Tarea 1

Microeconomía I

Profesor: Felipe Avilés
Integrantes: Domingo Díaz De Valdes, Alberto Undurraga, Isidora Lara, Valeria Ulloa, Pedro Hurtado y María José Castro

1. MWG

1.B.3

Por definición sabemos que una función $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ representa a $\succsim$ si $\forall x, y \in$X

$$x \succsim y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Si a $u(\cdot)$ se le aplica cualquier función estrictamente cresciente (f), el resultado seguirá cumpliendo que $f(u(x)) \geq f(u(\mathbf{y}))$. Definida $f(u(\cdot))$ como $v(\cdot)$, observamos que $\forall x, y \in$X

$$x \succsim y \Longleftrightarrow v(x) \geq v(y)$$

por lo que $v(x)$ también es una función de utilidad que representa la preferencia $\succsim$.

1.B.4

Para que $u(\cdot)$ sea una función de utilidad que represente la relación de preferencia $\succsim$, se debe cumplir lo del enunciado, y también lo siguiente:

$$x \succsim y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Demostraremos en primer lugar que $x \succsim y$ implica $u(x) \geq u(y)$. Si, $x \sim y$, se tiene que $x \succsim y$ y además que $y \succsim x$, y que $u(x) = u(y)$. Por otro lado, si $x \succ y$, se tiene que $x \succsim y$ (no se cumple que $y \succsim x$), y que $u(x) > u(y)$. Por lo tanto, tenemos que si $x \succsim y$ entonces se cumple que $u(x) \geq u(y)$.

Ahora demostramos que $u(x) \geq u(y)$ implica $x \succsim y$. Si $u(x) = u(y)$, entones $x \sim y$, por lo que $x \succsim y$ y que $y \succsim x$. Por otro lado, si $u(x) > u(y)$, entones $x \succ y$, por lo que $x \succsim y$. Por lo tanto, tenemos que si $u(x) \geq u(y)$ entonces se cumple que $x \succsim y$.

Se concluye que $u(\cdot)$ representa la relación de preferencia $\succsim$.

1.B.5

Siguiendo el hint del ejercicio y basándonos en lo visto en clases, partimos haciendo la demostración para el caso en que las preferencias son antisimétricas, es decir, siempre son estrictas. Como las preferencias están definidas en un X finito, este lo podemos escribir como $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Luego, podemos usar como conjunto de llegada a los racionales, que es un conjunto numerable de los reales. Así, como es infinito y numerable, podemos escribir este conjunto como $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, ...\}$, con $q_i \in \mathbb{Q}\ \forall i \in \mathbb{N}$.

De esta forma, partimos definiendo $u(x_1) = q_1$, donde q_1 en realidad es arbitrario. Después, para x_2 vemos si $x_1 \succ x_2$ o si $x_2 \succ x_1$, lo que sabemos que sucede porque las preferencias son racionales y por tanto cumplen con el axioma de completitud, y además asumimos antisimetría. De esta forma, si $x_2 \succ x_1$, elegimos $u(x_2)$ igual al primer $q_i > q_1$, mientras que si $x_1 \succ x_2$, elegimos $u(x_2)$ igual al primer $q_i < q_1$. Después, para $s > 2$ seguimos con la misma lógica para asignar un q_s a $u(x_s)$. Es decir, para $u(x_s)$ elegimos un q_s que no haya sido utilizado en $\{u(x_1), u(x_2), ..., u(x_{s-1})\}$ tal que cumpla con que con el mismo orden que las preferencias. Es decir, que cumpla con que $q_s > q_j$ si $x_s \succ x_j$, o bien con que $q_j > q_s$ si $x_j \succ x_s$ $\forall j \in \{1, 2, ..., s-1\}$. Como siempre tenemos un número racional entre otros dos números racionales y las preferencias son transitivas, sabemos que este q_s siempre existirá, por lo que creamos una función de utilidad tal que cumple con que $u(x_i) \geq u(x_j)$ si y solo si $x_i \succeq x_j$.

Ahora, para sacar el supuesto de antisimetría, podemos usar el conjunto cuociente $X/\sim$, definido como aquel con todas las clases de equivalencia $[x]_\sim$. Es decir, $X/\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$. Sabemos por construcción que las preferencias entre distintas clases de equivalencia son antisimétricas, por lo que construimos la función de utilidad de la manera explicada anteriormente. Además, obviamente si $u([x_i]_\sim) = q_j$, tenemos que $u(x_i) = q_j$ $\forall x_i \in [x_i]_\sim$. Queda así demostrado que existe una funcion $u : X \to \mathbb{R}$ que representa preferencias racionales en X finito. En concreto, lo demostramos para $u : X \to \mathbb{Q}$, ya que $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$.

2.D.1

Un(a) consumidor(a) consume un mismo bien en dos periodos. Un bien consumido en tiempos distintos se puede considerar como el consumo de dos bienes distintos. Este caso es análogo al caso donde un individuo consume dos bienes distintos en un solo periodo, por lo que su restricción presupuestaria intertemporal es la siguiente:

$$\{x \in \mathbb{R}^2_+ : p_1x_1 + p_2x_2 \leq w\}$$

Con p_1, x_1 como el precio y la cantidad del bien consumido respectivamente en el periodo 1 y p_2, x_2 como el precio y la cantidad del mismo bien consumido respectivamente en el periodo 2. w representa la riqueza del individuo al nacer, el cual no tiene otra fuente de ingresos.

2.D.2

Si los consumidores consumen un bien x y h horas de ocio. El precio del bien es p y el salario por hora es $s = 1$.

Se tiene primero que $\{x, h\} \in \mathbb{R}^2$ y $0 \leq h \leq 24$. Se tiene que el ingreso del individuo será:

$$w = s(24 - h)$$

Además, podrá consumir:

$$px \leq w$$

Reemplazando:

$$px \leq s(24 - h)$$

$$px \leq 24 - h$$

La restricción presupuestaria será:

$$px + h \leq 24$$

2.D.3

Para la parte a), tenemos que el conjunto X está compuesto por dos puntos. Por ende, pueden suceder tres casos para $B_{p,w}$. Este puede ser vacío, puede contener un punto o puede contener dos puntos. Sí estamos en el primer caso, el conjunto es convexo ya que no existe punto que no cumpla la definición. Sí el conjunto está compuesto por un punto (x_1), tomemos dos elementos de $B_{p,w}$, es decir, dos veces el vector x_1. Por lo tanto, tomando $1 \geq \lambda \geq 0$, tenemos $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1 = x_1$. Donde sabemos que $x_1 \in B_{p,w}$, por lo que sería convexo. Sí el conjunto $B_{p,w}$ tiene sólo dos puntos distintos, tenemos que el conjunto no es convexo. Esto se debe a que si tomamos, por ejemplo, $\lambda = 0{,}5$ y $x_1 \neq x_2$, tenemos que $0{,}5 * x_1 + 0{,}5 * x_2 \neq x_1$ y $0{,}5 * x_1 + 0{,}5 * x_2 \neq x_2$, por lo que no pertenece a $B_{p,w}$, ya que es un tercer punto y el conjunto sólo tiene dos. Por lo que en este caso, no sería convexo.

Para la parte b) tenemos que si $B_{p,w}$ es vacío, ya argumentamos porqué sería convexo. Sí $B_{p,w}$ es no vacío, significa que es un subconjunto de X tal que todos sus elementos cumplen $x_i \cdot P \leq w$. Tomemos dos elementos cualquiera de $B_{p,w}$, llamémoslos x_1 y x_2. Con $\lambda \in [0,1]$ tenemos que $x_1 \cdot P \leq w \rightarrow \lambda x_1 \cdot P \leq \lambda w$ y $x_2 \cdot P \leq w \rightarrow (1-\lambda)x_2 \cdot P \leq (1-\lambda)w$. Sumando ambas desigualdades obtenemos $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \cdot P \leq w$. Osea lo podemos comprar y además, sabemos que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$, ya que X es convexo. Por lo tanto, tenemos que por definición $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in B_{p,,w}$, ya que son todos los X que cumplen con la restricción aludida. Por ende, como tanto x_1, x_2 y λ fueron arbitrarios, tenemos que el conjunto es convexo.

