Teoría de la demanda clásica

Adriana Piazza

Microeconomía I

Otoño 2025

Introducción

En la teoría de la demanda clásica o *teoría de la elección racional*, asumimos que el consumidor basa su comportamiento en sus *preferencias* $\succsim$ definidas en el conjunto de alternativas disponibles X.

Ya vimos:

- Definición de preferencias.
- Propiedades que debe cumplir una preferencia racional.

Veremos ahora:

- Otras propiedades de $\succsim$
- Qué propiedades se necesitan para que $\succsim$ pueda ser representada por una función de utilidad

Propiedades de las relaciones de preferencia

Propiedades de $\succsim$: monotonía

- Propiedades de monotonía. Dada $\succsim$ definida en X:
  - diremos que $\succsim$ es fuertemente monótona si

$$\forall x, y \in X, \quad x \geq y \text{ con } x \neq y \implies x \succ y$$

  - diremos que $\succsim$ es monótona si

$$\forall x, y \in X, \quad x \gg y \implies x \succ y$$

  - diremos que $\succsim$ es localmente no saciada (l.n.s.) si

$$\forall x \in X \text{ y } \forall \epsilon > 0, \text{ existe un } y \in X \text{ tal que } \|y - x\| \leq \epsilon \text{ y } y \succ x$$

$$\boxed{\text{Fuertemente monótona} \implies \text{Monótona} \implies \text{l.n.s.}}$$

Propiedades de $\succsim$: monotonía

Ejemplo de $\succsim$ monótona
pero no fuertemente monótona

Ejemplo de $\succsim$ l.n.s.
pero no monótona

Propiedades de $\succsim$

- Dada $\succsim$ y una cesta de bienes $x \in X$, definimos tres conjuntos en X:
  - *(i)* Conjunto indiferente: $\{y \in X : y \sim x\}$
  - *(ii)* Conjunto de contorno superior $\{y \in X : y \succsim x\}$
  - *(iii)* Conjunto de contorno inferior $\{y \in X : x \succsim y\}$

- Una implicancia de l.n.s. es que **no** permite conjuntos indiferentes con interior no-vacío ("gordos").

Propiedades de $\succsim$: convexidad

- Decimos que $\succsim$ es convexa si $\forall x \in X$ el conjunto contorno superior es convexo. Es decir,

$$\forall y, z \text{ tales que } y \succsim x \wedge z \succsim x \implies \lambda y + (1-\lambda) z \succsim x, \forall \lambda \in (0,1)$$

- Decimos que $\succsim$ es estrictamente convexa si $\forall x \in X$ el conjunto contorno superior es estrictamente convexo. Es decir,

$$\forall y, z \text{ tales que } y \succsim x \wedge z \succsim x \implies \lambda y + (1-\lambda) z \succ x, \forall \lambda \in (0,1)$$

Convexidad estricta $\Rightarrow$ Convexidad.

Propiedades de $\succsim$

- Decimos que $\succsim$ es *homotética* si sus conjuntos de indiferencia son "proporcionales entre sí". Es decir si se cumple que

$$x \sim y \Longrightarrow \alpha x \sim \alpha y \text{ para todo } \alpha \geq 0.$$

- Decimos que $\succsim$ es cuasi-lineal con respecto al bien 1 (el bien numerario), si
    - el bien 1 es deseable: $x + (\alpha, 0, \ldots, 0) \succ x$ para todo $x \in X$ y $\alpha > 0$.
    - los conjuntos de indiferencia son desplazamientos paralelos entre sí a lo largo del eje del bien 1:

$$x \sim y \Longrightarrow x + (\alpha, 0, \ldots, 0) \sim y + (\alpha, 0, \ldots, 0) \text{ para todo } \alpha.$$

Propiedades de $\succsim$: continuidad

La relación de preferencias $\succsim$ en X es continua si se preserva en el límite. Esto es, para cualquier secuencia $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \succsim y_n$, $\forall\ n$, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ tenemos que $x \succsim y$.

