Macroeconomía I - (Segunda parte)
Apunte de cátedra

Otoño 2024
Profesor: Luis F. Céspedes

Jaime Aránguiz R-T.[1]

Última actualización: 25 de diciembre de 2024.

[1]Este resumen está hecho en base a las clases y diapositivas del profesor Luis Céspedes, para la cátedra de Macroeconomía I del Magíster en Economía. Para cualquier corrección o comentario favor escribir a jaranguizr@fen.uchile.cl.

Índice

INTRODUCCIÓN AL CRECIMIENTO

1. Introducción al curso

1.1. Supuestos básicos

1.1.1. Hogares

Tendremos modelos que son dueños de los insumos y activos de la economía. Estos eligen la fracción de su ingreso que consumen, y la fracción que ahorran. Cada hogar determinará el número de miembros del hogar, y si estos se suman o no a la fuerza de trabajo (y cuánto trabajan).

1.1.2. Firmas

Nuestras firmas contratarán insumos (capital y trabajo), que utilizan para producir bienes que son vendidos a los hogares u otras empresas. Además, las firmas tienen acceso a una tecnología, la cual puede ir mejorando en el tiempo. La tecnología les permite transformar los insumos en productos.

2. Modelo de Solow-Swan

2.1. Supuestos

Inicialmente, analizaremos una economía cerrada, de un solo bien. Trabajaremos en tiempo continuo, en una economía habitada por un número grande de hogares (que no optimizarán). Todos los hogares son idénticos, y ahorran una fracción s constante de su ingreso disponible:

$$S = sY$$

Las firmas tendrán acceso a la misma función de producción común. Los insumos de la firma serán el capital físico $K(t)$ y el trabajo $L(t)$, además del conocimiento $T(t)$. La función de producción será

$$Y(t) = F[K(t), L(t), T(t)] \tag{2.1}$$

Donde $Y(t)$ es el flujo de producto en el periodo t.

$K(t)$ representa a los insumos de capital físico durable (maquinaria, edificio, computadores, etc.). Estos insumos son bienes rivales, porque no pueden ser utilizados por múltiples productores a la vez.

$L(t)$ representa el insumo de trabajo (cantidad de trabajadores y el tiempo que estos trabajan). Este también será un insumo rival.

$T(t)$ representa la tecnología (planos, fórmulas que muestran cómo combinar el capital y el trabajo). La característica especial de la tecnología es que no es un bien rival, sino que puede ser utilizada por más de un productor a la vez.

2.2. Definiciones

El bien producido es homogéneo y puede ser utilizado para consumo ($C(t)$) o para inversión ($I(t)$). Por ahora asumimos que no existe gobierno, entonces,

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

Lo que implica que el ahorro debe igualar a la inversión:

$$S(t) \equiv Y(t) - C(t) = I(t)$$

Asumiremos que el capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$ en cada momento del tiempo. Entonces, el incremento neto del stock de capital será:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = sF[K(t), L(t), T(t)] - \delta K(t) \tag{2.2}$$

Donde ocupamos que $I(t) = S(t) = sY(t)$ y definiremos $\dot{K}(t)$ como la derivada del capital respecto al tiempo:

$$\dot{K}(t) \equiv \frac{\partial K}{\partial t}$$

La población crecerá a una tasa exógena igual a n. Es decir, $\frac{\dot{L}}{L} = n \geq 0$, con lo cual podemos desarrollar que

$$\begin{aligned}
\dot{L} - nL &= 0 \\
\int \left[\dot{L} - nL\right] dt &= 0 \\
\int e^{-nt} \left[\dot{L} - nL\right] dt &= 0 \\
e^{-nt} L + c_1 &= c_2 \\
e^{-nt} L &= b_0
\end{aligned}$$

Pero si normalizamos la población en $t = 0$ a 1, tendremos que $L(0) = 1 = b_0$ y llegamos a que la población

$$L(t) = e^{nt} \tag{2.3}$$

Comenzaremos asumiendo que el nivel de tecnología es constante.

2.3. Función de producción neoclásica

Como ya dijimos, la función de producción tomará la siguiente forma:

$$Y(t) = F[(K(t), L(t), T(t)]$$

Diremos esta función debe cumplir con los siguientes supuestos:

1. Retornos constantes a escala.
2. Productividad marginal positiva y decreciente en cada insumo.
3. Condiciones de Inada.

2.3.1. Supuesto 1: Retornos constantes a escala

Por definición, tendremos que

$$F(\lambda K, \lambda L, T) = \lambda F(K, L, T), \quad \forall \lambda > 0 \tag{2.4}$$

Alternativamente, esto implica que el producto puede ser escrito como

$$F(K, L, T) = L \cdot F(K/L, 1, T) = L \cdot f(k)$$

Donde $k = K/L$ es el cociente capital-trabajo e $y = Y/L$ el producto per cápita.

2.3.2. Supuesto 2: Productividad marginal positiva decreciente

Para todo $K > 0$ y $L > 0$, la función de producción tiene productividad marginal positiva y decreciente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3.3. Supuesto 3: Condiciones de Inada

El producto marginal del capital y del trabajo tiende a infinito cuando cada insumo tiende a cero, y tiende a cero cuando cada insumo tiende a infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty \\ \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.4. Productividades marginales

Recordando que

$$Y = L \cdot f(k) \tag{2.7}$$

Entonces, el capital per cápita o por trabajador lo podemos expresar de la forma intensiva de la función de producción:

$$y = f(k) \tag{2.8}$$

Diferenciando Y respecto a K, para un L fijo:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = L \cdot f'(k) \cdot \frac{1}{L} = f'(k) \tag{2.9}$$

Y respecto a L para un K fijo:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) - L \cdot f'(K/L) \cdot \frac{K}{L^2} = f(k) - k \cdot f'(k) \tag{2.10}$$

Entonces, dado (2.9), las condiciones de Inada implican que

$$\lim_{K \to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{K \to \infty} f'(k) = 0$$

2.4.1. Dinámica del stock de capital

Como dijimos en (2.2), el cambio en el stock de capital será

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = s \cdot F[K(t), L(t), T(t)] - \delta K(t)$$

Dividiendo por L, obtenemos

$$\dot{K}/L = s \cdot f(k) - \delta k$$

Pero podemos desarrollar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K/L}{\partial t} &= \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} \\
\dot{k} &= \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L} \cdot \frac{K}{L} \\
\dot{k} &= \frac{\dot{K}}{L} - nk \\
\frac{\dot{K}}{L} &= \dot{k} + nk
\end{aligned}$$

Reemplazando esto en lo anterior llegamos a que

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k \tag{2.11}$$

Donde el término $(n + \delta)$ puede ser interpretado como la tasa efectiva de depreciación de k.

2.5. Los mercados

También podemos llegar a la conclusión anterior encontrando los pagos de cada insumo. En nuestro primer modelo hemos asumido que los hogares son dueños de la tecnología y se quedan con el producto que se genera. Además, estos serán dueños de activos financieros, que pagan una tasa de interés $r(t)$, y de la oferta de trabajo, que recibe un salario $w(t)$. Entonces, la acumulación de activos de cada hogar viene dada por

$$\frac{\partial A}{\partial t} = r \cdot A + w \cdot L - C$$

Expresando en términos per cápita:

$$\frac{\dot{A}}{L} = r \cdot a + w - c$$

Pero de forma similar a lo que hicimos con $\dot{K}/L$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A/L}{\partial t} &= \frac{\dot{A}L - A\dot{L}}{L^2} \\
\dot{a} &= \frac{\dot{A}}{L} - \frac{\dot{L}}{L} \cdot \frac{A}{L} \\
\dot{a} &= \frac{\dot{A}}{L} - na \\
\frac{\dot{A}}{L} &= \dot{a} + na
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\dot{a} = ra + w - c - na \tag{2.12}$$

2.6. El problema de la firma

Las firmas contratan trabajo y capital para producir su producto, que venden a un precio unitario. R será el precio de arriendo del capital. Entonces, la tasa de retorno neto para un hogar que es dueño del capital será $R-\delta$. Como los hogares también pueden prestar sus ahorros a una tasa r, llegamos a la típica condición de equilibrio del costo de usuario:

$$r = R-\delta \iff R = r+\delta$$

Por otro lado, la utilidad instantánea de la empresa es

$$\pi = F(K,L,T)-(r+\delta)K-wL \tag{2.13}$$

Como no hay costos de ajuste, la firma no resuelve un problema dinámico, sino que cada periodo resuelve el problema de maximizar (2.13) con respecto a sus insumos. Notemos que también podemos expresar esta función objetivo como

$$\pi = L\cdot[f(k)-(r+\delta)k-w]$$

Luego, la CPO respecto a k será

$$L\cdot f'(k)-L\cdot(r+\delta)=0 \implies f'(k)=r+\delta=R \tag{2.14}$$

Además, la condición de cero utilidades[2] nos dice que

$$f(k)-(r+\delta)k-w=0 \implies f(k)-f'(k)k-w \implies f(k)-k\cdot f'(k)=w \tag{2.15}$$

2.6.1. Ecuación de Euler

Dado que los precios de los factores son iguales a sus respectivas productividades marginales, el pago a los factores será igual al producto. Alternativamente, como $F(K,L)$ es homogénea de grado 1 en K y L, entonces se cumple que:

$$F(K,L)=F_K\cdot K+F_L\cdot L$$

2.7. Equilibrio de la economía

Dado que la economía es cerrada, el único activo disponible es el capital, es decir, $a=k$. Reemplazando esto en (2.12):

$$\dot{k}=rk-c+w-nk$$

Reemplazando lo encontrado en (2.14) y (2.15) tendremos que:

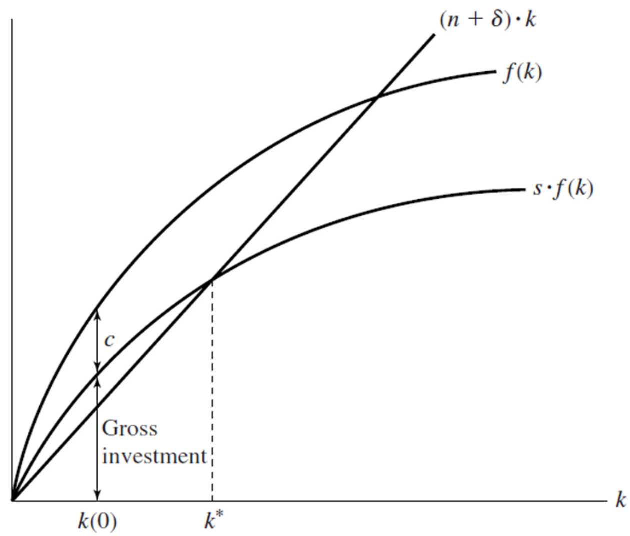
$$\dot{k}=(f'(k)-\delta)k-c+(f(k)-k\cdot f'(k))-nk=f(k)-c-(n+\delta)k$$

Finalmente, aplicando que los hogares ahorran una fracción de su ingreso ($f(k)-c=s\cdot f(k)$) llegamos a

$$\dot{k}=s\cdot f(k)-(n+\delta)\cdot k$$

Que es lo mismo que encontramos en (2.11). Gráficamente:

[2]Esta condición es resultado de que la función de producción es homogénea de grado 1, entonces con utilidades distintas a cero el óptimo de la empresa es aumentar la escala al infinito o a cero. En un equilibrio de mercados completos tendremos que $\pi=0$.



2.8. El estado estacionario

Definiremos el estado estacionario como la situación en la cual las cantidades crecen a una tasa constante. Dividiendo (2.11) por k tenemos que:

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k)}{k} - (n+\delta)$$

Dado que s, n y δ son constantes, y el lado izquierdo es constante, debe ocurrir que $f(k)/k$ sea constante en estado estacionario. Veamos en qué caso ocurre que $(\dot{f(k)/k}) = 0$:

$$\frac{\partial f(k)/k}{\partial t} = \frac{f'(k)k\dot{k} - f(k)\dot{k}}{k^2} = \frac{f'(k)}{k}\dot{k} - \frac{f(k)}{k^2}\dot{k} = \frac{\dot{k}}{k}\frac{1}{k}\underbrace{\left[kf'(k) - f(k)\right]}_{-w} = 0$$

Sigue del último paso que la única posibilidad para que se cumpla la condición de estado estacionario es que $\dot{k} = 0$. Esto ocurre cuando la curva $sf(k)$ se corta con el rayo $(n+\delta)k$. En este punto, el valor de estado estacionario del capital per cápita cumple con

$$s\cdot f(k^*) = (n+\delta)\cdot k^* \tag{2.16}$$

Luego, como k es constante, tanto y como c también serán constantes:

$$y^* = f(k^*) \qquad\qquad c^* = (1-s)\cdot f(k^*)$$

Es decir, sin crecimiento de la tecnología, las cantidades per cápita de capital, producto y consumo no crecen en el tiempo (en estado estacionario). De forma equivalente, K, Y y C crecen a una tasa igual a la tasa de crecimiento de la población (n).

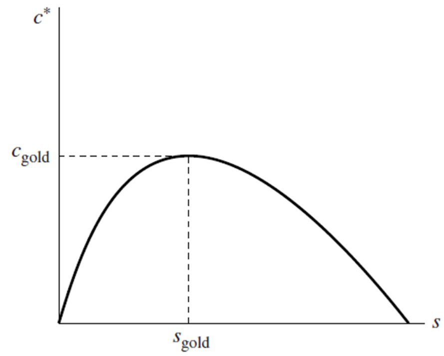
2.8.1. La regla de oro

Para una función de producción y unos valores de n y δ dados, existirá un único valor de $k^* > 0$ en estado estacionario para cada valor de s, $k^*(s)$, con $\frac{\partial k^*(s)}{\partial s} > 0$.

Para el consumo, aplicando (2.16) tendremos que

$$c^*(s) = f[k^*(s)] - s \cdot f[k^*(s)] = f[k^*(s)] - (n+\delta)k^*(s) \tag{2.17}$$

Dadas las propiedades de la función de producción, tendremos un nivel de ahorro que maximiza el consumo:



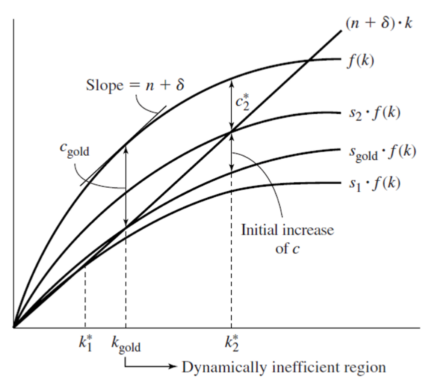
maximizando (2.17) respecto a k^* llegamos a que el capital de estado estacionario que maximiza el consumo cumple con que

$$f'(k_{gold}) = n + \delta \tag{2.18}$$

Entonces, el nivel de consumo de la regla dorada viene dado por

$$c_{gold} = f(k_{gold}) - (n+\delta)k_{gold}$$

Gráficamente:



Lo anterior implica que

- Cuando la economía está por debajo de k_{gold}, una mayor tasa de ahorro incrementaría el consumo de estado estacionario.
- Cuando la economía está por encima de k_{gold}, una menor tasa de ahorro incrementaría el consumo de estado estacionario. Sin embargo, este caso es irrelevante (ineficiente dinámicamente) en términos prácticos, porque la economía podría consumir el mismo nivel de consumo con menos ahorro.

2.9. La dinámica de transición

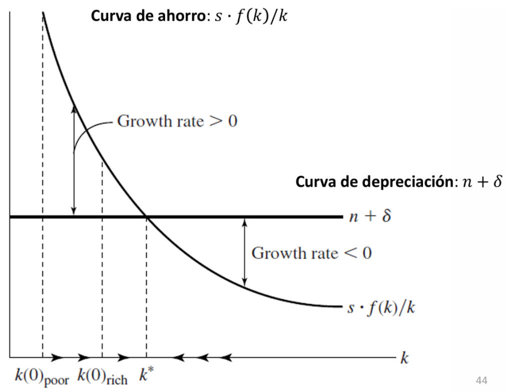
Recordando que el modelo de Solow-Swan sin crecimiento tecnológico y algún stock de capital inicial K_0 dado viene descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \dot{k} = s \cdot f(k) - (n+\delta) \cdot k \\
&(2) \quad s \cdot f(k^*) = (n+\delta)k^* \\
&(3) \quad c = (1-s)f(k) \\
&(4) \quad f'(k) = r+\delta \\
&(5) \quad [f(k) - k \cdot f'(k)] = w
\end{aligned}$$

Definiremos una senda de equilibrio como una secuencia de stock de capital, trabajo, producto, consumo, salarios y tasa de interés que cumple con las relaciones descritas en (1)-(5) y con $L(t) = e^{nt}$. Dividiendo (1) a ambos lados por k obtenemos la tasa de crecimiento del capital per cápita:

$$\dot{k}/k = s \cdot f(k)/k - (n+\delta) \tag{2.19}$$

Notando que el primer término es decreciente en k, tendremos que la dinámica de crecimiento de k puede ser representada gráficamente como:



Dado que $(n+\delta) > 0$ y que $s \cdot f(k)/k$ cae monotónicamente desde infinito a cero, tendremos que la curva de ahorro y depreciación se cortan en un solo punto. Este punto es el equilibrio de estado estacionario, donde $k^* > 0$.

2.9.1. Sistema globalmente estable

Diremos que el sistema será globalmente estable si este converge a un estado estacionario. Es decir, que partiendo de cualquier $k(0) > 0$, tengamos que $k(t) \to k^*$. En el modelo de Solow-Swan esto ocurre si se cumple el supuesto 2 (productos marginales positivos decrecientes en cada insumo) y el supuesto 3 (condiciones de Inada) al mismo tiempo.

Revisar demostración de Acemoglu.

2.9.2. Transición del producto

La tasa de crecimiento del producto vendrá dada por

$$y = f(k) \implies \ln y = \ln f(k) \implies \frac{\dot{y}}{y} = \frac{1}{f(k)} \cdot f'(k) \cdot \dot{k} \implies \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} \cdot \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)}$$

Notando que $\frac{k \cdot f'(k)}{f(k)}$ representa la fracción del ingreso que paga al capital, y reemplazando $\dot{k}/k$ de (2.19), tendremos que

$$\frac{\dot{y}}{y} = s \cdot f'(k) - (n+\delta) \cdot Sh(k) \tag{2.20}$$

Donde $Sh(k) \equiv \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)}$. Diferenciando esto respecto a k:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{y}/y}{\partial k} &= s \cdot f''(k) - (n+\delta)\frac{\partial Sh(k)}{\partial k} \\
\frac{\partial \dot{y}/y}{\partial k} &= s \cdot f''(k) - (n+\delta)\frac{(f'(k) + kf''(k)) \cdot f(k) - (kf'(k)) \cdot f'(k)}{[f(k)]^2} \\
\frac{\partial \dot{y}/y}{\partial k} &= s \cdot f''(k) - (n+\delta)\left[\frac{f'(k)}{f(k)} + \frac{f''(k) \cdot k}{f(k)} - \frac{[f'(k)]^2 \cdot k}{[f(k)]^2}\right] \\
\frac{\partial \dot{y}/y}{\partial k} &= s \cdot f(k)/k \left[\frac{f''(k) \cdot k}{f(k)}\right] - (n+\delta)\left[\frac{f''(k) \cdot k}{f(k)}\right] - (n+\delta)\left[\frac{f'(k)}{f(k)} - \frac{[f'(k)]^2 \cdot k}{[f(k)]^2}\right] \\
\frac{\partial \dot{y}/y}{\partial k} &= \left[\frac{f''(k) \cdot k}{f(k)}\right] \cdot \frac{\dot{k}}{k} - (n+\delta)\left[\frac{f'(k)}{f(k)} - \frac{[f'(k)]^2 \cdot k}{[f(k)]^2}\right] \\
\frac{\partial \dot{y}/y}{\partial k} &= \left[\frac{f''(k) \cdot k}{f(k)}\right] \cdot \frac{\dot{k}}{k} - \frac{(n+\delta) f'(k)}{f(k)}\left[1 - \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)}\right]
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la definición de $Sh(k)$ llegamos a que

$$\frac{\partial \dot{y}/y}{\partial k} = \left[\frac{f''(k) \cdot k}{f(k)}\right] \cdot \frac{\dot{k}}{k} - \frac{(n+\delta) f'(k)}{f(k)}[1 - Sh(k)]$$

Por definición, el término $[1 - Sh(k)]$ es positivo, por lo que el segundo término de la ecuación es negativo. Respecto al primer término:

- Si $k < k^*$ tendremos que $\dot{k}/k > 0$, con lo cual el primer término será negativo y la tasa de crecimiento del producto será decreciente a medida que aumente k.
- Si $k > k^*$ tendremos que $\dot{k}/k < 0$, con lo cual el primer término será positivo y el signo de la tasa de crecimiento será ambiguo. Sin embargo, diremos que cerca de k^* $\dot{k}/k$ será pequeño y dominará el efecto del segundo término (negativo), de forma que el producto decrecerá más a medida que k aumente.

