El modelo de Ramsey

Introducción

- En el modelo de Solow-Swan, la tasa de ahorro es exógena.
- En esta sección vamos a estudiar un modelo donde los consumidores se comportan de manera óptima.
- Lo anterior nos permitirá analizar cómo se comporta la economía frente a cambios en la tasa de interés o en las tasas de impuesto.

Introducción

- Vamos a tener hogares que viven hasta el infinito y que eligen su consumo y ahorro para maximizar la utilidad de su hogar sujeto a una restricción presupuestaria.
- En particular, estudiaremos el modelo de Ramsey (1928).
- Veremos que en este caso, la tasa de ahorro es una función del stock de capital per cápita.
- Estudiaremos también si la tasa de ahorro sube o decrece con el desarrollo económico.

Introducción

- Dada la optimalidad en las decisiones de ahorro de los agentes, podremos eliminar del análisis situaciones como las analizadas en el modelo de Solow-Swan de (ineficiente) sobre-ahorro.
- Veremos además que la relación entre la tasa de ahorro y el nivel de desarrollo económico afectará de manera relevante las dinámicas de la transición hacia el estado estacionario, incluyendo la velocidad de convergencia.
- En particular, veremos que el modelo de Solow-Swan con tasa de ahorro constante es un caso especial del modelo de Ramsey.

Hogares

- Los hogares proveen trabajo a cambio de un salario.
- Reciben intereses por sus activos.
- Asumiremos que todos los hogares son idénticos en todas las dimensiones bajo análisis.
- Horizonte infinito.
- La tasa de crecimiento de la población adulta es n. Esta tasa es exógena y constante.
- Economía cerrada.

Hogares

- Normalizando el número de adultos en el periodo 0 a la unidad, el tamaño de la familia (adultos) en el período t será:

$$L(t) = e^{nt}$$

- Si $C(t)$ es el consumo total en el período t, el consumo por adulto será $c(t) \equiv C(t)/L(t)$.

Hogares

- Cada hogar maximiza la siguiente función de utilidad:

$$U = \int_0^{\infty} u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt$$

- La utilidad en el periodo 0 es la suma ponderada de todos los flujos futuros de utilidad.
- Asumiremos que $u(c)$ es creciente en c y cóncava: $u'(c) > 0$ y $u''(c) < 0$.
- La concavidad genera el deseo de suavizar consumo a través del tiempo (endeudarse cuando ingreso actual es relativamente bajo y ahorrar cuando es relativamente alto).

Hogares

- También se asume $u(c)$ cumple las condiciones de Inada:

$$u'(c) \to \infty \text{ cuando } c \to 0$$

$$u'(c) \to 0 \text{ cuando } c \to \infty$$

- $\rho > 0$ y asumiremos que $\rho > n$ de forma tal de que U está delimitada si c es constante en el tiempo (ver capítulo 7 Acemoglu y apéndice de B&S para repaso de teoría de control óptimo).

Hogares

- Los hogares mantienen activos en la forma de propiedad sobre capital o préstamos. Préstamos negativos representan deuda.
- Los activos no son transados internacionalmente (economía cerrada).
- Los hogares se pueden prestar o pedir prestado a otros hogares. Pero como tenemos un hogar representativo, estos préstamos serán cero en equilibrio.

Hogares

- Capital y préstamos son sustitutos perfectos como depósito de valor y por lo tanto deben pagar la misma tasa real de retorno $r(t)$.
- Los hogares son competitivos en el sentido que toman como dado la tasa de interés y el salario.
- Asumiremos que cada adulto ofrece inelásticamente una unidad de servicios de trabajo por unidad de tiempo.

Hogares

- Los hogares usan el ingreso que no consumen para acumular más activos:

$$\dot{A}_t = r(t) \cdot A(t) + w(t) \cdot L(t) - C(t)$$

- Dividiendo por $L(t)$ para expresar las variables en per cápita, obtenemos:

$$\dot{a}_t = r(t) \cdot a(t) + w(t) - c(t) - n \cdot a(t)$$

Hogares

- Esta última expresión indica que los activos per cápita crecen con el ingreso per cápita, $r(t) \cdot a(t) + w(t)$, caen con el consumo y caen por el incremento en la población $n \cdot a(t)$.
- Ahora bien, si cada individuo puede pedir prestado una cantidad ilimitada de recursos a la tasa de interés $r(t)$, tiene incentivos a seguir un esquema de Ponzi.
- El hogar entonces puede pedir prestado para financiar su consumo actual y utilizar endeudamiento futuro para hacer el roll over sobre el principal y pagar todo el interés. Dado que nunca se paga el principal, el consumo extra actual es gratuito.

Hogares

- Para evitar este tipo de esquemas asumiremos que los mercados financieros imponen una restricción en el endeudamiento: el valor presente de los activos debe ser asintóticamente no negativo.

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot exp\left[-\int_0^t [r(v)-n]dv\right]\right\} \geq 0$$

- Esta restricción indica que en el largo plazo la deuda por persona del hogar no puede crecer tan rápido como $[r(t)-n]$, lo que implica que el nivel de la deuda no puede crecer tan rápido como $r(t)$.

Hogares

- El problema del hogar es maximizar

$$U = \int_0^{\infty} u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt$$

- Sujeto a

$$\dot{a}_t = r(t) \cdot a(t) + w(t) - c(t) - n \cdot a(t)$$

$$a(0)$$

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ a(t) \cdot exp\left[-\int_0^t [r(v) - n] dv \right] \right\} \geq 0$$

$$c(t) \geq 0$$

Hogares

- El hamiltoniano de este problema viene dado por:

$$H(\cdot) = u[c(t)] \cdot e^{-(\rho-n)t} + v(t)\{w(t) + [r(t) - n] \cdot a(t) - c(t)\}$$

- Donde v es el multiplicador dinámico de Lagrange: el valor que un hogar le da a una unidad adicional de activos. Es el precio implícito de los activos a.

