Guía 3

Nombre: Alberto Belmar
Rut: 19.801.271-8

Ahorro por precaución y límite natural de la deuda

(a)

Respuesta

Por los datos que nos entrega el enunciado, sabemos que se cumple $\beta R = 1$, por lo tanto, lo que nos piden demostrar es:

$$\begin{aligned} u'(Y_t) &= \beta R E_t u'(Y_{t+1}) \\ &= E_t u'(Y_{t+1}) \end{aligned}$$

Ahora bien, usando la expresión para utilidad, sabemos que $u'(Y_t) = Y_t^{-\gamma}$, por ende,

$$Y_t^{-\gamma} = E_t Y_{t+1}^{-\gamma}$$

Para encontrar la esperanza de Y_{t+1} ocupamos el *hint* que nos entrega el enunciado:

$$\begin{aligned} E_t Y_{t+1}^{-\gamma} &= Y_t^{-\gamma} e^{-\gamma\mu} E_t(e^{-\gamma\sigma\varepsilon_{t+1}}) \\ &= Y_t^{-\gamma} e^{-\gamma\mu} e^{\frac{1}{2}\gamma^2\sigma^2} \end{aligned}$$

Lo anterior, dado que el término $-\gamma\sigma\varepsilon_{t+1}$ tiene esperanza 0 y varianza $(\gamma\sigma)^2$. Por último, como $\mu = \frac{1}{2}\gamma\sigma^2$, tendremos que:

$$E_t Y_{t+1}^{-\gamma} = Y_t^{-\gamma}$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad $Y_t^{-\gamma} = Y_t^{-\gamma}$ y se prueba el resultado solicitado.

(b)

Respuesta

Dada la información que nos aporta el enunciado, se cumple que $A_t = A_{t+1} = 0$. Reemplazando esto en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} 0 &= R(0 + Y_t - C_t) \\ RC_t &= RY_t \\ C_t &= Y_t \end{aligned}$$

La expresión anterior nos indica que no existe ahorro, es decir, todo lo que el consumidor recibe se lo consume. Luego, esta trayectoria será óptima si satisface la ecuación de Euler, que fue lo que se mostró en la parte anterior.

(c)

Respuesta

La distribución de los ingresos viene dada por:

$$Y_{t+1} = Y_t e^{(\mu+\sigma\varepsilon_{t+1})}$$

Matemáticamente, la expresión $e^{(\mu+\sigma\varepsilon_{t+1})}$ tiende a 0 cuando $\varepsilon_{t+1} \to -\infty$, es decir, cuando ε_{t+1} toma valores negativos muy grandes. Sin embargo, la expresión para epsilon nunca es negativa. Por lo tanto, el mínimo ingreso será $Y_t \cdot 0 \to 0$, que se da cuando $\varepsilon_{t+1} \to -\infty$.

Ahora bien, como el valor presente de 0 es el mismo número, a partir de la restricción de NBL, tendremos que:

$$A_t \geq 0$$

Finalmente, la solución de la parte anterior cumple la condición, puesto que la restricción está activa.

(d)

Respuesta

Como vimos anteriormente, la trayectoria óptima no conlleva ahorro, y por tanto, no hay ahorro por precaución.

Para que hubiese ahorro, tomando el modelo de equivalencia cierta, tendría que ocurrir que $C_t^{EC} - C_t > 0$ y para ello, el agente tendría que endeudarse, es decir, $A_t < 0$ (pues como vimos se consume todo su ingreso), pero esto no cumple con la condición de NBL, por lo que no es posible tener ahorro por precaución en este modelo.

2. Descuento hiperbólico y activos ilíquidos

(a)

Respuesta

Debemos notar que el individuo está consciente de la inconsistencia de su comportamiento, por lo tanto, es sofisticado. Luego, la forma de resolver el problema es por medio de inducción hacia atrás.

