SOLEMNE I – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: KEVIN SEPÚLVEDA - GIOVANNI VILLA

Pregunta 1

Considere una economía de intercambio estática con N individuos y L mercancías perfectamente divisibles. Cada individuo $i \in \{1, \ldots, N\}$ es caracterizado por una asignación inicial de recursos $w^i \in \mathbb{R}^L_{++}$ y por una función de utilidad $U^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

Diremos que una distribución de recursos $(x^1, \ldots, x^N) \in (\mathbb{R}^L_+)^N$ está en el *núcleo* si $\sum_{i=1}^N (x^i - w^i) \leq 0$ y no existe ningún grupo de individuos $S \subseteq \{1, \ldots, N\}$ tal que, para algún $(z^i)_{i\in S} \in (\mathbb{R}^L_+)^S$, las siguientes propiedades son satisfechas: $\sum_{i\in S}(z^i - w^i) \leq 0$ y $(U^i(z^i) - U^i(x^i))_{i\in S} > 0$.

(i) Demuestre o dé un contra-ejemplo: toda distribución Pareto eficiente está en el núcleo.

FALSO. Por ejemplo, gracias a la monotonía estricta de las preferencias, es Pareto eficiente entregarle todos los recursos de la economía a un único individuo, h. Sin embargo, ante esa política, cualquier grupo S que no incluya a h podrá mejorar la situación de todos sus miembros al darle a cada uno su asignación inicial, pues $U^i(w^i) > U^i(0)$ para todo $i \neq h$. □

(ii) Demuestre o dé un contra-ejemplo: toda distribución en el núcleo es Pareto eficiente.

VERDADERO. Una asignación en el núcleo no puede ser bloqueada por la coalición $S = \{1, \ldots, N\}$. Esto último es lo que caracteriza la Pareto eficiencia. □

(iii) Demuestre o dé un contra-ejemplo: toda distribución $(x^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}} \gg 0$ en el núcleo puede ser implementada como un equilibrio Walrasiano con transferencias.

VERDADERO. Sabemos que toda asignación en el núcleo es Pareto eficiente. Así, como las preferencias son continuas y estrictamente convexas y la asignación que queremos implementar es interior, el resultado sigue como consecuencia directa del Segundo Teorema del Bienestar Social. □

Pregunta 2

Considere una economía estática con producción en la cual hay dos individuos, tres mercancías y dos firmas. Los dos individuos, A y B, tienen las mismas preferencias, las cuales son representables por la función de utilidad $u(x, y, z) = x^{1/5}y^{2/5}z^{7/5}$ y sus asignaciones iniciales de recursos son $w^A = (2, 0, 0)$ y $w^B = (3, 0, 0)$. Las firmas son propiedad del individuo B y son caracterizadas por las tecnologías

$$Y^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ z = 0,\ y \leq -10x\}, \qquad Y^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ y = 0,\ z \leq -5x\}.$$

Justificando detalladamente sus argumentos, encuentre el equilibrio Walrasiano de esta economía.

Respuesta. Como $u(3, 0, 0) = 0$, el individuo B siempre querrá utilizar parte de su asignación inicial para producir cantidades positivas de las mercancías y y z (cada firma permite producir una de esas mercancías). Efectivamente, esto le permitirá demandar/consumir cantidades positivas de todos los bienes y tener una utilidad positiva. Por lo tanto, en equilibrio todas las firmas producen.

Los problemas de las firmas son equivalentes a $\max_{x\geq 0}(10p_y - p_x)x$ y $\max_{x\geq 0}(5p_z - p_x)x$. Como cada firma debe tener una producción óptima, los precios de equilibrio tienen que cumplir con las siguientes propiedades $10p_y = p_x = 5p_z$. Tomando la mercancía x como numerario, llegamos a que $(\overline{p}_x, \overline{p}_y, \overline{p}_z) = (1, 1/10, 1/5)$

son los precios de equilibrio. Esto implica que el individuo B no recibirá renta monetaria de las firmas (estas solo le servirán para producir las mercancías y y z). Así, la renta monetaria de cada individuo será igual a $m^A \equiv (\overline{p}_x, \overline{p}_y, \overline{p}_z) \cdot (2,0,0) = 2$ y $m^B \equiv (\overline{p}_x, \overline{p}_y, \overline{p}_z) \cdot (3,0,0) = 3$. Como las funciones de utilidad pueden ser representadas por la función Coob-Douglas $x^{1/10}y^{2/10}z^{7/10}$, las demandas Marshalianas son $(\overline{x}^A, \overline{y}^A, \overline{z}^A) = (0.2,\, 4,\, 7)$ y $(\overline{x}^B, \overline{y}^B, \overline{z}^B) = (0.3,\, 6, 10.5)$.

