Examen Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Ignacio Fuentes y Hriday Karnani

Lea atentamente las siguientes indicaciones:

- Ud. tiene 180 minutos para resolver la prueba.
- La prueba consta de 4 ejercicios y tiene un total de 120 puntos.
- Los puntos están indicados en cada pregunta.
- Lea todas las preguntas antes de comenzar a responder, esto le permitirá planificar su trabajo de forma eficiente. Evite dedicar mucho tiempo a una pregunta.
- Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
- Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.
- En caso de descubrir un intento de copia, éste se sancionará de acuerdo con el reglamento de copia y plagio de la facultad.

Pregunta 1: (20 puntos)

Demuestre que las siguientes dos definiciones son equivalentes.
Nota: Puede hacer la demostración considerando sólo 2 jugadores para simplificar la notación.

- Definición 1: la estrategia pura s_i está dominada por σ_i si

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \text{ para todo } s_{-i} \in S_{-i},$$

- Definición 2: la estrategia pura s_i está dominada por σ_i si

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i}) \text{ para todo } \sigma_{-i} \in \Delta_{-i}.$$

Respuesta

Si s_i es dominada por σ_i según la Definición 2, también lo será según la Definición 1 dado que $s_{-i} \in \Delta_{-i}$ (las estrategias puras son un caso particular de estrategias mixtas). (6 puntos)

Veamos ahora la demostración en el otro sentido. Queremos demostrar que si s_i es dominada por σ_i según la Definición 1, entonces también es dominada según la Definición 2. Es decir queremos demostrar que $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i})$ para todo $\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$.

Dado $\sigma_{-i} = (p_1, \dots, p_k)$, sabemos que

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{j=1}^{k} p_j u_i(\sigma_i, s_{-i}^j) > \sum_{j=1}^{k} p_j u_i(s_i, s_{-i}^j) = u_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

(6 puntos, por la formula de $u_i(\sigma, \sigma_{-i}) = \sum_{j=1}^{k} p_j u_i(\sigma_i, s_{-i}^j)$)

(8 puntos, por plantear correctamente la desigualdad y concluir la demostración.)

Pregunta 2: (30 puntos)

La tienda M vende un artículo con un precio de 100.

Dos compradores están considerando comprar este artículo, pero comparan los precios entre la tienda M y la tienda R del vecindario. Si las dos tiendas cobran precios diferentes, ambos compradores van a la tienda más barata. Si las dos tiendas cobran el mismo precio, un comprador va a M y el otro a R.

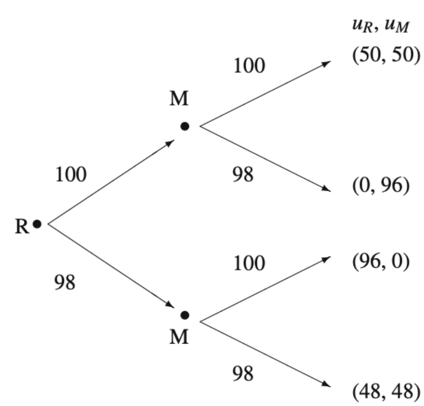
La tienda R puede elegir entre los precios 100 y 98. Después de ver el precio de la tienda R, M elige si mantener el precio en 100 o disminuirlo a 98.

Ambas tiendas obtienen el artículo del mismo mayorista al precio mayorista de 50. (Supongamos que si una tienda no vende un artículo, lo devuelve al mayorista para que no haya ningún costo). El pago de la tienda es su beneficio, que es el ingreso menos el costo.

1. (10 puntos) Dibuje el árbol del juego.
2. (10 puntos) Encuentre el ENPS.
3. (10 puntos) La tienda M empieza una campaña de "precio bajo garantizado". Anuncia públicamente que igualará su precio al precio de la Tienda R, si el precio de este último es inferior al de la Tienda M. Dibuje el nuevo árbol, encuentre el nuevo ENPS y discuta sus implicancias económicas.

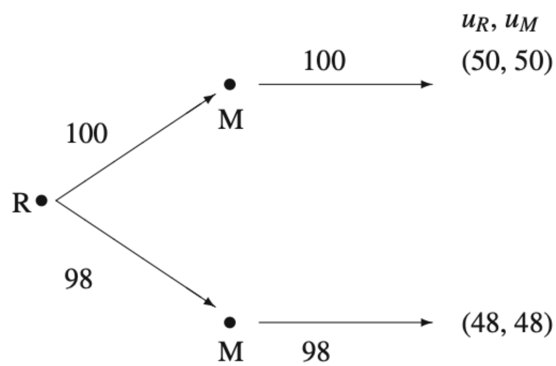
Respuesta

1.