Hogares

- Las condiciones de primer orden del problema pasado vienen dadas por:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Rightarrow v = u'(c) \cdot e^{-(\rho-n)t}$$

$$\dot{v} = -{}^{\partial H}/_{\partial a} \Rightarrow \dot{v} = -(r-n) \cdot v$$

- Y la condición de transversalidad (ver apéndice 1.3 B&S)

$$\lim_{t \to \infty} [v(t) \cdot a(t)] = 0$$

Ecuación de Euler

- Tomando la derivada de $\frac{\partial H}{\partial c}$ con respecto a t y luego reemplazando con la ecuación de $\dot{v}$ y v, obtenemos:

$$r = \rho - \left[\frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)}\right]\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)$$

- Esta es una expresión familiar que indica que los hogares van a elegir un consumo que iguale la tasa de retorno r a la tasa de preferencia ρ más la tasa de caída de la utilidad marginal del consumo debido a un incremento en el consumo per cápita.

Ecuación de Euler

$$r = \rho - \left[\frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)}\right]\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)$$

- El lado derecho de la ecuación puede ser interpretado como la tasa de retorno del consumo.
- Los agentes prefieren consumir hoy en vez de mañana por dos razones.
  - Son impacientes (el individuo le otorga más utilidad a su propio consumo que al de sus descendientes)
  - Si $\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) > 0$, el consumo es bajo hoy con respecto al futuro. Dado que los agentes prefieren suavizar consumo en el tiempo, $u''(c) < 0$, les gustaría traer consumo futuro al presente. Una forma alternativa de ver los anterior es que para desviarse de una trayectoria plana de consumo deben ser recompensados.

Ecuación de Euler

- El término $\left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]$ es una medida de la concavidad de $u(c)$ y es llamado el recíproco de la elasticidad de sustitución intertemporal.

- Ahora asumiremos la siguiente forma funcional para $u(c)$:

$$u(c) = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{(1-\theta)}$$

- Donde $\theta > 0$. La elasticidad de sustitución intertemporal, σ, es constante en este caso. $\sigma = 1/\theta$.

Ecuación de Euler

- Un mayor θ implica que los agentes están menos dispuestos a aceptar desviaciones del perfil plano de consumo en el tiempo (más rápida es la caída en $u'(c)$ en respuesta a un aumento en c).

- Cuando θ va a cero, la función de utilidad tiende a ser lineal. En este caso los agentes son indiferentes al momento de consumo si $r = \rho$.

La condición de transversalidad

$$\lim_{t \to \infty} [v(t) \cdot a(t)] = 0$$

- La condición de transversalidad dice que el valor de los activos per cápita debe tender a cero cuando t va a infinito.

- La intuición es que los agentes optimizadores no quieren dejar ningún activo valioso al final. La utilidad aumentaría si esos activos son utilizados para aumentar el consumo.

La condición de transversalidad

- Recordemos que:

$$\dot{v} = -(r - n) \cdot v$$

- Integrando esta última expresión con respecto al tiempo obtenemos.

$$v(t) = v(0) \cdot \exp\left\{-\int_0^t [r(v) - n]\, dv\right\}$$

- El término $v(0)$ es positivo (recuerde que es igual a u'(c(0)) .
- Reemplazando esta última expresión en $\lim_{t \to \infty} [v(t) \cdot a(t)] = 0$, se obtiene:

La condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot\exp\left[-\int_0^t [r(v)-n]\,dv\right]\right\}=0$$

- La cantidad de activos por persona no pueden crecer a una tasa tan alta como (r-n). Los activos no pueden crecer a una tasa tan alta o mayor que r.

Función de consumo

- En primer lugar, estudiemos el término:

$$exp\left[-\int_0^t [r(v)]dv\right]$$

- Este corresponde al factor de valor presente que convierte una unidad de ingreso en el período t a una unidad de ingreso equivalente en el período 0.
- Si $r(v)$ es constante, este término sería e^{-rt}.
- Si consideramos la tasa promedio de interés entre 0 y el periodo t obtenemos:

$$\bar{r}(t) = (1/t) \cdot \int_0^t r(v)\, dv$$

Función de consumo

- Para derivar la restricción presupuestaria intertemporal de los hogares consideremos la restricción presupuestaria:

$$\dot{a}_t = r(t) \cdot a(t) + w(t) - c(t) - n \cdot a(t)$$

- Solucionando esta ecuación diferencial para un período $T \geq 0$, obtenemos:

$$a(T) \cdot e^{-[\bar{r}(T)-n]T} + \int_0^T c(t) e^{-[\bar{r}(t)-n]t}\, dt = a(0) + \int_0^T w(t) e^{-[\bar{r}(t)-n]t}\, dt$$

Función de consumo

- Si $T \to \infty$, tenemos que:

$$\int_0^{\infty} c(t)e^{-[\bar{r}(t)-n]t}\,dt = a(0) + \int_0^{\infty} w(t)e^{-[\bar{r}(t)-n]t}\,dt = a(0) + \tilde{w}(0)$$

- El valor presente del consumo debe ser igual a la riqueza de los agentes definida como la suma de los activos iniciales y el valor presente de los ingresos del trabajo.

Función de consumo

- Integrando al ecuación de Euler entre 0 y t, obtenemos:

$$c(t) = c(0) \cdot e^{(1/\theta)\cdot[\bar{r}(t)-\rho]t}$$

- Y si sustituimos este resultado en la restricción presupuestaria intertemporal obtenemos:

$$c(0) = \mu(0) \cdot [a(0) + \widetilde{w}(0)]$$

- Donde $\mu(0)$ es la propensión marginal a consumir de la riqueza:

$$[1/\mu(0)] = \int_0^\infty e^{[\bar{r}(t)\cdot(1-\theta)/\theta-\rho/\theta+n]t}\,dt$$

Función de consumo

- Un aumento en la tasa de interés promedio, genera dos efectos en la propensión marginal a consumir:
  - Un aumento en la tasa de interés aumenta el costo de consumir hoy en relación al consumo futuro: efecto de sustitución intertemporal.
  - Un aumento en la tasa de interés genera un efecto ingreso que tiende aumentar el consumo en todos los períodos.
- ¿Cuál efecto domina? Si $\theta < 1, \mu(c)$ cae con $\bar{r}$ porque domina el efecto sustitución. Cuando θ es bajo, los agentes se preocupan menos del suavizamiento del consumo…
- Ojo que debemos sumar también el efecto de r sobre w(0). Si r sube, w(0) cae.

