Guía 1, Segunda Parte

Nombre: Alberto Belmar
Rut: 19.801.271-8

1. Gasto de Gobierno en el modelo de Solow

a.

Respuesta

Sabemos que el ingreso del Gobierno proviene de los impuestos, por lo tanto, al haber Gobierno en esta economía, es lógico pensar que el consumo de los hogares se verá afectado por la fracción de ingresos que recibe el Gobierno (proveniente de impuestos), ya que disminuye el ingreso disponible que estos poseen. Luego, el consumo vendrá dado por:

$$\begin{aligned} C(t) &= (1-s)(Y(t)-G(t)) \\ &= (1-s)(Y(t)-\sigma Y(t)) \\ &= (1-s)(1-\sigma)Y(t) \end{aligned}$$

La expresión anterior, ilustra la inclusión del Gobierno en el modelo de Solow, a diferencia de la ecuación del enunciado, donde se muestra el consumo sólo como en función s, olvidando el término $(1-\sigma)$.

b.

Respuesta

La ecuación dinámica del capital en tiempo discreto es de la forma:

$$K(t+1) = I(t) + (1-\delta)K(t)$$

Luego, reemplazando $I(t) = Y(t) - C(t) - G(t)$ y posteriormente reemplazando $C(t)$ y $G(t)$ por las expresiones del enunciado, tenemos que:

$$\begin{aligned} K(t+1) &= Y(t) - C(t) - G(t) + (1-\delta)K(t) \\ &= Y(t) - (1-s-\lambda\sigma)Y(t) - \sigma Y(t) + (1-\delta)K(t) \\ &= (s-(1-\lambda)\sigma)Y(t) + (1-\delta)K(t) \end{aligned}$$

Si dejamos todo en términos per cápita al dividir por $L(t)$:

$$k(t+1) = (s-(1-\lambda)\sigma)f(k(t)) + (1-\delta)k(t) \tag{1}$$

Lo anterior, teniendo en cuenta que $f(k(t)) = \frac{Y(t)}{L(t)}$. Por lo tanto, a patir de la última expresión, podemos ver que aumentos de σ provocarán una dismiución del capital efectivo por trabajador $k(t+1)$.

De forma intuitiva, podemos decir que aumentos en el gasto de Gobierno reduce el ingreso disponible de los hogares como consecuencia de un mayor impuesto, lo que a su vez provoca una caída en ahorro agregado, por lo que el capital de equilibrio cae.

Ahora bien, para ilustrar lo que se ha dicho, reescribimos la ecuación (1), reemplazando $f(k(t)) = k(t)^{\alpha}$, al considerar una Cobb-Douglas sin tecnología y en formato per cápita, por ende:

$$k(t+1) - k(t) = (s - (1-\lambda)\sigma)k(t)^{\alpha} - \delta k(t)$$

Si imponemos $k(t+1) - k(t) = 0$ por el estado estacionario y despejamos $k(t)$, nos queda:

$$\begin{aligned} (s - (1-\lambda)\sigma)k(t)^{\alpha} &= \delta k(t) \\ \frac{k(t)}{k(t)^{\alpha}} &= \frac{s - (1-\lambda)\sigma}{\delta} \\ k_{EE} &= \left[\frac{s - (1-\lambda)\sigma}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Notamos que aumentos de σ en el equilibrio hacen disminuir k_{EE}. Por ende, al incluir el consumo del Gobierno, se alcanza un menor capital de estado estacionario.

Por otra parte, la fracción del gasto de Gobierno que afecta el consumo, λ, tiene el efecto contrario, ya que mientras mayor sea λ, mayor será k_{EE}. Esto se da porque, al aumentar λ, cae el consumo en respuesta a los impuestos, pero aumenta el ahorro y la inversión, lo que provoca mayor capital efectivo por trabajador en estado estacionario.

c.

