Consumo

Consumo y ahorro es prácticamente "lo mismo" → conociendo uno se deriva el otro

→ Razones para consumir/ahorrar

1. Precaución
2. Ciclo de vida
3. Sustitución intertemporal
4. x gastos que aumentan en el t
5. Independencia
6. Razones empresariales (emprendimiento)
Legado intergeneracional
8. Tacaño
9. Para financiar un pie, etc.

Datos: Muestran que el consumo es más volátil que el ingreso
→ En cuanto a la descomposición del consumo → los durables son los + volátiles
⇒ influyen en el ciclo económico.

PROBLEMA DE FLUCTUACIÓN DE INGRESOS

- Supuestos
  - ingreso exógeno (w y r)
  - no existe un mercado de seguros para protegerse en los malos tiempos
    ↳ único activo → bono libre de riesgo

- Agentes
  - Y_t ingreso exógeno
  - γ: factor de dcto subjetivo
  - $\gamma = \frac{1}{1+\delta}$ δ: tasa de dcto subjetiva
  - Utilidad separable $u(c)$
    → creciente y cóncava

→ Decisión de consumo / ahorro.

→ Activo tiene retorno r

* Limitaciones

- No hay producción → Y_t exógeno
- Retorno al ahorro exógeno: r
- Activo libre de riesgo
- No hay decisión de ocio/trabajo
- No hay riesgo compartido
- No hay banca rota personal

→ Modelo

En $t=0$

$$\max_{C_t, A_{t+1}} E_0 \sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t u(C_t)$$

$$\text{s.a.} \quad A_{t+1} = (1+r)(A_t + Y_t - C_t) \quad t=1,\dots,T$$
$$A_0 : \text{dado}$$

→ A_t: inicio periodo de activos

Horizonte infinito → Necesita condición de NO-PONZI

$$\underbrace{\hspace{6cm}}$$

Y_t determinístico

$$\max_{C_t, A_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} u(C_t)$$

$$\text{s.a.} \quad A_{t+1} = (1+r)(A_t + Y_t - C_t)$$
$$A_0 > 0$$

PDQ → sin condición de Ponzi
→ no hay solución

Sea $C^* = C_0^*, C_1^*, C_2^*, \dots$
$\wedge \; A_t^* \leq A \quad \forall t$

Definimos

$$\overline{C_0} = C_0^* + 1 \Rightarrow \overline{A_1} = A_1^* - 1(1+r)$$

$$\overline{C_t} = C_t^* \quad t \geq 1 \Rightarrow \overline{A_t} = A_t^* - (1+r)^t \, 1$$

→ con la secuencia $\overline{C_t}$ estoy mejor que con C_t^*

⇒ C_t^* no es óptimo $\wedge$ la deuda crece indefinidamente a tasa r

→ Para que esto no ocurra necesitamos una condición adicional

$A_1 = (1+r)A_0 + (1+r)(Y_0 - C_0)$
$A_2 = (1+r)A_1 + (1+r)(Y_1 - C_1)$
$A_3 = (1+r)A_2 + (1+r)(Y_2 - C_2)$
$\vdots \qquad \vdots$

$A_{T+1} = (1+r)A_T + (1+r)(Y_T - C_T)$

→ multiplicamos c/ecuación por $(1+r)^T$, $(1+r)^{T-1}$, $(1+r)^{T-2}$, etc. y luego sumamos hacia abajo

$\cancel{(1+r)^T A_1} = (1+r)^{T+1}A_0 + (1+r)^{T+1}(Y_0 - C_0)$
$\cancel{(1+r)^{T-1} A_2} = \cancel{(1+r)^T A_1} + (1+r)^T(Y_1 - C_1)$
$(1+r)^{T-2} A_3 = \cancel{(1+r)^{T-1}} A_2 + (1+r)^{T-1}(Y_2 - C_2)$
$\vdots$

$\Leftrightarrow A_{T+1} = (1+r)^{T+1}A_0 + (1+r)^{T+1}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{-t}(Y_t - C_t)$

$\Rightarrow A_0 = \frac{A_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} - \frac{\cancel{(1+r)^{T+1}}}{\cancel{(1+r)^{T+1}}}\sum(1+r)^{-t}(Y_t - C_t)$

$A_0 = \underbrace{\frac{A_{T+1}}{(1+r)^{T+1}}}_{} + \sum_{t=0}^{T}(1+r)^{-t}(C_t - Y_t)$

en el ∞ para que no ocurra ponzi este término tiene que ser $= 0$:

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{(1+r)^T} = 0}$$

condición de NO-PONZI

→ Esta condición es equivalente a decir:

$A_0 = \sum_{t\geq 0} \frac{C_t - Y_t}{(1+r)^t}$ → Es decir, los hogares pagan sus deudas

* Y_t determinístico y bancos lo conocen ⇒ nadie presta si no le pagan

* Y_t estocástico → descartamos banca rota

ECUACIÓN DE BELLMAN

• $V(A_t)$: valor presente esperado de la utilidad esperada como función de la riqueza

↳ Depende de la distribución conjunta de $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots$ condicional a los valores obtenidos hasta t $(Y_t, Y_{t-1}, \ldots)$

$V(A_t) = \max_{C_t} u(C_t) + \gamma E_t V_{t+1}((1+r)(A_t + Y_t - C_t))$

* supuesto: solución interior

→ solución:

1) Hacemos la C.P.O: $(\partial/\partial C_t)$

$u'(C_t) = \gamma(1+r)E_t V_{t+1}'(A_{t+1})$

2) Por teorema de la envolvente (?)

$$\boxed{V_t'(A_t) = \gamma(1+r)E_t V_{t+1}'(A_{t+1}) = u'(C_t)} \; (*)$$

PERTURBACIONES

→ De (*): $u'(C_t) = V_t'(A_t)$

⇒ $u'(C_{t+1}) = V_{t+1}'(A_{t+1})$

→ usando esto:

$$\boxed{u'(C_t) = \gamma(1+r)E_t u'(C_{t+1})} \rightarrow \textbf{EULER}$$

→ Ahora asumimos que C_t^* es el óptimo y definimos

$\bar{C} = C_t^* - \Delta C$
↳ una perturbación en mi consumo óptimo

→ Por esta sustracción de mi óptimo en el futuro tendré $(1+r)\Delta C$ de "ganancia" o activo extra.

$\overline{C_{t+1}} = C_{t+1}^* + (1+r)\Delta C$

$\Rightarrow \Delta V_t(A_t) = \{-u'(C_t^*)\Delta C + \gamma(1+r)E_t u'(C_{t+1}^*)\Delta C\}$
↳ Taylor (no me salió)

NOTA: Elasticidad de sustitución

$$\sigma(c) = -\frac{u'(c)}{c\,u''(c)}$$

→ la elasticidad entre s y t

$$\left[\sigma(c(t), c(s)) = -\frac{\Delta\%\,[c(t)/c(s)]}{\Delta\%\,[u'(c(t))/u'(c(s))]}\right]$$

- $\sigma(c)$ → elast. sust. instantánea
- inversa $\sigma(c)$ → coef. de aversión al riesgo (CRRA)

NOTA: Familia de u conocidas

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\sigma}-1}{1-\theta} & \theta > 0,\ \theta \neq 1 \\ \log c & \theta = 1 \end{cases}$$

↳ CES → elast. sust. interr. constante

θ = CRRA

$\sigma(c) = \frac{1}{\theta} \rightarrow \perp\!\!\!\perp$ de c

Escaneado con CamScanner

previsión perfecta

• SUPUESTO: conocemos Y_t (no hay incertidumbre

con $\gamma = \frac{1}{1+\delta}$:

⇒ Nuestra condición de Euler:

$$\boxed{u'(C_t) = \frac{1+r}{1+\delta} u'(C_{t+1})}$$

* comentario

• Si $\delta = r \Rightarrow u'(C_t) = u'(C_{t+1})$
$\Rightarrow C_t = C_{t+1}$
$\Rightarrow C_t$ constante

• $\delta > r \Rightarrow$ es impaciente
$\Rightarrow C_t > C_{t+1}$
$\Rightarrow C_t$ cae en el tiempo

(y viceversa)

→ ¿Que tanto cae o sube C_t si $\delta \neq r$?

→ Depende de σ → A mayor $\sigma \Rightarrow$ mayor es la pendiente de la serie que describe C_t.

