Universidad de Chile — FEN
Departamento de Economía

Macroeconomía I
Otoño 2014
Examen

Profesor: Eduardo Engel
Ayudantes: Damián Vergara y Marco Rojas
Martes, 8 de julio, 2014

Instrucciones

1. Tiene 10 minutos para leer el enunciado antes de que se distribuyan los sets de respuestas.
2. Tiene una hora y 50 minutos para responder las preguntas.
3. El control tiene 3 preguntas, el número de puntos posibles se indica al comienzo de cada pregunta. El número total de puntos del control es 80.
4. Salvo que se indique explícitamente lo contrario, todas las partes de una pregunta dan el mismo puntaje.
5. Asigne su tiempo de modo de dedicar suficiente tiempo a todas las preguntas. No dedique demasiado tiempo a ninguna de ellas. Dedicar tantos minutos como puntos asignados a cada pregunta es una buena estrategia. Esto deja 30 minutos de libre disposición.
6. Sus respuestas deben contener pasos intermedios para que el evaluador pueda estar seguro de que llegó al resultado correcto sabiendo lo que hacía. Esto también le permitirá al evaluador darle puntaje parcial cuando no obtenga la respuesta correcta.
7. Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
8. Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.

Una fórmula útil

Para $|a| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Expresiones para Equivalencia Cierta

Con la notación utilizada en clases:

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \sum_{s\geq 0}\beta^s \mathrm{E}_t Y_{t+s}\right\}, \\ \Delta C_t &= \frac{r}{1+r}\sum_{u\geq 0}\beta^u \left\{\mathrm{E}_t Y_{t+u}. - \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+u}\right\} \end{aligned}$$

1. **Problema de búsqueda de localización de una firma (25 pts.)**

   Una firma tiene una patente para producir pernos y debe decidir donde instalar la fábrica. El proceso utiliza $L_t \in [0, \bar{L}]$ trabajadores para producir Y_t pernos en el período t de acuerdo con la función de producción $Y_t = A_i\sqrt{L_t}$. Acá A_i captura la productividad de la localización i y $\bar{L}$ denota el mayor número de trabajadores que puede trabajar para la firma en cualquier momento del tiempo. El salario no varía en el tiempo y es igual a w, el precio del perno es constante e igual a uno. Ingresos futuros son descontados con factor de descuento $\beta \in (0,1)$.

   Cada período t la firma obtiene una realización de una localización A del intervalo $[0, \bar{A}]$, de acuerdo a una densidad de probabilidad $f(A)$. La firma puede elegir construir la fábrica en la localización que obtuvo este período o continuar buscando localizaciones en períodos futuros. SI la firma decide continuar buscando, debe esperar un período. Construir una fábrica conlleva un costo (de una sola vez) C.[1] Una vez construida, la fábrica comienza a producir de inmediato: la firma puede contratar trabajadores y producir el mismo período que se construye. La firma construye sólo una fábrica. El valor de A varía a través de localizaciones pero es fijo en el tiempo. El objetivo de la firma es maximizar el valor presente de los beneficios.

   a) *(8 pts)* Escriba la ecuación de Bellman del problema de la firma.

   Respuesta
   Primero se deberá calcular la utilidad óptima para los distintos niveles de trabajo:

$$\pi^*(A) = \begin{cases} \frac{A^2}{4w} & \text{si } L^* \leq \bar{L} \\ A\sqrt{\bar{L}} - w\bar{L} & \text{otro caso} \end{cases}$$

   Luego, dado que la firma debe decidir si sigue buscando o no, la ecuación de Bellman posee la siguiente forma:

$$v(a) = \text{máx}\left\{\frac{\pi^*(A)}{1-\beta} - C, \beta\int v(A')f(A')dA'\right\}$$

   b) *(9 pts)* Demuestre la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de Bellman.

   Respuesta
   El operador posee la siguiente forma:

$$[Tv](a) = \text{máx}\left\{\frac{\pi^*(A)}{1-\beta} - C, \beta\int v(A')f(A')dA'\right\}$$

   Y para demostrar que existe una solución única se deberá demostrar que T preserva acotamiento y satisface las propiedades de monotonicidad y descuento.

[1] C ies suficientemente pequeño de modo que no siempre es óptimo para la firma aceptar la primera localización que obtiene.