Respuesta

Nuevamente comenzamos con la ecuación dinámica del capital en tiempo discreto:

$$K(t+1) = I(t) + (1-\delta)K(t)$$

No obstante, ahora reemplazamos $I(t) = (s - (1-\lambda)\sigma + \phi\sigma)Y(t)$:

$$\begin{aligned} K(t+1) &= (s - (1-\lambda)\sigma + \phi\sigma)Y(t) + (1-\delta)K(t) \\ K(t+1) - K(t) &= (s - (1-\lambda)\sigma + \phi\sigma)Y(t) - \delta K(t) \end{aligned}$$

En términos per cápita, considerando el estado estacionario y que $f(k(t)) = k(t)^{\alpha}$:

$$\begin{aligned} (s - (1-\lambda)\sigma + \phi\sigma)k(t)^{\alpha} &= \delta k(t) \\ \frac{k(t)}{k(t)^{\alpha}} &= \frac{s - (1-\lambda)\sigma + \phi\sigma}{\delta} \\ k_{EE} &= \left[\frac{s - (1-\lambda)\sigma + \phi\sigma}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

De la expresión anterior, notamos que ϕ afecta positivamente k_{EE}. Además, el mayor gasto de Gobierno ($\uparrow \sigma$) afectará positivamente k_{EE} cuando $1-\lambda < \phi$, de lo contrario, si $1-\lambda > \phi$, afectará negativamente, mientras que si $1-\lambda = \phi$, no afectará. Por ende, si ϕ es lo suficientemente grande, el ratio capital-trabajo de estado estacionario (k_{EE}) va a aumentar como resultado de un mayor gasto de Gobierno.

Por otro lado, considerando que λ es la caída del consumo en base al gasto de Gobierno, $1-\lambda$ es la caída del ahorro por el aumento del gasto de Gobierno (en base a impuestos) y que ϕ simboliza la inversión pública; para que aumentos de σ provoquen aumentos de k_{EE}, el porcentaje de lo recaudado por el Gobierno y que es usado en inversión pública tiene que ser mayor que el porcentaje de ahorro que disminuye por el aumento de los impuestos.

Por último, para que se cumpla lo anterior, el Gobierno podría estar ahorrando gran parte de los impuestos (ϕ alto) o la fracción del consumo podría caer más dado el aumento de impuestos (λ alto). Sin embargo, ninguna de las dos opciones es muy convincente, ya que en primer lugar, el Gobierno recauda impuestos para sustentar más gasto, no para aumentar el ahorro de la economía, y en segundo lugar, los individuos suavizan su consumo a lo largo del tiempo, por lo que es difícil que disminuyan sustancialmente su consumo por aumentos de impuestos.

2. Modelo de Solow: tres factores productivos

a.

Respuesta

Comenzamos con una definición vista en clases, donde se realiza la derivada de $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ con respecto al tiempo, pero considerando que no hay crecimiento de población ($\dot{L}(t) = 0$), entonces:

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{\partial(K(t)/L(t))}{\partial t} \\
&= \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{(L(t))^2} \\
&= \frac{\dot{K}(t)}{L(t)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede definir $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)}$. Luego, utilizando la clásica ecuación para $\dot{K}(t)$, definiendo $Y(t)$ según el enunciado y dividiendo todo por $K(t)$, llegamos a:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} &= \frac{[sL(t)^{\beta}K(t)^{\alpha}Z^{1-\alpha-\beta}] \cdot \frac{1}{L(t)^{\beta+\alpha}} \frac{1}{L(t)^{1-\alpha-\beta}}}{[K(t)] \cdot \frac{1}{L(t)}} - \delta \\
&= sk(t)^{\alpha-1}z^{1-\alpha-\beta} - \delta
\end{aligned}$$

Donde en la última ecuación se define $z = \frac{Z}{L(t)}$. Luego, para encontrar el capital de estado estacionario, hacemos que $\dot{k}(t) = 0$ y despejamos $k(t)$, resultando:

$$\begin{aligned}
sk(t)^{\alpha-1}z^{1-\alpha-\beta} &= \delta \\
k(t)^{1-\alpha} &= \frac{sz^{1-\alpha-\beta}}{\delta} \\
k_{EE} &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} z^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto por trabajador, $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$, sería:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{L(t)^{\beta} K(t)^{\alpha} Z^{1-\alpha-\beta}}{L(t)^{\beta+\alpha} L(t)^{1-\beta-\alpha}} \\ &= k(t)^{\alpha} z^{1-\alpha-\beta} \end{aligned}$$