Esto es, en equilibrio los individuos demandan para consumo directo un total de $0.2+0.3 = 0.5$ unidades de la mercancía x. Las otras 4.5 unidades que hay en el mercado se utilizan como insumo en la producción de las mercancías y y z. Con una unidad de x se producen $4+6 = 10$ unidades de y. Con las otras 3.5 unidades de x se producen $7 + 10.5 = 17.5$ unidades de z. □

Pregunta 3

(i) Dé un ejemplo de una economía con mercados incompletos en la cual la distribución de recursos que se obtiene en equilibrio no es Pareto eficiente.

Respuesta. Considere una economía con dos periodos y sin incertidumbre en el segundo periodo. Hay una única mercancía, la cual está disponible para intercambio en cada periodo. Hay dos agentes caracterizados por $U^1(x_1,x_2) = U^2(x_1,x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $w^1 = (4,1)$ y $w^2 = (1,4)$. Los mercados son incompletos pues no hay activos que permitan suavizar el consumo. En este contexto, como hay una única mercancía y las utilidades son estrictamente crecientes, en equilibrio los agentes demandan sus asignaciones iniciales y reciben utilidades $U^1(w^1) = U^2(w^2) = 3$. Sin embargo, si se redistribuyera la riqueza y el individuo $i \in \{1,2\}$ recibiera la canasta $(2.5, 2.5)$ su utilidad sería $U^i(2.5,2.5) = 2\sqrt{2.5} > 3$. Esto es, la distribución de recursos que se obtiene en equilibrio no es Pareto eficiente. □

(ii) Considere una economía con dos periodos y tres mercancías perfectamente divisibles. No hay incertidumbre en el primer periodo, mientras que en el segundo periodo hay tres estados de la naturaleza que se pueden realizar. Hay tres individuos. Cada individuo $i \in \{1,2,3\}$ tiene preferencias estrictamente monótonas y asignaciones iniciales $w_s^i = (i,i,i)$ en el estado de la naturaleza $s \in \{0,1,2,3\}$. Para suavizar su consumo, los individuos pueden negociar *activos nominales* j y k, caracterizados por promesas: $(N_{1,j}, N_{2,j}, N_{3,j}) = (1,0,1)$ y $(N_{1,k}, N_{2,k}, N_{3,k}) = (1,1,0)$.

En este contexto, podemos asumir que los precios de las mercancías en el estado de la naturaleza $s \in \{0,1,2,3\}$, denotados por $p_s = (p_{s,1}, p_{s,2}, p_{s,3})$ cumplen $p_{s,1} + p_{s,2} + p_{s,3} = 1$. Además, la restricción presupuestaria del agente $i \in \{1,2,3\}$ en el estado de la naturaleza $s \in \{1,2,3\}$ del segundo periodo viene dada por: $p_s \cdot (x_s^i - w_s^i) = N_{s,j} z_j^i + N_{s,k} z_k^i$, donde (z_j^i, z_k^i) es el portafolio del agente i en los activos nominales j y k.

Asumiendo que el consumo del individuo i es compatible con la oferta que hay en el mercado y que su portafolio (z_j^i, z_k^i) satisface las restricciones presupuestarias del segundo periodo, demuestre que se cumplen las siguientes propiedades: $-8 \leq \min\{z_j^i, z_k^i\} \leq \max\{z_j^i, z_k^i\} \leq 8$.