2.E.1

Comprobamos la existencia de homogeneidad:

$x_1(\alpha p, \alpha w) = \frac{\alpha p_2}{\alpha p_1 + \alpha p_2 + \alpha p_3} \frac{\alpha w}{\alpha p_1} = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{w}{p_1} = x_1(p, w)$

$x_2(\alpha p, \alpha w) = \frac{\alpha p_3}{\alpha p_1 + \alpha p_2 + \alpha p_3} \frac{\alpha w}{\alpha p_2} = \frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{w}{p_2} = x_2(p, w)$

$x_3(\alpha p, \alpha w) = \frac{\alpha \beta p_1}{\alpha p_1 + \alpha p_2 + \alpha p_3} \frac{\alpha w}{\alpha p_3} = \frac{\beta p_1}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{w}{p_3} = x_3(p, w)$

Con lo cual se cumple que $x(p, w)$ es homogenea de grado 0, para cualquier valor de β.

Revisamos ahora si la función de demanda cumple con la ley de Walras, es decir $p \cdot x(p, w) = w$

$$p \cdot x(p, w) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = \frac{p_2 + p_3 + \beta p_1}{p_1 + p_2 + p_3} w$$

Por lo tanto, vemos que la ley de Walras se cumple sólo cuando $\beta = 1$.

2.E.4

Tomamos la igualdad $x(p,\alpha\omega) = \alpha x(p,\omega)$, y derivamos ambos lados con respecto a α:

$$\omega D_{\alpha\omega} x(p,\alpha\omega) = x(p,\omega)$$

donde $D_{\alpha\omega} x(p,\alpha\omega)$ es la derivada de $x(p,\omega)$ con respecto a su segundo argumento: $\alpha\omega$. Si reemplazamos $\alpha = 1$ (ya que la condición anterior se cumple para todo $\alpha > 0$), la igualdad anterior queda de la siguiente forma:

$$\omega D_{\omega} x(p,\omega) = x(p,\omega)$$

$$D_{\omega} x(p,\omega) = \frac{x(p,\omega)}{\omega}$$

Lo anterior es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} D_\omega x_1(p,\omega) \\ \vdots \\ D_\omega x_L(p,\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1(p,\omega)}{\omega} \\ \vdots \\ \frac{x_L(p,\omega)}{\omega} \end{pmatrix}$$

Entonces encontramos una igualdad para la derivada de la demanda walrasiana de cada bien x_ℓ con respecto a la riqueza. Por lo tanto, la elasticidad demanda-riqueza para cada bien es igual a:

$$\varepsilon_{l,\omega} = D_\omega x_\ell(p,\omega) \frac{\omega}{x_\ell(p,\omega)} = \frac{x_\ell(p,\omega)}{\omega} \frac{\omega}{x_\ell(p,\omega)} = 1$$

Además por la homogeneidad grado 1 respecto a ω tenemos que $\frac{1}{\omega} x(p,\omega) = x(p,1)$, por lo que tenemos que:

$$D_\omega x(p,\omega) = x(p,1)$$

es decir, $D_\omega x(p,\omega)$ no depende de ω, y es una constante (tomamos el vector p como dado). Por lo tanto, las curvas de engel para cada bien x_ℓ serán lineales, con pendiente $x_\ell(p,1)$.

2.E.6

Para $\beta = 1$, tenemos que la función de demanda es:

$$x_1(p,w) = \frac{p_2}{p_1+p_2+p_3} \frac{w}{p_1}$$

$$x_2(p,w) = \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3} \frac{w}{p_2}$$

$$x_3(p,w) = \frac{p_1}{p_1+p_2+p_3} \frac{w}{p_3}$$

Donde es interesante notar que x_1 es a x_2 como x_2 es a x_3 y como x_3 es a x_1. Ahora, la proposición 2.E.1 nos dice que si la demanda walrasiana es homogénea de grado 0, en este caso tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_s(p,w)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_s(p,w)}{\partial w} w = 0$$

Para comprobar esto, primero calculamos las derivadas para el caso en que $s = 1$:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -\frac{wp_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2} - \frac{wp_2}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{w}{p_1(p_1+p_2+p_3)} - \frac{wp_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_3} = -\frac{wp_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial w} = \frac{p_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}$$

Reemplazando lo anterior en la proposición:

$$-\frac{wp_2p_1}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}-\frac{wp_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}+\frac{wp_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}-\frac{wp_2^2}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}-\frac{wp_2p_3}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{wp_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}=0$$

Eliminamos el segundo término con el tercero y multiplicamos a ambos lados por $p_1(p_1+p_2+p_3)^2/wp_2$:

$$-p_1-p_2-p_3+(p_1+p_2+p_3)=0 \to 0=0$$

Por lo que queda demostrada la primera proposición para $s=1$. Para $s=2$ y $s=3$ el desarrollo es análogo, ya que como dijimos x_1 es a x_2 como x_2 es a x_3 y como x_3 es a x_1.

Luego, la proposición 2.E.2 nos dice que si una función de demanda $x(p,w)$ cumple con la ley de Walras, entonces para todo p y w, en nuestro caso se cumple que

$$\sum_{s=1}^{3} p_s \frac{\partial x_s(p,w)}{\partial p_k} + x_k(p,w) = 0$$

Reemplazando las derivadas, tenemos para el caso $k=1$ lo siguiente:

$$-\frac{wp_2p_1}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}-\frac{wp_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}-\frac{wp_2p_3}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{wp_3}{p_3(p_1+p_2+p_3)}-\frac{wp_1p_3}{p_3(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{wp_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}=0$$

Así, el segundo término se va con el último. Luego, simplificando cada término:

$$-\frac{wp_2}{(p_1+p_2+p_3)^2}-\frac{wp_3}{(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{w}{(p_1+p_2+p_3)}-\frac{wp_1}{(p_1+p_2+p_3)^2}=0$$

Luego, multipicando la expresión a ambos lados por $(p_1+p_2+p_3)^2/w$ nos queda

$$-p_1-p_2-p_3+(p_1+p_2+p_3)=0 \to 0=0$$

Con lo que queda demostrada la proposición 2.E.2. Finalmente, la proposición 2.E.3 dice que si una demanda $x(p,2)$ satisface la ley de Walras, entonces para cada p y w, en nuestro caso tenemos:

$$\sum_{s=1}^{3} p_s \frac{\partial x_s(p,w)}{\partial w} = 1$$

En efecto, tenemos que

$$\frac{p_1p_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}+\frac{p_2p_3}{p_2(p_1+p_2+p_3)}+\frac{p_3p_1}{p_3(p_1+p_2+p_3)}=1$$
$$\frac{p_2}{(p_1+p_2+p_3)}+\frac{p_3}{(p_1+p_2+p_3)}+\frac{p_1}{(p_1+p_2+p_3)}=1$$
$$\frac{p_1+p_2+p_3}{(p_1+p_2+p_3)}=1 \to 1=1$$

Por lo que queda demostrada la proposición 2.E.3. Así, comprobamos la función del ejercicio 2.E.1 cumple con las proposiciones 2.E.1, 2.E.2 y 2.E.3.

2.E.7

La ley de Walras señala que $p \cdot x(p,w) = w$ para todo $x \in x(p,w)$. Ahora aplicando a dos bienes tenemos que:

$$p_1 x_1(p,w) + p_2 x_2(p,w) = w$$

Reemplazamos el valor de x_1 que nos da el enunciado:

$$p_1 \frac{\alpha w}{p_1} + p_2 x_2(p,w) = w$$

Despejamos x_2 y obtenemos la función de demanda del segundo bien:

$$x_2(p,w) = \frac{w(1-\alpha)}{p_2}$$

Ahora para ver si es homogénea de grado 0, multiplicamos w y p_2 por una constante β:

$$x_2(\beta p, \beta w) = \frac{\beta w(1-\alpha)}{\beta p_2} = \frac{w(1-\alpha)}{p_2} = x_2(p,w)$$

Con lo que comprobamos que la demanda del bien 2 es homogénea de grado 0.

