Solemne Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

29 de mayo de 2021

Lea atentamente las siguientes indicaciones:

- Para el desarrollo de la prueba se usará la plataforma Cisco Webex y la plataforma Canvas.
- Los estudiantes deben conectarse a la prueba en Webex (el link está programado en Canvas) a las 12:50.
- A las 13:00 la prueba quedará disponible en la página de inicio del curso en la plataforma Canvas.
- Ud. tiene 180 minutos para resolver la prueba.
- Luego de los 180 minutos de duración de la prueba, tendrá 20 minutos adicionales para escanear y subir el archivo de respuestas.
- Durante la rendición de la prueba usted debe permanecer conectado a la sala Cisco Webex. Por este medio se informarán instrucciones adicionales (en caso de que sea estrictamente necesario).
- Solo podrá abandonar la sala de Cisco Webex una vez que haya cargado sus respuestas en Canvas.
- En caso de que tenga problemas de conexión durante el desarrollo de la prueba, usted debe informar inmediatamente por correo electrónico a su ayudante (siempre que pueda hacerlo). Si es posible, continuar con el desarrollo de la prueba.
- La prueba consta de 5 ejercicios y tiene un total de 120 puntos.
- Los puntos asociados a cada pregunta están indicados en cada pregunta. Todas las partes de la pregunta dan el mismo puntaje a menos que se indique explícitamente lo contrario.
- Lea todas las preguntas antes de comenzar a responder, esto le permitirá planificar su trabajo de forma eficiente. Evite dedicar mucho tiempo a una pregunta.
- Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
- Utilice lápiz pasta para responder.
- Finalizada la prueba, Ud. deberá utilizar *CamScanner*, o un programa similar, para escanear sus respuestas y subirlas a Canvas en un único archivo pdf.
- El link de Canvas permite dos intentos para subir la prueba. En caso de que usted suba la prueba dos veces, el primer archivo se elimina automáticamente por lo que *solo se considerará el último*.
- *Es su responsabilidad asegurarse que el archivo incluye todas sus respuestas.* No se aceptarán actualizaciones del archivo posteriores a la finalización de la prueba.
- Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.
- En caso de descubrir un intento de copia, éste se sancionará de acuerdo con el reglamento de copia y plagio de la facultad.

1. **(20 puntos)** Considere un/a consumidor/a que tiene preferencias $\succeq$ racionales y continuas y busca maximizar su preferencias. La gráfica 1 muestra su conjunto presupuestario. [1]

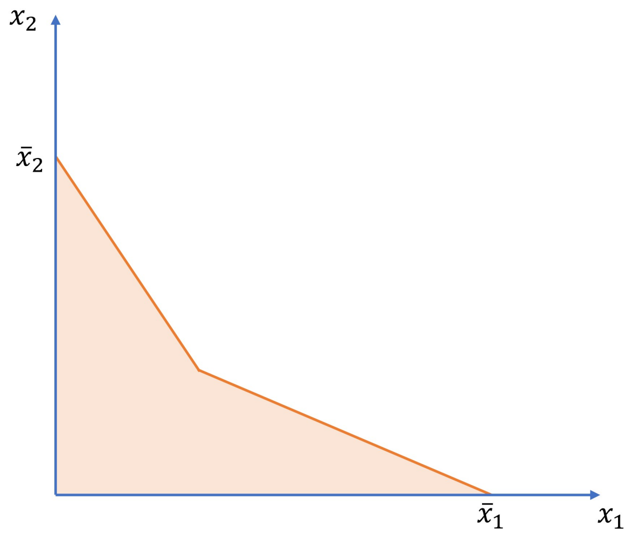

Figura 1: Conjunto presupuestario

a) Para la siguiente afirmación dé una demostración ó un contra-ejemplo:
"Si $\succeq$ es localmente no saciada, el/la consumidor/a consumirá toda su riqueza."

b) Para la siguiente afirmación dé una demostración o un contra-ejemplo:
"Si $\succeq$ es convexa, la demanda del/a consumidor/a es un conjunto convexo."

Respuesta

a) La afirmación es cierta. En esta parte la no convexidad del conjunto presupuestario no juega ningún rol. La demostración de la afirmación sigue los mismos pasos que vimos en clases.

