneficios para la función de producción Cobb-Douglas $F = K^\alpha L^\beta$, con $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$. Encuentre el beneficio máximo.

c) Suponga ahora que para que la firma pueda empezar a producir se tiene que cumplir que $L \geq \bar{L}$ y $K \geq \bar{K}$. Responda los ítems anteriores, Qué pasa cuando r o w es igual a cero? Compare con el caso $(r, w) \gg 0$.

Pregunta 3

Suponga que existen J plantas con tecnologías de un solo output. El costo promedio de la firma j es $AC_j(q_j) = \alpha + \beta_j q_j$, para $q_j \geq 0$. Considere el problema de determinar el plan de producción agregada que minimice el costo de producir un output total de q, donde $q < \alpha / max_j |\beta_j|$.

a) Si $\beta_j > 0$ para toda j, Cómo se debería asignar el output entre las J plantas?

b) Si $\beta_j < 0$ para toda j, Cómo se debería asignar el output entre las J plantas?

c) Y si $\beta_j < 0$ para algunas plantas y $\beta_j > 0$ para otras?

Pregunta 4

Muestre que si Y es cerrado, convexo y $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$, entonces se cumple la propiedad de free disposal.

Pregunta 5

Suponga que $f(\cdot)$ es la función de producción asociada a una tecnología de un solo output e Y es el conjunto de producción de esta teconología. Muestre que Y satisface retornos constantes a escala si y solo si $f(\cdot)$ es homogénea de grado 1.

Pregunta 6

Muestre que para una tecnología de un solo output, Y es convexo si y solo si la función de producción es cóncava.

Ayudantía 4

1] a) El problema es:

$$\min_{K,L} \quad wL + rK$$
$$\text{s.t} \quad F(K,L) \geq f_0$$

$$\mathcal{L} = wL + rK + \lambda\left[F(K,L) - f_0\right]$$

__CPO__

$$\left.\begin{aligned} K: &\quad r + \lambda F_K(K,L) = 0 \\ L: &\quad w + \lambda F_L(K,L) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \lambda = \frac{-r}{F_K(K,L)} = \frac{-w}{F_L(K,L)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{r}{w} = \frac{F_K(K,L)}{F_L(K,L)} \quad \text{(Condición de optimalidad)}$$

b) para el caso $F = K^\alpha L^{1-\alpha}$ tenemos:

$$F_K = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{K} F \quad , \quad F_L = (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} = \frac{(1-\alpha)}{L} F$$

$$\rightarrow \quad \frac{\frac{\alpha}{K} F}{\frac{(1-\alpha)}{L} F} = \frac{r}{w} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{K} w = \frac{(1-\alpha)}{L} r$$

$$\therefore \quad K^* = \frac{\alpha w L^*}{(1-\alpha) r} \quad , \quad L^* = \frac{(1-\alpha) r K^*}{\alpha w}$$

$$K^{\alpha} L^{1-\alpha} = f_0$$

$$\left[\frac{\alpha w L^*}{(1-\alpha)\Pi}\right]^{\alpha} L^{1-\alpha} = f_0 \qquad\qquad K^{*\alpha}\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\Pi K^*}{w}\right]^{1-\alpha} = f_0$$

$$L^* = \left[\frac{\alpha w}{(1-\alpha)\Pi}\right]^{-\alpha} f_0 \qquad\qquad K^* = \left[\frac{(1-\alpha)\Pi}{\alpha\, w}\right]^{\alpha-1} f_0$$

→ el costo mínimo es:

$$C^* = \Pi K^* + w L^* = \Pi\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\Pi}{w}\right]^{\alpha-1} f_0 + w\left[\frac{\alpha w}{(1-\alpha)\Pi}\right]^{-\alpha} f_0$$

$$= \Pi^{\alpha}\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right]^{\alpha-1} w^{1-\alpha} f_0 + \Pi^{\alpha}\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right]^{\alpha} w^{-\alpha} f_0$$

$$= \Pi^{\alpha} w^{-\alpha}\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right]^{\alpha} f_0\left[\frac{\alpha}{1-\alpha} w + 1\right]$$

$$= \left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\Pi}{w}\right]^{\alpha} f_0\left[\frac{\alpha}{1-\alpha} w + 1\right]$$

c) Como Π y w son positivos, en el óptimo $\alpha K^* = \beta L^*$

luego, $K^* = \dfrac{\beta L^*}{\alpha}$

$\to f(K^*, L^*) = \alpha K^* = \beta L^* = f_0 \to K^* = \dfrac{f_0}{\alpha}, \; L^* = \dfrac{f_0}{\beta}$