De esta forma, el producto en estado estacionario:

$$\begin{aligned} y_{EE} &= k_{EE}^{\alpha} z^{1-\alpha-\beta} \\ &= \left[\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} z^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}} \right]^{\alpha} z^{1-\alpha-\beta} \\ &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Por último, para probar que el estado estacionario es único y globalmente estable, notamos que la dinámica del capital $\dot{k}(t)$ es cóncava en $k(t)$ puesto que $\alpha,\ \delta > 0$, y es igual a 0 en estado estacionario. Por lo tanto, tendremos que:

$$\dot{k}(t) \begin{cases} > 0 & \text{si } k(t) \in (0, k_{EE}) \\ < 0 & \text{si } k(t) \in (k_{EE}, \infty) \end{cases}$$

Por ende, se generan sendas estables hacia el estado estacionario para cualquier $k(t)$ mayor a cero, ya que $k(t)$ crece entre $0 < k(t) < k_{EE}$ y decrece entre $k_{EE} < k(t) < \infty$. Luego, tenemos que el ratio capital-trabajo en el largo plazo (estado estacionario) convergerá a k_{EE}.

b.

Respuesta

En este caso con crecimiento de la población igual a $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n$, la derivada en el tiempo de $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ no será igual que antes, ahora quedaría:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{\partial (K(t)/L(t))}{\partial t} \\ &= \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{[L(t)]^2} \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - k(t)n \end{aligned}$$

De esta forma, podemos definir $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - n$. Por lo tanto, tendremos que:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sk(t)^{\alpha-1} z(t)^{1-\alpha-\beta} - (\delta + n)$$

Por otra parte, producto del crecimiento de la población, la tierra por trabajador $z(t) = \frac{Z(t)}{L(t)}$

comenzará a variar en el tiempo, por lo que, si calculamos su derivada con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \frac{\partial(Z(t)/L(t)}{\partial t} \\
&= \frac{\dot{Z}(t)L(t) - Z\dot{L}(t)}{L(t)^2} \\
&= -\frac{Z(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \\
&= -z(t)n
\end{aligned}$$

Así, tendremos que las dinámicas que regirán el equilibrio en este problema serán:

$$\dot{k}(t) = sk(t)^{\alpha}z(t)^{1-\alpha-\beta} - (\delta+n)k(t) \tag{2}$$

$$\dot{z}(t) = -z(t)n \tag{3}$$

Ahora bien, vemos que la ecuación (3) tiene como solución $z(t) = z(0)e^{-nt}$. Por ende, aplicando límite a esta expresión:

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

Luego, si reemplazamos la expresión de $z(t)$ en (2) y divimos por $k(t)$, para posteriormente poder ocupar el hint, resulta:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sk(t)^{-(1-\alpha)}z(0)^{1-\alpha-\beta}e^{-nt(1-\alpha-\beta)} - (\delta+n)$$

Por ende, nos encontramos frente a una ecuación diferencial no lineal, para lo cual usamos el hint y la transformamos en una ecuación diferencial lineal, quedando:

$$\dot{x}(t) = (1-\alpha)\left[sz(0)^{1-\alpha-\beta}e^{-nt(1-\alpha-\beta)} - (\delta+n)x(t)\right]$$

Luego, la solución de esta ecuación diferencial será:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t}\left[x(0) + \int_0^t s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}e^{(n\beta+(1-\alpha)\delta)t}dt\right] \\
&= \left[x(0) - \frac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}\right]e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} + s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}\frac{e^{-n(1-\alpha-\beta)t}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}
\end{aligned}$$

Ahora, usando la expresión de $x(t)$ pero en $k(t)$ tenemos:

$$k(t) = \left[\left(k(0)^{1-\alpha} - \frac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} + \frac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}e^{-n(1-\alpha-\beta)t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Luego, teniendo en cuenta que $\alpha+\beta<1$, si aplicamos el límite con t tendiendo a infinito a la expresión anterior, tendremos que $\lim_{t\to\infty} k(t) = 0$.

Con lo anterior, hemos demostrado que $k(t)$ y $z(t)$ tienden a 0 en el límite desde cualquier posición inicial. Por lo tanto, en estado estacionario tendremos que $k_{EE} = z_{EE} = 0$.

