elección SOCIAL

Partimos con algunas definiciones

→ Asumimos:

- N individuos
- $A = \{a_1, \ldots, a_M\}$ conjunto de alternativas sobre los cuales los individuos tienen preferencias
- $\# N \geq 2$ $\# M \geq 3$ → clave
- $c/n \in N$ es caracterizado por una preferencia estricta
  - completa
  - transitiva
- $\mathcal{P}$ conjunto de todos los perfiles de preferencias $P = (\succ_n)_{n \in N}$ que cumplen las hipótesis anteriores

Regla de elección social

Una regla de elección social $f : \mathcal{P} \rightarrow A$ asocia a cada perfil de preferencia $(\succ_n)_{n \in N}$ una alternativa socialmente factible $\boxed{f((\succ_n)_{n \in N})}$

↳ Es una "política pública", una decisión. Es solo una regla → no tiene porque ser lo "mejor".

Funcional de Bienestar

Un funcional de bienestar $R : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$ asocia a cada perfil de preferencia $(\succ_n)_{n \in N}$ una preferencia social $\boxed{R((\succ_n)_{n \in N})}$ donde $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}^*)^N$

↳ Es decir, lo que quiero es construir una "preferencia social" agregando las pref. individuales

→ Lo que queremos es construir o definir reglas / funcionales que cumplan algunas propiedades deseadas

* Sobreyectividad:

$\forall a \in A, \exists P \in \mathcal{P} : f(P) = a \Leftrightarrow \boxed{f(P) = A}$

↳ La imagen del dominio es todo A = todas las alternativas tienen oportunidad

* Unanimidad: un func. de bie. social cumple unanimidad si

$\forall P = (\succ_n)_{n \in N} \in \mathcal{P} : a_i \succ_n a_j \ \forall n$

$\Rightarrow \underbrace{\boxed{a_i \ R(P) \ a_j}}_{\succ^*}$ → "a_i es preferido a a_j bajo $R(P)$"

* Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI): un func. de bie. social cumple IAI si dado perfiles $P, P' \in \mathcal{P}$ que coinciden sobre $\{a_i, a_j\}$, tenemos que: $\boxed{a_i \ R(P) \ a_j \Leftrightarrow a_i \ R(P') \ a_j}$

↳ Para 2 alternativas en las cuales no cambio de opinión introducir otras alt. no afecta mi pref. a comparar estas 2 alternativas

↳ Esto a nivel agregado (socialmente no cambio de opinión - yo planner - si nadie cambió de opinión)

Teorema de imposibilidad de Arrow

Sea $R: \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ un funcional de bienestar social que cumple las propiedades de

- Unanimidad
- Ind. de Alt. Irrelevantes

$\Rightarrow \exists\, h \in N : a_i >_h a_j \Rightarrow a_i\, R(P)\, a_j \quad \forall a_i, a_j \in A,\ \forall P \in \mathcal{P}$

↳ la única forma de agregar preferencias es imitando a alguien (ie: hay un dictador)

↳ Es decir, la regla imita siempre a un individuo → es dictatorial

→ Otras definiciones:

* Dados perfiles de preferencias $P = (>_n)_{n \in N}$, $P' = (>_n')_{n \in N}$ denotaremos (P'_n, P_{-n}) al perfil que se obtiene a partir de P cambiando la pref. del individuo n para $>_n'$

* Strategy-Proof: una regla de elección social $f: \mathcal{P} \to A$ es strategy proof si $\forall P, P' \in \mathcal{P}$:

$$f(P'_n, P_{-n}) \neq f(P) \Rightarrow f(P) >_n f(P'_n, P_{-n})$$

↳ si yo hago un juego donde pregunto "¿quién eres?" nadie mejora mintiendo (puede quedar igual)

Es decir, ∄ de lo que el resto haga no tengo incentivos a reportar preferencias que no son ciertas.

Teorema de imposibilidad de Gibbard - Satterthwaite

Sea $f: \mathcal{P} \to A$ una regla de elección social strategy proof: $f(\mathcal{P}) = A$ $\Rightarrow \exists\, h \in N: \forall P = (>_n)_{n \in N} \in \mathcal{P}$ tenemos que $f(P) >_h a \quad \forall a \neq f(P)$

→ Vamos a definir ahora algunos conceptos sobre los perfiles de preferencias:

Dados perfiles de preferencias $P = (>_n)_{n \in N}$, $P' = (>_n')_{n \in N}$ diremos que:

* P y P' coinciden sobre $\{a_i, a_j\} \subseteq A$ si:

$$a_i >_n a_j \Leftrightarrow a_i >_n' a_j \quad \forall n \in N$$

* a_i domina a_j bajo P si

$$a_i >_n a_j \quad \forall n \in N$$

* $A' \subseteq A$ son TOP bajo P si

$$a_i >_n a_j, \ \forall n, a_i, a_j \in N \times A' \times (A \setminus A')$$

- Función $T_{i,j}: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es la función que modifica cada perfil de preferencias P de tal forma que las alternativas $\{a_i, a_j\}$ serán TOP sin alterar el orden interno