Equivalentemente, $\succsim$ es continua si sus conjuntos de contorno superior y de contorno inferior son cerrados.

Función de utilidad

Función de Utilidad

Hasta ahora hemos abordado la caracterización de las elecciones racionales de una forma muy general, lo cual limita la capacidad de determinar las decisiones óptimas.

Para poder ocupar herramientas matemáticas del cálculo, tendremos que cuantificar de forma más precisa los diferentes gustos de un individuo.

Decimos que la función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ *representa* a la preferencia $\succsim$ si

$$x \succsim y \quad \Longleftrightarrow \quad u(x) \geq u(y) \quad \forall x, y \in X$$

Función de Utilidad

Si tenemos una función de utilidad que represente a $\succsim$, encontrar las alternativas óptimas para un individuo con preferencias $\succsim$ que escoge en $B \subseteq X$ se reduce a la resolución de un problema de optimización.

Sin embargo, no siempre existe una función de utilidad.

Cuando existe una función de utilidad, no siempre existen alternativas óptimas.

Nuestro siguiente objetivo es determinar condiciones suficientes sobre las preferencias que aseguren la existencia de una función de utilidad que las represente.

Función de Utilidad

Proposición. Si $\succsim$ no es racional $\implies$ no puede ser representada por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$

¡Preferencia racional es condición necesaria pero no suficiente!

Contraejemplo: Preferencia lexicográfica (no puede ser representada por una función de utilidad).

Caso más simple $L = 2$ ($X = \mathbb{R}^2_+$). Definimos $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ si:

- $x_1 > y_1$, o
- $x_1 = y_1 \wedge x_2 \geq y_2$

$\succsim$ así definida es racional, sin embargo, $\nexists\ u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ que la represente.

Función de Utilidad

¿Qué más tenemos que pedir para asegurar que $\exists$ una función de utilidad?

Dos condiciones suficientes (pero no necesarias):

Proposición. Si X es finito, cualquier preferencia racional $\succsim$ sobre X puede ser representada por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$.

Proposición. Si $\succsim$ en X es racional y continua, entonces $\succsim$ puede ser representada por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$, con u continua.

(Haremos la demostración cuando $\succsim$ es monótona. (Teorema de Wold, 1943))

Propiedades de las Funciones de Utilidad

Observación: muchas funciones de utilidad pueden representar a una misma $\succsim$.

Ejemplo. Si $u : X \to \mathbb{R}$ representa a las preferencias $\succsim$ y si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente $\implies$ $f \circ u : X \to \mathbb{R}$ también representa a $\succsim$ ya que $f(u(x)) \geq f(u(y)) \iff u(x) \geq u(y)$.

Pregunta: Sea u una función de utilidad que representa a $\succsim$ continua. ¿Es u continua?

Pregunta: Sea u una función de utilidad continua que representa a $\succsim$. ¿Es $\succsim$ continua?

Propiedades de las Funciones de Utilidad

Proposición Supongamos que la relación de preferencia $\succsim$ en X puede ser representada por $u : X \to \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\succsim$ es monótona si y solo si u es creciente ($u(x) > u(y)$ si $x \gg y$).
2. $\succsim$ es localmente no saciada si y solo si u no tiene máximos locales en X.
3. $\succsim$ es (estrictamente) convexa si y solo si u es (estrictamente) cuasi-concava.

Definiciones:

- u es cuasicóncava si:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^L_+ \text{ y } \forall \alpha \in (0,1)$$

- u es estrictamente cuasicóncava si:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \min\{u(x), u(y)\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^L_+ \text{ y } \forall \alpha \in (0,1).$$

El problema del/la Consumidor/a

Problema del/la Consumidor/a

Empezamos a estudiar el problema del/la consumidor/a en una economía de mercado: elegir los niveles de consumo de los bienes y servicios disponibles.

¿Cómo un consumidor/a toma las decisiones de consumo? Pasos a seguir:

1. Caracterizar la decisiones de consumo posibles: conjunto presupuestario competitivo (B) (o restricción presupuestaria).