2. En este juego hay 2 subjuegos (además del juego completo). (2 puntos) En los 2 subjuegos que se inician en los 2 nodos de decisión de M, la estrategia de equilibrio de M es fijar precio 98 en ambos casos. (2 puntos) Dado esto, la estrategia de equilibrio de R es fijar precio 98 en el nodo inicial. (3 puntos)

   ENPS=$\{(98,(98,98))\}$ (3 puntos)

3. 

   (3 puntos, por el árbol)

   La campaña de precio bajo garantizado implica que M solo cobrará 98 si R también lo hace. Sabiendo esto, R no tiene incentivo en bajar su precio y prefiere cobrar 100. (2 puntos)

   El nuevo ENPS es $(100,(100,98))$. (2 puntos) El precio del artículo en la trayectoria de equilibrio es más caro que en la situación inicial y ambas tiendas ven aumentado su pago de equilibrio. (3 puntos)

Pregunta 3: (40 puntos) Considere el juego secuencial descrito a continuación. Hay tres jugadores.

El Jugador 1 mueve A o B. Si elige A, el juego termina con pagos $(6, 0, 6)$ (el orden en que se entregan los pagos es siempre: (pago J1, pago J2, pago J3).) Si elige B, el juego continua a una segunda etapa.

En la segunda etapa el Jugador 2 elige C o D. Si elige C, el juego termina con pagos $(8, 6, 8)$. Si elige D, el juego continua a una tercera etapa.

En la tercera etapa los jugadores 1 y 3 realizan un juego simultáneo de coordinación descrito por la matriz de pagos (los pagos dados son para los tres jugadores, aunque J2 no es activo en este subjuego):

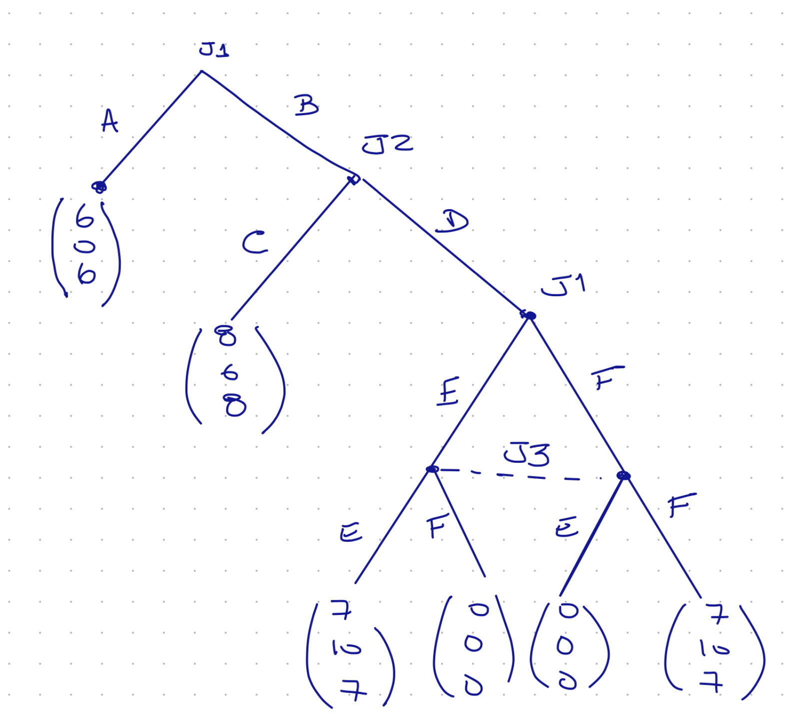
		Jug. 3	
		E	F
Jug. 1	E	$(7, 10, 7)$	$(0, 0, 0)$
	F	$(0, 0, 0)$	$(7, 10, 7)$

1. (10 puntos) Dibuje el árbol que representa este juego.
2. (20 puntos) Demuestre que en cada Equilibrio de Nash Perfecto en subjuegos (incluídos aquellos en que se juegan estrategias mixtas), el J1 juega B en la primera etapa.
3. (10 puntos) El J1 cree que en el subjuego de la tercera etapa se jugará el equilibrio en estrategias mixtas, pero a la vez, cree que el J2 está convencido de que se jugará un equilibrio en estrategias puras. ¿Qué acción elegirá J1 en la primera etapa? Justifique.

   NOTA: El concepto de ENPS supone, no sólo que los jugadores esperan equilibrios de Nash en todos los subjuegos, sino también que todos los jugadores esperan los **mismos** equilibrios. En este ejemplo se ve una situación donde esto no se cumple.

Respuesta

a)



b) Por inducción hacia atrás buscamos primero los equilibrios de Nash del subjuego de la tercera etapa.