- **t=3**: En este período, el individuo se consume todo lo que tiene, pues sabe que no le quedan más períodos para hacerlo.
- **t=2**: El individuo resuelve el siguiente problema para este período:

$$\max_{c_2,c_3} \; log(c_2) + \eta log(c_3)$$
$$s.a. \; c_2 + c_3 = w - \bar{c}_1$$

donde $\bar{c}_1$ es el consumo que escoge el individuo en el período 1 (que se toma como dado en el período 2). Resolviendo:

$$\mathcal{L} = log(c_2) + \eta log(c_3) - \lambda(c_2 + c_3 - w + \bar{c}_1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} &= \frac{1}{c_2} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_3} &= \frac{\eta}{c_3} - \lambda = 0\end{aligned}$$

Despejando λ de ambas ecuaciones:

$$\frac{1}{c_2} = \frac{\eta}{c_3}$$

Por lo tanto, la ecuación de Euler nos quedaría:

$$\eta c_2 = c_3$$

Reemplazando en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned}c_2 + \eta c_2 &= w - \bar{c}_1 \\ c_2^* &= \frac{w - \bar{c}_1}{1+\eta}\end{aligned}$$

Lo anterior implica que:

$$c_3^* = \frac{\eta(w - \bar{c}_1)}{1+\eta}$$

- **t=1**: El problema a resolver por el individuo sofisticado en este período es:

$$\max_{c_1} \; log(c_1) + \eta log(c_2(c_1)) + \eta log(c_3(c_1))$$

Resolviendo:

$$\frac{\partial}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{\eta}{c_2} c_2'(c_1) + \frac{\eta}{c_3} c_3'(c_1) = 0$$

Reemplazando los términos $c_2'(c_1)$ y $c_3'(c_1)$ por las derivadas de los términos encontrados para c_2^* y c_3^* con respecto a c_1; y también reemplazando c_2 y c_3 de la expresión anterior por c_2^* y c_3^*, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_1} + \eta \cdot \frac{1+\eta}{w - c_1} \cdot \frac{-1}{1+\eta} + \eta \cdot \frac{1+\eta}{\eta(w-c_1)} \cdot \frac{-\eta}{1+\eta} &= 0 \\ \frac{1}{c_1} - \frac{\eta}{w-c_1} - \frac{\eta}{w-c_1} &= 0 \\ \frac{1}{c_1} &= \frac{2\eta}{w-c_1} \\ w - c_1 &= 2\eta c_1 \\ c_1^{**} &= \frac{w}{1+2\eta}\end{aligned}$$

Reemplazando c_1^{**} en los términos encontrados para c_2^* y c_3^*, llegamos a:

$$\begin{aligned}c_2^{**} &= \frac{w}{1+\eta} - \frac{w}{(1+\eta)(1+2\eta)} \\ &= \frac{2\eta w}{(1+\eta)(1+2\eta)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c_3^{**} &= \frac{\eta w}{1+\eta} - \frac{\eta w}{(1+\eta)(1+2\eta)} \\ &= \frac{2\eta^2 w}{(1+\eta)(1+2\eta)} \end{aligned}$$

Donde la trayectoria óptima de consumo cuando el activo ilíquido no está disponible viene dada por c_1^{**}, c_2^{**} y c_3^{**}

(b)

Respuesta

El individuo en el período $t = 1$ va a maximizar:

$$\text{máx}_{c_1,c_2,c_3} \; log(c_1) + \eta log(c_2) + \eta log(c_3)$$
$$s.a. \; c_1 + c_2 + c_3 = w$$

Ocupando Lagrange:

$$\mathcal{L} = log(c_1) + \eta log(c_2) + \eta log(c_3) - \lambda(c_1 + c_2 + c_3 - w)$$

Derivando con respecto a $c_1, \; c_2, \; c_3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} &= \frac{1}{c_1} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} &= \frac{\eta}{c_2} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_3} &= \frac{\eta}{c_3} - \lambda = 0 \end{aligned}$$

Luego, despejando λ de las tres ecuaciones anteriores:

$$\frac{1}{c_1} = \frac{\eta}{c_2} = \frac{\eta}{c_3}$$

Por lo que la ecuación de Euler quedaría:

$$\eta c_1 = c_2 = c_3$$

Reemplazamos esto en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} c_1 + \eta c_1 + \eta c_1 &= w \\ c_1(1+2\eta) &= w \\ c_1^{***} = \frac{w}{1+2\eta} \end{aligned}$$

Lo anterior, implica que $c_2^{***} = c_3^{***} = \frac{\eta w}{1+2\eta}$.