Regla Condorcet Monótona

Diremos que una regla de elección social f es condorcet monótona si dados perfiles de preferencia $P, P' \in \mathcal{P}$ que coinciden sobre $\{a_i, a_j\}$ las cuales son top bajo P' tenemos que:

$$\boxed{f(P) = a_i \Rightarrow f(P') = a_i}$$

↳ si se cumple, entonces:

$$\boxed{f(P) = a_i \Rightarrow f(T_{i,j}(P)) = a_i}$$

Teorema de Imposibilidad de Yu

Sea $f: \mathcal{P} \to A$ una regla condorcet monotona tal que $f(P) = A$

$\Rightarrow \exists h \in N : \forall P = (\succ_n)_{n \in N} \in \mathcal{P}$ tenemos que

$$f(P) \succ_h a \quad , \forall a \neq f(P)$$

↳ ie: es dictatorial

DOS alternativas

Ahora estudiaremos elección social en el caso en el que tenemos 2 alternativas:

- $A = \{a_1, a_2\}$
- n individuos
- las preferencias podrán representarse por un número $\theta_i \in \{-1, 0, 1\}$:

$$a_1 \succ_i a_2 \iff \theta_i = -1$$

$$a_1 \sim a_2 \iff \theta_i = 0$$

$$a_2 \succ_i a_1 \iff \theta_i = 1$$

→ El espacio de Preferencias $\mathcal{P} = \{-1, 0, 1\}^n$

* una regla de elección social es una función

$$f: \{-1, 0, 1\}^n \to \{-1, 0, 1\}$$

y en este contexto una regla de elec. social es indistinguible de un funcional de Bienestar

Regla de elección social:

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$

$$\boxed{f_\beta(\theta_1, \ldots \theta_n) = \text{signo}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \theta_i\right)}$$

- Posibles valores de β:

* $\beta = (1, \ldots, 1) \to$ voto mayoritario
* $\beta =$ vector canonico de $\mathbb{R}^n$ $\to f_\beta$ dictatorial
* suponga $\lambda \in (0,1)$ tenemos que:

$$\beta_i = \begin{cases} \lambda n & \text{si } i = 1 \\ 1 & \sim \end{cases}$$

f_β escoge la mejor opción para $i=1$ a menos que más de un λ% de la población piense distinto

→ Notemos que f_β cumple:

como regla
- strategy proof
- condorcet monotona
- $f_\beta(\mathcal{P}) = A$

como funcional
- unanimidad
- ind. de alt irrelevantes

[* con 2 alt. no corre: Arrow, G-S, ni Yu.]

Voto Mayoritario

$$V(\theta_1, \ldots \theta_n) = \text{signo}\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right)$$

cumple

* Simetría: $\forall \theta \in \{-1, 0, 1\}^n$ y $\forall$ función biyectiva: $\sigma: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$

$$V(\theta) = V(\theta_{\sigma(1)}, \ldots, \theta_{\sigma(n)})$$

→ da igual el orden de los votos, no cambia el resultado (no importa si cambio los subíndices i)

* Neutralidad $\forall \theta \in \{-1, 0, 1\}^n$

$$V(\theta) = -V(-\theta)$$

→ Si cambiamos el orden de los

candidatos no se afecta la elección

* **Responsividad**: Dados $\theta, \theta' \in \{-1,0,1\}^n : \theta' > \theta$,

$$V(\theta) \geq 0 \Rightarrow V(\theta') = 1$$

→ si agrego un voto más al ganador o cuando hay empate ⇒ gana el que le agregó el voto.

Teorema de May

El voto mayoritario es la única regla de elección social que cumple las propiedades de simetría, neutralidad y responsividad

IMPLEMENTACIÓN estrategias dominantes

Vamos a ver cómo implementar objetivos sociales en escenarios donde las asimetrías de información pueden permitir manipulación de las políticas

↳ **Dificultad**: Planner no conoce las preferencias ⇒ no conoce de antemano la política óptima.

→ Queremos **mecanismos reveladores de información**

→ **Modelo**: Los supuestos son

- n individuos
- A alternativas socialmente factibles
- c/i tiene asociado un $\theta_i \in \Theta_i$, el cual determina preferencias $R_i(\theta_i)$

  ↳ $a\, R_i(\theta_i)\, b \Leftrightarrow a$ es tan buena como b para i si su tipo es θ_i

- Preferencias sólo dependen del propio tipo (valores privados)
- c/i se ve a sí mismo, pero no necesariamente a los demás
- El espacio de preferencias de i es R_i

  ⇒ Posibles perfiles de preferencias: $R_1 \times \ldots \times R_n$

  ⇒ Posibles vectores de tipos son $\Theta: \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_n$

Regla de Elección Social

Es una correspondencia $f: \Theta \twoheadrightarrow A$ que asocia a cada perfil de tipos $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ un conjunto de alternativas factibles.