Empresas

- Las empresas producen bienes, pagan salarios por el insumo trabajo y pagan el arriendo del capital por el capital que utilizan como insumo.
- Cada empresa tiene acceso a la siguiente tecnología:

$$Y(t) = F[K(t), L(t), T(t)]$$

- Donde Y es producto, K corresponde al insumo capital, L es el insumo de trabajo y T es el nivel de la tecnología, la cual se asume crece a una tasa constante igual a $x \geq 0$. En consecuencia, $T(t) = e^{xt}$. Con T(0)=1.
- La función F cumple las condiciones neoclásicas discutidas en la sección pasada.

Empresas

- Tal como discutimos previamente, tendremos un estado estacionario con progreso tecnológico constante si y solo si el progreso tecnológico toma la forma de aumentar el trabajo.

$$Y(t) = F[K(t), T(t) \cdot L(t)]$$

- Definamos ahora el trabajo efectivo como el producto del trabajo y el nivel de tecnología.

$$\hat{L} \equiv L \cdot T(t)$$

Empresas

- Utilizando esta notación, la función de producción puede ser escrita como:

$$Y(t) = F\left[K(t), \hat{L}(t)\right]$$

- Y al igual que en la sección anterior, trabajaremos con variables que sean constantes en el estado estacionario.

$$\hat{y} \equiv Y/\hat{L}$$
$$\hat{k} \equiv K/\hat{L}$$

Empresas

- La función de producción puede ser escrita como:

$$\hat{y} = f(\hat{k})$$

- Donde f(0)=0. Los productos marginales de los insumos vienen dados por:

$$\partial Y/\partial K = f'(\hat{k})$$

$$\partial Y/\partial L = [f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})] \cdot e^{xt}$$

Empresas

- Y las condiciones de Inada aseguran que:

$$\lim_{\hat{k}\to 0} f'\left(\hat{k}\right) = \infty$$

$$\lim_{\hat{k}\to \infty} f'\left(\hat{k}\right) = 0$$

- Ahora bien, si R(t) es el precio de alquiler de una unidad de capital, el costo total de capital para una empresa es de RK.

Empresas

- No hay costos de instalación del capital.
- Asumimos que una unidad de producto puede ser transformada en una unidad de consumo o una unidad adicional del capital.
- La tasa de beneficio que obtienen los propietarios del capital (los hogares) viene dada por $R - \delta$. Donde δ es la tasa de depreciación del capital.
- Recuerde que los hogares pueden obtener una tasa r de los préstamos que pueden hacer a otros hogares.

Empresas

- Dado que capital y préstamos son perfectos sustitutos, $r = R - \delta$.
- La empresa representativa maximiza

$$\pi = F(K, \hat{L}) - (r + \delta) \cdot K - wL$$

- Lo que puede ser expresado como:

$$\pi = \hat{L} \cdot [f(\hat{k}) - (r + \delta) \cdot \hat{k} - we^{-xt}]$$

Empresas

- Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$f'(\hat{k}) = r + \delta$$

$$[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})]e^{xt} = w$$

- Para cualquier valor de $\hat{L}$, las utilidades serán cero.

Equilibrio

- Recuerde que estamos analizando una economía cerrada. En consecuencia $k = a$.

- Combinando lo anterior con la restricción presupuestaria de los hogares obtenemos:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}$$

- Esta ecuación diferencial es la que determina la evolución de $\hat{k}$ y de $\hat{y}$ en el tiempo (recuerde que $\hat{y} = f(\hat{k})$).

Equilibrio

- Para completar la descripción de las ecuaciones que describe la dinámica de la economía se necesita la ecuación diferencial que determina la evolución de $\hat{c}$.

- En el modelo de Solow-Swan, la evolución del consumo estaba determinada por el supuesto de que la tasa de ahorro era constante

$$\hat{c} = (1 - s) f\left(\hat{k}\right)$$

Equilibrio

- En el modelo de Ramsey sabemos que:

$$r = \rho - \left[\frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)}\right]\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)$$

- Como hemos asumido que $u(c) = \frac{c^{(1-\theta)}-1}{(1-\theta)}$, sabemos que:

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = \left(\frac{1}{\theta}\right)(r - \rho)$$

Equilibrio

- Utilizando el resultado de que $r = f'(\hat{k}) - \delta$ y de que $\hat{c} = c \cdot e^{-xt}$, tenemos que:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]$$

- La ecuación anterior completa la descripción de la dinámica del modelo de Ramsey.

Equilibrio

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]$$

- Este sistema junto con la condición inicial para k(0) y la condición de transversalidad determinan las sendas en el tiempo para $\hat{c}$ y $\hat{k}$.

Equilibrio

- Recordando que:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot\exp\left[-\int_0^t [r(v)-n]\,dv\right]\right\}=0$$

- Y dado que $a = k$ y que $k = \widehat{k} \cdot e^{xt}$, tenemos que:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\hat{k}\cdot\exp\left(-\int_0^t [f'(\hat{k})-\delta-x-n]\,dv\right)\right\}=0$$

- El retorno al capital en estado estacionario (f'($\widehat{k}$ *)-δ) debe ser superior a la tasa de crecimiento de K en estado estacionario (x+n).

Estado estacionario

- Mostremos en primer lugar que $\hat{k}$ y $\hat{c}$ deben ser constantes en estado estacionario.
- Definamos primero que $(\gamma_{\hat{k}})^*$ es la tasa de crecimiento de $\hat{k}$ en estado estacionario y $(\gamma_{\hat{c}})^*$ es la tasa de crecimiento de $\hat{c}$ en estado estacionario.
- Entonces, $\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}$, en estado estacionario pasa a ser:

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + n + \delta) \cdot \hat{k} - \hat{k} \cdot (\gamma_{\hat{k}})^*$$

Estado estacionario

- Diferenciando la ecuación anterior con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{\hat{c}} = \dot{\hat{k}} \cdot \left[f'\left(\hat{k}\right) - \left(x + n + \delta + \left(\gamma_{\hat{k}}\right)^*\right)\right]$$

Estado estacionario

- Diferenciando la ecuación anterior con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{\hat{c}} = \dot{\hat{k}} \cdot \left[f'\left(\hat{k}\right) - \left(x + n + \delta + (\gamma_{\hat{k}})^*\right)\right]$$

- El término entre paréntesis es positivo (ver condición de transversalidad).
- En consecuencia, $(\gamma_{\hat{k}})^*$ y $(\gamma_{\hat{c}})^*$ deben tener el mismo signo.

