# El modelo de Solow-Swan

# La estructura básica de los modelos que vamos a estudiar

- Los hogares son los dueños de los insumos y activos en la economía (incluyendo los derechos de propiedad de las firmas).

- Los hogares eligen las fracciones de su ingreso que consumen y ahorran.

- Cada hogar determina el número de miembros del hogar, si se suman o no a la fuerza de trabajo y cuánto trabajar.

# La estructura básica de los modelos que vamos a estudiar

- Las firmas contratan insumos (capital y trabajo), los que utilizan para producir bienes que son vendidos a los hogares u otras empresas.

- Las firmas tienen acceso a una tecnología, la cual puede ir mejorando en el tiempo, que les permite transformar insumos en producto.

# La estructura básica de los modelos que vamos a estudiar

- Existen mercados en los cuales las firmas venden bienes a hogares u otras firmas y en los cuales los hogares venden sus insumos a las firmas.

- Las cantidades demandadas y ofrecidas determinan los precios relativos de insumos y bienes producidos.

# El modelo de Solow-Swan

- Economía cerrada con un solo bien final.
- Vamos a trabajar en tiempo continuo.
- Economía es habitada por un número grande de hogares, que no optimizarán por el momento.
- Lo anterior es la principal diferencia entre el modelo de Solow y Swan con el modelo neoclásico de crecimiento que estudiaremos más adelante (modelo de Ramsey).
- Todos los hogares son idénticos por lo que tendremos un hogar representativo.
- Los hogares ahorran una fracción $(s)$ constante de su ingreso disponible.

# El modelo de Solow-Swan

- Asumiremos que todas las firmas tienen acceso a la misma función de producción (hogar productor/Robinson Crusoe).
- Es decir, la economía tiene una firma representativa con una función de producción común.
- Insumos: capital físico $K(t)$, trabajo $L(t)$ y conocimiento $T(t)$.
- La función de producción toma la siguiente forma:

$$Y(t) = F[K(t), L(t), T(t)] \tag{1.1}$$

- Donde $Y(t)$ es el flujo de producto en el período t.

# El modelo de Solow-Swan

- $K(t)$ representa a los insumos de capital físico durable tales maquinarias, edificios, computadores etc. Estos bienes fueron producidos en el pasado a través de una función de producción similar a la de (1.1). Estos insumos no pueden ser utilizados al mismo tiempo por múltiples productores, lo que se conoce como bienes rivales.

- $L(t)$ representa el insumo asociado al número de trabajadores y a la cantidad de tiempo que ellos trabajan. Como veremos en modelos más adelante en este curso, este insumo también representa las habilidades de los trabajadores. Este es también un insumo "rival".

# El modelo de Solow-Swan

- $T(t)$ representa la fórmula o los planos que muestran como combinar el capital y el trabajo. Esto es lo que conocemos como conocimiento o tecnología. La tecnología puede aumentar en el tiempo y puede diferir entre países.

- La característica distintiva de la tecnología es que es un bien no rival: dos o más productores pueden usar la fórmula al mismo tiempo.

# El modelo de Solow-Swan

- El bien homogéneo que se produce en esta economía puede ser utilizado para consumo $C(t)$ o para inversión $I(t)$ (para crear nuevas unidades de capital físico).

- Como la economía es cerrada, los hogares no pueden comprar bienes o activos externos ni vender bienes ni activos al exterior.

- Por ahora asumiremos que no hay compras de bienes ni servicios por parte del Gobierno.

# El modelo de Solow-Swan

- En este contexto:

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

- Por lo que el ahorro debe ser igual a la inversión:

$$S(t) \equiv Y(t) - C(t) = I(t)$$

- Denominemos $s(\cdot)$ a la fracción del ingreso que es ahorrada. Asumiremos inicialmente que $s(\cdot)$ es exógena. En particular asumiremos que es igual a $0 \leq s \leq 1$

# El modelo de Solow-Swan

- Asumiremos que el capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$ en cada momento del tiempo.

- El incremento neto del stock de capital será:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = s \cdot F[K(t), L(t), T(t)] - \delta K(t) \qquad (1.2)$$

- Donde $\dot{K}(t)$ refleja diferenciación de la variable respecto del tiempo:

$$\dot{K}(t) \equiv \frac{\partial K(t)}{\partial t}$$

# El modelo de Solow-Swan

- Vamos a asumir también que la población crece a una tasa exógena igual a *n* sin utilizar ningún recurso:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \geq 0$$

- Normalizaremos la población en t=0 es igual a 1, con lo que:

$$L(t) = e^{nt}$$

- Partiremos asumiendo que el nivel de tecnología es constante.

# La función de producción neoclásica

- La función de producción que vamos a considerar tiene la siguiente forma:

$$Y(t) = F(K(t), L(t), T)$$

- Diremos que esta función de producción es neoclásica si cumple con los siguientes tres supuestos:

Supuesto 1: Retornos constantes a escala.

Supuesto 2: Productividad marginal positiva y decreciente de cada insumo.

Supuesto 3: Condiciones de Inada.

(algunos incluyen un cuarto supuesto, que los insumos sean esenciales)

# Supuesto 1: retornos constantes a escala

- La función $F(\cdot)$ exhibe retornos constantes a escala:

$$F(\lambda K, \lambda L, T) = \lambda \cdot F(K, L, T)$$ Para todo $\lambda>0$ (1.4)

- Esta condición de retornos constantes a escala implica que el producto puede ser escrito como:

$$Y = F(K, L, T) = L \cdot F(K/L, 1, T) = L \cdot f(k)$$

- Donde $k \equiv {}^{K}/_{L}$ es el cociente capital-trabajo, $y \equiv {}^{Y}/_{L}$ es el producto per cápita y la función $f(k)$ es igual a $F(k, 1, T)$.

# Supuesto 2: productividad marginal positiva y decreciente de cada insumo

- Para todo *K>0* y *L>0*, $F(\cdot)$ exhibe productividad marginal positiva y decreciente con respecto a cada insumo:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \tag{1.5}$$

# Supuesto 3: condiciones de Inada

- El producto marginal del capital (o del trabajo) tiende a infinito cuando el capital (o el trabajo) tiende a 0 y tiende a 0 cuando el capital (o el trabajo) tiende a infinito:

$$\lim_{K\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = \infty$$

$$\lim_{K\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = 0 \qquad (1.6)$$

- Estas propiedades se conocen como las condiciones de Inada (Inada (1963))

# Retornos constantes a escala

- Recordando que:

$$Y = F(K, L, T) = L \cdot F(K/L, 1, T) = L \cdot f(k) \qquad (1.7)$$

- La función de producción se puede escribir de forma intensiva:

$$y = f(k) \qquad (1.8)$$

# Retornos constantes a escala

- Diferenciando $Y = L \cdot f(k)$ con respecto a K, para un L fijo, y con respecto a L, para un K fijo obtenemos:

$$\partial Y / \partial K = f'(k) \tag{1.9}$$

$$\partial Y / \partial L = f(k) - k \cdot f'(k) \tag{1.10}$$

- Las condiciones de Inada implican que:

$$\lim_{k \to 0}[f'(k)] = \infty \qquad \lim_{k \to \infty}[f'(k)] = 0$$

# La ecuación (fundamental) para la dinámica del stock de capital

- El cambio en el stock de capital viene dado por:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = s \cdot F[K(t), L(t), T(t)] - \delta K(t)$$

- Si dividimos por *L*, obtenemos:

$$\dot{K}/L = s \cdot f(k) - \delta k$$

- Lo que después de algo de desarrollo nos permite obtener:

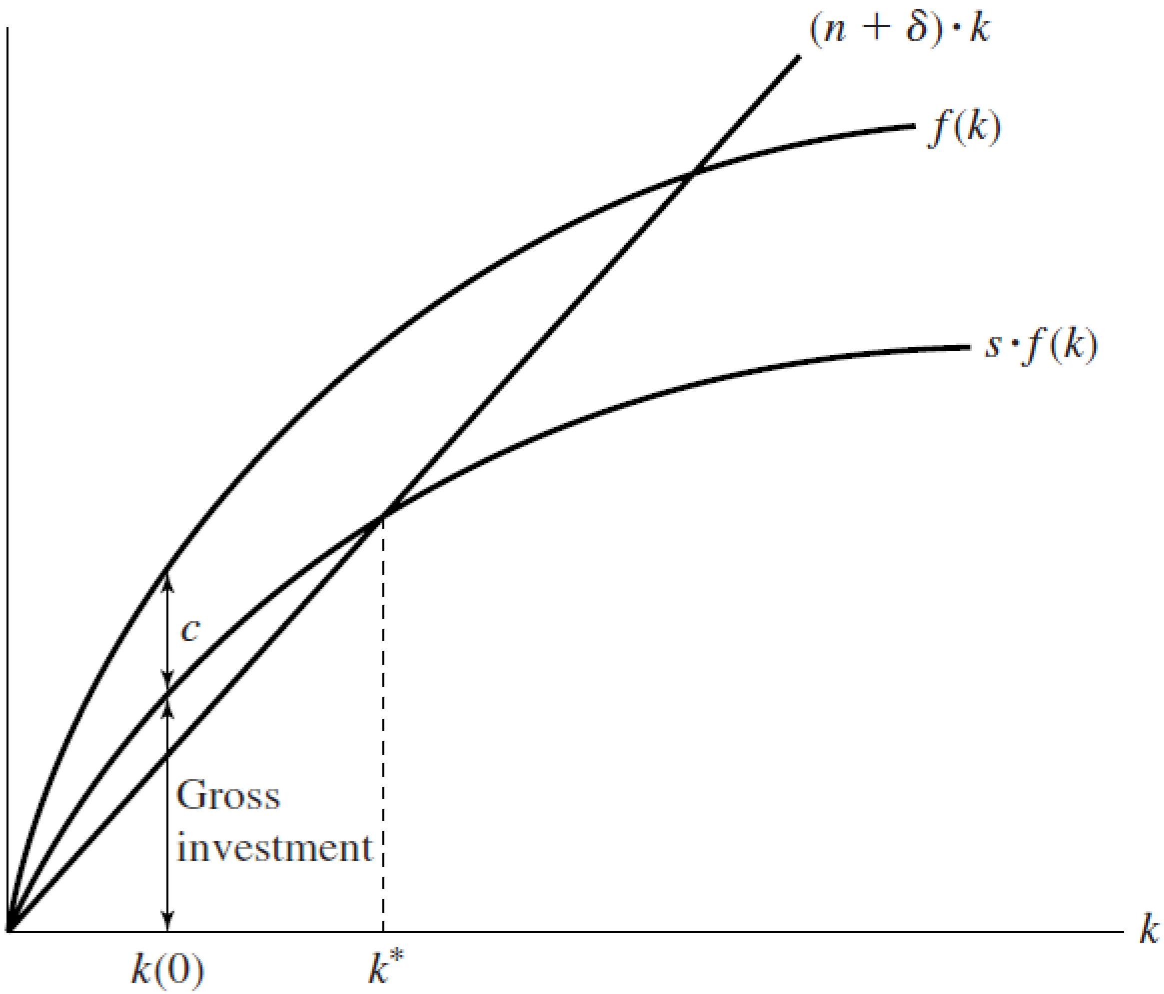
$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k \qquad (1.13)$$

# La ecuación (fundamental) para la dinámica del stock de capital

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k$$

- El término $(n + \delta)$ puede ser interpretado como la tasa efectiva de depreciación de $k$.

# El modelo de Solow-Swan



# Los mercados

- En nuestra discusión hemos asumido que los hogares son dueños de la tecnología y se quedan con el producto que se genera (hogar productor Robinson Crusoe).

- Asumamos ahora que los hogares son dueños de activos financieros y de la oferta de trabajo.

- Los activos pagan una tasa de interés $r(t)$ y el trabajo recibe un salario $w(t)$.

# Los mercados

- En este contexto la acumulación de activos por parte de los hogares viene dada por:

$$d(\text{assets})/dt = [r \cdot (\text{assets}) + w \cdot L] - C \tag{1.14}$$

- Expresando los activos por persona obtenemos:

$$\dot{a} = (r \cdot a + w) - c - na \tag{1.15}$$

# Problema de la firma

- Las firmas contratan ("arriendan") trabajo y capital para producir producto el cual venden a un precio unitario.
- *R* es el precio de arriendo del capital y δ es la tasa de depreciación. La tasa de retorno neto a un hogar que es dueño del capital es en consecuencia $R - \delta$.
- Los hogares también reciben una tasa de interés *r* por los fondos prestados a otros hogares. Sin incertidumbre, tenencias de capital y préstamos son sustitutos perfectos como depósito de valor. Lo que implica que $r = R - \delta$.

# Problema de la firma

- La utilidad de la empresa en cada momento del tiempo es:

$$\pi = F(K, L, T) - (r + \delta) \cdot K - wL \qquad (1.16)$$

- Recuerde que uno de nuestros supuestos es que la tecnología está disponible libremente.
- Como no hay costos de ajuste del capital y la empresa arrienda el capital y el trabajo, no hay elementos inter-temporales en el problema de maximización de la empresa.

# Problema de la firma

- Considerando una firma de escala L, la función de utilidad de ésta puede ser escrita como:

$$\pi = L \cdot [f(k) - (r + \delta) \cdot k - w] \tag{1.17}$$

- La condición de primer orden para la maximización de utilidades es:

$$f'(k) = r + \delta \tag{1.18}$$

# Problema de la firma

- La condición de cero utilidad implica que el salario debe ser igual a:

$$[f(k) - k \cdot f'(k)] = w \qquad (1.19)$$

- Dado que los precios de los factores son iguales a sus respectivas productividades marginales, el pago a los factores es igual al producto (Euler´s theorem).