2. Elegir un consumo dentro del conjunto de consumos posibles. En general, escoge el "mejor" de acuerdo a una preferencia $\succsim$

$$\{x \in B : x \succsim y, \ \ \forall y \in B\}$$

Conjunto de Consumo

Por simplicidad en este capítulo vamos a suponer que:

- El número de bienes es finito
- Los bienes son divisibles
- Los bienes son no-negativos

El conjunto de canastas de consumo: $\mathbb{R}^L_+ := \left\{x \in \mathbb{R}^L : x_\ell \geq 0, \ \ \forall \ell \in \{1, ..., L\}\right\}$

Obs: Otros conjuntos son posibles

(i) Bienes no divisibles (i.e. zapatos)

(ii) Bienes que no pueden consumirse simultáneamente (eventos simultáneos)

(iii) Cantidades negativas de consumo

(iv) Cantidades mínimas (subsistencia)

Conjunto Presupuestario

Dados precios $p \in \mathbb{R}^L$ y renta $\omega \geq 0$ el conjunto presupuestario se define como:

$$B(p, \omega) := \left\{ x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq \omega \right\}$$

Hipótesis:

- El agente es tomador de precios: precios son conocidos, fijos y exógenos (excluye buscar mejores precios, regateo)
- Precios lineales (no hay descuento por volumen, no hay subsidios)

Conjunto Presupuestario Competitivo (o restricción presupuestaria)

Dados precios $p \in \mathbb{R}^L$ y renta $\omega \geq 0$ el conjunto presupuestario se define como:

$$B(p, \omega) := \left\{ x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq \omega \right\}$$

Obs: Conjunto presupuestario $B(p, \omega)$ es convexo.

Algunas propiedades:

1. $\forall \lambda > 0$, $B(\lambda p, \lambda \omega) = B(p, \omega)$
2. Si $p \gg 0 \implies B(p, \omega)$ es compacto (si $p \geq 0$ entonces sólo es cerrado).

El problema del/la consumidor/a

Suponemos que $X = \mathbb{R}^L_+$ y que las preferencias $\succsim$ son racionales y continuas.

Sea $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad continua que representa $\succsim$.

Si la renta es $\omega > 0$ y los precios son p, el problema de el/la consumidor/a es

$$\text{(PMaxU)} \quad \begin{cases} \max\limits_{x} & u(x) \\ s.a. & p \cdot x \leq \omega \\ & x \in \mathbb{R}^L_+ \end{cases}$$

¿Existe solución?

- $u(x)$ es continua pues $\succsim$ es continua
- Si $p \gg 0$, $B(p,\omega) = \left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq \omega\right\}$ es compacto

El teorema de Weierstrass permite asegurar que (PMaxU) tiene solución.

El problema del/la consumidor/a

La solución del (PMaxU) es la demanda Marshalliana (o Walrasiana).

- La denotamos $x^*(p, \omega)$
- $x^* : \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}_+^L$ es una correspondencia

Propiedades (a demostrar)

- $x^*(p, \omega)$ es independiente de la función $u(x)$ que representa a $\succsim$
- La demanda es homogénea de grado 0: $x^*(\lambda p, \lambda \omega) = x^*(p, \omega), \forall \lambda > 0$
- Si $\succsim$ es convexa $\Rightarrow x^*(p, \omega)$ es un conjunto convexo
- Si $\succsim$ es estrictamente convexa $\Rightarrow x^*(p, \omega)$ es un singleton
- Si $\succsim$ es l.n.s.. $\Rightarrow x \in x^*(p, \omega)$ satisface la ley de Walras: $p \cdot x = \omega$

Ejemplo

Supongamos que una consumidora tiene preferencias $\succeq$ racionales, continuas, y monótonas que son representadas por una función de utilidad continua $u(x) : X \to \mathbb{R}$, con $X = \mathbb{R}^2_+$. Suponga que el precio del bien 1 está afectado por un descuento por volumen:

$$p_1 = \begin{cases} 2 & \text{si } x_1 < 10 \\ 1 & \text{si } x_1 \geq 10 \end{cases}$$

mientras que el precio del bien 2 es constante $p_2 = 2$.
La renta de la consumidora es $w = 40$.

