Profesor	: Eduardo Engel	Abril 13, 2023
Ayudantes	: Miguel Del Valle y Benjamín Peña	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2023	
Guía	: No. 2	
Entrega	: Lunes 17 de abril, antes de las 8am	

1. **Derivando ΔC_t bajo Equivalencia Cierto**

   Usando sólo las expresiones

$$C_t = \frac{r}{R}[A_t + \sum_{k\geq 0} \beta^k \mathrm{E} Y_{t+k}] \qquad \text{y} \qquad A_{t+1} = R(A_t + Y_t - C_t),$$

   muestre que bajo Equivalencia Cierta,

$$\Delta C_t = \frac{r}{1+r} \sum_{k\geq 0} \beta^k [\mathrm{E}_t Y_{t+k} - \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+k}].$$

   Respuesta:

$$\begin{aligned}
\Delta C_t &= C_t - C_{t-1} \\
&= \frac{r}{R} A_t + \frac{r}{R} \sum_{k\geq 0} \beta^k \mathrm{E}_t Y_{t+k} - C_{t-1} \\
&= \frac{r}{R}[RA_{t-1} + RY_{t-1} - RC_{t-1}] + \frac{r}{R} \sum_{k\geq 0} \beta^k \mathrm{E}_t Y_{t+k} - C_{t-1} \\
&= rA_{t-1} + rY_{t-1} - RC_{t-1} + \frac{r}{R} \sum_{k\geq 0} \beta^k \mathrm{E}_t Y_{t+k} \\
&= rA_{t-1} + rY_{t-1} - R\left(\frac{r}{R} A_{t-1} + \sum_{k\geq 0} \beta^k \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+k-1}\right) + \frac{r}{R} \sum_{k\geq 0} \beta^k \mathrm{E}_t Y_{t+k} \\
&= rA_{t-1} + rY_{t-1} - rA_{t-1} - r \sum_{k\geq 0} \beta^k \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+k-1} + \frac{r}{R} \sum_{k\geq 0} \beta^k \mathrm{E}_t Y_{t+k} \\
&= rY_{t-1} - rY_{t-1} + \frac{r}{R} \sum_{k\geq 0} \beta^k \mathrm{E}_t Y_{t+k} - r \sum_{k\geq 1} \beta^k \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+k-1} \\
&= \frac{r}{R} \sum_{j\geq 0} \beta^j \mathrm{E}_t Y_{t+j} - \frac{r}{R} \sum_{j\geq 0} \beta^j \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+j} \\
&= \frac{r}{1+r} \sum_{j\geq 0} \beta^j [\mathrm{E}_t Y_{t+j} - \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+j}]
\end{aligned}$$

En donde usamos el hecho de que $A_{t-1} = R(A_{t-1} + Y_{t-1} - C_{t-1})$, $R = 1 + r = 1/\beta$ y que en el paso final se realizó un cambio de indices $j = k - 1$.

2. **El Teorema de Muth y la Crítica de Lucas**

El ingreso, Y_t, es exógeno e igual a la suma de un camino aleatorio (shocks permanente), P_t, y un ruido blanco (componente transitoria), u_t,

$$\begin{aligned} Y_t &= P_t + u_t, \\ P_t &= P_{t-1} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Donde ε_t es i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, u_t i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_\mathrm{u}^2)$, ε_t y u_t independientes.

A diferencia del análisis que vimos en cátedra, ahora suponemos que los agentes observan las Y_t pero no sus componentes.

(a) Muestre que ΔY_t sigue un MA(1) y derive una expresión para θ como función de $Q \equiv \sigma_\varepsilon^2/\sigma_\mathrm{u}^2$ en la representación de Wold para ΔY_t:

$$\Delta Y_t = v_t - \theta v_{t-1}. \tag{1}$$

Use esta expresión para expresar las innovaciones de Wold innovations, v_t, en términos de valores presentes y pasados de ΔY.

Ayuda: La expresión que debiera obtener es

$$\theta = \frac{1}{2}\left[Q + 2 - \sqrt{(Q+2)^2 - 4}\right].$$

Si no la obtiene, úsela igual en lo que sigue.