Para que los futuros yoes sigan este camino, el agente puede poner c_3 en el activo ilíquido en el período 1. En cuyo caso, los retornos para cada período serán: en **t=1**: c_3; en **t=2**: $(1-\rho)c_3$; en **t=3**: c_3.

Notar que, desde la perspectiva del período 1, el individuo no invertirá más ni menos que c_3^{***}, dado que al poner c_3^{***} junto a que el individuo en el período 2 no saque el retorno, provoca que en el tercer período el retorno sea c_3^{***}, por tanto, sigue en equilibrio. Para que esto ocurra, debe cumplirse la siguiente condición:

$$log(c_2^{***}) + \eta log(c_3^{***}) > log(\tilde{c}_2) + \eta log(\tilde{c}_3)$$

donde el la izquierdo de la ecuación es la utilidad del individuo en el período 2 si no vende el activo y el lado derecho es la utilidad en el período 2 si es que vende el activo.

Si el yo del período 2 saca el dinero del conjunto ilíquido, su riqueza será:

$$\begin{aligned}
\tilde{w} &= w - c_1 - c_3 + (1-\rho)c_3 \\
&= c_1 + c_2 + c_3 - c_1 - c_3 + (1-\rho)c_3 \\
&= c_2 + (1-\rho)c_3 \\
&= \frac{\eta w}{1+2\eta} + \frac{(1-\rho)\eta w}{1+2\eta} \\
&= \frac{(2-\rho)\eta w}{1+2\eta}
\end{aligned}$$

Así, el individuo del período 2 maximiza:

$$\begin{gathered}
\text{máx}_{c_2,c_3} \log c_2 + \eta \log c_3 \\
s.a \quad \tilde{w} = c_2 + c_3
\end{gathered}$$

El lagrangeano y las CPO serán:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &: \log c_2 + \eta \log c_3 + \lambda(\tilde{w} - c_2 - c_3) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} &= \frac{1}{c_2} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_3} &= \frac{\eta}{c_2} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \tilde{w} - c_2 - c_3 = 0
\end{aligned}$$

Las soluciones:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_2 &= \frac{\tilde{w}}{1+\gamma} = \frac{(2-\rho)w\eta}{(1+2\eta)(1+\eta)} \\
\tilde{c}_3 &= \frac{\tilde{w}\eta}{1+\eta} = \frac{(2-\rho)w\eta^2}{(1+2\eta)(1+\eta)}
\end{aligned}$$

Entonces, la condición será que:

$$\begin{aligned}
\log c_2^{***} + \eta \log c_3^{***} &> \log \tilde{c}_2 + \eta \log \tilde{c}_3 \\
\frac{w\eta}{1+2\eta}\left(\frac{w\eta}{1+2\eta}\right)^{\eta} &> \frac{(2-\rho)w\eta}{(1+2\eta)(1+\eta)}\left(\frac{(2-\rho)w\eta^2}{(1+2\eta)(1+\eta)}\right)^{\eta} \\
\eta^{\eta} &> \frac{(2-\rho)^{1+\eta}}{(1+\eta)^{1+\eta}}\eta^{2\eta} \\
(1+\eta)^{1+\eta}\eta^{-\eta} &> (2-\rho)^{1+\eta}
\end{aligned}$$

Por último, despejando ρ:

$$\rho > 2 - (1+\eta)\eta^{-\frac{\eta}{1+\eta}}$$

Por lo tanto, nuestra respuesta sí depende del valor para ρ.

(c)

Respuesta

Como vimos en la parte anterior, si ρ es lo suficientemente grande, entonces todos los yoes seguirán la trayectoria óptima del individuo que decide en el período 1 invertir en el activo ilíquido, dado que mejora el bienestar.

Esto proviene del hecho de que el activo ilíquido está actuando como un dispositivo de compromiso, lo que hace óptimo para yoes futuros el seguir esta trayectoria, de otra manera, estos se desviarían puesto que son individuos inconsistentes en el tiempo.