Estado estacionario

- Si $(\gamma_{\hat{k}})^* > 0$, $\hat{k} \to \infty$ y$f'(\hat{k}) \to 0$. Pero recordemos que:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]$$

- Lo que implica que $(\gamma_{\hat{c}})^* < 0$. Lo que contradice que $(\gamma_{\hat{k}})^*$ y $(\gamma_{\hat{c}})^*$ tengan el mismo signo.
- El argumento es equivalente si $(\gamma_{\hat{c}})^* > 0$.
- La única posibilidad es que $(\gamma_{\hat{c}})^* = (\gamma_{\hat{k}})^* = 0$.
- Lo anterior implica que $\hat{k}$, $\hat{c}$ y $\hat{y}$ son constantes en el estado estacionario.

Estado estacionario

- Dinámica del sistema:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot [f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x]$$

- Estado estacionario:

$$\dot{\hat{k}} = 0 \rightarrow \hat{c}^* = f(\hat{k}^*) - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}^*$$

$$\dot{\hat{c}} = 0 \rightarrow f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x$$

$$y$$

$$\hat{c}^* = 0$$

Estado estacionario

- Tres potenciales estados estacionarios.
- $\hat{k}_{gold} > \hat{k}^*$. Mostrar a partir de la condición de transversalidad.
- Sobreahorro (ineficiente) no puede ocurrir en equilibrio. A diferencia de en el modelo de Solow-Swan.
- Reducción en ρ?
- Reducción en δ?