Ej: $u \rightarrow$ CES: $\frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}$

$\Rightarrow u'(C_t) = \frac{\cancel{1-\theta}}{\cancel{1-\theta}} C_t^{-\theta}$

$\Rightarrow u'(C_{t+1}) = C_{t+1}^{-\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C_{t+1}}{C_t} = \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^{1/\theta}} \quad (1)$$

$$\rightarrow \sigma = -\frac{u'(C_t)}{C_t u''(C_t)} = \frac{-C_t^{-\theta}}{C_t(-\theta C_t^{-\theta-1})} = \frac{1}{\theta}$$

CRRA = θ

→ Podemos calcular el Δ en log aplicando log a (1):

$$\Delta \log(C_{t+1}) = \frac{1}{\theta}[\log(1+r) - \log(1+\delta)]$$

$$\approx \frac{1}{\theta}(r-\delta) = \sigma \cdot (r-\delta)$$

* comentario:

un ↑ en $r \Rightarrow$ ↑ en el ratio del crecimiento de C_t

TRAYECTORIAS DE CONSUMO

Definimos la riqueza total en t como:

$$W_t \equiv A_t + \sum_{s \geq 0} \left[\frac{1}{1+r}\right]^s Y_{t+s} \quad (1)$$

→ Luego notemos que

$$C_{t+2} = \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^{\sigma} C_{t+1} = \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^{\sigma}\left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^{\sigma} C_t$$

$$= \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^{2\sigma} C_t$$

$$\Rightarrow C_{t+s} = \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^{s\cdot\sigma} C_t \quad (2)$$

→ Después imponemos cond. de NO-PONZI:

$$A_0 = \sum_{t \geq 0} \frac{C_t - Y_t}{(1+r)^t}$$ → esto es cuando partimos en $t=0$

→ Ahora lo traemos al periodo t y este será el inicio donde empezamos a descontar:

$$\Rightarrow \sum_{s\geq 0} \frac{Y_{t+s}}{(1+r)^s} = \sum_{s\geq 0} \frac{C_{t+s}}{(1+r)^s} - A_t \quad (3)$$

$\rightarrow$ (3) en (1):

$$W_t \equiv \cancel{A_t} + \sum_{s\geq 0} \frac{C_{t+s}}{(1+r)^s} - \cancel{A_t} \quad (4)$$

$\rightarrow$ (2) en (4)

$$W_t \equiv \sum_{s\geq 0} \frac{1}{(1+r)^s} \left[\frac{(1+r)^{s\cdot\sigma}}{(1+\delta)} C_t \right]$$

$$\Leftrightarrow C_t \sum_{s\geq 0} \frac{(1+r)^{s(\sigma-1)}}{(1+\delta)^{s\sigma}} = C_t \sum_{s\geq 0} \underbrace{\left[\frac{(1+r)^{\sigma-1}}{(1+\delta)^{\sigma}} \right]^s}_{r}$$

geométrica $= \frac{1}{1-r}$

$$\Leftrightarrow C_t \cdot \left(1 - \frac{(1+r)^{\sigma-1}}{(1+\delta)^{\sigma}}\right)^{-1} \quad (5)$$

$\rightarrow$ **Podemos Aproximar:**

$$\left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^{\sigma} \approx [(1+r)(1-\delta)]^{\sigma} \rightarrow \text{si } r \wedge \delta \text{ son chicos}$$

$$\approx (1+r-\delta)^{\sigma}$$

$$\approx 1 + (r-\delta)\sigma$$

WTF

$\rightarrow$ Despejando C_t de (5):

$$C_t = \left(1 - \left[\frac{(1+r)}{(1+\delta)}\right]^{\sigma} (1+r)^{-1}\right) W_t$$

$$= \left(1 - \frac{1+(r-\delta)\sigma}{(1+r)}\right) W_t$$

$$\boxed{C_t = \left[\frac{r}{1+r} - \frac{\sigma(r-\delta)}{1+r}\right] W_t}$$

↳ mezclando con Euler

$$\boxed{C_t = \left(1 - \left[\frac{(1+r)}{(1+\delta)}\right]^{\sigma} (1+r)^{-1}\right) \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^t W_0}$$

$\frac{1+r}{1+\delta} = 1 \rightarrow$ suavizan consumo

$\frac{1+r}{1+\delta} > 1 \Rightarrow \delta > r \rightarrow$ paciente

$\Rightarrow$ consumo creciente (y viceversa).

Escaneado con CamScanner

equivalencia cierta

Consideramos un agente representativo con riqueza W en $t=0$.
→ Puede prestar/pedir a una tasa r (con condición de Ponzi)

* El objetivo del agente es suavizar consumo y maximizarlo por siempre.
↳ Este consumo será C

Esto implica:

$$\sum_{t\geq 0} \frac{C}{(1+r)^t} = W_0$$

↳ El V.P. de mis consumos es igual a mi riqueza inicial

→ usando Geométrica:

$$C \cdot \frac{(1+r)}{r} = W_0$$

$$\Rightarrow \boxed{C = C_t = W_0 \cdot \frac{r}{1+r}} \quad \forall t$$

↳ Interpretación: Agente pone su riqueza inicial en el bco y vive de los intereses.

* USO E. CIERTA:
Este modelo sirve para entender como reacciona el agente ante shocks en ingresos

1) Innovación → shock transitorio (sin persistencia)
↳ en este caso el agente deposita el ingreso extra y gasta el r extra generado en cada t

2) ej: Random Walk → shock pmnente. (este shock persiste por siempre)
↳ En este caso el agente aumenta su consumo 1:1 con el shock.

MODELO FORMAL

Supuestos:

1) Utilidad cuadrática

$$U(C) = C - \frac{b}{2} C^2$$

2) $r = \delta$ → necesario x supuesto de suavización de C.

3) Horizonte ∞ (solo simplificación)

OJO:
- UT mg es lineal en C
- $U'(0) < \infty$ → óptimo puede ser $C<0$! OJO
- Aversión al riesgo ↑ con la riqueza (estudios contradicen)

→ Sabemos de la condición de Euler:

$$U'(C_t) = \frac{\cancel{(1+r)}}{\cancel{(1+\delta)}}^{1} \cdot E_t\, U'(C_{t+1})$$

→ en este caso:

$$U'(C) = 1 - \frac{b}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}C = 1 - bC$$

$$\Rightarrow \cancel{1} - \cancel{b}C_t = E_t\,(\cancel{1} - \cancel{b}\,C_{t+1})$$

$$\Rightarrow \boxed{C_t = E_t\, C_{t+1}} \rightarrow \text{Random walk}$$

*Hall's Random Walk

→ Podemos aplicarle a la cond. de Euler encontrada la ley de expectativas iteradas

$$\Rightarrow: C_t = E_t(E_{t+1}\, C_{t+2})$$
$$= E_t(C_{t+2})$$
$$= E_t(E_{t+2}\, C_{t+3})$$
$$\vdots$$

$$\boxed{C_t = E_t(C_{t+K})} \quad K = 1, 2, \ldots$$

↳ mejor predicción

→ Luego podemos calcular el error de esta predicción:

$$\varepsilon_{t+1} = C_{t+1} - \underbrace{E_t\, C_{t+1}}_{C_t \text{ (x Euler)}}$$

$$\Rightarrow C_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + C_t \quad / \; E_t$$

$$\underbrace{E_t(C_{t+1})}_{C_t \text{ (Euler)}} = E_t(\varepsilon_{t+1}) + E_t(C_t)$$

$$\cancel{C_t} = E_t(\varepsilon_{t+1}) + \cancel{C_t}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_t(\varepsilon_{t+1}) = 0}$$

↳ martingale

→ Ahora buscamos una expresión explícita de $C_t \wedge \Delta C_t$:

→ De la condición de NO-PONZI:

$$A_0 = \sum_{t\geq 0} \frac{C_t - Y_t}{(1+r)^t}$$

$$\Rightarrow \sum_{t\geq 0} C_t \cdot \beta^t = A_0 + \sum_{t\geq 0} Y_t \cdot \beta^t$$

$$\left[\text{con } \beta = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+\delta} \rightarrow \text{supuesto } (r=\delta) \right]$$

→ Aplicamo E_0

$$\sum_{t\geq 0} \beta^t E_0 C_t = A_0 + \sum_{t\geq 0} \beta^t E_0 Y_t$$

→ sabemos x Hall que el mejor predictor es: $E_0 C_t = C_0$

$$\Rightarrow \sum_{t\geq 0} \beta^t E_0 C_t = C_0 \sum_{t\geq 0} \beta^t \rightarrow \text{Geométrica}$$

$$\Rightarrow C_0 \cdot \frac{1}{1-\beta} = C_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} = C_0 \cdot \frac{1+r}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{r}{(1+r)} \left[A_0 + \sum_{t\geq 0} \beta^t E_0 Y_t \right]}$$

↳ Podemos Generalizarlo:

$$\boxed{C_t = \frac{r}{1+r} \left[A_t + \sum_{s\geq 0} \beta^s E_t Y_{t+s} \right]}$$

→ Ahora buscamos ΔC_t

Por generalización:

$$C_{t-1} = \frac{r}{1+r} \left[A_{t-1} + \sum_{s\geq 0} \beta^s E_{t-1} Y_{t+s-1} \right]$$

$$\Rightarrow \Delta C = C_t - C_{t-1}$$

$$= \frac{r}{1+r} \left[A_t - A_{t-1} + \sum_{s\geq 0} \beta^s E_t Y_{t+s} - \sum_{s\geq 0} \beta^s E_{t-1} Y_{t+s} \right]$$

$$= \frac{r}{1+r} \left[\underbrace{A_t - A_{t-1}}_{=0} + \sum_{s\geq 0} \beta^s \left[E_t Y_{t+s} - E_{t-1} Y_{t+s} \right] \right]$$

$=0$ → Por suavización del consumo la persona vive de los intereses de su riqueza

↳ usando NO-PONZI:

$$A_t = \sum_{s\geq 0} \frac{C_{t+s} - Y_{t+s}}{(1+r)^t} = \sum_{s\geq 0} \beta^t (C_{t+s} - Y_{t+s})$$

$$A_{t-1} = \sum_{s\geq 0} \frac{C_{t+s-1} - Y_{t+s-1}}{(1+r)^t} = \sum_{s\geq 0} \beta^t (C_{t+s-1} - Y_{t+s-1})$$

$$\Rightarrow A_t - A_{t-1} =$$

$$\Delta C_t = \frac{r}{1+r} \sum_{k\geq 0} \beta^k \left[E_t Y_{t+k} - E_{t-1} Y_{t+k} \right]$$

↳ Guía.