Respuesta:

En primer lugar, es podemos notar que ΔY_t sigue un MA(1) ya que:

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= Y_t - Y_{t-1} \\ &= (P_t + u_t) - (P_{t-1} + u_{t-1}) \\ &= P_t - P_{t-1} + u_t - u_{t-1} \\ &= \varepsilon_t + u_t + u_{t-1} \end{aligned}$$

Por tanto, sigue un proceso MA(1). Por otro lado, como $\Delta P_t = \varepsilon_t$ y $\Delta u_t = u_t - u_{t-1}$ y que ε_t y u_t son independientes. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}) &= \mathrm{Cov}(\Delta P_t, \Delta P_{t-k}) + Cov(\Delta u_t, \Delta u_{t-k}) \\ &= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) + Cov(u_t - u_{t-1}, u_{t-k} - u_{t-k-1}) \\ &= \begin{cases} -\sigma_u^2, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k = 2, 3, 4, \cdots. \end{cases} \end{aligned}$$

También:

$$\mathrm{Var}(\Delta Y_t) = \mathrm{Var}(\Delta P_t + \Delta u_t) = \mathrm{Var}(\varepsilon_t) + \mathrm{Var}(u_t - u_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_{\mathrm{u}}^2.$$

Sigue que:

$$\rho_{\Delta Y}(1) = \frac{-\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_{\mathrm{u}}^2} = -\frac{1}{Q+2}$$

Pero en clases vimos que para un proceso MA(1) se cumple que

$$\rho_{\Delta Y}(1) = -\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

Con $|\theta| < 1$ Por tanto tenemos que $\theta/(1+\theta^2) = 1/(Q+2)$, lo que nos permite obtener que

$$\theta = \frac{1}{2}\left[Q + 2 - \sqrt{(Q+2)^2 - 4}\right]$$

En donde no consideramos la raíz de suma porque genera un θ mayor a 1. Finalmente, de (1) y que $|\theta| < 1$ tenemos que:

$$v_t = \frac{1}{1-\theta L} = \sum_{k\geq 0} \theta^k \Delta Y_{t-k}$$

(b) Para $k = 1, 2, 3, 4, ...$ encuentre $\mathrm{E}_t[\Delta Y_{t+k}]$ (donde la información disponible en t son todos los valores pasados y presentes de Y, lo cual significa que también se conocen todos los valores presentes y pasados de ΔY). Use la expresión que obtuvo para mostrar que para todo $k \geq 1$:

$$\mathrm{E}_t[Y_{t+k}] = (1-\theta)\sum_{j\geq 0} \theta^j Y_{t-j}. \tag{2}$$

Se sigue que las proyecciones de valores futuros de Y no dependen del horizonte de proyección, En lo que sigue, denotamos $\mathrm{E}_t[Y_{t+k}]$ por $\hat{Y}_t$.

Respuesta:
Para $k = 1$, usando la expresión v_t derivada en la parte (a) tenemos que:

$$\mathrm{E}_t \Delta Y_{t+1} = \mathrm{E}_t[v_{t+1} - \theta v_t] = -\theta v_t = -\sum_{k\geq 0} \theta^{k+1} \Delta Y_{t-k}.$$

Mientras que para $k \geq 2$:

$$\mathrm{E}_t \Delta Y_{t+k} = \mathrm{E}_t[v_{t+k} - \theta v_{t+k-1}] = 0.$$

Sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t Y_{t+k} = \mathrm{E}_t[\Delta Y_{t+k} + \cdots \Delta Y_{t+1} + Y_t] = Y_t + \mathrm{E}_t \Delta Y_{t+1} = Y_t - \sum_{k\geq 0} \theta^{k+1} \Delta Y_{t-k} \\
= Y_t - \theta \Delta Y_t - \theta^2 \Delta Y_{t-1} - \theta^3 \Delta Y_{t-2} - \cdots \\
= (1-\theta) Y_t + (\theta - \theta^2) Y_{t-1} + (\theta^2 - \theta^3) Y_{t-2} + \cdots = (1-\theta) \sum_{k\geq 0} \theta^k Y_{t-k}.
\end{aligned}$$

(c) A continuación asuma suponga que la relación ente ΔC_t y el proceso de ingreso está determinada por el modelo de equivalencia cierta visto en clases, de modo que

$$\Delta C_t = \frac{r}{R}\sum_{u\geq 0}\beta^u\{\mathrm{E}_t Y_{t+u} - \mathrm{E}_{t-1}Y_{t+u}\}.$$

Use esta expresión para mostrar que ΔC_t se puede escribir como:

$$\Delta C_t = \sum_{k\geq 0}\alpha_k \Delta Y_{t-k}.$$

Encuentre expresiones para los α_k.