2.E.8

Se tiene que:

$$\varepsilon_{l,k}(p,w) = \frac{d \ln\left(x_\alpha(p,w)\right)}{d \ln\left(p_k\right)} = \frac{\frac{1}{x_l} \cdot dx_l}{\frac{1}{p_k} \cdot dp_k} = \frac{p_k}{x_l} \cdot \frac{dx_l}{dp_k}$$

Para $\varepsilon_{l,w}(p,w)$:

$$\varepsilon_{l,w}(p,w) = \frac{d \ln\left(x_l(p,w)\right)}{d \ln(w)} = \frac{\frac{1}{x_l} dx_1}{\frac{1}{w} dw} = \left(\frac{w}{x_l}\right) \frac{dx_l}{dw}$$

Ahora si se tiene que :

$$\ln\left(x_l\left(p,w\right)\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln\left(p_1\right) + \alpha_2 \ln\left(p_2\right) + \gamma \ln(w)$$

Diferenciando para p_1 :

$$d \ln\left(x_l(p,w)\right) = \alpha_1 d \ln\left(p_1\right) = \frac{d \ln\left(x_2(p,w)\right)}{d \ln\left(p_1\right)} = \alpha_1$$

Resolviendo (1):

$$\frac{1}{x_l}dx_l = \alpha_1 \frac{1}{p_1}dp_1$$

$$\left(\frac{p_1}{x_l}\right)\frac{dx_l}{dp_1} = x_1$$

$$\varepsilon_{l,1} = \alpha_1$$

Análogo para α_2 y α_3.

2.

i. $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow \sum_\ell x_\ell \leq \sum_\ell y_\ell$

- Completa: $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2_+$ tenemos que $\underbrace{\sum_\ell x_\ell \leq \sum_\ell y_\ell}_{\mathbf{x}\succsim\mathbf{y}}$ o $\underbrace{\sum_\ell x_\ell \geq \sum_\ell y_\ell}_{\mathbf{x}\precsim\mathbf{y}}$
- Transitiva: $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2_+$ tenemos que si $\underbrace{\sum_\ell x_\ell \leq \sum_\ell y_\ell}_{\mathbf{x}\succsim\mathbf{y}} \wedge \underbrace{\sum_\ell y_\ell \leq \sum_\ell z_\ell}_{\mathbf{y}\succsim\mathbf{z}}$ entonces $\underbrace{\sum_\ell x_\ell \leq \sum_\ell z_\ell}_{\mathbf{x}\succsim\mathbf{z}}$
- No es monótona: Si $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ ($x_\ell > y_\ell$ para todo ℓ), entonces $\sum_\ell x_\ell > \sum_\ell y_\ell \Rightarrow \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$
- No es l.n.s: Para $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^2_+$, y para $\varepsilon > 0$ no existe una canasta $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2_+$ con $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ tal que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$, pues: $0 \leq \sum_\ell \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. En otras palabras, $\mathbf{x}$ es un punto de saciación.
- Convexa: Sea $U_{\succsim}(x)$ el contorno superior de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+$. Tenemos que $\forall \mathbf{y},\mathbf{z} \in U_{\succsim}(x)$ se cumple lo siguiente:

$$\underbrace{\sum_\ell y_\ell \leq \sum_\ell x_\ell}_{\mathbf{y}\succsim\mathbf{x}}$$

$$\underbrace{\sum_\ell z_\ell \leq \sum_\ell x_\ell}_{\mathbf{z}\succsim\mathbf{x}}$$

Para $\lambda \in [0,1]$ tenemos que:

$$\lambda \sum_\ell y_\ell \leq \lambda \sum_\ell x_\ell$$

$$(1-\lambda)\sum_\ell z_\ell \leq (1-\lambda)\sum_\ell x_\ell$$

Por lo tanto, sumando ambas desigualdades tenemos:

$$\lambda \sum_\ell y_\ell + (1-\lambda)\sum_\ell z_\ell \leq \lambda \sum_\ell x_\ell + (1-\lambda)\sum_\ell x_\ell$$

$$\sum_\ell \lambda y_\ell + \sum_\ell (1-\lambda) z_\ell \leq \sum_\ell x_\ell$$

$$\underbrace{\sum_{\ell} \lambda y_\ell + (1-\lambda) z_\ell \leq \sum_{\ell} x_\ell}_{\lambda \mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}}$$

Por lo tanto, $\lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} \in U_{\succsim}(x)$

- Homotética: $\forall \mathbf{x{,}y} \in \mathbb{R}^2_+$ y $\alpha \geq 0$ tenemos que:

$$\underbrace{\sum_{\ell} x_\ell \leq \sum_{\ell} y_\ell}_{\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}}$$

$$\underbrace{\sum_{\ell} \alpha x_\ell \leq \sum_{\ell} \alpha y_\ell}_{\alpha \mathbf{x} \succsim \alpha \mathbf{y}}$$

ii. $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow \text{máx}\{x_\ell\} \geq \text{máx}\{y_\ell\}$

- Completa: $\forall \mathbf{x{,}y} \in \mathbb{R}^2_+$ tenemos que $\underbrace{\text{máx}\{x_\ell\} \geq \text{máx}\{y_\ell\}}_{\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}}$ o $\underbrace{\text{máx}\{x_\ell\} \leq \text{máx}\{y_\ell\}}_{\mathbf{x} \precsim \mathbf{y}}$
- Transitiva: $\forall \mathbf{x{,}y{,}z} \in \mathbb{R}^2_+$ tenemos que si $\underbrace{\text{máx}\{x_\ell\} \geq \text{máx}\{y_\ell\}}_{\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}} \wedge \underbrace{\text{máx}\{y_\ell\} \geq \text{máx}\{z_\ell\}}_{\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}}$ entonces $\underbrace{\text{máx}\{x_\ell\} \geq \text{máx}\{z_\ell\}}_{\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}}$
- Monótona: Si $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ ($x_\ell > y_\ell$ para todo ℓ), entonces $\text{máx}\{x_\ell\} > \text{máx}\{y_\ell\} \Rightarrow \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$
- l.n.s: Dado que es monótona, entonces tambien es l.n.s.
- No es convexa: Sea $U_{\succsim}(x)$ el contorno superior de $\mathbf{x}$, y supongamos que tenemos $\mathbf{y{,}z} \in U_{\succsim}(x)$. No siempre se va a cumplir que:

$$\text{máx}\{\lambda y_\ell + (1-\lambda) z_\ell\} \geq \text{máx}\{x_\ell\}$$

Un ejemplo es: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donde se observa que $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$ y $\mathbf{z} \succsim \mathbf{x}$. Para $\lambda \in [0,1]$ tenemos que:

$$\lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Si $0{,}9 < \lambda < 0{,}1$, vamos a tener que:

$$\text{máx}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix} \right\} < \text{máx}\left\{ \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}9 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto, $\begin{pmatrix} \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$ ya no pertenecerá a $U_{\succsim}(x)$, es decir, $\succsim$ no es convexa.

- Homotética: $\forall \mathbf{x{,}y} \in \mathbb{R}^2_+$ y $\alpha \geq 0$ tenemos que:

$$\underbrace{\text{máx}\{x_\ell\} \geq \text{máx}\{y_\ell\}}_{\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}}$$

Si multiplicamos por α la desigualdad se mantiene:

$$\alpha\, \text{máx}\{x_\ell\} \geq \alpha\, \text{máx}\{y_\ell\}$$

Entramos el α:

$$\underbrace{\text{máx}\{\alpha x_\ell\} \geq \text{máx}\{\alpha y_\ell\}}_{\alpha \mathbf{x} \succsim \alpha \mathbf{y}}$$

iii. $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow \min\{x_\ell\} \geq \min\{y_\ell\}$