2.9.3. Transición de los precios

Recordando que la condición de (2.14) implica que

$$r = f'(k) - \delta$$

Dado que la productividad marginal del capital es decreciente:

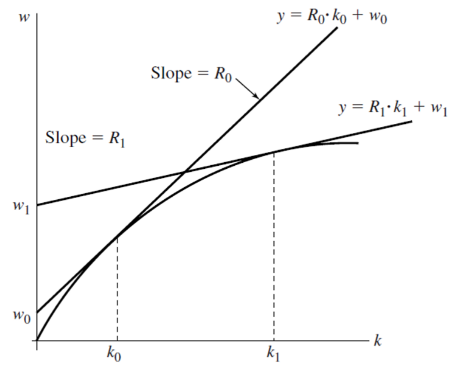
$$\frac{\partial r}{\partial k} = f''(k) < 0$$

La tasa de interés caerá monotónicamente hasta su valor de estado de estacionario: $r^* = f'(k^*) - \delta$. Este resultado está respaldado por el hecho de que los países desarrollados normalmente exhiben tasas de interés más bajas, y viceversa.

Por su parte, el salario de equilibrio que viene de (2.15):

$$w = f(k) - k \cdot f'(k) \implies \frac{\partial w}{\partial k} = f'(k) - f'(k) - k \cdot f''(k) = -k \cdot f''(k) > 0$$

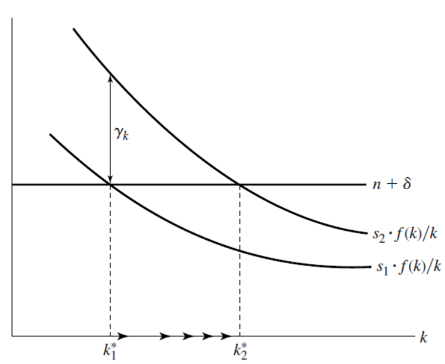
El salario aumentará monotónicamente hasta su valor de estado estacionario a medida que el capital per cápita aumenta.



2.10. Experimentos de política

2.10.1. Aumento permanente en la tasa de ahorro

Si aumenta permanentemente s, la curva de ahorro, $s \cdot f(k)$, se mueve hacia arriba. El aumento permanente en la tasa de ahorro genera un aumento permanente en el nivel de capital per cápita de estado estacionario, que genera un aumento transitorio en las tasas de crecimiento (hasta que se llegue al nuevo estado estacionario.



Un ejemplo real de este experimento de política son los tigres asiáticos.

Otros experimentos de política que podríamos analizar fácilmente serían: un cambio en la tasa de crecimiento de la población, un cambio en la tasa de depreciación, un aumento transitorio en el nivel de tecnología.

2.11. Función de producción Cobb-Douglas

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

Dividiendo por L, esta puede ser expresada en su forma intensiva:

$$y = Ak^{\alpha}$$

Esta función cumple con todos los supuestos de la función de producción neoclásica:

$$\begin{gathered} f'(k) = A\alpha k^{\alpha-1} > 0 \\ f'(k) = -A\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2} < 0 \\ \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0 \\ \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty \end{gathered}$$

Ahora, la **propiedad clave de la función de producción Cobb-Douglas** es que la participación del pago al trabajo y al capital son constantes. Específicamente:

$$\frac{Rk}{f(k)} = \alpha \qquad\qquad \frac{w}{f(k)} = 1-\alpha$$

2.11.1. Modelo de Solow-Swan con una Cobb-Douglas

Reemplazando esta forma funcional en (2.16) obtenemos que

$$sA(k^*)^{\alpha} = (n+\delta)\cdot k^*$$

Despejando k^*:

$$k^* = \left[\frac{sA}{(n+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.21}$$

Evaluando esto en la función de producción:

$$y^* = A\left[\frac{sA}{(n+\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{s}{(n+\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

La transición hacia el estado estacionario vendrá de (2.19):

$$\dot{k}/k = sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta) \tag{2.22}$$

Donde si $k < k^*$, entonces $\dot{k}/k > 0$, y viceversa. Además, por (2.20):

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha\left[sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta)\right] = \alpha\frac{\dot{k}}{k}$$

Con esta función, podemos resolver la trayectoria del capital per capital de forma analítica. Primero, reemplazando la Cobb-Douglas en la dinámica de k (2.11):

$$\dot{k} = s\cdot Ak^{\alpha} - (n+\delta)\cdot k \quad\Longrightarrow\quad \dot{k}\cdot k^{-\alpha} = sA - (n+\delta)k^{1-\alpha}$$

Definiendo $v \equiv k^{1-\alpha}$ podemos desarrollar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\ln v &= (1-\alpha)\ln k \\
\frac{\dot{v}}{v} &= (1-\alpha)\frac{\dot{k}}{k} \\
\dot{k} &= \frac{\dot{v}}{v}\frac{k}{(1-\alpha)} \\
\frac{\dot{k}}{k^{\alpha}} &= \frac{\dot{v}}{v}\frac{k^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \\
\frac{\dot{k}}{k^{\alpha}} &= \frac{\dot{v}}{(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

Reemplazando esto en la dinámica de k nos queda la siguiente ecuación diferencial, que debemos resolver:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha}\dot{v} + (n+\delta)v &= sA \\
\dot{v} + (1-\alpha)(n+\delta)v &= sA(1-\alpha) \\
\int e^{(1-\alpha)(n+\delta)t}\left[\dot{v} + (1-\alpha)(n+\delta)v\right]dt &= \int e^{(1-\alpha)(n+\delta)t} sA(1-\alpha)dt \\
e^{(1-\alpha)(n+\delta)t}\cdot v + b_0 &= sA(1-\alpha)\int e^{(1-\alpha)(n+\delta)t}dt \\
e^{(1-\alpha)(n+\delta)t}\cdot v + b_0 &= sA(1-\alpha)\left[\frac{e^{(1-\alpha)(n+\delta)t}}{(1-\alpha)(n+\delta)} + b_1\right] \\
v + e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}b_0 &= \frac{sA}{(n+\delta)} + sA(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}b_1 \\
v(t) &= \frac{sA}{(n+\delta)} + e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}\left[sA(1-\alpha)b_1 - b_0\right]
\end{aligned}$$

Resolviendo según las condiciones iniciales llegamos a que:

$$v \equiv k^{1-\alpha} = \frac{sA}{(n+\delta)} + \left[[k(0)]^{1-\alpha} - \frac{sA}{(n+\delta)}\right]e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}$$

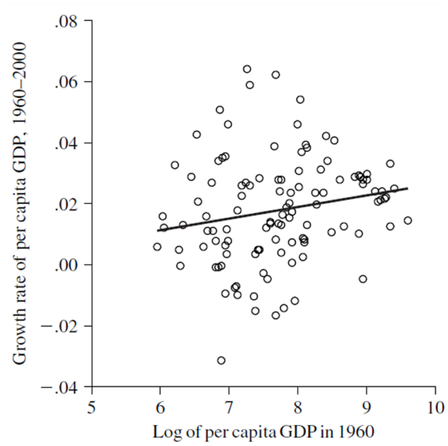
Es decir, la brecha entre $k^{1-\alpha}$ y su valor de estado estacionario se cierra a una tasa constante $(1-\alpha)(n+\delta)$.

2.12. Convergencia condicional y absoluta

En el modelo que hemos visto hasta ahora, valores más pequeños de k van asociados a valores más positivos de $\dot{k}/k$.

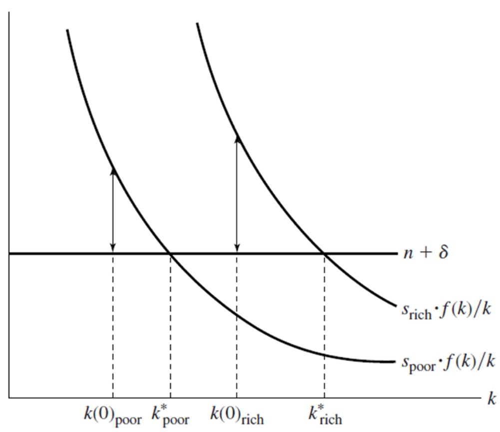
2.12.1. Convergencia absoluta

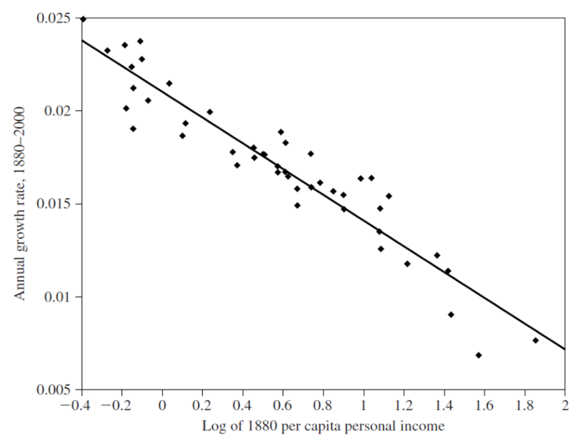
Considerando economías cerradas con los mismos parámetros estructurales s, n y δ y la misma función de producción, estas tendrán el mismo valor de estado estacionario para k e y. Entonces, **las economías con un nivel inicial de capital per cápita más pequeño crecerán más rápido a este estado estacionario**. Es decir, ignorando las diferencias entre países, los países pobres deberían crecer más rápido en términos per cápita que los países ricos. Sin embargo, esto no se cumple empíricamente:



2.12.2. Convergencia condicional

Como lo anterior no se cumple, surge el concepto de convergencia condicional. Esto es, los países que están más lejos de su estado estacionario crecerán más rápido en términos per cápita que los países que están más cerca. Esto sí se cumple en los datos:





2.12.3. Velocidad de convergencia

Tomando (2.19) como base:

$$\gamma_k \equiv \dot{k}/k = s \cdot f(k)/k - (n+\delta)$$

Reemplazando la Cobb-Douglas:

$$\dot{k}/k = sAk^{\alpha-1} - (n+\delta)$$

Entonces, definimos la velocidad de convergencia como

$$\beta \equiv -\frac{\partial \dot{k}/k}{\partial \ln k} = -\frac{\partial \dot{k}/k}{\partial k} \cdot k$$

Resolviendo esto,

$$\beta = (1-\alpha)sAk^{-(1-\alpha)}$$

Es decir, la velocidad de convergencia no es constante, sino que cae a medida que k aumenta hacia su valor de estado estacionario. Reemplazando (2.21), en estado estacionario tendremos que la velocidad de convergencia será:

$$\beta^* = (1-\alpha)sA\left[\frac{sA}{(n+\delta)}\right]^{\frac{-(1-\alpha)}{1-\alpha}} = (1-\alpha)(n+\delta)$$

Entonces, considerando la siguiente función (que es la dinámica del capital per cápita):

$$\frac{\dot{k}}{k} = (\dot{\ln k}) = sAe^{-(1-\alpha)\ln k} - (n+\delta)$$

Podemos calcular la expansión de Taylor de primer orden respecto al valor de estado estacionario ($\ln k^*$):

$$\begin{aligned}
(\dot{\ln k}) &= sAe^{-(1-\alpha)\ln k^*} - (n+\delta) + \frac{\partial}{\partial \ln k}\left[sAe^{-(1-\alpha)\ln k^*} - (n+\delta)\right](\ln k - \ln k^*)\\
(\dot{\ln k}) &= sA(k^*)^{-(1-\alpha)} - (n+\delta) + \left[-(1-\alpha)sAe^{-(1-\alpha)\ln k^*}\right](\ln k - \ln k^*)\\
(\dot{\ln k}) &= sA(k^*)^{-(1-\alpha)} - (n+\delta) - (1-\alpha)sA(k^*)^{-(1-\alpha)}(\ln k - \ln k^*)\\
(\dot{\ln k}) &= sA\left[\frac{sA}{(n+\delta)}\right]^{-1} - (n+\delta) - (1-\alpha)sA\left[\frac{sA}{(n+\delta)}\right]^{-1}(\ln k - \ln k^*)\\
(\dot{\ln k}) &= (n+\delta) - (n+\delta) - (1-\alpha)(n+\delta)(\ln k - \ln k^*)\\
(\dot{\ln k}) &= -(1-\alpha)(n+\delta)(\ln k - \ln k^*)\\
(\dot{\ln k}) &= -\beta^*(\ln k - \ln k^*)
\end{aligned}$$

Luego, recordando que $y = Ak^\alpha \implies \ln y = \ln A + \alpha \ln k$, tendremos que:

$$\begin{aligned}
(\dot{\ln y}) &= \alpha(\dot{\ln k})\\
(\dot{\ln y}) &= -\alpha\beta(\ln k - \ln k^*)\\
(\dot{\ln y}) &= \beta((\alpha \ln k^* + \ln A) - (\alpha \ln k + \ln A))\\
(\dot{\ln y}) &= \beta(\ln y^* - \ln y)\\
(\dot{\ln y}) + \beta \ln y &= \beta \ln y^*
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial:

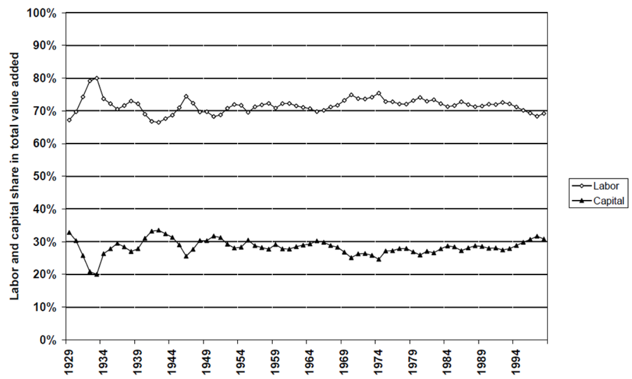
$$\ln y_T = (1-e^{-\beta T})\ln y^* + e^{-\beta T}\ln y_0$$

2.13. Progreso tecnológico y crecimiento balanceado

El supuesto de que el nivel de tecnología es constante es poco realista, por lo que ahora introduciremos el concepto de progreso tecnológico.

2.13.1. Crecimiento balanceado

El crecimiento balanceado implica tener una trayectoria que sea consistente con el siguiente hecho estilizado (Kaldor, 1963): Mientras el producto per cápita aumenta, el cociente producto capital, la tasa de interés y la distribución entre el pago del trabajo y del capital se mantienen relativamente constantes.



El crecimiento balanceado nos permitirá describir la economía a través de ecuaciones diferenciales con estados estacionarios bien definidos.

2.13.2. Tipos de innovaciones tecnológicas

Definiremos 3 tipos:

- Hicks neutral:
$$Y = T(t) \cdot F(K,L)$$
- Solow neutral:
$$Y = F(K \cdot T(t), L)$$
- Harrod neutral:
$$Y = F(K, L \cdot T(t))$$

Con el objetivo de que exista crecimiento balanceado, nosotros tomaremos las innovaciones tecnológicas del último tipo, es decir, progreso tecnológico "*labor-augmenting*".

2.13.3. Modelo de Solow-Swan con progreso tecnológico

Ahora tendremos que
$$\dot{K} = s \cdot F[K, L \cdot T(t)] - \delta K$$

Podemos reescribir este modelo en términos de la cantidad efectiva de trabajo: $L \cdot T(t) \equiv \hat{L}$, en cuyo caso:

$$\hat{k} \equiv \frac{K}{L \cdot T(t)} \qquad \hat{y} \equiv \frac{Y}{L \cdot T(t)} = f(\hat{k})$$

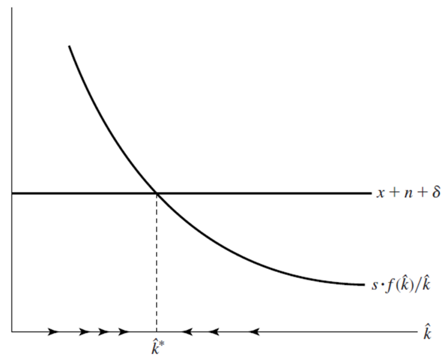
Podemos mostrar de forma equivalente a como lo hicimos en (2.19) que si $T(t)$ crece a una tasa x, tendremos que

$$\dot{\hat{k}}/\hat{k} = s \cdot f(\hat{k})/\hat{k} - (x+n+\delta)$$

Entonces, en estado estacionario ($\dot{\hat{k}} = 0$) tendremos que

$$s \cdot f(\hat{k}^*) = (x+n+\delta) \cdot \hat{k}^*$$

Con lo cual $\hat{k}, \hat{y}$ y $\hat{c}$ son constantes y k, y y c crecen a una tasa x.



De manera análoga al modelo sin progreso tecnológico, asumiendo una función de producción Cobb-Douglas ($\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}$), la velocidad de convergencia en torno al estado estacionario ahora será

$$\beta^* = (1-\alpha)(x+n+\delta)$$

MODELO NEOCLÁSICO DE CRECIMIENTO

3. Modelo de Ramsey de economía cerrada

3.1. Introducción

Antes, en el modelo de Solow-Swan, la tasa de ahorro era exógena. Ahora estudiaremos un modelo donde los hogares optimizan su consumo.

3.1.1. Supuestos

Tendremos hogares que viven hasta el infinito, y maximizan la utilidad de su consumo sujeto a una restricción presupuestaria.

En este modelo, la tasa de ahorro es una función del stock de capital per cápita.

3.2. Hogares

Los hogares proveen trabajo a cambio de un salario, y reciben intereses por sus activos. Todos los hogares son iguales. La tasa de crecimiento de la población es n y la economía es cerrada. Tal como lo hicimos en (2.3), si normalizamos $L(0) = 1$ el número de adultos del hogar será

$$L(t) = e^{nt}$$

El consumo por adulto será $c(t) \equiv C(t)/L(t)$. Entonces, cada hogar maximiza lo siguiente:

$$U = \int_0^\infty u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt$$

Es decir, la utilidad en el periodo cero será la suma ponderada de todos los flujos futuros de utilidad. Asumiremos que la función de utilidad es creciente y cóncava en c: $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$. Como en todos los modelos tradicionales de consumo, la concavidad genera el deseo de suavizar consumo a través del tiempo.