Ahora bien, para evaluar la tendencia del producto, nos centramos primero en el capital a nivel agregado:

$$\begin{aligned}
K(t) &= k(t)L(t) \\
&= k(t)L(0)e^{nt} \\
&= \left[\left(k(0)^{1-\alpha} - \frac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} + \frac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}e^{-n(1-\alpha-\beta)t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} L(0)e^{nt} \\
&= \left[\left(k(0)^{1-\alpha} - \frac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}\right)e^{-(1-\alpha)\delta t} + \frac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}e^{n\beta t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} L(0)
\end{aligned}$$

Si aplicamos una vez más el límite con t tendiendo a infinito, tendremos que el término de más a la izquierda se va a 0 y el de más a la derecha se va al infinito, por lo que $\lim_{t\to\infty} K(t) = \infty$. Entonces, notanos que el capital agregado crecerá a tasa $n\beta/(1-\alpha) < n$, puesto que $\alpha + \beta < 1$. De esta forma, como el producto está en función del capital agregado, también tenderá a infinito.

Con respecto a la tierra y los salarios, vamos a asumir que el mercado de la tierra es competitivo con un precio p_z. Así, los retornos de la tierra se obtienen de la condición que rige en competencia perfecta, es decir $p_z = PmgZ$, por lo cual:

$$p_z(t) = (1-\alpha-\beta)L(t)^{\beta}K(t)^{\alpha}Z^{-\alpha-\beta}$$

Y como $K(t)$ y $L(t)$ crecen en el tiempo, tendremos que los retornos de la tierra tenderán a infinito. De forma intuitiva, la tierra juega el rol de factor escaso, ya que es un bien que se encuentra en una cantidad limitada Z. De esta forma, cuando crecen los otros factores como el trabajo $(L(t))$ y el capital $(K(t))$, el producto marginal de la tierra también crecerá.

Por último, también asumimos competencia perfecta en el mercado del trabajo, por lo cual, el salario sigue la condición de optimalidad $w = PmgL$. Así:

$$\begin{aligned}
w &= \beta L(t)^{\beta-1}K(t)^{\alpha}Z^{1-\alpha-\beta} \\
&= \beta k(t)^{\alpha}z(t)^{1-\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

Luego, como ya vimos que $k(t)$ y $z(t)$ tienden a 0 cuando t tiende a infinito, entonces el salario (w) también tenderá a 0. De forma intuitiva, como la cantidad de capital y tierra por trabajador disminuye en el tiempo, también disminuye la productividad marginal del trabajo, lo que produce finalmente la disminución del salario.

c.

Respuesta

Sí, se esperaría que el crecimiento de la población n o la tasa de ahorro s cambien en el tiempo, pues aunque el modelo los asume invariantes, si pensamos por ejemplo en la tasa de ahorro s, esta podría depender de preferencias intertemporales de los agentes o los precios.

Luego, si nos fijamos en el modelo anterior, los resultados de los límites se mantendrán independiente del valor que tome s. Por tanto, no cambia la forma de caracterizar la economía en el límite respecto a la letra anterior.

Por otro lado, podemos pensar en n como una función del producto por trabajador. Una intuición simple es que a mayor producto per cápita, las personas tienen un mejor estilo de vida, no sufren necesidades, presentan mejor salud, etc., lo que les permitiría tener una mayor cantidad de hijos. Es decir, el efecto sería $n'(y) > 0$.

A partir de lo anterior, podemos inferir que cuando el producto tiende al infinito positivo, la tasa de crecimiento converge a $\bar{n} > 0$, mientras que al infinito negativo converge a $\underline{n} < 0$. Lo que quiere decir que existe un y^* que provoca que $n(y^*) = 0$, lo que permitiría encontrar el sistema único en estado estacionario.

3. Embodied technological progress

a.

Respuesta

Para comenzar, dividimos el término $Y(t)$ por $A(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L(t)$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(t)}{A(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L(t)} &= \left(\frac{A(t)K(t)}{A(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L(t)}\right)^{\alpha}\left(\frac{L(t)}{A(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L(t)}\right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{A(t)^{1-\frac{\alpha}{1-\alpha}}K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} A(t)^{-\alpha} \\
&= \left(\frac{K(t)}{A(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L(t)}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

Luego, si definimos $\phi = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)^{\phi}L(t)}$ y también $y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)^{\phi}L(t)}$, tendremos que: $y(t) = k(t)^{\alpha}$. Así, para analizar la dinámica, tomamos la derivada de $k(t)$ con respecto al tiempo, resultando:

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)(A(t)^{\phi}L(t)) - K(t)[\phi A(t)^{\phi-1}\dot{A}(t)L(t) + A(t)^{\phi}\dot{L}(t)]}{(A(t)^{\phi}L(t))^2}$$

Utilizando ahora la expresión de $k(t)$, junto con $\mu = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$ y $n = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$, tendremos que:

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{A(t)^{\phi}L(t)} - k(t)(\phi\mu + n)$$

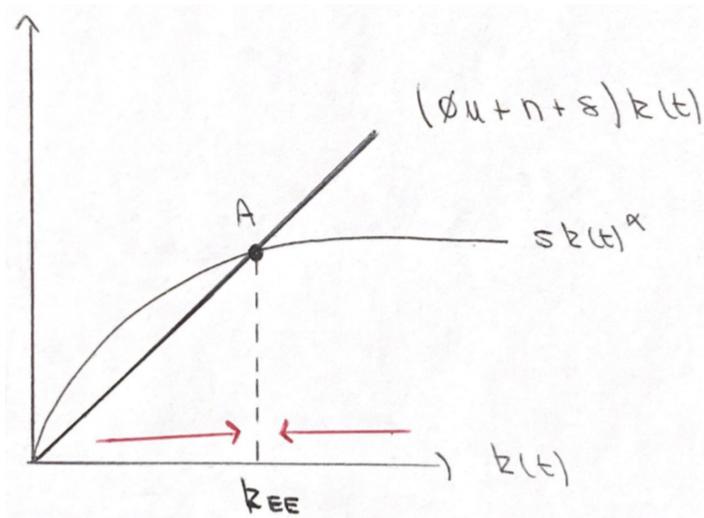
Si ocupamos la ecuación de la evolución del capital $\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$ y reemplazamos esto en la ecuación que veníamos trabajando:

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)^{\phi}L(t)} - k(t)(\phi\mu + n) \\
&= sy(t) - (\phi\mu + n + \delta)k(t) \\
&= sk(t)^{\alpha} - (\phi\mu + n + \delta)k(t)
\end{aligned}$$

De esta forma, podemos usar una dinámica similar al modelo de Solow típico, pero ahora es en base a unidades de $A(t)^{\phi}L(t)$.

Entonces, si $sk(t)^{\alpha} > (\phi\mu + n + \delta)k(t)$, el capital crece hacia k_{EE}, mientras que si $sk(t)^{\alpha} < (\phi\mu + n + \delta)k(t)$, el capital disminuye hacia el nivel de estado estacionario. Por ende, la economía converge a k_{EE}, de la misma forma $y_{EE} = k_{EE}^{\alpha}$.

Gráficamente:



Finalmente, podemos escribir $K(t) = A(t)^{\phi}L(t)k_{EE}$, tomando el k_{EE} de la senda óptima como una constante. Con lo anterior, podemos encontrar la tasa de crecimiento de $K(t)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\log K(t) &= \phi \log A(t) + \log L(t) + \log k_{EE} \\
\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} &= \phi\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + 0 \cdot \frac{\dot{k}_{EE}}{k_{EE}} \\
&= \phi\mu + n
\end{aligned}$$

Lo anterior, utilizando la aproximación log diferencial. Por lo tanto, para el producto tendríamos $Y(t) = A(t)^{\phi}L(t)y_{EE}$ y con el procedimiento anterior, llegamos a la misma tasa de crecimiento del capital para el producto, es decir, $\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \phi\mu + n$ para esta senda estable de crecimiento.

b.

Respuesta

Al igual que la letra anterior, comenzamos por dividir el término $Y(t)$ en $A(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L(t)$ y además ocupamos como uno conveniente $\frac{A(t)}{A(t)}$ para formar el término $\bar{J}(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{Y(t)}{A(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L(t)} &= \frac{(A(t)\bar{J}(t))^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}}{A(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L(t)} \\ &= \left(\frac{\bar{J}(t)}{A(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L(t)}\right)^{\alpha}\end{aligned}$$

Al igual que antes, definimos $\phi = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, $\bar{j}(t) = \frac{\bar{J}(t)}{A(t)^{\phi}L(t)}$ e $y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)^{\phi}L(t)}$, entonces: $y(t) = \bar{j}(t)^{\alpha}$; por lo que si tomamos la derivada de $\bar{j}(t)$ con respecto al tiempo, quedaría:

$$\dot{\bar{j}}(t) = \frac{\dot{\bar{J}}(t)(A(t)^{\phi}L(t)) - \bar{J}(t)(\phi A(t)^{\phi-1}\dot{A}(t)L(t) + A(t)^{\phi}\dot{L}(t))}{(A(t)^{\phi}L(t))^2}$$