Definimos el ingreso Permanente como:

$$Y_t^P = \frac{r}{1+r} \sum_{j\geq 0} \left(\frac{1}{1+r}\right)^j E_t(Y_{t+j})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta C_t = Y_t^P - E_{t-1} Y_t^P}$$

Ej: $Y_t \sim$ i.i.d. $\quad Y_t = \mu + e_t$

$e_t \sim$ iid, media $= 0$

→ Calculamos $\Delta C_t = \frac{r}{1+r} \sum_{s\geq 0} \beta^s E_t Y_{t+s} - E_{t-1} Y_{t+s}$

$$E_t(Y_t) = \mu + e_t$$

$$E_t(Y_{t+s}) = \mu \quad \forall\, s \geq 1$$

$$E_{t-1}(Y_{t+s}) = \mu \quad \forall\, s \geq 0$$

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow \Delta C_t = \frac{r}{1+r} e_t$

→ calculamos el impacto del shock en el ΔC_t:

$\frac{\partial \Delta C_t}{\partial e_t} = \frac{r}{1+r} < 1$ → shock transitorio: se ajusta muy poco

Ej 2: $Y_t - \mu = \psi (Y_{t-1} - \mu) + e_t$ AR(1)

$\psi \in (0,1)$ → Denota la correlación de 1er orden

$\underbrace{}_{\text{captura la persistencia de los shocks}}$

$\uparrow \psi \Rightarrow \uparrow$ Persistencia

$\psi = 0 \Rightarrow$ iid (ruido blanco)
↳ transitorios (shocks)

$\psi = 1 \Rightarrow$ random walk
↳ permanentes todos los shocks

→ calculamos ΔC_t:

$E_t[Y_{t+i} - \mu] = \psi^i (Y_t - \mu) \quad \forall i \geq 0$

→ ej: $i=0$ $E_t(Y_t - \mu) = Y_t - \mu$
$= (Y_t - \mu)\psi^0$

$i=2$ $E_t(Y_{t+2} - \mu) = E_t(\psi(Y_{t+1} - \mu) + e_{t+2})$
$= E_t(\psi(\psi(Y_t - \mu) + e_{t+1}))$
$= \psi^2 (Y_t - \mu)$

$\Rightarrow \boxed{E_t[Y_{t+i}] = \psi^i (Y_t - \mu) + \mu}$

$E_{t-1}[Y_{t+i} - \mu] = \psi^{i+1}(Y_{t-1} - \mu)$

$\Rightarrow \Delta C_t = \frac{r}{1+r} \sum_{u \geq 0} \gamma^u \{\psi^u (Y_t - \mu) - \psi^{u+1} (Y_{t-1} - \mu)\}$

$u=0 = \frac{r}{1+r} [\underbrace{(Y_t - \mu) - \psi(Y_t - \mu)}_{e_t}]$

$u=0 = \frac{r}{1+r} [\gamma \{\underbrace{\psi(Y_t - \mu) - \psi^2(Y_t - \mu)}_{\psi(Y_t - \mu - \psi(Y_t - \mu))}\}]$

→ e_t

$\Rightarrow \Delta C_t = \frac{r}{1+r} \sum_{u \geq 0} e_t (\gamma^u \psi^u)$

$= \frac{r}{1+r} \cdot e_t \cdot \frac{1}{1 - \gamma\psi} \quad (\gamma = \frac{1}{1+r})$

$= \frac{r}{1+r-\psi} \cdot e_t$ ↙ algebra.

$\Rightarrow \frac{\partial \Delta C_t}{\partial e_t} = \frac{r}{1+r-\psi}$

→ con $\psi = 0$ → mismo caso que con ruido blanco

→ $\psi \neq 0$ → consumo responde mucho más ante shocks
$\Rightarrow$ es + persistente.

En específico $\psi = 1$ → random walk.

ACTIVOS

Y_t^P: Ingreso Permanente en t

$Y_t^P \equiv \frac{r}{1+r} \sum_{j \geq 0} \left[\frac{1}{1+r}\right]^j E_t(Y_{t+j})$

→ Entonces cambios en los Activos se explican por cambios entre la esperanza del ingreso permanente y el ingreso permanente real.

$\Delta A_{t+1} = Y_t - E_t Y_{t+1}^P$

Dem $A_{t+1} - A_t$

$= (1+r)(A_t + Y_t - C_t) - A_t$

→ Notemos que $C_t = \frac{r}{1+r} A_t + Y_t^P$

$\Rightarrow A_{t+1} - A_t = (1+r)(A_t + Y_t - \frac{r}{1+r} A_t - Y_t^P) - A_t$

$= (1+r) Y_t - (1+r) Y_t^P$

$= (1+r) Y_t - (1+r) \left[\frac{r}{1+r}\left(\underbrace{E_t(Y_t)}_{Y_t} + \sum_{s \geq 1} \beta^s E_t Y_{t+s}\right)\right]$

$= Y_t - E_t Y_{t+1}^P$

→ Esto implica que los activos crecen entre t y $t+1$ ssi $Y_t > E_t Y_{t+1}^P$

* comentario

si Y_t es iid $\sim (\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow E_t(Y_{t+s}) = \mu \quad \forall s$

$\Rightarrow \boxed{\Delta A_{t-1} = Y_t - \mu}$ → si $Y_t \sim I(0)$ $\Rightarrow A_t \sim I(1)$

→ $A_t \sim$ random walk

$\Rightarrow$ cuando $\sigma > 0 \Rightarrow A_t$ diverge a $+\infty$ o $-\infty$

$\Rightarrow$ cuando $\sigma = 0 \Rightarrow A_t$ no cambia en el tiempo

→ En general $A_t \sim ARIMA(1,1,0)$ con $Y_t \sim AR(1)$

EJEMPLO IMPORTANTE

$Y_t = P_t + U_t \qquad U_t, \varepsilon_t$ iid ~ 0
$P_t = P_{t-1} + \varepsilon_t$

Interpretación: P_t: componente permanente (random walk)
U_t: componente estacionario

Supuesto: vemos P_t, U_t (x separado)

$$\Rightarrow E_{t-1} Y_t^P = E_{t-1}\left[\frac{r}{1+r}\sum_{j\geq 0}\beta^j E_t Y_{t+j}\right]$$

$$= \frac{r}{1+r}\sum_{j\geq 0}\beta^j E_{t-1} Y_{t+j}$$

Notamos que

$$E_{t-1} Y_{t+j} = E_{t-1}(P_{t+j}) + \cancel{E_{t-1}(U_{t+j})}^{0}$$
$$= E_{t-1}(P_{t+j-1}) + \cancel{E_{t-1}(\varepsilon_{t+j-1})}^{0}$$
$$\vdots$$
$$= E_{t-1}(P_{t-1}) = P_{t-1}$$

$$\Rightarrow E_{t-1} Y_t^P = \frac{r}{1+r}\sum \beta^j P_{t-1}$$
$$= \frac{r}{\cancel{1+r}} \cdot \frac{\cancel{1+r}}{r} P_{t-1}$$
$$= P_{t-1}$$

→ También notamos

$$Y_t^P = \frac{r}{1+r}\sum_{j\geq 0}\beta^j E_t Y_{t+j}$$

$$= \frac{r}{1+r}\left(\underbrace{E_t Y_t}_{Y_t} + \sum_{j\geq 1}\beta^j E_t Y_{t+j}\right)$$

$$= E_t(Y_{t+1}) = E_t(P_{t+1}) + \cancel{E_t(U_t)}^{0}$$
$$\vdots$$
$$E_t(P_t) = P_t$$

$$\Rightarrow Y_t^P = \frac{r}{1+r}\left(Y_t + \frac{P_t}{r}\right)$$

$$= \frac{r}{1+r}Y_t + \frac{P_t}{1+r}$$

$\Rightarrow \Delta C_t$:

$$\Delta C_t = Y_t^P - E_{t-1} Y_t^P$$
$$= \frac{r}{1+r}Y_t + \frac{P_t}{1+r} - P_{t-1}$$
$$= \frac{r}{1+r}(P_t + U_t) + \frac{P_t}{1+r} - P_{t-1}$$
$$= \frac{r}{1+r}U_t + \underbrace{P_t - P_{t-1}}_{\varepsilon_t}$$
$$= \frac{r}{1+r}U_t + \varepsilon_t$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \Delta C_t}{\partial \varepsilon_t} = 1$ → shock permanente (es en P_t)

$\dfrac{\partial \Delta C_t}{\partial U_t} = \dfrac{r}{1+r} \approx r$ → shock transitorio

$\Rightarrow \Delta A_t$:

$$\Delta A_t = Y_{t-1} - E_{t-1} Y_t^P$$
$$= \cancel{P_{t-1}} + U_{t-1} - \cancel{P_{t-1}}$$

$$\Rightarrow \Delta A_t = U_{t-1}$$
$$\Delta A_{t+1} = U_t.$$

ahorro por precaución

Este modelo nos sirve para estudiar el ahorro x precaución → en este caso la varianza del ingreso juega un rol clave y E.C. no lo captura.
⇒ Necesitamos otro modelo

→ Necesitamos analizar el rol de la tercera derivada u'''

- Derivación Formal

$T=2$
$t=0,1$
$r=\delta=0$
$A0=0$
→ no hay herencia

Agente optimiza:

$$\Rightarrow \max_{c_0,c_1} u(c_0)+v(c_1)$$
$$\text{s.a. } c_0 = y_0 - A_1$$
$$c_1 = y_1 + A_1$$

y_1 es estocástico (visto desde el $t=0$)

$$\Leftrightarrow \max u(y_0-A_1)+EV(y_1+A_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial A_1} = u'(y_0-A_1)(-1)+EV'(y_1+A_1)=0$$

$$\Rightarrow u'(y_0-A_1)=EV'(y_1+A_1)$$

* Asumimos condiciones de Inada

$$\left.\begin{matrix} u'(0^+)=\infty, & v'(0^+)=\infty \\ u'(\infty)=0, & v'(\infty)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Hay solución única.}$$