Este subjuego tiene 2 EN en estrategias puras: $\{(E, E), (F, F)\}$. (2 puntos)

Buscamos también EN en estrategias mixtas. Asumimos que $\sigma_3^* = (p, 1-p))$.

$$u_1(E, \sigma_3^*) = u_1(F, \sigma_3^*) \Rightarrow 7p = 7(1-p) \Rightarrow p = \frac{1}{2}. \quad (3\ puntos)$$

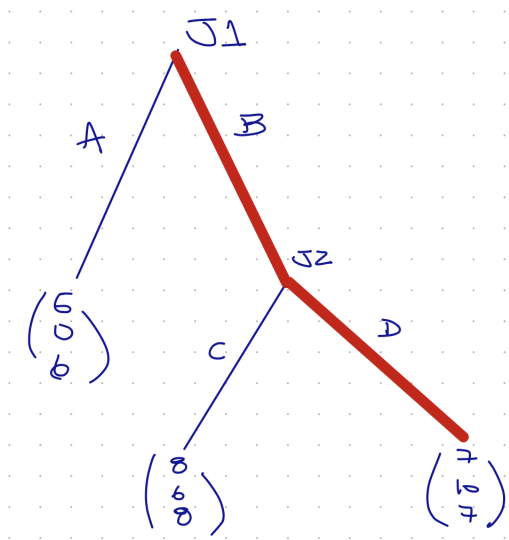
Por simetría $\sigma_1^* = \sigma_3^*$. (1 puntos) Y los pagos esperados son

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_3^*) = u_3(\sigma_1^*, \sigma_3^*) = \frac{1}{4}7 + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}7 = 3{,}5.$$

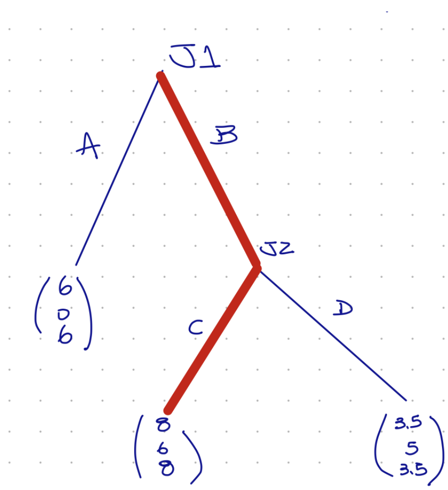
$$u_2(\sigma_1^*, \sigma_3^*) = \frac{1}{4}10 + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}10 = 5.$$

(2 puntos)

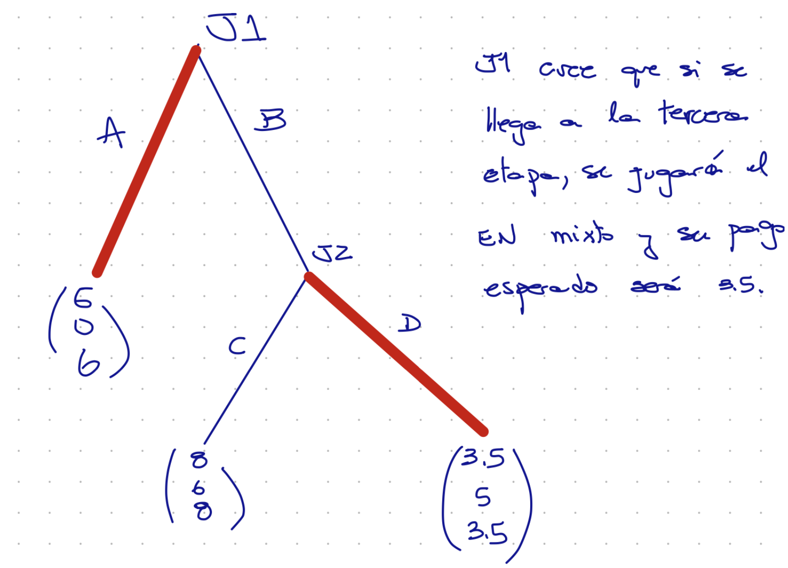
Si en la 3era etapa se juega (E, E) o (F, F) tenemos



J2 elige D en la segunda etapa y J1 elige B en la primera etapa. (6 puntos) Si en la tercera etapa se juega (σ_1^*, σ_3^*) tenemos:



J2 elige C en la segunda etapa y J1 elige B en la primera etapa. (6 puntos) c)



(2 puntos, por el árbol)

J1 cree que si se llega a la tercera etapa, se jugará el EN mixto y su pago esperado será 3.5. (3 puntos) J1 también cree que J2 elegirá D (porque $J2$ cree que en la tercera etapa se va a jugar un EN en estrategias puras). (3 puntos)

Por lo tanto, J1 juega A en la primera etapa. (2 puntos) Vemos que si las creencias no coinciden, no se juega un ENPS.