- Completa: $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2_+$ tenemos que $\underbrace{\min\{x_\ell\} \geq \min\{y_\ell\}}_{\mathbf{x}\succsim\mathbf{y}}$ o $\underbrace{\min\{x_\ell\} \leq \min\{y_\ell\}}_{\mathbf{x}\precsim\mathbf{y}}$
- Transitiva: $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2_+$ tenemos que si $\underbrace{\min\{x_\ell\} \geq \min\{y_\ell\}}_{\mathbf{x}\succsim\mathbf{y}} \wedge \underbrace{\min\{y_\ell\} \geq \min\{z_\ell\}}_{\mathbf{y}\succsim\mathbf{z}}$ entonces $\underbrace{\min\{x_\ell\} \geq \min\{z_\ell\}}_{\mathbf{x}\succsim\mathbf{z}}$
- Monótona: Si $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ ($x_\ell > y_\ell$ para todo ℓ), entonces $\min\{x_\ell\} > \min\{y_\ell\} \Rightarrow \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$
- l.n.s: Dado que es monótona, entonces tambien es l.n.s.
- Convexa: Sea $U_{\succsim}(x)$ el contorno superior de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+$. Supongamos que $\mathbf{y},\mathbf{z} \in U_{\succsim}(x)$, por lo tanto:

$$\underbrace{\min\{y_\ell\} \geq \min\{x_\ell\}}_{\mathbf{y}\succsim\mathbf{x}}$$

$$\underbrace{\min\{z_\ell\} \geq \min\{x_\ell\}}_{\mathbf{z}\succsim\mathbf{x}}$$

Dado lo anterior, tenemos que para un $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda \min\{y_\ell\} + (1-\lambda)\min\{z_\ell\} \geq \min\{x_\ell\}$$

$$\min\{\lambda y_\ell\} + \min\{(1-\lambda)z_\ell\} \geq \min\{x_\ell\}$$

Por otro lado, tenemos lo siguiente:

$$\min\{\lambda y_\ell + (1-\lambda)z_\ell\} \geq \min\{\lambda y_\ell\} + \min\{(1-\lambda)z_\ell\}$$

La desigualdad anterior se cumple porque en el lado derecho se pueden elegir los mínimos de cada vector por separado (hay más libertad para minimizar), mientras que en el lado izquierdo se debe escoger un solo mínimo para la combinación convexa completa. Por lo tanto, se tiene que $\forall$ $\mathbf{y},\mathbf{z} \in U_{\succsim}(x)$ se cumple que:

$$\min\{\lambda y_\ell + (1-\lambda)z_\ell\} \geq \min\{x_\ell\}$$

Entonces se tiene que $\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} \in U_{\succsim}(x)$ $\forall$ $\mathbf{y},\mathbf{z} \in U_{\succsim}(x)$.

- Homotética: $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2_+$ y $\alpha \geq 0$ tenemos que:

$$\underbrace{\min\{x_\ell\} \geq \min\{y_\ell\}}_{\mathbf{x}\succsim\mathbf{y}}$$

Si multiplicamos por α la desigualdad se mantiene:

$$\alpha \min\{x_\ell\} \geq \alpha \min\{y_\ell\}$$

Entramos el α:

$$\underbrace{\min\{\alpha x_\ell\} \geq \min\{\alpha y_\ell\}}_{\alpha\mathbf{x}\succsim\alpha\mathbf{y}}$$

3. Preferencias Lexicográficas

(a) La respuesta es que sí y lo demostraremos encontrando una función de utilidad explícita.

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2}{1 + x_2}$$

La intuición es la siguiente, la fracción $\frac{x_2}{1+x_2}$ es creciente y toma valores desde el $[0, 1)$. No obstante, basta con que x_1 aumente tan sólo en una unidad, para que supere a cualquier aumento posible de x_2. Por ende, cumple con el comportamiento de las preferencias Lexicográficas. Demostraremos que, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^2$, tal que $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}_+$ se cumple que $X \succsim_{lex} Y \leftrightarrow U(X) \geq U(Y)$.

Sabemos que $X \succsim_{lex} Y \leftrightarrow (x_1 > y_1$ o $x_1 = y_1$ y $x_2 \geq y_2)$. Supongamos se cumple el primer caso. Notemos que como la primera coordenada son enteros, tenemos $x_1 > y_1 \leftrightarrow x_1 - y_1 \geq 1$. Fijar que para cualquier dos valores $x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ tenemos que $0 \leq \frac{x_2}{1+x_2} < 1 \rightarrow -1 < \frac{x_2}{1+x_2} - \frac{y_2}{1+y_2} < 1$. Entonces

$$x_1 > y_1 \rightarrow x_1 - y_1 > 1 \rightarrow x_1 + \frac{x_2}{1 + x_2} - y_1 - \frac{y_2}{1 + y_2} > (1 - 1) \rightarrow U(x1, x2) > U(y1, y2)$$

.

Ahora supongamos el otro caso, es decir, $x_1 = y_1$ y $x_2 \geq y_2$. Haciendo el mismo procedimiento anterior tenemos que:

$$x_2 \geq y_2 \wedge x_1 = y_1 \rightarrow X \succsim_{lex} Y \wedge (x_2 + x_2 * y_2 \geq y_2 + x_2 * y_2) \rightarrow x_2 * (1 + y_2) \geq y_2 * (1 + x_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x_2}{1 + x_2} \geq \frac{y_2}{1 + y_2} \rightarrow x_1 + \frac{x_2}{1 + x_2} \geq y_1 + \frac{y_2}{1 + y_2} \rightarrow U(x_1, x_2) \geq U(y_1, y_2)$$

Ahora la implicancia para el otro lado, tenemos que

$$U(x1, x2) \geq U(y1, y2) \rightarrow x_1 - y_1 \geq \frac{y_2}{1 + y_2} - \frac{x_2}{1 + x_2}$$

Notemos, si $x_1 > y_1 \rightarrow X \succsim_{lex} Y$ y además $x_1 - y_1 \geq 1 > \frac{y_2}{1+y_2} - \frac{x_2}{1+x_2}$. Donde sabemos que el último termino necesariamente es menor a 1.

Si, $x_1 = y_1$, para que la desigualdad sea cierta $\frac{x_2}{1+x_2} \geq \frac{y_2}{1+y_2} \rightarrow x_2 \geq y_2 \rightarrow X \succsim_{lex} Y$.

Por último, sí $y_1 > x_1 \rightarrow -1 \geq \frac{y_2}{1+y_2} - \frac{x_2}{1+x_2}$. Pero el último término ya argumentamos que pertenece al intervalo $(-1, 1)$, por lo que es imposible que $U(x_1, x_2) \geq U(y_1, y_2) \wedge y_1 > x_1$.

Hemos demostrado que, teniendo en cuenta que la primera coordenada son enteros, existe una función de utilidad $U(x) = x_1 + \frac{x_2}{1+x_2}$ tal que, para cada $X, Y \in \mathbb{R}^2$ tenemos que $X \succsim_{lex} Y \leftrightarrow U(x_1, x_2) \geq U(y_1, y_2)$.

(b) Supongamos existe una función de utilidad $U(\cdot)$ que representa $\succsim_{lex}$ para $\{X \in \mathbb{R}^2 : x_2 \in Z_+\}$. Para $a \in \mathbb{R}_+$, notemos que la función necesariamente debe cumplir con que $U(a, 3) > U(a, 0)$, ya que representa las preferencias lexicográficas.

Definamos $I(a)$ como una correspondencia, tal que $I(a) = (\,U(a, 0), U(a, 3)\,)$. Sabemos que el intervalo contiene más de un elemento, ya que en particular, debe contener al menos al número $U(a, 1)$ y al $U(a, 2)$. Por lo tanto, para $a, b \in \mathbb{R}_+$ con $a \neq b$, tenemos que $I(a) \cap I(b) = \emptyset$. Esto se debe a que, si $a > b$, todos los elementos de $I(a)$ son mayores a $U(a,0)$. Lo que a su vez, es mayor a $U(b,3)$, debido a que representa preferencias lexicográficas. Notar que este último número es más grande que cualquier elemento de $I(b)$. Por lo tanto, la intersección de esos intervalos es $\emptyset$. Utilizando el mismo argumento, si $b > a$, sabemos que $U(b,0) > U(a,3)$, por lo que también tienen intersección vacía.

Entonces notemos lo siguiente, para todo $a \in \mathbb{R}_+$ hemos encontrado un intervalo $I(a)$ que está asociado únicamente al número a. Es decir, es una correspondencia inyectiva y que toma todos los elementos $a \in \mathbb{R}_+$. Por otra parte, sabemos que el conjunto $\{I(a) : a \in \mathbb{R}_+$ son puros intervalos con intersección nula, por lo que, como demostramos en clases, es un conjunto numerable. Es decir, para cada elemento $a \in \mathbb{R}_+$, hemos podido asociarlo a un único elemento de un conjunto numerable, lo que implica que ¡$\mathbb{R}_+$ es numerable!... Como sabemos que esto es imposible, entonces $U(\cdot)$ no puede representar $\succsim_{lex}$ para $X \in \mathbb{R}^2 : x_2 \in \mathbb{Z}_+$.