1. Conjunto presupuestario.
2. Comentarios sobre existencia de solución.

Caracterización de la demanda Marshalliana

Hipótesis adicional: $u(x)$ es continuamente diferenciable.

$$\text{(PMaxU)} \quad \begin{cases} \max\limits_{x} & u(x) \\ s.a. & p \cdot x \leq \omega \\ & x \in \mathbb{R}_+^L \end{cases}$$

Condiciones necesarias de primer orden: existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\nabla u(x^*) \leq \lambda p \quad \wedge \quad x^* \cdot [\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0$$

<u>Obs.</u> si $x^* > 0 \Rightarrow \nabla u(x^*) = \lambda p$ es decir que $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} = \lambda p_i \ \ \forall i$

Esto demuestra la condición necesaria de optimalidad que una demanda interior óptima debe satisfacer:

$$RMS_{\ell,k} = \frac{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_\ell}}{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k}} = \frac{p_\ell}{p_k}$$

Continuidad de la Demanda Marshalliana

Recuerdo:
La demanda Marshalliana, $x^* : \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^L_+$, es una **correspondencia**:

- a cada $p \in \mathbb{R}^L_+$ y cada $w \in \mathbb{R}_+$ le asigna un **conjunto** (el conjunto puede ser un singleton).

Definición: La correspondencia $x^*(p, w)$ es semi-continua superior en $(\bar{p}, \bar{w})$ si dado

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_n, w_n) \to (\bar{p}, \bar{w}) \\ x_n \in x^*(p_n, w_n) \\ \bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \text{siempre se cumple que } \bar{x} \in x^*(\bar{p}, \bar{w})$$

Continuidad de la Demanda Marshalliana

Proposición: Si $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencias $\succsim$ l.n.s. en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$, entonces

- la demanda Marshalliana $x(p, w)$ es semi-continua superior si $(p, w) \gg 0$, (Sin demostración)
- si $x(p, w)$ es una función $\Rightarrow x(p, w)$ es continua si $(p, w) \gg 0$.

Función de Utilidad Indirecta

Definición:

$$v(p,\omega) = u(x^*(p,\omega)) \quad \text{máxima utilidad posible dados } p \gg 0 \text{ y } \omega > 0.$$

Si $u(x) : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad continua que representa preferencias $\succsim$ l.n.s., entonces $v(p,\omega)$ cumple las siguientes propiedades:

1. Homogénea de grado 0.
2. Estrictamente creciente en ω
3. No creciente en p_ℓ para cualquier ℓ.
4. Cuasiconvexa.
5. Continua en p y ω.

Función de Utilidad Indirecta

Proposición: (Utilidad marginal del ingreso)

Suponga que u es función de utilidad continua y cuasi cóncava, que $p \gg 0$, y que existe una solución única al problema del consumidor cuando los precios y la riqueza vienen dadas por (p, w). Entonces,

$$\frac{\partial v(p, w)}{\partial w} = \lambda \geq 0$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria.

Función de Utilidad Indirecta

- Depende de la fn. de utilidad elegida para representar $\succsim$.
- Si $\succsim$ es l.n.s. $\Rightarrow$ $v(p, \omega)$ es estrictamente creciente en ω.

Es decir que dados $\hat{p}$ y la función de utilidad $u(x)$, hay una relación 1 a 1 entre nivel de utilidad (u) y renta mínima necesaria (ω) para alcanzar el nivel de utilidad.

A la función que dada un nivel de utilidad deseado u, entrega el mínimo valor de ω se le denomina función de gasto.