↳ ojo: individuos podrían eventualmente mentir

*Ejemplos de Reglas Sociales

***EJ 1**: Construir un puente

→ Alternat. socialmente factible

$$(x,t) = (x, t_1, \ldots, t_n) \in \{0,1\} \times \mathbb{R}^n_+$$

$$x = \begin{cases} 0 & \text{si no se construye} \\ 1 & \sim \end{cases}$$

- t_i es el pago que debe hacer i por el puente.
- Las preferencias individuales son cuasi-lineales y reflejan la propensión a pagar

$$\boxed{(x,t)\, R_i(\theta_i)\, (x',t') \Leftrightarrow x\theta_i - t_i \geq x'\theta_i - t_i'}$$

- $c \geq 0 \rightarrow$ costo de construcción

Regla: construimos ssi la suma de las valoraciones ≥ costo. Es decir:

$f: \Theta \twoheadrightarrow A$ es dada por $f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), \ldots, t_n(\theta)) \in \{0,1\} \times \mathbb{R}^n$:

$$x(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum \theta_i \geq c \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Además

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(\theta) = -c\, x(\theta)$$

***EJ 2: Pareto Eficiente**

Asocia a c/perfil θ las asignaciones

$$f(\theta) = \{a \in A : a \text{ no puede ser P. Dominada bajo } \{R_i(\theta_i)\}_{i=1}^{n}\}$$

***EJ 3: Dictatorial**

Asocia a c/θ asignaciones que son óptimas para i

$$f(\theta) \subseteq \{a \in A : a R_i(\theta_i) b \ \forall b \in A\}$$

Mecanismo

Es un juego $\Gamma = (g, S_1, \dots, S_n)$ donde c/ $i \in \{1, \dots, n\}$ tiene un conjunto de acciones S_i y recibe $g(s_1, \dots, s_n) \in A$ (alt. soc. factibles) que depende de las acciones de otros indiv.

↳ se revela la información a través de las decisiones estratégicas

Implementación en estrategias dominantes

Sea un mecanismo $\Gamma = (S_1, \dots, S_n, g)$, denotamos por:

[$E_g(\theta)$: conjunto de equilibrios en estrategias dominantes]

[Luego $g(E_g(\theta)) := \{g(s^*(\theta)) \in A : s^*(\theta) \in E_g(\theta)\}$ conjunto de alternativas socialmente factibles que son implementadas por Γ en el estado θ]

Entonces, tenemos las siguientes definiciones

El mecanismo Γ:

* implementa la regla de elección social $f: \Theta \to A$ si para cada $\theta \in \Theta$ tenemos que

$$E_g(\theta) \neq \emptyset \quad y \quad g(E_g(\theta)) \subseteq f(\theta)$$

↳ Es decir, requerimos que las alternativas socialmente factibles implementadas por Γ en θ estén en el conjunto de alternativas sociales ($f(\theta)$)

* implementa totalmente la regla de elección social $f: \Theta \to A$ si $\forall \theta \in \Theta$ tenemos que

$$E_g(\theta) \neq \emptyset \quad y \quad g(E_g(\theta)) = f(\theta)$$

clave

* es Directo cuando $S_i = \Theta_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

↳ Es decir, en un mecanismo directo el conjunto de estrategias del agente consiste en sus posibles tipos Θ_i

→ Luego, una regla de elección social $f: \Theta \to A$ es

* implementable de forma veraz en est. dominantes:

Si $\exists$ un mecanismo directo $\Gamma d = (g, \Theta_1, \dots, \Theta_n)$:

(i): Decir la verdad es una est. dominante, es decir:

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \ \theta_i \in \Theta_i$$

$$g(\theta_i, \hat{\theta}_{-i}) R_i(\theta_i)\, g(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_{-i})$$

$$\forall \hat{\theta}_i \in \Theta_i, \ \forall \hat{\theta}_{-i} \in \Theta_{-i}$$

(ii): $\forall \theta \in \Theta$, $g(\theta) \in f(\theta)$

→ Notemos que IVED es más débil que implementación o implementación total.

IVED solo requiere que el perfil $\theta = (\theta_1, \_\_ \theta_n)$ → (verdaderos tipos) sea un equilibrio $\forall \theta_i$. Y que el outcome $g(\theta)$ sea un elemento de $f(\theta)$

↳ sin embargo, si alguien miente $g(\theta) \notin f(\theta)$ → no me importa → solo me interesa que el equilibrio cuando dicen la verdad se porte bien.

Principio de Revelación

Si la regla de elección social es implementable en estrategias dominantes

⇒ es implementable de forma veraz en est. dominantes

↳ **Comentarios**

* La gran virtud de los equilibrios en est. dominantes es que los agentes no necesitan saber las preferencias de los otros.

↳ ⇒ Podemos centrar la atención en los mecanismos directos donde c/u reporta su propio tipo

* Dado ↗ el supuesto de información completa puede ser obviado.