También asumiremos que se cumplen las condiciones de Inada:

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$$
$$\lim_{c \to \infty} u'(c) = 0$$

Para que U esté delimitada si c es constante asumiremos que $\rho > n > 0$. Por otro lado, los hogares usan el ingreso que no consumen para acumular activos:

$$\dot{A}(t) = r(t) \cdot A(t) + w(t) \cdot L(t) - C(t)$$

Dividiendo por $L(t)$ y aplicando que $\dot{A}/L = \dot{a} + na$ obtenemos que

$$\dot{a}(t) = r(t) \cdot a(t) + w(t) - c(t) - n \cdot a(t)$$

Es decir, los activos per cápita crecen con el ingreso per cápita, $r(t) \cdot a(t) + w(t)$, caen con el consumo, $c(t)$, y caen con el aumento de la población, $n \cdot a(t)$. Para evitar los esquemas de tipo Ponzi asumiremos que los mercados financieros imponen la siguiente restricción al endeudamiento:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ a(t) \cdot exp\left[-\int_0^t [r(s)-n]ds \right] \right\} \geq 0 \tag{3.1}$$

Esta restricción implica que en el largo plazo la deuda por persona de cada hogar no puede crecer más rápido que $r(t) - n$. O, lo que es lo mismo, que la deuda total del hogar no puede crecer tan rápido como $r(t)$.

3.2.1. Problema del hogar

Entonces, combinando todo lo anterior, el problema del hogar queda así:

$$\begin{aligned}
\max_{c(t)} \quad & \int_0^\infty u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt \\
s.a. \quad & \dot{a}(t) = w(t) + [r(t)-n] \cdot a(t) - c(t) \\
& \lim_{t\to\infty} \left\{ a(t) \cdot exp\left[-\int_0^t [r(v)-n]dv \right] \right\} \geq 0 \\
& a(0) \text{ dado} \\
& c(t) \geq 0
\end{aligned}$$

El Hamiltoniano de este problema será:

$$H(\cdot) = u[c(t)] \cdot e^{-(\rho-n)t} + v(t) \{ w(t) + [r(t)-n] \cdot a(t) - c(t) \}$$

donde $v(t)$ es el multiplicador dinámico de Lagrange. Este es el "precio sombra" de a, el valor que un hogar le da a tener una unidad más de activos per cápita.

Las condiciones de primer orden del problema vienen dados por las condiciones de optimalidad del problema de control óptimo:

$$\begin{aligned}
(1): \quad & \frac{\partial H}{\partial c} = 0 && \Longrightarrow \quad v = u'(c) \cdot e^{-(\rho-n)t} \\
(2): \quad & \frac{\partial H}{\partial a} = -\dot{v} && \Longrightarrow \quad \dot{v} = -(r-n) \cdot v \\
(3): \quad & \lim_{t\to\infty} [v \cdot a] = 0 && \text{(Condición de transversalidad)}
\end{aligned}$$

3.2.2. Ecuación de Euler

Tomando la derivada de la condición (1), reemplazando la condición (2) para $\dot{v}$ y reemplazando la condición (1) para v podemos desarrollar que

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= u''(c)\cdot e^{-(\rho-n)t}\cdot\dot{c}-(\rho-n)u'(c)\cdot e^{-(\rho-n)t}\\
-(r-n)\cdot v &= u''(c)\cdot e^{-(\rho-n)t}\cdot\dot{c}-(\rho-n)u'(c)\cdot e^{-(\rho-n)t}\\
-(r-n)u'(c)\cdot e^{-(\rho-n)t} &= u''(c)\cdot e^{-(\rho-n)t}\cdot\dot{c}-(\rho-n)u'(c)\cdot e^{-(\rho-n)t}\\
-(r-n)u'(c) &= u''(c)\cdot\dot{c}-(\rho-n)u'(c)\\
-ru'(c) &= u''(c)\cdot\dot{c}-\rho u'(c)\\
r &= \rho-\left[\frac{u''(c)}{u'(c)}\right]\dot{c}\\
r &= \rho-\left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)
\end{aligned}$$

Es decir, para que exista una trayectoria creciente en el consumo ($\dot{c}>0$), debe ocurrir que la impaciencia sea compensada con el retorno de los ahorros ($r>\rho$). Esta expresión nos dice que los hogares eligen un consumo que iguale la tasa de retorno r a la tasa de impaciencia ρ más la tasa de caída de la utilidad marginal del consumo debido a un incremento en c. Por lo tanto, el lado derecho de la ecuación puede ser interpretado como la **tasa de retorno del consumo**.

En particular, el término $-\left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]$ es una medida de la concavidad de la función de utilidad y es el recíproco de la **elasticidad de sustitución intertemporal**. Por ejemplo para una CES tendremos que

$$u(c)=\frac{c^{(1-\theta)}-1}{1-\theta}\quad\Longrightarrow\quad -\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}=-\frac{-\theta\cdot c^{-\theta-1}\cdot c}{c^{-\theta}}=\theta>0$$

donde sabemos que la elasticidad de sustitución intertemporal viene dada por $\sigma=1/\theta$. Entonces, reemplazando esto en lo anterior, tenemos que

$$\dot{c}/c=\frac{1}{\theta}(r-\rho) \tag{3.2}$$

Es decir, un mayor θ implicará que los agentes están menos dispuestos a intercambiar consumo intertemporalmente y prefieren suavizar mucho el consumo ($\dot{c}/c\to 0$). Cuando $\theta\to 0$, la función de utilidad tiende a una líneal y los hogares son indiferentes al momento en que consumen si $r=\rho$.

3.2.3. La condición de transversalidad

La condición de transversalidad nos dice que el valor de los activos per cápita debe tender a cero cuando $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to\infty}[v(t)\cdot a(t)]=0$$

La intuición de esto es que los agentes no quieren dejar ningún activo valioso para después de su muerte. Luego, recordando la condición de primer orden (2):

$$\dot{v}=-(r-n)\cdot v\quad\Longleftrightarrow\quad\dot{v}+(r-n)\cdot v=0$$

Resolviendo esta ecuación diferencial:

$$\int e^{(r-n)t}\left[\dot{v}+(r-n)v\right]dt = \int 0dt$$
$$e^{(r-n)t}\cdot v + b_0 = b_1$$
$$e^{(r-n)t}\cdot v = b$$

Pero por la condición de optimalidad (1) tenemos que $v(0) = u'[c(0)] = b$, entonces[3]

$$v(t) = u'[c(0)]\cdot exp\left[-\int_0^t [r(s)-n]ds\right]$$

Reemplazando esto en la condición de optimalidad (3), obtenemos la condición de transversalidad (que en el óptimo está activa):

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot exp\left[-\int_0^t [r(s)-n]ds\right]\right\} = 0 \tag{3.3}$$

Donde ocupamos que $u'[c(0)]$ es una constante distinta de cero, entonces es irrelevante para el argumento del límite. Es decir, la cantidad de activos por persona no puede crecer a una tasa tan alta como $(r-n)$.

3.2.4. Función de consumo

Estudiemos el término:

$$exp\left[-\int_0^t [r(s)]ds\right]$$

que aparece en la condición de transversalidad. Este término corresponde al factor de valor presente que convierte una unidad de ingreso en el periodo t a una unidad de ingreso en el periodo 0. Si $r(s)$ fuera constante, tendríamos que esto sería e^{-rt}. Ahora, definamos la tasa promedio en ese mismo periodo como

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds$$

Consideremos la restricción presupuestaria de cada hogar:

$$\dot{a}(t) - (r-n)a(t) = w(t) - c(t)$$

Podemos resolver esta ecuación diferencial y obtener que para un periodo $T \geq 0$:

$$a(T)\cdot e^{-[\bar{r}(T)-n]T} + \int_0^T c(t)\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]t}dt = a(0) + \int_0^T w(t)\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]t}dt$$

Para $T\to\infty$, tenemos que

$$\int_0^\infty c(t)\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]t}dt = a(0) + \tilde{w}(0) \tag{3.4}$$

donde definimos $\tilde{w}(0) = \int_0^\infty w(t)\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]t}dt$. Es decir, el valor presente del consumo debe igualar a la riqueza de los agentes definida como la suma de los activos iniciales y el valor presente de los ingresos laborales.

[3] En la demostración omitimos el hecho de que $r(t)$ depende del tiempo, pero es equivalente.

Tomemos la ecuación de euler para el caso CES (3.2):

$$\dot{c}-\frac{1}{\theta}(r-\rho)\cdot c=0$$

Resolviendo esta ecuación diferencial:

$$\int e^{-\frac{1}{\theta}(\bar{r}(t)-\rho)t}\left[\dot{c}-\frac{1}{\theta}(r-\rho)\cdot c\right]dt=\int 0dt$$
$$e^{-\frac{1}{\theta}(\bar{r}(t)-\rho)t}\cdot c+b_0=b_1$$
$$e^{-\frac{1}{\theta}(\bar{r}(t)-\rho)t}\cdot c=b$$

Pero $c(0)=b$. Entonces,

$$c(t)=c(0)\cdot e^{(1/\theta)[\bar{r}(t)-\rho]t}$$

Reemplazando esto en (3.4) obtenemos que

$$\int_0^\infty\left[c(0)\cdot e^{(1/\theta)[\bar{r}(t)-\rho]t}\right]\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]t}dt=a(0)+\tilde{w}(0)$$
$$c(0)\cdot\int_0^\infty e^{(1/\theta)[\bar{r}(t)-\rho]t-[\bar{r}(t)-n]t}dt=a(0)+\tilde{w}(0)$$
$$c(0)=\mu(0)\left[a(0)+\tilde{w}(0)\right]$$

Donde $\mu(0)$ es por definición la propensión marginal a consumir de la riqueza:

$$\frac{1}{\mu(0)}=\int_0^\infty e^{[(1-\theta)/\theta\cdot\bar{r}(t)-\rho/\theta+n]t}dt$$

Entonces, un aumento en la tasa de interés promedio genera dos efectos en $\mu(0)$:

- Efecto sustitución: Aumenta el costo de consumir hoy en relación al consumo futuro. Disminuye el consumo presente.
- Efecto ingreso: Aumenta el retorno de los activos, lo que tenderá a aumentar el consumo en todos los periodos.

¿Cuál efecto domina? Si $\theta<1$, entonces un aumento de $\bar{r}$ conlleva una disminución en $\mu(0)$ y domina el efecto sustitución. Esto es, con θ bajo, los agentes tienen una elasticidad de sustitución intertemporal alta y se preocupan menos por suavizar consumo.

Por otro lado con θ alto. tendremos que el efecto de un aumento en $\bar{r}$ sobre $\mu(0)$ es bajo[4], por lo que dominará el efecto ingreso. Esto es, con θ alto los agentes tendrán una elasticidad de sustitución intertemporal baja y se preocuparán mucho por suavizar consumo

3.3. Empresas

3.3.1. Definiciones

Diremos que las empresas producen bienes, pagan salarios y el arriendo del capital. Todas las empresas tendrán acceso a la siguiente tecnología (que cumple los supuesto neoclásicos):

$$Y(t)=F[K(t),L(t),T(t)]$$

[4]Notar que $\frac{1-\theta}{\theta}=\frac{1/\theta-1}{1}$ es decreciente en θ.

Donde el nivel de tecnología crece a una tasa exógena $x \geq 0$. Es decir, normalizando $T(0) = 1$, tendremos que

$$T(t) = e^{xt}$$

Como dijimos antes, para que exista un camino balanceado al estado estacionario se necesita que el progreso tecnológico aumente el trabajo, por lo que:

$$Y(t) = F[K(t), L(t) \cdot T(t)]$$

Nuevamente, definamos el trabajo efectivo como

$$\hat{L} = L \cdot T(t)$$

Entonces, podemos escribir la función de producción como

$$Y(t) = F[K(t), \hat{L}(t)] \implies \hat{y} = f(\hat{k})$$

donde asumiremos $f(0) = 0$. Entonces, el producto marginal del capital viene dado por

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \hat{L} \cdot f'(\hat{k}) \cdot \frac{1}{\hat{L}}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(\hat{k})$$

Mientras que el producto marginal del trabajo viene dado por

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = T \cdot f(\hat{k}) + \hat{L} \cdot f'(\hat{k}) \cdot -\frac{K}{T^2 L^2} T$$
$$\frac{\partial Y}{\partial L} = e^{xt} \cdot f(\hat{k}) - e^{xt} \cdot f'(\hat{k})\hat{k}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right] e^{xt}$$

Por lo tanto, bajo esta formulación se siguen cumpliendo las condiciones de Inada:

$$\lim_{\hat{k} \to 0} f'(\hat{k}) = \infty$$
$$\lim_{\hat{k} \to \infty} f'(\hat{k}) = 0$$

El precio de arriendo de una unidad de capital será $R(t)$ y no hay costos de instalación, pero el capital se deprecia a una tasa δ. Luego, dado que el capital y los préstamos son sustitutos perfectos:

$$r = R - \delta$$

3.3.2. Problema de la empresa

Con todo esto en cuenta, la empresa representativa maximiza

$$\pi = F(K, L) - (r + \delta)K - wL = \hat{L} \cdot \left[f(\hat{k}) - (r + \delta)\hat{k} - we^{-xt}\right]$$

Luego, las condiciones de primer orden del problema vienen dadas por:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \hat{L} \cdot \left[f'(\hat{k}) \cdot \frac{1}{\hat{L}} - (r+\delta) \cdot \frac{1}{\hat{L}} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = T \cdot \left[f(\hat{k}) - (r+\delta)\hat{k} - we^{-xt} \right] + \hat{L} \cdot \underbrace{\left[f'(\hat{k}) \cdot \frac{-K}{\hat{L}^2 T} - (r+\delta) \cdot \frac{-K}{\hat{L}^2 T} \right]}_{=0} = 0$$

Que reordenando dan:

$$f'(\hat{k}) = r + \delta \tag{3.5}$$

$$w = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k}) \right] e^{xt} \tag{3.6}$$

3.4. Equilibrio

Dado que la economía es cerrada, tendremos que $k = a$. Entonces, podemos notar las siguientes ecuaciones:

$$\dot{a} = w + ra - c - na$$
$$\hat{k} = k \cdot e^{-xt}, \quad k = \hat{k} \cdot e^{xt}$$
$$\hat{c} = c \cdot e^{-xt}, \quad c = \hat{c} \cdot e^{xt}$$
$$a = k, \quad \dot{a} = \dot{k}$$
$$\dot{k} = \dot{\hat{k}} e^{xt} + x\hat{k}e^{xt}$$

Si desarrollamos la restricción presupuestaria dejándola en términos de $\hat{k}$ y $\dot{\hat{k}}$, y reemplazando r de (3.5) y w de (3.6) podemos encontrar que:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{k}} e^{xt} + x\hat{k}e^{xt} &= \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k}) \right] e^{xt} + (f'(\hat{k}) - \delta)\hat{k}e^{xt} - \hat{c}e^{xt} - n\hat{k}e^{xt} \\
\dot{\hat{k}} + x\hat{k} &= \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k}) \right] + (f'(\hat{k}) - \delta)\hat{k} - \hat{c} - n\hat{k} \\
\dot{\hat{k}} &= f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}
\end{aligned}$$

Esta será la ecuación diferencial que determinará la evolución de $\hat{k}$ y $\hat{y}$ en el tiempo. Para completar el modelo, falta determinar la ecuación diferencial que determina la evolución de $\hat{c}$. Como asumimos una función de utilidad CES, por (3.2) tendremos que la ecuación de Euler del problema del hogar será

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

Ahora, notemos que podemos desarrollar que

$$\begin{aligned}
\dot{c} &= \dot{\hat{c}} e^{xt} + x\hat{c}e^{xt} \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{\dot{\hat{c}} e^{xt}}{c} + x\frac{\hat{c}e^{xt}}{c} \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{\dot{\hat{c}} e^{xt}}{\hat{c}e^{xt}} + x\frac{\hat{c}e^{xt}}{\hat{c}e^{xt}} \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} + x
\end{aligned}$$

Reemplazando esto en la ecuación de Euler y utilizando (3.5):

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]$$

Que completa la descripción del modelo de Ramsey. En resumen, el equilibrio viene descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\cdot\hat{k} \tag{3.7}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right] \tag{3.8}$$

Junto con la condición inicial $k(0)$ y la condición de transversalidad, este sistema define la trayectoria de la economía en el tiempo. Recordando la condición de transversalidad del hogar (3.3) y reemplazando $a = k$, $r = f'(\hat{k}) - \delta$ y $k = \hat{k}\cdot e^{xt}$, llegamos a que:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot exp\left[-\int_0^t [r(v)-n]dv\right]\right\} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\hat{k}\cdot e^{xt}\cdot exp\left[-\int_0^t [f'(\hat{k})-\delta-n]dv\right]\right\} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\hat{k}\cdot exp\left[-\int_0^t [f'(\hat{k})-\delta-x-n]dv\right]\right\} = 0$$

Es decir, en estado estacionario el retorno del capital ($f'(\hat{k}) - \delta$) debe ser mayor a la tasa de crecimiento de K ($x+n$).

3.5. Estado estacionario

Al igual que en el modelo de Solow-Swan, tendemos que la única posibilidad de que $\hat{k}$, $\hat{c}$ e $\hat{y}$ sean constantes en estado estacionario es que $\dot{\hat{c}} = \dot{\hat{k}} = 0$[5]. Entonces, el estado estacionario del sistema viene dado por

$$\dot{\hat{k}} = 0 \implies \hat{c}^* = f(\hat{k}^*) - (x+n+\delta)\cdot\hat{k}^* \tag{3.9}$$

$$\dot{\hat{c}} = 0 \implies f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x \tag{3.10}$$

Donde notemos que de la segunda condición $\hat{c}^* = 0$ también es una situación plausible.

3.5.1. Caracterización de la regla dorada

Recordando que $\hat{k}_{gold}$ es el nivel de capital que maximiza el consumo, podemos derivar la siguiente condición:

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x+n+\delta)\cdot\hat{k} \implies \frac{\partial\hat{c}}{\partial\hat{k}} = f'(\hat{k}) - (x+n+\delta) = 0$$

$$f'(\hat{k}_{gold}) = x+n+\delta$$

Por otro lado, sabemos de la condición de estado estacionario y la condición de transversalidad que

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x > x+n+\delta$$

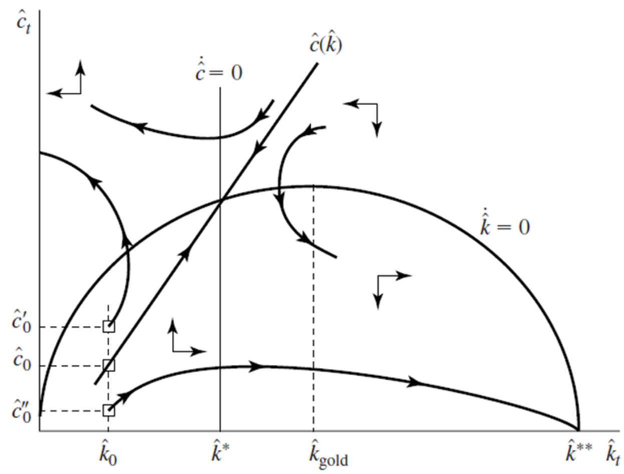
Es decir,

$$f'(\hat{k}_{gold}) < f'(\hat{k}^*) \implies \hat{k}^* < \hat{k}_{gold}$$

[5] Revisar PPT p43-46.