El Problema de Minimización del Gasto (PMinG)

Dado $p \gg 0$ y $u > u(0)$ estudiamos

$$
(\text{PMinG}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & p \cdot x \\ \\ s.a. & u(x) \geq u \\ & \quad x \in \mathbb{R}^L_+ \end{array} \right.
$$

El Problema de Minimización del Gasto (PMinG)

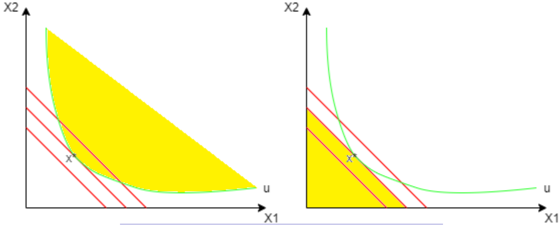
Dados $p \gg 0$ y $u > u(0)$, buscamos x que minimiza el gasto total

$$(\text{PMinG}) \quad \begin{cases} \text{Min } p \cdot x \\ \text{s.a. } u(x) \geqslant u \\ x \in \mathbb{R}^L_+ \end{cases}$$

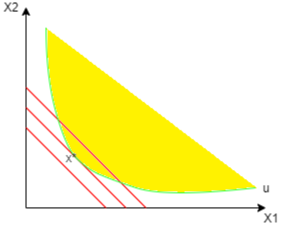
Dados $p \gg 0$ y $\omega > 0$, buscamos x que maximiza la utilidad

$$(\text{PMaxU}) \quad \begin{cases} \text{Max } u(x) \\ \text{s.a. } p \cdot x \leqslant \omega \\ x \in \mathbb{R}^L_+ \end{cases}$$

Decimos que (PMinG) y (PMaxU) son duales: ambos persiguen el mismo uso eficiente del poder de compra del consumidor, intercambiando los roles de la fn. objetivo y de las restricciones



El Problema de Minimización del Gasto (PMinG)



Proposición: Suponga que u es una fn. de utilidad continua que representa $\succsim$ l.n.s. en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$, y el vector de precios es $p \gg 0$. Se tiene que

- Si x^* es óptimo en el PMaxU cuando la riqueza es $\bar{\omega} > 0$, entonces x^* es óptimo en el PMinG cuando la utilidad requerida es $u(x^*)$. Además, el nivel mínimo de gasto en este PMinG es exactamente $\bar{\omega}$.
- Si x^* es óptimo en el PMinG cuando la utilidad requerida es $\bar{u} > u(0)$, entonces x^* es óptimo en el PMaxU cuando el gasto máximo es $p \cdot x^*$. Además, el nivel máximo de utilidad en este PMaxU es exactamente $\bar{u}$.

El Problema de Minimización del Gasto (PMinG)

Dados los precios $p \gg 0$ y un nivel de utilidad requerida u, la función de gasto es el valor de gasto mínimo que resuelve el (PMinG).

$$
\text{(PMinG)} \qquad \begin{cases} e(p,u) = \min\limits_{x} \; p \cdot x \\ s.a. \quad u(x) \geq u \\ \qquad\quad x \in \mathbb{R}^L_+ \end{cases}
$$

La demanda Hicksiana o demanda Compensada es el conjunto de vectores óptimos que resuelven el (PMinG). Se denota por $h(p,u)$.

Relación entre demanda Hicksiana y función de gasto: $e(p,u) = p \cdot h(p,u)$

Ejercicio: Ver propiedades de $e(p,u)$ y $h(p,u)$ (Prop. 3.E.2 y 3.E.3 de MWG).

Algunas identidades importantes

1. $e(p, v(p, \omega)) = \omega$ La mínima renta necesaria para alcanzar utilidad $v(p, \omega)$ es ω.
2. $v(p, e(p, u)) = u$ La máxima utilidad posible de la renta $e(p, u)$ es u.

Dado $p \gg 0$, la función $v(p, \cdot)$ es la inversa de $e(p, \cdot)$

3. $x(p, \omega) = h(p, v(p, \omega))$ La demanda Marshalliana para la renta ω coincide con la demanda Hicksiana para la utilidad $v(p, \omega)$.
4. $h(p, u) = x(p, e(p, u))$ La demanda Hicksiana para la utilidad u coincide con la demanda Marshalliana para la renta $e(p, u)$.