* El P. de Revelación ⇒ que una cond. necesaria para que una regla de elección social <u>univaluada</u> sea implementable es que ta tenga como eq. en est. dom. decir la verdad

Condiciones Necesarias y suficientes para Implementación

Teorema 1: Suponga que R contiene solo relaciones estrictas de preferencia

Si una regla de elección social es implementable de forma veraz en est. dominantes ⇒ es implementable en est. dominantes

Teorema 2: R solo contiene $\succsim$ estrictas

Una regla de elección social es totalmente implementable en est. dominantes ⟺ es univaluada e IVED

Teorema Gibbard-Satterthwaite

- R solo contiene $\succsim$ estrictas
- $|A| \geq 3$

Sea $f: \Theta \rightarrow A$ regla de elección social univaluada: $f(\Theta) = A$

⇒ f es IVED ⟺ es dictatorial

IMPLEMENTACIÓN EN EST. DOMINANTES CON TRANSFERENCIAS

Mecanismos para provisión de un bien público

Vamos a partir asumiendo algunos supuestos

* Preferencias cuasi-lineales
* Las alt. social factibles determinan una decisión de provisión de un bien público y permiten transferencias

→ El conjunto de alt. soc factibles viene dado por:

$$A = \{(x, t_1, \ldots, t_n) : x \in \{0,1\} \wedge (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

→ Para c/i y tipo $\theta_i \in \Theta_i$, la preferencia $R_i(\theta_i)$ es representada por la función de utilidad cuasi-lineal

$$\boxed{u_i(x,t) = \theta_i x + t_i}$$

Para c/i, $\Theta_i \subseteq \mathbb{R}$ contiene una vecindad del 0 (asegura que pueda haber indiferencia).

Vamos a agregar otros supuestos:

* En este contextos las ut. son CARDINALES y comparables entre i's
* El costo del bien público ya está incorporado en las valoraciones θ_i

→ Queremos que el resultado de la implementación sea eficiente → max la suma de las utilidades sin incurrir en costos para el planificador

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{\{x,t\} \in A} \left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 0 \end{array} \right\}$$

→ En el óptimo social el bien público se provee ssi $\sum \theta_i \geq 0$

Transf. óptimas $\sum t_i = 0$

Ahora vemos algunas definiciones

Dada $f : \Theta \to \{0,1\} \times \mathbb{R}^n$:

$$f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), \ldots, t_n(\theta))$$

diremos que f es

* **factible** cuando $\sum t_i \leq 0 \ \forall \theta \in \Theta$
* **Presupuestariamente balanceada** cuando $\sum t_i = 0 \ \forall \theta \in \Theta$
* **Exitosa** cuando $x(\theta) = 1 \iff \sum \theta_i \geq 0$
* **Ex-post eficiente** si es
  - exitosa
  - presup. balanceada

Lo que queremos es saber si existen reglas de elc. social ex-post eficientes que sean IVED

Mecanismos

Groves

Un mecanismo de Groves $\Gamma_G = (\Theta, f)$ es un mecanismo

* directo

→ Caracterizado por

$$\left[f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), \ldots, t_n(\theta)) \right]$$

con $\underline{x(\hat{\theta})} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum \hat{\theta}_i \geq 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$

$\forall i \; \exists \; h_i : \Theta_{-i} \to \mathbb{R}$:

$$\underline{t_i(\hat{\theta})} = \begin{cases} h_i(\hat{\theta}_{-i}) + \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j & \text{si } \sum \hat{\theta}_i \geq 0 \\ h_i(\hat{\theta}_{-i}) & \sim \end{cases}$$

↓

alinea incentivos

↳ Si el agente i cambia la decisión de la sociedad

⟹ Debe transferir el valor exacto de la externalidad negativa que está causando

↳ **Teorema de Groves**

En un mecanismo de Groves decir la verdad es una estrategia dominante

Teorema Green & Laffont

Sea Γ_D un mecanismo que implementa de forma veraz en est. dominantes una regla de elección social exitosa

⟹ Γ_D es un mecanismo de Groves

Clarke

Un mec. de Clarke $\Gamma_C = (\Theta, f)$ es un mec. de Groves donde $\forall i$ tenemos:

$$h_i(\hat{\theta}_{-i}) = \min\left\{ -\sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j , 0 \right\}$$

↓

las transf. permiten que el individuo i compense a los otros por la externalidad

↳ Siguiendo esta lógica

$\sum_i \hat{\theta}_i < 0 \wedge \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j < 0 \Rightarrow t_i(\hat{\theta}) = 0$

$\sum_i \hat{\theta}_i \geq 0 \wedge \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j \geq 0 \Rightarrow \underbrace{t_i(\hat{\theta}) = 0}_{-\sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j + \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j}$

$\sum_i \hat{\theta}_i < 0 \wedge \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j \geq 0 \Rightarrow t_i(\hat{\theta}) = -\left| \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j \right|$

$\sum_i \hat{\theta}_i \geq 0 \wedge \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j < 0 \Rightarrow t_i(\hat{\theta}) = -\left| \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j \right|$

* Este teorema es un caso particular de Groves, donde solo pagas si das vuelta la votación y no hay subsidios

Teorema

El mecanismo de Clarke no es presupuestariamente balanceado

Teorema

No existe un mecanismo de Grove factible cuyas transferencias agregadas sean dominadas por las transf. que implementa el mecanismo de Clarke

⟹ **Corolario**: ∄ reglas de elec ex post eficientes que sean IVED

(si ∃ reglas exitosas, factibles e IVED)