4. Continuidad de las Preferencias

De la aseveración (c) tenemos que $U_{\succsim}(x)$ y $L_{\succsim}(x)$ -los contornos superior e inferior respectivamente- son cerrados. Tomemos $U_{\succsim}(x)$. Por definición $U_{\succsim}(x) = \{y \in X : y \succsim x\}$. Sabemos también que, si hay completitud, el complemento de un conjunto cerrado es abierto, . Por lo tanto tenemos que el complemento de $U_{\succsim}(x)$, es decir $\{y \in X : x \succ y\}$ es abierto, y esta es justamente la definición del contorno inferior estricto $L_{\succ}(x)$. Análogamente, dado que $L_{\succsim}(x)$ es cerrado, $U_{\succ}(x)$ es abierto. Viendo la implicancia por el otro lado y siguiendo el mismo raciocinio, que los contornos superior e inferior estrictos de X sean abiertos, implica que los contornos inferior y superior de X son cerrados. Tenemos por lo tanto que, para cada x, contornos cerrados es equivalente a contornos estrictos abiertos, es decir, (c) y (d) son equivalentes.

Apelando nuevamente a la completitud del espacio metrico X, sabemos que el complemento de un conjunto cerrado, es un conjunto abierto. Por lo tanto, decir que $\succsim$ es cerrado, equivale a decir que $\succ$ es abierto, por lo tanto (a) y (b) son equivalentes.

Por otro lado el axioma (iv) de las preferencias racionales nos indica que si los contornos son cerrados, entonces $\succsim$ es cerrado. Esto es lo mismo que decir que (a) es equivalente a la (c).

Hemos demostrado que (c) y (d), (a) y (b), (a) y (c) son equivalentes, por lo cual todas las aseveraciones son equivalentes entre si.

5. Preferencias en Compactos

Basándonos en lo visto en la ayudantía 1 del curso, lo primero es denotar el elemento preferido de un conjunto finito de elementos $\{x^i | i = 1, ...s\}$ como $P(x^i, ...x^s)$.

Luego que ya definimos eso volvemos al ejercicio donde $M \in X$ es un conjunto compacto y $\succsim$ las preferencias definidas en X son continuas. Denotamos $F_y = \{x \in M | x \succsim y\}$ para algún $y \in M$. Este conjunto es cerrado ya que es la intersección entre dos conjuntos cerrados, $\{x \in X : x \succsim y\}$ que corresponde al contorno superior de y (por la continuidad de las preferencias es cerrado), y el conjunto M que definimos como compacto.

Para poder demostrar que el conjunto de elementos preferidos es compacto debemos basarnos en el siguiente teorema: "Si un conjunto es compacto, para toda familia de subconjuntos cerrados que satisfacen la Propiedad de Intersección Finita existe un elemento compartido por todos los integrantes de la familia".

Para asegurar lo anterior lo primero es mostrar que F_y cumple la Propiedad de Intersección Finita. Esta propiedad define que "Sea F una familia de subconjuntos de un conjunto X. Se dice que F tiene la Propiedad de la Intersección Finita si la intersección de cualquier subfamilia finita de F es no vacía". Se puede notar que efectivamente la familia de conjuntos $\{F_y | y \in M\}$ satisface esta propiedad ya que:

$$P(y^1, ..., y^s) \in \bigcap_{i=1}^{s} F_{y^i}$$

Mostramos esto con un ejemplo sencillo, imaginemos un conjunto $M = \{y^1, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6\}$. Ordenados según el orden de preferencias donde $y^i \prec y^{i+1}$. Mantenemos la definición del conjunto F_y definido anteriormente y definimos 3 subfamilias de este conjunto F_{y^1}, F_{y^2} y F_{y^3}:

- $F_{y^1} = \{y^1, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6\}$

- $F_{y^2} = \{y^2, y^3, y^4, y^5, y^6\}$

- $F_{y^3} = \{y^3, y^4, y^5, y^6\}$

De aquí se puede observar que la intersección de estas subfamilias de F_y es el elemento y^3, que corresponde a la vez a $P(y^1, y^2, y^3)$. Ahora generalizando este caso con $i = 1$ hasta s, llegamos a la expresión anterior, que demuestra que F_y cumple la Propiedad de Intersección Finita.

Dado esto entonces podemos ocupar el teorema dicho anteriormente y asegurar que:

$$\bigcap_{y \in M} F_y \neq \varnothing$$

Por lo que el conjunto de elementos más preferidos, definido como una intersección de conjuntos cerrados subconjuntos del compacto M, corresponde a un conjunto compacto.

6. Preferencias en Numerables

Podemos hacer una demostración similar a lo que hicimos en 1.B.5. De esta forma, tenemos que los elementos de X los podemos escribir como $X = \{x_1, x_2, ...\}$, mientras que para el conjunto de llegada podemos usar los racionales entre $(-1, 1)$. Como estos son numerables, podemos definir el conjunto de la imagen como $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, ...\}$, con $q_i \in \mathbb{Q} \wedge q_i \in (-1, 1),\ \forall i \in \mathbb{N}$.

Luego, hacemos exactamente lo mismo que en la demostración hecha en 1.B.5. Es decir, primero hacemos la demostración para el caso en que las preferencias son antisimétricas. De esta forma, para $u(x_1) = q_1$. Luego, si $x_2 \succ x_1$, elegiremos $u(x_2)$ igual al primer elemento $q_i > q_1$. En caso de que $x_1 \succ x_2$, elegiremos $u(x_2)$ igual al primer elemento $q_i < q_1$. Esto se puede hacer porque el supuesto de racionalidad implica que las preferencias cumplen con el axioma de completitud. Luego, tal como habíamos dicho, hacemos lo mismo para todos los x_s, donde para cada $u(x_s)$ elegiremos el primer elemento q_i tal que cumpla con que $q_i > q_j$ si $x_i \succ x_j$, o bien que $q_i < q_j$ si $x_j \succ x_i$, $\forall j \in \{1, 2, ..., s-1\}$.

Nótese que esta función se puede crear debido a que q_i son racionales, por lo que siempre existe un número racional entre otros dos números racionales. Para demostrar, podemos tomar dos números racionales cualquiera q_i y q_j. Dados estos números, sabemos que $(q_i + q_j)/2$ también es racional y estará entremedio de estos números. Es decir, si $q_i < q_j$, tenemos que $q_i < (q_i + q_j)/2 < q_j$. Esto es sumamente relevante, ya que sin importar que tan cerca del 1 (o -1) esté un número racional, siempre existirá otro racional entre este y el 1 (o -1). En concreto, podemos pensar en el número $(q_i + 1)/2$, que estará entre q_i y 1. Así, juntando lo anterior con el axioma de transitividad, la función creada existe y cumple con que $u(x_i) \geq u(x_j)$ si y solo si $x_i \succeq x_j$ y su imagen estará en el intervalo $(-1, 1)$.

Ahora, para levantar el supuesto de antisimetría, hacemos lo mismo que en la pregunta 1.B.5 y creamos esta función para el conjunto cuociente $X/\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$, donde $[x]_\sim$ son las clases de equivalencia. Como estas son antisimétricas por definición, creamos la función para estas de la manera explicada anteriormente. Además, si $u([x_i]_\sim) = q_j$, tenemos que $u(x_i) = q_j \ \forall x_i \in [x_i]_\sim$. Queda así demostrado que existe una función para las preferencias racionales definidas en el conjunto X numerables cuya imagen está en el intervalo $(-1, 1)$.

7.

Sea Z un conjunto finito y X su conjunto potencia excluyendo el vacío. Se definen las $\succsim$ sobre X como las siguientes:

(a)

- Monotonicidad
  $A \succsim B$ y C disjunto de A y B, entonces $A \cup C \succsim B \cup C$.

  Se tiene que si el agente prefiere un elemento de A que de B, la adición de C a ambos conjuntos no cambia las preferencias.