# Euler´s theorem

- Si $F(k, L)$ es homogénea de grado uno en K y L, entonces:

$$F(K, L) = F_K \cdot K + F_L \cdot L$$

- El modelo no determina la escala de una firma individual y competitiva que opera con retornos constantes a escala. Si determina $k$, así como también el nivel agregado de producción.

# Equilibrio en la economía

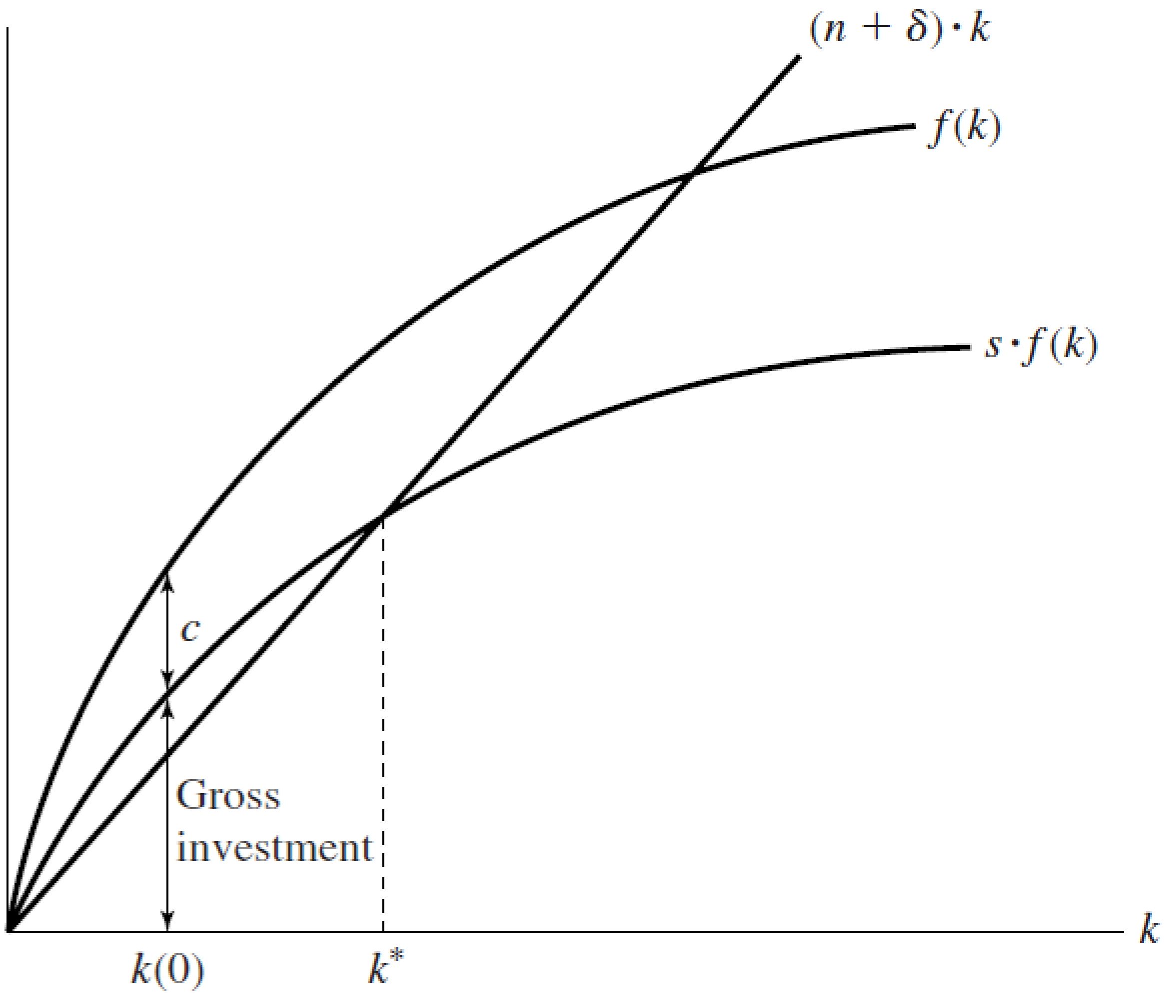
- Dado que estamos trabajando con una economía cerrada, el único activo en oferta neta es el capital, porque los préstamos y endeudamiento se deben cancelar en la economía. En equilibrio $a = k$. Utilizando esta última relación y (1.18) y (1.19) en (1.15) obtenemos:

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta) \cdot k$$

- Lo que junto con el supuesto de que los hogares consumen una fracción constante de su ingreso implica:

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k$$

# El modelo de Solow-Swan



# El estado estacionario

- El estado estacionario es la situación en el cual las cantidades crecen a una tasa constante.

- En el modelo de Solow-Swan el estado estacionario corresponde a $\dot{k} = 0$. (Ejercicio: demostrar esto)

- Lo anterior ocurre cuando la curva $s \cdot f(k)$ se corta con la línea $(n + \delta) \cdot k$. En este punto el valor de equilibrio de $k$ es:

$$s \cdot f(k^*) = (n + \delta) \cdot k^* \qquad (1.20)$$

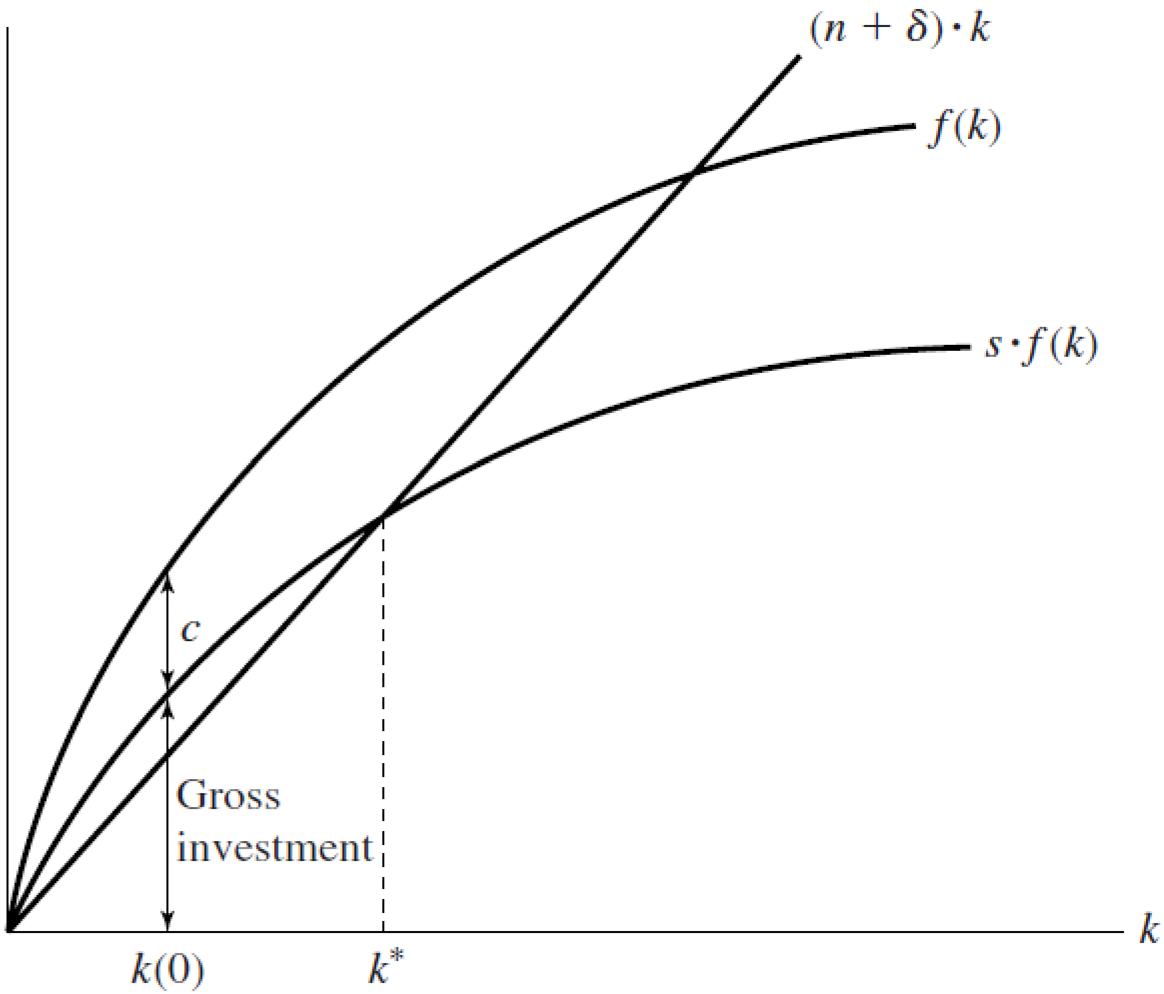
# El estado estacionario

- Dado que $k$ es constante, tanto $y$ como $c$ son constantes: $y^* = f(k^*)$ y $c^* = (1 - s) \cdot f(k^*)$.

- En consecuencia, sin crecimiento de la tecnología, las cantidades per cápita de $k$, $y$ y $c$, no crecen en estado estacionario. Y por lo tanto, $K$, $Y$ y $C$, crecen a una tasa igual al crecimiento de la población ($n$) en estado estacionario.

- Cambios en la función de producción, la tasa de ahorro, en el crecimiento de la población, y en la tasa de depreciación, tienen efecto en los niveles de la variables bajo análisis en estado estacionario.

# El modelo de Solow-Swan



# La regla de oro

- Para una función de producción dada, y dados los valores de *n* y $\delta$, hay un único valor de *k*>0* en estado estacionario para cada valor de *s:* $k^*(s)$. Con $dk^*(s)/ds > 0$.

# La regla de oro

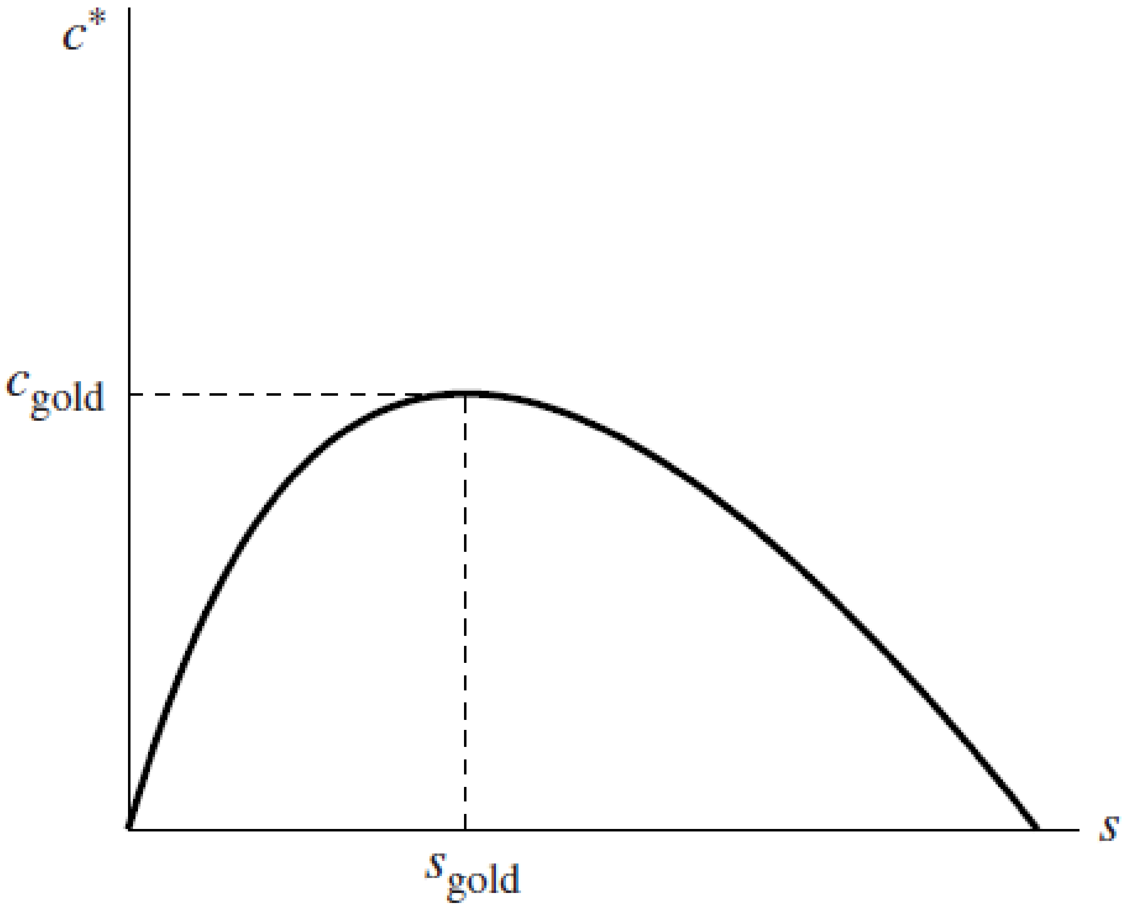
- En el caso del consumo, la estática comparativa con respecto a la tasa de ahorro no será monótona.

- La expresión para el valor de $c^*(s)$ es:

$$c^*(s) = f[k^*(s)] - (n + \delta) \cdot k^*(s) \qquad (1.21)$$

- Como veremos, existe un nivel de ahorro que maximiza c*.