Vicrey-Clarke Groves

Es un mecanismo eficiente y strategy proof basado en el cobro de compensaciones sociales

↳ con pref. cuasilineales y no observables

***Supuestos:**

$n \geq 3$ agentes

A alt. sociales

$u^i: A \to \mathbb{R}$

Planificar → max suma de las utilidades

↳ no conoce las u^i

***Mecanismo**

1) Le pide a c/u reportar la función que determina sus valoraciones (no nec. es u^i → puede mentir)

⟹ mecanismo directo

2) Dado los reportes $\{f^i\}_{i \in I}$ escoge a^* que cumple

$$\left[a^* \in \underset{a \in A}{\arg\max} \sum_{j=1}^{n} f^j(a)\right]$$

3) implementa a^* y cobra a c/i:

$$\underbrace{t^i(f^1, \ldots, f^n) = \underbrace{\left[\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} f^j(a)\right]}_{\text{Bienestar social cuando } i \text{ no está}} - \underbrace{\sum_{j \neq i} f^j(a^*)}_{\text{Bienestar social del resto cuando } i \text{ sí está}}}_{\Delta \text{ Bienestar cuando } i \text{ está/no está}}$$

→ Entonces, notemos que la ut de i cuando el planner implementa a^* y le cobra t^i es:

$$\left[u^i(a^*) - t^i(f^1, \ldots, f^n)\right]$$

$$= u^i(a^*) + \sum_{j \neq i} f^j(a^*) - \left[\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} f^j(a)\right]$$

con

$$a^* \in \underset{a \in A}{\arg\max} \Big(\overset{(*)}{\overbrace{u^i(a) + \sum_{j \neq i} f^j(a)}} \overset{(*)}{\overbrace{+ f^i(a) - u^i(a)}} \Big)$$

$\downarrow$ sumo u^i $\quad = \sum f^j(a)$ $\quad \downarrow$ resto u^i

→ lo que yo quiero es max mi utilidad → quiero que el planner haga ese trabajo.

*Notemos que de su utilidad lo único que i puede controlar es

$$u^i(a^*) + \sum_{j \neq i} f^j(a^*) \quad (*)$$

pues el máximo no depende de i → él quiere maximizar $(*)$

↳ estos términos son los mismos 1eros 2 términos del argmax del planner $(*)$

$\Longrightarrow (*) = (*)$

Entonces para que el planner haga la "pega" que quiere i $(*) = 0$, pues así sus problemas de opt. serán los mismos (misma F.O.)

$\Longrightarrow \boxed{f^i(a) = u^i(a)}$ → revelan su información

Subasta V-C-G

CASO 1: Venta de un objeto

- Objeto indivisible
- Alternativas sociales son: $A = \{e_1, \dots, e_n\} \rightarrow$ vectores canónicos

$\Leftrightarrow$ se le entrega el objeto al individuo i

- NO hay externalidades
  $\hookrightarrow [u^i(e_j) = 0 \quad \forall i \neq j]$

$\rightarrow$ lo óptimo en este caso es darle el objeto a quien lo valore más $\Rightarrow$ nos interesa conocer $\theta^i = u^i(e_i)$

$\Rightarrow$ El mecanismo VCG es equivalente a un mecanismo directo (i.e: "dame tu valoración")

$\hookrightarrow [\{b_j\}_{j \in \{1, \dots, n\}}]$ valoración de j x el objeto.

$\rightarrow$ Le cobra a cada individuo

$$t^i(b^1, \dots, b^n) = \begin{cases} \max_{j \neq i} b^j & \text{si } b^i \geq \max_{j \neq i} b^j \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ "subasta a sobre cerrado de segundo ~~orden~~ (precio)"

* comentario

- Es strategy proof
- subasta equivalente a la clásica
- alinea incentivos (se le cobra según la 2da mayor puja).

CASO 2: Venta de varios objetos

- M objetos
- $\mathcal{M}$ conjunto de distribuciones de objetos entre n individuos

$$\left[(s^1, \dots, s^n) \in \mathcal{M} \text{ ssi } \quad \circ\ M = \bigcup_{i=1}^{n} s^i \cdot s^i \cap s^j = \emptyset \quad \forall i \neq j \right]$$

$\rightarrow$ La subasta de VCG es un caso particular del mecanismo VCG

$\hookrightarrow$ Permite implementar la venta de forma eficiente y strategy proof.

(I) c/i reporta cuánto está dispuesto a pagar por c/subconjunto de objetos:

$$\{b^i(s)\}_{s \subseteq M}$$

(II) Basado en los reportes, se escoge una distribución de objetos $(\bar{s}^1, \dots, \bar{s}^n) \in \mathcal{M}$ que max. el bienestar social.