El costo mínimo es $C^* = \Pi K^* + w L^* = \Pi \dfrac{f_0}{\alpha} + w \dfrac{f_0}{\beta} = \left(\dfrac{\Pi}{\alpha} + \dfrac{w}{\beta}\right) f_0$

2| a) El problema se reduce a:

$$\max_{K,L} \quad \Pi = p \cdot F(K,L) - rK - wL$$

CPO: K: $\quad p \cdot F_K = r \qquad (1)$

L: $\quad p\, F_L = w \qquad (2)$

b| Para $F = K^\alpha L^\beta$

(1) $p \cdot \alpha K^{\alpha-1} L^\beta = r$

$p \cdot \frac{\alpha}{K} F = r$

$K = \frac{\alpha p \cdot F}{r}$

(2) $p \cdot \beta K^\alpha L^{\beta-1} = w$

$p \cdot \frac{\beta}{L} F = w$

$L = \frac{\beta p F}{w}$

$$\rightarrow F^\alpha = K^{\alpha\alpha} L^{\alpha\beta} = \left[\frac{\alpha p \cdot F}{r}\right]^\alpha \left[\frac{\beta p \cdot F}{w}\right]^\beta$$

$$\rightarrow F^{1-\alpha-\beta} = \left[\frac{\alpha p}{r}\right]^\alpha \left[\frac{\beta p}{w}\right]^\beta$$

$$F^* = \left[\frac{\alpha p}{r}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left[\frac{\beta p}{w}\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

$$\rightarrow K^* = \frac{\alpha p \cdot F^*}{r} = \left[\frac{\alpha p}{r}\right]^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\frac{\beta p}{w}\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

$$L^* = \frac{\beta p \cdot F^*}{w} = \left[\frac{\alpha p}{r}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left[\frac{\beta p}{w}\right]^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

Luego, el beneficio max es $\Pi^* = p \cdot F^* - rK^* - wL^*$

c) En este caso el problema es:

$$\max_{K,L} \quad \Pi = P\cdot F - rK - wL$$

$$\text{s.t.} \quad L \geq \bar{L} \;, \; K \geq \bar{K}$$

luego, $\mathcal{L} = P\cdot F - rK - wL + \lambda(L-\bar{L}) + \eta(K-\bar{K})$

<u>CPO</u>:

$K: \; P\cdot F_K - r + \eta = 0 \;\rightarrow\; P\cdot F_K = r - \eta \;,\; \eta \geq 0 \;,\; \eta(K-\bar{K}) = 0$

$L: \; P\cdot F_L - w + \lambda = 0 \;\rightarrow\; P\cdot F_L = w - \lambda \;,\; \lambda \geq 0 \;,\; \lambda(L-\bar{L}) = 0$

$\rightarrow P\cdot F_K < r$ si $K = \bar{K}$ (la restricción está activa)

$P\cdot F_L < w$ si $L = \bar{L}$

o $P\cdot F_K = r$ si $K^* > \bar{K}$

$P\cdot F_L = w$ si $L^* > \bar{L}$

Por otro lado, si las restricciones no están activas entonces el problema es idéntico al anterior. De lo contrario tomarán los valores $\bar{K}$ o $\bar{L}$ y se tendrían que rehacer nuevamente los cálculos. Por ej si sólo para K la restricción está activa, entonces:

$$K = \bar{K} \quad \text{y} \quad L = \frac{\beta P\cdot F}{w} \;\rightarrow\; F^* = \bar{K}^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \left[\frac{\beta P}{w}\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

3) a) el costo marginal de la planta j es:

$$Cmg_j(f_j) = \alpha + 2\beta_j f_j$$, dado que el costo $C_j = \alpha f_j + \beta_j f_j^2$

Como los $\beta_j > 0$ entonces el costo marginal será creciente, esto implica que los costos marginales de las firmas se deben igualar (por qué?)