Demostración: Haremos la demostración por contradicción. Supongo que el/la consumidor/a no consume toda su riqueza, es decir que la demanda $x = (x_1, x_2)$ es interior al conjunto presupuestario. Puedo entonces encontrar $\epsilon > 0$ tal que $B_{x,\epsilon}$ está completamente contenido en el conjunto presupuestario. (5puntos)

Por otro lado, como $\succeq$ es localmente no saciada, siempre podemos encontrar $y \in B_{x,\epsilon}$ estrictamente preferido a x, i.e., $y \succ x$, obteniendo una contradicción. (5puntos)

b) La afirmación es falsa. Para encontrar un contraejemplo, basta tomar una preferencia que tenga una curva de indiferencia que intersecte al conjunto presupuestario en los puntos $(\bar{x}_1, 0)$ y $(0, \bar{x}_2)$. Por ejemplo, una relación de preferencias representada por la función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\bar{x}_1} x_1 + \frac{1}{\bar{x}_2} x_2.$$

[1] Este tipo de conjuntos presupuestarios aparece cuando los precios no son constantes, por ejemplo cuando el precio unitario de todo lo consumido del bien 1 por arriba de un cierto umbral es menor que el precio unitario de lo consumido por debajo de dicho umbral.

La función es lineal (por lo tanto es convexa) y la demanda son dos puntos aislados , por lo tanto no es convexa.

(10puntos)

2. **(30 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ una función que tiene derivadas continuas de primer y segundo orden. Definimos $v : \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ como

$$v(p, w) = \alpha + f(p)w$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ constante.

a) **(16 puntos)** Demuestre que para que $v(p, w)$ pueda ser una función de utilidad indirecta obtenida a partir de preferencias $\succeq$ racionales, continuas y localmente no saciadas, $f(p)$ debe cumplir las siguientes propiedades:

- f homogénea de grado -1.
- f cuasiconvexa.
- $f(p) > 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^L_+$.
- $\nabla f(p) \leq 0$.

b) **(7 puntos)** Asumiendo que la demanda es univaluada, encuentre la función de demanda. ¿Qué puede decir de la curva de Engel?

c) **(7 puntos)** Calcule la matriz de Slutsky.

Respuesta

a) (4 puntos a cada una de las propiedades.)

- Las funciones de utilidad indirecta son h.g.0 en (p, w). Entonces para que $v(p, w)$ sea h.g.0 en (p, w), es necesario que $f(p)$ sea homogénea de grado -1.

- Las funciones de utilidad indirecta son cuasiconvexas. Es decir que el conjunto

$$\{(p, w)/v(p, w) \leq \hat{v}\} \text{ es convexo para todo } \hat{v}.$$

Si este conjunto es convexo, entonces necesariamente al tomar $w = \hat{w} > 0$ fijo, el subconjunto resultante también debe ser convexo:

$$\{p/f(p) \leq \frac{\hat{v} - \alpha}{\hat{w}}\} \text{ es convexo para todo } \hat{v}.$$

Gracias a que $\hat{w} > 0$ el sentido de la desigualdad no se cambia. Haciendo variar $\hat{v}$ podemos hacer que $\frac{\hat{v}-\alpha}{w}$ tome todos los valores en $\mathbb{R}$. Por lo tanto sabemos que

$$\{p/f(p) \leq \hat{f}\} \text{ es convexo para todo } \hat{f}.$$

Concluimos que f es cuasiconvexa.

- Las funciones de utilidad indirecta son estrictamente crecientes en w, lo que se puede cumplir únicamente si $f(p) > 0$ para todo p.

- Las funciones de utilidad indirecta son no crecientes con p. Es decir que $\nabla_p v(p, w) \leq 0$ para todo $(p, w) \in \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}_+$. Fijamos $\hat{w} > 0$ y obtenemos que

$$\nabla_p v(p, \hat{w}) = (\nabla f(p))\hat{w} \leq 0 \Rightarrow \nabla f(p) \leq 0$$

b) Utilizamos la identidad de Roy para encontrar la demanda $x(p,w)$,

$$\begin{aligned} x_\ell(p,w) &= -\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell} / \frac{\partial v(p,w)}{\partial w} \\ &= -w\frac{\partial f(p)}{\partial p_\ell} / f(p) = -\frac{w}{f(p)}\frac{\partial f(p)}{\partial p_\ell} \end{aligned}$$

En notación matricial $x(p,w) = -\frac{w}{f(p)}\nabla f(p)$.