Acotamiento

$$\begin{array}{rcl} \text{P.D.} \quad |v(A)| \leq K & \Rightarrow & |[Tv](A)| \leq K' \\ \text{E.E.} \quad |[Tv](A)| & \leq & \left| \text{máx} \left\{ \dfrac{\pi^*(A)}{1-\beta} - C, \beta \int v(A')f(A')dA' \right\} \right| \\ & \leq & \text{máx} \left\{ \left| \dfrac{\pi^*(A)}{1-\beta} - C \right|, \left| \beta \int v(A')f(A')dA' \right| \right\} \\ & \leq & \text{máx} \left\{ \dfrac{\pi^*(A)}{1-\beta} + C, \beta K \right\} \equiv K' \end{array}$$

donde $\pi^*(A)$ está acotado gracia a que $A \in [0, \bar{A}]$.
Monotonicidad

$$\begin{array}{lcl} \text{P.D.} \quad v_1(A) \leq v_2(A) & \Rightarrow & [Tv_1](A) \leq [Tv_2](A) \\ \text{E.E.} \quad v_1(A) \leq v_2(A) & \Rightarrow & \beta \int v_1(A')f(A')dA' \leq \beta \int v_2(A')f(A')dA' \\ & \Rightarrow & \text{máx} \left\{ \dfrac{\pi^*(A))}{1-\beta} - C, \beta \int v_1(A')f(A')dA' \right\} \leq \text{máx} \left\{ \dfrac{\pi^*(A)}{1-\beta} - C, \beta \int v_2(A')f(A')dA' \right\} \\ & \Rightarrow & [Tv_1](A) \leq [Tv_2](A) \end{array}$$

Descuento

$$\begin{array}{rcl} \text{P.D.} \quad [T(v+a)](A) & \leq & [Tv](A) + \beta a \\ \text{E.E.} \quad [T(v+a)](A) & = & \text{máx} \left\{ \dfrac{\pi^*(A)}{1-\beta} - C, \beta \int (v+a)(A')f(A')dA' \right\} \\ & = & \text{máx} \left\{ \dfrac{\pi^*(A)}{1-\beta} - C, \beta a + \int v(A')f(A')dA' \right\} \\ & \leq & [Tv](A) + \beta a \end{array}$$

c) *(8 pts)* Caracterice la política óptima de la firma.

Respuesta
En este caso la política es de umbral en torno a A^* que es obtenido de la siguiente ecuación:

$$\frac{\pi^*(A^*)}{1-\beta} = C + \int v(A')f(A')dA'$$

donde el lado derecho es un número. Y que permite conocer que si el A observado es menor a A^*, entonces se sigue buscando (esto se sabe gracias a que $\pi^*(A)$ es creciente en A), y que si $A > A^*$, entonces la firma construye la fábrica en esa ubicación.

2. **Jubilación, Consumo y Camino Aleatorio (25 pts)**

Los individuos nacen sin activos, trabajan trabajan los primeros L años de su vida, jubilan y no trabajan los $T-L$ años siguientes y luego mueren sin dejar herencia. Los valores de T y L son conocidos y comunes a través de individuos. Para simplificar los cálculos suponemos que $T=\infty$.

El ingreso laboral sigue un camino aleatorio:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

donde los ε_t son i.i.d., normales, de media nula y varianza σ^2.[2]

Los supuestos de equivalencia cierta se satisfacen, en particular, la tasa de interés r es igual a la tasa subjetiva de descuento δ (y ambas son estrictamente positivas, constantes en el tiempo y comunes a todos los individuos).

a) Considere un individuo en el año s de su vida. Encuentre una expresión para su consumo ese año, C_s, en función de sus activos al comienzo del período, A_s, su ingreso laboral ese período, Y_s, y r. Considere los casos en que $s \leq L$ y $s > L$.

Respuesta

Siguiendo la especificación para C_s de equivalencia cierta y que el ingreso,

$$E_s(Y_{s+j}) = \begin{cases} Y_s & \text{si } s \in [0, L] \\ 0 & \text{si } s > L \end{cases}$$

El consumo para el período s cuando se trabaja corresponde a:

$$\begin{aligned} C_s &= \frac{r}{1+r}A_s + \frac{r}{1+r}\sum_{j=0}^{s-L}\beta^j Y_s \\ C_s &= \frac{r}{1+r}A_s + \frac{r}{1+r}\frac{1-\beta^{L-s+1}}{1-\beta}Y_s \\ C_s &= \frac{r}{1+r}A_s + (1-\beta^{L-s+1})Y_s \end{aligned}$$

Y por tanto, en general,

$$C_s = \begin{cases} \frac{r}{1+r}A_s + (1-\beta^{L-s+1})Y_s & \text{si } s \leq L \\ \frac{r}{1+r}A_s & \text{si } s > L \end{cases}$$

b) Use (a) para encontrar $\partial C_s/\partial \varepsilon_s$, donde ε_s denota la innovación de ingreso del año s de su vida.

