PAUTA CONTROL III - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2024

Pregunta 1. Considere un modelo de emparejamiento bilateral uno-a-uno entre agentes de los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ en el cual las preferencias cumplen

$\succ_{a_1}$	$\succ_{a_2}$	$\succ_{a_3}$	$\succ_{b_1}$	$\succ_{b_2}$	$\succ_{b_3}$
b_1	b_2	b_3	a_3	a_1	a_1
b_2	b_3	b_2	a_1	a_2	a_3
b_3	b_1	b_1	a_2	b_2	a_2
a_1	a_2	a_3	b_1	a_3	b_3

(i) **(15 puntos)** Justificando detalladamente sus argumentos, encuentre los emparejamientos que están en el núcleo de este mercado.

Roth y Sotomayor (1985) demostraron que, en modelos bilaterales uno-a-uno con preferencias estrictas, el núcleo y el conjunto de emparejamientos estables coinciden. Por eso, para caracterizar el núcleo es suficiente encontrar los emparejamientos estables. Comenzaremos escogiendo un lado del mercado y aplicando el *algoritmo de aceptación diferida*, el cual sabemos que siempre implementa emparejamientos estables. Cuando el grupo A hace las propuestas, en la primera etapa del algoritmo cada a_i le propone a b_i. Ninguna propuesta es rechazada y se genera el emparejamiento $\mu = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$. Cuando el grupo B hace las propuestas, en la primera etapa del algoritmo b_1 le propone a a_3, mientras que b_2 y b_3 le proponen a a_1. Se forman las parejas (a_1, b_2) y (a_3, b_1). La oferta de b_3 es rechazada. En la segunda etapa, b_3 le hace una propuesta a a_3, la cual es aceptada. Se mantiene la pareja (a_1, b_2) y se forma (a_3, b_3). Eso hace que la oferta hecha por b_1 en la primera etapa sea finalmente rechazada. En la tercera etapa, b_1 le hace una propuesta a a_1, la cual es aceptada y lleva al rechazo de la oferta hecha por b_2 en la primera etapa. Con esto, se mantiene la pareja (a_3, b_3) y se forma (a_1, b_1). Finalmente, en la cuarta etapa, b_2 le hace una oferta a a_2, la cual es aceptada. Se genera el emparejamiento $\mu = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$.

Concluimos que, al implementar el algoritmo de aceptación diferida, se genera el mismo emparejamiento estable independiente del lado del mercado que hace las propuestas. Eso nos asegura que μ es el único emparejamiento estable, pues μ es al mismo tiempo el peor y el mejor emparejamiento estable para cada agente en $A \cup B$. Por lo tanto, μ es el único elemento en el núcleo. □

(ii) **(15 puntos)** Asumiendo que los agentes de A son colegios con un cupo y los agentes de B son estudiantes, determine si algún estudiante tiene incentivos a reportar preferencias falsas cuando se implementa el mecanismo de Boston y los otros estudiantes/colegios reportan sus verdaderas preferencias. En caso afirmativo, identifique a ese estudiante y describa uno de sus posibles reportes falsos.

Si implementamos el mecanismo de Boston, asumiendo que los agentes de A son colegios con un cupo y los agentes de B son estudiantes, en la primera etapa el colegio a_1 recibe propuestas de los estudiantes b_2 y b_3, mientras que el colegio a_3 recibe una propuesta del estudiantes b_1. El colegio a_1 acepta a b_2 y ambos salen del mercado. El colegio a_3 acepta la propuesta de b_1 y ambos salen del mercado. En la segunda etapa, el estudiante b_3 le hace una propuesta al colegio a_2 (el único colegio que queda en la plataforma), la cual es aceptada. Se genera el emparejamiento $\eta = \{(a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1)\}$.

Note que el estudiante b_3 quedó en el colegio a_2, su peor alternativa. El problema es que b_3 no era lo suficientemente competitivo como para ser aceptado en el colegio a_1 y mientras postulaba a ese colegio se llenaron los cupos en su segunda mejor opción, el colegio a_3. Por lo tanto, asumiendo que los otros colegios/estudiantes reportan sus verdaderas preferencias, el estudiante b_3 tiene incentivos a reportar una preferencia en la cual pone a a_3 como su mejor alternativa. Con esta estrategia, b_3 postula a a_3 en la primera etapa del mecanismo de Boston (junto con el estudiante b_1). Como a_3 considera a b_3 su mejor alternativa, lo acepta definitivamente. $\square$

Pregunta 2 (15 puntos)

Considere un modelo de emparejamiento bilateral uno-a-uno entre agentes de $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Denote por $\mathcal{P}$ al dominio de preferencias caracterizado por los perfiles $(\succ_h)_{h \in A \cup B}$ tales que:

- Para cada $a \in A$, $\succ_a$ es completa, transitiva, estricta y está definida sobre B.
- Para cada $b \in B$, $\succ_b$ es completa, transitiva, estricta y está definida sobre $A \cup \{b\}$.

Esto es, en el dominio $\mathcal{P}$ los agentes de A consideran admisibles a todas sus potenciales parejas.