Estado estacionario

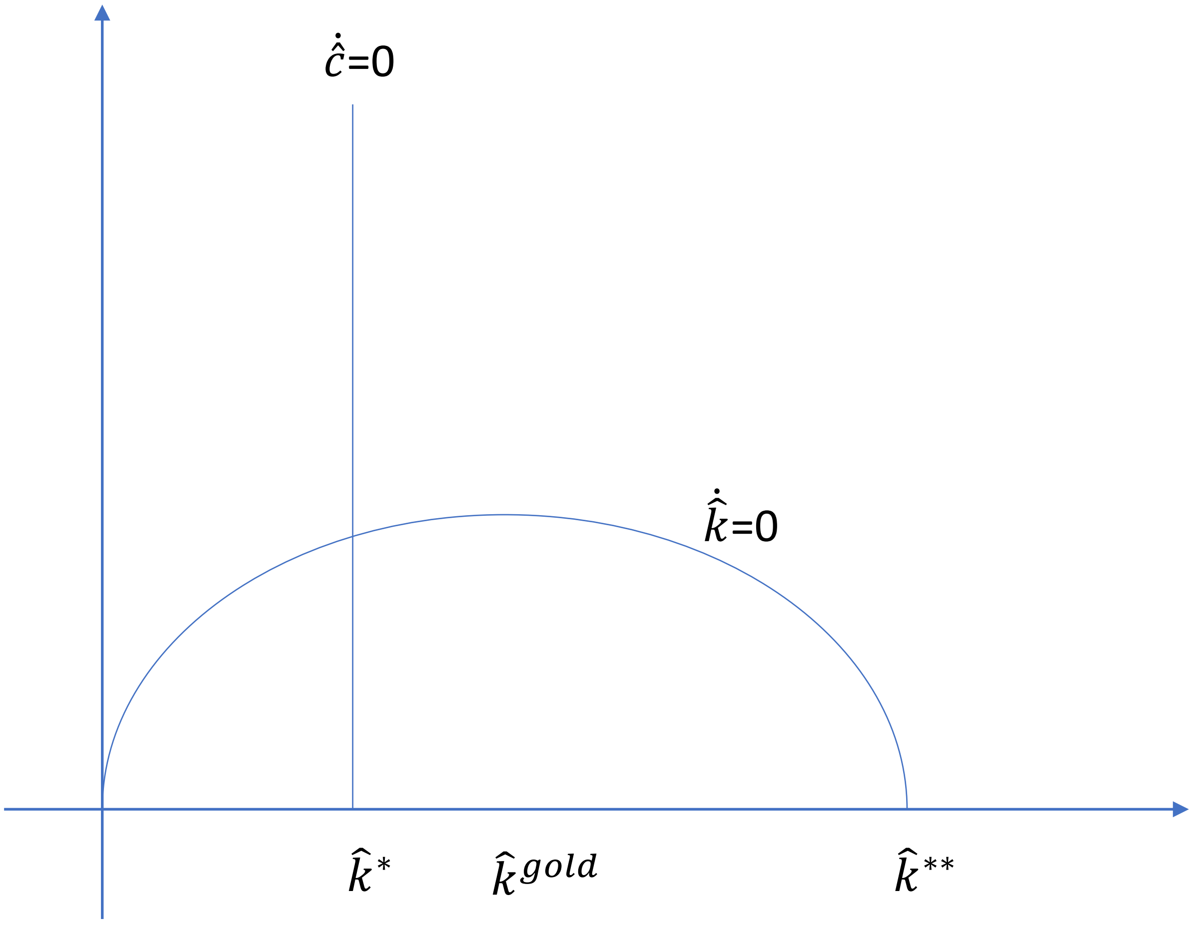


Diagrama de fase

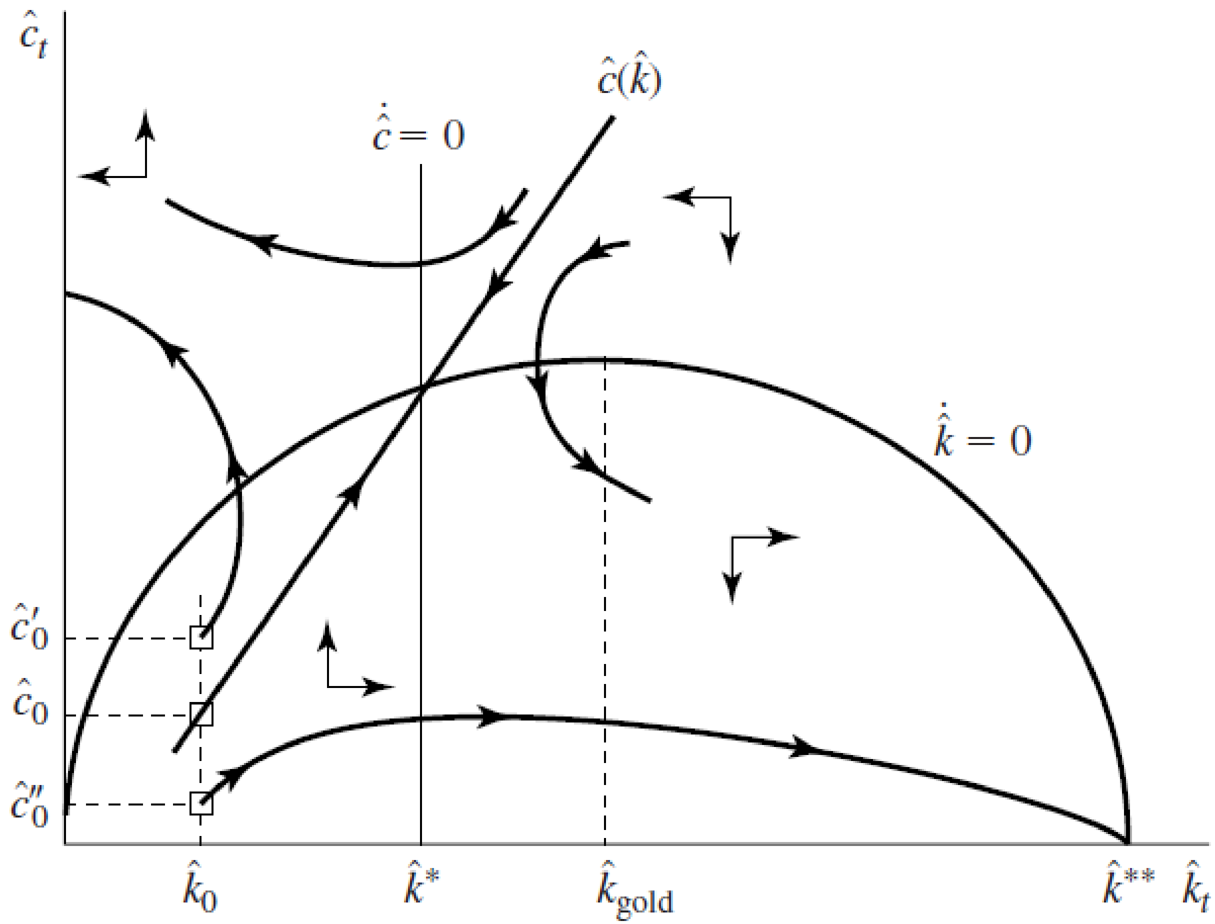


Diagrama de fase

- Su pongamos que partimos de un nivel de capital inicial menor a $\hat{k}^*$, digamos $\hat{k}_0$.
- Si el nivel inicial de consumo excede $\hat{c}_0$, la tasa de ahorro inicial es muy baja para que la economía permanezca en la trayectoria estable que converge al nivel de capital $\hat{k}^*$. La trayectoria eventualmente corta al locus $\dot{\hat{k}} = 0$. Después de esto, el consumo sigue subiendo pero $\hat{k}$ comienza a disminuir. En tiempo finito la senda corta al eje vertical. En ese momento $\hat{k} = 0$. Dado que $\hat{y} = 0$, el consumo debe ir a cero en ese punto. Pero este salto viola la condición de primer orden del consumo. No es un equilibrio en consecuencia.
- La trayectoria donde el nivel de consumo inicial es menor que $\hat{c}_0$, viola la condición de transversalidad ($f'(\hat{k}) - \delta$ cae por debajo de $x + n$.

La importancia de la condición de transversalidad

- Supongamos que el mundo se acaba en el período $T > 0$.
- La función de utilidad viene dada ahora por:

$$U = \int_0^T u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt$$

- Y la condición de no Ponzi es en este caso:

$$a(t) \cdot exp\left[-\int_0^T [r(v) - n] dv\right] \geq 0$$

- La restricción presupuestaria sigue siendo la misma del inicio de la página 14.

La importancia de la condición de transversalidad

- Las condiciones de optimización son idénticas al problema de horizonte infinito, excepto por la condición de transversalidad (ver apéndice 1.3 de B&S), la cual es ahora:

$$a(T) \cdot exp\left[-\int_0^T [r(v) - n]dv\right] = 0$$

- Lo anterior implica que $a(T) = 0$ dado que el término exponencial no puede ser cero en tiempo finito.

La importancia de la condición de transversalidad

- El problema de las firmas es el mismo que antes y el equilibrio en el mercado de activos requiere que $a(t) = k(t)$.