(III) c/i recibe el conjunto $\bar{s}^i$ y debe pagar

$$\left[\max_{(s^1, \dots, s^n) \in \mathcal{M} : s^i = \emptyset} \sum_{j \neq i} b^j(s^j) - \sum_{j \neq i} b^j(\bar{s}^j) \right]$$

CASO 2.1: Objetos idénticos

- m objetos idénticos
- i tiene una valoración V_k^i por el k-ésimo objeto con

$$V_k^i \geq V_{k+1}^i$$

- La valoración viene dada por:

$$\left[u^i(s) = \sum_{r=1}^{\#S} V_r^i \right]$$

$\hookrightarrow$ me basta conocer el vector de largo m $(V_1^i, \dots, V_m^i)$ para inferir cada $u^i(s)$

Entonces, la UT. de i cuando compra K objetos por un precio P es:

$$\left[\sum_{r=1}^{K} V_r^i - P\right]$$

Concluimos que la siguiente subasta es
- eficiente
- strategy proof
- max los beneficios esperados del vendedor

(I) c/i hace pujas $\{f_r^i\}_{r\in\{1,\dots,m\}}$ por las diferentes unid. del objeto
↳ con $f_K^i \geq f_{K+1}^i \quad \forall K$

(II) El vendedor adjudica los objetos a las m pujas + altas

(III) c/ agente que recibe K paga la suma de las K + altas pujas de los otros que no estan en las m + altas

EJEMPLO

i	V_1^i	V_2^i	V_3^i	V_4^i	V_5^i
1	16	12	3	1	1
2	14	11	10	9	8
3	17	5	1	1	1

: 5 pujas mayores

i=3 → 1 objeto → puja + alta
⇒ paga $P_3 = 10$

construimos la matriz de pagos sin i=3 y vemos quién se llevaría los objetos → esa pérdida es la que se paga:

1	16	12	3	1	1
2	14	11	10	9	8

i=2 → 2 objetos → paga x las 2 pujas + altas sin incluirlo.

1	16	12	3	1	1
3	17	5	1	1	1

$P_2 = 5+3 = 8$

i=1 → 2 objetos

2	14	11	10	9	8
3	17	5	1	1	1

$P_3 = 10+9 = 19$

→ por lo tanto su UT. son:

i=1 $U_1 = 16+12-19 = 9$

i=2 $U_2 = 14+11-8 = 17$

i=3 $U_3 = 17-10 = 7$

caso 2.2 Objetos distintos con valoración aditiva

La valoración que le da i a un conjunto $S \subseteq M$ de objetos viene dada por

$$\left[u^i(S) = \sum_{a\in S} V_a^i\right] \rightarrow \text{Hipótesis}$$

↓ valoración de i al objeto a

→ vendedor intuye u^i a partir de las valoraciones de c/ objeto

Entonces, la siguiente subasta es
- eficiente
- strategy proof
- max beneficios vendedor:

(I) c/i anuncia pujas $(f_a^i)_{a\in M}$ por los objetos

(II) se adjudica el objeto a el de mayor puja

(III) Paga la segunda mayor puja

↳ es como m subastas simultáneas a 2do mayor precio.

Ejemplo:

i	V_1^i	V_2^i	V_3^i	V_4^i	V_5^i
1	16	12	3	1	1
2	14	11	10	9	8
3	17	5	1	1	1

→ La subasta adjudica y cobra por c/objeto

⇒ Las utilidades son

$u^1 = 12 - 11 = 1$

$u^2 = 10 + 9 + 8 - 3 - 1 - 1 = 22$

$u^3 = 17 - 16 = 1$

EMPAQUETAMIENTO

Empaquetar podría disminuir los ingresos del vendedor, incluso cuando los objetos son complementarios

Ejemplo: $M = \{a, b\}$, $i = 1, 2, 3$

i	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
1	8	4	14
2	4	7	12
3	7	1	10

CASO 1: sin empaquetar

i=1 se lleva $\{a\} \rightarrow P_a = 7$

i=2 se lleva $\{b\} \rightarrow P_b = 14-8$

i=3 no se lleva nada

→ $\Pi = 7 + 6 = 13$

pérdida por no complementariedad

Caso 2: empaquetado

i=1 se lo lleva y $P = 12 = \Pi < 13$

¿cuándo conviene empaquetar?

- i = 1,2
- cada i valora $S \subseteq M$ en $u^i(S)$ con $u^i(S) \leq u^i(T)\ \forall\ S \subseteq T$
- El vendedor empaqueta en lotes $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_r\}$ y los vende en una subasta VCG
- El vendedor determinará una distribución $(S^1, S^2) \in M$ con $S^i \neq \emptyset$; $S^i = \cup L_r$
- sus ingresos serán

$$\Pi(\mathcal{L}) = \underbrace{u^2(M)}_{\text{ut. cuando no está 1}} - \underbrace{u^2(S^2)}_{\text{lo que le tocó}} + \underbrace{u^1(M)}_{\text{ut. cuando no está 2}} - \underbrace{u^1(S^1)}_{\text{lo que le tocó}}$$

- Luego como es una subasta VCG ⇒ es eficiente, es decir:

$$u^1(S^1) + u^2(S^2) \geq \max\{\underbrace{u^1(M), u^2(M)}_{\text{si uno es el max ⇒ el otro es el min}}\}$$

$\Leftrightarrow 0 \geq \max\{u^1(M), u^2(M)\} - u^1(S^1) - u^2(S^2)$

$/ + \min\{u^1(M), u^2(M)\}$

$$\boxed{\min\{u^1(M), u^2(M)\} \geq \Pi(\mathcal{L})}$$

↳ mejor empaqueto todo junto (est. dominante)

Teorema: supuestos

- varios objetos - subasta VCG
- i = 1, 2 → valoraciones monótonas en la cant. de objetos

⇒ subasta que maximiza: lote único.