3.5.2. Diagrama de fases

Graficando las condiciones (3.9) y (3.10) y los vientos correspondiente:



3.5.3. La importancia de la condición de transversalidad (horizonte finito)

Supongamos que la economía se acaba en el periodo $T > 0$ y la función de utilidad viene dada por:

$$U = \int_0^T u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt$$

En este caso, la condición de no Ponzi será

$$a(t) \cdot exp\left[-\int_0^T [r(v) - n]dv\right] \geq 0$$

y la restricción sigue siendo

$$\dot{a}_t = r(t) \cdot a(t) + w(t) - c(t) - n \cdot a(t)$$

Es decir, las condiciones de optimización del hogar son idénticas al problema de horizonte infinito, excepto por la condición de transversalidad, que ahora es

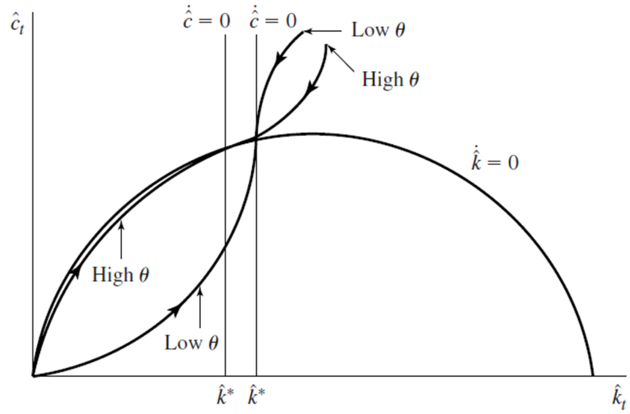
$$a(T) \cdot exp\left[-\int_0^T [r(v) - n]dv\right] = 0$$

Que implica que $a(T) = 0 \implies k(T) = 0$ dado que en tiempo finito el término exponencial no puede ser cero. El problema de las firmas es el mismo que antes y las condiciones de equilibrio de estado estacionario seguirán siendo (3.9) y (3.10). Luego, dado $\hat{k}_0$, la elección de $\hat{c}_0$ requiere que el stock de capital sea exactamente igual a cero en T. En otras palabras, el brazo estable que lleva a la economía a $(\hat{k}^*, \hat{c}^*)$ no es un equilibrio, sino que el consumo de equilibrio será necesariamente mayor al nivel del brazo estable.

En el gráfico anterior, una posible trayectoria de equilibrio sería la que comienza en $\hat{c}_0'$ y lleva a la economía al punto donde $\hat{k}_T = 0$ y $\hat{c}_T > 0$ (eje y).

3.5.4. La forma de la trayectoria estable

Consideremos diferentes valores para θ, que es el recíproco de la elasticidad de sustitución intertemporal. A mayores valores de θ, las personas tienen preferencias fuertes por suavizar consumo, y vice versa. Entonces, a medida que θ aumenta, la trayectoria estable se verá más pegada a la curva $\dot{\hat{k}}$, dado que el nivel de ahorro (e inversión) será menor cada periodo y la transición al estado estacionario tomará más tiempo. La misma lógica en el sentido contrario aplica para valores más pequeños de θ.



3.6. Comportamiento de la tasa de ahorro

Por definición, la tasa de ahorro es igual a

$$s = 1 - \frac{\hat{c}}{f(\hat{k})}$$

Mientras en el modelo de Solow-Swan esta tasa era constante, en el modelo de Ramsey esta será determinada óptimamente por parte de los hogares. El comportamiento de la tasa de interés dependerá de la interacción entre dos efectos que van en dirección contraria:

- A medida que $\hat{k}$ aumenta, por rendimientos decrecientes $f'(\hat{k})$ disminuye, por condición de equilibrio r disminuye y el atractivo de los ahorros cae. Es decir, s disminuye a medida que la economía se desarrolla.
- A medida que $\hat{k}$ es bajo, el ingreso por trabajador efectivo $f(\hat{k})$ es menor al de estado estacionario. Como los hogares buscan suavizar consumo, la tasa de ahorro disminuye a medida que la economía es menos desarrollada.

Asumiendo una función de producción Cobb-Douglas, podemos demostrar que la tasa de ahorro de estado estacionario es igual a[6]

$$s^* = \alpha \cdot \frac{(x+n+\delta)}{(\delta+\rho+\theta x)}$$

Además, sabemos de la condición de estado estacionario y la condición de transversalidad que

$$f'(\hat{k}^*) = \delta+\rho+\theta x > x+n+\delta$$

[6] Ver desarrollo guía 2. Enlace dropbox.

lo cual implica que $s^* < \alpha$. Para analizar el comportamiento de la tasa de interés, debemos escribir el modelo en términos de $\hat{k}$ y $\hat{c}/\hat{y}$ (ver desarrollo guía 2):

$$\frac{\dot{(\hat{c}/\hat{y})}}{(\hat{c}/\hat{y})} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x\right] - \alpha\left[\hat{k}^{\alpha-1} - (\hat{c}/\hat{y})\cdot\hat{k}^{\alpha-1} - (x+n+\delta)\right]$$

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \hat{k}^{\alpha-1} - (\hat{c}/\hat{y})\hat{k}^{\alpha-1} - (x+n+\delta)$$

Entonces, los locus $\frac{\dot{(\hat{c}/\hat{y})}}{(\hat{c}/\hat{y})} = 0$ y $\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = 0$ vienen dados por las siguientes ecuaciones:

$$(\hat{c}/\hat{y}) = 1 - (x+n+\delta)\hat{k}^{1-\alpha}$$

$$(\hat{c}/\hat{y}) = -\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + \left[\frac{(\delta+\rho+\theta x)}{\alpha\theta} - (x+n+\delta)\right]\hat{k}^{1-\alpha}$$

Donde notemos que la pendiente del segundo locus depende del término

$$\frac{(\delta+\rho+\theta x)}{\alpha\theta} - (x+n+\delta) \gtreqless 0$$

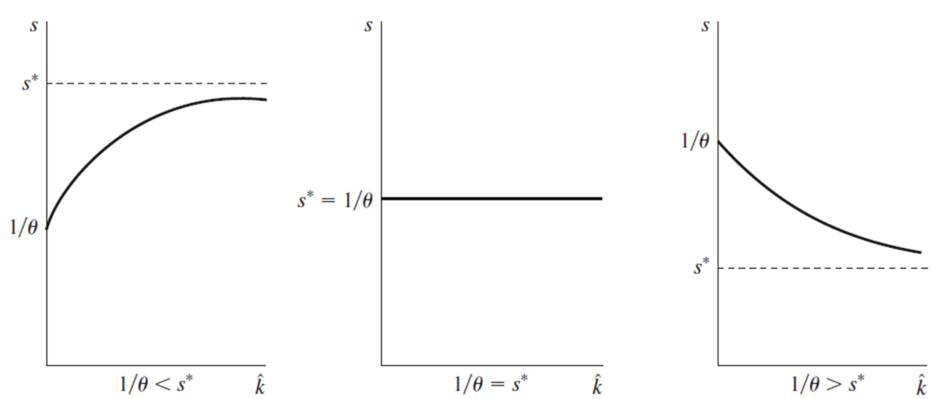
$$\frac{1}{\theta} - \frac{\alpha(x+n+\delta)}{(\delta+\rho+\theta x)} \gtreqless 0$$

$$\frac{1}{\theta} - s^* \gtreqless 0$$

$$\frac{1}{\theta} \gtreqless s^*$$

Es decir, existen tres posibles casos para el comportamiento de s:

- Si $s^* < \frac{1}{\theta}$: $(\hat{c}/\hat{y})$ es creciente en $\hat{k}$ $\implies$ s es decreciente en $\hat{k}$.
- Si $s^* = \frac{1}{\theta}$: $(\hat{c}/\hat{y})$ es constante en $\hat{k}$ $\implies$ s es constante en $\hat{k}$.
- Si $s^* > \frac{1}{\theta}$: $(\hat{c}/\hat{y})$ es decreciente en $\hat{k}$ $\implies$ s es creciente en $\hat{k}$.



3.7. Velocidad de convergencia

Recordando el sistema de ecuaciones diferenciales que define el modelo de Ramsey:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}$$
$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]$$

Para estudiar la velocidad de convergencia, debemos log-linealizar el sistema, aplicando una expansión de Taylor de primer orden en torno a los valores de estado estacionario y siguiendo una serie de instrucciones (ver desarrollo guía 2). En particular, llegaremos a que

$$2\beta^* = \left\{\zeta^2 + 4 \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right) \cdot (\rho + \delta + \theta x) \cdot \left[\frac{\rho + \delta + \theta x}{\alpha} - (x + n + \delta)\right]\right\}^{1/2} - \zeta$$

donde $\zeta = \rho - n - (1-\theta)x$. Cuando la tasa de ahorro es constante ($1/\theta = s^*$), podemos mostrar que

$$\beta = (1-\alpha) \cdot (x + n + \delta)$$

3.8. Impuestos

Las diferentes instituciones y políticas de un país pueden afectar la acumulación de capital físico, y por tanto el crecimiento. Esto podría explicar las diferencias que observamos entre los países.

Una de las políticas más relevantes en este sentido son los impuestos, por lo que vale la pena revisar sus implicancias en el modelo anterior. Consideremos un impuesto lineal: a los retornos netos de depreciación del capital se les cobra una tasa τ, y la recaudación se devuelve a los hogares en forma de transferencias. Es decir, la nueva tasa de interés que enfrentan los hogares será

$$r = (1-\tau)(f'(\hat{k}) - \delta)$$

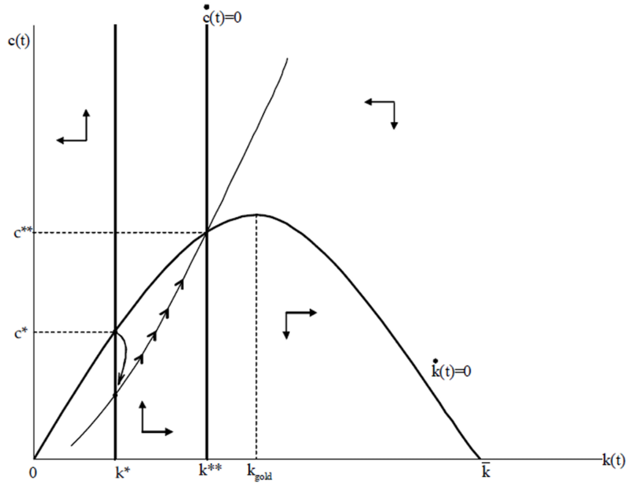
Recordando la condición de equilibrio de (3.8), ahora tendremos que

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)(f'(\hat{k}) - \delta) - \rho - \theta x\right]$$

En consecuencia, en estado estacionario $(\dot{\hat{c}}/\hat{c}) = 0$ se tendrá que

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \frac{\rho + \theta x}{1-\tau} > \delta + \rho + \theta x$$

Con lo cual podemos concluir que el impuesto reduce el capital de estado estacionario y por tanto el ingreso per cápita.


c(t)
$\dot{c}(t)=0$
c**
c*
$\dot{k}(t)=0$
0
k*
k**
k_{gold}
$\bar{k}$
k(t)

4. Modelo de Ramsey de economía abierta

4.1. Economía abierta

Vamos a extender el modelo para considerar libre movilidad de bienes y capitales entre países. Habrán muchos países en el mundo, el país doméstico será el país i. Dentro de cada país, los hogares y empresas tienen las mismas restricciones y funciones objetivo del modelo con economía cerrada. Los activos domésticos y externos son sustitutos perfectos, así que pagan la misma tasa de interés internacional r.

Supongamos que el país doméstico tiene activos netos por persona iguales a a_i, un nivel de capital por persona de k_i. Luego, la diferencia entre ambos corresponderá a los pasivos externos netos del país:

$$d_i = k_i - a_i$$

El saldo de cuenta corriente del país corresponderá al negativo del cambio en la deuda externa, que es $D_i = L_i d_i$, donde la población del país crece a una tasa n_i.

$$CC_i = -\dot{D}_i = -(\dot{L}_i d_i + L_i \dot{d}_i)$$

Entonces, el saldo de cuenta corriente per cápita será igual a

$$-\frac{\dot{D}_i}{L_i} = -\left(\frac{\dot{L}_i}{L_i} d_i + \dot{d}_i\right) = -(\dot{d}_i + n_i d_i)$$

4.2. Definiciones iniciales

Diremos que existe un único bien en la economía mundial. El trabajo no será movible, no existe migración. La restricción presupuestaria de los hogares será

$$\dot{a}_{it} = (r - n_i) \cdot a_{it} + w_{it} - c_{it}$$

Asumiendo las mismas preferencias del modelo anterior, tendremos que la ecuación de Euler queda como

$$\frac{\dot{\hat{c}}_i}{\hat{c}_i} = \frac{1}{\theta_i}(r - \rho_i - \theta_i x_i) \tag{4.1}$$

Por su parte, las condiciones de primer orden del problema de la empresa serán

$$f'(\hat{k}_i) = r + \delta_i \tag{4.2}$$

$$\left[f(\hat{k}_i) - \hat{k}_i \cdot f'(\hat{k}_i)\right] \cdot e^{x_i t} = w_i \tag{4.3}$$

reemplazaremos estas condiciones en la restricción presupuestaria de los hogares para reescribir el modelo en términos de trabajo efectivo. En particular, podemos notar las siguientes ecuaciones:

$$\dot{a}_i = (r - n_i) \cdot a_i + w_i - c_i$$
$$\hat{k}_i = k_i \cdot e^{-x_i t}, \quad k_i = \hat{k}_i \cdot e^{x_i t}$$
$$\hat{c}_i = c_i \cdot e^{-x_i t}, \quad c_i = \hat{c}_i \cdot e^{x_i t}$$
$$\hat{a}_i = a_i \cdot e^{-x_i t}, \quad a_i = \hat{a}_i \cdot e^{x_i t}$$
$$\dot{\hat{a}}_i = \dot{a}_i e^{-x_i t} - x_i a_i e^{-x_i t} \iff \dot{a}_i = \dot{\hat{a}}_i e^{x_i t} + x_i \hat{a}_i \cdot e^{x_i t}$$

Igualando la última ecuación a la primera,

$$\dot{\hat{a}}_i e^{x_i t} + x_i \hat{a}_i \cdot e^{x_i t} = (r - n_i) \cdot a_i + w_i - c_i$$

Reemplazando la tercera y cuarta,

$$\dot{\hat{a}}_i e^{x_i t} + x_i \hat{a}_i \cdot e^{x_i t} = (r - n_i) \cdot \hat{a}_i \cdot e^{x_i t} + w_i - \hat{c}_i \cdot e^{x_i t}$$

Reemplazando w_i de la condición de equilibrio

$$\dot{\hat{a}}_i \cdot e^{x_i t} + x_i \hat{a}_i \cdot e^{x_i t} = (r - n_i) \cdot \hat{a}_i \cdot e^{x_i t} + \left[f(\hat{k}_i) - \hat{k}_i \cdot f'(\hat{k}_i) \right] \cdot e^{x_i t} - \hat{c}_i \cdot e^{x_i t}$$

Dividiendo por $e^{x_i t}$,

$$\dot{\hat{a}}_i + x_i \hat{a}_i = (r - n_i) \cdot \hat{a}_i + \left[f(\hat{k}_i) - \hat{k}_i \cdot f'(\hat{k}_i) \right] - \hat{c}_i$$

Finalmente, reordenando

$$\dot{\hat{a}}_i = f(\hat{k}_i) - (r + \delta_i) \cdot (\hat{k}_i - \hat{a}_i) - (x_i + n_i + \delta_i) \cdot \hat{a}_i - \hat{c}_i \tag{4.4}$$

4.3. Dinámica de una economía pequeña

El supuesto de una economía pequeña implica que la acumulación de activos y capital del país doméstico no tiene efectos sobre la tasa de interés internacional. Es decir, la trayectoria de r_t la trataremos como exógena. Por lo tanto, las trayectorias de $\hat{k}_{it}$ y w_{it} son determinadas de forma independiente de las decisiones de consumo y ahorro de los hogares, a través de las condiciones (4.2) y (4.3).

Como ya dijimos en (4.1), la dinámica de $\hat{c}_i$ viene dada por

$$\frac{\dot{\hat{c}}_i}{\hat{c}_i} = \frac{1}{\theta} [r - \rho_i - \theta x_i]$$

y la dinámica de activos de (4.4) es

$$\dot{\hat{a}}_i = f(\hat{k}_i) - (r + \delta_i) \cdot (\hat{k}_i - \hat{a}_i) - (x_i + n_i + \delta_i) \cdot \hat{a}_i - \hat{c}_i$$

Dado lo anterior, podemos obtener la dinámica para la deuda externa, $d_i = k_i - a_i$. Ahora la tasa de interés será exógena, pero si $r > \rho_i + \theta_i x_i$ la economía doméstica acumularía tantos activos que violaría el supuesto de economía pequeña. Entonces, debemos asumir que

$$r \leq \rho_i + \theta_i x_i$$

Adicionalmente, la condición de transversalidad es la misma que en (3.4), y requiere que $r > x_i + n_i$. Si r es constante, $\hat{k}_{it}$ será constante:

$$f'[(\hat{k}_i^*)_{EA}] = r + \delta_i$$

Esto implica que la velocidad de convergencia desde cualquier nivel de capital inicial es infinita, para cumplir automáticamente con la condición anterior. Si $\hat{k}_{i0}$ es menor (mayor) a $(\hat{k}_i^*)_{EA}$, se genera una entrada (salida) de capitales inmediata de forma que la brecha desaparece al instante. Este resultado es problemático, ya que no se condice con la evidencia.

Recordemos que en economía cerrada teníamos que $r = \rho_i + \theta_i x_i$. Sin embargo, en economía abierta dijimos que $r \leq \rho_i + \theta_i x_i$. Lo anterior implica que

$$f'[(\hat{k}_i^*)_{EA}] \leq f'[(\hat{k}_i^*)_{EC}] \implies (\hat{k}_i^*)_{EA} \geq (\hat{k}_i^*)_{EC}$$

4.3.1. Trayectoria del consumo en economía abierta

Recordando que la tasa de crecimiento del consumo es igual a

$$\frac{\dot{\hat{c}}_i}{\hat{c}_i} = \frac{1}{\theta_i}[r - \rho_i - \theta_i x_i] \leq 0$$

Entonces, dado que $r \leq \rho_i + \theta_i x_i$, hay dos posibles casos:

- Si $r = \rho_i + \theta_i x_i$, entonces el consumo es constante.
- si $r < \rho_i + \theta_i x_i$, entonces el consumo se acerca asintóticamente a cero. Como los hogares son relativamente impacientes, consumen mucho al principio (endeudándose), y luego gastan todo su ingreso para pagar su deuda.

Este será un resultado problemático del modelo.

4.3.2. Trayectoria de los activos en economía abierta

Tomando los mismos dos casos anteriores:

- Si $r = \rho_i + \theta_i x_i$, $\hat{a}_i(t)$ será constante.
- si $r < \rho_i + \theta_i x_i$, $\hat{a}_i(t)$ converge a un valor negativo equivalente al valor presente del ingreso laboral ($\tilde{\hat{w}}_i(0)$).

Es decir, los hogares hipotecan todo su capital e ingresos laborales para sostener un consumo mayor al principio, para luego gastar sus ingresos pagando la deuda. Estos resultados son poco razonables, por lo que necesitamos hacer un ajuste.

4.4. Modelo con capital físico y humano

Una posible solución al problema anterior, será ampliar la definición de capital del modelo. En particular, incorporaremos capital humano al modelo.

4.4.1. Restricciones de acceso al mercado financiero internacional

Si el consumo de los hogares converge a cero, y los ingresos laborales estarán eventualmente destinados únicamente a pagar deuda, hacer default puede convertirse en una situación de equilibrio por parte de los hogares. Sin embargo, los acreedores internacionales tendrán en cuenta esto, por lo que fijarán alguna restricción al crédito. Por ejemplo, exigirán un colateral a sus deudores.

A modo de ejemplificar este fenómeno, diremos que existen dos tipos de capital: físico y humano. El capital físico sirve como colateral para acceder a préstamos internacionales. En cambio, el capital humano no sirve como colateral para acceder a préstamos internacionales.

4.4.2. Modelo

La función de producción en este caso será

$$\hat{y} = f(\hat{k}, \hat{h}) = A\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta}$$

donde $\hat{k}$ es el capital físico por unidad efectivo de trabajo y $\hat{h}$ el capital humano por unidad efectiva de trabajo. Además, asumiremos que $0 < \alpha < 1$, $0 < \eta < 1$ y $0 < \alpha + \eta < 1$.