# La regla de oro



# La regla de oro

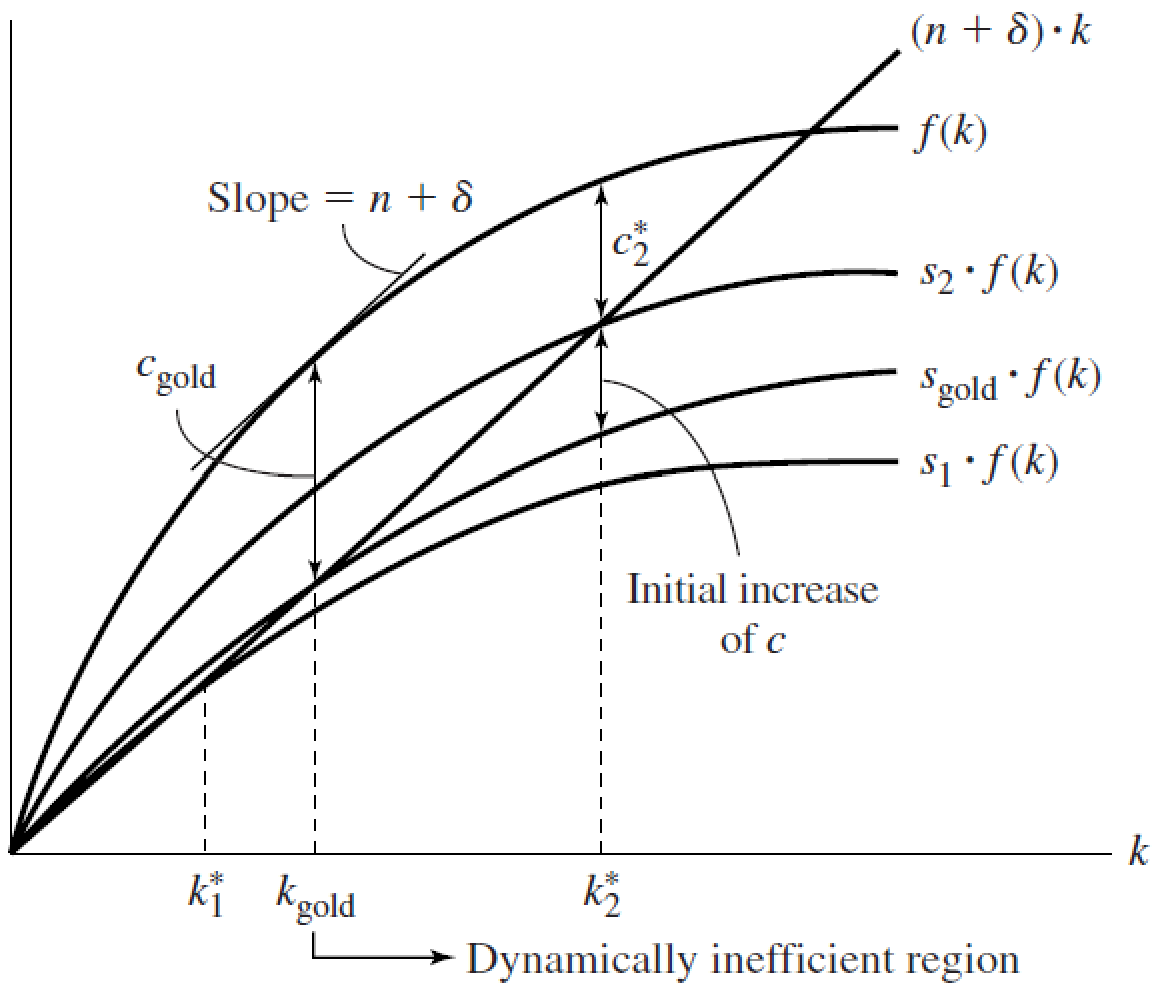
- El nivel de capital $k^*$ que maximiza el nivel de consumo $c^*$ viene dado por:

$$f'(k_{\text{gold}}) = n + \delta \tag{1.22}$$

- La anterior es la regla de oro de la acumulación de capital (Phelps (1966)).
- En consecuencia, el nivel de consumo per cápita de estado estacionario viene dado por:

$$c_{\text{gold}} = f(k_{\text{gold}}) - (n + \delta) \cdot k_{\text{gold}}$$

# La regla de oro



# La regla de oro

- Cuando la economía está por debajo de $k_{gold}$, un mayor ahorro incrementaría el consumo.
- Cuando la economía está por sobre $k_{gold}$, el consumo de estado estacionario puede ser aumentado ahorrando menos.
- En este último caso, el cociente capital/trabajo es muy alto, hay demasiada inversión y poco consumo (ineficiencia dinámica).
- Pero debemos ser cuidadosos respecto al hablar de ineficiencias porque no hay función de utilidad.
- En el modelo de Ramsey que analizaremos en la próxima sección vamos a endogenizar las tasas de ahorro.

# Dinámica de la transición

- El modelo de Solow–Swan, cuando no hay avance tecnológico y el stock de capital inicial viene dado por $K(0)$ es descrito por las siguientes relaciones:

    - La evolución de stock de capital per cápita:

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k$$

    - El nivel de estado estacionario del stock de capital per cápita k*:

$$s \cdot f(k^*) = (n + \delta) \cdot k^*$$

    - El nivel de consumo per cápita:

$$c = (1 - s)f(k) = (1 - s)y$$

# Dinámica de la transición

- Y los precios de los factores:

$$f'(k) = r + \delta$$

$$[f(k) - k \cdot f'(k)] = w$$

# Dinámica de la transición

- Una senda de equilibrio es una secuencia de stock de capital $(K)$, trabajo $(L)$, producto $(Y)$, consumo $(C)$, salarios $(w)$ y tasa de interés $(r)$ que cumple con las relaciones antes descritas y con $L(t) = e^{nt}$.

# Dinámica de la transición

- Recordemos que:

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k$$

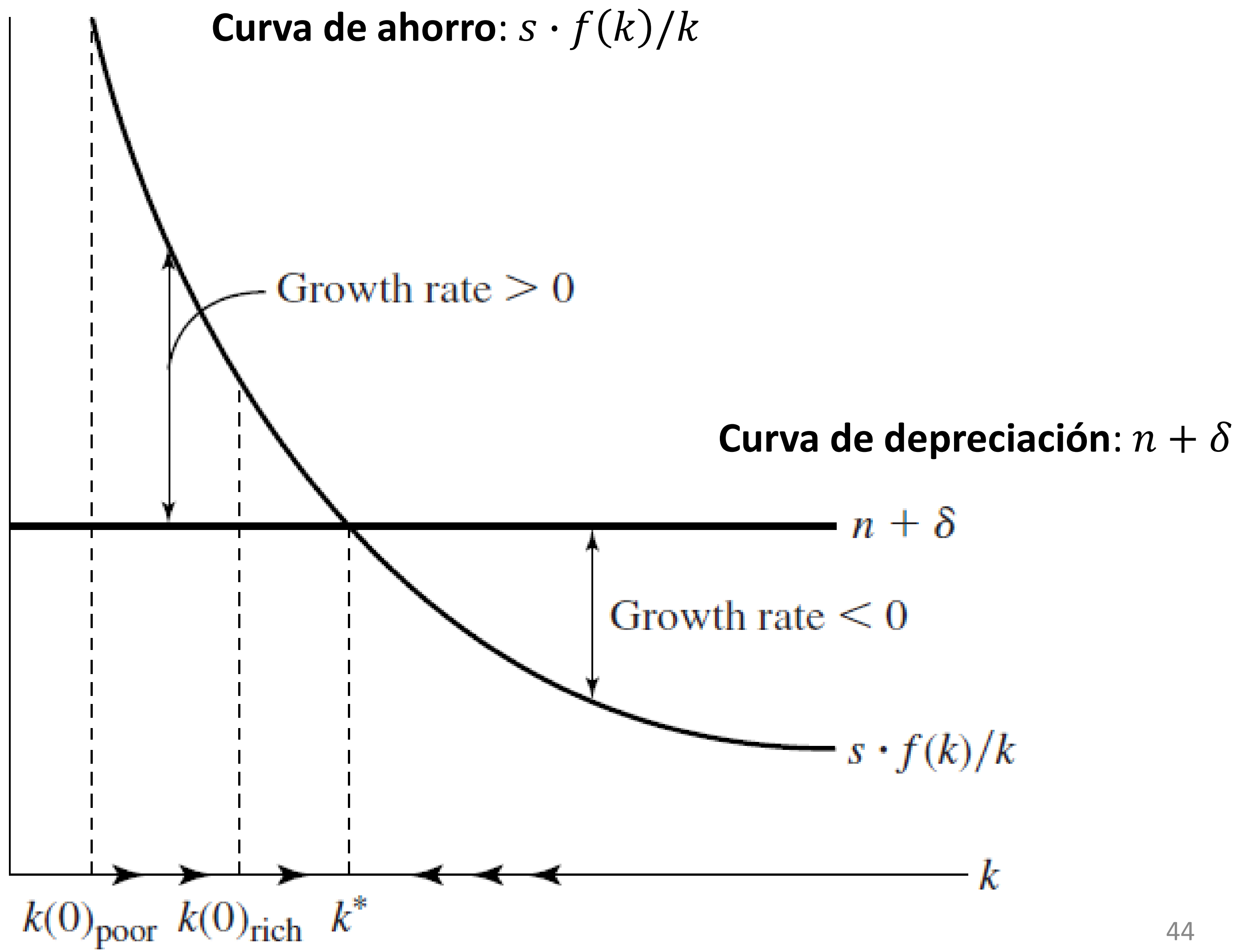
- Dividiendo ambos lados por k obtenemos:

$$\gamma_k \equiv \dot{k}/k = s \cdot f(k)/k - (n + \delta) \tag{1.23}$$

- Recuerde que:

$$\dot{K}/K = \dot{k}/k + n$$

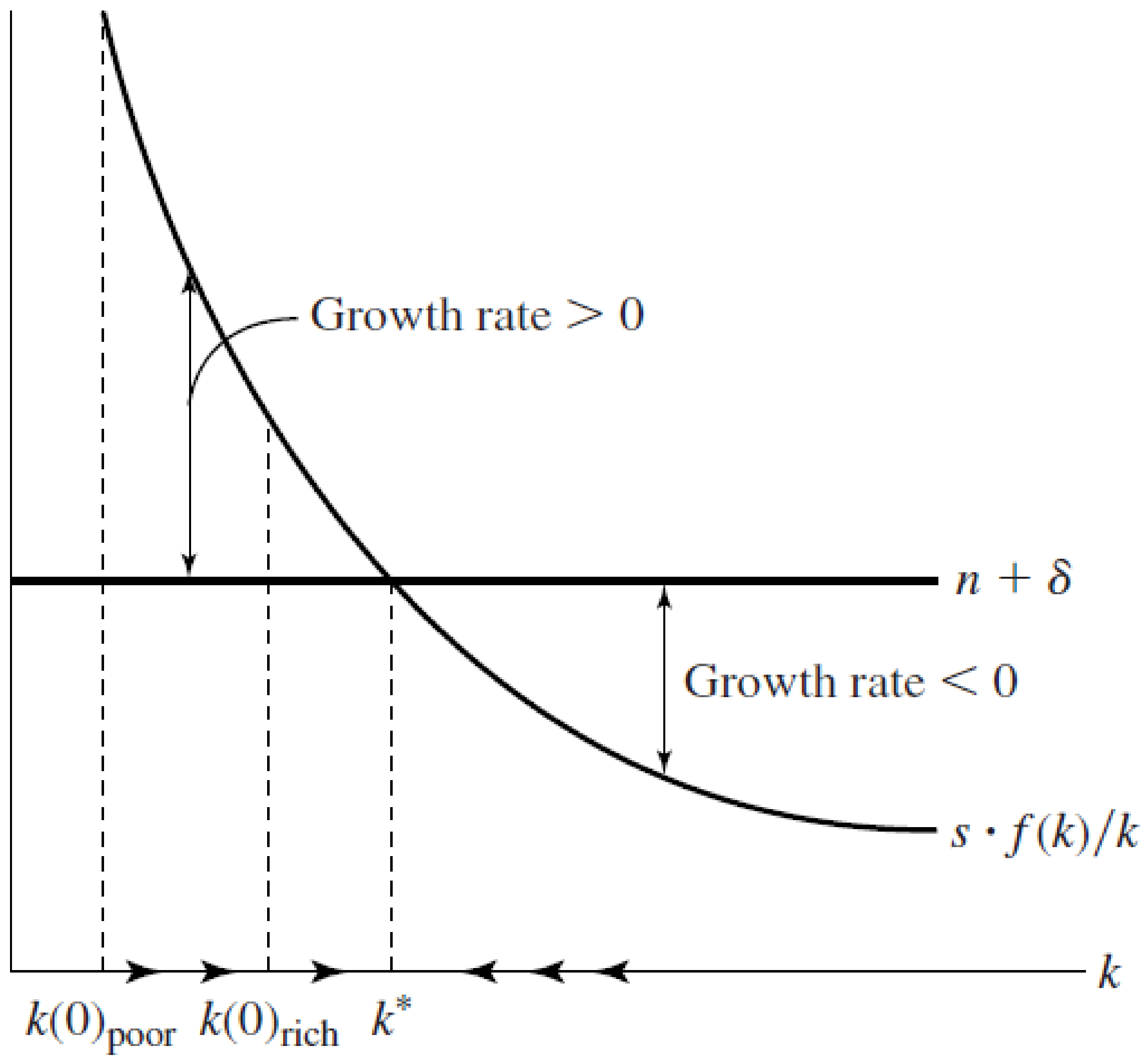
# Dinámica de la transición



# Dinámica de la transición

- La curva de ahorro tiene pendiente negativa, va a infinito cuando $k \to 0$ y va a 0 cuando $k \to \infty$.
- La curva de depreciación es una línea horizontal en $n + \delta$.
- Dado que $(n + \delta) > 0$ y que $s \cdot f(k)/k$ cae monotónicamente desde infinito a cero, la curva de ahorro y la curva de depreciación se cortan solo una vez. El equilibrio de estado estacionario para k*>0 existe y es positivo.