Respuesta:
Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta C_t &= \frac{r}{R}\left\{Y_t - \hat{Y}_{t-1} + \sum_{u\geq 1}\beta^u(\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1})\right\} \\
&= \frac{r}{R}\left\{Y_t - \hat{Y}_{t-1} + \frac{\beta}{1-\beta}(\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1})\right\} \\
&= \frac{r}{R}\left\{\frac{1}{1-\theta} + \frac{\beta}{1-\beta}\right\}\Delta\hat{Y}_t = \frac{R-\theta}{R(1-\theta)}\Delta\hat{Y}_t = \frac{R-\theta}{R}\sum_{j\geq 0}\theta^j\Delta Y_{t-j},
\end{aligned}$$

En donde es importante notar que el primer término en la primera suma es simplemente Y_t. Dado lo anterior, sigue que $\alpha_k = (R-\theta)\theta^k/R$.

(d) En $t=0$ la macroeconomista usa las series agregadas para estimar

$$\Delta C_t = \sum_{k\leq 0}\alpha_k \Delta Y_{t-k}. \tag{3}$$

Poco después, la varianza de la componente cíclica del ingreso aumenta de manera inesperada y permanente (todo lo restante no cambia). La macroeconomista está consciente del cambio en el entorno económico pero confía que los nuevos valores de ΔY lo van a capturar adecuadamente, por lo cual sigue usando (3) para proyectar el consumo. ¿Es correcto este supuesto? Justifique.

Respuesta:
El problema central es que el valor de θ y por tanto el de α_k a cambiado. Un aumento en la varianza de la componente ciclica baja Q y por tanto, aumenta θ. Por tanto, usar los coeficientes de la regresión del regimen anterior va a generar un sesgo en el forecast.

3. **Ahorro por precaución, función de utilidad CARA e ingreso camino aleatorio**

Suponga que $r = \delta = 0$, el individuo vive T períodos (desde $t=0$ hasta $t=T-1$) y tiene utilidad instantánea CARA $u(C) = -e^{-\alpha C}/\alpha$ con aversión absoluta al riesgo α.

Sus ingresos siguen un camino aleatorio

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t,$$

con e_t's i.i.d. normal con media nula y varianza σ^2.

Las preguntas que siguen están estructuradas de modo que puede responder las partes 2, 3, 4 y 5 aún si no respondió alguna de las partes anteriores.

(a) Muestre que si C_t sigue el proceso siguiente (que es un camino aleatorio con drift $\frac{\alpha\sigma^2}{2}$) se cumple la ecuación de Euler del consumidor:

$$C_t = C_{t-1} + \frac{\alpha\sigma^2}{2} + e_t.$$

Ayuda: Recuerde que si $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $\mathrm{E}(\exp(X)) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$.

Respuesta:
La ecuación de Euler es:

$$\exp[-\alpha C_t] = \mathrm{E}_t \exp[-\alpha C_{t+1}].$$

Verificamos que la conjetura del enunciado satisface la ecuación anterior:

$$\exp\left[-\alpha C_t\right] = \mathrm{E_t} \exp\left[-\alpha \mathrm{C_{t+1}}\right] = \exp\left[-\alpha \mathrm{C_t}\right] \cdot \exp\left[\frac{-\alpha^2\sigma^2}{2}\right] \mathrm{E_t} \exp\left[-\alpha \mathrm{e_t}\right].$$

Como $-\alpha e_t$ es normal con media cero y varianza $\alpha^2\sigma^2$, se tiene que $\exp\left[-\alpha e_t\right]$ es lognormal. Ocupando la ayuda se concluye que el lado izquierdo y derecho en la ecuación de Euler al reemplazar nuestra conjetura son iguales.

(b) Imponga la restricción presupuestaria que involucra ingresos y consumo acumulado entre $t = 0$ y $t = T - 1$. Luego tome el valor esperado en $t = 0$ de esta restricción y use los procesos de camino aleatorio que siguen C_t y Y_t para mostrar que

$$C_0 = \frac{A_0}{T} + Y_0 - \frac{\alpha(T-1)\sigma^2}{4}.$$

Ayuda: Recuerde que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Respuesta:
La restricción presupuestaria esperada en $t = 0$ es

$$\sum_{t=0}^{T-1} \mathrm{E}_0 C_t = A_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \mathrm{E}_0 Y_t.$$

Primero, encontramos una expresión para $\mathrm{E}_0 C_t$:

$$C_t = C_{t-1} + \frac{\alpha\sigma^2}{2} + e_t = C_{t-2} + 2 \cdot \frac{\alpha\sigma^2}{2} + e_{t-1} + e_t = \cdots = C_0 + t \cdot \frac{\alpha\sigma^2}{2} + e_1 + ... + e_t.$$