* $u''<0$, $v''<0$

→ Ahora consideramos a "mean preserving spread" en y_1

⇒ Tenemos una nueva solución A_1^{**}

→ la evidencia muestra que v' convexa → $A_1^{**} > A_1^{*}$

- Derivación Formal (caso mas General)

Asumimos:
- y_t iid
- $R_t \approx R$ (activo libre de riesgo)
- $T=\infty$

→ Bellman:

$$V(A_t,y_t)=\max_{c_t}\{u(c_t)+\gamma EV(R(A_t+y_t-c_t), y_{t+1}\}$$

→ Ahora en vez de tener A_t, y_t por separado definimos el:

Cash on hand: $x_t \equiv A_t + y_t$

⇒ Bellman

$$\boxed{V(x)=\max_c\{u(c)+\gamma EV(R(x-c)+y')\}}$$

y': ingreso en el t siguiente

Definimos los activos del t siguiente:

$$a' = R(x-c) \rightarrow c = x - \frac{a'}{R}$$

$$\Leftrightarrow V(x)=\max_{a'}\{u(x-\frac{a'}{R})+\gamma EV(a'+y')\}$$

CPO:

$$u'(x-\frac{a'}{R}) = \gamma R\, EV'(a'+y')$$

* Hay que asegurar $V'''>0$
↳ en ese caso, la "propagación de conservación de la media" de y' disminuye c^* (∧ ↑ ahorro) ssi $V'''>0$

* no se habla mucho del signo de u''' (CES ⇒ $u'''>0$)

LÍMITE NATURAL DE PRÉSTAMO (NBL)

Se asume que no hay banca rota → se paga siempre.

Esto implica:

$$A_t \geq \sum_{j\geq 0} \beta^j (C_{t+j} - Y_{t+j})$$

→ Luego imponiendo las condiciones de Inada:

$C_{t+j} \geq 0$ } ¿Por qué puedo hacer esto?

$$\Rightarrow A_t \geq - \sum_{j\geq 0} \beta^j Y_{t+j}$$

Sea y_{min} → mínimo valor posible de de Y

$$\Rightarrow A_t \geq \underbrace{- \frac{(1+r)}{r} Y_{min}}_{\text{NBL (sin el -)}}$$

→ El Problema se transforma en:

$$\boxed{V(x) = \max_{a' \geq -NBL} \left\{ u\left(x - \frac{a'}{1+r}\right) + \gamma (1+r) E V(a' + y') \right\}}$$

* Se puede mostrar que siempre se escoge $a' > -NBL$ incluso si no se impone la restricción
  ↳ Esto porque evitan la posibilidad de no tener cash on hand en algún t futuro.

CARA UTILITY

→ Sea

$$u(C) = \frac{-e^{-aC}}{a}$$

a: coeficiente de aversión absoluta al riesgo (constante)

$u''' > 0 \Rightarrow$ Hay ahorro por precaución

→ Sin embargo a crece con el ingreso → contradice evidencia

* Asumimos $r = \delta = 0$

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t$$

$e_t \sim iid(0, \sigma^2)$

→ Vive T periodos

* Asumimos normalidad, $r = \delta = 0$ (no necesario).

• Solución:

→ la ecuación de Euler nos dice

• $e^{-aC_t} = E_t e^{-aC_{t+1}}$

→ la solución (conjetura) es:

• $C_t = C_{t-1} + \frac{a\sigma^2}{2} + e_t$ (random walk con drift $\frac{a\sigma^2}{2}$).

→ Luego imponemos "NO-PONZI":
↳ restricción presupuestaria

$$\sum_{t=0}^{T-1} C_t = A_0 + \sum_{t=0}^{T-1} Y_t \quad (*)$$

→ Desarrollando podemos encontrar C_0
  ↳ Aplicamos E_0 a $(*)$:

$$E_0 C_0 + E_0 C_1 + \ldots = A_0 + (E_0 Y_0 + E_0 Y_1 + \ldots)$$

Notemos que

$$C_1 = C_0 + \frac{a\sigma^2}{2} + e_1 \quad / E_0$$

$$E_0(C_1) = C_0 + \frac{a\sigma^2}{2}$$

$$C_2 = C_1 + \frac{a\sigma^2}{2} + e_2 \quad / E_0$$

$$\begin{aligned} E_0(C_2) &= E_0(C_1) + \frac{a\sigma^2}{2} \\ &= E_0\left(C_0 + \frac{a\sigma^2}{2}\right) + \frac{a\sigma^2}{2} \\ &= C_0 + 2\frac{a\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_0(C_K) = C_0 + K \cdot \frac{2a\sigma^2}{2}.$$

→ luego

$$E_0(Y_1) = E_0(Y_0) + \overset{0}{E_0(\varepsilon_1)} = Y_0$$

$$E_0(Y_2) = E_0(Y_1) + 0 = E_0(Y_0) = Y_0$$

$$\Rightarrow E_0(Y_K) = Y_0$$

→ Esto implica:

$$C_0 + \left(C_0 + \frac{a\sigma^2}{2}\right) + \left(C_0 + \frac{2a\sigma^2}{2}\right) + \dots = A_0 + Y_0 \cdot T$$

$$\Leftrightarrow C_0 \cdot T + \frac{a\sigma^2}{2}\underbrace{(1+2+\dots+T-1)}_{\underbrace{\sum_{l=1}^{T-1} K}_{\frac{(T-1)T}{2}}} = A_0 + Y_0 T$$

$$\Leftrightarrow C_0 T + \frac{a\sigma^2}{4}(T-1)T = A_0 + Y_0 T$$

$$\Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{A_0}{T} + Y_0 - \frac{a\sigma^2}{4}(T-1)}$$

→ Podemos generalizar el resultado para C_t

$T = T - t$

$$\boxed{C_t = \frac{A_t}{T-t} + Y_t - \frac{a\sigma^2}{4}(T-t-1)}$$

* luego notemos que bajo equivalencia cierta no hay incertidumbre y el agente quiere suavizar consumo (además ahora $r \approx 0$)

$$\Rightarrow C_t = C_{t-1}$$

→ usando lo encontrado concluimos que:

$$\boxed{C_t^{E.C.} = \frac{A_t}{T-t} + Y_t}$$

→ luego, el ahorro por precaución es:

$$\boxed{S^{PREC} = C_t^{E.C.} - C_t = \frac{a(T-t-1)\sigma^2}{4}}$$

$\Rightarrow$ ↑ con a (aversión al riesgo)
↑ σ^2 (varianza innov.)
↑ T (tiempo de vida)

ACTIVOS EN EL L.P.

Consideramos utilidad CARA con Y_t iid $\sim \bar{Y}, \sigma^2$

Buffer

- Queremos analizar un modelo que considere la impaciencia de los consumidores, que en ausencia de incertidumbre significa que "el consumo crece más lento que el ingreso".
  - ↳ en consecuencia sería mucho mejor trabajar con tasas → ie: log de las ecuaciones → Proceso del Ingreso:

$$\begin{bmatrix} Y_t = P_t \cdot \varepsilon_t \\ P_t = G \cdot P_{t-1} N_t \end{bmatrix}$$

- Entonces tenemos un componente transitorio y otro permanente a la Friedman
  - P_t → random walk con drift $\log(G)$ → Permanente
    - ↳ $N_t \sim$ log normal iid, $E_t N_t = 1$ (innovación del r.walk: $\log N_t$)
    - ↳ $G > 1$: tasa promedio de crecimiento del ingreso permanente
  - ε_t → log normal con Probabilidad:

$$\varepsilon_t = \begin{cases} \varepsilon & Pr = 1-P \\ 0 & Pr = P \end{cases}$$

↳ transitorio ($E\,\varepsilon_t = 1$)

* cuando $\varepsilon_t = 0$ → está desempleado ie: $Y_t = 0$.

Nota: Distribución log-normal: Distribución de Pr continua de una V.A cuyo logaritmo está normalmente distribuido

ie: si $X \sim$ normal

$\Rightarrow e^X \sim$ lognormal(μ_X, σ^2_X)

$$\text{media} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\text{varianza} = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Notemos entonces que ahora existe un $Pr > 0$: $Y_t = 0$

Definición de Impaciencia:

Sin incertidumbre (ie: bajo previsión perfecta) definimos impaciencia como:

$$\left[\frac{(1+r)}{(1+\delta)}\right]^{1/\theta} < G \quad (*)$$

* en el caso particular cuando $\theta = 1 \Rightarrow \delta > r$

Intuición: Se debe cumplir que el consumo crece a una tasa menor que el ingreso. Entonces, por Euler

$$C_{t+1} = \underbrace{\left[\frac{1+r}{1+\delta}\right]^{1/\theta}}_{\text{tasa crec. } C_t} C_t$$

G: tasa crec Y

$\Rightarrow (*)$

→ luego podemos escribir $(*)$ como

$$\frac{r - \delta}{\theta} < g$$

si definimos $\delta = -\log \gamma$, $r = \log R$, $g = \log G$

$(*) / \log$

$$\frac{1}{\theta}(\underbrace{\log(1+r)}_{r} - \underbrace{\log(1-\delta)}_{\delta}) = \underbrace{\log G}_{g}$$

* Asumimos todas estas tasas como exógenas.