- $x \in Z$ y $\{x\} > \{y\}$ para todo $y \in A$, entonces $A \cup \{x\} > A$.

  Se tiene que si $\{x\} > \{y\}$ para todo y, entonces $\{x\} > max(A)$. Por lo que entonces se tiene $A \cup \{x\} > A$.

  Esto se traduce en que si un elemento es preferido ante todos los elementos que pertenecen a un conjunto, la unión de este conjunto con este elemento, será preferido a el conjunto; es decir, las preferencias las determina el elemento más preferido dentro del conjunto. Esto se conoce como el principio de Gardenfors.

- $x \in Z$ y $\{y\} > \{x\}$ para todo $y \in A$, entonces $A > A \cup \{x\}$

  Se tiene que si $\{y\} > \{x\}$ para todo y, entonces $max(A) > \{x\}$. Por lo que entonces se tiene $A > A \cup \{x\}$.

  Análogo a lo anterior.

(b) Dado que $\{x\}, \{y\}, \{z\} \in Z$, se tiene que los siguientes elementos pertenecen al conjunto potencia X mencionado:

$$\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}, \{x, y, z\}$$

Además, se sabe que se tienen preferencias tal que:

$$\{x\} > \{y\} > \{z\}$$

Con lo anterior, aplicando a estas preferencias las propiedades (ii) y (iii), se tiene que:

$$\{x\} > \{x, y\} > \{y\} > \{y, z\} > \{z\}$$

Ahora tomando $\{x\} > \{x, y\}$, por monotonicidad (i), se tiene que si se une $\{z\}$:

$$\{x, z\} > \{x, y, z\}$$

Tomando a su vez $\{y, z\} > \{z\}$, por monotonicidad, uniendo $\{x\}$, se tiene:

$$\{x, y, z\} > \{x, z\}$$

Lo cuál es una contradicción, por lo que no se pueden cumplir las 3 propiedades simultáneamente.

8. Misceláneo

(a) Consideramos las relación de preferencias sobre $\mathbb{R}$, definida como:

$$x \succsim y \quad \text{si} \quad x \geq 1 \wedge y < 1$$

$$x \sim y \quad \text{de lo contrario}$$

Para cualquier x, $L(x)_\succ$ es abierto, ya que es el conjunto vacío o $(-\infty; 1)$. Sin embargo, el conjunto $U(x)_\succ$ no es abierto para todo x, pues para $x < 1$ el conjunto es $[1, \infty+)$. Por lo tanto, está relación de preferencias es semi continua superior pero no semi continua inferior, en otras palabras, es es semi continua superior pero no es continua.

(b) Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las bolas de centro y radio racionales en $\mathbb{R}^+_L$. Cada bola en $\mathcal{S}$ se describe de manera única por un punto de números racionales $x \in \underbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{\text{L veces}}$ que es el centro de la bola, y por un número racional positivo $r \in \mathbb{Q}^+$ que es el radio de la bola. Por lo tanto, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto $\mathcal{S}$ y el conjunto $(\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}^+$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable, y además que el producto cartesiano de conjuntos contables es un conjunto contable, entonces tenemos que $(\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q})$ es un conjunto contable. Por otro lado, dado que $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$ también es un conjunto contable. Por lo que finalmente se concluye que $(\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}^+$ es contable, y por lo tanto, el conjunto $\mathcal{S}$ se puede enumerar.

(c) Antes de comenzar definimos el conjunto que contiene todos las bolas menos preferidas a $x \in \mathbb{R}^+_L$:

$$M(x) := \{i \in \mathbb{N} : V_i \subseteq L(x)_\succ\}$$

Si suponemos que sumar sobre el conjunto vacío da lo siguiente: $\sum_{i \in \emptyset} \frac{1}{2^i} = 0$. Entonces, si $M(x) = \emptyset$, tenemos $g(x) = 0$. Por lo tanto, dado este supuesto, se va a tener que $g(x)$ es una función bien definida, pues para todo $x \in \mathbb{R}^+_L$, se va a tener que la $\sum_{i \in M(x)} \frac{1}{2^i}$ va a existir.

Para demostrar que $g(x)$ representa a $\succsim$ se debe demostrar:

$$x \succsim y \Longleftrightarrow g(x) \geq g(y)$$

Para demostrar que $x \succsim y$ implica $g(x) \geq g(y)$ observe que si $x \succsim y$ entonces $L(x)_\succ \supseteq L(y)_\succ$. Por lo tanto, tenemos que $M(x) \supseteq M(y)$, y esto implica que $g(x) \geq g(y)$ (pues el el conjunto $M(x)$ tendrá la misma o una mayor cantidad de bolas V_i, y por tanto, la sumatoria va ser mayor) para cualquier x,$y \in \mathbb{R}^+_L$.
Por otro lado, si demostramos que $M(x) \supseteq M(y)$ implica $L(x)_\succ \supseteq L(y)_\succ$ para todo x,$y \in \mathbb{R}^+_L$ la demostración queda lista, pues lo anterior es lo mismo a demostrar que $g(x) \geq g(y)$ implica $x \succsim y$. Para esto vamos a suponer lo contrario, es decir $M(x) \supseteq M(y)$ implica que $L(x)_\succ \supseteq L(y)_\succ$ es falso, esto significa que existe un $z \in L(y)_\succ \backslash L(x)_\succ$. Dado que las preferencias son semi continuas superiores tenemos que el conjunto $L(y)_\succ$

es abierto, y por lo tanto, existe una bola abierta $V_i \in \mathcal{S}$ (Recordar de la parte anterior que $\mathcal{S}$ es el conjunto de todas las bolas de centro y radio racionales en $\mathbb{R}^+_L$: $\{V_1,\ V_2, \cdots\}$) que contiene a z y que está contenido en $L(y)_\succ$. Ya que $z \notin L(x)_\succ$, V_i no está contenida en $L(x)_\succ$, lo que demuestra que $M(x) \supseteq,\ M(y)$ es falso. Por lo tanto, $M(x) \supseteq,\ M(y)$ implica $L(x)_\succ \supseteq L(y)_\succ$. Por lo tanto queda demostrado que $g(x)$ representa las preferencias $\succsim$.

9. Función de Utilidad Aditiva

(a) Definamos las preferencias $\succsim_{(a)}$, para $\mathbb{R}^l_+$, tales que $X \succsim_{(a)} Y \leftrightarrow \prod_{i=1}^l x_i \geq \prod_{i=1}^l y_i$. Supongamos estas preferencias tuviesen alguna representación de utilidad aditiva llamada $f(\cdot)$.

Sea X un vector que tiene la primera coordenada igual a 1 y todas las demás de valor 0. Tomemos $Y = 2 \cdot X$, tenemos entonces que $X \succsim_{(a)} Y$ ya que :

$$1 \cdot \prod_{i=2}^{l} 0 \geq 2 \cdot \prod_{i=2}^{l} 0 \rightarrow f(1) + (l-1) \cdot f(0) \geq f(2) + (l-1) \cdot f(0) \rightarrow f(1) \geq f(2)$$

.
Por otra parte, fijémonos que $2 \cdot \vec{1} \succ_{(a)} 1 \cdot \vec{1}\ ^{(*)}$, ya que se cumple que $2^l \geq 1^l\ \wedge \neg(1^l \geq 2^l)$ (para $l > 0$).

Recordando que $f(1) \geq f(2)$, tenemos que $l \cdot f(1) \geq l \cdot f(2) \rightarrow 1 \cdot \vec{1} \succsim_{(a)} 2 \cdot \vec{1}$. Esto ya que $f(\cdot)$ es la representación de utilidad aditiva de $\succsim_{(a)}$. Es claro que la última proposición se contradice directamente $^{(*)}$.

Por lo tanto, concluimos las preferencias $\succsim_{(a)}$, que tienen una función de utilidad asociada, no puede tener una representación de utilidad aditiva.

(b) Primero recordaremos una propiedad de las desigualdades. Supongamos que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a > b$ y $c \geq d$. Notemos que $a + c > b + d$. Esto se debe a que, si $c = d$, entonces es si sumamos constantes a ambos lados de $a > b$, seguirá manteniendo la desigualdad estricta. Sí $c > d$, podemos escribir $c = d + e$, con $e > 0$. Entonces $a + d + e > b + d \rightarrow a + c > b + d$.