   Esta igualdad justifica el nombre de demanda compensada.

La demanda Hicksiana

La compensación de renta de Hicks es: $\Delta\omega_{Hicks} = e(p', u) - \omega$.

Obs: $h(p, u)$ mantiene el nivel de utilidad del consumo constante a medida que cambian los precios (cambiando la renta) mientras que la demanda Marshalliana mantiene constante la renta, pero permite que varie la utilidad.

La demanda Hicksiana cumple ley de demanda compensada

La demanda por el bien k se mueve en dirección contraria a p_k, si el cambio de p_k va acompañado de la compensación de renta de Hicks.

Proposición: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencias $\succsim$ LNS y que $h(p, u)$ consiste de un solo elemento para todo $p \gg 0$. Entonces, la función de demanda Hicksiana $h(p, u)$ satisface **la ley de demanda compensada**:

$$(p'' - p') \cdot [h(p'', u) - h(p', u)] \leq 0 \qquad \text{para todo } p', p''$$

Otra relación entre $e(p,u)$ y $h(p,u)$:

Lema de Shephard: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencias $\succsim$ l.n.s. y estrictamente convexa definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Suponga que $e(p,u)$ es diferenciable con respecto a p.

Para todo p y u, la demanda Hicksiana $h(p,u)$ es el vector de derivadas de la función de gasto con respecto a los precios:

$$h(p,u) = \nabla_p e(p,u).$$

Esto es, $h_\ell(p,u) = \partial e(p,u)/\partial p_\ell$.

Dada la función de gasto, la demanda Hicksiana se calcula simplemente como la primera derivada con respecto a los precios.

Principales prop. de $\nabla_p h(p,u)$ que se derivan de las prop. de $e(p,u)$

Proposición: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencias $\succsim$ l.n.s. y estrictamente convexa definida en $X = \mathbb{R}^L_+$.

Suponga además que $h(\cdot, u)$ es continuamente diferenciable en (p, u), y denote su matriz de derivadas $L \times L$ con $D_p h(p, u)$.

Entonces

(i) $D_p h(p, u) = D^2_p e(p, u)$

(ii) $D_p h(p, u)$ es una matriz semidefinida negativa

(iii) $D_p h(p, u)$ es una matriz simétrica

(iv) $D_p h(p, u) p = 0$

1) Ley de la demanda diferencial.

$D_p h(p,u)$ es semi-definida negativa $\Rightarrow$ términos de la diagonal son ≤ 0

$$\Rightarrow \frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_\ell} \leq 0$$

Corolarios

Decimos que el bien ℓ es

- sustituto neto del bien k en (p, u) si $\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} \geq 0$.
- complementario neto del bien k en (p, u) si $\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} \leq 0$.

2) Afirmación: $\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_\ell} \leq 0$ y (iv) de la proposición anterior implican que

cada bien debe tener al menos un sustituto neto.

3) Si el bien ℓ es sustituto neto del bien k, ¿qué pasa con el consumo del bien k cuando cambia el precio p_ℓ?

Relación entre las demandas Hicksiana y Marshalliana

Aunque la $h(p,u)$ no es directamente observable (tiene la utilidad u como argumento), la matriz $D_p h(p,u)$ puede calcularse de la demanda Marshalliana $x(p,\omega)$.

Proposición: (Ecuación de Slutsky) Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencias $\succsim$ l.n.s. y estrictamente convexa definida en $X = \mathbb{R}^L_+$.