Esta es la única est. óptima del vendedor cuando es ineficiente entregar todos los objetos a un único individuo

— |A|

RESUMEN DEFINICIONES

Funcional de Bienestar → **Prop. Deseadas**

Asocia a c/P una preferencia social $R(P)$
$R: \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ $(\mathcal{P} = (\mathcal{P}^*)^n)$

* Unanimidad:
$\forall P \in \mathcal{P}: a_i \succ_n a_j \; \forall n$
$\Rightarrow a_i \, R(P) \, a_j$
* Ind. Alt. Irrelevantes
sean $P, P' \in \mathcal{P}$
- coinciden sobre $\{a_i, a_j\}$
$\Rightarrow a_i R(P) a_j \Leftrightarrow a_i R(P') a_j$

Teorema de Imposibilidad de Arrow
- Supuestos
  - I) $R: \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ (dominio maximal)
  - II) Preferencias completas
  - III) unánime
  - IV) IAI
$\Rightarrow \exists h \in N: a_i \succ_h a_j \Rightarrow a_i R(P) a_j$
$(\forall a_i, a_j \in A) \; (\forall P \in \mathcal{P})$

Regla de Elección Social → **Prop. Deseada**

Asocia a c/P una alt. socialmente factible
$f: \mathcal{P} \to A$

* Strategy Proof: una RES $f: \mathcal{P} \to A$ es S.P. si:
$\forall P, P' \in \mathcal{P}$
$f(\underbrace{P'_n, P_{-n}}) \neq f(P) \Rightarrow f(P) \succ_n f(P'_n, P_{-n})$
Perfil que se obtiene cambiando para n su pref. de $\succ_n$ a $\succ_n'$.

Teorema de Imposibilidad de G-S
- Supuestos
  - I) St. Proof
  - II) $f(P) = A$
$\Rightarrow \exists h \in N: \forall P \in \mathcal{P}$
$f(P) \succ_h a \quad \forall a \neq f(P)$

Algunas RES

* **R. Condorcet Monótona**

una RES es C.M. si
- Dados $P, P' \in \mathcal{P}$ coinciden sobre $\{a_i, a_j\}$
- $\{a_i, a_j\}$ son top bajo P'
- $f(P) = a_i$
$\Rightarrow f(P') = a_i$
↳ si se cumple CM:
$f(P) = a_i \Rightarrow f(T_{ij}(P)) = a_i$

Teorema de Imposibilidad de Yu
- RES CM
- $f(P) = A$
$\Rightarrow \exists h \in N: \forall P \in \mathcal{P}$
$f(P) \succ_h a \quad \forall a \neq f(P)$

* **R. Maskin Monótona**

una RES es M.M. si: $\forall P, P' \in \mathcal{P}$ tenemos que para c/$a \in f(P)$
$\forall i: L_i(a, P) \subseteq L_i(a, P') \Rightarrow a \in f(P')$
$L_i(a, P) = \{b \in A : a R_i(P) b\}$
↳ alt. sociales que son peores o iguales a a bajo $R_i(P)$.

Prop. dem en Ayudantía:
- I) MM. ⇒ M.C.
- II) unánime ⇒ $f(P) = A$

Teorema de May
El voto may. es el único que cumple

RES con 2 alternativas → **Voto Mayoritario**
$V(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \text{signo}(\sum \theta_i)$

$f: \{-1, 0, 1\}^n \to \{-1, 0, 1\}$

Propiedades
1) Simetría: $\forall \theta, \forall \sigma$
$V(\theta) = V(\theta_{\sigma(1)}, \ldots, \theta_{\sigma(n)})$
2) Neutralidad
$V(\theta) = -V(-\theta)$
3) Responsividad: $\theta' > \theta$
$V(\theta) \geq 0 \Rightarrow V(\theta') = 1$

$f_\beta(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \text{signo}(\sum \beta_i \theta_i)$ → cumple
- RES
  - S.P.
  - CM
  - $f_\beta(P) = A$
- F.B
  - unanim.
  - IAI

IMPLEMENTACIÓN EN ESTRATEGIAS DOMINANTES

RES: es una correspondencia $f: \Theta \twoheadrightarrow A$ que asocia a cada perfil de tipos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ un conjunto de alternativas factibles

Ejemplos

1) construir / no construir

- Alt. socialmente factible

$$\boxed{(x, t) = (x, t_1, \dots, t_n) \in \{0,1\} \times \mathbb{R}^n_+}$$

- Preferencias cuasi-lineales

$$\boxed{\begin{array}{c} (x, t)\ R_i(\theta_i)\ (x', t') \\ x\theta_i - t_i \geq x'\theta_i - t_i' \end{array}}$$

- RES: $f: \Theta \twoheadrightarrow A$ $(f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), \dots)$ $\in \{0,1\} \times \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{x(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum \theta_i \geq C \\ 0 & \sim \end{cases}}$$

*** Principio de Revelación**
Si la RES es implementable $\Longrightarrow$ es IVED

Condiciones necesarias y suficientes para implement.