Sea $U(.)$ una función de utilidad que tenga una representación de utilidad aditiva $f(.)$. Supongamos entonces, que sí existen k vectores $\in \mathbb{R}^l_+$, con $k > 0$ tales que

$$(x_1^1, x_2^1, ...x_l^1) \succ (y_1^1, y_2^1, ...y_l^1)$$
$$(x_1^2, x_2^2, ...x_l^2) \succsim (y_1^2, y_2^2, ...y_l^2)$$
$$\vdots$$
$$(x_1^k, x_2^k, ...x_l^k) \succsim (y_1^k, y_2^k, ...y_l^k)$$

Donde cada x_j^i, y_j^i aparece la misma cantidad de veces en ambos lados de las desigualdades. Notar que la primera desigualdad la denotamos como la preferencia estricta, cosa que no afecta en el resultado, ya que, basta con reordenar las desigualdades y siguen representando las mismas preferencias. Entonces, debido a que las preferencias tienen una representación de utilidad aditiva, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{l} f(x_i^1) > \sum_{i=1}^{l} f(y_i^1)$$

$$\sum_{i=1}^{l} f(x_i^2) \geq \sum_{i=1}^{l} f(y_i^2)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{l} f(x_i^k) \geq \sum_{i=1}^{l} f(y_i^k)$$

Sumando todas las desigualdades, y recordando lo dicho al principio tenemos :

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{l} f(x_i^j) \right) > \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{l} f(y_i^j) \right)$$

Como cada elemento de la izquierda, aparece repetido en la derecha (y dado que son la misma cantidad de elementos, también se cumple al revés), tenemos que :

$$0 > \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{l} f(y_i^j) \right) - \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{l} f(x_i^j) \right) \rightarrow 0 > 0$$

Donde sabemos que lo último es imposible, ya que la desigualdad estricta no es reflexiva. Por ende, si una función de utilidad $U(\cdot)$ admite una representación de utilidad aditiva, entonces no puede cumplir la propiedad aludida. De hecho, para demostrar en (a) que la función no tenía representación aditiva, justamente lo que hicimos es aplicar esta propiedad que no puede cumplir.

10. Demanda Walrasiana I

(a) Primero, igualamos ambos argumentos de la función $min\{x_2 + 2x_1, x_1 + 2x_2\}$ a 20 y despejamos x_2 en cada ecuación. Obtenemos:

lado izquierdo:

$$x_2 + 2x_1 = 20$$

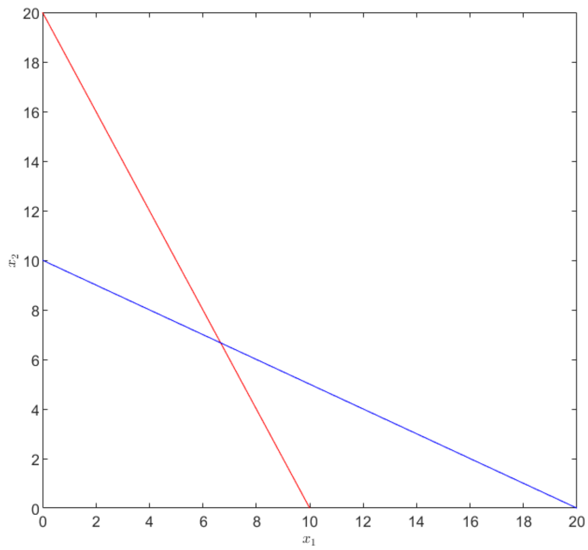
$$\boxed{\mathrm{x}_2 = 20 - 2X_1}$$

lado derecho:

$$x_1 + 2x_2 = 20$$

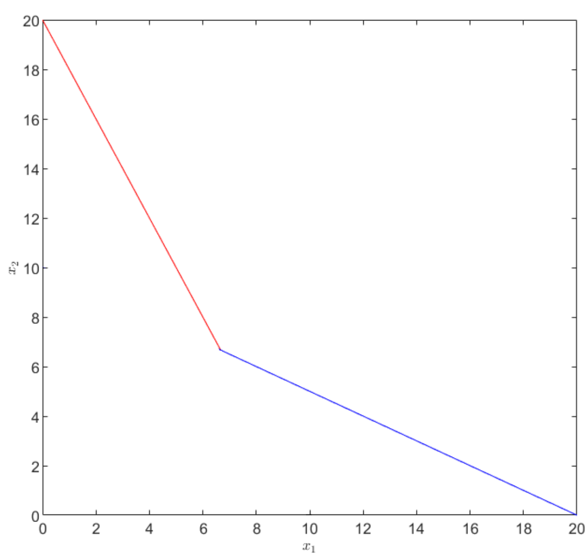
$$\boxed{\mathrm{x}_2 = 10 - \tfrac{1}{2}x_1}$$

Graficando estas funciones obtenemos



La recta azul representa el argumento del lado derecho de la función y la roja el argumento del lado izquierdo. El punto de intersección es $x_1 = x_2 = 6.\bar{6}$.

Obtenemos el siguiente gráfico para un nivel de utilidad $U = 20$



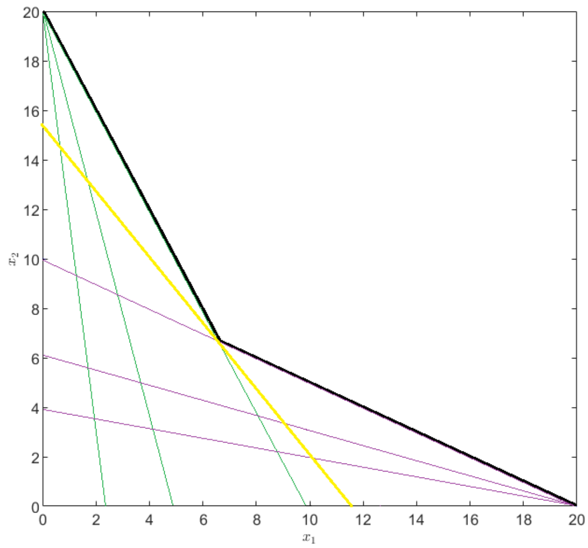
La curva de indiferencia ”hereda”las pendientes de las rectas de los argumentos, es decir

para $x_1 < 6.\bar{6} \longrightarrow \frac{p_1}{p_2} = 2$

para $x_1 > 6.\bar{6} \longrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$

(b)

Analizando gráficamente el comportamiento de la restricción presupuestaria frente a la curva de indiferencia, vemos que cuando $\frac{p_1}{p_2}$ es mayor a 2 (rectas verdes) hay solución de esquina y $x_1^* = 0$



(c) Vimos ya qué sucedía cuando $\frac{p_1}{p_2} > 2$. Cuando $\frac{p_1}{p_2}$ está entre 2 y $\frac{1}{2}$ (recta amarilla) la solución será en el punto donde cambia la pendiente de la curva de indiferencia y donde sabemos que $x_1 = x_2$. Para $\frac{p_1}{p_2}$ entre $\frac{1}{2}$ y 0 (líneas moradas), la soluciones de esquina serán con $x_2 = 0$.

Para p_1/p_2 entre 1/2 y 2, sabemos que $x_1 = x_2$, por lo que reemplazamos en la restricción presupuestaria y obtenemos

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_1 = w$$
$$x_1^* = \frac{w}{p_1 + p_2} = x_2^*$$

Al ser iguales, el cociente entre x_1^* y x_2^* es igual a 1.

11. Demanda Walrasiana II

Consideramos la siguiente función de utilidad:

$$U(x_1, x_2) = \text{máx}\{\text{mín}(x_1, x_2), \text{mín}(\frac{1}{2}x_1, x_2)\}$$

(a) Para interpretar de buena manera esta función de utilidad es importante analizarla según los distintos valores que toman x_1 y x_2.