3. Retiros de las AFP y Teorías de Consumo (Parte II)

(a)

Respuesta

Primero, debemos tener claro que si los retiros no modificaron la riqueza financiera de los hogares es porque estos tenían considerados los fondos previsionales dentro de su riqueza financiera (explicación del supuesto).

Ahora bien, dado que por la pandemia muchas personas perdieron sus trabajos y tuvieron que gastar parte de sus activos para sobrellevar la situación, entonces nos encontramos en un escenario donde la mayoría de los hogares presenta:

$$x_t < x^*$$

con x_t el *cash-on-hand* del período t y x^* el nivel objetivo de *cash-on-hand* (el “colchón”).

Luego, bajo este contexto, tenemos que el motivo de precaución es mayor a la impaciencia, por lo que los individuos debiesen acumular activos para llegar nuevamente a x^*. Por lo tanto, concluímos que este modelo **no es consistente** con un incremento del consumo.

(b)

Respuesta

Para comenzar, es importante recordar que la restricción de liquidez implica que $c_t \leq x_t$. Es decir, el individuo no puede consumir más de lo que tiene, pues no tiene acceso a crédito.

Ahora bien, como estamos en una pandemia, es ilógico pensar que el ingreso de los hogares es determinístico, pues como sabemos, mucha gente ha perdido su trabajo y quedan con precarios ingresos.

Por lo tanto, en el caso de ingreso estocástico, el proceso que mejor describe los ingresos laborales es un ruido blanco, ya que los hogares en su mayoría han logrado sobrellevar la crisis gracias a diversas ayudas, ya sea proveniente de sus familias, amigos/as y hasta del gobierno (con uno que otro bono), por lo que, el ingreso laboral es visto en su mayoría como un shock de ingresos transitorios.

Luego, bajo estos supuestos y considerando (al igual que en la pregunta anterior) que por la pandemia $x_t \leq x^*$; Deaton prueba que los individuos se consumen todo el *cash-on-hand*, es decir, su propensión marginal a consumir es 1.

Por lo tanto, un incremento del consumo como consecuencia de los retiros **sí es consistente** con esta teoría y más aún, se aproxima mucho a lo que realmente ocurrió, que fue que los hogares aumentaron su consumo casi 1:1 con el ingreso extra proveniente de los retiros.

(c)

Respuesta

En primer lugar, debemos tener claro que en el descuento hiperbólico, las compensaiones a corto plazo se caracterizan más por la impaciencia que las compensaciones de largo plazo. Además, es importante recordar que en esta teoría, existen dos clases de individuos, los ***naive*** *hyperbolic discounter* (ingenuos) y los ***sophisticated*** *hyperbolic discounter* (sofisticados).

Por un lado, si asumimos que los individuos son ingenuos, y por lo tanto, inconscientes de la inconsistencia dinámica, entonces preferirán consumir todo el dinero de los retiros al tiro en vez de guardar para el futuro, ya que eso les reporta una mayor utilidad ($\eta < 1$).

Por otro lado, si los individuos son sofisticados, decidirán su consumo óptimo en todos los períodos mediante inducción hacia atrás, es decir, primero decidirán cuanto consumirán en el último período y luego suavizarán consumo para los períodos restantes, lo que indica que consumen hoy conscientes del juego que están jugando con su yo futuro. Por lo tanto, estos individuos aumentarán su consumo en el período actual producto de los retiros, pero en una proporción inferior al caso en que los individuos son ingenuos, pues guardarán parte de sus retiros para el futuro.

Es importante mencionar también que dado el nivel de incertidumbre a raíz de la pandemia, los individuos difícilmente pueden planificar una trayectoria de consumo óptimo para sus yoes futuros, osea que es poco probable que se puedan comportar como individuos sofisticados.

Luego, tenemos que esta teoría **también es consistente** con un incremento del consumo como consecuencia de los retiros, independiente si el individuo es ingenuo o sofisticado. Sin embargo, el caso que se aproxima más a lo que realmente ocurrió es en el que los individuos son ingenuos, pues los hogares se consumieron todo pocos días después de haber recibido sus fondos previsionales (incremento del consumo 1:1 con el ingreso adicional) en vez de guardar para el futuro.