Pregunta 4: (30 puntos)

Considere una subasta en sobre cerrado a segundo precio, donde hay 2 jugadores. Cada jugador reciba una señal t_i con distribución $U[0,1]$. Y ambos jugadores valoran el bien subastado como $v(t_1, t_2) = t_1 + t_2$.

Demuestre que para todo valor de $\lambda > 0$ existe un Equilibrio de Nash, donde las estrategias de equilibrio son respectivamente $\beta_1^*(t_1) = (1+\lambda)t_1$ y $\beta_2^*(t_2) = (1+\frac{1}{\lambda})t_2$.

NOTA: El caso en el cual los 2 jugadores ofertan exactamente la misma cantidad, tiene probabilidad 0. Por lo tanto, no es necesario considerarlo al calcular los pagos esperados.

Respuesta

Asumiendo que $\beta_2(t_2) = (1 + 1/\lambda)t_2$ vamos a verificar que el pago esperado del Jugador 1 se maximiza cuando oferta $b_1 = \beta_1(t_1) = (1+\lambda)t_1$.

Pago de Bernoulli del Jugador 1:

$$u_1(b_1, b_2, t_1, t_2) = \begin{cases} v(t_1,t_2) - b_2 & si\ b_1 > b_2 \\ 0 & si\ b_1 < b_2. \end{cases} \quad \text{(3 \textit{puntos})}$$

El Jugador 1 elige b_1 de forma de maximizar su pago esperado:

$$U_1(b_1, t_1) = \int_0^1 u_1(b_1, b_2, t_1, t_2)dt_2 = \int_0^1 v(t_1, t_2) - b_2(t_2)1_{b_1 > b_2}(t_2)dt_2. \quad \text{(3 \textit{puntos})}$$

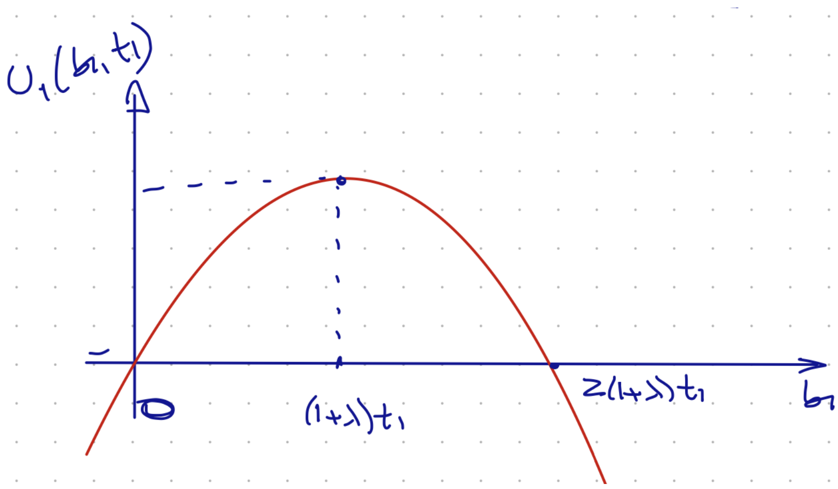
Veamos como escribir la condición $b_1 > b_2$ en términos de t_2 y b_1:

$$b_1 > b_2 = (1 + 1/\lambda)t_2 \Rightarrow t_2 < \frac{\lambda}{1+\lambda} b_1. \quad \text{(3 \textit{puntos})}$$

$$\begin{aligned} U_1(b_1, t_1) &= \int_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}b_1} v(t_1, t_2) - (1+1/\lambda)t_2 dt_2 = \int_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}b_1} t_1 + t_2 - (1+1/\lambda)t_2 dt_2 \\ &= \int_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}b_1} t_1 - t_2/\lambda dt_2 = t_1 \frac{\lambda}{1+\lambda} b_1 - \frac{1}{2\lambda}(\frac{\lambda}{1+\lambda})^2 b_1^2 \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda} b_1 \left[t_1 - \frac{b_1}{2(1+\lambda)} \right] \quad \text{(5 \textit{puntos})} \end{aligned}$$

El máximo se alcanza cuando $b_1 = (1+\lambda)t_1$. (Ver la gráfica). (3 puntos)

Hemos verificado que la mejor respuesta de J1 a la estrategia $\beta_2(t_2) = (1+1/\lambda)t_2$ es $\beta_1(t_1) = (1+\lambda)b_1$.



Para ver que $\beta_2(t_2) = (1+1/\lambda)t_2$ es mejor respuesta a $\beta_1(t_1) = (1+\lambda)b_1$ basta considerar $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$. (3 puntos)