Luego, ocupando al igual que antes la expresión de $\bar{j}(t)$, junto con $\mu = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$ y $n = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$, tenemos que:

$$\dot{\bar{j}}(t) = \frac{\dot{\bar{J}}(t)}{A(t)^{\phi}L(t)} - \bar{j}(t)(\phi\mu + n) \tag{4}$$

Ahora bien, intentaremos encontrar el término $\dot{\bar{J}}(t)$ para despejar la ecuación anterior. Teniendo en cuenta que $\bar{J}(t) = \frac{J(t)}{A(t)}$ y tomando la derivada con respecto tiempo:

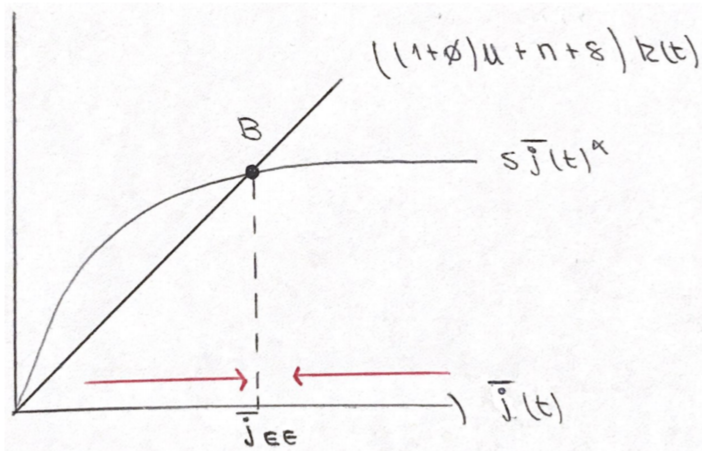
$$\begin{aligned}\dot{\bar{J}}(t) &= \frac{\dot{J}(t)A(t) - J(t)\dot{A}(t)}{(A(t))^2} \\ &= \frac{sA(t)Y(t) - \delta J(t)}{A(t)} - \mu\bar{J}(t) \\ &= sY(t) - \delta\bar{J}(t) - \mu\bar{J}(t) \\ &= sY(t) - (\mu+\delta)\bar{J}(t)\end{aligned}$$

Reemplazando $\dot{\bar{J}}(t)$ en (4):

$$\begin{aligned}\dot{\bar{j}}(t) &= \frac{sY(t) - (\mu+\delta)\bar{J}(t)}{A(t)^{\phi}L(t)} - \bar{j}(t)(\phi\mu + n) \\ &= sy(t) - (\mu(1+\phi) + \delta + n)\bar{j}(t) \\ &= s\bar{j}(t)^{\alpha} - (\mu(1+\phi) + \delta + n)\bar{j}(t)\end{aligned}$$

De esta forma, podemos utilizar una dinámica similar al modelo clásico de Solow, considerando $\bar{j}(t) > 0$. Así, cuando $s\bar{j}(t)^{\alpha} > (\mu(1+\phi) + n + \delta)\bar{j}(t)$, el capital crece hacia $\bar{j}_{EE}$, mientras que si $s\bar{j}(t)^{\alpha} < (\mu(1+\phi) + n + \delta)\bar{j}(t)$, el capital disminuye hacia $\bar{j}_{EE}$. Por ende, la economía converge a $\bar{j}_{EE}$ y de la misma forma $y_{EE} = \bar{j}_{EE}^{\alpha}$.

Gráficamente:



Finalmente, podemos escribir $\bar{J}(t) = A(t)^\phi L(t)\bar{j}_{EE}$, tomando el $\bar{j}_{EE}$ de la senda óptima como una constante, lo que permite encontrar la tasa de crecimiento para $\bar{J}(t)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\log \bar{J}(t) &= \phi \log A(t) + \log L(t) + \log \bar{j}_{EE} \\
\frac{\dot{\bar{J}}(t)}{\bar{J}(t)} &= \phi \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + 0 \cdot \frac{\dot{\bar{j}}^{EE}}{\bar{j}^{EE}} \\
&= \phi\mu + n
\end{aligned}$$

Para llegar a $\frac{\dot{J}(t)}{J(t)}$, tomamos el hecho de que $J(t) = \bar{J}(t)A(t)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{J}(t)}{J(t)} &= \frac{\dot{\bar{J}}(t)}{\bar{J}(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \\
&= \phi\mu + n + \mu \\
&= (1+\phi)\mu + n
\end{aligned}$$

Por último, para el producto, tendríamos que $Y(t) = A(t)^\phi L(t) y_{EE}$, y con el procedimiento anterior, llegamos a la misma tasa de crecimiento $\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \phi\mu + n$ sobre la senda estable de crecimiento.

c.