• Solución del Modelo

Veamos que las variables de estado son:

1) "cash-on-hand": $X_t = A_t + Y_t$
↳ información sobre activos presentes

2) ingreso permanente: P_t
↳ información sobre ingreso futuro

→ Luego, los activos evolucionan acorde a la siguiente ecuación:

$$X_{t+1} = (1+r)(X_t - C_t) + \underbrace{Y_{t+1}}_{\underbrace{P_{t+1}}_{G P_t N_{t+1}} \cdot \varepsilon_{t+1}}$$

$$\left[X_{t+1} = (1+r)(X_t - C_t) + G \cdot N_{t+1} \cdot P_t \cdot \varepsilon_{t+1} \right]$$

→ En consecuencia, la ecuación de Bellman es:

$$V(X,P) = \max_C \left\{ \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\delta} E\, V(\underbrace{(1+r)(X-C) + GPN'\varepsilon'}_{X'}, \underbrace{GN'P}_{P'}) \right\}$$

*Comentario (truco)
↳ Tenemos la ecuación de Bellman con 2 variables → existe un truco para quedarnos con una.

$$\underbrace{x_t = \frac{X_t}{P_t}}_{} \qquad c_t = \frac{C_t}{P_t}$$

efectivo como fracción del ingreso permanente

→ Desarrollo (?)

$$\Rightarrow V_t(X_t, P_t) = P_t^{1-\theta} V_t(\underbrace{x_t}_{X_t/P_t}, 1)$$

$$\rightarrow v(x_t) = V_t(x_t, 1) = \frac{V_t(X_t, P_t)}{P_t^{1-\theta}}$$

Entonces la ecuación de Bellman es:

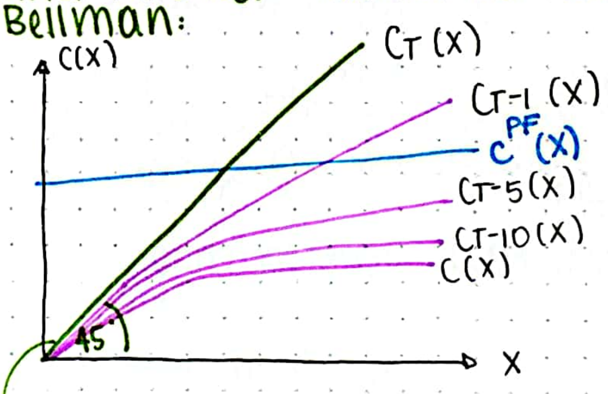
$$V_t(X_t, P_t) = P_t^{1-\theta} \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\delta} E_t \left[(\underbrace{GN_{t+1}}_{P_{t+1}/P_t})^{1-\theta} \cdot v_{t+1}(x_{t+1}) \right] \right\}$$

$$\Rightarrow \left[v(x_t) = \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\delta} E_t \left[(GN_{t+1})^{1-\theta} \cdot v_{t+1}(x_{t+1}) \right] \right\} \right]$$

→ y la nueva restricción de activos es:

$$\left[\frac{X_{t+1}}{P_{t+1}} = x_{t+1} = \frac{(1+r)}{GN_{t+1}} (x_t - c_t) + \varepsilon_{t+1} \right]$$

↳ con esto podemos encontrar una solución numérica de Bellman:



En el último T me consumo TODO

* las líneas — estan siempre bajo la línea de 45° pues $c_t \geq 0$ ∧ porque "no hay deuda" → siempre ahorro para el futuro.

* la línea — es el consumo con previsión perfecta ⇒ suaviza c_t
↳ "Ahorro por precaución"
↳ es max en t_0 pero luego converge a un valor (+) → nunca es 0 pues hay incertidumbre en Y_t.

$$\boxed{C^{PF}(x) - C(x) = \text{Ahorro por precaución}}$$

MODELO CON JUBILACIÓN (RETIRO)

En el modelo anterior asumíamos que el agente trabaja hasta su último periodo de vida.

Ahora consideraremos que se retira → va ahorrando c/vez más a medida que se acerca el retiro.

Luego, agota todos sus activos durante el retiro.

Entonces, definimos:

- Nivel objetivo de "cash of hand" (como fracción del ingreso permanente): x^*, entonces:

$$E_t[\Delta x_{t+1} \mid x_t = x^*] = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_t[x_{t+1} \mid x_t = x^*] = x^*}$$

→ Entonces, para $x_t < x^*$:

- Precaución > impaciencia
  $\Rightarrow E_t[x_{t+1} \mid x_t = x] > x$

  ↳ Acumula activos (en promedio)

Es decir sus activos en t son menores al objetivo x^* → por lo tanto, su motivo de precaución debe dominar sobre la impaciencia para que el próximo periodo su x_{t+1} aumente (hasta llegar a x^*).

→ Viceversa: $x_t > x^*$

Entonces su motivo de impaciencia dominará sobre el motivo de precaución ⇒:

$$E_t[x_{t+1} \mid x_t = x] < x$$

Entonces, como tiene mucho cash of hand empieza a des-acumular.

→ Carroll plantea que para algún $\alpha \in (0,1)$

$$x_{t+1} - x^* \approx \alpha(x_t - x^*) + e_t$$

$$\Leftrightarrow x_{t+1} \approx (1-\alpha)x^* + \alpha x_t + e_t$$

Aplicando E_t

$$E_t(x_{t+1} - x^*) = \alpha(x_t - x^*)$$

Interpretación:
Si en t yo no estoy en mi óptimo x^*, entonces la diferencia entre mi x_t real y mi x^* será >0 (en v. abs)

Luego, en t+1 yo espero que la dif entre x_{t+1} y x^* sea un % de la diferencia en t, pero menor ($\alpha \in (0,1)$)

⇒ Modelo de Ajuste Parcial para el cash-on-hand

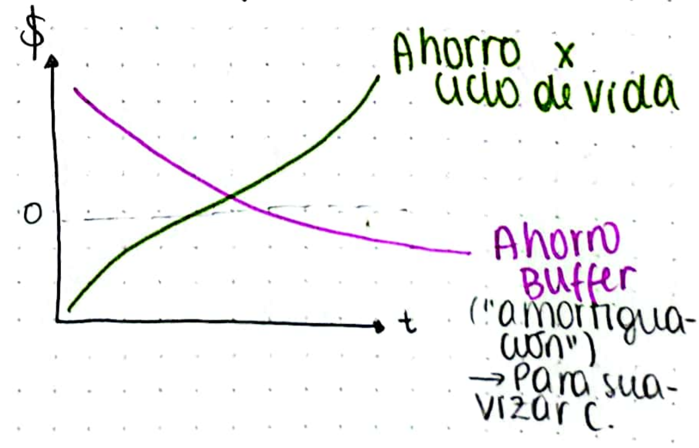
* Este modelo muestra bien la idea de que si falta mucho para mi jubilación entonces mi consumo ≈ ingreso.

⇒ Ahorro menos cuando joven.

⇒ $1-\alpha$: $\vec{V}$ de ajuste

$\alpha = 0$ → Ajusto inmediatamente

$\alpha > 0$ → me demoro en ajustar.



RESTRICCIONES DE liquidez

Queremos ver como afectan las restricciones de liquidez al consumo de las personas

Partimos asumiendo un ingreso determinístico

⇒ conocemos la secuencia de ingresos del agente:

- $\{y_t\}_{t=0}^{t=T}$ con $T \leq \infty$, $y_t \geq 0$

También conocemos la tasa de interés (exógena)

- ⇒ Ahorra a tasa r

Luego denotamos el cash on hand como:

- $X_{t+1} = (1+r)(X_t - C_t) + y_{t+1}$

→ Luego definimos la restricción de liquidez:

- Agente no puede pedir prestado (nada)
- ⇒ $C_t \leq X_t$

⇒ No necesitamos condición de No-Ponzi

⇒ El Agente maximizará

$$\left[\sum_{t \geq 0} \gamma^t u(C_t)\right]$$

Además, $u(\cdot)$ cumplirá:

- $u'(\cdot) > 0$
- $u''(\cdot) < 0$
- $u'(0^+) = \infty$ → cond. inada

⇒ $C_t > 0$

→ Luego usando la cond. de cash on hand y la r. de liquidez:

$$X_{t+1} - y_{t+1} = \underset{(+)}{(1+r)}\underset{(+)}{(X_t - C_t)}$$

$$0 \leq X_t - C_t$$

$$\Rightarrow X_{t+1} - y_{t+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow X_{t+1} \geq y_{t+1} \Leftrightarrow \boxed{X_t \geq y_t}$$

También podemos expresar así la restricción

→ se suele llamar a este problema: self-insurance.

