Fuente: Examen Final de Econometría II 2021

3. (35 puntos) Tenemos: $M_1 : y_t = \alpha_1 y_{t-1} + u_t$, $M_2 : y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + u_t$, donde $u_t \sim N(0, \sigma^2)$, que satisfacen las condiciones de estacionareidad débil en ambos casos. (a) **(5 puntos)** La manera más simple de demostrar encompasamiento parsimonioso de M_1 es demostrando que al estimar M_2, la hipótesis $H_0 : \beta_2 = 0$ no es rechazada. (b) **(5 puntos)** Si M_2 es correcto, se sabe que: $\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2} \xrightarrow{p} \rho_1 = \frac{\beta_1}{1-\beta_2}$. Por ende, si $\beta_2 \neq 0$, puede predecirse la dirección de subestimación de β_1 que se obtiene con $\hat{\alpha}_1$. Por otro lado, si M_2 es correcto, M_1 no satisfará el aspecto de pasado relativo, debido a que sus errores no serán ruido blanco. (c) **(10 puntos)** Asumiendo que M_1 es correcto, tenemos como momento poblacional a: $E(y_{t-j} u_t) = 0$, para cualquier $j > 1$. Su contraparte muestral es: $\frac{1}{T-j} \sum_{t=j+1}^{T} y_{t-j}(y_t - \hat{\alpha}_1 y_{t-1}) = 0$. Por lo tanto, $\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum y_t y_{t-j}}{\sum y_{t-1} y_{t-j}} \xrightarrow{p} \frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}} = \alpha_1$. Este estimador equivale al estimador estándar de IV con $z_t = y_{t-j}$ como el instrumento. (d) **(15 puntos)** Asumiendo que M_1 es correcto, tenemos como momentos poblacionales a: $E(y_{t-j} u_t) = 0$, $E(y_{t-j-1} u_t) = 0$, para $j = 2$. Por analogía al caso anterior, podemos considerar al estimador GMM como el correspondiente al estimador IV con instrumentos $z_t = y_{t-2}, y_{t-3}$. Entonces: $\hat{\alpha}_1 = [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y$, donde: $\frac{1}{T}Z'X \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}'$, $\frac{1}{T}Z'Y \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}'$, $\frac{1}{T}Z'Z \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix}$, $(\frac{1}{T}Z'Z)^{-1} \xrightarrow{p} \frac{1}{\gamma_0^2 - \gamma_1^2} \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\gamma_1 \\ -\gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix}$. Por ende: $\hat{\alpha}_1 \xrightarrow{p} \frac{\alpha_1^3(1-\alpha_1^2)}{\alpha_1^2(1-\alpha_1^2)} = \alpha_1$. También pudo haberse utilizado simplemente la función objetivo GMM para distintas matrices de ponderaciones.