Respuesta

Tenemos que en estado estacionario se cumple que $\dot{\bar{j}}(t) = 0$, por lo que, despejando $\bar{j}_{EE}$ y evaluando $y(t)$ para encontrar y_{EE}:

$$\begin{aligned}
\bar{j}_{EE} &= \left[\frac{s}{\mu(1+\phi)+\delta+n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
y_{EE} &= \left[\frac{s}{\mu(1+\phi)+\delta+n}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la elasticidad del producto respecto a s viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\eta = \frac{\partial y_{EE}}{\partial s}\frac{s}{y_{EE}} &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{s}{\mu(1+\phi)+\delta+n}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1}{\mu(1+\phi)+\delta+n}\left[\frac{s}{\mu(1+\phi)+\delta+n}\right]^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}s\\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{\mu(1+\sigma)+\delta+n}{s}\right]\left[\frac{s}{\mu(1+\sigma)+\delta+n}\right]\\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\end{aligned}$$

d.

Respuesta

Para realizar esta parte, ocupamos una aproximación de Taylor de primer orden alrededor del producto de estado estacionario ($y = y_{EE}$), que es de la forma: $\dot{y}(t) \approx \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y(t)}\Big|_{y=y_{EE}}(y - y_{EE})$. Luego, trabajamos la expresión $\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y(t)}\Big|_{y=y_{EE}}$ con el fin de darle alguna forma.

Si tomamos la derivada de $y(t)$ con respecto al tiempo, queda:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \alpha\bar{j}^{\alpha-1}\dot{\bar{j}}(t)\\ &= \alpha\bar{j}^{\alpha-1}(s\bar{j}(t)^{\alpha} - (\mu(1+\phi)+n+\delta)\bar{j}(t))\\ &= s\alpha y(t)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} - \alpha y(t)(\mu(1+\phi)+n+\delta)\end{aligned}$$

Se llega a la última expresión considerando que $\bar{j}(t) = y(t)^{\frac{1}{\alpha}}$. Ahora, si derivamos con respecto a y, obtenemos:

$$\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y(t)} = s(2\alpha-1)y(t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \alpha(\mu(1+\phi)+n+\delta)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $y(t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \bar{j}(t)^{-(1-\alpha)}$ y que $s = \bar{j}(t)^{1-\alpha}(\mu(1+\phi)+n+\delta)$, si reemplazamos esto en la ecuación que teníamos para $\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y(t)}$, quedaría:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y(t)} &= \bar{j}(t)^{1-\alpha}(\mu(1+\phi)+n+\delta)(2\alpha-1)\bar{j}(t)^{-(1-\alpha)} - \alpha(\mu(1+\phi)+n+\delta)\\ &= -(1-\alpha)(\mu(1+\phi)+n+\delta)\end{aligned}$$

Reemplazando esta última expresión en la aproximación de Taylor que teníamos al comienzo, donde $\dot{y}(t) \approx \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y(t)}\Big|_{y=y_{EE}}(y - y_{EE})$:

$$\dot{y}(t) = -(1-\alpha)(\mu(1+\phi)+n+\delta)(y(t) - y_{EE})$$

Por último, si resolvemos la ecuación diferencial, llegamos a:

$$y(t) - y_{EE} = e^{-(1-\alpha)(\mu(1+\phi)+n+\delta)t}(y(0) - y^{EE})$$

Por ende, la velocidad de convergencia de la economía a la senda de crecimiento estable viene dada, en este caso, por:

$$(1-\alpha)(\mu(1+\phi)+n+\delta)$$

.

e.

Respuesta

La velocidad de convergencia en el típico modelo de Solow viene dada por:

$$(1-\alpha)(\mu+n+\delta)$$

que es menor a la término $(1-\alpha)(\mu(1+\phi)+n+\delta)$ puesto que $\phi>0$. Por ende, podemos decir que este modelo converge más rápido al estado estacionario que el modelo clásico. Por otra parte, tendremos que la elasticidad del producto con respecto a s será la misma para los dos modelos.