PAUTA CONTROL II - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2021

Sea N un conjunto finito de individuos, A un conjunto finito de alternativas sociales y $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los perfiles de preferencia $(\succ_i)_{i\in N}$, donde $\succ_i$ representa la relación de preferencias del individuo $i \in N$, la cual está definida sobre A y es completa, transitiva y estricta.

En este contexto, considere las siguientes definiciones:

- Una regla de elección social $f : \mathcal{P} \to A$ es *Maskin monótona* si para todo par de perfiles de preferencias $P = (\succ_i)_{i\in N} \in \mathcal{P}$ y $P^* = (\succ_i^*)_{i\in N} \in \mathcal{P}$ se cumple la siguiente propiedad:

$$\{a \in A : f(P) \succ_i a\} \subseteq \{a \in A : f(P) \succ_i^* a\},\ \forall i \in N \qquad \Longrightarrow \qquad f(P^*) = f(P).$$

- Una regla de elección social $f : \mathcal{P} \to A$ es *libre de poder de veto* si $f(P) = a$ para todo perfil de preferencias $P \in \mathcal{P}$ en el cual $(\#N - 1)$ individuos consideran a la alternativa social $a \in A$ como la mejor opción.

Dada una regla de elección social $f : \mathcal{P} \to A$, demuestre las siguientes afirmaciones:

[1] Si f es Maskin monótona, entonces f es Condorcet monótona.

Dados perfiles de preferencia $P = (\succ_i)_{i\in N}$ y $P^* = (\succ_i^*)_{i\in N}$ y alternativas sociales $a, b \in A$, suponga que $f(P) = a$ y que se cumplen las siguientes propiedades para cada $i \in N$:

(i) $a \succ_i b$ si y solo si $a \succ_i^* b$.

(ii) a y b son las dos mejores alternativas bajo $\succ_i^*$.

Entonces, para demostrar que f es Condorcet monótona hay que probar que $f(P^*) = a$. Ahora, las condiciones (i) y (ii) nos aseguran que, para todo $i \in N$, tenemos que

$$\{a' \in A : f(P) \succ_i a'\} \subseteq \{a' \in A : f(P) \succ_i^* a'\}.$$

Por lo tanto, como $f(P) = a$, sigue de la monotonía Maskin de f que $f(P^*) = a$. □

[2] Si $\#A \geq 3$ y f es Maskin monótona y libre de poder de veto, entonces f es dictatorial.

Si f es libre de poder de veto, entonces para todo $a \in A$ existe un perfil de preferencias $P \in \mathcal{P}$ tal que $f(P) = a$. Efectivamente, es suficiente que en P haya $(\#N - 1)$ individuos que consideren a la alternativa a como la mejor de todas (y siempre hay un perfil de preferencia con esas características en $\mathcal{P}$). Por lo tanto, $f(\mathcal{P}) = A$.

Por otro lado, el ítem previo nos asegura que f es Condorcet monótona. Así, com hay al menos tres alternativas sociales, el Teorema de Yu nos asegura que f es dictatorial. □

[3] Demuestre que el resultado del ítem anterior es falso cuando $\#A = 2$ y $\#N = 2021$.

Suponga que $A = \{a, b\}$. Con un número impar de individuos, el *voto mayoritario* está bien definido en $\mathcal{P}$. Además, cumple la monotonía Maskin, pues si la alternativa social $f(P)$ no cae en el ranking de ningún individuo cuando pasamos de P a P^*, entonces no reduce su número de votos, por lo cual sigue siendo la alternativa escogida. Esto es, $f(P^*) = f(P)$.

Por otro lado, si 2020 individuos consideran una de las alternativas la mejor de las dos, entonces esta recibe 2020 votos y es escogida. Por lo tanto, el voto mayoritario, sin ser una regla dictatorial, cumple monotonía Maskin y es libre de poder de veto. $\square$

[4] Demuestre o dé un contra-ejemplo: si f es *strategy proof* entonces f es Maskin monótona.

La afirmación es verdadera. Suponga que f es *strategy proof*. Fije perfiles de preferencias $P = (\succ_i)_{i\in N} \in \mathcal{P}$ y $P^* = (\succ_i^*)_{i\in N} \in \mathcal{P}$ tales que

$$\{a \in A : f(P) \succ_i a\} \subseteq \{a \in A : f(P) \succ_i^* a\}, \qquad \forall i \in N. \tag{1}$$

Queremos probar que $f(P^*) = f(P)$. Suponga que $f(\succ_1^*, (\succ_i)_{i\neq 1}) \neq f(P)$. Entonces, como f es *strategy-proof* y las preferencias son estrictas, sabemos que $f(P) \succ_1 f(\succ_1^*, (\succ_i)_{i\neq 1})$ y $f(\succ_1^*, (\succ_i)_{i\neq 1}) \succ_1^* f(P)$, lo cual contradice la propiedad (1). Por lo tanto, $f(\succ_1^*, (\succ_i)_{i\neq 1}) = f(P)$. Repitiendo el argumento secuencialmente podemos ir de P a P^* sin cambiar la alternativa social escogida por f, lo cual nos asegura que $f(P^*) = f(P)$. $\square$