Dado un lado del mercado $H \in \{A, B\}$ y un perfil de preferencias $(\succ_h)_{h \in A \cup B} \in \mathcal{P}$, denote por $\mathrm{AD}_H[(\succ_h)_{h \in A \cup B}]$ al emparejamiento que se obtiene al aplicar el algoritmo de aceptación diferida al mercado $[A, B, (\succ_h)_{h \in A \cup B}]$ cuando los agentes de H hacen las propuestas.

Sea $(\widehat{\succ}_b)_{b \in B}$ un perfil de preferencias para los agentes en B tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la relación de preferencias $\widehat{\succ}_{b_i}$ posiciona al agente a_i como la mejor alternativa.

Demuestre que el siguiente mecanismo es *strategy-proof* para los agentes en A en el dominio de preferencias $\mathcal{P}$:

$$\Phi[(\succ_h)_{h \in A \cup B}] = \begin{cases} \mathrm{AD}_B[(\succ_h)_{h \in A \cup B}], & \text{cuando } \succ_b = \widehat{\succ}_b \text{ para todo } b \in B; \\ \mathrm{AD}_A[(\succ_h)_{h \in A \cup B}], & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Para demostrar que Φ es strategy-proof, dado $(\succ_h)_{h \in A \cup B} \in \mathcal{P}$ debemos analizar dos casos:

- Cuando $(\succ_b)_{b \in B} = (\widehat{\succ}_b)_{b \in B}$, Φ implementará el emparejamiento que se obtiene al aplicar el algoritmo de aceptación deferida con los agentes de B haciendo las propuestas. Además, el algoritmo solo requerirá una etapa para ser implementado, pues agentes diferentes de B le harán propuestas a individuos diferentes de A, quienes por su lado consideran a todos los agentes de B admisibles. Así, ningún agente de A puede cambiar el resultado reportando preferencias falsas, pues los agentes de B continuarán buscando mejores alternativas diferentes y ninguna propuesta puede ser considerada inadmisible, pues estamos en el dominio $\mathcal{P}$.
- Cuando $(\succ_b)_{b \in B} \neq (\widehat{\succ}_b)_{b \in B}$, Φ implementará el emparejamiento que se obtiene al aplicar el algoritmo de aceptación deferida con los agentes de A haciendo las propuestas. Como un cambio en la preferencia de algún agente de A no afecta el hecho que $(\succ_b)_{b \in B} \neq (\widehat{\succ}_b)_{b \in B}$ y el mecanimo AD_A es strategy-proof para los agentes de A (Dubins & Freedman, 1981), sigue que ningún agente de A podrá mejorar su situación reportando preferencias falsas.

Por lo tanto, independiente de las preferencias reportadas por los otros agentes, ningún individuo en A tiene incentivos a reportar preferencias falsas. $\square$

Pregunta 3 (15 puntos)

Considere un mercado bilateral uno-a-uno entre un conjunto F de firmas y un conjunto T de trabajadores. Hay mil firmas y mil trabajadores. Sea $\succ_f$ la relación de preferencias de $f \in F$, la cual es completa, transitiva, estricta y está definida sobre T. Análogamente, sea $\succ_t$ la relación de preferencias de $t \in T$, la cual es completa, transitiva, estricta y está definida sobre F.

Dado un perfil de preferencias $\succ = (\succ_h)_{h \in F \cup T}$, denotaremos por $\mathrm{AD}[\succ]$ al emparejamiento que se obtiene al aplicar el algoritmo de aceptación diferida con los trabajadores haciendo las propuestas. Además, sea $\Omega[\succ]$ el emparejamiento que se obtiene cuando luego de obtener $\mathrm{AD}[\succ]$ se aplica el algoritmo *Top Trading Cycles* (TTC) tratando a las firmas como objetos y a la firma con la cual está emparejado $t \in T$ en $\mathrm{AD}[\succ]$ como su asignación inicial.

Demuestre que $\Omega[\succ] = \mathrm{AD}[\succ]$ si y solamente si $\mathrm{AD}[\succ]$ es Pareto eficiente para los trabajadores.

Si $\Omega[\succ] = \mathrm{AD}[\succ]$, entonces cuando aplicamos el algoritmo TTC a partir de las asignaciones iniciales determinadas por el emparejamiento $\mathrm{AD}[\succ]$, todos los trabajadores se mantienen emparejados con las mismas firmas. Luego, $\mathrm{AD}[\succ]$ está en el núcleo del mercado en el cual cada trabajador t está inicialmente asociado a la firma $f_t = \mathrm{AD}[\succ](t)$. En particular, el emparejamiento $\mathrm{AD}[\succ]$ no puede ser bloqueado por la coalición T. Esto es, el emparejamiento $\mathrm{AD}[\succ]$ es Pareto eficiente para los trabajadores.

Recíprocamente, asuma que $\mathrm{AD}[\succ]$ es Pareto eficiente para los trabajadores. Si $\Omega[\succ] \neq \mathrm{AD}[\succ]$, como el resultado de TTC es individualmente racional, al menos un trabajador mejora su situación en $\Omega[\succ]$ en relación a $\mathrm{AD}[\succ]$, sin que ninguno de ellos empeore. Esto contradice la Pareto eficiencia de $\mathrm{AD}[\succ]$. $\square$