Así,

$$\mathrm{E}_0 C_t = C_0 + t \cdot \frac{\alpha\sigma^2}{2}.$$

Además, como Y_t sigue un random walk tenemos lo siguiente:

$$\mathrm{E_0 Y_t = Y_0}.$$

Reemplazando en la restricción presupuestaria esperada:

$$\sum_{t=0}^{T-1} C_0 + \frac{\alpha\sigma^2}{2}\sum_{j=0}^{T-1} j = A_0 + \sum_{t=0}^{T-1} Y_0.$$

Luego:

$$TC_0 + \frac{T(T-1)}{2}\frac{\alpha\sigma^2}{2} = A_0 + TY_0$$

y por lo tanto

$$C_0 = \frac{A_0}{T} + Y_0 - \frac{\alpha(T-1)\sigma^2}{4}.$$

(c) Use la parte 2 para concluir que

$$C_t = \frac{A_t}{T-t} + Y_t - \frac{\alpha(T-t-1)\sigma^2}{4}, \qquad t = 0, ..., T-1.$$

Ayuda: Responder esta parte no requiere ningún cálculo.

Respuesta:
Para pasar de la expresión para C_0 a la expresión para C_t basta con notar que lo relevante en la expresión para C_0 es que le quedan T períodos de vida ($t = 0, 1, ..., T-1$) de modo que si le quedan $T-t$ períodos de vida es cosa de dejar C_t al lado izquierdo y reemplazar T por $T-t$ el lado derecho para obtener

$$C_t = \frac{A_t}{T-t} + Y_t - \frac{\alpha(T-t-1)\sigma^2}{4}, \qquad t = 0, ..., T-1.$$

(d) La expresión que derivamos en clases para el consumo bajo equivalencia cierta supone $r > 0$, por lo cual no aplica en este caso. Apelando a la intuición de que equivalencia cierta consiste en suavizar el consumo esperado, dé la intuición de por qué el consumo óptimo bajo equivalencia cierta, C_t^{eq}, viene dado por:

$$C_t^{\mathrm{eq}} = \frac{A_t}{T-t} + Y_t, \qquad t = 0, ..., T-1.$$

Respuesta:
Como $r = \delta = 0$, bajo equivalencia cierta el individuo se gasta su riqueza esperada en t dividida por el número de años de vida que le quedan, lo cual da

$$C_t^{\mathrm{eq}} = \frac{A_t}{T-t} + Y_t \qquad t = 0, ..., T-1.$$

Luego

$$S_t^p = \frac{\alpha(T-t-1)\sigma^2}{4}.$$

(e) Concluya que el ahorro por precaución, $S_t^p \equiv C_t^{\text{eq}} - C_t$, es creciente en α, σ^2 y $T-t$ y dé la intuición para cada caso.

Respuesta:

La estática comparativa evidentemente es la que dice el enunciado, las intuiciones correspondientes son:

- α: Mientras mas averso al riesgo (medido por el coeficiente de aversión absoluta), mayor es el ahorro por precaución.
- σ^2: Mientras mas grande la varianza de los shocks de ingresos futuros (las innovaciones del camino aleatorio), mayor el ahorro por precaución.
- $T-t$: Mientras más años de vida le quedan, más valioso es tener ahorro por precaución ya que hay más ocasiones en que puede ser útiles.

4. **Ahorro por precaución, función de utilidad CARA e ingreso i.i.d.**

Considere el modelo del problema general de consumo visto en clases (lámina 22 y siguientes), con función de utilidad instantánea con coeficiente de aversión absoluta al riesgo constante:

$$u(c) = -\frac{1}{\theta}e^{-\theta c},$$

donde $\theta > 0$ denota el coeficiente de aversión absoluta al riesgo. La tasa de descuento subjetiva es δ, la tasa de interés es r y las dos son constantes. El ingreso laboral, y_t, es i.i.d., de modo que

$$y_t = \bar{y} + \varepsilon_t,$$

con ε_t i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Los activos del hogar al comienzo de un período evolucionan de acuerdo a

$$A_{t+1} = (1+r)[A_t + y_t - c_t]. \tag{4}$$

Se puede mostrar que existe una solución única a la ecuación de Bellman y que existe una correspondencia uno-a-uno entre esta solución y la solución a la ecuación de Euler. No es necesario que demuestre lo anterior. Se sigue que la ecuación de Euler tiene una única solución, en la cual nos enfocamos en lo que sigue.