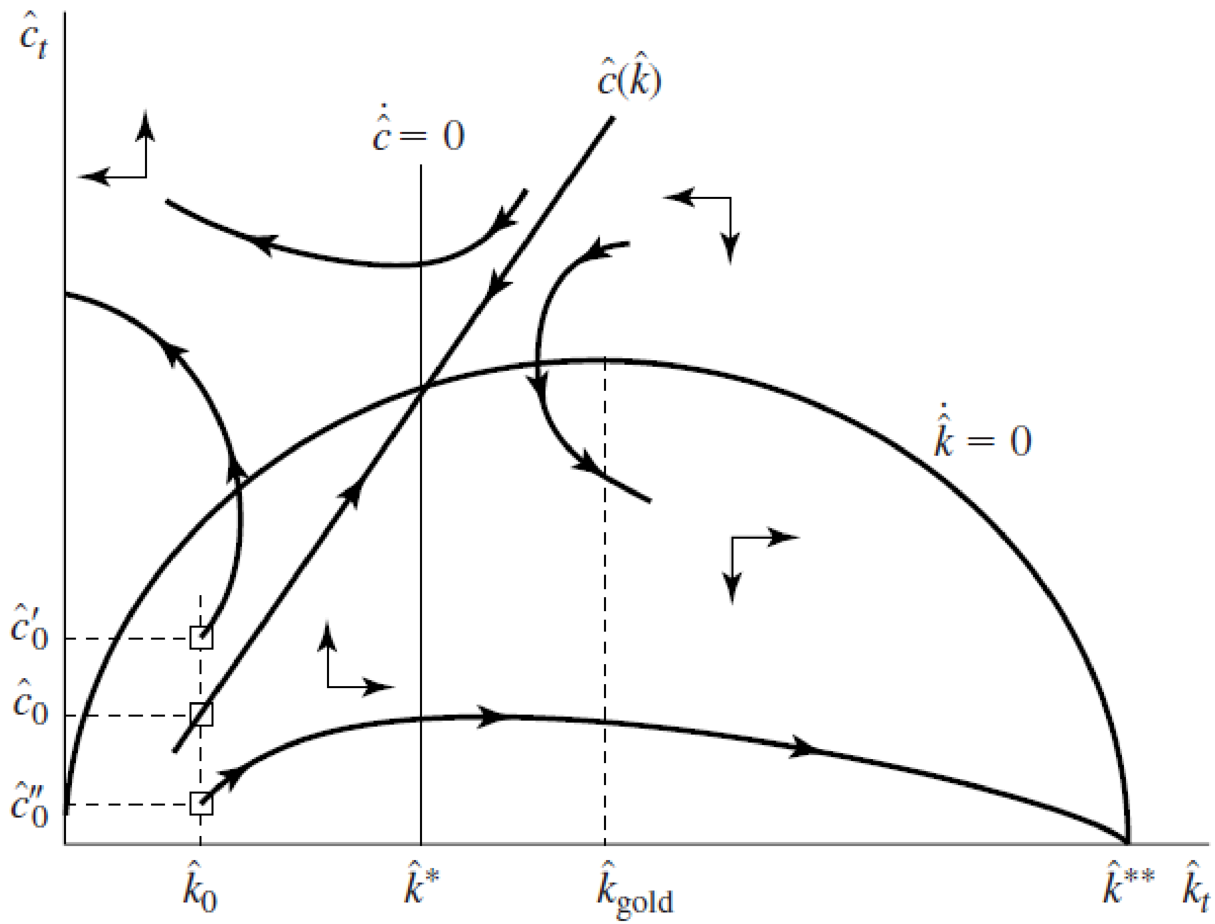
- Lo anterior implica que la condición de transversalidad puede ser escrita como $\hat{k}(T) = 0$.

- Las condiciones de equilibrio general aun vienen dadas por las ecuaciones de la página 41 por lo que la representación gráfica de estas ecuaciones es idéntica a la figura analizada en la página 50.

La importancia de la condición de transversalidad

- La elección de $\hat{c}(0)$ requiere en consecuencia que el stock de capital sea exactamente igual a cero en el momento T.
- En consecuencia, la trayectoria estable (stable arm) no es un equilibrio. Lo mismo ocurre con cualquier nivel inicial menor al consumo del stable arm.
- La trayectoria de equilibrio en este caso requiere que el nivel de consumo inicial sea estrictamente mayor al nivel de consumo del stable arm.

La importancia de la condición de transversalidad



La forma de la trayectoria estable

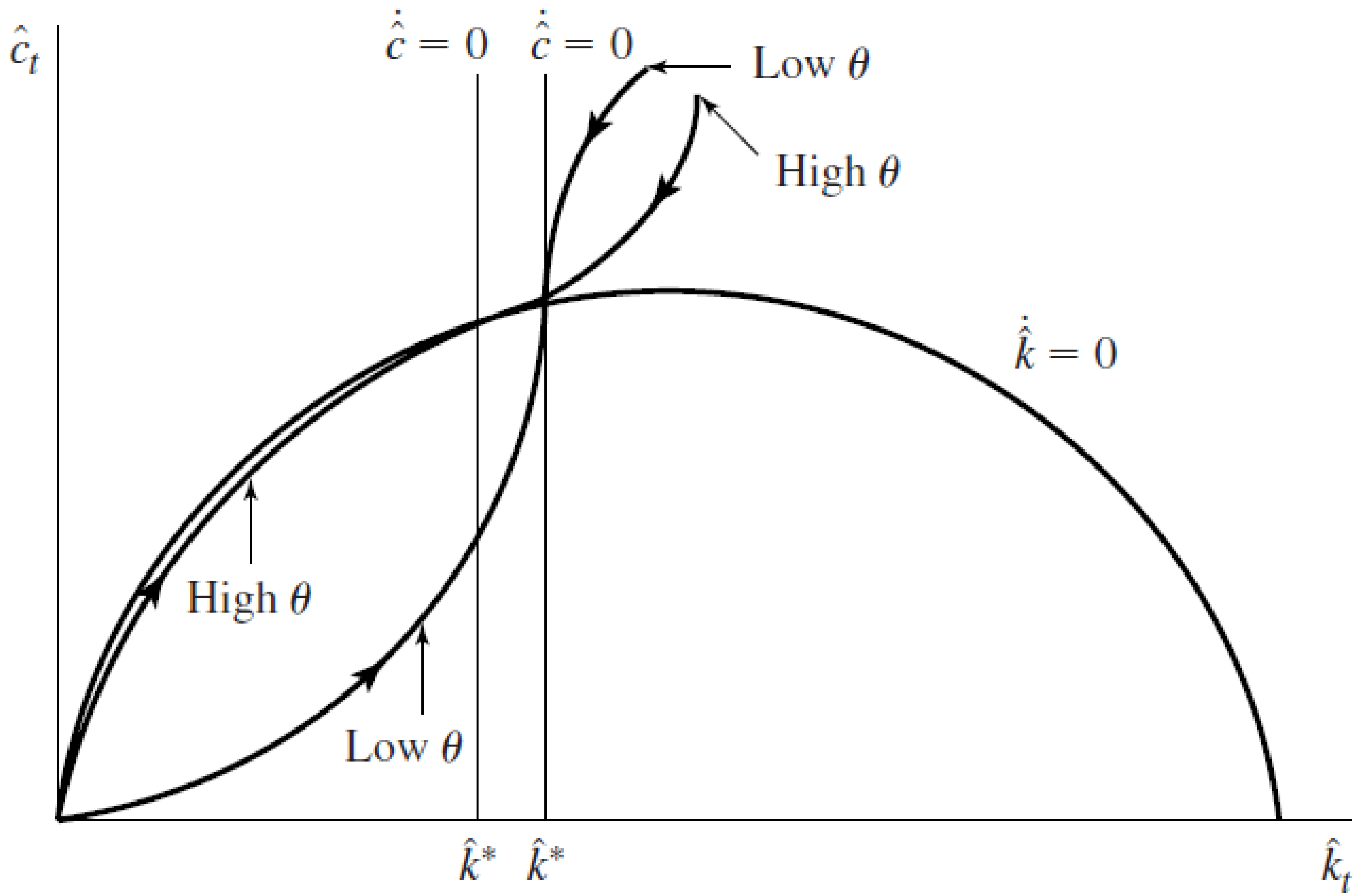
- La trayectoria estable antes analizada expresa el equilibrio de $\hat{c}$ en función de $\hat{k}$. Esta es la policy function, que relaciona el valor óptimo de la variable de control $\hat{c}$ con la variable de estado $\hat{k}$.
- Su forma depende de los parámetros del modelo.
- Consideremos el caso de θ. Si este parámetro es elevado, implica que los agentes tienen preferencias muy fuertes por el suavizamiento de consumo.
- En este caso, la trayectoria estable estará muy pegada a la curva $\dot{\hat{k}} = 0$. Dado que el nivel de inversión será menor, la transición al estado estacionario tomará más tiempo.

