ENECO610

TAREA I

1. **MWG**
   Resuelva los problemas 1.B.3, 1.B.4, 1.B.5, 2.D.1, 2.D.2, 2.D.3, 2.E.1, 2.E.4, 2.E.6, 2.E.7 y 2.E.8.

2. Para cada una de las siguientes preferencias en $X = \mathbb{R}^2_+$, determinar si estas son: completas, transitivas, monótonas, l.n.s., convexas y homotéticas:

   i. $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow \sum_\ell x_\ell \leq \sum_\ell y_\ell$

   ii. $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow \max\{x_\ell\} \geq \max\{y_\ell\}$

   iii. $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow \min\{x_\ell\} \geq \min\{y_\ell\}$

3. **Preferencias Lexicográficas**
   Sean $\succsim_{lex}$ preferencias lexicográficas definidas en clase. Consideraremos 2 variaciones respecto al conjunto de consumo. Denotaremos por $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de enteros no-negativos $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. La idea es capturar bienes que son indivisibles

   (a) Sea el conjunto de consumo $X^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 \in \mathbb{Z}_+\}$, i.e., el bien 1 es indivisible. Pueden $\succsim_{lex}$ ser representadas por una función de utilidad?

   (b) Sea el conjunto de consumo $X^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_2 \in \mathbb{Z}_+\}$, i.e., el bien 2 es indivisible. Pueden $\succsim_{lex}$ ser representadas por una función de utilidad?

4. **Preferencias Localmente no Saciadas**
   Asuma que el conjunto de consumo $X \subseteq \mathbb{R}^L_+$ y que las preferencias $\succsim$ son completas y transitivas. Discuta la posibilidad de que $\succsim$ sean l.n.s.

5. **Preferencias Monótonas**
   Si $\succsim$ son semi-continuas superiores y monótonas en $\mathbb{R}^L_+$, entonces $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ implica $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$.

6. **Preferencias en Compactos**
   Sean $\succsim$ preferencias definidas sobre X. Para un subconjunto $M \subset X$, definiremos $x \in M$ como el elemento preferido de M si $x \succsim y$ para todo $y \in M$.
   Demuestre que, si $\succsim$ es continua y M es compacto, M contiene un elemento preferido y que el conjunto de elementos preferidos es compacto.

7. **Preferencias Convexas**
   Sean $\succsim$ convexas en X y sea $M \subset X$ un conjunto convexo.

   (a) El conjunto de elementos preferidos en M (definidos en pregunta anterior) es un conjunto convexo.

   (b) Si $\succsim$ son estríctamente convexas, entonces el conjunto de elementos preferidos en M es un singleton. En particular, existe un único punto de saciación en X.

8. Sea Z un conjunto finito y $X = \mathcal{P}(Z)\backslash\{\emptyset\}$ el conjunto potencia de Z excluyendo el conjunto vacío. Definiremos $\succsim$ sobre X con las siguientes propiedades

   i. $A \succsim B$ y C disjunto de A y B, entonces $A \cup C \succsim B \cup C$ (para $\succ$ lo mismo se cumple).

   ii. $x \in Z$ y $\{x\} \succ \{y\}$ para todo $y \in A$, entonces $A \cup \{x\} \succ A$.

   iii. $x \in Z$ y $\{y\} \succ \{x\}$ para todo $y \in A$, entonces $A \succ A \cup \{x\}$.

   (a) De una interpretación a cada una de las propiedades anteriores.

   (b) Muestre que si existen $x, y, z \in Z$ tal que $\{x\} \succ \{y\} \succ \{z\}$ entonces no existe $\succsim$ que cumpla las 3 propiedades simultáneamente.

9. **Función de Utilidad Separable I**
Sea la función de utilidad $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ separable, i.e., $u(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{L} f_\ell(x_\ell)$, con $f'_\ell > 0$, $f''_\ell < 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^L$ y $\ell \in L$.
    (a) Demuestre que para $(\mathbf{p}, \omega) \in \mathbb{R}_{++}^{L+1}$, el problema del consumidor tiene solución única.
    (b) Asuma que las demandas walrasianas son estrictamente positivas y diferenciables. Demuestre que los bienes son normales.

10. **Función de Utilidad Separable II**
Sea la función $\phi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ con $\phi(x_1) > 0$, $\phi'(x_1) > 0$ y $\phi''(x_1) < 0$, para todo $x_1 > 0$. Considere la función de utilidad $u : \mathbb{R}_{++}^2 \to \mathbb{R}$
$$u(x_1, x_2) = \phi(x_1) + \ln(x_2)$$
Restringimos el análisis al conjunto de precios y riqueza tal que la solución al problema del consumidor es estrictamente positiva. Asumiremos también que la demanda walrasiana es diferenciable. Muestre que $\frac{\partial x_1(\mathbf{p},\omega)}{\partial p_2} = 0$.

11. **Matriz de Slutsky**
Demuestre que si la demanda walrasiana es diferenciable, homogénea de grado 0 y satisface la ley de Walras, entonces para $L = 2$ la matriz de Slutsky es simétrica.

12. **Axióma Débil de Preferencias Reveladas**
Demuestre que la demanda Walrasiana satisface el axioma débil de preferencias reveladas.

13. **Demanda Walrasiana I**
Considere la relación de preferencias $\gtrsim$ sobre un conjunto de consumo $X = \mathbb{R}_+^2$ representada por la función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$
$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \gamma x_2, \qquad \text{donde } \gamma > 0.$$
    (a) Es u cóncava? estrictamente cóncava? quasi-cóncava? estrictamente quasi-cóncava?
    (b) Son $\gtrsim$ convexas? estrictamente convexa?
    (c) Compute la demanda Walrasiana asumiendo precios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^L$ e ingreso de $\omega > 0$. Dibuje las curvas de Engel para los bienes 1 y 2.

14. **Demanda Walrasiana II**
Sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_{++}^L$ y $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L : \mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$. Las preferencias están representadas por la siguiente función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$:
$$u(\mathbf{x}) = \min\{x_1 - b_1, \ldots, x_L - b_L\}$$
    (a) Son estas preferencias convexas? estríctamente convexas? monótonas? estríctamente monótonas? l.n.s.?
    (b) Tiene el problema del consumidor una solución única? Encuentre la demanda Walrasiana y su dominio.
    (c) Para un bien $\ell \in L$, es éste normal? superior? (hint: vea el caso $L = 2$).
    (d) Obtenga la función de utilidad indirecta. Chequee la identidad de Roy.
    (e) Obtenga la función de gasto y chequee que sus propiedades se cumplen.
    (f) Obtenga la demanda Hicksiana.
    (g) Obtenga la matriz de Slutsky y chequee que es definida seminegativa y simétrica.