Para derivar la restricción presupuestaria de la economía, tomemos en cuenta que:

$$a = k + h - d \quad \Longrightarrow \quad \hat{a} = \hat{k} + \hat{h} - \hat{d}$$

Entonces, podemos mostrar parecido a como lo hicimos en (4.4) que

$$\dot{\hat{a}} = A\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta} - (r+\delta)\cdot(\hat{k} + \hat{h} - \hat{a}) - (x+n+\delta)\cdot\hat{a} - \hat{c} \tag{4.5}$$

donde asumimos que la tasa de depreciación es igual para el capital físico y el capital humano.

4.4.3. Caso 1: Economía cerrada

En este caso tendremos que $d = 0$ y $a = k + h$. Los productores igualarán el producto marginal de ambos tipos de capital a

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{k}} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{h}} = r + \delta$$

donde r es la tasa de interés doméstica. De lo anterior, podemos desarrollar que

$$\begin{aligned}
\alpha\hat{k}^{\alpha-1}\hat{h}^{\eta} &= \eta\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta-1}\\
\alpha\frac{\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta}}{\hat{k}} &= \eta\frac{\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta}}{\hat{h}}\\
\alpha\frac{\hat{y}}{\hat{k}} &= \eta\frac{\hat{y}}{\hat{h}}\\
\frac{\hat{k}}{\hat{h}} &= \frac{\alpha}{\eta}
\end{aligned}$$

Y notemos que esto también se debe cumplir en estado estacionario:

$$\frac{\hat{k}^*}{\hat{h}^*} = \frac{\alpha}{\eta}$$

Al igual que en el modelo de Ramsey, si la economía comienza con niveles de capital físico y humano por debajo de su estado estacionario, las tasas de crecimiento de estos insumos irán decreciendo en la transición, hasta llegar al estado estacionario.

En particular, podemos demostrar que la velocidad de convergencia en este caso viene dada por:

$$2\beta^* = \left\{\zeta^2 + 4\cdot\left(\frac{1-\alpha-\eta}{\theta}\right)\cdot(\rho+\delta+\theta x)\cdot\left[\frac{\rho+\delta+\theta x}{\alpha+\eta} - (x+n+\delta)\right]\right\}^{1/2} - \zeta$$

Como podemos ver, la única diferencia con el modelo de Ramsey es que el término que antes era α, ahora es $\alpha+\eta$. Específicamente, al incluir el capital humano en la definición de capital, notamos que la velocidad de convergencia es menor.

Este resultado ayuda a conciliar las predicciones del modelo con la evidencia empírica respecto a la convergencia de los países: como β es más lenta, las economías se demoran más en llegar a su estado estacionario y crecen durante un tiempo mayor.

4.4.4. Caso 2: Economía abierta

Asumiremos que la deuda externa del país no puede exceder la cantidad de capital físico (que se ocupa como colateral). También asumiremos que la tasa de interés será constante e igual a

$$r = \rho + \theta x$$

La cantidad inicial de activos será

$$\hat{a}(0) = \hat{k}(0) + \hat{h}(0) - \hat{d}(0)$$

Dado que asumimos que $\hat{k} \geq \hat{d}$. La clave para ver si la restricción de crédito está activa será analizar si los activos iniciales son menores o mayores que el capital humano de estado estacionario:

- Si $\hat{k}(0)+\hat{h}(0)-\hat{d}(0) \geq \hat{h}^*$, la restricción de acceso al crédito no estará activa ($d<k$). La economía salta automáticamente a su estado estacionario.
- Si $\hat{k}(0)+\hat{h}(0)-\hat{d}(0) < \hat{h}^*$, la restricción de acceso al crédito sí está activa y debe cumplirse que $d=k$.

Analizaremos el segundo caso (restricción activa). Por condición de equilibrio, sabemos que

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{k}} = r + \delta$$

Además, dada una función de producción Cobb-Douglas, sabemos que el pago del capital es igual a α, es decir,

$$\hat{k} = \alpha \hat{y}/(r+\delta)$$

Notemos que esto implica que el ratio K/Y debe ser constante en el tiempo (lo cual cumple con el hecho estilizado de Kaldor). Reemplazando esto en la función de producción $\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{y} &= A\left(\alpha\hat{y}/r+\delta\right)^{\alpha}\hat{h}^{\eta} \\
\hat{y}^{1-\alpha} &= A\left(\alpha/r+\delta\right)^{\alpha}\hat{h}^{\eta} \\
\hat{y} &= \tilde{A}\hat{h}^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

donde $\tilde{A} \equiv A^{1/(1-\alpha)}\left(\alpha/r+\delta\right)^{\alpha/(1-\alpha)}, \quad \varepsilon \equiv \eta/(1-\alpha)$. Notemos que la condición de que $0<\alpha+\eta<1$ implica que

$$\eta < 1-\alpha \implies \frac{\eta}{1-\alpha} = \varepsilon < 1$$

Además, dado que $\varepsilon < 1$, podemos notar que

$$\varepsilon = \frac{\eta}{1-\alpha} \implies \varepsilon - \alpha\varepsilon = \eta \implies \varepsilon = \eta + \alpha\varepsilon \implies \varepsilon < \eta + \alpha$$

Es decir,

$$0 < \varepsilon < \alpha + \eta < 1$$

Luego, al combinar la restricción presupuestaria de (4.5), la función de producción $\hat{y} = \tilde{A}\hat{h}^{\varepsilon}$, la restricción $d = k \Leftrightarrow a = h$ y el resultado de que $\hat{k}(r+\delta) = \alpha\hat{y}$, tendremos que la dinámica del capital humano viene dado por

$$\dot{\hat{h}} = (1-\alpha)\tilde{A}\hat{h}^{\varepsilon} - \hat{c} - (x+n+\delta)\hat{h} \tag{4.6}$$

Donde vale la pena mencionar que restamos $\alpha\tilde{A}\hat{h}^{\varepsilon}$ de la producción local, ya que esto corresponde al pago neto de factores al exterior (la diferencia entre el PIB y el PNB).

Entonces, los hogares maximizan

$$U = \int_0^{\infty} \left[\frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} \right] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt$$

sujeto a (4.6) y al nivel de capital humano. La condición de primer orden en este caso será

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \left[(1-\alpha)\varepsilon\tilde{A}\hat{h}^{\varepsilon-1} - \delta - \rho - \theta x \right]$$

donde notamos que $(1-\alpha)\varepsilon\tilde{A}\hat{h}^{\varepsilon-1} = \eta\tilde{A}\hat{h}^{\varepsilon-1}$ corresponde al producto marginal del capital humano. Dado esto, la dinámica del modelo se completa con la condición de transversalidad. Dado que asumimos $r = \rho + \theta x$, el estado estacionario de esta economía abierta es igual al de economía cerrada con capital físico y humano.

Por otro lado, la velocidad de convergencia sí será diferente. En particular:

$$2\beta^* = \left\{ \zeta^2 + 4 \cdot \left(\frac{1-\varepsilon}{\theta} \right) \cdot (\rho + \delta + \theta x) \cdot \left[\frac{\rho + \delta + \theta x}{\varepsilon} - (x+n+\delta) \right] \right\}^{1/2} - \zeta$$

Donde, como comprobamos que $\varepsilon < \alpha + \eta$, tendremos que

$$\beta^*_{EA} > \beta^*_{EC}$$

Es decir, la velocidad de convergencia será mayor en economía abierta que en la economía cerrada. Esto ocurre porque al tener un coeficiente $\varepsilon < \alpha + \eta$, la economía abierta con acceso al mercado de crédito internacional se comporta como una economía cerrada con una tasa de participación menor. Dado que la velocidad de convergencia depende negativamente de la participación del capital, ε lleva a una mayor velocidad de convergencia.

PRIMERA GENERACIÓN DE CRECIMIENTO ENDÓGENO

5. Introducción a Crecimiento Endógeno

En el modelo de Ramsey la tasa de crecimiento de la tecnología (y del ingreso per cápita), x, es exógena. Si bien estos modelos son útiles, no funcionan para entender las fuentes de crecimiento de largo plazo del ingreso per cápita.

Una visión del crecimiento plantea que la única forma de que la economía pueda escapar de los retornos decrecientes del capital en el largo plazo es mediante el progreso tecnológico. El modelo neoclásico asume no rivalidad de las ideas. Esto puede ser modificado al incorporar rivalidad parcial (e.g. patentes).

La literatura de crecimiento endógeno se diferencia de los modelos neoclásicos al enfatizar que el crecimiento económico es resultado endógeno del propio sistema económico de cada país, y no de variables exógenas sobre las cuales no tiene control. Los orígenes de este trabajo se centran en dos fenómenos:

- La controversia de la convergencia: La evidencia empírica indica que los países pobres no logran el *catch-up* con países ricos de la forma en que, por ejemplo, los estados más pobres de EE.UU. sí lo han hecho con los estados más ricos.

- La superación de competencia perfecta en modelos de crecimiento: El supuesto de competencia perfecta no parece coincidir con algunos hechos estilizados consensuados entre los economistas (existencia de poder de mercado).

5.1. La controversia de la convergencia

Revisar PPT 4. p.5-10

5.2. Superando competencia perfecta

Revisar PPT 4. p.11-14

6. Modelo AK

Este es el modelo más simple de crecimiento endógeno, donde tomaremos una función de producción AK:

$$y = f(k) = Ak$$

6.1. Hogares

Los hogares maximizan:

$$U = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \left[\frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} \right] dt$$

sujeto a su restricción presupuestaria:

$$\dot{a} = (r-n) \cdot a + w - c$$

Nuevamente, la condición de No-ponzi implica que

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ a(t) \cdot exp \left[- \int_0^t [r(v) - n] dv \right] \right\} \geq 0$$

Es decir, las condiciones de optimización del problema nuevamente son:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ a(t) \cdot exp \left[- \int_0^t [r(v) - n] dv \right] \right\} = 0$$

6.2. Empresas

Las empresas ahora enfrentarán la función de producción AK:

$$y = f(k) = Ak$$

donde $A > 0$. Notemos que en este caso el producto marginal del capital no es decreciente:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = A, \quad \frac{\partial^2 f(k)}{\partial k^2} = 0$$

Con lo cual esta función no cumple los supuestos de las funciones de producción neoclásicas (tampoco se cumplen las condiciones de Inada). Luego veremos por qué (o si es que) es razonable asumir esta forma funcional.

Las CPO entonces vienen dadas por:

$$A = R = r + \delta \implies r = A - \delta$$

$$w = Ak - Ak = 0(?)$$

6.3. Equilibrio

Dado que la economía es cerrada, $a = k$. Esto, sumado a lo anterior, nos da que

$$\dot{k} = (A - n - \delta) \cdot k - c \tag{6.1}$$

Sumado a la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ k(t) \cdot e^{-(A-\delta-n)t} \right\} = 0$$

Por su parte, la tasa de crecimiento del consumo en equilibrio será

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)$$

Notemos que el crecimiento del consumo per cápita ahora no depende del stock de capital por persona, sino que es constante. Luego, la trayectoria del consumo viene dada por

$$c(t) = c(0) \cdot e^{(1/\theta)(A-\delta-\rho)t}$$

De forma que el problema esté bien definido y los hogares no tengan $U \to \infty$, asumiremos que A es lo suficientemente grande como para asegurar que c crezca ($A > \delta + \rho$), pero no tanto como para generar utilidad sin límites. Reemplazando $c(t)$ en U podemos centrarnos en el término:

$$e^{-(\rho-n)t} \cdot c(t)^{1-\theta} = c(0) \cdot e^{-(\rho-n)t} \cdot e^{((1-\theta)/\theta)(A-\delta-\rho)t} = c(0) \cdot e^{-[\rho-n-((1-\theta)/\theta)(A-\delta-\rho)]t}$$

Luego, para que esto no se vaya al infinito, necesitamos que

$$\begin{aligned} -\left[\rho - n - \frac{1-\theta}{\theta}(A - \delta - \rho)\right] &< 0 \\ -\rho + n + \frac{1-\theta}{\theta}A - \frac{1-\theta}{\theta}\delta - \frac{1-\theta}{\theta}\rho &< 0 \\ \frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta) + n - \frac{1}{\theta}\rho &< 0 \\ (1-\theta)(A-\delta) + \theta n &< \rho \end{aligned}$$

Entonces, asumiremos

$$(1-\theta)(A-\delta) + \theta n + \delta < \rho + \delta < A$$

Dividiendo (6.1) por k podemos despejar que

$$\frac{c}{k} = (A - n - \delta) - \frac{\dot{k}}{k}$$

Luego, en estado estacionario (donde todas las variables crecen a tasas constantes), $\dot{k}/k$ es constante. Por lo tanto, el ratio c/k es constante en el tiempo y podemos decir que el capital crece a la misma tasa que el consumo:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)$$

6.4. Dinámica de transición

Para resolver cómo crece el capital fuera del estado estacionario, reemplacemos $c(t)$ en (6.1):

$$\dot{k} - (A - n - \delta) \cdot k = -c(0) \cdot e^{(1/\theta)(A-\delta-\rho)t}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, tenemos que las soluciones homogénea y particular son[7]:

$$k_H = b_0 \cdot e^{(A-\delta-n)t}$$
$$k_P = \frac{c(0)}{\varphi} \cdot e^{(1/\theta)(A-\delta-\rho)t}$$

donde b_0 es alguna constante, $\varphi = (A-\delta-n) - \gamma_c$ y $\gamma_c = (1/\theta)(A-\delta-\rho)$ es la tasa de crecimiento del consumo. Con lo cual la solución queda:

$$k(t) = b_0 \cdot e^{(A-\delta-n)t} + [c(0)/\varphi] \cdot e^{(1/\theta)(A-\delta-\rho)t}$$

Dados los supuestos de los parámetros, sabemos que $\varphi > 0$. Para despejar la constante, podemos reemplazar este $k(t)$ en la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ k(t) \cdot e^{-(A-\delta-n)t} \right\} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ b_0 + [c(0)/\varphi] \cdot e^{-[(A-\delta-n)-(1/\theta)(A-\delta-\rho)t]} \right\} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ b_0 + [c(0)/\varphi] \cdot e^{-\varphi} \right\} = 0$$

Luego, como $\varphi > 0$ y $c(0)$ es finito, tendremos necesariamente que $b_0 = 0$. Reemplazando esto en $k(t)$ y recordando la definición de $c(t)$:

$$k(t) = \frac{1}{\varphi} \underbrace{c(0) \cdot e^{(1/\theta)(A-\delta-\rho)t}}_{c(t)}$$

Es decir,

$$c(t) = \varphi k(t)$$

Que junto con $y = Ak$ implica que todas las variables crecen a la misma tasa, incluso fuera del estado estacionario:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)$$

En otras palabras, este modelo no tiene dinámica de transición. Las variables comienzan en cierto valor inicial:

$$k(0), \quad c(0) = \varphi k(0), \quad y(0) = Ak(0)$$

Para luego crecer a una tasa constante $\gamma = (1/\theta)(A-\delta-\rho)$. Una consecuencia de este resultado es que cambios en los parámetros de la economía pueden afectar los niveles de crecimiento.

[7] Revisar apunte tablet.

Adicionalmente, podemos derivar la tasa de ahorro de esta economía de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{\dot{K}+\delta K}{Y} \\
s &= \frac{\dot{K}/L+\delta K/L}{Y/L} \\
s &= \frac{\dot{k}+nk+\delta k}{Ak} \\
s &= (1/A)\cdot(\dot{k}/k+n+\delta) \\
s &= \frac{1}{A}\cdot\left[\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)+n+\delta\right] \\
s &= \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\theta}[A-\delta-\rho+\theta n+\theta\delta] \\
s &= \frac{A-\rho+\theta n+(\theta-1)\delta}{\theta A}
\end{aligned}
$$

donde ocupamos que $\dot{K}/L=\dot{k}+nk$. Notemos que esta tasa de ahorro es constante en el tiempo y viene determinada nuevamente por los parámetros de la economía.

6.5. Determinantes del crecimiento

Como ya dijimos, la tasa de crecimiento en este modelo dependerá de los parámetros, ya que estos determinan la disposición a ahorrar y la productividad del capital. Analicemos:

$$\gamma=\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)$$

- Mayores valores de ρ, δ y θ implican menor crecimiento. Aumenta la impaciencia por consumir hoy, aumenta el valor de equilibrio de $f'(k)$ (disminuye k) y aumenta el deseo por suavizar, respectivamente.
- Mayores valores de A implican mayor crecimiento. Aumenta el producto marginal del capital.

7. Learning by doing y knowledge spillovers

7.1. Contexto

La clave del modelo AK es generar crecimiento endógeno a través de la ausencia de rendimientos decrecientes del capital. Otra posibilidad para lograr resultados similares es asumir que la generación de conocimiento es un producto secundario de invertir, es decir, que a medida que una empresa aumenta su capital físico, está mejora simultáneamente su eficiencia produciendo (Learning by doing).

7.2. Learning by doing

Supondremos que la empresa i enfrenta una función de producción:

$$Y_{it} = F(K_{it}, A_{it}L_{it})$$

donde F satisface las propiedades neoclásicas. Asumiremos que L permanece constante ($n = 0$). A diferencia de modelos anteriores, vamos a suponer que la tecnología crece de forma paralela a la inversión. Entonces, el índice de experiencia será la inversión acumulada.

7.3. Desbordamiento del conocimiento

Además, supondremos que el conocimiento es un bien público, que una vez inventado se esparce por la economía sin que el inventor pueda evitarlo. Entonces,

$$A_{it} = A_t, \quad \forall i$$

donde A_t es el conocimiento agregado de la economía.

7.4. Conocimiento agregado

Dados los supuestos anteriores, tendremos que

$$\dot{A}_t = \dot{\kappa}_t$$

donde κ_t es el stock agregado de capital. Además, la inversión acumulada cumple con

$$A_t = \int_{-\infty}^{t} I(s)ds = \kappa_t$$

7.5. Función de producción

Asumiremos que la función de producción es Cobb-Douglas:

$$F(K_{it}, \kappa_t \cdot L_{it}) = K_{it}^{\alpha}(\kappa_t \cdot L_{it})^{1-\alpha}$$

Notemos que esta función presenta rendimientos decrecientes del capital cuando κ_t permanece constante, y rendimientos constantes del capital a nivel agregado (cuando se considera tanto K_{it} como κ_t). Este último caso corresponde a un tipo de formulación AK y es lo que permite crecimiento endógeno. Si cada productor aumenta K_{it}, entonces κ_t aumenta en la misma medida.

7.6. Solución descentralizada

Supongamos que el número de empresas M de la economía es lo suficientemente grande como para que cada una tome el stock de capital agregado como dado, aun cuando en realidad

$$\kappa_t = \sum_{i=1}^{M} K_{it} = K_t$$

Entonces, expresando la función de producción de cada empresa en términos per cápita tenemos que

$$y_i = k_i^{\alpha} \kappa^{1-\alpha}$$

Como al maximizar su utilidad las empresas toman κ como dado, la condición de primer orden del problema de la firma queda:

$$\alpha k_i^{\alpha-1} \kappa^{1-\alpha} = r + \delta \quad \Longrightarrow \quad r = \alpha k_i^{\alpha-1} \kappa^{1-\alpha} - \delta$$

Además, dado que en equilibrio todas las empresas toman la misma decisión, notemos que $k_i = k$ y $\kappa = K = k \cdot L$. Reemplazando esto en la CPO, obtenemos que

$$r = \alpha \cdot L^{1-\alpha} - \delta \tag{7.1}$$

De esto, notamos que dado que asumimos L constante, la tasa de interés es constante en el tiempo. Además, una mayor población iría asociada a una mayor tasa de interés (efecto escala).

Por el lado de los consumidores, asumimos el mismo problema que en los modelos anteriores, con lo cual

$$\dot{c}/c = \gamma_c = (1/\theta)(r - \rho)$$

Es decir, en equilibrio,

$$\dot{c}/c = \gamma_c = (1/\theta)(\alpha \cdot L^{1-\alpha} - \delta - \rho) \tag{7.2}$$

Entonces, dado que L es constante, la tasa de crecimiento del consumo es constante y por las mismas razones que dijimos en el modelo AK:

$$\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = \gamma$$

7.6.1. Efectos de escala

Un resultado (en principio poco razonable) de este modelo es que la tasa de crecimiento depende positivamente del stock de población.