Proposición:

$$\boxed{u'(C_t) \geq \gamma R\, u'(C_{t+1})}$$

↳ se cumple con igualdad si $X_{t+1} > y_{t+1}$ ($\Leftrightarrow C_t < X_t$)

- Demostración

Sea X_t, X_{t+2}, tenemos y_{t+1}, y_{t+2} (dados) y se cumple que

$$X_{t+2} \geq y_{t+2}$$

$$\Rightarrow \max_{C_t, C_{t+1}} u(C_t) + \gamma u(C_{t+1})$$

s.a. $C_t \leq X_t$ (1)

$C_{t+1} \leq X_{t+1}$ (2)

$X_{t+1} = (1+r)(X_t - C_t) + y_{t+1}$ (3)

$X_{t+2} = (1+r)(X_{t+1} - C_{t+1}) + y_{t+2}$ (4)

→ De (3): $\dfrac{X_{t+1} - y_{t+1}}{1+r} - X_t = -C_t$

$$\Leftrightarrow C_t = \frac{y_{t+1} - X_{t+1}}{1+r} + X_t$$

→ De (4)

$$C_{t+1} = \frac{y_{t+2} - x_{t+2}}{1+r} + x_{t+1}$$

$$\Rightarrow \max_{x_{t+1} \geq y_{t+1}} u\left[\frac{y_{t+1} - x_{t+1}}{1+r} + x_t\right] + \gamma u\left[\frac{y_{t+2} - x_{t+2}}{1+r} + x_{t+1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \max_{x_{t+1} \geq y_{t+1}} G(x_{t+1})$$ ↳ notación

→ Hay 2 casos $x_{t+1} > y_{t+1}$
1. $x_{t+1} = y_{t+1}$

① $x_{t+1} > y_{t+1}$

$$\frac{\partial G}{\partial x_{t+1}} = u'(c_t) \cdot \frac{-1}{1+r} + \gamma u'(c_{t+1}) = 0$$

→ Euler:

$$u'(c_t) = \frac{(1+r)}{(1+\delta)} u'(c_{t+1})$$

② $x_{t+1} = y_{t+1} \Rightarrow x_t = c_t$
(me comí todos mis activos en t) → Activos en t+1 (solo mi ingreso

$$\rightarrow u'(c_t) \geq \frac{1+r}{1+\delta} u'(c_{t+1})$$?

· **Caso particular 1:**

- $r = \delta$
- $T = \infty$

Definimos:

$$S_t = \frac{r}{1+r} \sum_{j=t}^{\infty} (1+r)^{t-j} y_j$$

$$y \quad \bar{S} = \max_{t \geq 0} S_t < \infty$$

→ luego tenemos que la condición de Euler es:

$$u'(c_t) \geq u'(c_{t+1})$$

→ luego como u es cóncava:

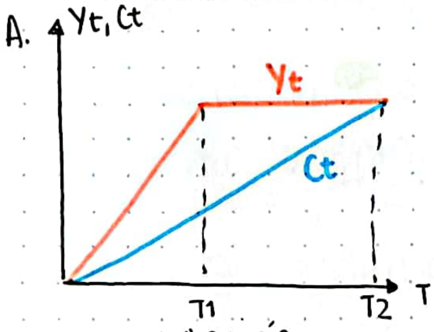
$$c_t \leq c_{t+1}$$

y se cumplirá el siguiente límite:

$$\lim_{t \to \infty} c_t = \bar{S}$$

· **Intuición Gráfica**

① Sin incertidumbre → $c_t = c_{t+1}$



T1: jubilación
T2: muere

Y_t: ingreso acumulado

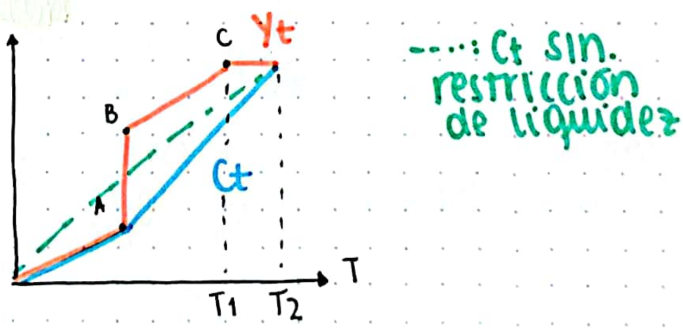
$$Y_t = \int_0^t y_s \, ds$$

C_t: consumo acumulado

$$C_t = \int_0^t c_s \, ds$$

⇒ se cumple $C_t = Y_t$

* Rest. de liquidez nunca es activa C_t siempre $< Y_t$.



→ como el agente no se puede endeudar → Al inicio $C_t = Y_t$, luego puede suavizar.

Caso particular 2:

- u será una función CES con elasticidad de sustitución intertemporal σ
- $y_t = y \quad \forall t$
- $r=0$
- $\delta > 0$
- $x_0 > y$

→ Existe una conjetura que dice que $\exists\, t^*$ tal que el consumo óptimo es de la forma:

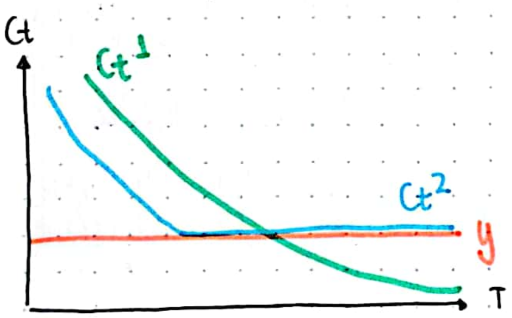
$$c_t = \begin{cases} \gamma^{\sigma t} c_0 & t \le t^* \\ y & t \ge t^*+1 \end{cases}$$

con t^*: Periodo donde consume $c_t > y$ por última vez

El consumo inicial en $t=0$ está determinado por:

$$x_0 - y = \sum_{t=0}^{t^*} (c_t - y)$$

Entonces, gráficamente:



c_t^1: consumo sin restricción de liquidez

c_t^2: consumo con restricción
→ como parto con un $x_0 > 0$ me lo empiezo a consumir a la misma tasa que si no tuviera restricción hasta que se agota $\Rightarrow c_t = y_t = y$

* Propensión mg a consumir fuera de cash on hand

Sea $c_0(x)$ → consumo opt en $t=0$

→ Queremos encontrar $c_0'(x)$
Para eso, vamos a suponer que x incrementa Δx (pequeño) y asumimos que t^* no cambia

$$\Rightarrow c_t + \Delta c_t = \gamma^{\sigma t}(c_0 + \Delta c_0)$$

$$\Rightarrow \Delta c_t = \gamma^{\sigma t} \Delta c_0 \quad (1)$$ → esto sale de

$$c_t + \Delta c_t = \gamma^{\sigma t} c_0 + \gamma^{\sigma t} \Delta c_0$$

→ como sabemos que $c_t = \gamma^{\sigma t} c_0$
$\Rightarrow \Delta c_t = \gamma^{\sigma t} \Delta c_0$

→ luego podemos suponer que:

$$\Delta x = \sum_{t=0}^{t^*} \Delta c_t$$

→ mi cambio en cash on hand es igual a la suma de los cambios en consumo antes de t^* (que es cuando $c_t = y$)

Entonces, podemos aplicar $\sum_{t=0}^{t^*}$ a (1):

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{t^*} \Delta c_t}_{\Delta x} = \Delta c_0 \sum_{t=0}^{t^*} \gamma^{\sigma t}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta c_0}{\Delta x} = \left[\sum_{t=0}^{t^*} \gamma^{\sigma t}\right]^{-1}$$

→ como queremos ver la propensión mg calculamos el lím cuando $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\sum_{t=0}^{t^*} \gamma^{\sigma t}\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{t=0}^{t^*} \gamma^{\sigma t}\right]^{-1} = \frac{1-\gamma^{\sigma}}{1-\gamma^{\sigma(t^*+1)}} \quad (2)$$

luego sabemos que

$$C'(X) = \frac{1-\gamma^{\sigma}}{1-\gamma[\sigma(t^*+1)]}$$

⇒ si aumenta mi cash on hand ⇒ aumenta mi consumo

Al inicio asumíamos que Y_t era determinístico, ahora asumiremos que es estocástico

⇒ $u(C)$ CES
- no hay crecimiento del ingreso ($g=0$)
- $r < \delta$ ⇒ impaciente
- No hay acceso al crédito $A_t \geq 0$
- Puedo ahorrar a la tasa libre de riesgo (r)
- $T = \infty$

→ El consumo dependerá del cash on hand ($X_t = A_t + Y_t$)

→ luego como $A_t \geq 0$

⇒ $C_t \leq X_t$ (rest. liquidez)

luego por concavidad de u se cumple que

$$u'(C_t) \geq u'(X_t)$$

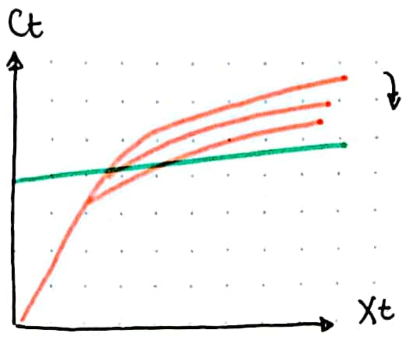
NOTA: f cóncava ⇔ f' es monotonamente decreciente

⇒ $X_1 \geq X_2$ ⇒ $u'(X_1) \leq u'(X_2)$

→ luego Deaton deriva la ecuación de Euler de forma general:

$$u'(C_t) = \max\left\{u'(X_t), \frac{1+r}{1+\delta} E_t[u'(C_{t+1})]\right\}$$

Podemos ver graficamente como el cash on hand afecta al Ct



↓ Al ↑ρ → cae esta curva

¿ρ es δ?

→ Deaton concluye que el consumo en función del cash on hand satisface ($c(x)$):

Si $X_t \leq X^*$: consume todo el cash on hand (MPC=1)

Si $X_t > X^*$: → MPC converge a una constante

$$X^* = X^*(\theta, \mu_Y, \sigma_Y, \delta, r)$$

θ: elast. (?) ; μ_Y: medio ingreso ; σ_Y: St ingreso ; δ: tasa dcto ; r: tasa interés

$$\frac{\partial X^*}{\partial \theta} < 0 \qquad \frac{\partial X^*}{\partial \sigma_Y} < 0 \qquad \frac{\partial X^*}{\partial r} < 0$$

$$\frac{\partial X^*}{\partial \mu_Y} > 0 \qquad \frac{\partial X^*}{\partial \delta} > 0$$

Seguro

Los modelos anteriores hacen referencia al autoseguro, es decir entre consumidores no comparten el riesgo. Además, estos no tenían acceso a seguros contra imprevistos, solo podían ahorrar para hacer frente a los riesgos

Ahora veremos modelos donde se comparte el riesgo

RIESGO COMPARTIDO PERFECTO

Tenemos I agentes y el contexto es una villa en India
⇒ no puedo guardar para el otro periodo

↳ en t → la realización del estado de la economía determina la producción de todos (st).