Respuesta

$$\frac{\partial C_s}{\partial \varepsilon} = \begin{cases} (1-\beta^{L-s+1}) & \text{si } s \leq L \\ 0 & \text{si } s > L \end{cases}$$

[2] Por simplicidad no consideramos la posibilidad que el ingreso promedio crezca en el tiempo. Tampoco nos preocupa la posibilidad que el ingreso sea negativo.

c) Muestre que la expresión obtenida en (b) converge a uno cuando L tiende a infinito. ¿Cuál es la intuición para este resultado? ¿Cuál es la intuición de por qué la derivada es menor que uno cuando $L < \infty$? ¿Cual es la intuición de por qué la derivada decrece con s?

Respuesta

Es fácil verificar que si $L \to \infty$, entonces la derivada es cero. La intuición detrás es que si alguien nunca va a jubilar y los shocks son permanentes, el individuo traspasará completamente los shocks del ingreso al consumo. Luego, si $L < \infty$, la respuesta marginal es menor a uno, puesto que si bien el shock es permanente, es sólo por algunos períodos, por ende debe ahorrar para cuando no pueda trabajar. Finalmente, como s crece, los potenciales períodos donde puede ocurrir un shock son menos, y por ende el consumo marginal decrece.

d) Ahora considere una economía con individuos como los recién descritos, varios de los cuales nacen en cada período. La población crece a tasa n y los shocks de ingresos son comunes a los individuos. Encuentre una expresión para $\partial C_t/\partial \varepsilon_t$, donde C_t ahora denota consumo *agregado*. No es necesario que obtenga expresiones explícitas para las sumas que obtenga.

Respuesta

Denote por $C_{t,t-k}$ el consumo en el período t de los individuos nacidos en $t-k$. Luego,

$$C_t \propto \sum_{k=0}^{T-1} (1+n)^{-k} C_t^{t-k}$$

Y por ende,

$$\frac{\partial C_t}{\partial \varepsilon_t} \propto \sum_{k=0}^{L-1} (1+n)^{-k} [1-\beta^{L+1-k}]$$

e) Compare dos economías idénticas a la descrita en d), salvo que la población crece más rápido en una de ellas. La población total en las dos economías se normaliza a uno. ¿En cuál de las dos economías es mayor la respuesta del consumo a shocks de ingresos? Explique por qué

Respuesta

Esto sucederá en la que posee un crecimiento más rápido, lo cual se explica porque la porción que se jubila es menor y por tanto hay más individuos proporcionalmente reaccionando a los shocks de ingreso. Asimismo, el tiempo promedio hasta que las personas jubilen también es mayor, lo cual también contribuye.

3. **Modelo de Calvo (30 pts)**

Se cumplen los supuestos del Modelo de Calvo visto en clases. La variable de control se denota mediante y, la variable de óptimo estático mediante y^*, existe un continuo de agentes, la probabilidad de ajuste es $1-\rho$ y el factor de descuento de los agentes es β.

$\Delta y^*_{i,t}$ sigue un AR(1):

$$\Delta y^*_{i,t} = \phi \Delta y^*_{i,t-1} + \varepsilon_t$$

con $|\phi| < 1$ y las innovaciones ε_t comunes a todos los agentes.

a) Si el agente i se ajusta en t, ¿qué valor de $y_{i,t}$ elige?

Respuesta

Como se vio en clases, el nivel de $y_{i,t}$ a elegir viene dado por:

$$y_{i,t} = (1-\beta\rho)\sum_{s\geq 0}(\beta\rho)^s E_t y^*_{i,t+s} \tag{1}$$

Y puesto que se conoce el proceso que sigue $y^*_{i,t}$, se puede calcular $E_t y^*_{i,t+s} = \frac{\phi-\phi^{1+k}}{1-\phi}\Delta y^*_{i,t} + y^*_{i,t}$, lo que reemplazado en (1):

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= (1-\beta\rho)\sum_{s\geq 0}(\beta\rho)^s\left[\frac{\phi-\phi^{1+k}}{1-\phi}\right]\Delta y^*_{i,t} + y^*_{i,t} \\ y_{i,t} &= \frac{\beta\rho\phi}{1-\beta\rho\phi}\Delta y^*_{i,t} + y^*_{i,t} \qquad (2) \end{aligned}$$

b) Muestre que la variable agregada y_t sigue un proceso ARIMA(2,1,1):

$$\Delta y_t = a_1\Delta y_{t-1} + a_2\Delta y_{t-2} + c[\varepsilon_t - b\varepsilon_{t-1}].$$

y exprese las constantes a_1, a_2 y b en función de ρ, ϕ y β.