# Dinámica de la transición



# Dinámica de la transición

- La razón por la cual las tasas de crecimiento son decrecientes en la transición a un mayor nivel de capital es la existencia de rendimientos decrecientes del capital: cuando k es bajo, su producto medio $f(k)/k$ es relativamente alto.

- Como los hogares ahorran una fracción constante de su ingreso, cuando k es relativamente bajo, $s \cdot f(k)/k$, la inversión bruta por unidad de capital es relativamente alta. El capital por trabajador se deprecia a una tasa constante con lo que la tasa de crecimiento del capital por trabajador es relativamente alta.

- Si partimos de un nivel inicial de capital por trabajador mayor a k*, podemos mostrar que la tasa de crecimiento de k es negativa.

# Sistema globalmente estable

- Si se cumplen los supuestos 2 y 3, el modelo de Solow-Swan con crecimiento de población constante y sin avance tecnológico es globalmente asintóticamente estable, y partiendo de cualquier $k(0) > 0, k(t) \to k^*$.

# Sistema globalmente estable (de Acemoglu (2002))

**Simple Result about Stability In Continuous Time Model**

- Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable function and suppose that there exists a unique $x^*$ such that $g(x^*) = 0$. Moreover, suppose $g(x) < 0$ for all $x > x^*$ and $g(x) > 0$ for all $x < x^*$. Then the steady state of the nonlinear differential equation $\dot{x}(t) = g(x(t))$, $x^*$, is globally asymptotically stable, i.e., starting with any $x(0)$, $x(t) \to x^*$.

# Transición del producto

- La tasa de crecimiento del producto per cápita viene dado por:

$$\dot{y}/y = f'(k) \cdot \dot{k}/f(k) = [k \cdot f'(k)/f(k)] \cdot (\dot{k}/k) \qquad (1.24)$$

- Es importante notar que el término $[k \cdot f'(k)/f(k)]$ corresponde a la fracción del ingreso que se va como pago al capital.
- En el caso de una función Cobb-Douglas esa fracción es igual a $\alpha$.

# Transición del producto

- Si sustituimos (1.23) en (1.24) obtendremos:

$$\dot{y}/y = s \cdot f'(k) - (n+\delta) \cdot \mathrm{Sh}(k) \qquad (1.25)$$

- Donde $\mathrm{Sh}(k) \equiv [k \cdot f'(k)/f(k)]$.
- Diferenciando la ecuación (1.25) con respecto a k obtenemos:

$$\partial(\dot{y}/y)/\partial k = \left[\frac{f''(k) \cdot k}{f(k)}\right] \cdot (\dot{k}/k) - \frac{(n+\delta)f'(k)}{f(k)} \cdot [1 - \mathrm{Sh}(k)]$$

# Transición del producto

$$\partial(\dot{y}/y)/\partial k = \left[\frac{f''(k)\cdot k}{f(k)}\right]\cdot(\dot{k}/k) - \frac{(n+\delta)f'(k)}{f(k)}\cdot[1-\mathrm{Sh}(k)]$$

- El término $[1-\mathrm{Sh}(k)]$ es positivo por lo que el segundo término a la derecha de la ecuación es negativo.
- Si k<k*, $\dot{k}/k > 0$. En consecuencia, el primer término a la derecha de la ecuación es negativo. La tasa de crecimiento es decreciente en el aumento de k.
- Si k>k*, $\dot{k}/k < 0$ por lo que el signo de la derivada es ambiguo. No obstante, cerca de k* el término $\dot{k}/k$ debe ser pequeño por lo que domina el efecto negativo.
- ¿Qué pasa con el consumo en la transición?

# Precios de insumo en la transición

- ¿Qué pasa con la tasa de interés durante la transición hacia el estado estacionario?

$$r = f'(k) - \delta$$

- Dado que la productividad marginal del capital es decreciente bajo la función de producción neoclásica (supuesto 2) ($f''(k) < 0$), la tasa de interés cae monotónicamente hacia su valor de estado estacionario $r^* = f'(k^*) - \delta$.

# Precios de insumo en la transición

- ¿Qué pasa con el salario durante la transición hacia el estado estacionario?

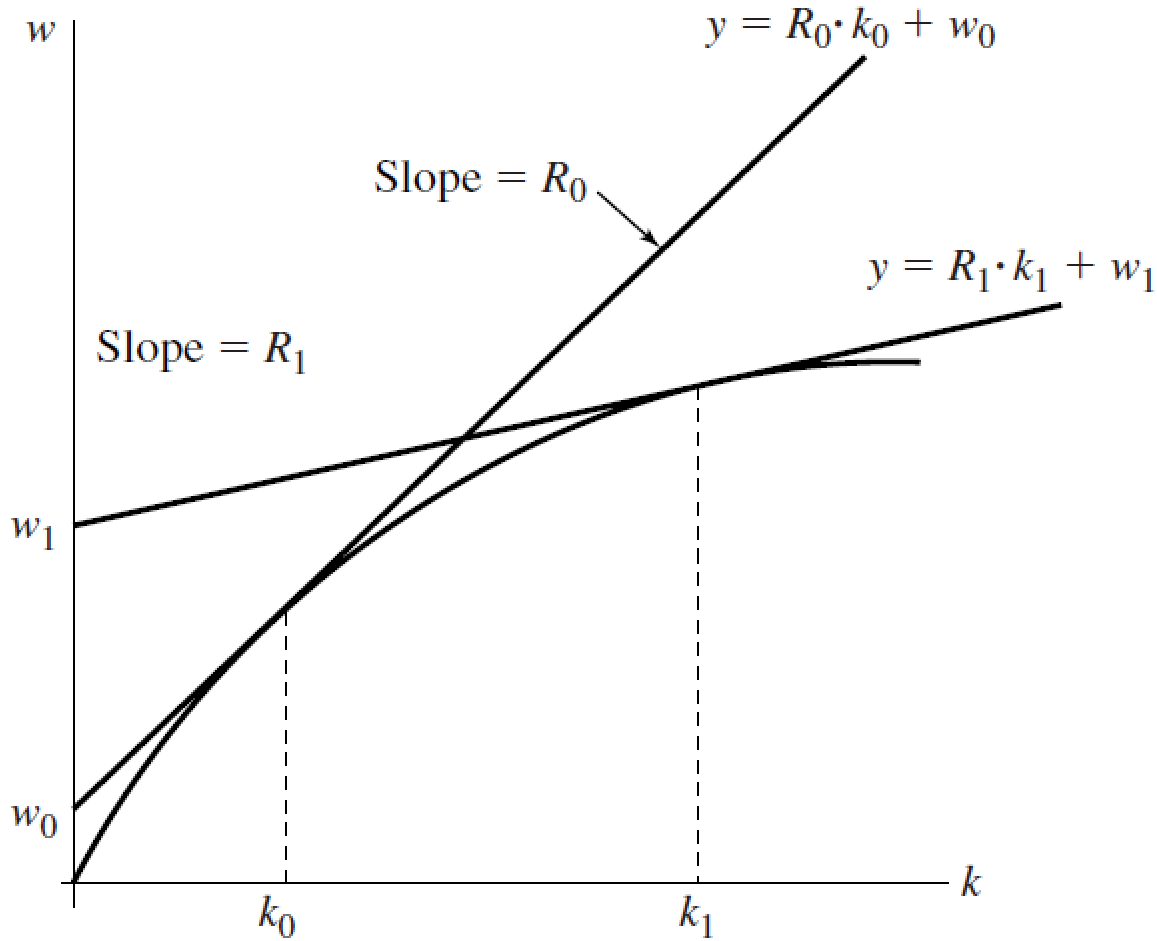
$$w = f(k) - k \cdot f'(k)$$

- Tomando la derivada de w con respecto a k obtenemos:

$$\frac{\partial w}{\partial k} = f'(k) - f'(k) - k \cdot f''(k) = -k \cdot f''(k) > 0$$

- El salario aumenta monotónicamente hacia su valor de estado estacionario conforme el nivel de capital por trabajador aumenta.

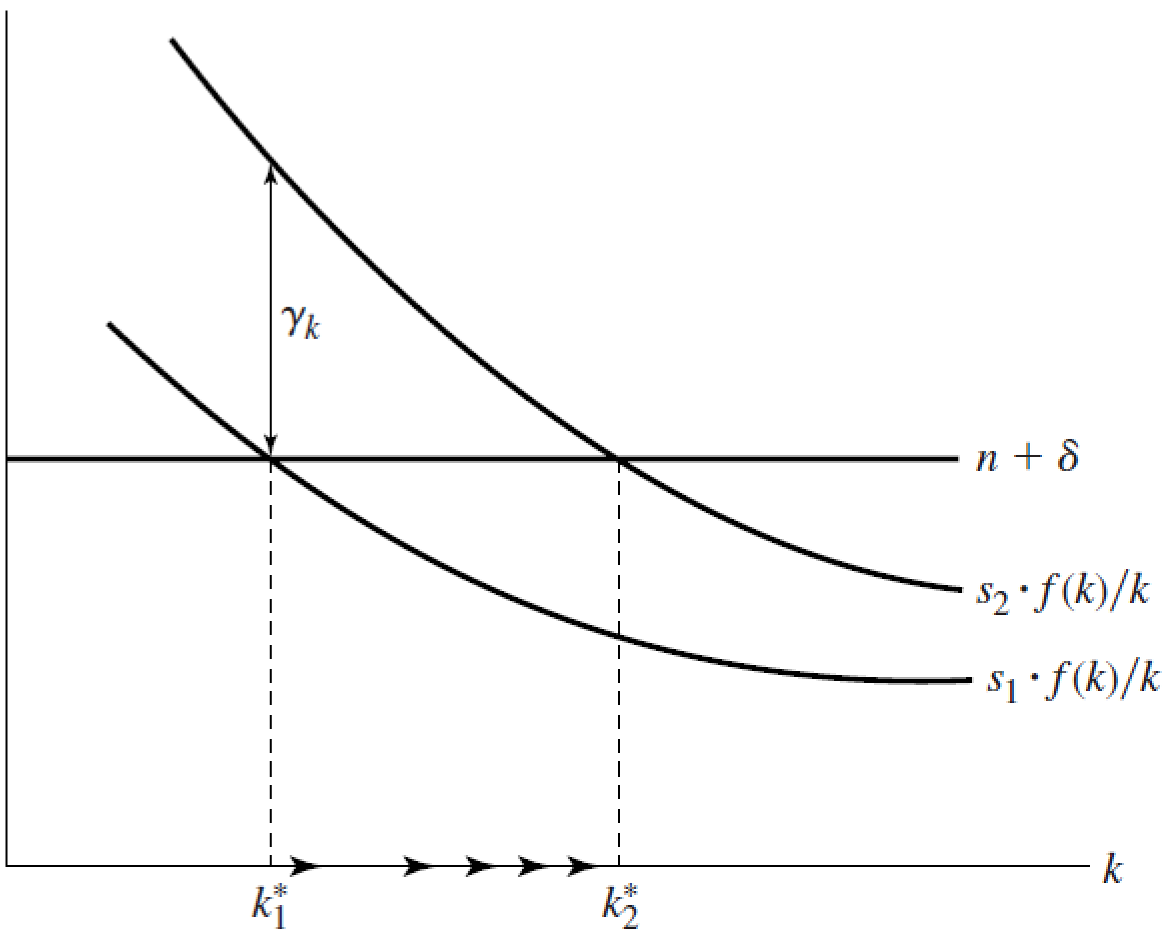
# Precios de insumo en la transición



# Experimentos de política

- Supongamos que se produce un aumento permanente en la tasa de ahorro desde $s_1$ a $s_2$ (Singapore?).
- ¿Qué pasa con la curva de ahorro?

# Experimentos de política



# Experimentos de política

- El aumento permanente en la tasa de ahorro genera un aumento permanente en el nivel de capital por trabajador.
- El aumento permanente en la tasa de ahorro genera un aumento transitorio en las tasas de crecimiento del producto per cápita.
- En el largo plazo, el nivel de producto y capital por trabajador son permanentemente más altas pero el crecimiento del ingreso per cápita vuelve a cero.
- ¿Podemos crecer por siempre aumentando las tasas de ahorro?