Si bien con datos de después de la segunda guerra mundial se ha encontrado que esta relación no es cierta, Kremer (1993) analizó los efectos de escala en un intervalo mucho más largo de tiempo, encontrando que durante gran parte de la historia de la humanidad el tamaño de la población efectivamente estaba positivamente correlacionado con la tasa de crecimiento de la economía.

7.7. Solución centralizada

Dado que la inversión en capital genera una externalidad positiva, que no es internalizada por las empresas, sabemos que la solución del planificador central no será la misma que la descentralizada. En particular, el planificador central toma en cuenta el hecho de que cuando una empresa invierte, esta aumenta la cantidad de conocimiento disponible para todas las demás empresas de la economía.

Entonces, el planificador maximiza

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} \right] dt$$

sujeto a la restricción presupuestaria de la economía,

$$\dot{k} = k \cdot L^{1-\alpha} - c - \delta k$$

Donde recordemos que $\kappa = k \cdot L$ implica que

$$y = k^{\alpha} \cdot k^{1-\alpha} L^{1-\alpha} = k \cdot L^{1-\alpha}$$

Podemos resolver el Hamiltoniano en este caso, y llegaremos a que la tasa de crecimiento en este caso será

$$\gamma_{CP} = (1/\theta)(L^{1-\alpha} - \delta - \rho)$$

Donde podemos notar que, dado $\alpha < 1$, esta tasa de crecimiento es mayor al caso del equilibrio descentralizado ($(1/\theta)(\alpha \cdot L^{1-\alpha} - \delta - \rho)$). Esto se debe a que el planificador central internaliza la externalidad de la inversión en capital, con lo cual incorpora el hecho de que el producto marginal del capital es mayor al que consideran las empresas individualmente. Una forma de alcanzar este equilibrio sería brindar un subsidio a la inversión.

8. Gasto Público y Crecimiento

En esta sección estudiaremos que otra forma de generar crecimiento endógeno a través de la forma AK es la existencia de bienes públicos productivos.

8.1. Modelo de gasto público e impuestos

En este modelo, el gasto público entra en la función de producción a través de los bienes públicos productivos (infraestructura, I+D, protección, etc.). Asumiremos inicialmente que G es un bien público no rival y no excluible[8]. En este caso, la función de producción de cada empresa i será

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot K_i^{\alpha} \cdot G^{1-\alpha}$$

Además, asumiremos que el bien público es un flujo productivo y no bienes de capital acumulables, es decir, que no se puede traspasar G entre periodos. Cada agente representa una pequeña parte de la economía, con lo cual toman G como dado.

Supondremos que el gobierno equilibrará su presupuesto todos los periodos, es decir, $G = \tau Y$, con τ constante en el tiempo. Recordando la función de producción:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot K_i^{\alpha} \cdot G^{1-\alpha}$$

podemos ver que para un nivel de G dado, la economía exhibirá rendimientos decrecientes en el capital. Sin embargo, si G aumenta con K, no emergerán retornos decrecientes en esta formulación. Esta será la fuente de crecimiento endógena en este modelo. Diremos que el gasto público es complementario con los insumos privados.

8.2. Solución descentralizada

Dado que podemos expresar la función de producción en términos per cápita como

$$y = A \cdot k^{\alpha} \cdot G^{1-\alpha}$$

Las utilidades de las empresas después de impuestos serán

$$\pi = L_i \left[(1-\tau) A \cdot k_i^{\alpha} \cdot G^{1-\alpha} - w - (r+\delta) \cdot k_i \right]$$

La condición de primer orden para la firma representativa entonces será

$$(1-\tau) A \cdot \alpha k^{\alpha-1} \cdot G^{1-\alpha} = r + \delta$$

Combinando la restricción presupuestaria del gobierno, $G = \tau Y$ con la función de producción Y, tenemos que

$$\begin{aligned} G &= \tau \cdot AL_i^{1-\alpha} \cdot K_i^{\alpha} \cdot G^{1-\alpha} \\ G^{\alpha} &= \tau \cdot AL \cdot k^{\alpha} \\ G &= (\tau AL)^{(1/\alpha)} \cdot k \end{aligned}$$

[8] Potencial pregunta de prueba: bien público sujeto a congestión.

Sustituyendo esto en la condición de primer orden anterior, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
(1-\tau)A\cdot \alpha k^{\alpha-1}\cdot G^{1-\alpha} &= r+\delta \\
(1-\tau)A\cdot \alpha k^{\alpha-1}\cdot (\tau AL)^{(1-\alpha)/\alpha}\cdot k^{1-\alpha} &= r+\delta \\
(1-\tau)\alpha A^{1/\alpha}\cdot (\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha} &= r+\delta
\end{aligned}
$$

Como podemos ver, la condición anterior es constante en k, con lo cual se tienen rendimientos constantes del capital. Reemplazando esta condición en la ecuación de Euler del problema del hogar, llegaremos a que la tasa de crecimiento del consumo vienen dada por

$$\frac{\dot{c}}{c} = \gamma_c = \frac{1}{\theta}((1-\tau)\alpha A^{1/\alpha}\cdot(\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta - \rho)$$

donde notamos que el efecto del impuesto aparece en dos lugares. El primer efecto (negativo) representa el efecto distorsionador de los impuestos sobre el producto marginal del capital. El segundo efecto (positivo) representa el efecto del bien público sobre la productividad de las empresas. Recordemos que si los agentes toman G como dado, estos subestiman el efecto positivo del impuesto en su decisión de equilibrio, disminuyendo la tasa de crecimiento del consumo.

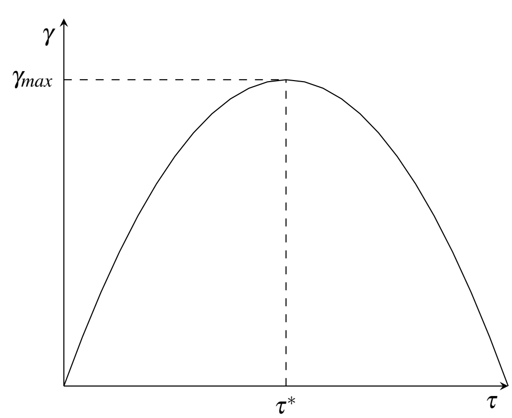
Si L y τ son constantes, entonces nuevamente vemos que el producto marginal del capital es constante, por lo que se repite la estructura AK. Al igual que en modelos anteriores, no habrá dinámica de transición y las tasas de crecimiento son todas iguales a

$$\gamma = \frac{1}{\theta}((1-\tau)\alpha A^{1/\alpha}\cdot(\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta - \rho) \tag{8.1}$$

8.2.1. Tasa de impuesto que maximiza el crecimiento

Como dijimos, τ tiene dos efectos de signos contrarios sobre el crecimiento.

- Cuando el valor de τ es bajo, el efecto positivo del gasto sobre el producto marginal del capital domina, con lo cual γ es creciente en τ.
- Cuando τ es más alto, el efecto negativo distorsionador domina, con lo cual γ es decreciente en τ.



Para encontrar la tasa de impuesto que maximiza el crecimiento, optimizamos (8.1):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma}{\partial \tau}: \quad \frac{\alpha A^{1/\alpha} L^{(1-\alpha)/\alpha}}{\theta}\left[-\tau^{(1-\alpha)/\alpha}+\frac{1-\alpha}{\alpha}(1-\tau)\tau^{(1-\alpha)/\alpha}\tau^{-1}\right] &= 0 \\
-\tau^{(1-\alpha)/\alpha}+\frac{1-\alpha}{\alpha}(1-\tau)\tau^{(1-\alpha)/\alpha}\tau^{-1} &= 0 \\
-1+\frac{1-\alpha}{\alpha}(1-\tau)\tau^{-1} &= 0 \\
\frac{1-\alpha}{\alpha}(\tau^{-1}-1) &= 1 \\
\tau^{-1} &= \frac{\alpha}{1-\alpha}+1 \\
\tau &= (1-\alpha)
\end{aligned}$$

Luego, si la tasa de impuestos se fija para maximizar el crecimiento, en el equilibrio descentralizado tendremos que:

$$\gamma_{max} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha^2 A^{1/\alpha}\cdot((1-\alpha)L)^{(1-\alpha)/\alpha}-\delta-\rho\right]$$

Para entender esta tasa de impuesto óptima, notemos que el producto marginal del gasto viene dado por

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = (1-\alpha)\underbrace{AL^{1-\alpha}K^{\alpha}G^{1-\alpha}}_{Y}G^{-1} = (1-\alpha)\cdot(Y/G) = \frac{(1-\alpha)}{\tau}$$

Entonces, la tasa de impuestos "óptima", corresponde a la condición de eficiencia $\frac{\partial Y}{\partial G}=1$, es decir, donde el beneficio marginal iguala al costo marginal del impuesto.

Algunos comentarios:

- Estamos analizando la tasa de impuesto que maximiza el crecimiento en la situación donde los impuestos son distorsionadores.
- La tasa que maximiza el crecimiento no es necesariamente la que maximiza la utilidad de los agentes.

8.3. Solución centralizada

El planificador central elegirá una trayectoria de G y c que maximice la utilidad de los hogares:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[\frac{c^{(1-\theta)}-1}{1-\theta}\right]dt$$

sujeto a la restricción presupuestaria de la economía,

$$AL^{1-\alpha}K^{a}G^{1-\alpha} = C+G+\dot{K}+\delta K$$

Al igual que antes, el gobierno satisfará la condición de eficiencia del gasto, $\frac{\partial Y}{\partial G}=1$. Sin embargo, al contrario de la solución descentralizada, donde los agentes tomarán en cuenta el producto marginal del capital como $(1-\tau)\frac{\partial Y}{\partial K}$, el planificador central considerará el producto marginal de capital a nivel social, que es

$$\frac{\partial Y}{\partial K} > (1-\tau)\frac{\partial Y}{\partial K}$$

En este caso, como el producto marginal del capital es mayor frente a cualquier nivel de K, el planificador central elegirá un nivel de capital mayor al caso descentralizado. Entonces, la condición de primer orden implicará que la tasa de crecimiento de la economía será

$$\gamma_{CP} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A^{1/\alpha} \cdot ((1-\alpha)L)^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta - \rho\right]$$

Que notamos que es mayor que en la solución descentralizada.

$$\gamma_{CP} > \gamma_{max}$$

8.4. Modelo con congestión

pendiente de revisar

9. Modelo de acumulación de capital humano

Existe evidencia de que uno de los factores que ayudan a promover el crecimiento económico es la educación de los ciudadanos. Podemos entender la educación como un proceso de inversión en capital humano, que se acumula y se deprecia de forma similar al capital físico.

En los modelos anteriores cuando hemos incluido capital humano hemos ignorado un hecho clave: el capital humano es un insumo para sí mismo, es decir, la producción de capital humano es relativamente intensiva en el propio capital humano disponible.

9.1. Modelo de un sector con capital físico y humano

Supongamos que la función de producción de la economía es la siguiente:

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

Podríamos interpretar H como el número de trabajadores multiplicado por el capital humano del trabajador promedio:

$$H = L \cdot h$$

Es decir, que la cantidad y la calidad de los trabajadores actúan como sustitutos perfectos. Nuevamente asumiremos que la población L está fija. Por lo tanto, H aumenta únicamente por mejoras en la calidad promedio de los trabajadores. También por simplicidad omitiremos el progreso tecnológico (A es constante).

La producción se puede ocupar en consumo, inversión de capital físico, o inversión de capital humano. Entonces, la restricción presupuestaria de la economía corresponde a

$$Y = C + I_K + I_H$$

Además, diremos que los dos tipos de capital se deprecian a la misma tasa, con lo cual sus stocks vienen dados por

$$\dot{K} = I_K - \delta K, \quad \dot{H} = I_H - \delta H$$

El hogar representativo entonces maximiza

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[\frac{C^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} \right] dt$$

sujeto a la restricción presupuestaria de la economía y las dos restricciones de ambos tipos de capital. El Hamiltoniano del problema entonces será

$$J(\cdot) = e^{-\rho t} \left[\frac{C^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} \right] + \nu \cdot (I_K - \delta K) + \mu \cdot (I_H - \delta H) + \omega \cdot (AK^{\alpha}H^{1-\alpha} - C - I_K - I_H)$$

Notando que el producto marginal del capital es igual a $A\alpha \cdot K^{-(1-\alpha)}H^{(1-\alpha)}$ y aplicando la condición de optimalidad de $r = F'(K) - \delta$, sabemos que la condición de primer orden del problema anterior será

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \left[A\alpha \cdot (K/H)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho \right]$$

La otra condición de optimalidad es que el producto marginal del capital físico y el capital humano sean iguales, de manera de explotar al máximo los rendimientos de ambos. Entonces,

$$A\alpha \cdot (K/H)^{-(1-\alpha)} = A(1-\alpha)\cdot (K/H)^{\alpha}$$

Que reordenando queda

$$(K/H) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{9.1}$$

Es decir, el ratio entre capital físico y capital humano debe ser igual a una constante. Por lo tanto, en equilibrio tendremos que K y H crecerán a la misma tasa. Ocupando lo anterior, tendremos que la tasa de interés de equilibrio será

$$r^* = A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta$$

Nuevamente, tendremos un producto marginal del capital constante (en la medida que K/H esté en equilibrio), con lo cual tendremos crecimiento endógeno. De hecho, si reemplazamos lo encontrado para K/H en la función de producción, obtenemos claramente una estructura AK:

$$Y = AK \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

La tasa de crecimiento de la economía en este caso será

$$\gamma^* = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right]$$

9.1.1. La restricción de inversión neta no-negativa

La condición que encontramos previamente sobre $K/H = \alpha/(1-\alpha)$ implica que si el ratio inicial $K(0)/H(0)$ se desvía de esta igualdad, la economía se debe ajustar instantáneamente para lograr la condición de equilibrio. Sin embargo, lo anterior supone que la inversión es reversible y que unidades de capital físico (humano) pueden ser convertidas instantáneamente en unidades de capital humano (físico), cosa que no es realista.

Para solucionar esto supondremos que la inversión en capital es irreversible en ambos casos, es decir,

$$I_K \geq 0, \quad I_H \geq 0$$

Luego, imaginemos que ocurre si $H(0)$ es relativamente más abundante que $K(0)$, es decir,

$$\frac{K(0)}{H(0)} < \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Entonces, la condición de equilibrio dictaría que se debe desinvertir en H e invertir en K (cosa que no se puede hacer porque la inversión es irreversible). En este caso, la restricción de inversión no-negativa está activa, con lo cual $I_H = 0$ y el capital humano seguirá la siguiente dinámica

$$\dot{H} = -\delta H \implies H(t) = H(0)\cdot e^{-\delta t}$$

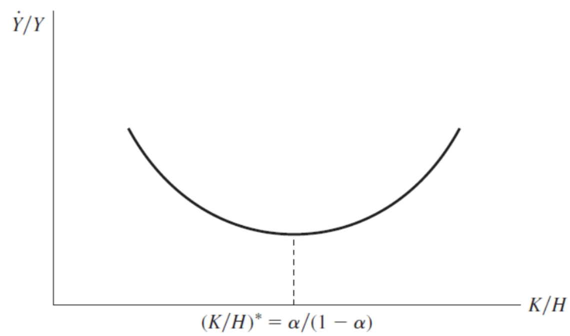
Con $I_H = 0$, ya no existe decisión sobre H y el nuevo hamiltoniano del problema del hogar será

$$J(\cdot) = e^{-\rho t}\left[\frac{C^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta}\right] + v\cdot (AK^{\alpha}H^{1-\alpha} - C - \delta K)$$

Podemos notar que esta configuración es la misma que en los modelos neoclásicos de crecimiento, donde los hogares optimizaban su decisión de consumo e inversión sujetos a una tasa de crecimiento tecnológico exógena x. En cambio, ahora tendremos que el insumo H crecerá a una tasa $-\delta$. Luego, todos los resultados conocidos del modelo neoclásico se replicarán con esta diferencia

La diferencia crucial con el modelo neoclásico, es que en algún momento finito de tiempo, la economía alcanzará la condición de optimalidad (9.1), con lo cual la dinámica pasará a ser la de los modelos de crecimiento endógeno.

En particular, el ratio K/H irá creciendo con el tiempo, hasta que alcance $\alpha/(1-\alpha)$. Luego, la restricción de inversión no-negativa se vuelve inactiva y la economía crecerá a la tasa constante $\gamma^* > 0$ que encontramos antes. En otras palabras, la dinámica del modelo neoclásico aplica durante la transición, pero la tasa de crecimiento de largo plazo es positiva (a diferencia de en el modelo de Ramsey)[9].



9.2. Modelo Lucas-Uzawa

Uno de los supuestos implícitos en el modelo anterior, es que el capital físico y el capital humano son ambos acumulables a partir de la misma tecnología. El modelo de Lucas-Uzawa relaja este supuesto planteando un modelo de dos sectores. En el primer sector, la producción final (que se obtiene a patir de capital físico y capital humano) puede ser consumida o convertida en capital físico:

$$Y = C + I_K = C + \dot{K} + \delta_K K \quad \Longrightarrow \quad \dot{K} = AK_Y^{\alpha} H_Y^{1-\alpha} - C - \delta_K K$$

En el segundo sector, la acumulación de capital humano se produce a partir de capital físico y capital humano:

$$\dot{H} = BK_H^{\eta} H_H^{1-\eta} - \delta_H H$$

Notemos que las tasas de depreciación de K y H no serán necesariamente iguales. Como el capital humano es un bien rival, tendremos que el capital humano agregado será la suma del capital humano utilizado en ambos sectores:

$$H = H_Y + H_H$$

Si definimos u como la fracción de capital humano utilizada en el sector de bienes finales y $1-u$ como la fracción utilizada en el sector educativo, tendremos que

$$H_Y = uH, \quad H_H = (1-u)H$$

[9] De hecho, esta va decreciendo monotónicamente hasta $\gamma^* = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right] > 0$.

En el modelo de Lucas-Uzawa, asumiremos que el capital humano es producido únicamente con capital humano ($\eta = 0$) y que ambos capitales se deprecian a la misma tasa ($\delta_K = \delta_H$), entonces las dinámicas del modelo son las siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{K} &= AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} - C - \delta K \\ \dot{H} &= B(1-u)H - \delta H\end{aligned}$$

Los hogares, por su parte, maximizan la misma utilidad que en los modelos anteriores. Luego, el problema de control óptimo de esta economía es el siguiente:

$$\begin{aligned}\max_{C,u} \quad & U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt \\ s.a. \quad & \dot{K} = AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} - C - \delta K \\ & \dot{H} = B(1-u)H - \delta H\end{aligned}$$

donde C y u son las variables de control y K y H son las variables de estado. El hamiltoniano del problema entonces queda

$$J(\cdot) = e^{-\rho t}\frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} + v\cdot\left\{AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} - C - \delta K\right\} + \mu\cdot\{B(1-u)H - \delta H\}$$

Cuyas CPO son 6:

$$\begin{aligned}
&(1): \frac{\partial J}{\partial C} = 0: && \implies \quad e^{-\rho t}C^{-\theta} - v = 0 \\
&(2): \frac{\partial J}{\partial u} = 0: && \implies \quad vAK^{\alpha}(1-\alpha)u^{-\alpha}H^{1-\alpha} - \mu BH = 0 \\
&(3): \frac{\partial J}{\partial K} = -\dot{v}: && \implies \quad v\left\{A\alpha K^{-(1-\alpha)}(uH)^{1-\alpha} - C - \delta\right\} = -\dot{v} \\
&(4): \frac{\partial J}{\partial H} = -\dot{\mu}: && \implies \quad vAK^{\alpha}(1-\alpha)u^{1-\alpha}H^{-\alpha} + \mu\{B(1-u)-\delta\} = -\dot{\mu} \\
&(5): \lim_{t\to\infty}[v(t)\cdot K(t)] = 0 && \text{(Condición de transversalidad 1)} \\
&(6): \lim_{t\to\infty}[\mu(t)\cdot H(t)] = 0 && \text{(Condición de transversalidad 2)}
\end{aligned}$$

Similar a cómo lo hemos hecho en modelos anteriores, podemos demostrar de la CPO (1) y (3) que

$$\frac{\dot{C}}{C} = \gamma_c = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha K^{-(1-\alpha)}(uH)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right] = \frac{1}{\theta}\left[-\frac{\dot{v}}{v} - \rho\right] \tag{9.2}$$

Como podemos ver, el crecimiento del consumo dependerá del producto marginal del capital físico (que ahora depende tanto del stock de capital físico, como del stock de capital humano y de la fracción de este utilizada en el sector de bienes).