St captura lluvias, clima, etc.

→ Ahora vamos a caracterizar las asignaciones óptimas de Pareto

Asumimos $\overline{C_t} = \overline{Y_t}$:

$$C_t^i = a^i \overline{C_t} + b^i$$

→ luego para estimar el modelo utiliza:

$$C_t^i = a^i \overline{C_t} + b^i + \alpha y_t^i$$

→ si $\alpha = 0$ → Hay perfecta compartición de riesgo entre los agentes.

→ luego hay que resolver

$$\max \sum_{i \in I} \lambda^i \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} \gamma^t \Pr\{s^t\} u[c_t^i(s^t)]$$

s.a. $Y(S_t) = \sum_{i \in I} y^i(s_t) = \sum_{i \in I} C_t^i(s_t)$

λ: es el peso que se le asigna a c/ consumidor

S^t: "shocks" → estado de la economía en t

luego este modelo se puede reescribir utilizando esperanzas

$$\sum \lambda_i \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t E_0 u(C_t^i)$$

→ la esperanza representa la Pr de que la economía esté de una forma u otra

→ la solución mostrará que no se suaviza el C (pues no hay tecnología de almacenamiento)

PPT muestra modelo

¿Optimizar?

¿Por qué OPT?
- más es mejor → max
- "bolas de billar" → aproximación
- Asignación de recursos
- Mejor Predictor (Samuelson)
- Política óptima simple.

Pero, las teorías racionales pueden fallar. Ej: Teorías de ahorro (Fallan por falta de autocontrol, condiciones distintas para el ahorro, etc)

• Descuento Hiperbólico

Existe un consenso que dice que "las compensaciones a C.P. tienen mayor impaciencia que las de L.P."

→ Entonces, si planteamos un γ constante $\forall t$ → tenemos una inconsistencia dinámica

↳ se plantea una función de acto mejor para los datos reales

$$f(\tau) = \gamma^2 \approx (1+\alpha\tau)^{-\delta/\alpha} \quad \begin{pmatrix}\delta > 0 \\ \alpha > 0\end{pmatrix}$$

→ Hay un sesgo hacia el presente.

→ $U_t = u(c_t) + \eta \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i u(c_{t+i})$

($\eta < 1$ en un mundo hiperbólico)

⇒ las soluciones son din. inconsistentes → no es lo mismo optimizar para mañana hoy o ayer.

MODELO DE SESGO HACIA EL PRESENTE (PROCASTINACIÓN)

vamos a considerar 2 posibilidades:

① D. Hiperbólico Ingenuo: El agente no está consciente de la inconsistencia dinámica
⇒ no hace nada al respecto

② D. Hiperbólico sofisticado: el agente elige su óptimo consciente del juego

Ej: Películas
- esta semana: mala
- otra semana: más o menos
- " ": buena
- " ": excelente

Agente debe faltar a una de las 3 (por trabajo)

→ Entonces su utilidad a partir del momento t de un flujo de recompensas $u_t, u_{t+1}, \ldots$ es:

$$U^t(u_t, u_{t+1}, \ldots, u_T) = u_t + \eta \sum_{s=t+1}^{T} u_s$$

$(\gamma = 1)$

Valoraciones de las Películas
1. 3
2. 5
3. 8
4. 13

• CASO ① $\eta = 1$

$$\max(u_1, \ldots, u_4) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

→ es fácil notar que elige eliminar la 1era película pues ahí maximiza su utilidad

• CASO ② $\eta = 1/2$ y el jugador es ingenuo en $t=1$

$U^t = 3 + \underline{2,5} + 4 + 7,5$

↳ elige eliminar la segunda película

en $t=2$

$U^t = 5 + \underline{4} + 7,5$

↳ elige de nuevo eliminar la de la semana que sigue

en $t=3$

$U^t = 8 + \underline{7,5}$

↳ elimina la final

en $t=4$ → no le queda opción y se pierde la mejor película.

- caso ③ $\eta = 1/2$, y el jugador es sofisticado

en $t=1$

$U^t = 3 + \underline{2,5} + 4 + 7,5$

↳ decide eliminar la segunda.

→ luego como el jugador conoce el juego respeta la decisión tomada en $t=1$.

⇒ Falta a la 2^{da} película.

CONSUMO / AHORRO (EJ)

Individuos viven 3 periodos con UT. dadas:

t	U(·)
1	$\log c_1 + \eta(\log c_2 + \log c_3)$
2	$\log c_2 + \eta \log c_3$
3	$\log c_3$

$(y=1)$

Asumimos
- $r=0$
- $W=1$
- sin incertidumbre

→ Equilibrio recursivo

Resolvemos el problema por inducción

En $t=3$ → c_3 = todo lo que le quede disponible (luego muere)

En $t=2$ → Tomamos como conocido $c_1 = \bar{c}_1$, entonces el agente maximiza:

$$\max_{c_2, c_3} \log(c_2) + n\log(c_3)$$

s.a. $\bar{c}_1 + c_2 + c_3 = 1$

↳ $c_2 = 1 - c_3 - \bar{c}_1$

$$\Leftrightarrow \max_{c_3} \log(1 - c_3 - \bar{c}_1) + n\log(c_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_3} = \frac{1}{1 - c_3 - \bar{c}_1}(-1) + \frac{n}{c_3} = 0$$

$$\Rightarrow c_3 = n(1 - \bar{c}_1 - c_3)$$

$$\Rightarrow c_3(1+n) = n(1 - \bar{c}_1)$$

$$\left[c_3 = \frac{n(1-\bar{c}_1)}{1+n}\right]$$

$$\Rightarrow \left[c_2 = 1 - \frac{n(1-\bar{c}_1)}{1+n} - \bar{c}_1 = \frac{1-\bar{c}_1}{1+n}\right]$$

En $t=1$

$$\max_{c_1} \log c_1 + n(\log(c_2(\bar{c}_1)) + \log(c_3(\bar{c}_1)))$$

$$\Leftrightarrow \max_{c_1} \log c_1 + n\log\left(\frac{1-c_1}{1+n}\right) + n\log\left(\frac{n(1-c_1)}{1+n}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{n}{1-c_1}(-1) + \frac{n}{1-c_1}(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{2n}{1-c_1} \Rightarrow \left[c_1^* = \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$\Rightarrow \left[c_2^* = \frac{2n}{(1+2n)(1+n)}\right]$$

$$\left[c_3^* = \frac{2n^2}{(2n+1)(1+n)}\right]$$

→ Equilibrio con compromiso

En 1 se compromete a niveles de consumo futuros

→ en $t=1$ el óptimo $\boxed{c_1^c = \frac{1}{2n+1}}$

Si maximiza para los demás períodos:

$$\max \log c_1 + n(\log c_2 + \log c_3)$$
$$\text{s.a.} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{n}{c_2} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_3} = \frac{n}{c_3} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{c_2} = \frac{n}{c_3} = \frac{1}{c_1}$$

$$\Rightarrow n c_1 = c_2 = c_3$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2^c = \frac{n}{2n+1}}$$

$$\boxed{c_3^c = \frac{n}{2n+1}}$$

$$c_1^* = c_1^c$$

$$c_2^* = \frac{2n}{(1+2n)(n+1)} = c_2^c \cdot \underbrace{\frac{2}{n+1}}_{<1}$$

$$\Rightarrow c_2^* > c_2^c$$

$$c_3^* = \frac{2n^2}{(2n+1)(1+n)} = c_3^c \cdot \underbrace{\frac{2n}{n+1}}_{>1}$$

$$\Rightarrow c_3^* < c_3^c$$

⇒ compromiso aumenta el ahorro en la mediana edad

Laibson muestra que los consumidores inconsistentes tienen beneficios al imponerles un mecanismo de compromiso.

* En general los consumidores hiperbólicos muestran

- Bajos niveles de riqueza líquida y acciones líquidas
- Muchos préstamos en tarjetas de crédito
- Comovimiento consumo-ingreso
- ↓C al jubilarse

Escaneado con CamScanner

equivalencia Ricardiana

Los gobiernos pueden financiarse con una combinación de
- impuestos
- Deuda Pública
- señoraje
- Privatización de empresas públicas
- Ganancias empresas públicas

Pero ¿cómo debería hacerlo? Veremos la decisión entre deuda v/s impuestos.

* Argumento Keynesiano

Es mejor vía deuda porque así no se afecta la demanda agregada (que depende del ingreso disponible)

$C = Y - T + TR$

* Argumento + sofisticado
(LCT / PIH)

El consumo depende de la riqueza, entonces si el estado vende bonos y el agente los compra $\Rightarrow \uparrow$ su riqueza
$\Rightarrow \uparrow$ su consumo
(mejor la deuda).

— EQUIVALENCIA RICARDIANA —

Barro argumento que da igual pues en el futuro hay que pagar la deuda con T
↳ como suavizo C

① Derivación informal

- Deuda real gobierno en t: $D(t)$
- Gobierno paga en t': $D(t)(1+r)^{t'-t}$

- Riqueza privada en t:
  - $\uparrow$ por $D(t)$
  - $\downarrow$ pues en t' hay que pagar $T(t')$

$\Rightarrow$ la pérdida de riqueza es

$$\left[T(t') \frac{1}{(1+r)^{t'-t}} = D(t) \right]$$

↳ visto desde t.