La forma de la trayectoria estable

- Si el valor de θ es bajo, los agentes están más disponibles a posponer consumo en respuesta a retornos mayores.

- En este caso, la trayectoria estable será muy plana para valores pequeños de $\hat{k}$. Dado que el nivel de inversión será mayor, la transición al estado estacionario tomará menos tiempo.

La forma de la trayectoria estable



Comportamiento tasa de ahorro

- La tasa de ahorro s es igual a $1 - \frac{\hat{c}}{f(\hat{k})} = 1 - \hat{c}/\hat{y}$. En el modelo Solow-Swan, esta tasa era constante. En el modelo de Ramsey será determinada óptimamente por los agentes.

- Recordemos que el comportamiento de la tasa de ahorro involucra tanto efectos de sustitución como efectos ingreso.

Comportamiento tasa de ahorro

- Cuando $\hat{k}$ comienza a aumentar, $f'(\hat{k})$comienza a caer lo que reduce la tasa de interés y por lo tanto el atractivo a ahorrar. Lo anterior tiende a reducir la tasa de ahorro cuando la economía comienza a desarrollarse.

- Por otra parte, el ingreso por trabajador efectivo, $f(\hat{k})$, está lejos de su valor de estado estacionario (permanente) cuando $\hat{k}$ es bajo. Los hogares desean suavizar su consumo acorde a un mayor ingreso permanente y consumir mucho más que su ingreso efectivo cuando son pobres. En este caso, la tasa de ahorro es baja y conforme el país comienza a desarrollarse, comienza a crecer.

Comportamiento de la tasa de ahorro

- El comportamiento de la tasa de ahorro dependerá en consecuencia de cual efecto domina.
- Asumiremos una función Cobb-Douglas para el análisis: $Y = K^{\alpha}(T \cdot L)^{1-\alpha}$.
- Resolviendo el estado estacionario encontramos que la tasa de ahorro en estado estacionario viene dada por:

$$s^* = \alpha \cdot (x + n + \delta)/(\delta + \rho + \theta \cdot x)$$

Comportamiento de la tasa de ahorro

$$s^* = \alpha \cdot (x + n + \delta)/(\delta + \rho + \theta \cdot x)$$

- Recuerde que la condición de transversalidad implica que $\rho > n + (1-\theta)x$, lo que implica que $s^* < \alpha$.
- Para analizar el comportamiento de la tasa de ahorro $1 - \hat{c}/\hat{y}$, vamos a reescribir el modelo en términos de las variables $\hat{k}$ y $\hat{c}/\hat{y}$.

Comportamiento de la tasa de ahorro

- El sistema en términos de $\hat{k}$ y $\hat{c}/\hat{y}$ viene dado por:

$$\frac{\dot{(\hat{c}/\hat{y})}}{(\hat{c}/\hat{y})} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x\right] - \alpha\left[\hat{k}^{\alpha-1} - \left(\frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right)\cdot\hat{k}^{\alpha-1} - (x+n+\delta)\right]$$

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \hat{k}^{\alpha-1} - \left(\frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right)\hat{k}^{\alpha-1} - (x+n+\delta)$$

Comportamiento de la tasa de ahorro

- Consideremos el locus $\frac{\dot{\overline{(\hat{c}/\hat{y})}}}{(\hat{c}/\hat{y})} = 0$. En este caso:

$$\left(\frac{\hat{c}}{\hat{y}}\right) = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) + \left\{\frac{(\delta + \rho + \theta x)}{\theta\alpha} - (x + n + \delta)\right\} \hat{k}^{1-\alpha}$$

