Fuente: Examen Final de Econometría II 2021

2. (50 puntos) El modelo correcto es:

$$x_t = \beta x_{t-1}, \quad |\beta| < 1, \tag{1}$$

pero x se observa con error. En su lugar tenemos:

$$y_t = x_t + u_t, \tag{2}$$

donde u_t es i.i.d. con $E(u_t) = 0$ y $E(u_t^2) = \sigma^2$.

- **(a) (5 puntos)** Substituciones directas conducen a:

$$\begin{aligned} y_t &= x_t + u_t & (3) \\ &= \beta x_{t-1} + u_t & (4) \\ &= \beta(y_{t-1} - u_{t-1}) + u_t & (5) \\ &= \beta y_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1}, & (6) \end{aligned}$$

que corresponde a un proceso ARMA(1,1). Sin embargo, note que la raíz del componente AR es igual a la del componente MA. Por lo tanto, el proceso puede describirse como:

$$(1 - \beta L)y_t = (1 - \beta L)u_t, \tag{7}$$

cuando esto ocurre, podemos "dividir" ambas partes por $(1 - \beta L)$, con lo que obtenemos:

$$y_t = u_t \tag{8}$$

Este caso se discute en otro contexto en Hamilton (páginas 60 y 61). Para mostrar que efectivamente estamos modelando un ruido blanco, recuerde que si una serie sigue un proceso ARMA(1,1) del tipo:

$$v_t = \beta y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}, \tag{9}$$

sus autocovarianzas son:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1 + 2\beta\theta + \theta^2}{1 - \beta^2}\sigma^2 & (10) \\ \gamma_1 &= \beta\gamma_0 + \theta\sigma^2 & (11) \\ \gamma_k &= \beta\gamma_{k-1} \text{ para } k > 1. & (12) \end{aligned}$$

En nuestro caso, $\theta = -\beta$, por lo que:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1 - 2\beta^2 + \beta^2}{1 - \beta^2}\sigma^2 = \sigma^2 & (13) \\ \gamma_1 &= \beta\gamma_0 - \beta\sigma^2 = 0 & (14) \\ \gamma_k &= \beta\gamma_{k-1} = 0 \text{ para } k > 1. & (15) \end{aligned}$$

- **(b) (25 puntos)** Dado que los momentos de y no dependen de β, será imposible recuperar un estimador consistente de β utilizando observaciones de y. Las dos estrategias propuestas permitirán recuperar un estimador para σ y serán por lo tanto equivalentes.