Luego, $$\cancel{\alpha} + 2\beta_j f_j = \alpha + 2\beta_i f_i \quad \forall j \in \{1, \dots, J\}$$

$$f_j = \frac{\beta_i f_i}{\beta_j} \quad \forall j \in \{1, \dots, J\}$$

Sumando tenemos que $$\sum_j f_j = \sum_j \frac{\beta_i f_i}{\beta_j} = \beta_i f_i \sum_j \frac{1}{\beta_j} = f$$

$$\rightarrow f_i = \frac{f}{\beta_i \sum_j \frac{1}{\beta_j}} \rightarrow f_j = \frac{\beta_i f_i}{\beta_j} = \frac{f}{\beta_j \sum_j \frac{1}{\beta_j}} \quad \forall j$$

b) Si al menos para un $j \in \{1, \dots, J\}$ $\beta_j < 0$, entonces el costo marginal será decreciente y $\therefore$ se minimizará el costo concentrando la producción en la planta con el mayor $|\beta_j|$ entre las firmas con $\beta_j < 0$

c) sigue de lo anterior

4) Free disposal $\leftrightarrow$ $y \in Y$ y $y' \leq y$, entonces $y' \in Y$.

Suponga que $y \in Y$ y $v \in -\mathbb{R}_+^L$. Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$ $nv \in -\mathbb{R}_+^L$ y $nv \in Y$ ya que $-\mathbb{R}_+^L \subset Y$.

Como Y es convexo:

$$(1-\tfrac{1}{n})y + \tfrac{1}{n} nv = (1-\tfrac{1}{n})y + v \in Y$$

Como Y es cerrado, $\lim\limits_{n\to\infty} \{(1-\tfrac{1}{n})y + v\} = y+v \in Y$ //

5) Suponga que Y exhibe retornos constantes a escala, $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ y $\alpha > 0$. Luego, $(-z, f(z)) \in Y$ implica por los RCE que $(-\alpha z, \alpha f(z)) \in Y$. Así por definición $\alpha f(z) \leq f(\alpha z)$, aplicando esta desigualdad para αz en lugar de z y α^{-1} en lugar de α, tenemos que $\alpha^{-1} f(\alpha z) \leq f(\alpha^{-1}(\alpha z)) \leftrightarrow f(\alpha z) \leq \alpha f(z)$.

$\therefore$ $f(\alpha z) = \alpha f(z)$ y concluimos que f es HG-1.

Ahora suponga que $f(\cdot)$ es $H.G-1$.
Fije $(-z, q) \in Y$ y $\alpha \geq 0$, luego $q \leq f(z)$

$\rightarrow \alpha q \leq \alpha f(z) \leq f(\alpha z)$.

Dado que $(-\alpha z, f(\alpha z)) \in Y$, obtenemos que
$(-\alpha z, \alpha q) \in Y \rightarrow Y$ satisface RCE. //

6) Suponga que Y es convexo. Fije $z, z' \in \mathbb{R}^{L-1}_+$ y $\alpha \in (0,1)$, luego $(-z, f(z)) \in Y$ y $(-z', f(z')) \in Y$. La convexidad nos asegura que:

$$\{-(\alpha z + (1-\alpha) z'),\ \alpha f(z) + (1-\alpha) f(z')\} \in Y$$

luego, $\alpha f(z) + (1-\alpha) f(z') \leq f(\alpha z + (1-\alpha) z')$

Esto es $f(\cdot)$ es cóncava.

Ahora, suponga que $f(\cdot)$ es cóncava. Fije $(-z, f) \in Y$ $(-z', f') \in Y$ y $\alpha \in (0,1)$, luego $f \leq f(z)$ y $f' \leq f(z')$.

$$\rightarrow \quad \alpha f + (1-\alpha) f' \leq \alpha f(z) + (1-\alpha) f(z')$$

por otro lado, la concavidad nos asegura:

$$\alpha f(z) + (1-\alpha) f(z') \leq f(\alpha z + (1-\alpha) z')$$

$$\rightarrow \quad \alpha f + (1-\alpha) f' \leq f(\alpha z + (1-\alpha) z')$$

y $\{-(\alpha z + (1-\alpha) z'),\ \alpha f + (1-\alpha) f'\} \in Y$

$$\leftrightarrow \quad \alpha(-z, f) + (1-\alpha)(-z', f') \in Y, \ \therefore\ Y \text{ es convexo.}$$