The Myth of Asia's Miracle
Paul Krugman
Foreign Affairs; Nov/Dec 1994; Vol.73, Iss. 6; pg. 62, 17 pgs

# The Myth of Asia's Miracle

*Paul Krugman*

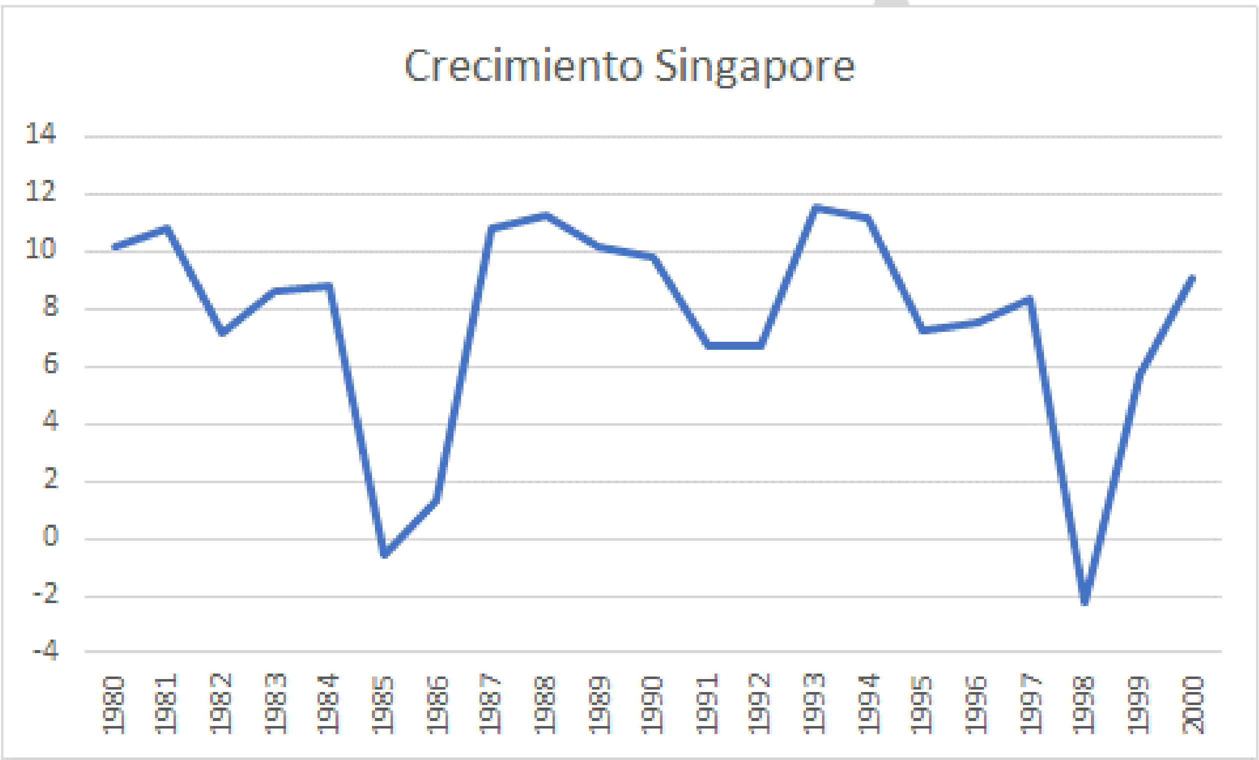
Singapore's case is admittedly the most extreme. Other rapidly growing East Asian economies have not increased their labor force participation as much, made such dramatic improvements in educational levels, or raised investment rates quite as far. Nonetheless, the basic conclusion is the same: there is startlingly little evidence of improvements in efficiency. Kim and Lau conclude of the four Asian "tigers" that "the hypothesis that there has been no technical progress during the postwar period cannot be rejected for the four East Asian newly industrialized countries." Young, more poetically, notes that once one allows for their rapid growth of inputs, the productivity performance of the "tigers" falls "from the heights of Olympus to the plains of Thessaly."

**Anexo 6a** Tasas históricas de Contribución al Fondo Central de Previsión

| | 1955 | 1968 | 1970 | 1973 | 1975 | 1980 | 1985 | 1986 | 1988[a] | 1990 | 1995 | 1999 | 2000 | 2001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Patrón (%) | 5,0 | 6,5 | 8,0 | 15,0 | 15,0 | 20,5 | 25,0 | 10,0 | 12,0 | 16,5 | 20,0 | 10,0 | 12,0 | 16,0 |
| Empleado (%) | 5,0 | 6,5 | 8,0 | 11,0 | 15,0 | 18,0 | 25,0 | 25,0 | 24,0 | 23,0 | 20,0 | 20,0 | 20,0 | 20,0 |
| Total (%) | 10,0 | 13,0 | 16,0 | 26,0 | 30,0 | 38,5 | 50,0 | 35,0 | 36,0 | 39,5 | 40,0 | 30,0 | 32,0 | 36,0 |

Fuente: 2001 CPF Annual Report.

[a] Después de 1998, las tasas variaron de acuerdo con la edad del trabajador. Las tasas para los menores de 55 se muestran enseguida.



# Experimentos de política

- En el contexto del modelo podemos analizar cambios en n o la tasa de depreciación.
- También podemos analizar un aumento en el nivel de tecnología por una sola vez. ¿Cuál es la diferencia con el aumento en la tasa de ahorro?

# Función de producción Cobb-Douglas

- Considere la siguiente función de producción:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

- La cual puede ser expresada en su forma intensiva:

$$y = Ak^{\alpha}$$

# Función de producción Cobb-Douglas

- Es directo mostrar que la función de producción Cobb-Douglas satisface las condiciones de la función de producción neoclásica.

$$f'(k) = A\alpha k^{\alpha-1} > 0$$

$$f''(k) = -A\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2} < 0$$

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$$

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$$

# Función de producción Cobb-Douglas

- La propiedad clave de la función de producción Cobb-Douglas es que la participación del pago al trabajo y la participación del pago al capital en el ingreso total son constantes.
- En particular,

$$\frac{Rk}{f(k)} = \alpha$$

$$\frac{w}{f(k)} = 1 - \alpha$$

# Modelo Solow-Swan con función de producción Cobb-Douglas

- Recordemos que el equilibrio viene dado por $s \cdot f(k^*) = (n + \delta)k^*$.
- En consecuencia,

$$k^* = [sA/(n+\delta)]^{1/(1-\alpha)} \tag{1.27}$$

- Con:

$$y^* = A^{1/(1-\alpha)} \cdot [s/(n+\delta)]^{\alpha/(1-\alpha)}$$

# Modelo Solow-Swan con función de producción Cobb-Douglas

- En la transición hacia el estado estacionario tenemos que:

$$\dot{k}/k = sAk^{-(1-\alpha)} - (n + \delta) \tag{1.28}$$

- Si k(0)<k*, entonces, $\dot{k}/k > 0.$
- Recuerde que $\frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k}$

# Modelo Solow-Swan con función de producción Cobb-Douglas

- En el caso de una función Cobb-Douglas y ahorro constante, podemos obtener la trayectoria para k de forma analítica:

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k$$

$$\dot{k} = s \cdot Ak^{\alpha} - (n + \delta) \cdot k$$

$$\dot{k} \cdot k^{-\alpha} = s \cdot A - (n + \delta) \cdot k^{1-\alpha}$$

- Si se define $v \equiv k^{1-\alpha}$ tenemos que:

# Modelo Solow-Swan con función de producción Cobb-Douglas

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\cdot\dot{v}+(n+\delta)\cdot v=sA$$

- Solucionando esta ecuación diferencial obtenemos:

$$v\equiv k^{1-\alpha}=\frac{sA}{(n+\delta)}+\left\{[k(0)]^{1-\alpha}-\frac{sA}{(n+\delta)}\right\}\cdot e^{-(1-\alpha)\cdot(n+\delta)\cdot t}$$

- La brecha entre $k^{1-\alpha}$ y su valor de estado estacionario $sA/(n+\delta)$ se cierra a una tasa constante $(1-\alpha)\cdot(n+\delta)$.

# Convergencia condicional y absoluta

- El modelo que hemos analizado implica que valores más pequeños de k están asociados con mayores valores para $\dot{k}/k$.

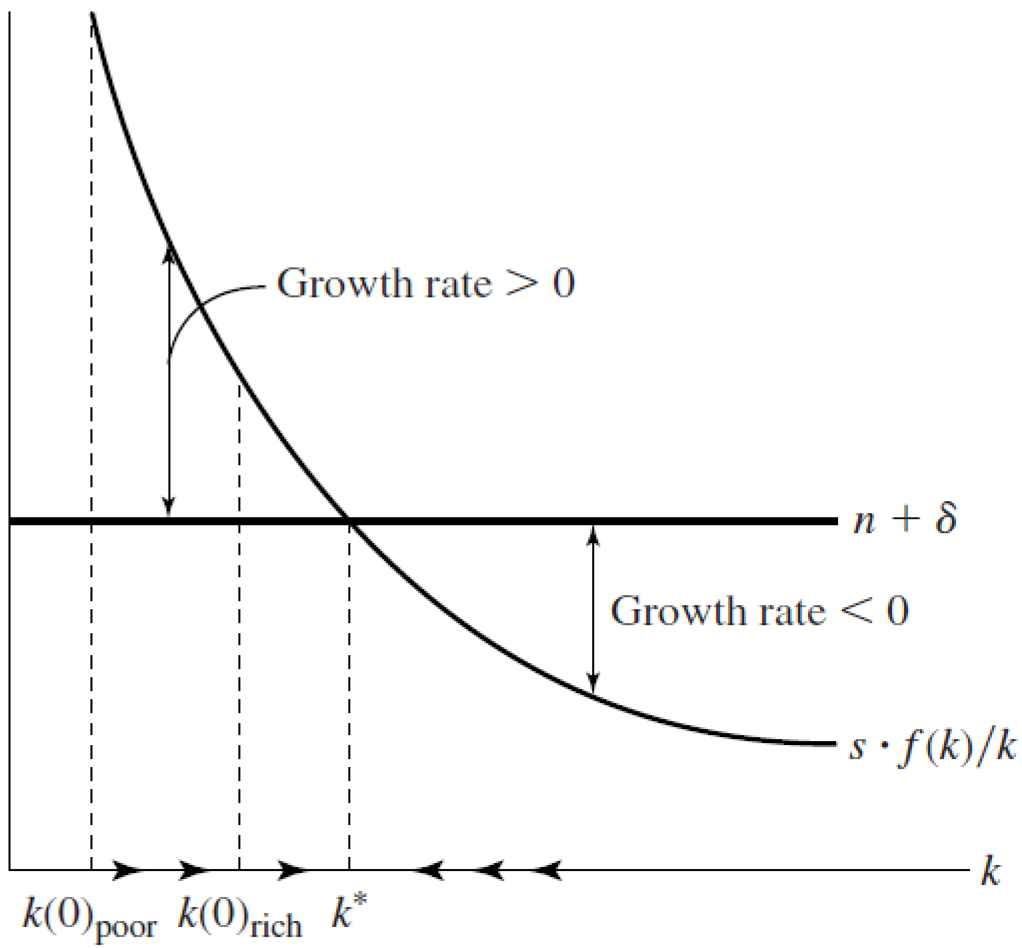
$$\partial(\dot{k}/k)/\partial k = s \cdot [f'(k) - f(k)/k]/k < 0$$

- ¿Significa lo anterior que economías con menores niveles de capital por persona tienden a crecer más rápido en términos per cápita? (¿Convergen las economías?)

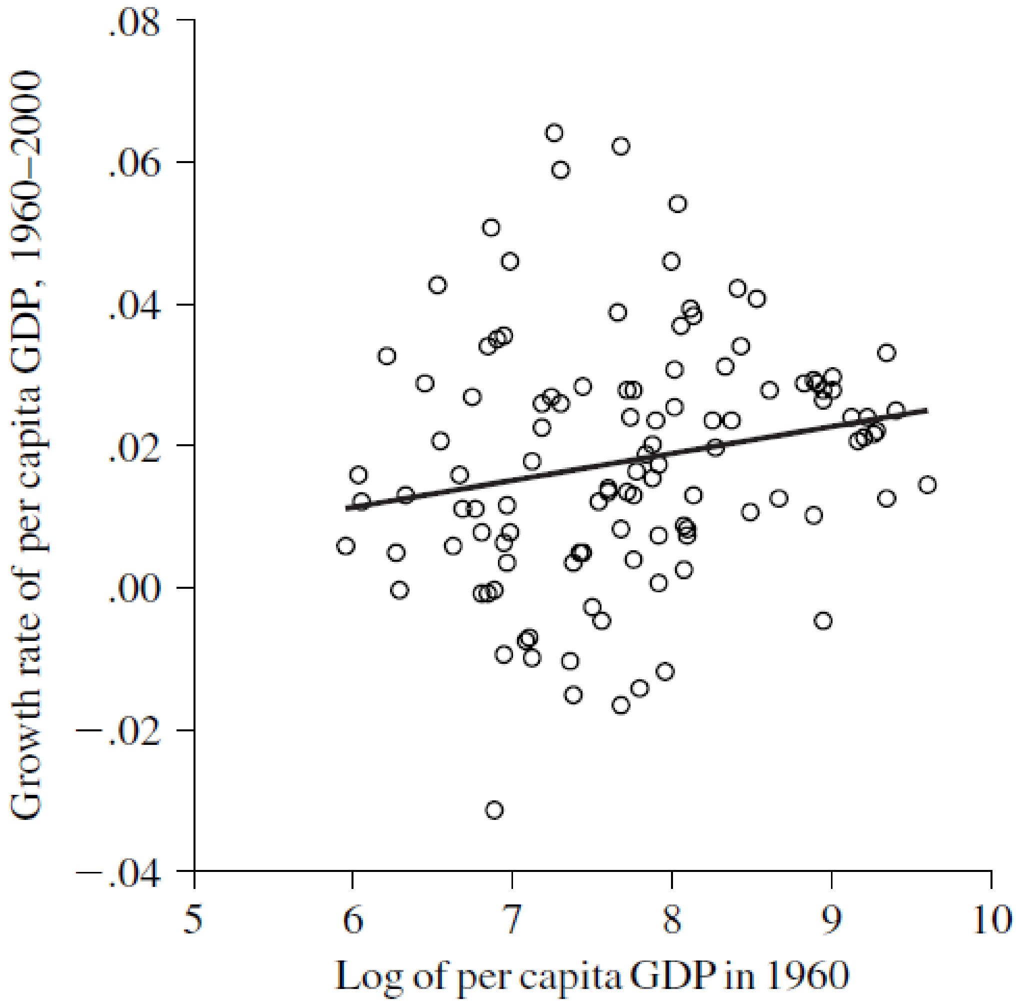
# Convergencia condicional y absoluta

- Considere un grupo de economías cerradas que tienen los mismos parámetros estructurales: $s, n$ y $\delta$ y tienen también la misma función de producción $f(\cdot)$.
- Lo anterior implica que estas economías tienen los mismos valores de estado estacionario para $k$ y para $y$.
- Imagine ahora que la única diferencia es el nivel inicial de capital.