(5 puntos. No es necesario tener la notación matricial.)

Dado un precio p fijo, la curva de Engel es una recta de pendiente $-\nabla f(p)/f(p)$.

(2 puntos)

c) Calculemos todos los elementos de la Matriz S.

$$\begin{aligned} s_{\ell k} &= \frac{\partial x_\ell}{\partial p_k} - \frac{\partial x_\ell}{\partial w}x_k. \qquad (2 puntos) \\ &= \frac{w}{(f(p))^2}\frac{\partial f(p)}{\partial p_k}\frac{\partial f(p)}{\partial p_\ell} - \frac{w}{f(p)}\frac{\partial^2 f(p)}{\partial p_\ell \partial p_k} - \frac{1}{f(p)}\frac{\partial f(p)}{\partial p_\ell}\Big(- \frac{w}{f(p)}\frac{\partial f(p)}{\partial p_k}\Big) \\ &= -\frac{w}{f(p)}\frac{\partial^2 f(p)}{\partial p_\ell \partial p_k} \end{aligned}$$

(5 puntos)

3. (**20 puntos**) Dado un conjunto de producción Y, se dice que un plan de producción $y \in Y$ es *débilmente eficiente* si no existe $y' \in Y$ que cumpla $y' >> y$. Por ejemplo, en la Figura 2 se muestra el punto y que es *débilmente* eficiente (aunque no es eficiente en el sentido usual).

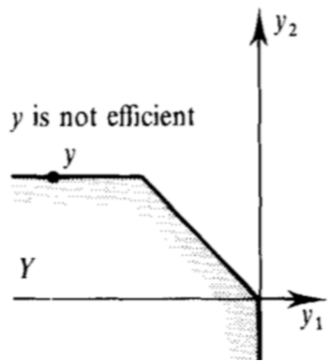

Figura 2: y es débilmente eficiente

Dé una demostración o un contra-ejemplo de la siguiente afirmación:

Afirmación: Si $y \in Y$ es maximizador de utilidades para algún precio $p \geq 0$ ($p \neq 0$) entonces y es débilmente eficiente.

Respuesta

Haremos la prueba por contradicción. Suponga que existe $x \in Y$ tal que $x >> y$,

(10 puntos)

como $p \geq 0$ ($p \neq 0$) tenemos que

$$x >> y \Rightarrow p \cdot x > p \cdot y$$

contradice que y maximiza utilidades para $p \geq 0$.

(10 puntos)

4. (**30 puntos**) Suponga que una firma ocupa dos insumos (capital y trabajo) para producir unidades de ***dos productos finales*** mediante la función de producción $F : I\!R^4 \to I\!R^2$ que representa su tecnología,

$$F(K_1, K_2, L_1, L_2) = (F_1(K_1, L_1), F_2(K_2, L_2)),$$

donde F_i es la función de producción del producto i y K_i y L_i son, respectivamente, las cantidades de capital y trabajo dedicadas a la producción del producto i.

a) Suponga que las funciones F_i son dos veces diferenciable y son tales que $F_i(K_i, L_i) = 0$ si $K_i = 0$ o $L_i = 0$. Encuentre las condiciones de optimalidad del problema de minimización de costos para una producción que asegure un *ingreso mínimo* de m.

b) Encuentre (K_1, K_2, L_1, L_2) que minimizan el costo de producir lo suficiente para asegurar un ingreso mínimo de m para las funciones de producción de Leontief, $F_i = \min\{\alpha_i K_i, \beta_i L_i\}$ con $(\alpha_i, \beta_i) >> 0$ para $i = 1, 2$. Encuentre el costo mínimo.

c) Suponga ahora que el costo promedio de producción del producto i es $AC_i(q_i) = b_i q_i$, con $b_i > 0$ para $i = 1, 2$. Si quiere minimizar el costo de producir lo suficiente para asegurar un ingreso mínimo de m, ¿cuánto debería producir de cada uno de los productos?