En estado estacionario, sabemos que las variables crecen a tasa constante. Luego, en EE, podemos reordenar (9.2) como

$$\frac{\theta\gamma_c^* + \delta + \rho}{A\alpha(u^*)^{1-\alpha}} = \left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha}$$

Como el lado izquierdo es constante en el tiempo[10], concluimos que K y H deben crecer a la misma tasa:

$$\gamma_k^* = \gamma_h^*$$

Ahora, podemos dividir la dinámica del capital por K para encontrar la tasa de crecimiento de K:

$$\frac{\dot{K}}{K} \equiv \gamma_k^* = AK^{\alpha-1}(uH)^{1-\alpha} - \frac{C}{K} - \delta$$

Como $AK^{\alpha-1}(uH)^{1-\alpha} = Au^{1-\alpha}\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha}$ es constante, tenemos que C/K debe crecer a tasa constante y

$$\gamma_k^* = \gamma_h^* = \gamma_c^*$$

Por otro lado, de la función de producción podemos desarrollar que

$$\begin{aligned}
Y &= AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} \\
\ln Y &= \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln u + (1-\alpha)\ln H \\
\frac{\dot{y}}{y} &= \alpha\gamma_k^* + (1-\alpha)\gamma_h^* \\
\frac{\dot{y}}{y} &= \alpha\gamma_k^* - \alpha\gamma_k^* - \gamma_k^* \\
\gamma_y^* &= \gamma_k^*
\end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que todas las variables crecen a la misma tasa:

$$\gamma_c^* = \gamma_h^* = \gamma_k^* = \gamma_y^*$$

Con lo cual nos basta con encontrar la tasa de crecimiento del consumo. Primero, multipliquemos la CPO (2) por uH^{-1}:

$$vAK^{\alpha}(1-\alpha)u^{-\alpha}H^{-\alpha} = \mu Bu$$

Como $AK^{\alpha}(1-\alpha)u^{-\alpha}H^{-\alpha} = A\left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha}(1-\alpha)u^{-\alpha}$ es constante en el tiempo, al igual que Bu, tenemos que la tasa de crecimiento de v y μ debe ser la misma:

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{\mu}}{\mu}$$

Ahora, de la CPO (4) notemos que

$$-\dot{\mu} = \underbrace{vAK^{\alpha}(1-\alpha)u^{1-\alpha}H^{-\alpha}}_{\mu Bu} + \mu\left\{B(1-u) - \delta\right\}$$

Despejando, notamos que

$$-\frac{\dot{\mu}}{\mu} = B - \delta = -\frac{\dot{v}}{v}$$

Finalmente, reemplazando esto en (9.2), llegamos a que la tasa de crecimiento de la economía en estado estacionario será:

$$\gamma_c^* = \gamma_h^* = \gamma_k^* = \gamma_y^* = \frac{1}{\theta}\left[B - \delta - \rho\right]$$

[10] Aquí ocupamos que en estado estacionario u^* se mantiene constante, porque, como es una fracción, no puede crecer ni decrecer, ya que, si lo hiciera, se saldría del intervalo $[0,1]$.

Que es creciente en el parámetro de la productividad del sector educativo (B). Para obtener u^*, ocupamos la dinámica de H y desarrollamos que

$$\frac{\dot{H}}{H} = \gamma_c^* = B(1-u^*) - \delta \quad \Longrightarrow \quad u^* = 1 - \frac{\gamma_c^* + \delta}{B}$$

Además, para evitar que el valor de la utilidad sea infinito, necesitamos asumir que

$$\rho > (1-\theta)\gamma_c^*$$

En este modelo, la dinámica surge si K_0/H_0 es diferente a $(K/H)^*$. Específicamente, para una relación K_0/H_0 baja, la economía favorecerá la acumulación de capital físico, mientras que para una relación K_0/H_0 alta la economía favorecerá la acumulación de capital humano.

CAMBIO TECNOLÓGICO ENDÓGENO

10. La Economía de las Ideas

En los modelos que veremos en esta sección, el progreso tecnológico será producto de empresas que deben enfrentar altos costos fijos para innovar. En particular, costos muy superiores al costo marginal.

Entonces, con competencia perfecta, donde el precio es igual al costo marginal, las empresas incurrirán en pérdidas si intentan innovar, y no habrá progreso tecnológico. Por este motivo, el poder de mercado será clave para generar incentivos a innovar.

10.1. Tipos de modelos de crecimiento e I+D

En general, existen dos enfoques:

1. El enfoque de Romer: El progreso tecnológico tomará la forma de un aumento en el número de productos o bienes de capital disponibles como insumos de producción. Es decir, cada variedad extra de productos hará más productiva al resto de variedades (eg. Internet, Excel, Iphone, etc). El supuesto será que no existen rendimientos decrecientes en el número de bienes de capital, con lo cual las empresas de I+D siempre querrán descubrir nuevos productos.

2. Enfoque Shumpeteriano: El progreso tecnológico tomará la forma de mejorar la calidad de un número limitado de producto. Entonces, el cambio tecnológico implicará un proceso de "destrucción creativa": cuando una empresa supera la calidad de un producto existente, entonces ese producto se vuelve obsoleto y la nueva empresa se apropia del mercado. Estas empresas invertirán en I+D para mantener su liderazgo tecnológico, mientras que los seguidores lo harán para intentar arrebatarle el mercado a los líderes.

11. Modelo de Variedades

11.1. Modelo simplificado

Tendremos 3 tipos de agentes: productores de bienes finales, inventores de bienes de capital y consumidores.

Los productores alquilarán los bienes de capital a los inventores para producir el bien final. Los inventores invierten en I+D para crear nuevos productos y cuando los crean reciben una patente que les da el monopolio perpetuo sobre su producción y alquiler. Los consumidores, como siempre, maximizan su utilidad sujeto a restricciones presupuestarias.

11.1.1. Productores de bienes finales

La función de producción de bienes finales de la empresa i será

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{N} X_{ij}^{\alpha}$$

donde N es el número de bienes de capital inventados y X_{ij} es la cantidad del bien intermedio j demandada por la empresa i. Cada nuevo insumo X es diferente a los anteriores, no son mejores ni peores, y los insumos antiguos nunca quedan obsoletos. Asumiremos que se demanda una cantidad estrictamente positiva de todos los insumos ($\lim_{X_{ij}\to 0} \frac{\partial Y_i}{\partial X_{ij}} = \infty$).

El progreso tecnológico se traducirá en el aumento constante de la cantidad de bienes intermedios, N. Supongamos que cada empresa demandará la misma cantidad de cada insumo, con lo cual

$$\sum_{j=1}^{N} X_{ij}^{\alpha} = NX_i^{\alpha}$$

Reemplazando en la función de producción tenemos que

$$Y = AL_i^{1-\alpha} NX_i^{\alpha} = AL_i^{1-\alpha} \cdot (NX_i)^{\alpha} N^{1-\alpha}$$

Con lo cual notamos la estructura AK del término N. No habrán rendimientos decrecientes en N. Esta será la fuente de crecimiento endógeno.

Los bienes finales de todas las empresas serán idénticos y normalizaremos su precio a 1. Este bien puede ser utilizado en consumo, en la producción de bienes intermedios o en I+D. La utilidad de cada productor entonces será

$$\pi = Y_i - wL_i - \sum_{j=1}^{N} P_j X_{ij}$$

donde toman los precios de los insumos como dados. El producto marginal de cada bien intermedio deberá igualar a su precio, con lo cual

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_{ij}} = AL_i^{1-\alpha} \alpha X_{ij}^{\alpha-1} = P_j \quad \Longrightarrow \quad X_{ij} = L_i \cdot \left(\frac{A\alpha}{P_j}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Esta será la demanda del bien j por parte de la empresa i. De esto, podemos ver que la elasticidad precio de la demanda por cada tipo de bien será igual a $-\frac{1}{1-\alpha}$. Además, como asumimos competencia perfecta, tenemos que el pago del trabajo como fracción del producto debe ser igual a $1-\alpha$, con lo cual

$$w = (1-\alpha) \cdot (Y_i/L_i)$$

11.1.2. Inventores de variedades

Para generar una nueva variedad los inventores necesitan invertir en I+D. Estas empresas enfrentan un problema en dos etapas. Primero, deben decidir si destinar recursos a la creación de una nueva variedad, cosa que harán si el valor presente de las futuras utilidades compensa el gasto en I+D necesario. Segundo, deben determinar el precio óptimo al cual ofrecer la patente de su bien intermedio. Resolveremos el problema recursivamente.

El valor presente de los retornos obtenidos de crear una nueva variedad viene dado por

$$V(t) = \int_t^\infty \pi_j(v) \cdot e^{-\bar{r}(t,v)\cdot(v-t)} dv$$

donde $\bar{r} \equiv \frac{1}{v-t}\int_t^v r(w)dw$ es la tasa de interés promedio entre el periodo t y v. Asumiremos que el costo marginal del bien intermedio es constante e igual a 1, con lo que el flujo de utilidad viene dado por

$$\pi_j(v) = [P_j(v) - 1] \cdot X_j(v)$$

donde X_j es la demanda total por el insumo j, que es igual a

$$X_j(v) = \sum_i X_{ij}(v) = \left(\frac{A\alpha}{P_j(v)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \sum_i L_i = L \cdot \left(\frac{A\alpha}{P_j(v)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Dado esto, cada inventor j maximiza su utilidad como monopolista en cada momento del tiempo:

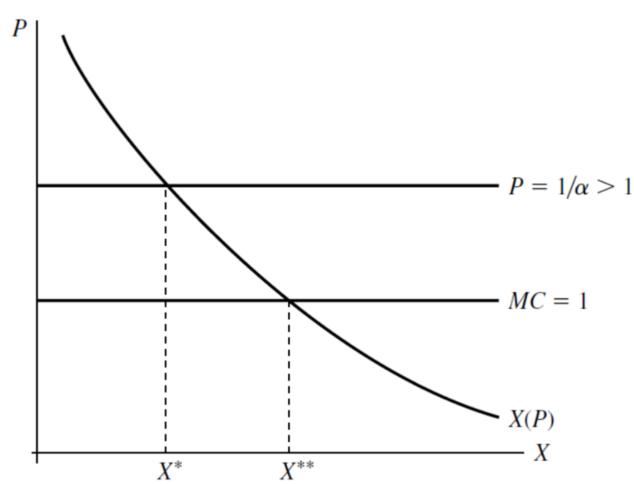
$$\max_{P_j(v)} \quad \pi_j(v) = [P_j(v) - 1] \cdot L \cdot \left(\frac{A\alpha}{P_j(v)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Resolviendo este problema, tenemos que

$$P_j(v) = 1/\alpha > 1$$

Es decir, el precio que fija es mayor al costo marginal (existen márgenes gracias al monopolio). La cantidad demandada del bien j entonces será constante en el tiempo e igual a

$$X_j = L \cdot \left(\frac{A\alpha}{1/\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = L \cdot \left(A\alpha^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$



Luego, la cantidad agregada de bienes intermedios será

$$X = NX_j = NL \cdot \left(A\alpha^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Y la utilidad del inventor j es

$$\pi_j(v) = \pi_j = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot LA^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$$

Por lo que el valor presente de crear una nueva variedad será

$$V(t) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot LA^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \cdot \int_t^{\infty} e^{-\bar{r}(t,v)\cdot(v-t)} dv$$

Luego, un potencial inventor invertirá en I+D si este valor presente es al menos igual al costo de invertir en I+D. Vamos a suponer que este costo es constante e igual a η. Entonces, una empresa invertirá en I+D si $V(t) \geq \eta$, donde la condición de libre entrada implica que

$$V(t) = \eta$$

Diferenciando $V(t)$ y usando la condición de libre entrada respecto al tiempo podemos mostrar que[11]

$$r(t) = \frac{\pi}{V(t)} + \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \tag{11.1}$$

Es decir, el retorno de un bono debe igualar el retorno de invertir en I+D. Dado que η es constante, $\dot{V}(t) = 0$ y la tasa de interés de la economía es igual a

$$r = \frac{\pi}{\eta} = (L/\eta) \cdot A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$$

11.1.3. Consumidores

Los hogares maximizan

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

sujeto a la restricción presupuestaria

$$\dot{A} = rA + wL - C$$

La condición de Euler de este problema viene dada por

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}[r - \rho]$$

[11] Demostrado en la guía 4 (link). Recordar Regla de Leibniz.

11.1.4. Equilibrio

En economía cerrada:

$$A = \eta N$$

Que es el valor de las empresas de I+D en la economía, $V(t) \cdot N$. Dado que η,

$$\dot{A} = \eta \dot{N}$$

El producto lo podemos desarrollar reemplazando X:

$$Y = AL^{1-\alpha} N X^{\alpha} = AL^{1-\alpha} N \left(NL \cdot \left(A\alpha^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{\alpha} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} L N^{1+\alpha} (A\alpha^2)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

La tasa de interés de la economía, la podemos desarrollar como

$$r = (L/\eta) \cdot A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$$

desarrollar

$$r = \frac{1}{\eta} \cdot (1-\alpha)\alpha \cdot (Y/N)$$

Por otro lado, el ingreso agregado $wL + rA$ es igual a $Y - \alpha^2 Y$. Dado todo lo anterior, la restricción de recursos de la economía será

$$\eta \dot{N} = Y - C - X$$

donde X denota la cantidad de insumos agregados (no confundir con X_j).

11.1.5. Equilibrio descentralizado

La tasa de crecimiento en la economía viene dada por

$$\gamma_{Mkt} = \frac{1}{\theta} \left[(L/\eta) \cdot A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} - \rho \right] \tag{11.2}$$

donde debemos chequear que $\gamma > 0$ para que sea válida. Luego, el consumo viene dado por

$$C = Y - X - \eta \dot{N}$$
$$C = (N/\theta) \cdot \left\{ LA^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot (1-\alpha) \cdot \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \cdot [\theta - \alpha(1-\theta)] + \eta\rho \right\}$$

Analizando (11.2), vemos que el crecimiento depende positivamente de A (aumenta la productividad de sector de bienes finales) y de L (efecto escala), y negativamente de η (aumenta el costo de invertir en I+D) y ρ (aumenta la impaciencia de los hogares).

11.1.6. Equilibrio centralizado

Como sabemos, la existencia de una externalidad positiva en la existencia de variedades (no internalizada por los inventores de bienes) implica que el equilibrio descentralizado no es equilibrio de Pareto. Específicamente, notamos de los resultados anteriores que los inventores (que son monopolio de cada variedad) fijan una cantidad de insumos X_j por debajo de la cantidad socialmente óptima, para generar un margen de ganancias por sobre el costo marginal.

El planificador social va a maximizar la función de utilidad del hogar sujeto a la restricción de recursos de la economía:

$$\begin{aligned} \max_{C} \quad & U = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt \\ s.a. \quad & \dot{N} = \frac{1}{\eta}\left[AL^{1-\alpha}NX_j^{\alpha} - C - NX_j\right] \end{aligned}$$

El hamiltoniano del problema entonces queda[12]

$$H(\cdot) = e^{-\rho t}\frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda \cdot \left\{\frac{AL^{1-\alpha}NX^{\alpha} - C - NX}{\eta}\right\}$$

Cuyas CPO son:

$$\begin{aligned} &(1): \frac{\partial H}{\partial C} = 0: && \Longrightarrow \quad e^{-\rho t}C^{-\theta} - \frac{\lambda}{\eta} = 0 \\ &(2): \frac{\partial H}{\partial X} = 0: && \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{\eta}\left[\alpha AL^{1-\alpha}NX^{\alpha-1} - N\right] = 0 \\ &(3): \frac{\partial H}{\partial N} = -\dot{\lambda}: && \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{\eta}\left[AL^{1-\alpha}X^{\alpha} - X\right] = -\dot{\lambda} \\ &(4): \lim_{t\to\infty}\left[\lambda(t)\cdot N(t)\right] = 0 && \text{(Condición de transversalidad)} \end{aligned}$$

De la CPO (1), tenemos que

$$\begin{aligned} e^{-\rho t}C^{-\theta} - \frac{\lambda}{\eta} &= 0 \\ -\rho t - \theta \ln C &= \ln\lambda - \ln\eta \\ \theta\frac{\dot{C}}{C} &= -\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \rho \\ \frac{\dot{C}}{C} &= \frac{1}{\theta}\left[-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \rho\right] \end{aligned}$$

De la CPO (2) podemos desarrollar que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\eta}\left[\alpha AL^{1-\alpha}NX^{\alpha-1} - N\right] &= 0 \\ \alpha AL^{1-\alpha}NX^{\alpha-1} - N &= 0 \\ X^{1-\alpha} &= \alpha AL^{1-\alpha} \\ X &= (\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}L \end{aligned}$$

[12]Por simplicidad omitimos los subíndices j de la derivación.

De la CPO (3) tenemos que

$$\frac{\lambda}{\eta}\left[AL^{1-\alpha}X^{\alpha}-X\right]=-\dot{\lambda}$$
$$-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}=\frac{1}{\eta}\left[AL^{1-\alpha}X^{\alpha}-X\right]$$

Reemplazando el X encontrado antes,

$$\begin{aligned}
-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}&=\frac{1}{\eta}\left[AL^{1-\alpha}X^{\alpha}-X\right]\\
-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}&=\frac{1}{\eta}\left[AL^{1-\alpha}((\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}L)^{\alpha}-(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}L\right]\\
-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}&=\frac{1}{\eta}\left[A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}+1}L^{1-\alpha+\alpha}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-A^{\frac{1}{1-\alpha}}L\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]\\
-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}&=\frac{1}{\eta}\left[A^{\frac{1}{1-\alpha}}L\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-A^{\frac{1}{1-\alpha}}L\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]\\
-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}&=\frac{1}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}L\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\alpha^{-1}-1\right]\\
-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}&=\frac{1}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}L\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\alpha}
\end{aligned}$$

Reemplazando esto en $\dot{C}/C$ encontrado antes, tenemos que la tasa de crecimiento de la economía vendrá dada por

$$\gamma_{CP}=\frac{1}{\theta}\left[(L/\eta)\cdot A^{\frac{1}{1-\alpha}}\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\cdot\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}-\rho\right]$$

Dado que $\alpha<1$ es directo notar comparando con (11.2) que

$$\gamma_{CP}>\gamma_{Mkt}$$

Es decir, el planificador central logra una tasa de crecimiento mayor a la del equilibrio descentralizado. Formas de acercarse a este equilibrio centralizado sin tener un planificador central son:

- Subsidios a la compra de bienes intermedios (aumenta la demanda de X más cerca del óptimo).
- Subsidios al producto final.