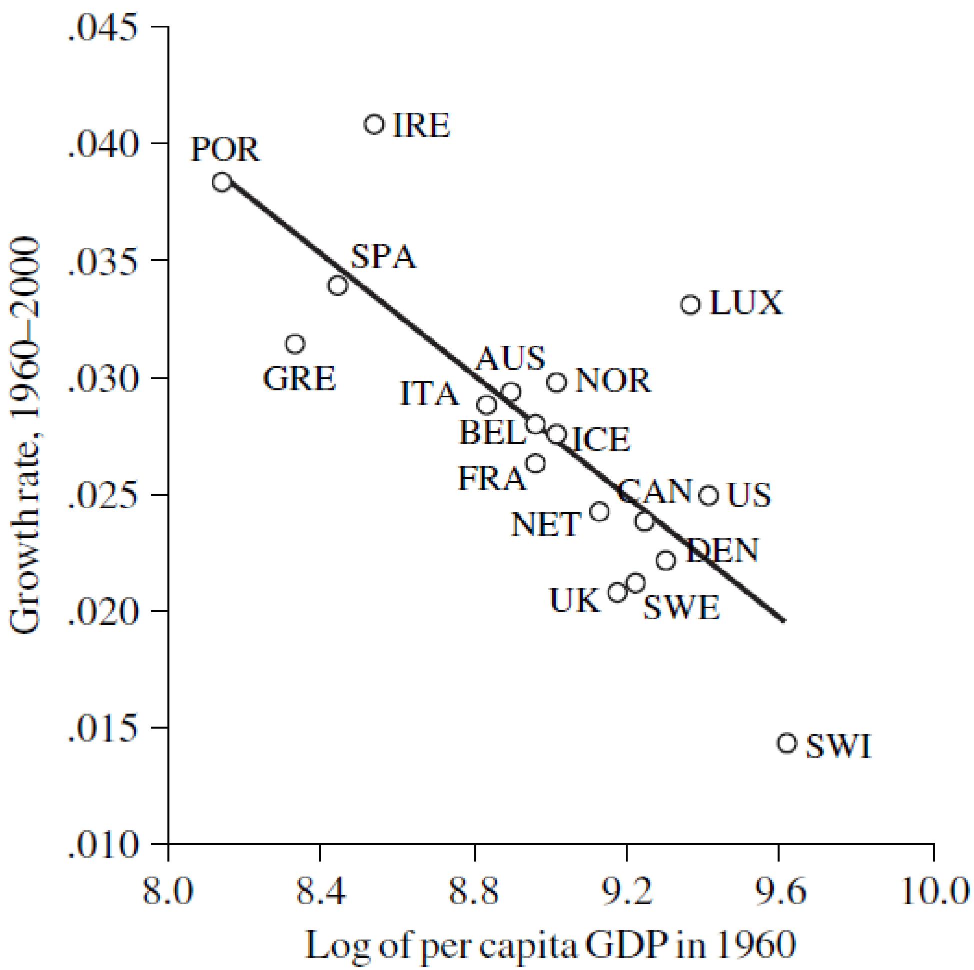
# Convergencia



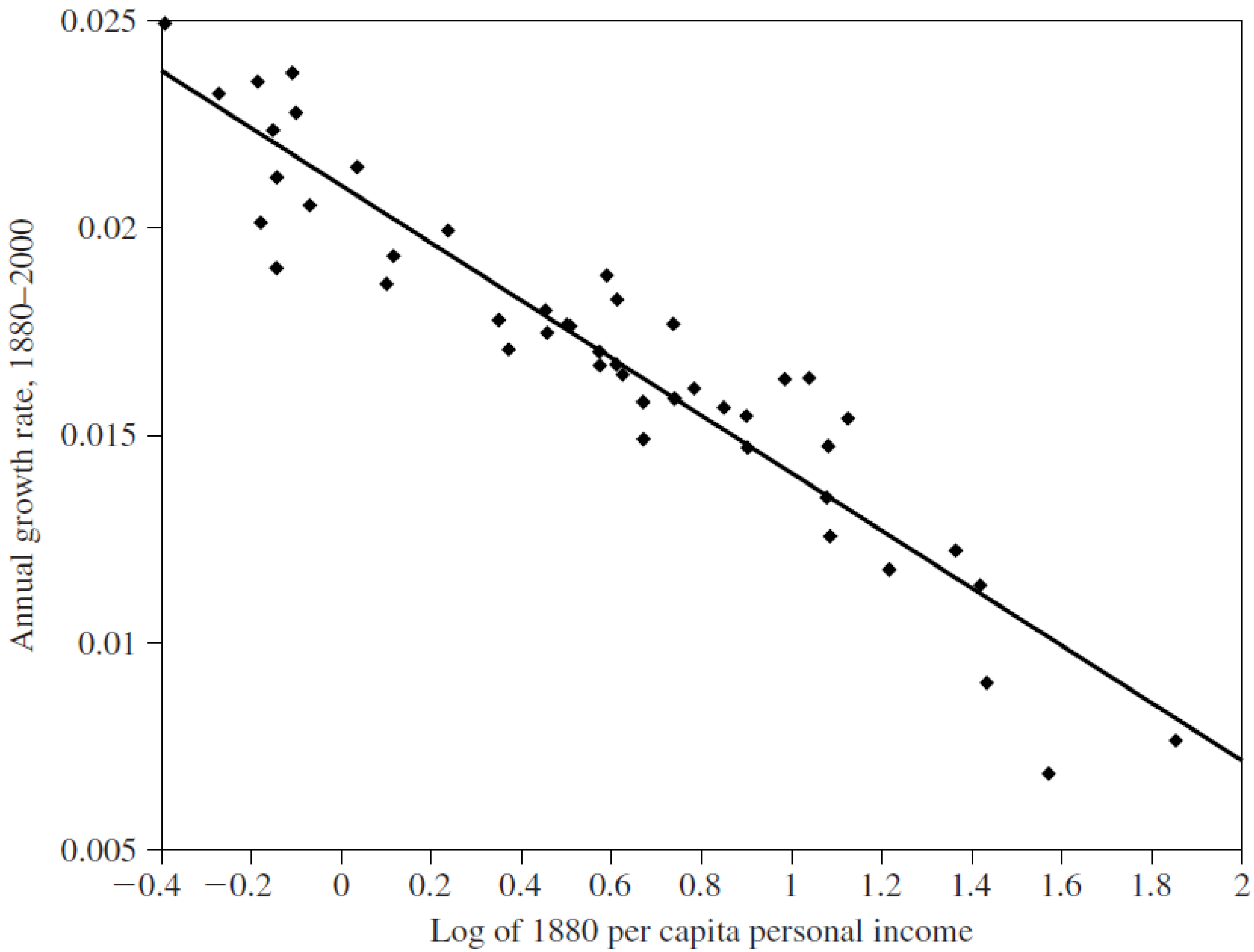
# Convergencia absoluta: países pobres tienden a crecer más rápido en términos per cápita que países avanzados.



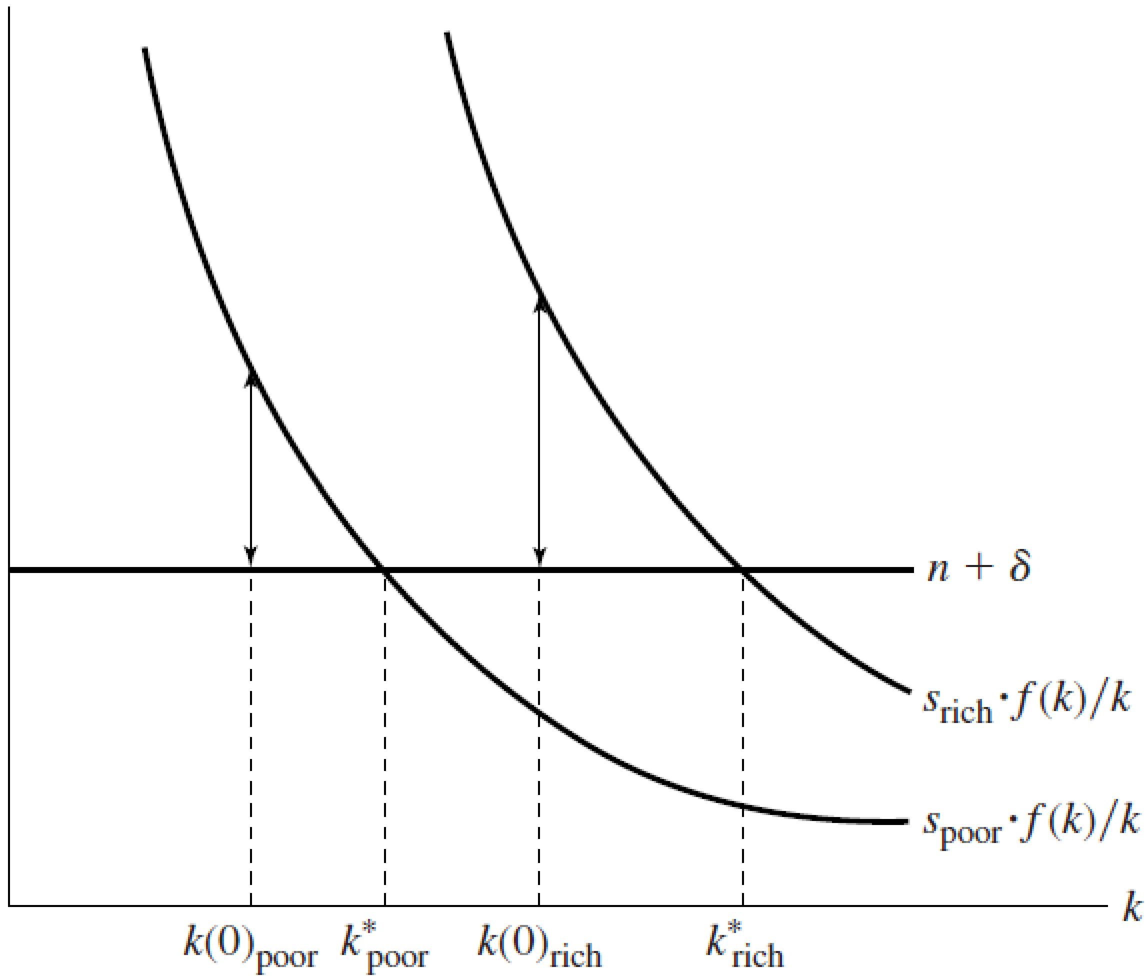
# Convergencia condicional: los países tienden a crecer más rápido mientras más lejos están de su propio estado estacionario.



# Convergencia condicional: los países tienden a crecer más rápido mientras más lejos están de su propio estado estacionario.



# Convergencia condicional



# Velocidad de convergencia

- Si la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario es rápida, centrarse en el estado estacionario es lógico.
- Si la velocidad de convergencia es lenta, las dinámicas de transición serán entonces más relevantes.
- Recordemos que la tasa de crecimiento del capital por trabajador viene dada por:

$$\gamma_k \equiv \dot{k}/k = s \cdot f(k)/k - (n+\delta)$$

# Velocidad de convergencia

- Usando la función de producción Cobb-Douglas antes presentada obtenemos:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sAk^{\alpha-1} - (n+\delta)$$

- La velocidad de convergencia viene dada por:

$$\beta \equiv -\frac{\partial \left( {}^{\dot{k}}/_{k} \right)}{\partial \log k}$$

# Velocidad de convergencia

- Lo anterior implica que:

$$\beta = (1-\alpha)sAk^{-(1-\alpha)}$$

- La velocidad de convergencia no es constante sino que case monótonicamente en la medida que el stock de capital aumenta hacia su valor de estado estacionario.
- En el estado estacionario, la velocidad de convergencia es:

$$\beta^* = (1-\alpha)(n+\delta)$$

# Velocidad de convergencia

$$\beta^* = (1 - \alpha)(n + \delta)$$

- Si consideramos que $\alpha = 0{,}3$, $n = 0{,}01$ y $\delta = 0{,}1$, $\beta = 0{,}077$. Es decir, un 8% en la brecha será cerrada cada año.