Suponemos que la solución de la ecuación de Euler toma la forma:

$$c_t = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + y_t + \frac{1}{r}\bar{y}\right\} - P(r, \theta, \delta, \sigma), \tag{5}$$

donde P es una constante (que depende de r, θ, δ y σ). A continuación encontramos el valor de P para el cual (5) resuelve la ecuación de Euler.

(a) Asumiendo que se cumple (5), use (4) y un poco de álgebra para mostrar que:

$$\Delta c_t = \frac{r}{1+r}\varepsilon_t + rP. \tag{6}$$

Respuesta:

Ocupando (5) para c_t y c_{t-1} tenemos lo siguiente:

$$\Delta c_t = c_t - c_{t-1} = \frac{r}{1+r}[A_t + y_t - A_{t-1} - y_{t-1}]$$

Ocupando (4)

$$\begin{aligned}\Delta c_t &= \frac{r}{1+r}[(1+r)(A_{t-1} + y_{t-1} - c_{t-1}) + y_t - A_{t-1} - y_{t-1}] \\ &= \frac{r}{1+r}[rA_{t-1} + ry_{t-1} - (1+r)c_{t-1} + y_t]\end{aligned}$$

Finalmente, usamos (5) para c_{t-1} de nuevo:

$$\begin{aligned}\Delta c_t &= \frac{r}{1+r}[y_t - \bar{y} + (1+r)P] \\ &= \frac{r}{1+r}\varepsilon_t + rP\end{aligned}$$

(b) Use (6) y la ecuación de Euler para derivar una expresión explícita para P.

Respuesta:
Definiendo $\beta \equiv 1/(1+\delta)$, la ecuación de Euler es la siguiente:

$$u'(c_t) = \beta(1+r)E_t[u'(c_{t+1})]$$

donde ocupando la función de utilidad del enunciado, tenemos lo siguiente:

$$1 = \beta(1+r)E_t[e^{-\theta\Delta c_{t+1}}]$$

Ocupando (5):

$$1 = \beta(1+r)e^{-r\theta P}E_t[e^{-\frac{r\theta}{1+r}\varepsilon_{t+1}}]$$

Luego, ocupamos el siguiente resultado: si X es una variable aleatoria con una distribución normal de media μ y varianza σ^2, entonces para cualquier número real t,

$$E[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

Aplicamos lo anterior

$$1 = \beta(1+r)e^{-r\theta P}e^{\frac{(\sigma r\theta)^2}{2(1+r)^2}}$$

y tomamos logaritmos a ambos lados.

$$0 = \log(\beta(1+r)) - r\theta P + \frac{(\sigma r\theta)^2}{2(1+r)^2}$$

Finalmente, despejando P se tiene lo pedido:

$$P = \frac{\log(\beta(1+r))}{\theta r} + \frac{\sigma^2 r\theta}{2(1+r)^2}$$

(c) Muestre que P es creciente en σ y decreciente en δ. Interprete los dos resultados.

Respuesta:

De la parte anterior tenemos que $\frac{\partial P}{\partial \beta} > 0$, por lo que P depende negativamente de δ. Esto es, a medida que una persona se vuelve más impaciente consumen más hoy y por lo tanto tiene menos ahorro por precaución. Además, $\frac{\partial P}{\partial \sigma} > 0$. Luego, a medida que hay más incertidumbre en los ingresos las personas tienen mayores niveles de ahorro por precaución.

(d) Ahora asuma que $r = \delta$. El ahorro por precaución se define como la diferencia entre el ahorro efectivo y el ahorro que prescribe el modelo de equivalencia cierta.

Muestre que el ahorro por precaución será igual a P y que P es estrictamente positivo.

Respuesta:

En este caso,

$$P = \frac{\sigma^2 r\theta}{2(1+r)^2} > 0$$

Ocupando la ecuación para el consumo bajo equivalencia cierta (y que $r = \delta$),

$$C_t = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \sum_{s\geq 0}\frac{E_t[y_{t+s}]}{(1+r)^s}\right\}$$

Desarrollando lo anterior:

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{r}{1+r}\left\{A_t + y_t + E_t\sum_{s\geq 1}\frac{y_{t+s}}{(1+r)^s}\right\} \\ &= \frac{r}{1+r}\left\{A_t + y_t + \bar{y}\sum_{s\geq 1}\frac{1}{(1+r)^s}\right\} \\ &= \frac{r}{1+r}\left\{A_t + y_t + \frac{\bar{y}}{r}\right\} \end{aligned}$$

así, el ahorro por precaución está dado por

$$S_t - S_t^{certain} = C_t^{certain} - C_t = P$$