Teorema 1:
SUPUESTO: • R solo tiene relaciones estrictas
una RES IVED $\Rightarrow$ es implementable

Teorema 2: (mismo supuesto que T1)
una RES es totalmente impl. $\Leftrightarrow$ es univaluada e IVED

Teorema G-S: supuestos
- R solo relaciones estrictas
- $|A| \geq 3$
- $f: \Theta \to A$ univaluada
- $f(\Theta) = A$

f es IVED $\Leftrightarrow$ es dictatorial

Mecanismo: es un juego $\Gamma = (g, S_1, \dots, S_n)$ si
- S_i tiene un conjunto de acciones
- $g(s_1, \dots, s_n) \in A \to$ alt. sociales dependen de las acciones de los i's

* se revela la infor. a través de las decisiones estratégicas.

sea un $\boxed{\text{mecanismo}}$ Γ

$E_g(\theta)$: conjunto de equilibrios en estrategias dominantes

$g(E_g(\theta))$: conjunto de alt. socialmente factibles implementadas por Γ en el estado θ
$= \{g(s^*(\theta)) \in A : s^*(\theta) \in E_g(\theta)\}$

Propiedades de los Mecanismos

* **implementa:** la RES f si $\forall \theta \in \Theta$:

$$E_g(\theta) \neq \emptyset \ \wedge\ g(E_g(\theta)) \subseteq f(\theta)$$

* **implementa totalmente:** la RES f si $\forall \theta \in \Theta$:

$$E_g(\theta) \neq \emptyset \ \wedge\ g(E_g(\theta)) = f(\theta)$$

* **implementa de forma veraz en est. dominantes** (IVED)
si $\exists$ un $\underbrace{\text{mecanismo directo}}_{}$ Γ_d
(ie: $S_i = \Theta_i \quad \forall i \in N$)
que cumple

(I): Decir la verdad es una est. dominante: $\forall i \in N$, $\theta_i \in \Theta_i$

$$g(\theta_i, \hat{\theta}_{-i})\ R_i(\theta_i)\ g(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_{-i})$$
$$(\forall \hat{\theta}_i \in \Theta_i), (\forall \hat{\theta}_{-i} \in \Theta_{-i})$$

(II): $\forall \theta \in \Theta$, $\underbrace{g(\theta)}_{\text{lo que se implementa}} \in \underbrace{f(\theta)}_{\text{alt soc factibles}}$

↳ solo me interesa que el equilibrio cuando no miente se porta bien

IMPLEMENTACIÓN CON TRANSFERENCIAS

Mecanismos para provisión de un bien público

→ * SUPUESTOS
- Pref cuasi-lineales, con utilidades cardinales y comparables entre individuos

$\boxed{u_i(x,t) = \theta_i x + t_i}$

↳ las valoraciones incluyen el costo del bien.

↳ Objetivo: eficiencia:

$$\max_{\{x,t\} \in A} \left(\sum \theta_i\right) x + \sum t_i \quad \text{s.a.} \quad \sum t_i \leq 0$$

→ ÓPTIMO: → se provee el bien público ssi $\sum \theta_i \geq 0$
→ $\sum t_i = 0$.

Propiedades de la RES f

$f: \Theta \to \{0,1\} \times \mathbb{R}^n$

- * factible: $\sum t_i$ $(\forall \theta \in \Theta)$
- * Presupuestariamente Balanceada: $\sum t_i = 0$ $(\forall \theta \in \Theta)$
- * Exitosa: $x(\theta) = 1 \iff \sum \theta_i \geq 0$
- * Ex-post eficiente: - exitosa
  - presup. balanceada

Mecanismos

↳ **Groves** → $\Gamma_G = (\Theta, f)$, directo, caracterizado por:

$f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), \ldots, t_n(\theta))$

$$x(\hat{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum \hat{\theta}_i \geq 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$t_i(\hat{\theta}) = \begin{cases} h_i(\hat{\theta}_{-i}) + \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j & \text{si } \sum \hat{\theta}_i \geq 0 \\ h_i(\hat{\theta}_{-i}) & \sim \end{cases}$$

↓

* caso particular

↓

Clarke

$$h_i(\hat{\theta}_{-i}) = \min\left\{-\sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j, 0\right\}$$

↳ compensa a los otros x su externalidad.

↳ **Teorema**: El mecanismo de Clarke no es P. Balanceado

Corolario: ∄ RES ex post eficiente que sea IVED

*** Teorema de Groves**
En un Γ_G decir la verdad es una est. dominante

*** Teorema Green & Laffont**
sea Γ_D IVED una RES exitosa
$\Rightarrow \Gamma_D$ es un Γ_G

Teorema ∄ un Γ_G factible cuyas transferencias agregadas sean dominadas por las transferencias que implementa el mec. de Clarke