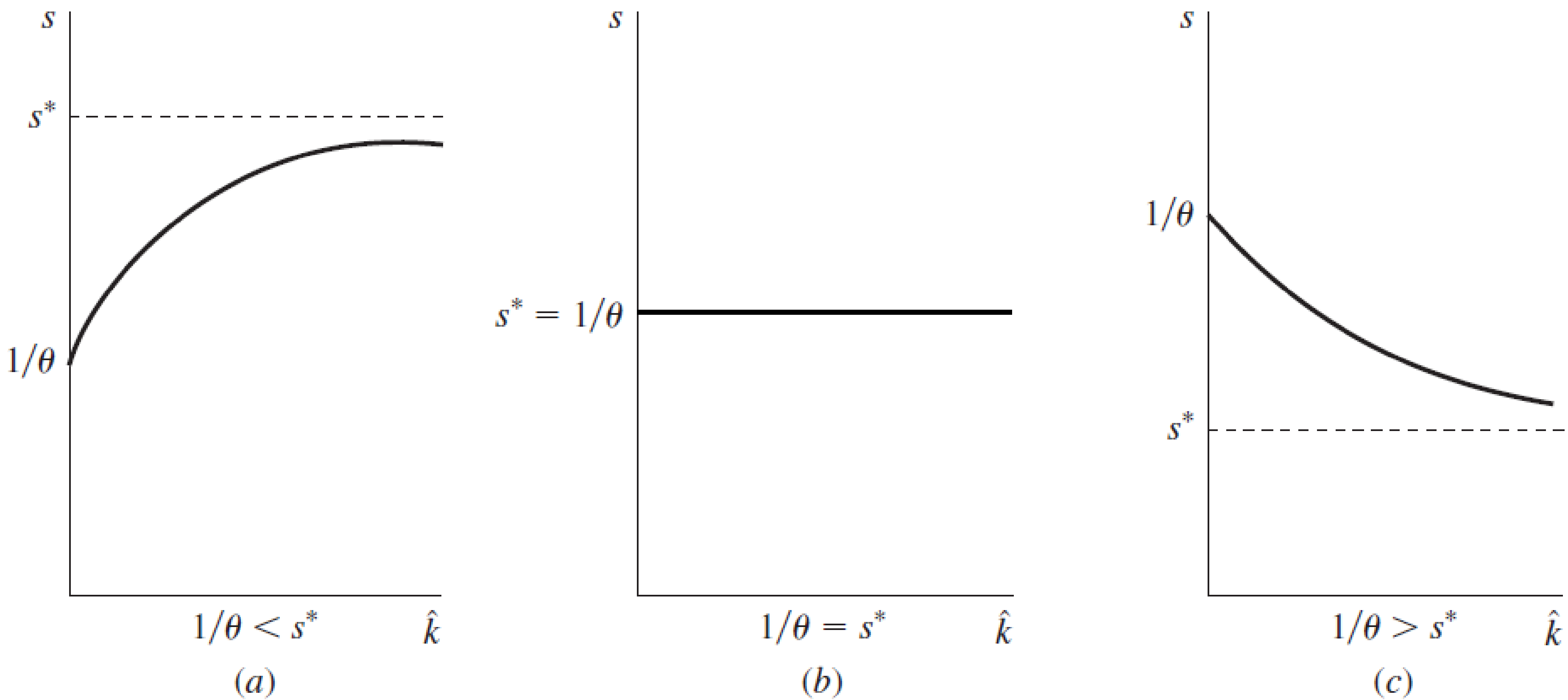
- Este locus tiene pendiente positiva si:

$$\left\{\frac{(\delta + \rho + \theta x)}{\theta\alpha} - (x + n + \delta)\right\} > 0$$

Comportamiento de la tasa de ahorro

- Lo anterior implica que el ahorro tiene una trayectoria decreciente si $s^* < \frac{1}{\theta}$.
- Si $s^* = \frac{1}{\theta}$ entonces la tasa de ahorro es constante al igual que en el modelo de Solow-Swan (efecto riqueza y sustitución se cancelan). Pero en este caso la tasa de ahorro no puede ser ineficiente dinámicamente como en el caso del modelo de Solow-Swan.
- Si $s^* > \frac{1}{\theta}$, la tasa de ahorro es creciente.

Comportamiento de la tasa de ahorro



Velocidad de convergencia

- Volvamos nuevamente a nuestros sistema de ecuaciones diferenciales que caracterizan el modelo de Ramsey:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]$$

- Lo que haremos para estudiar la velocidad del convergencia será log-linearizar el sistema en torno al estado estacionario asumiendo que la función de producción es Cobb-Douglas.

Velocidad de convergencia

- El resultado de lo anterior nos entrega la siguiente expresión para la evolución de $\hat{y}$:

$$\log[\hat{y}(t)] = e^{-\beta t} \cdot \log[\hat{y}(0)] + (1 - e^{-\beta t}) \cdot \log(\hat{y}^*)$$

- donde β>0 y corresponde a la velocidad de convergencia. Esta variable viene dada por:

$$2\beta = \left\{\zeta^2 + 4 \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right) \cdot (\rho + \delta + \theta x) \cdot \left[\frac{\rho + \delta + \theta x}{\alpha} - (n + x + \delta)\right]\right\}^{1/2} - \zeta$$

- Con $\zeta = \rho - n - (1-\theta)x > 0$.

Velocidad de convergencia

- Con una tasa de ahorro constante, podemos mostrar que la velocidad de convergencia β viene dada por:

$$\beta = (1 - \alpha) \cdot (x + n + \delta)$$

Políticas

- El crecimiento del ingreso per cápita y del consumo per cápita son determinado exógenamente.
- Pero el nivel del ingreso, depende de θ, ρ, δ, n y de la forma de la función $f(\cdot)$.
- Las causas cercanas de diferencias en el ingreso per cápita entre países vienen dadas por diferencias en preferencias y tecnología.
- Pero es difícil reconciliar las diferencias en el ingreso per cápita sobre la base de estos factores solamente (o principalmente).

Políticas

- Factores tales como instituciones o políticas que afectan la acumulación de capital físico en el contexto de este modelo pueden jugar un papel muy relevante.
- Para analizar lo anterior podemos introducir impuestos a nuestro análisis.
- Consideremos una política de impuestos lineal: a los retornos al capital netos de depreciación se les cobra una tasa τ y lo que este impuesto recauda se devuelve a las familias en la forma de una transferencia.

Impuestos

- Recordemos que la dinámica del sistema:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]$$

- Donde $r = f'(\hat{k}) - \delta$.

Impuestos

- Con el impuesto, la tasa de interés que enfrentan los agentes pasa a ser:

$$r = (1-\tau)\left(f'\left(\hat{k}\right) - \delta\right)$$

- Lo anterior implica que:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[(1-\tau)\left(f'\left(\hat{k}\right) - \delta\right) - \rho - \theta x\right]$$

Impuestos

- En consecuencia, tenemos que:

$$f'\left(\hat{k}^*\right) = \delta + \frac{\rho + \theta x}{1 - \tau}$$

- Podemos concluir que un mayor impuesto reduce $\hat{k}^*$.
- Un aumento en el impuesto reduce la acumulación de capital y por lo tanto reduce el ingreso per cápita.
- Pero no hemos explicado porque un gobierno querría cobrar un impuesto al capital.

Disminución en impuesto al capital