Respuesta

a) Denotamos los precios por p_i, precio de los productos, r precio del capital y w precio del trabajo. El problema que tenemos que resolver es

$$\begin{cases} \text{mín} & r(K_1 + K_2) + w(L_1 + L_2) \\ s.a. & p_1 F_1(K_1 + L_1) + p_2 F_2(K_2, L_2) \geq m \\ & K_i, L_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

El Lagrangiano de este problema es

$$\mathcal{L} = r(K_1 + K_2) + w(L_1 + L_2) + \lambda(m - p_1 F_1(K_1 + L_1) - p_2 F_2(K_2, L_2)),$$

(2 puntos)

con $\lambda \geq 0$ y las condiciones de optimalidad son

$$r - p_i \lambda \tfrac{\partial F_i(K_i^*, L_i^*)}{\partial K_i} \geq 0, \quad r = p_i \lambda \frac{\partial F_i(K_i^*, L_i^*)}{\partial K_i} \text{ si } K_i^* > 0$$
$$w - p_i \lambda \tfrac{\partial F_i(K_i^*, L_i^*)}{\partial L_i} \geq 0, \quad w = p_i \lambda \frac{\partial F_i(K_i^*, L_i^*)}{\partial L_i} \text{ si } L_i^* > 0$$

(3 puntos)

- Cuando se producen ambos productos, entonces las condiciones de optimalidad son

$$\frac{r}{w} = \frac{\frac{\partial F_1(K_1^*, L_1^*)}{\partial K_1}}{\frac{\partial F_1(K_1^*, L_1^*)}{\partial L_1}} = \frac{\frac{\partial F_2(K_2^*, L_2^*)}{\partial K_2}}{\frac{\partial F_2(K_2^*, L_2^*)}{\partial L_2}}$$

(2 puntos)

- Cuando se produce únicamente el producto i, las condiciones de optimalidad son

$$\frac{r}{w} = \frac{\frac{\partial F_i(K_i^*,L_i^*)}{\partial K_i}}{\frac{\partial F_i(K_i^*,L_i^*)}{\partial L_i}}$$

  y $F_i(K_i^*, L_i^*) = m/p_i$.

(3 puntos)

b) Como los precios de los insumos son positivos, en el óptimo $\alpha_i K_i^* = \beta_i L_i^*$ para $i = 1, 2$.

(2 puntos)

Entonces, $q_i^* = \alpha_i K_i^* = \beta_i L_I^*$ y el problema se reduce a

$$\begin{cases} \text{mín} & q_1^*\left(\frac{r}{\alpha_1} + \frac{w}{\beta_1}\right) + q_2^*\left(\frac{r}{\alpha_2} + \frac{w}{\beta_2}\right) \\ s.a. & p_1 q_1^* + p_2 q_2^* \geq m \\ & q_i^* \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

Este es un problema de optimización de restricciones lineales y función objetivo lineal. La solución es:

- Si $\frac{1}{p_i}\left(\frac{r}{\alpha_i} + \frac{w}{\beta_i}\right) < \frac{1}{p_j}\left(\frac{r}{\alpha_j} + \frac{w}{\beta_j}\right)$, la solución es

$$q_i^* = m/p_i,\ q_j^* = 0,\ \text{costo mínimo} = \frac{m}{p_i}\left(\frac{r}{\alpha_i} + \frac{w}{\beta_i}\right).$$

(6 puntos)

- Si $\frac{1}{p_1}\left(\frac{r}{\alpha_1} + \frac{w}{\beta_1}\right) = \frac{1}{p_2}\left(\frac{r}{\alpha_2} + \frac{w}{\beta_2}\right)$, todos los pares $(q_1, q_2) \geq 0$ que cumplan $p_1 q_1 + p_2 q_2 = m$ alcanzan el costo mínimo.

$$\text{costo mínimo} = \frac{m}{p_1}\left(\frac{r}{\alpha_1} + \frac{w}{\beta_1}\right).$$

(2 puntos)

c) El problema se puede escribir como

$$\begin{cases} \text{mín} & q_1(b_1 q_1) + q_2(b_2 q_2) \\ s.a. & p_1 q_1 + p_2 q_2 \geq m \\ & q_i^* \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