$\boxed{x_1 = x_2}$

Dejamos la utilidad en función de cualquiera de las dos variables:

$$U = \text{máx}\{\text{mín}(x_1, x_1), \text{mín}(\frac{1}{2}x_1, x_1)\}$$

Comenzamos resolviendo las funciones mínimo por separado y luego resolvemos el máximo.

$$U = \text{máx}\{x_1, \frac{1}{2}x_1\} = x_1 = x_2$$

$\boxed{x_1 > x_2}$

Resolvemos por partes:

(1) $\text{mín}(x_1, x_2) = x_2$

(2) $\text{mín}(\frac{1}{2}x_1, x_2)$

Para esta función tendremos 3 casos distintos:

- $\frac{1}{2}x_1 = x_2 \longrightarrow \text{mín}(\frac{1}{2}x_1, x_2) = x_2$

- $\frac{1}{2}x_1 > x_2 \longrightarrow \text{mín}(\frac{1}{2}x_1, x_2) = x_2$

- $\frac{1}{2}x_1 < x_2 \longrightarrow \text{mín}(\frac{1}{2}x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1,$

Ahora resolvemos la función máximo para estos 3 casos ($\text{máx}\{(1),(2)\}$):

- $\frac{1}{2}x_1 = x_2 \longrightarrow U = \text{máx}\{x_2, x_2\} = x_2$

- $\frac{1}{2}x_1 > x_2 \longrightarrow U = \text{máx}\{x_2, x_2\} = x_2$

- $\frac{1}{2}x_1 < x_2 \longrightarrow U = \text{máx}\{x_2, \frac{1}{2}x_1\} = x_2$

Por lo que cuando $x_1 > x_2$ la función de utilidad toma el valor de x_2.

$\boxed{x_1 < x_2}$

Resolvemos por partes:

(1) $\text{mín}(x_1, x_2) = x_1$

(1) $\text{mín}(\frac{1}{2}x_1, x_2)$

Los primeros dos casos que usamos anteriormente no se pueden dar cuando aplicamos esta restricción, solo el tercero:

- $\frac{1}{2}x_1 < x_2 \longrightarrow \text{mín}(\frac{1}{2}x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1$

$$U = \text{máx}\{x_1, \frac{1}{2}x_1\} = x_1$$

Por lo que cuando $x_1 < x_2$ la función de utilidad toma el valor de x_1

En resumen:

- $x_1 = x_2 \longrightarrow U(x_1, x_2) = x_1 = x_2$

- $x_1 > x_2 \longrightarrow U(x_1, x_2) = x_2$

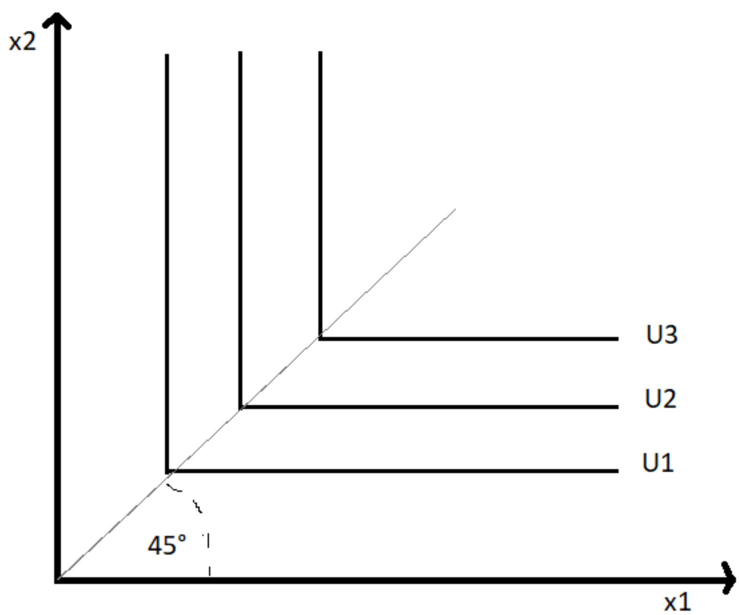
- $x_1 < x_2 \longrightarrow U(x_1, x_2) = x_1$

Por lo que nos podemos dar cuenta que esta función tiene exactamente el mismo comportamiento que una función de utilidad de Leontief, la cual se ocupa cuando los bienes son complementarios perfectos y tiene la siguiente forma:

$$U(x_1, x_2) = min\{x_1, x_2\}$$

En este tipo de función Leontief los bienes son consumidos en proporciones fijas 1:1. Podemos interpretar que si partimos de un punto donde se tiene la misma cantidad del bien x_1 que del bien x_2, la utilidad será igual a ese valor. Si aumentamos la cantidad del bien x_1 y mantenemos x_2 la utilidad se mantiene constante en x_2. El caso contrario ocurre si aumentamos la cantidad del bien x_2 y mantenemos x_1, la utilidad se mantiene constante en x_1. No me sirve tener una unidad más de cada bien por separado para aumentar mi utilidad, como son complementarios si quiero aumentarla debo aumentar la cantidad de ambos.

(b)



(c)

Resolvemos usando el mismo procedimiento que utilizamos para bienes complementarios en una función de utilidad de Leontief.

La restricción presupuestaria es tangente a la función de utilidad cuando los bienes están en igual proporción. La intuición es que el consumidor consumirá para un nivel de utilidad siempre en igual proporción porque es lo más barato para un mismo nivel de utilidad.

$$x_1 = x_2$$

Lo cual reemplazamos en la restricción presupuestaria:

$$w = p_1x_1 + p_2x_2 = p_1x_1 + p_2x_1$$

Despejamos y obtenemos la demanda walrasiana para el bien 1, la cual sabemos que es igual para el bien 2:

$$x_1(p, w) = \frac{w}{p_1 + p_2}$$
$$x_2(p, w) = \frac{w}{p_1 + p_2}$$

(d)

Función de Utilidad Indirecta:

$$V(p, w) = \text{máx}\{\text{mín}\left(\frac{w}{p_1 + p_2}, \frac{w}{p_1 + p_2}\right), \text{mín}\left(\frac{w}{2(p_1 + p_2)}, \frac{w}{p_1 + p_2}\right)\}$$

$$V(p, w) = \text{máx}\{\frac{w}{p_1 + p_2}, \frac{w}{2(p_1 + p_2)}\} = \frac{w}{p_1 + p_2}$$

12. No todo en la vida es microeconomía

Lo primero que llama la atención, es la duración de la canción: 13 minutos con 3 segundos.

La banda cultiva un estilo Doom Metal de carácter minimalista.

La instrumentación consta de bajo, guitarra eléctrica, batería y sintetizador.

El tema de la afinación presenta un par de peculiarides. La guitarra está afinada con scordatura, la sexta cuerda está rebajada a Re (dropped D). Además, la afinación general no está ajustada al estándar de La 440 hz, si no que unos cúantos cents por encima.

La pieza es de carácter post-tonal o modal; usa acordes de quinta (power chords) sin terceras, escapando del paradigma mayor/menor, algo común en el género. Toda la canción consta de solo 3 acordes: Sol#5 - Fa5 y Sib5.

La pieza posee un leiv motiv en el que recae una y otra vez, con pequeñas modificaciones que hace que el oyente no llegue a acostumbrarse; mantiene por lo tanto en un pequeño estado de alerta a la vez que genera sensación de reposo. Cabe destacar que la melodía y armonía son una misma cosa en la obra. La mayor parte del tiempo juega con los dos primeros acordes, acumulando tensión en G# y cayendo a F, haciendo de este último una especie de tónica. Esta secuencia se intercala cada cierto tiempo con una subida a Bb5, que genera una atmósfera más abierta unida con figuras rítmicas mas largas generando una especie de respiro.

La simpleza armónica hace que la atención se centre en otros elementos: la textura y el patrón rítmico.

La guitarra tiene un nivel de distorsión media, que genera un ruido blanco bastante agradable reforzada por un bajo al unísono. Esto combinado con un tempo medio (80 bpm) y los efectos oníricos del sintetizador (intensivos en delay y slides) hacen de esta una música casi hipnótica.

Talvez lo más interesante y enigmático está en el ritmo. Utiliza exclusivamente negras y corcheas, lo que es de una simpleza absoluta. La mayor parte del tiempo esta en $\frac{4}{4}$ pero realiza amalgamas, cambios de compases y traslapes. .

Es sublime, maravilloso, inspirador y enigmático, ya que además de todo lo dicho, replican el numero π con los rasgueos de la guitarra

$$3,1415......$$