Macroeconomía I
Guía 1

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Álvaro Castillo y Alberto Undurraga

1. Gasto de Gobierno en el modelo de Solow

Introduzcamos gasto de gobierno en el modelo de Solow. Consideremos el modelo básico en tiempo discreto y sin cambio tecnológico, y supongamos que el producto de la economía es

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t),$$

con $G(t)$ el gasto de gobierno en el período t. Imagine que este está dado por $G(t) = \sigma Y(t)$.

a. Discuta cómo la relación entre ingreso y consumo debería cambiar. ¿Es razonable asumir que $C(t) = (1-s)Y(t)$?

b. Suponga que el gasto de gobierno proviene parcialmente del consumo privado, de tal manera que $C(t) = (1 - s - \lambda\sigma)Y(t)$, donde $\lambda \in [0,1]$. ¿Cuál es el efecto de un mayor gasto de gobierno (un mayor σ) en el equilibrio del modelo de Solow?

c. Suponga ahora que una fracción ϕ de $G(t)$ es invertida en stock de capital, de tal manera que la inversión total en el período t está dada por

$$I(t) = (s - (1-\lambda)\sigma + \phi\sigma)Y(t).$$

Muestre que si ϕ es lo suficientemente alto, el ratio de capital-trabajo de estado estacionario va a aumentar como resultado de un mayor gasto de gobierno. ¿Es esto razonable?

2. Modelo de Solow: tres factores productivos

Considere una versión modificada del modelo de Solow en tiempo continuo donde la función de producción agregada es

$$F(K, L, Z) = L^{\beta} K^{\alpha} Z^{1-\alpha-\beta},$$

donde Z es la tierra, disponible en una oferta fija y completamente inelástica. Asuma que $\alpha + \beta < 1$, que el capital se deprecia a una tasa δ y que existe una tasa de ahorro exógena s.

a. Primero suponga que no hay crecimiento de la población. Encuentre el ratio capital-trabajo de estado estacionario. Pruebe que el estado estacionario es único y globalmente estable.

b. Ahora suponga que la población crece a una tasa n, esto es $\dot{L}/L = n$. ¿Que ocurre con el ratio capital-trabajo y el nivel de producto cuando $t \to \infty$? ¿Qué ocurre con el retorno a la tierra y con el salario cuando $t \to \infty$?

Hint: En el desarrollo de la pregunta se enfrentará a una ecuación diferencial no lineal. Para convertirla en una ecuación lineal, le recomendamos definir $x(t) = k(t)^{1-\alpha}$ y notar que $\dot{x}(t)/x(t) = (1-\alpha)\dot{k}(t)/k(t)$. Se recomienda también la lectura de los apéndices matemáticos de los libros de crecimiento económico de Acemoglu o de Barro y Sala-i-Martin para profundizar más en ecuaciones diferenciales.

c. ¿Esperaría que el crecimiento de la población n o la tasa de ahorro s cambien en el tiempo? Si es así, ¿cómo?

3. Embodied technological progress

Una visión del progreso tecnológico es que la productividad de los bienes de capital disponibles en t depende del estado de la tecnología en el período t y no se ve afectado por el progreso tecnológico subsecuente. Esto es conocido como *embodied technological progress* (el cambio tecnológico debe estar "*incorporado*"en el nuevo capital antes de que pueda aumentar el producto). En esta pregunta le pediremos investigar sus efectos.

a. Como preeliminar, modifiquemos el modelo de Solow básico para que el progreso tecnológico sea capital-augmenting en vez de labor-augmenting. Asuma que la función de producción es una Cobb-Douglas: $Y(t) = [A(t)K(t)]^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$. Asuma también que A crece a tasa μ: $\dot{A}(t)/A(t) = \mu$.

   Muestre que la economía converge a una senda estable de crecimiento, y encuentre las tasas de crecimiento de Y y de K en esta senda.

   Hint: Muestre que podemos escribir $Y/(A^{\phi}L)$ como función de $K/(A^{\phi}L)$, donde $\phi = \alpha/(1-\alpha)$. Después analice las dinámicas de $K/(A^{\phi}L)$.

b. Consideremos ahora un progreso tecnológico *embodied*. Específicamente, asumamos que la función de producción es $Y(t) = J(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$, donde $J(t)$ es el stock efectivo de capital. La dinámica de $J(t)$ está dada por $\dot{J}(t) = sA(t)Y(t) - \delta J(t)$. La presencia de $A(t)$ en esta expresión significa que la productividad de la inversión en el período t depende de la tecnología en el período t.

   Muestre que la economía converge a una senda de crecimiento estable. ¿Cuáles son las tasas de crecimiento de Y y J en esta senda?

   Hint: Defina $\bar{J}(t) \equiv J(t)/A(t)$ y use la misma técnica que usó en (a), pero con $\bar{J}/(A^{\phi}L)$ en vez de $K/(A^{\phi}L)$.

c. Encuentre la elasticidad del producto en la senda de crecimiento estable con respecto a s

d. En la vecindad de la senda de crecimiento estable, ¿a qué velocidad converge la economía al a senda de crecimiento estable?

e. Compare sus resultados de (c) y (d) con el modelo básico de Solow.