# Velocidad de convergencia

- Consideremos una expansión de Taylor de la función:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \dot{\ln} k = sAe^{-(1-\alpha)\ln k} - (n + \delta)$$

- Entonces,

$$\dot{\ln} k = -(1 - \alpha)(n + \delta)(\ln k - \ln k^*)$$

# Velocidad de convergencia

$$\dot{\ln k} = -\beta(\ln k - \ln k^*)$$

- Ahora, recordando que $y = Ak^{\alpha}$, tenemos que:

$$\dot{\ln y} + \beta \ln y = \beta \ln y^*$$

- Resolviendo esta ecuación diferencial tenemos que:

$$\ln y_T = \left(1 - e^{-\beta T}\right) \ln y^* + e^{-\beta T} \ln y_0$$

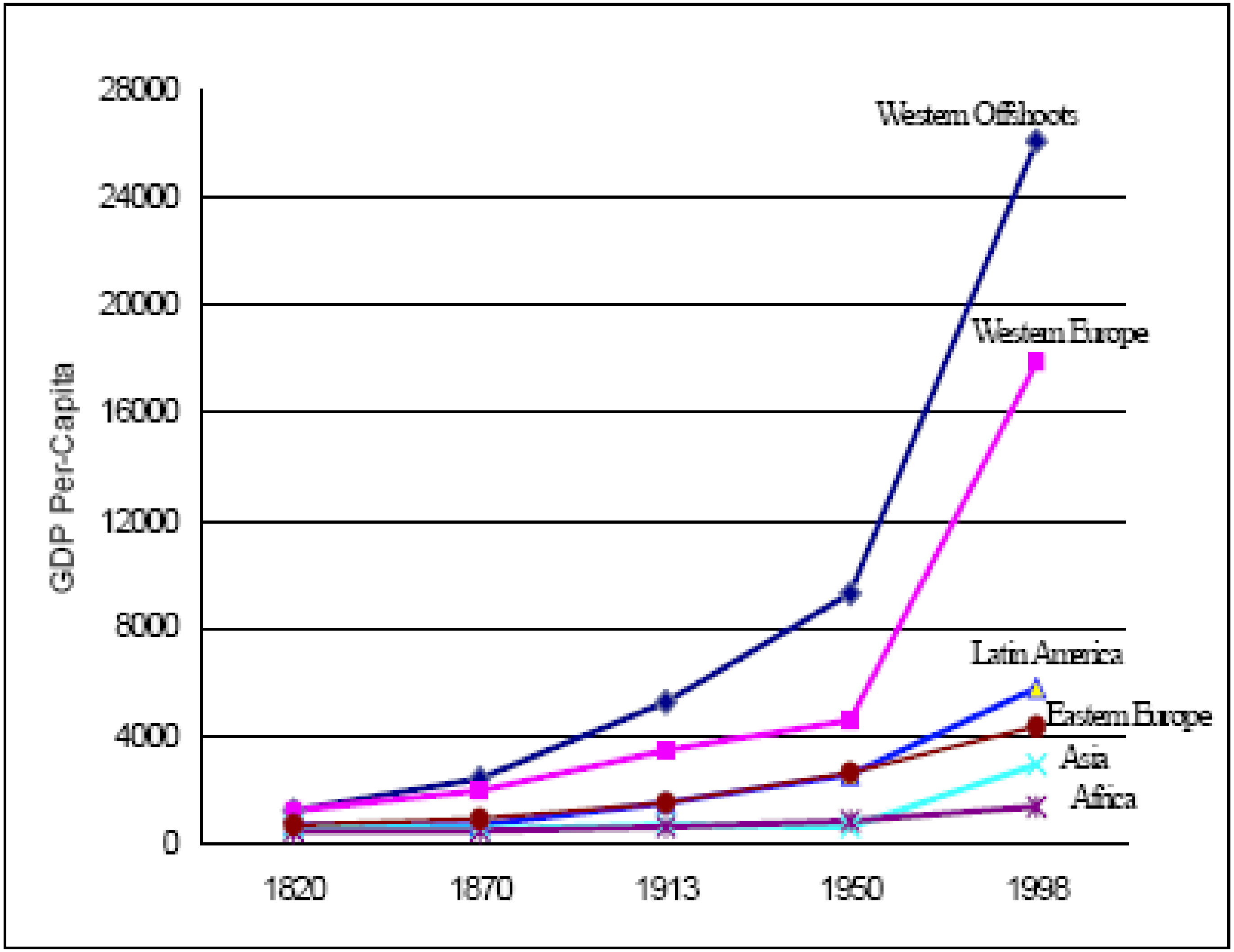



Figure 2.32. The Great Divergence
Source: Maddison (2001)

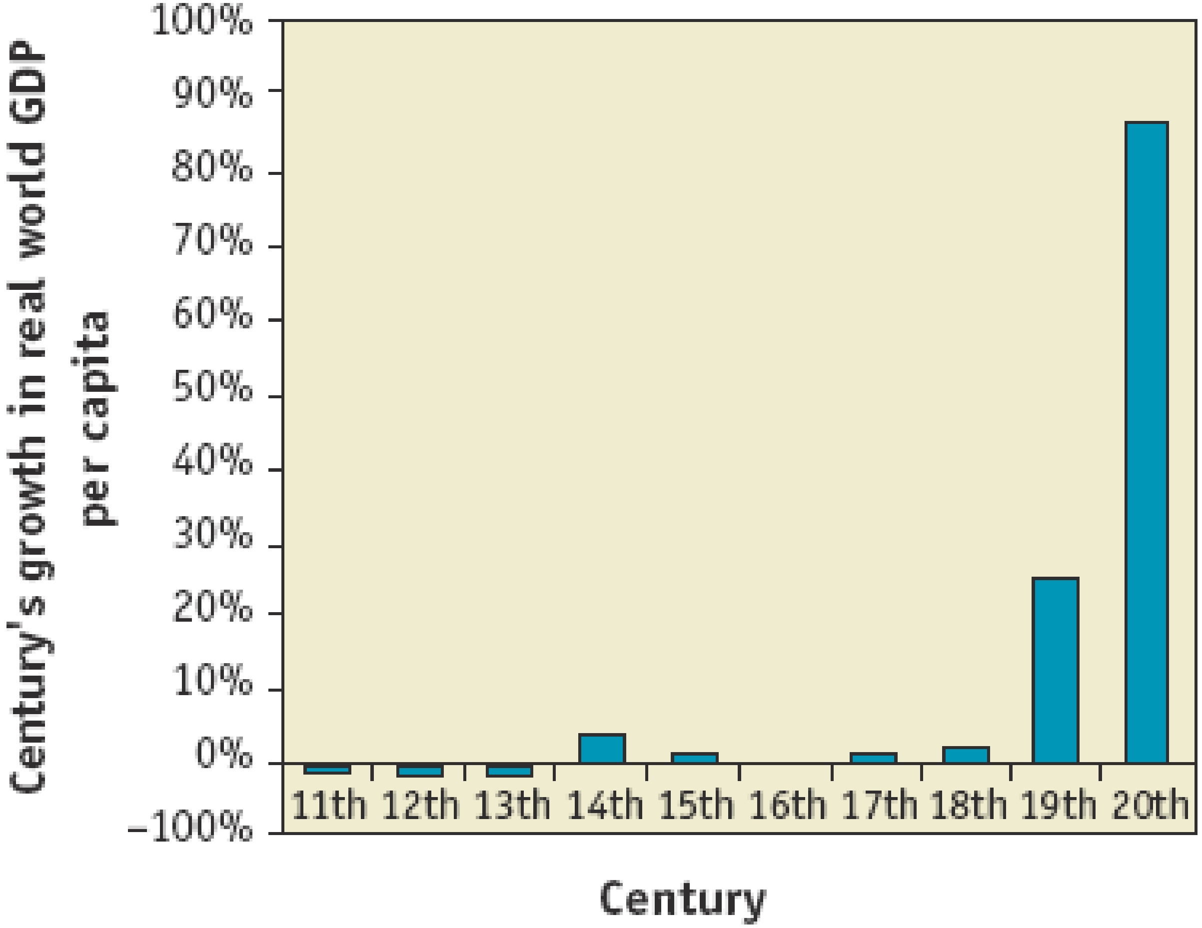
# Progreso tecnológico y crecimiento balanceado

- Hasta ahora hemos asumido que el nivel de la tecnología es constante. Lo anterior es ciertamente un supuesto poco realista.
- El conocimiento productivo de nuestras sociedades ha aumentado enormemente en los últimos 200 años.
- La primera pregunta que debemos hacernos es como introducir el progreso tecnológico en el modelo de forma tal de asegurar un crecimiento balanceado.

# Progreso tecnológico y crecimiento balanceado

- Crecimiento balanceado implica una trayectoria que sea consistente con (algunos de) los hechos estilizados presentados por Kaldor (1963): mientras el producto per cápita aumenta, el cociente producto-capital, la tasa de interés y la distribución del ingreso entre capital y trabajo permanece relativamente constante.

# Worldwide Growth in Real GDP per Capita, 1000–Present




*Source:* DeLong 2000.

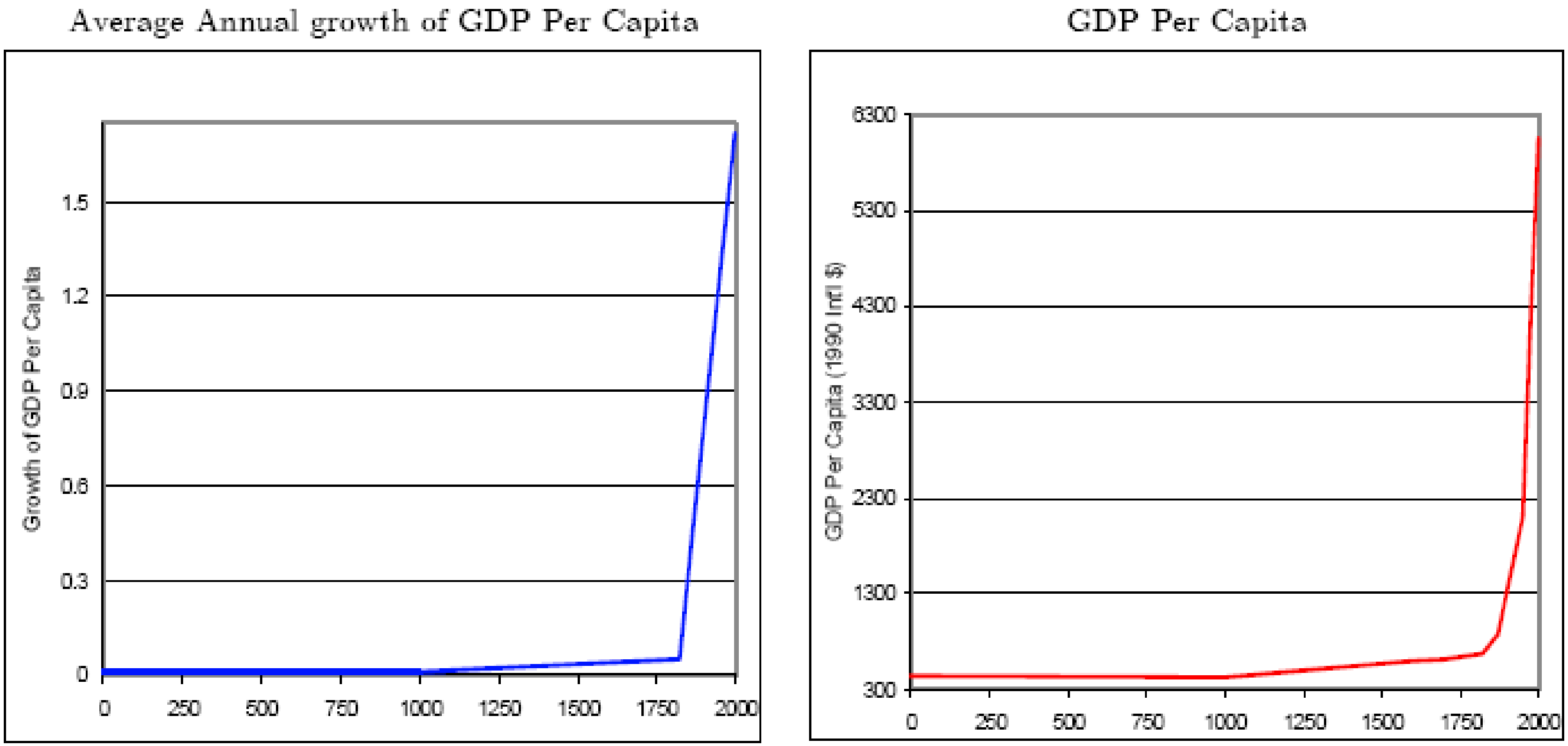
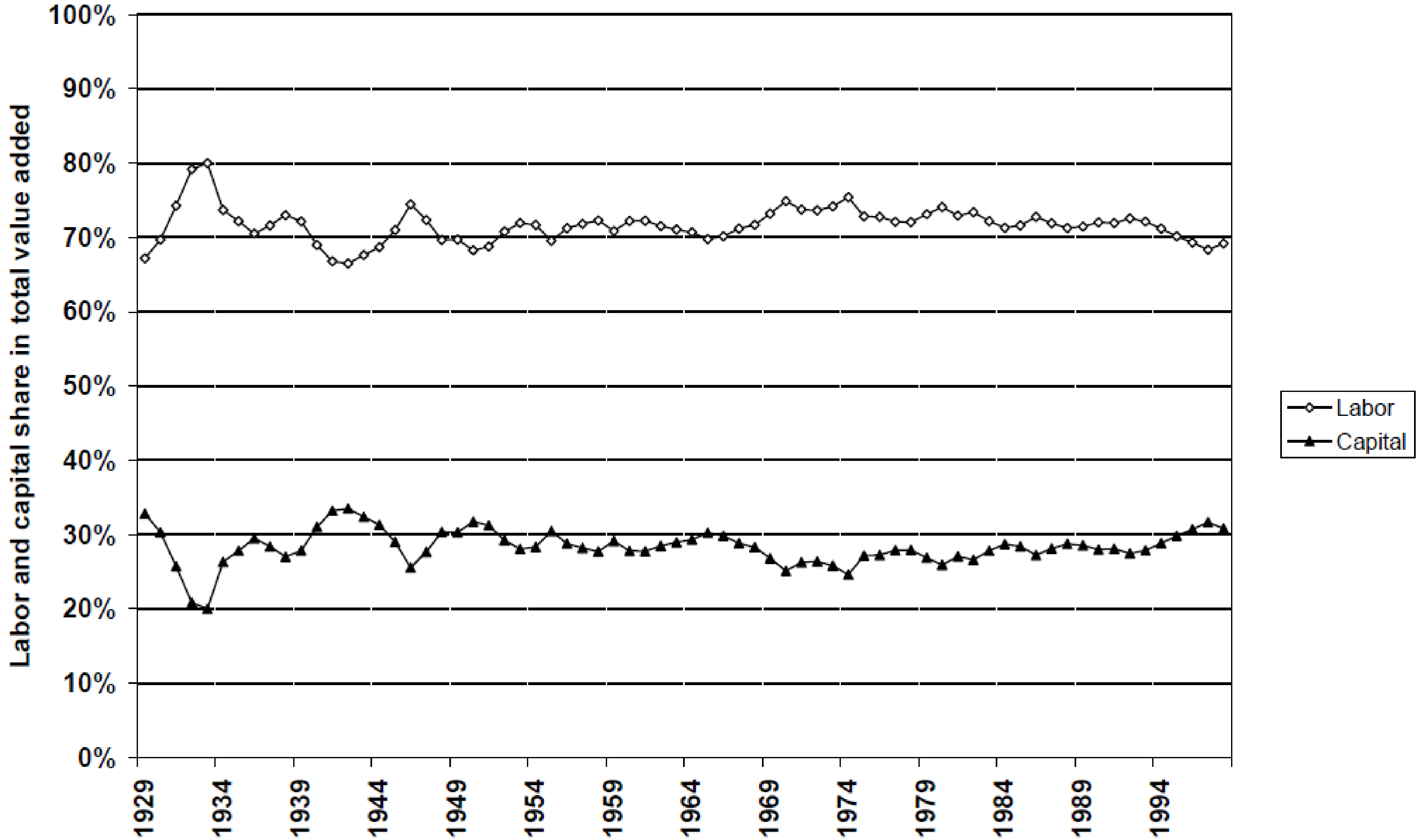