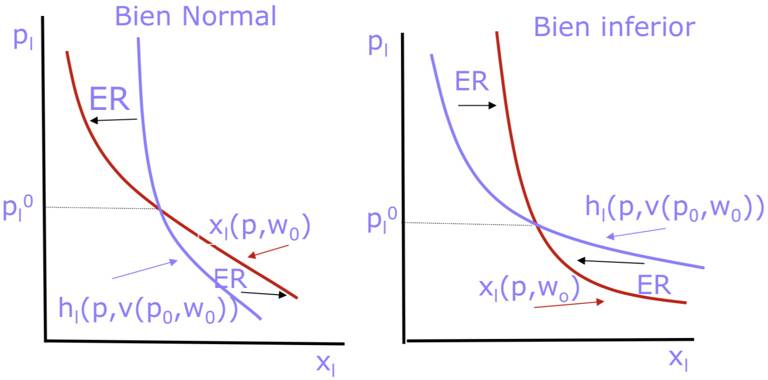
Entonces para cada (p,ω) y $\omega = e(p,u)$, tenemos

$$\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_\ell(p,\omega)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(p,\omega)}{\partial \omega} x_k(p,\omega) \quad \forall \ell, k$$

En particular,

$$\underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,\omega)}{\partial p_\ell}}_{\text{efecto total}} = \underbrace{\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_\ell}}_{\text{efecto sustitución}} - \underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,\omega)}{\partial \omega} x_\ell(p,\omega)}_{\text{efecto renta}}$$

Relación entre las demandas Hicksiana y Marshalliana



La matriz de Slutsky

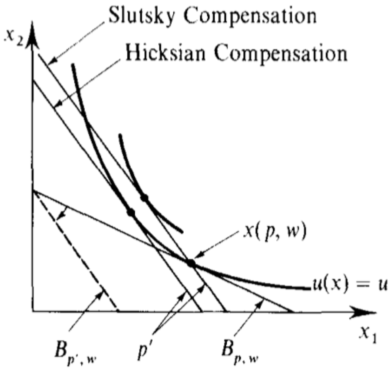
La matriz de derivadas $D_p h(p,u)$ es igual a la matriz $S(p,\omega)$ de dimensión $L \times L$ donde

$$S_{\ell k} = \frac{\partial x_\ell(p,\omega)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(p,\omega)}{\partial \omega} x_k(p,\omega)$$

Esta es la matriz de efectos sustitución de Slutsky

¿Esta matriz ya la habían visto antes? Es la matriz de las derivadas de demanda compensada con una compensación de renta de Slutsky
(La compensación de Slutsky permite mantener el consumo original).

Relación entre las compensaciones de Slutsky y Hicks



[Obs.] $\Delta\omega_{Hicks} \leq \Delta\omega_{Slutsky}$

Sin embargo, para variaciones de precio, dp, infinitesimales: $\Delta\omega_H = \Delta\omega_S$

Identidad de Roy

Podemos calcular $h(p,u)$ como la derivada de $e(p,u)$ con respecto a p
¡Pero no podemos calcular $x(p,\omega)$ como la derivada de $v(p,\omega)$!

Se necesita corregir la derivada de $v(p,\omega)$ con respecto a p, normalizándola por la utilidad marginal de la renta.

Proposición: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencias $\succsim$ LNS y estrictamente convexa definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Suponga que $v(p,w)$ es diferenciable en $(\bar{p},\bar{\omega}) \gg 0$. Entonces

$$x(\bar{p},\bar{\omega}) = -\frac{1}{\nabla_\omega v(\bar{p},\bar{\omega})}\nabla_p v(\bar{p},\bar{\omega})$$

Esto es, para cada $\ell = 1, ..., L$:

$$x_\ell(\bar{p},\bar{\omega}) = -\frac{\partial v(\bar{p},\bar{\omega})/\partial p_\ell}{\partial v(\bar{p},\bar{\omega})/\partial \omega}$$

Como evaluar cambios en el bienestar

Si los precios cambian de p^0 a p^1, y la renta del/la consumidor/a sigue igual: ¿cómo evaluamos el cambio en el bienestar?

¿Podríamos considerar el cambio en la utilidad del consumidor: $v(p^0, \omega) - v(p^1, \omega)$?

Esta medida no es satisfactoria porque depende que *cual función de utilidad* elegimos para representar las preferencias.

Para cuantificar ocupamos la *función de gasto* $e(\bar{p}, u)$: comparamos la renta necesaria para alcanzar un cierto nivel de utilidad antes y después del cambio de precio.