Respuesta. Como $w_s^i = (i,i,i)$ para todo $i, s \in \{1,2,3\}$, sabemos que $x_s^i \leq (6,6,6)$. Además, si (z_j^i, z_k^i) satisface las restricciones presupuestarias del segundo periodo, tenemos que

$$\begin{pmatrix} p_1 \cdot (x_1^i - w_1^i) \\ p_2 \cdot (x_2^i - w_2^i) \\ p_3 \cdot (x_3^i - w_3^i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_j^i \\ z_k^i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} p_1 \cdot (x_1^i - w_1^i) \\ p_2 \cdot (x_2^i - w_2^i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_j^i \\ z_k^i \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto, $\begin{pmatrix} z_j^i \\ z_k^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \cdot (x_1^i - w_1^i) \\ p_2 \cdot (x_2^i - w_2^i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cdot (x_1^i - w_1^i) - p_2 \cdot (x_2^i - w_2^i) \\ p_2 \cdot (x_2^i - w_2^i) \end{pmatrix}.$

Ahora, denotando $v_s^i = p_s \cdot (x_s^i - w_s^i)$, como $p_{s,1} + p_{s,2} + p_{s,3} = 1$, tenemos que

$$-3 \leq -p_s \cdot w_s^i \leq v_s^i \leq p_s \cdot x_s^i - 1 \leq 5.$$

Por lo tanto, $z_j^i = v_1^i - v_2^i \in [-8, 8]$ y $z_k^i = v_2^i \in [-3, 5]$. Así, $\min\{z_j^i, z_k^i\} \geq -8$ y $\max\{z_j^i, z_k^i\} \leq 8$. $\square$

Pregunta 4

Dado $m > 0$, sea $\mathcal{E}_m$ una economía con dos periodos y mercados incompletos en la cual hay $S \geq 100$ estados de la naturaleza que se pueden realizar en el segundo periodo y $L \geq 10$ mercancías perfectamente divisibles que se pueden intercambiar en cada periodo. Existen $H \geq 1000$ agentes con asignaciones iniciales de mercancías $(w^h)_{h\in\{1,\dots,H\}} \gg 0$ y con preferencias representables por funciones de utilidad continuas, estrictamente crecientes y estrictamente cóncavas. Además, el mercado financiero es caracterizado por $J \geq 3$ *activos reales* y cada agente h tiene restricciones a la deuda de la forma $z_j^h \geq -m$ para todo $j \in \{1, \dots, J\}$. Demuestre que $\mathcal{E}_m$ tiene al menos un equilibrio competitivo.

Respuesta. Dividiremos la demostración de equilibrio en tres etapas:

- *Etapa I. Límites superiores para consumos y portafolios factibles.*

  Como la capacidad de emitir deuda está restringida por *límites de Radner*, si definimos

$$A = (H-1)m + \max_{s\in\{1,\dots,S\}} \max_{l\in\{1,\dots,L\}} \sum_{h=1}^{H} w_{s,l}^h,$$

tendremos que

$$\max_{h\in\{1,\dots,H\}} \left\{ \max_{s\in\{1,\dots,S\}} \max_{l\in\{1,\dots,L\}} x_{s,l}^h, \max_{j\in\{1,\dots,J\}} z_j^h \right\} \leq A$$

para todo vector $(x^h, z^h)_{h\in\{1,\dots,H\}} \in (\mathbb{R}_+^{L(S+1)} \times \mathbb{R}^J)^H$ que cumple

$$\sum_{h=1}^{H} (x_s^h - w_s^h) \leq 0, \ \forall s \in \{0, \dots, S\}, \qquad \sum_{h=1}^{H} z^h \leq 0.$$

- *Etapa II. Candidato a equilibrio como punto fijo de una correspondencia.*

  Utilizaremos el límite superior A para *compactificar* la economía y construir un equilibrio competitivo como un punto fijo de una correspondencia. Para alcanzar este objetivo, trabajaremos con los siguientes conjuntos compactos, convexos y diferentes de vacío:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} \times \mathbb{R}^J : x_{s,l} \leq 2A, \ -m \leq z_j \leq 2A, \ \forall (s, l, j) \right\}, \\ \Delta &= \left\{ ((p_0, q), (p_s)_{s\in\{1,\dots,S\}}) \in \mathbb{R}_+^{L+J} \times (\mathbb{R}_+^L)^S : \|p_0\|_\Sigma + \|q\|_\Sigma = 1; \ \|p_s\|_\Sigma = 1, \ \forall s \in \{1, \dots, S\} \right\}, \end{aligned}$$

donde $\| \cdot \|_\Sigma$ denota la norma de la suma. Además, dados precios $(p, q) \in \Delta$, sea $B^h(p, q)$ el conjunto de vectores $(x^h, z^h) \in \mathbb{R}_+^{L(S+1)} \times \mathbb{R}^J$ que cumplen las restricciones presupuestarias del agente h:

$$p_0 \cdot x_0^h + q \cdot z^h \leq p_0 \cdot w_0^h, \qquad p_s \cdot (x_s^h - w_s^h) \leq \sum_{j=1}^{J} p_s \cdot A_{s,j} z_j^h, \ \ \forall s \in \{1, \dots, S\};$$

y se ajustan a los límites de Radner: $z_j^h \geq -m$ para todo $j \in \{1, \dots, J\}$ (se ha denotado por $A_{s,j}$ a la canasta que determina las promesas reales del activo j en el estado de la naturaleza s).

Note que, para cada $h \in \{1, \dots, H\}$ la correspondencia $(p, q) \in \Delta \twoheadrightarrow B^h(p, q) \cap \mathbb{K}$ es continua y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Así, como U^h es continua y estrictamente cóncava, el Teorema del Máximo de Berge nos asegura que la correspondencia $\gamma^h : \Delta \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\gamma^h(p, q) = \operatorname*{argmax}_{(x^h, z^h)\in B^h(p,q)\cap\mathbb{K}} U^h(x^h)$$

es hemicontinua superior y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

Por otro lado, como la correspondencia constante $(x^h, z^h)_{h\in\{1,\dots,H\}} \in \mathbb{K}^H \twoheadrightarrow \Delta$ es continua y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío, el Teorema del Máximo de Berge nos asegura que la correspondencia $\mu : \mathbb{K}^H \twoheadrightarrow \Delta$ definida por

$$\mu((x^h, z^h)_{h\in\{1,\dots,H\}}) = \underset{(p,q)\in\Delta}{\operatorname{argmax}} \left(p_0 \cdot \sum_{h=1}^{H}(x_0^h - w_0^h) + q \cdot \sum_{h=1}^{H} z^h + \sum_{s=1}^{S} p_s \cdot \sum_{h=1}^{H}(x_s^h - w_s^h) \right)$$

es hemicontinua superior y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

Gracias a esas propiedades, sabemos que la correspondencia $\Omega : \Delta \times \mathbb{K}^H \twoheadrightarrow \Delta \times \mathbb{K}^H$ definida por

$$\Omega((p,q), (x^h, z^h)_{h\in\{1,\dots,H\}}) = \left(\mu((x^h, z^h)_{h\in\{1,\dots,H\}}), (\gamma^h(p,q))_{h\in\{1,\dots,H\}}\right)$$

es hemicontinua superior y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Por lo tanto, sigue del Teorema del Kakutani que Ω tiene un punto fijo $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}^h, \overline{z}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}}) \in \Delta \times \mathbb{K}^H$.

- <u>Etapa III.</u> *$((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}^h, \overline{z}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}})$ es un equilibrio competitivo de $\mathcal{E}_m$.*

  Como $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}^h, \overline{z}^h)_{h\in\{1,\dots,H\}})$ es un punto fijo de la correspondencia Ω, sabemos que:

  - Para cada agente $h \in \{1, \dots, H\}$ tenemos que

$$(\overline{x}^h, \overline{z}^h) \in \underset{(x^h,z^h)\in B^h(\overline{p},\overline{q})\cap\mathbb{K}}{\operatorname{argmax}} U^h(x^h). \tag{1}$$

  - Para cada vector $(p,q) \in \Delta$,

$$\begin{aligned} p_0 \cdot \sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_0^h - w_0^h) + q \cdot \sum_{h=1}^{H} \overline{z}^h + \sum_{s=1}^{S} p_s \cdot \sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_s^h - w_s^h) \\ \leq\ \overline{p}_0 \cdot \sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_0^h - w_0^h) + \overline{q} \cdot \sum_{h=1}^{H} \overline{z}^h + \sum_{s=1}^{S} \overline{p}_s \cdot \sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_s^h - w_s^h). \end{aligned} \tag{2}$$

Dado que $(\overline{x}^h, \overline{z}^h) \in B^h(\overline{p}, \overline{q})$ para todo h, escogiendo $(p,q) = ((p_0, q), (\overline{p}_s)_{s\in\{1,\dots,S\}})$, sigue de (2) que

$$p_0 \cdot \sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_0^h - w_0^h) + q \cdot \sum_{h=1}^{H} \overline{z}^h \quad \leq \quad 0, \qquad \forall (p_0, q) : \|(p_0, q)\|_\Sigma = 1. \tag{3}$$