Figure 2.2. The Evolution of the World Income Per Capita over the Years 1-2001
Source: Maddison (2001, 2003)



Labor and capital share in total value added
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1929
1934
1939
1944
1949
1954
1959
1964
1969
1974
1979
1984
1989
1994
Labor
Capital

# Progreso tecnológico y crecimiento balanceado

- Es importante notar que el supuesto de participaciones constantes en el pago a los factores y un cociente producto-capital constante, son tomados como aproximaciones a la realidad.
- De hecho muchas de estas variables han exhibido una tendencia en las últimas décadas.
- Crecimiento balanceado nos permite describir la economía a través de ecuaciones diferenciales con estados estacionarios bien definidos.

# Progreso tecnológico

- Hicks indicó que una innovación tecnológica era neutral (neutralidad de Hicks) con respecto al capital y al trabajo, si y solo si, la relación existente entre las productividades marginales de los factores se mantenía constante para una proporción dada entre el capital y el trabajo.

- En consecuencia, una innovación tecnológica es ahorradora de capital (de trabajo), si el producto marginal del capital (del trabajo) aumenta más que el producto marginal del trabajo (del capital) cuando la relación entre el capital y el trabajo permanece constante.

# Progreso tecnológico y crecimiento balanceado

- Progreso tecnológico.
  - Hicks neutral:

$$Y = T(t) \cdot F(K, L)$$

  - Harrod neutral:

$$Y = F[K, L \cdot T(t)]$$

  - Solow neutral:

$$Y = F[K \cdot T(t), L]$$

# Isocuantas con progreso tecnológico neutral

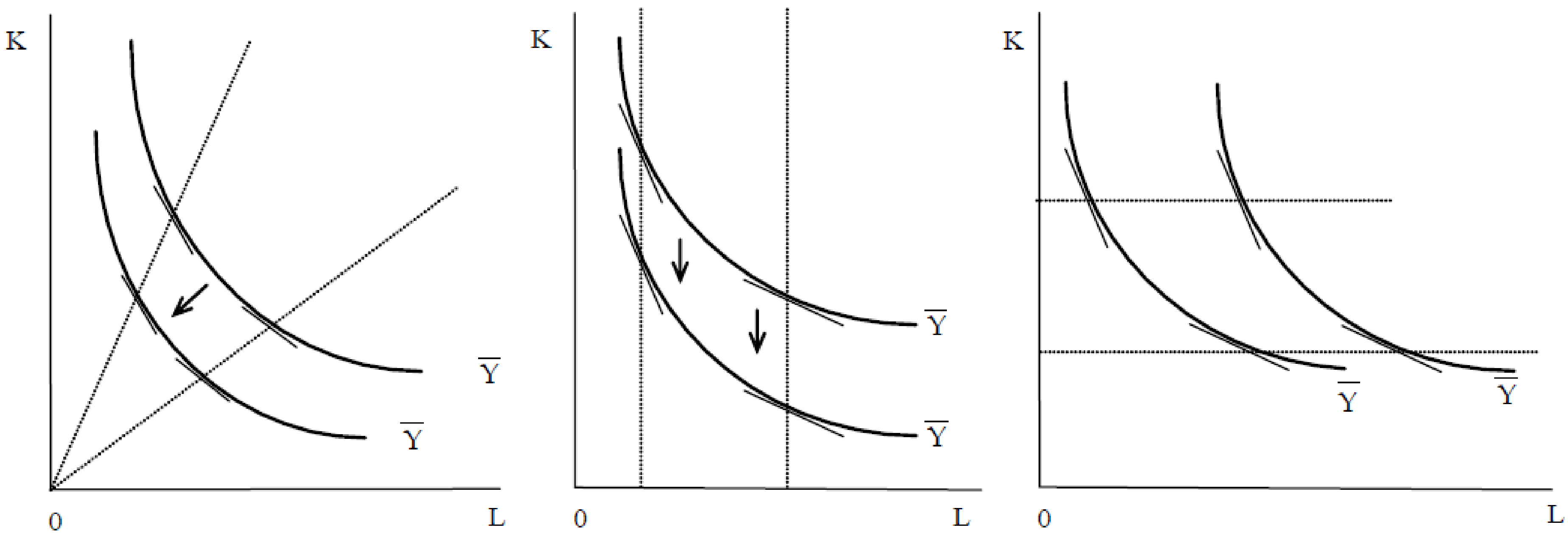



FIGURE 2.12. Hicks-neutral, Solow-neutral and Harrod-neutral shifts in isoquants.

# Progreso tecnológico y crecimiento balanceado

- Para asegurar crecimiento balanceado, dada una función de producción general como $F(K, L.T)$, tendremos que el progreso tecnológico tiene que se labor-augmenting (Harrod-neutral).

# Progreso tecnológico incorporado

- Todos los tipos de progreso técnico que hemos discutido consideran al cambio tecnológico como “no incorporado”: cuando aparece una nueva mejora tecnológica, todas las maquinas existentes hasta el momento aumentan su productividad. Ejemplos: programas informáticos.

- No ocurre lo anterior con el hardware computacional. Las máquinas de generaciones obsoletas no se ven afectadas por las nuevas tecnologías. Este fenómeno se conoce como progreso técnico incorporado, dado que se encuentra incorporado en el propio capital.

# Progreso tecnológico incorporado

- Phelps (1962) y Solow (1969) muestran que:
  - El modelo tecnológico con progreso técnico incorporado y competencia perfecta (productividad marginal del trabajo es igual para todos los trabajadores, con independencia de la "cosecha" a la que pertenecen las máquinas que están utilizando) puede ser escrito de forma equivalente al modelo neoclásico con progreso tecnológico no incorporado.
  - La tasa de crecimiento en el estado estacionario es independiente de la parte que representa el progreso tecnológico incorporado, aunque depende de la tasa total de progreso técnico.
  - La velocidad de convergencia es tanto mayor cuanto mayor sea la parte que represente el progreso incorporado.

# Modelo de Solow-Swan con progreso tecnológico

- Consideremos ahora el caso con avance tecnológico que es Harrod neutral.

$$\dot{K} = s \cdot F[K, L \cdot T(t)] - \delta K$$

- Ahora vamos a reescribir el modelo en términos de la cantidad efectiva de trabajo $L \cdot T(t) \equiv \hat{L}$.
- En este caso:

$$\hat{k} \equiv \frac{K}{[L \cdot T(t)]}$$

$$\hat{y} \equiv \frac{Y}{[L \cdot T(t)]} = F(\hat{k}, 1) \equiv f(\hat{k})$$

# Modelo de Solow-Swan con progreso tecnológico

- Si T(t) crece a una tasa x tenemos que:

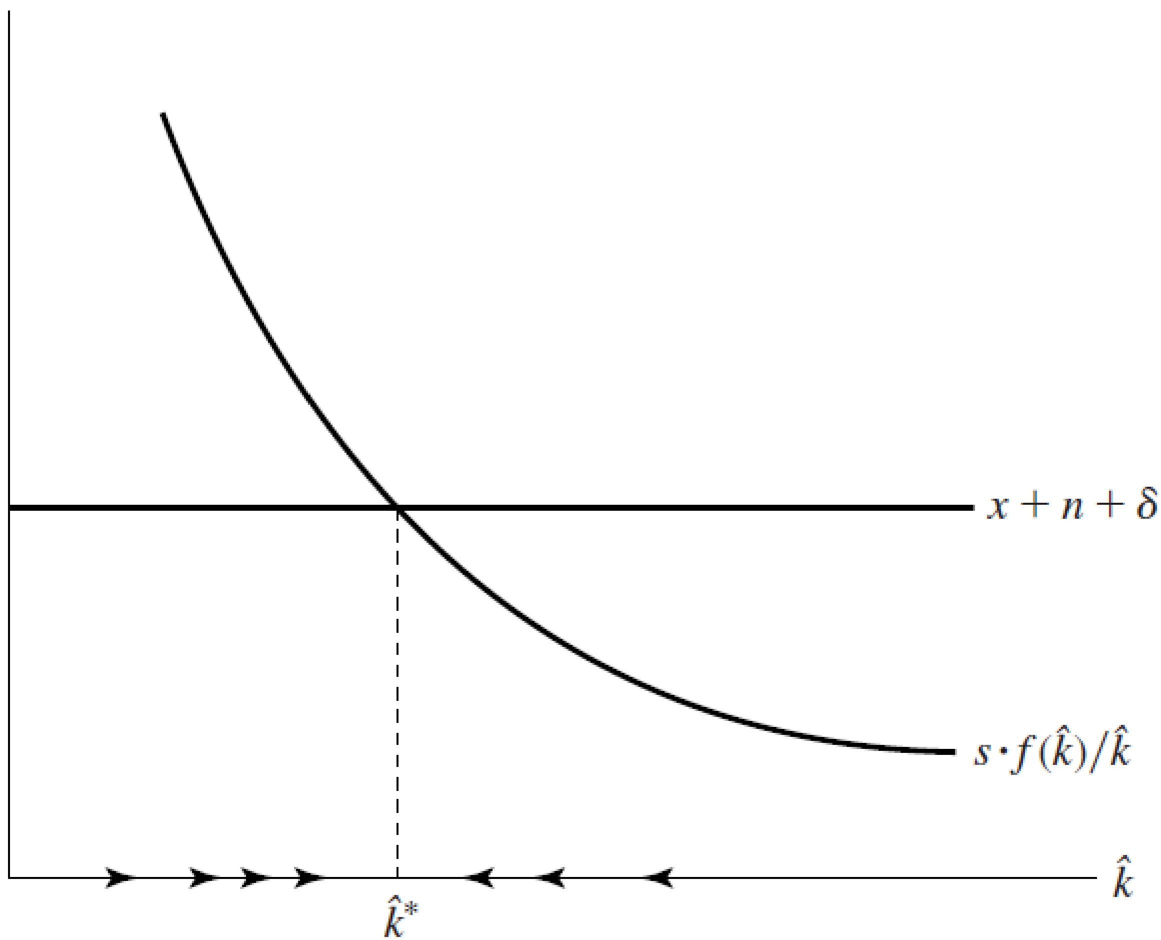
$$\dot{\hat{k}}/\hat{k} = s \cdot f(\hat{k})/\hat{k} - (x + n + \delta)$$

- En consecuencia, en estado estacionario tenemos que:

$$s \cdot f(\hat{k}^*) = (x + n + \delta) \cdot \hat{k}^*$$

- En estado estacionario las variables $\hat{k}$, $\hat{y}$ y $\hat{c}$ son constante mientras que las variables $k$, $y$ y $c$ crecen ahora a una tasa x.

# Modelo de Solow-Swan con progreso tecnológico



# Velocidad de convergencia II

- Considerando el caso de progreso tecnológico podemos mostrar que:

$$\dot{\hat{k}}/\hat{k} = sA \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot\log(\hat{k})} - (x + n + \delta)$$

- Si tomamos la derivada de esta ecuación con respecto a $\log \hat{k}$ podemos obtener una expresión para β

$$\beta = (1-\alpha) \cdot sA \cdot (\hat{k})^{-(1-\alpha)}$$

- Β cae monotónicamente. La velocidad de convergencia en torno al estado estacionario viene dada por:

$$\beta^* = (1-\alpha) \cdot (x + n + \delta)$$

# Velocidad de convergencia II

- Asumamos que $(x + n + \delta)$ es aproximadamente 6% por año.
- Y que $\alpha$ es 1/3.
- Entonces, $(1 - \alpha)(x + n + \delta) = 4\%$.
- Lo anterior implica que toma 17 años cerrar la mitad de la brecha inicial de producto respecto del estado estacionario.

$$\ln y_T = \left(1 - e^{-\beta T}\right) \ln y^* + e^{-\beta T} \ln y_0$$

# Velocidad de convergencia II

- Pero la velocidad de convergencia en los datos está entre 1,5% y 3%. Si beta es 2% por año, cerrar la mitad de la brecha inicial de producto respecto del estado estacionario tomaría 35 años. Y el tiempo que se requiere para eliminar ¾ de la brecha inicial es 70 años.

- Para que beta sea 2%, el modelo neoclásico requiere un coeficiente de capital mayor.

- Lo anterior ha llevado a ampliar el concepto de capital para incluir por ejemplo el capital humano.