Hay 2 niveles de utilidad interesantes: el que podía alcanzar la consumidora antes del cambio de precio y el que puede alcanzar después del cambio de precio.

Como evaluar cambios en el bienestar

Variación compensatoria

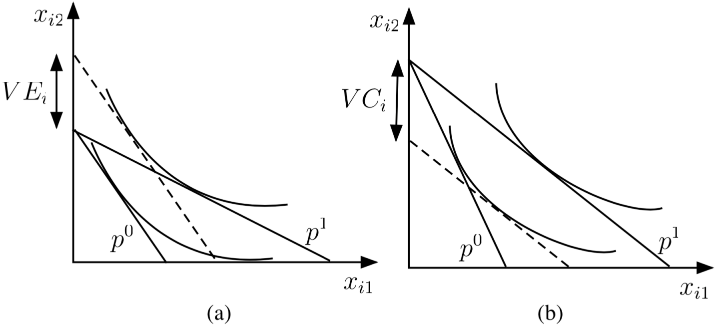
$$VC(p^0, p^1, \omega) = \omega - e(p^1, v(p^0, \omega))$$

VC es la cantidad que restada de la renta inicial, le permite a la persona mantener su utilidad inicial al precio final. La magnitud de la VC nos dice cuánto tendremos que cobrar/pagar a la consumidora para que permanezca en la misma curva de indiferencia.

Variación equivalente

$$VE(p^0, p^1, \omega) = e(p^0, v(p^1, \omega)) - \omega$$

La VE nos dice cuánto más dinero necesita la consumidora para alcanzar su nivel de utilidad final al precio inicial. VE es el monto en dinero que la consumidora estaría dispuesta a aceptar/pagar en lugar del cambio de precios.



VE y VC cuando cambia el precio del bien 1 y $p_2^0 = p_2^1 = 1$

Observación:

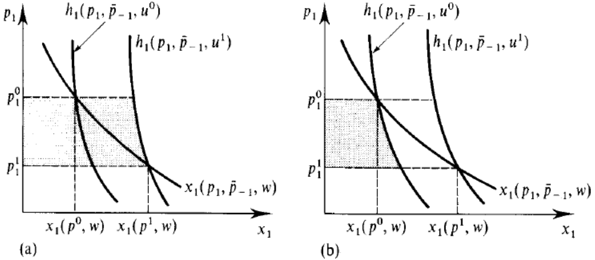
$VC \geq 0 \iff VE \geq 0 \iff$ la utilidad aumenta cuando $p^0 \to p^1$

Como evaluar cambios en el bienestar

Suponemos que solo cambia el precio del bien 1. Usando que $h_1(p,\omega) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_1}$ podemos expresar:

$$VE(p^0, p^1, \omega) = e(p^0, v(p^1, \omega)) - e(p^1, v(p^1, \omega)) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h(p_1, p_{-1}, v(p^1, \omega))dp_1$$

$$VC(p^0, p^1, \omega) = e(p^0, v(p^0, \omega)) - e(p^1, v(p^0, \omega)) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h(p_1, p_{-1}, v(p^0, \omega))dp_1$$



Como evaluar cambios en el bienestar

Si no tenemos información sobre la demanda compensada que sea suficiente para calcular las integrales, podemos aproximar VE y VC por medio del excedente del consumidor.

$$EC = \int_{p_0}^{\infty} x(p,\omega)dp \Rightarrow \Delta EC = EC|_{p^1} - EC|_{p^0} = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x(p_1, p_{-1}, \omega)dp_1$$

Obs: Si no hay efectos renta $\left(\frac{\partial x}{\partial \omega} = 0\right) \Rightarrow VE = VC = \Delta EC$

Si el bien es normal $\left(\frac{\partial x}{\partial \omega} > 0\right) \Rightarrow VC \leq \Delta EC \leq VE$

Si la variación de precios es pequeña $\Rightarrow VE \simeq VC \simeq \Delta EC$