11.2. Modelo de Romer (1990)

En este modelo, Romer asume que la tecnología de investigación utiliza solamente trabajo o capital humano, no producto. Además, asumimos una oferta de capital humano fija. Entonces, si el sector de I+D requiere una cantidad fija de trabajo L, el costo de investigar depende positivamente del salario w. Luego, el costo de innovar aumenta con el tiempo a una tasa γ (igual que el salario), y eventualmente generar nuevas ideas deja de ser atractivo.

Para solucionar lo anterior, Romer asume que el costo de inventar nuevas variedades disminuye con la acumulación de nuevas ideas (N). Es decir, los costos de I+D ahora serán proporcionales a w/N. En otras palabras, la externalidad positiva de este modelo resulta de que la creación de una nueva variedad individual reduce el costo de crear otras variedades futuras (knowledge spillovers). El costo de innovar en unidades de bienes será $w\eta/N$, por lo que debe ocurrir que

$$V(t) = \frac{w\eta}{N} \neq \eta \tag{11.3}$$

Nuevamente, asumiremos que cada productor final demanda la misma cantidad de cada bien intermedio, por lo que la función de producción de la empresa i será

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha}NX_i^{\alpha}$$

Entonces, cada productor maximizará la siguiente utilidad[13]:

$$\max_{L_i, X_i} \quad \pi_i = AL_i^{1-\alpha}NX_i^{\alpha} - wL_i - NpX_i$$

donde p es el precio de cada variedad. Resolviendo lo anterior, tenemos que

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial L_i} = 0: \quad (1-\alpha)AL_i^{1-\alpha}NX_i^{\alpha} \cdot L_i^{-1} - w = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1-\alpha)\frac{Y_i}{L_i} = w \tag{11.4}$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial X_i} = 0: \quad \alpha AL_i^{1-\alpha}NX_i^{\alpha-1} - Np = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_i = L_i\left(\frac{\alpha A}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{11.5}$$

Es decir, la demanda total de cada variedad será

$$X = \sum_i X_i = (L - L_R) \cdot \left(\frac{\alpha A}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{11.6}$$

donde L_R es el empleo en el sector de innovación. Los monopolios toman esta demanda como dada, por lo que maximizan lo siguiente (asumamos que el costo marginal de producir una variedad es constante e igual a una unidad de bien final):

$$\max_{p} \quad \pi = (p-1) \cdot X = (p-1) \cdot (L - L_R) \cdot \left(\frac{\alpha A}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (L - L_R)(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[p^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} - p^{\frac{-1}{1-\alpha}}\right]$$

Resolviendo esto, llegamos a que $p = 1/\alpha$. Reemplazando este precio en (11.6), llegamos a que la cantidad producida de cada bien intermedio será:

$$X = (L - L_R)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$$

Además, podemos calcular la utilidad de cada monopolio como:

$$\pi = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)(L - L_R)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(L - L_R)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \tag{11.7}$$

Por otro lado, reemplazando $p = 1/\alpha$ en (11.5), llegamos a que la demanda de cada empresa i de cada insumo será:

$$X_i = L_iA^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$$

[13] Recordemos que normalizamos el precio del bien final a 1.

Luego, podemos desarrollar el salario de equilibrio a partir de (11.4) como

$$w = (1-\alpha)AL_i^{-\alpha}NX_i^{\alpha}$$
$$w = (1-\alpha)AL_i^{-\alpha}N(L_iA^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}})^{\alpha}$$
$$w = N(1-\alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

Reemplanzando esto en el costo de innovación llegamos a que

$$\frac{w\eta}{N} = \eta(1-\alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

Usando el resultado encontrado en (11.1), junto con que $\dot{V}(t) = 0$. Tenemos que

$$V(t) = \frac{\pi}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)(L-L_R)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$$

Luego, utilizando la condición de libre entrada de (11.3), llegamos a que el valor presente de una innovación será igual a:

$$V(t) = \frac{\pi}{r} = \frac{w\eta}{N}$$

Ocupando los resultados encontrados previamente podemos despejar que la tasa de interés de equilibrio será:

$$r = \frac{\alpha}{\eta}(L-L_R) \tag{11.8}$$

Por definición, tenemos que una innovación requiere $\frac{\eta}{N}$ unidades de trabajo. Entonces, el cambio en N vendrá dado por

$$\dot{N} = L_R\left(\frac{N}{\eta}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad L_R = \eta\cdot\frac{\dot{N}}{N} \tag{11.9}$$

De la condición óptima del hogar, sabemos que

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[r-\rho]$$

Reemplazando la tasa de interés de equilibrio de (11.8).

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha}{\eta}(L-L_R)-\rho\right]$$

Reemplazando L_R de (11.9),

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha}{\eta}L-\alpha\frac{\dot{N}}{N}-\rho\right]$$

Podemos probar que, dada la estructura AK del modelo, todas las variables crecen a la misma tasa γ, con lo cual podemos despejar que

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha}{\eta}L-\alpha\gamma-\rho\right]$$
$$\gamma\left(1+\frac{\alpha}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha}{\eta}L-\rho\right]$$
$$\gamma\left(\frac{\theta+\alpha}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha}{\eta}L-\rho\right]$$
$$\gamma = \frac{1}{\theta+\alpha}\left[\frac{\alpha}{\eta}L-\rho\right]$$

Esta será la tasa de crecimiento de la economía. A diferencia del modelo anterior, este no depende de A, porque el sector I+D no utiliza bienes finales como insumo.

En este modelo, el crecimiento endógeno se produce gracias a los spillovers generados por la inversión en I+D (que reduce el costo de crear futuras variedades).

Entonces, existirán dos tipos de distorsiones: la existencia de monopolios y la externalidad positiva en el sector de innovación. Estas distorsiones generan que la existencia de un planificador central benevolente o de diversos incentivos correctivos (como subsidios a la inversión en I+D) puedan generar una tasa de crecimiento mayor a la de este equilibrio descentralizado.

12. Modelo Schumpeteriano

A diferencia de los modelos de variedades, en este modelo el crecimiento endógeno es generado por una secuencia aleatoria de mejoras en la calidad de las innovaciones. Este modelo se basa fuertemente en la idea de competencia industrial. Denominamos a este modelo como “schumpeteriano”, porque:

- El crecimiento es generado por innovaciones.
- Las innovaciones resultan de inversiones empresariales motivadas por los retornos de rentas monopólicas.
- Estas nuevas innovaciones reemplazan a la tecnología anterior, es decir, hay un proceso de destrucción creativa.

12.1. Modelo simplificado

Trabajaremos en tiempo discreto, donde los individuos y las empresas viven durante un solo periodo. Este modelo simple se abstrae de la acumulación de capital (no hay K).

Hay un solo bien final y el producto se puede usar en consumo, la producción de bienes intermedios y la producción de I+D. Es decir, la restricción presupuestaria de la economía es

$$Y_t = C_t + X_t + R_t$$

Normalizamos el precio del bien final a 1.

12.1.1. Tecnología de producción

La oferta de trabajo L es constante en cada periodo y perfectamente inelástica. La utilidad de los hogares depende del consumo del único bien final.

Las firmas usan dos insumos: trabajo y **un único** bien intermedio, de acuerdo a la siguiente Cobb-Douglas:

$$Y_t = (A_t L_t)^{1-\alpha} y_t^{\alpha}$$

donde y_t es el bien intermedio utilizado. El bien intermedio cada periodo es producido por un monopolio que utiliza como insumo una unidad del bien final. Denotemos la cantidad del bien final usado para producir el bien intermedio como X_t. Entonces, la función de producción del monopolio es

$$y_t = X_t$$

12.1.2. Innovación

En este modelo el crecimiento resulta de las innovaciones, que aumentan el parámetro de productividad A_t al mejorar la calidad del bien intermedio. Cada periodo, una persona tiene la oportunidad de intentar una innovación.

- Si tiene éxito, la innovación crea una nueva versión del bien intermedio, que es más productiva y deja obsoleta a la versión anterior. Específicamente,

  $$A_t = \gamma A_{t-1}$$

  donde $\gamma > 1$ representa la tasa de aumento en la productividad.

- Si no tiene éxito, no se da ninguna innovación en ese periodo y otro monopolio aleatorio produce el mismo bien intermedio el siguiente periodo. Es decir,

$$A_t = A_{t-1}$$

Es decir,

$$A_t = \begin{cases} \gamma A_{t-1} & \text{si la innovación tiene éxito} \\ A_{t-1} & \text{si la innovación no tiene éxito} \end{cases} \tag{12.1}$$

Para innovar, el emprendedor necesita incurrir en gastos de I+D, cuyo resultado es incierto. Sin embargo, mientras más gasto en I+D realiza el emprendedor, más probable es que la innovación tenga éxito. Específicamente, asumiremos que para generar una innovación con una probablidad z_t, se necesita gastar

$$R_t = c(z_t)A_{t-1}$$

donde asumiremos una función cuadrática de costos $c(z_t) = \delta\frac{z_t^2}{2}$, donde δ representa una medida inversa de la productividad del sector de I+D.

12.1.3. Timing de los eventos

1. En el periodo t, se comienza con un nivel de productividad A_{t-1}.
2. Un emprendedor aleatorio escoge cuánto gastar en I+D al fijar un z_t.
3. La innovación se realiza o falla, y la productividad evoluciona según (12.1).
4. La producción del bien intermedio se realiza.
5. La producción final se realiza.
6. El consumo se realiza y el periodo t termina.

Resolveremos este modelo mediante **inducción hacia atrás**.

12.1.4. Equilibrio de producción y utilidad

Empezando del paso 5, el producto final maximiza la siguiente utilidad

$$\max_{y_t, L_t} \quad \pi_t = (A_t L)^{1-\alpha} y_t^{\alpha} - w_t L - p_t y_t$$

Resolviendo esto, tenemos que

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial L} = 0: \quad (1-\alpha)A_t^{1-\alpha}L^{-\alpha}y_t^{\alpha} - w_t = 0 \implies w_t = (1-\alpha)A_t^{1-\alpha}L^{-\alpha}y_t^{\alpha} \tag{12.2}$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial y_t} = 0: \quad \alpha(A_t L)^{1-\alpha}y_t^{\alpha-1} - p_t = 0 \implies p_t = \alpha(A_t L)^{1-\alpha}y_t^{\alpha-1} \tag{12.3}$$

El monopolista toma estas demandas inversas como dadas, y maximiza su utilidad esperada medida en unidades del bien final:

$$\begin{aligned} \max_{y_t, p_t} \quad & \Pi(A_t) = (p_t - 1)y_t = p_t y_t - y_t \\ s.a. \quad & p_t = \alpha (A_t L)^{1-\alpha} y_t^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Resolviendo esto, tenemos que la cantidad producida del bien intermedio es

$$y_t = \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} A_t L$$

Que podemos reemplazar en (12.3) y despejar que el precio de equilibrio es

$$\begin{aligned} p_t &= \alpha (A_t L)^{1-\alpha} (\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} A_t L)^{\alpha-1} \\ p_t &= \alpha \cdot \alpha^{-2} \\ p_t &= 1/\alpha \end{aligned}$$

Con lo cual la utilidad de equilibrio del monopolio es

$$\Pi(A_t) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} A_t L = \pi A_t L$$

donde $\pi = (1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$. Entonces, la producción del bien final será

$$Y_t = (A_t L)^{1-\alpha} (\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} A_t L)^{\alpha} = \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} A_t L$$

Dado esto, es directo ver que la tasa de crecimiento del producto será igual a la tasa de crecimiento de la productividad.

12.1.5. Equilibrio de intensidad de innovación

Como sabemos, la probabilidad de que la innovación tenga éxito será z_t. Para escoger esta probabilidad, el emprendedor maximizará su utilidad esperada:

$$\max_{z_t} \quad z_t \Pi(\gamma A_{t-1}) - c(z_t) A_{t-1} = z_t \pi \gamma A_{t-1} L - c(z_t) A_{t-1}$$

Que es equivalente a

$$\max_{z_t} \quad z_t \pi \gamma L - c(z_t)$$

Cuya CPO implica que

$$c'(z_t) = \pi \gamma L$$

Que usando la función de costos cuadráticas queda en que

$$z_t = z = \frac{\pi \gamma L}{\delta}$$

donde notamos que z_t no depende de t. Para asegurar que esta probabilidad esté dentro del intervalo $[0,1]$, tenemos que asumir que

$$(1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \gamma L < \delta$$

12.1.6. Tasa de crecimiento promedio

Como vimos, la tasa de crecimiento del producto será igual a γ cuando la innovación tiene éxito. La tasa de crecimiento de la economía será la tasa de crecimiento proporcional al producto final, que es también:

$$g_t = \frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}}$$

Dado que la innovación es incierta, esta tasa es aleatoria. Con probabilidad z_t la innovación tiene éxito, $A_t = \gamma A_{t-1}$ y $g_t = \frac{\gamma A_{t-1} - A_{t-1}}{A_{t-1}} = \gamma - 1$, y con probabilidad $1 - z_t$, $A_t = A_{t-1}$ y $g_t = 0$. Es decir, la tasa de crecimiento esperada de la economía será:

$$g = E[g_t] = z \cdot (\gamma - 1)$$

Esta será también la tasa de crecimiento promedio de largo plazo, donde podemos entender z como la frecuencia de largo plazo en la que innovaciones tienen lugar, mientras que podemos entender $(\gamma - 1)$ como el aumento proporcional en la productividad dada cada innovación. En otras palabras, en este modelo **la tasa de crecimiento de largo plazo iguala la frecuencia de innovaciones por el tamaño de estas**. Dado el valor de equilibrio de z, tendremos que la tasa de crecimiento promedio es

$$g = \frac{\pi \gamma L}{\delta}(\gamma - 1) \tag{12.4}$$

Estadística comparativa de (12.4):

- Mayor productividad de las innovaciones (menor δ) reduce el costo de oportunidad de invertir en I+D y hace más frecuente las innovaciones. Aumenta el crecimiento promedio.
- Un mayor tamaño de las innovaciones (mayor γ) aumenta más la productividad por cada innovación. Aumenta el crecimiento promedio.
- Una mayor población (mayor L) también tiene un efecto positivo en la tasa de crecimiento promedio.

12.2. Equilibrio centralizado

Dado que la innovación en I+D genera una externalidad positiva, es útil analizar las diferencias entre el equilibrio descentralizado y el equilibrio centralizado al que llevaría un planificador central benevolente. Consideraremos que este planificador central es miope, en el sentido de que maximiza la función objetivo periodo a periodo.

De la restricción presupuestaria y las funciones de producción de ambos sectores, podemos plantear el problema del planificador central como

$$\max_{y_t} \quad C(A_t, R_t) = (A_t L)^{1-\alpha} y_t^{\alpha} - y_t - R_t$$

Resolviendo esto, llegamos a que la cantidad socialmente óptima del bien intermedio es

$$y_t^{CP} = A_t L \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{12.5}$$

Con lo cual el consumo máximo de cada periodo será

$$\tilde{C}(A_t, R_t) = (1-\alpha) A_t L \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - R_t$$

y el producto socialmente óptimo es

$$Y_t^{CP} = A_t L \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Comparando los resultados encontrados en el equilibrio descentralizado, notamos que

$$y_t^{CP} > y_t \qquad Y_t^{CP} > Y_t$$

Esta vez, el planificador central escogerá la intensidad de innovación con tal de maximizar el consumo esperado:

$$\begin{aligned} C_t^{CP} \equiv \max_{z_t} \quad & z_t \tilde{C}(\gamma A_{t-1}, R_t) + (1-z_t)\tilde{C}(A_{t-1}, R_t) \\ s.a \quad & R_t = c(z_t)A_{t-1} = \delta \frac{z_t^2}{2} A_{t-1} \end{aligned}$$

Que podemos reescribir como

$$C_t^{CP} \equiv \max_{z_t} \quad z_t(1-\alpha)\gamma A_{t-1} L \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-z_t)(1-\alpha)A_{t-1} L \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta \frac{z_t^2}{2} A_{t-1}$$

donde notamos que, a diferencia del monopolio, el planificador central considera dentro del problema el caso en que la innovación falla, porque internaliza los costos de la intensidad de innovación en este caso. Resolviendo el problema anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\alpha)\gamma A_{t-1} L \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (1-\alpha)A_{t-1} L \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta z_t A_{t-1} \\ \delta z_t A_{t-1} &= (\gamma - 1)(1-\alpha)A_{t-1} L \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

$$z_t^{CP} = (\gamma - 1)\frac{(1-\alpha)L\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\delta} \tag{12.6}$$

donde tendremos que si $\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} < \frac{\gamma-1}{\gamma}$, la intensidad de la inversión será mayor al caso descentralizado ($z_t < z_t^{CP}$).

Nuevamente, en este modelo existirán dos tipos de distorsiones: los monopolios y la externalidad de la innovación. Mientras la externalidad negativa del monopolio está gobernada por el parámetro α (que determina el mark-up del monopolio), la externalidad positiva de la innovación está determinada por el parámetro γ (que determina el aumento proporcional de la productividad de la economía con cada innovación).

12.3. Política industrial

Dadas las distorsiones, un policymaker puede mejorar el bienestar mediante subsidios a la producción o a la investigación. Supongamos que se subsidia a estas dos actividades a tasas τ_P y τ_R respectivamente y que el policiymaker las fija con tal de maximizar el bienestar[14]. Específicamente, este subsidio actúa sobre la producción del bien intermedio, de forma que disminuye el costo marginal a un valor menor a 1. Entonces, el problema del monopolio pasa a ser:

$$\begin{aligned} \max_{y_t, p_t} \quad & \Pi(A_t) = (p_t - (1-\tau_P))y_t = p_t y_t - (1-\tau_P)y_t \\ s.a. \quad & p_t = \alpha (A_t L)^{1-\alpha} y_t^{\alpha - 1} \end{aligned}$$

[14] Asumimos que estos subsidios se financian con impuestos de suma alzada, de forma que no distorsionen.

O lo que es equivalente,

$$\max_{y_t} \quad \Pi^{\tau}(A_t) = \alpha(A_t L)^{1-\alpha} y_t^{\alpha} - (1-\tau_P) y_t$$

Resolviendo esto, tenemos que

$$y_t^{\tau} = \left[\frac{\alpha^2}{1-\tau_P}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} A_t L$$

Notamos que el subsidio óptimo que iguala lo anterior al socialmente óptimo (12.5) es:

$$\left[\frac{\alpha^2}{1-\tau_P}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \implies \tau_P = 1-\alpha$$

Asumiendo este subsidio óptimo, el gobierno también subsidiará la investigación mediante una reducción en la función de costos $c(z_t)$, de forma que el problema que resuelve el emprendedor es:

$$\max_{z_t} \quad z_t \Pi^{\tau}(\gamma A_{t-1}) - (1-\tau_r) c(z_t) A_{t-1} = z_t (1-\alpha)\gamma A_{t-1} L \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\tau_R)\delta \frac{z_t^2}{2} A_{t-1}$$

Con lo cual la decisión óptima es

$$z_t^{\tau} = \frac{(1-\alpha)\gamma L \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(1-\tau_R)\delta}$$

Entonces, el subsidio óptimo que iguala esto a (12.6) es:

$$\frac{\alpha\gamma}{1-\tau_R} = (\gamma - 1) \implies \tau_R = 1 - \frac{\alpha\gamma}{\gamma-1}$$

donde podemos notar que este subsidio óptimo es creciente en el tamaño de las innovaciones (γ), que es un resultado intuitivo dado que los monopolios no internalizan la externalidad positiva que las innovaciones tienen sobre la productividad del sector del bien final.

TÓPICOS

13. Difusión Tecnológica

Un problema de los modelos de crecimiento endógeno es que se pierde el resultado de convergencia condicional entre países, que sí se daba en modelos previos. En esta sección, derivaremos el resultado de convergencia a partir de la idea de difusión tecnológica en una economía mundial con múltiples países; algunos líderes, que innovan en nueva tecnología; y otros seguidores, que reutilizan los descubrimientos de las economías más avanzadas.

13.1. Planteamiento del modelo