El lagrangiano asociado es

$$\mathcal{L} = b_1 q_1^2 + b_2 q_2^2 + \lambda(m - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

(2 puntos)

Las condiciones de optimalidad son

$$\begin{aligned}
2b_1q_1 - \lambda p_1 \geq 0 \text{ y } q_1[2b_1q_1 - \lambda p_1] = 0 \\
2b_2q_2 - \lambda p_2 \geq 0 \text{ y } q_2[2b_2q_2 - \lambda p_2] = 0 \\
\lambda(m - p_1q_1 - p_2q_2) = 0 \text{ y } \lambda \geq 0 \qquad (2puntos)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los q_i^* quedan determinados por

$$\begin{aligned}
\frac{b_1}{p_1}q_1 = \frac{b_2}{p_2}q_2 \qquad (1) \\
p_1q_1 + p_2q_2 = m
\end{aligned}$$

(3 puntos)

Obtenemos

$$q_1^* = \frac{mp_1}{b_1}\frac{1}{p_1^2/b_1 + p_2^2/b_2}, \qquad q_2^* = \frac{mp_2}{b_2}\frac{1}{p_1^2/b_1 + p_2^2/b_2}$$

(3 puntos)

Otra forma de resolver es igualando productividades marginales de ambos productos. Sabemos que el costo marginal es $MC(q_i) = 2b_iq_i$ y entonces igualando productividades marginales obtenemos:

$$\frac{p_1}{2b_1q_1} = \frac{p_2}{2b_2q_2}$$

que es equivalente a 1 y el resto de la resolución continua igual que arriba.

5. **(20 puntos)** Sea $\mathcal{L}$ el espacio de las loterías en un mundo donde hay solamente dos consecuencias posibles $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$. Sea $\pi : [0,1] \to [0,1]$ una función definida por

$$\pi(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 1/2 & 1/4 < x < 3/4 \\ 1 & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Definimos una función de utilidad $U : \mathcal{L} \to I\!R$ de la siguiente forma: dada la lotería L que asigna probabilidad p a la consecuencia c_1 y probabilidad $(1-p)$ a la consecuencia c_2,

$$U(L) = \pi(p)u_1 + \pi(1-p)u_2.$$

Además, sabemos que $u_1 < u_2$.

a) Calcule $U(L)$ para todo $L \in \mathcal{L}$.

b) ¿La relación de preferencias inducida en $\mathcal{L}$ por la función de utilidad U cumple la propiedad de independencia? Demuestre o dé un contra-ejemplo.

Respuesta

a)

$$U(L) = \pi(p)u_1 + \pi(1-p)u_2 = \begin{cases} u_2 & 0 \leq p \leq 1/4 \\ \frac{1}{2}(u_1 + u_2) & 1/4 < p < 3/4 \\ u_1 & 3/4 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

(10 puntos)

b) La afirmación es falsa. Para demostrarlo daremos un contraejemplo.

Sea la lotería L definida por la probabilidad $(p, 1-p)$ con $0 < p < 1/4$ y la lotería L' definida por la probabilidad $(q, 1-q)$ con $1 > q > 3/4$. Entonces

$$U(L) = u_2 > U(L') = u_1 \Rightarrow L \succ L'. \tag{2}$$

Consideramos ahora la lotería L'' definida por la probabilidad $(1/2, 1/2)$ y tomamos α tal que

$$\frac{1}{4} < \alpha p + (1-\alpha)\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} < \alpha q + (1-\alpha)\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

Las dos condiciones de arriba se cumplen tomando $\alpha > 0$ suficientemente pequeño.

Tenemos entonces que

$$U(\alpha L + (1-\alpha)L'') = \pi(\alpha p + (1-\alpha)\frac{1}{2})u_1 + \pi(1 - \alpha p - (1-\alpha)\frac{1}{2})u_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

y análogamente $U(\alpha L' + (1-\alpha)L'') = \frac{u_1+u_2}{2}$ por lo que podemos concluir que

$$\alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L''. \tag{3}$$

(2) y (3) contradicen la propiedad de independencia.

(10 puntos)