Tomando (p_0, q) como alguno de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^J$, la propiedad (3) nos asegura que

$$\sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_0^h - w_0^h) \leq 0, \qquad \sum_{h=1}^{H} z^h \leq 0. \tag{4}$$

Por lo tanto, los límites superiores impuestos sobre el consumo del primer periodo y sobre los portafolios financieros no están activos. Gracias a la monotonía estricta de las preferencias, esto asegura que $(\overline{p}_0, \overline{q}) \gg 0$ y que las restricciones presupuestarias del primer periodo se cumplen con igualdad, lo cual implica que

$$\overline{p}_0 \cdot \sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_0^h - w_0^h) + \overline{q} \cdot \sum_{h=1}^{H} \overline{z}^h = 0. \tag{5}$$

Como $(\overline{p}_0, \overline{q}) \gg 0$, (4) y (5) nos aseguran que las desigualdades en (4) se cumplen con igualdad. Esto es, la oferta es igual a la demanda en todos los mercados que operan en el primer periodo.

De forma análoga, dado que $(\overline{x}^h, \overline{z}^h) \in B^h(\overline{p}, \overline{q})$ para todo h y que la oferta se iguala a la demanda en el mercado financiero, escogiendo alguno de los vectores de precio $(p,q) = ((\overline{p}_0, \overline{q}), (\overline{p}_{s'})_{s'\neq s}, p_s)$, sigue de la desigualdad (2) que

$$p_s \cdot \sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_s^h - w_s^i) \leq 0, \quad \forall p_s : \|p_s\|_\Sigma = 1, \forall s \in \{1, \dots, S\}. \tag{6}$$

Tomando p_s como alguno de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^L$, la propiedad (6) nos asegura que

$$\sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_s^h - w_s^h) \leq 0, \quad \forall s \in \{1, \ldots, S\}. \tag{7}$$

Por lo tanto, los límites superiores impuestos sobre el consumo en el segundo periodo no están activos. Gracias a la monotonía estricta de las preferencias, esto asegura que $(\overline{p}_s)_{s\in\{1,\ldots,S\}} \gg 0$ y que las restricciones presupuestarias del segundo periodo se cumplen con igualdad, lo cual implica que

$$\overline{p}_s \cdot \sum_{h=1}^{H}(\overline{x}_s^h - w_s^h) = 0, \quad \forall s \in \{1, \ldots, S\}. \tag{8}$$

Como $(\overline{p}_s)_{s\in\{1,\ldots,S\}} \gg 0$, (7) y (8) nos aseguran que las desigualdades en (7) se cumplen con igualdad. Esto es, la oferta es igual a la demanda en todos los mercados que operan en el segundo periodo.

Finalmente, para probar que $(\overline{x}^h, \overline{z}^h)$ maximiza U^h en $B^h(\overline{p}, \overline{q})$, suponga que existe $(\tilde{x}^h, \tilde{z}^h) \in B^h(\overline{p}, \overline{q})$ tal que $U^h(\tilde{x}^h) > U^h(\overline{x}^h)$. Entonces, como $(\overline{x}^h, \overline{z}^h)$ está en el interior de $\mathbb{K}$, sabemos que para $\lambda \in (0,1)$ suficientemente cercano a uno el vector $\lambda(\overline{x}^h, \overline{z}^h) + (1-\lambda)(\tilde{x}^h, \tilde{z}^h) \in B^h(\overline{p}, \overline{q}) \cap \mathbb{K}$.

Así, la propiedad (1) nos asegura que

$$U^h(\lambda\overline{x}^h + (1-\lambda)\tilde{x}^h) \leq U^h(\overline{x}^h) < \lambda U^h(\overline{x}^h) + (1-\lambda)U^h(\tilde{x}^h),$$

lo cual evidentemente contradice la concavidad estricta de U^h.

Por lo tanto, para cada agente $h \in \{1, \ldots, H\}$ tenemos que

$$(\overline{x}^h, \overline{z}^h) \in \operatorname*{argmax}_{(x^h, z^h)\in B^h(\overline{p}, \overline{q})} U^h(x^h),$$

lo cual concluye la demostración. □