Respuesta

Para calcular el ajuste agregado, hay que considerar que en cualquier momento del tiempo se tendrá que este nivel está dado por, $y_t = \rho y_{t-1} + (1-\rho)y_{i,t}$. Entonces, utilizando (2):

$$y_t = \rho y_{t-1} + (1-\rho)\left[\frac{\beta\rho\phi}{1-\beta\rho\phi}\Delta y^*_{i,t} + y^*_{i,t}\right]$$

Y premultiplicando a ambos lados por $(1-\phi L)(1-L)$:

$$\begin{aligned} (1-\phi L)\Delta y_t &= \rho(1-\phi L)\Delta y_{t-1} + \frac{(1-\rho)\beta\rho\phi}{1-\beta\rho\phi}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) + (1-\rho)\varepsilon_t \\ \Delta y_t &= (\phi+\rho)\Delta y_{t-1} - \rho\phi\Delta y_{t-2} + \frac{1-\rho}{1-\beta\rho\phi}(\varepsilon_t - \beta\rho\phi\varepsilon_{t-1}) \qquad (3) \end{aligned}$$

Lo cual sigue un procesoo $ARIMA(2,1,1)$ y desde donde se puede determinar que $a_1 = \phi+\rho$, $a_2 = -\phi\rho$, $b = \beta\rho\phi$ y $c = \frac{1-\rho}{1-\beta\rho\phi}$.

c) Considere el case particular en que $\phi = 0$ e interprete el resultado de la parte (b).

Respuesta

Con $\phi = 0$, (3) se reduce a:

$$\Delta y_t = \rho\Delta y_{t-1} + (1-\rho)\varepsilon_t$$

Lo cual sigue un proceso $AR(1)$, lo que se interpreta como el hecho de que cuando el óptimo sigue un camino aleatorio, hay un $(1-\rho)\%$ de la variable de control agregada que está explicado directamente por cómo se mueva este óptimo y un restante $\rho\%$ se explica por cómo se ajustó la variable de estado el período pasado. Adicionalmente, se puede observar cómo el shock del óptimo estático no es traspasado "uno a uno" al agregado, gracias al hecho que no todos ajustan en el período.

Considere ahora el caso en que $y^*_{i,t}$ sigue un AR(1):

$$y^*_{i,t} = \psi y^*_{i,t-1} + \varepsilon_t$$

con $|\psi| < 1$ y las innovaciones ε_t comunes a todos los agentes.

d) Si el agente i se ajusta en t, ¿qué valor de $y_{i,t}$ elige?

Respuesta
Puesto que $E_t y_{i,t+s} = \psi^s y^*_{i,t}$, el ajuste en t corresponde a:

$$y_{i,t} = \frac{1-\beta\rho}{1-\beta\rho\psi} y^*_{i,t}$$

e) Determine qué proceso de la familia ARIMA sigue la variable agregada y_t.

Respuesta
Procediendo de manera similar a la parte *b)*, se tiene que:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \frac{(1-\rho)(1-\beta\rho)}{1-\rho\beta\psi} y^*_{i,t}$$

Lo cual multiplicado a ambos lados por $(1-\psi L)$ muestra que la variable agregada siga un proceso $ARIMA(2,0,0)$:

$$\begin{aligned}
(1-\psi L)y_t &= \rho(1-\psi L)y_{t-1} + \frac{(1-\rho)(1-\beta\rho)}{1-\rho\beta\psi}\varepsilon_t \\
y_t &= (\rho+\psi)y_{t-1} - \rho\psi y_{t-2} + \frac{(1-\rho)(1-\beta\rho)}{1-\rho\beta\psi}\varepsilon_t
\end{aligned}$$

f) Determine el proceso de la familia ARIMA que sigue el agregado y_t para los dos casos considerados en este problema (Δy^* sigue un AR(1) y y^* sigue un AR(1)) cuando los costos de ajuste son cuadráticos en lugar de Calvo.

Respuesta
Para el caso cuadrático, el ajuste es de la siguiente forma:

$$y_t = (1-\delta)\sum_{s\geq 0} \delta^s E_t(y^*_{i,t+s})$$

y gracias a lo visto en clases, ambos agregados y_t siguen los mismos procesos ahora con ajuste cuadrático que cuando el ajuste era Calvo.