$\Rightarrow$ Ambos efectos se cancelan entre sí.
$\Rightarrow$ Riqueza no depende de cómo me financio

② Derivación Formal

Supuestos
- mercados perfectos
- Agentes homogéneos
  ↳ consumidor representativo
- r (interés) cte
- $D(t)$ deuda en t
- $G(t)$ gasto en t
- $T(t)$ impuesto de suma alzada en t
- $D, G, T \rightarrow$ variables reales
- t continuo
- Partimos en $t=0 \rightarrow$ Período de Análisis
- G, Y exógeno
- Para el gob. solo existe o deuda o T.

$\rightarrow$ Dicho esto, el déficit del gobierno será la diferencia entre G y sus ingresos

$G(t) - T(t) \rightarrow$ Deficit

$$\Rightarrow \frac{dD(t)}{dt} = G(t) - T(t) + rD(t) \quad (1)$$

↳ el cambio de la deuda en el tiempo t

→ Luego, podemos integrar la derivada de la deuda (con su factor de descuento)

$$\int_0^\infty \frac{dD(t)}{dt} \cdot e^{-rt}$$

→ usamos vaca:

$$= \underbrace{D(t)\cdot e^{-rt}\Big|_0^\infty}_{\left[\lim_{t\to\infty} D(t)\cdot e^{-rt}\right] - D(0)\cancel{e^{-r0}}^{1}} + r\int_0^\infty D(t)\, e^{-rt}\, dt$$

$$\underbrace{\left[\lim_{t\to\infty} D(t)\cdot e^{-rt}\right]}_{=0 \text{ (NO PONZI)}}$$

$$\Rightarrow = r\int_0^\infty D(t)e^{-rt}\,dt \; - [D(0)] \quad (2)$$

→ Ahora usamos (1):

$$\frac{dD(t)}{dt} + T(t) = G(t) + rD(t) \quad / \cdot e^{-rt}$$

$$e^{-rt}\left(\frac{dD(t)}{dt} + T(t)\right) = e^{-rt}(G(t) + rD(t)) \, / \int_0^\infty$$

$$\int_0^\infty \frac{dD(t)}{dt}\cdot e^{-rt} + \int_0^\infty e^{-rt}T(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-rt}G(t) + \int_0^\infty e^{-rt} rD(t) \quad (3)$$

→ (2) en (3):

$$\cancel{\int_0^\infty r\,D(t)e^{-rt}} - D(0) + \int_0^\infty e^{-rt}T(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-rt}G(t) + \cancel{\int_0^\infty e^{-rt} rD(t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty [T(t) - G(t)]e^{-rt} = D(0)}$$

↳ Restricción Presupuestaria del Gobierno.

Ahora, queremos conocer cual es la restricción de los privados

↱ R. Ppataria Privado

$$\boxed{\Rightarrow \int_0^\infty c(t)e^{-rt}dt = [\underset{\text{Deuda Pública}}{D(0)} + \underset{\text{Otros Activos}}{F(0)}] + \int_0^\infty \underbrace{[Y(t) - T(t)]}_{\text{Ingreso disponible}}e^{-rt}dt}$$

Deuda Pública — Otros Activos — Ingreso disponible

* **Problema de optimización del Agente Privado** $(\delta = r)$

$$\max_{c_t} \int_0^\infty u(c_t)\, e^{-rt}\, dt$$

s.a. R. Pptaria Privado
R. Pptaria Gobierno
↳ internaliza la restricción del Gobierno

→ Podemos consolidar ambas restricciones:

$$\int_0^\infty c(t)e^{-rt}dt = \int_0^\infty [\cancel{T(t)} - G(t)]e^{-rt} + F(0)$$

$$+ \int_0^\infty [Y(t) - \cancel{T(t)}]e^{-rt}dt$$

$$\left[\Rightarrow \int_0^\infty c(t)e^{-rt} = F(0) + \int_0^\infty [Y(t) - G(t)]\, e^{-rt}\, dt\right]$$

→ Donde notamos que $D(t), T(t)$ no aparece en el problema de optimización
⇒ son irrelevantes!
↳ **Equivalencia Ricardiana.**

CRÍTICAS

1) La gente no vive ∞ (ie: si gobierno se endeuda hoy ⇒ yo no pago, pagan las otras generaciones).

2) Restricciones de liquidez (nivel hogar)
↳ Al endeudarse el gobierno cuando el agente privado no puede es lo mismo que si se endeudara el hogar ⇒ ↑ mi consumo.

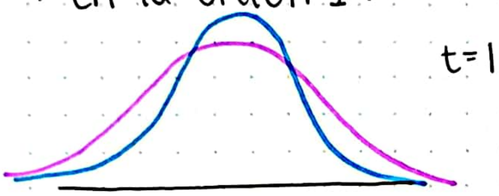
3) Impuestos distorsionantes y ahorro por precaución

→ $T = t \cdot Y$ en $t=1$

Fuentes de financiamiento
Opción 1: impuestos en $t=0$
Opción 2: Deuda en $t=0$, impuestos en $t=1$

En $t=0$ $\quad Y_i = \bar{Y}$
$t=1$ $\quad Y_i \sim N(\bar{Y}', \sigma^2 > 0)$

→ En la opción 1: —



Pero con la opción 2 los que tienen alto ingreso pagan más → se encoge la distribución: —

⇒ Hay menos varianza en la opción 2
⇒ menos incertidumbre
⇒ menos ahorro x precaución
⇒ $\uparrow C_0$

* No da lo mismo D o T

4) Preferencias diferentes
→ asumimos un agente ∞ pero no es así
ej: padre, hijo, nieto
↓
le interesa max su UT. no la de su hijo o nieto
→ solo le deja herencia, no maximiza su UT
⇒ ΔC.

SUAVIZACIÓN de impuestos

Con impuestos distorsionadores sí importa si el gobierno se financia con D ó T

El gobierno quiere minimizar la distorsión (en V.P.) considerando que las distorciones crecen más que proporcionalmente con los T.

PDQ: Es óptimo suavizar los T

- Definimos: Valor monetario de la distorsión de la recaudación T en una economía con PIB = Y:

$$\boxed{V(T,Y) = Y f(T/Y)}$$

$f(0) = 0$, $f' > 0$, $f'' > 0$

$\Rightarrow$ creciente a tasas crecientes

$\rightarrow$ Asumimos: - tiempo discreto
- G, Y dados

$\Rightarrow$ El gobierno optimiza:

$$\left[\begin{array}{l} \min\limits_{T_0, T_1, \ldots} \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t \underbrace{Y_t f(T_t/Y_t)}_{\text{distorsión}} \\ \text{s.a.} \underbrace{\sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot T_t}_{\text{ingreso}} = \underbrace{D_0 + \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t G_t}_{\text{Gasto}} \end{array}\right]$$

(): $\delta = r$

$\rightarrow$ Notamos que el problema es análogo al de consumo

con
- $C_t \rightarrow T_t$
- $A_0 \rightarrow D_0$
- $Y_t \rightarrow G_t$
- $u(\cdot) \rightarrow f(\ /Y) \cdot Y$

$\rightarrow$ máx f. cóncava $\Leftrightarrow$ min f convexa

$\Rightarrow$ Concluimos Euler nuevamente:

$$u'(C_t) = u'(C_{t+1}) \Rightarrow u'(C_t) = \underline{cte}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial\, Y_t f(T_t/Y_t)}{\partial T_t} = cte\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial f(T_t/Y_t)}{\partial T_t} = cte\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_t}{Y_t} = cte} \rightarrow \text{suavización de los impuestos}$$

↳ carga tributaria

MODELO CON INCERTIDUMBRE

$\rightarrow$ supondremos incertidumbre en G

- $f(x) = Kx^2$
  ↳ Distorsión crece al cuadrado con T_t $\left(x = \frac{T_t}{Y_t}\right)$

* Asumimos Hall Random-walk:
$\rightarrow$ mejor predictor es el valor actual:

$$\frac{T_t}{Y_t} = E_t\left[\frac{T_{t+1}}{Y_{t+1}}\right]$$

$\rightarrow$ luego tenemos que

$$\left[\frac{T_t}{Y_t} = \frac{r}{1+r}\left[D_t + \sum_{s \geq 0} \beta^s E_t\left[\frac{G_{t+s}}{Y_{t+s}}\right]\right]\right]$$

$$y \left[\begin{array}{l} \frac{\Delta T_t}{Y_t} = \frac{T_t}{Y_t} - \frac{T_{t-1}}{Y_{t-1}} \\ \quad = \frac{r}{1+r}\left[\sum_{u \geq 0} \beta^s \left\{E_t \frac{G_{t+u}}{Y_{t+u}} - E_{t-1} \frac{G_{t+u}}{Y_{t+u}}\right\}\right] \end{array}\right]$$

* si $\frac{G_t}{Y_t} \sim$ random walk

$$\Rightarrow \frac{\Delta T_t}{Y_t} = \frac{r}{1+r} \sum \beta^s \left[\frac{G_t}{Y_t} - \frac{G_{t-1}}{Y_{t-1}}\right]$$

$$= \frac{\cancel{r}}{\cancel{1+r}} \cdot \frac{\cancel{1+r}}{\cancel{r}} \frac{\Delta G_t}{Y_t}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\Delta T_t}{Y_t} = \frac{\Delta G_t}{Y_t}\right] \Rightarrow T = G$$ [no hay + deficit]