Universidad de Chile — FEN
Departamento de Economía

Macroeconomía I
Otoño 2014
Control 2

Profesor: Eduardo Engel
Ayudantes: Damián Vergara y Marco Rojas
Miércoles, 4 de junio, 2014

Instrucciones

1. Tiene 10 minutos para leer el enunciado antes de que se distribuyan los sets de respuestas.
2. Tiene 3 horas para responder las preguntas.
3. El control tiene 5 preguntas, el número de puntos posibles se indica al comienzo de cada pregunta. El número total de puntos del control es de 120.
4. Salvo que se indique explícitamente lo contrario, todas las partes de una pregunta dan el mismo puntaje.
5. Asigne su tiempo de modo de dedicar suficiente tiempo a todas las preguntas. No dedique demasiado tiempo a ninguna de ellas. Dedicar tantos minutos como puntos asignados a cada pregunta es una buena estrategia. Esto deja una hora de libre disposición.
6. Sus respuestas deben contener pasos intermedios para que el evaluador pueda estar seguro de que llegó al resultado correcto sabiendo lo que hacía. Esto también le permitirá al evaluador darle puntaje parcial cuando no obtenga la respuesta correcta.
7. Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
8. Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.

Una fórmula útil

Para $|a| < 1$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Expresiones para Equivalencia Cierta

Con la notación utilizada en clases:

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \sum_{s\geq 0} \beta^s \mathrm{E}_t Y_{t+s}\right\}, \\ \Delta C_t &= \frac{r}{1+r}\sum_{u\geq 0} \beta^u \left\{\mathrm{E}_t Y_{t+u} - \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+u}\right\}. \end{aligned}$$

1. **Verdadero, Falso o Incierto (20 puntos)**

   Decida si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera, falsa o no se puede decidir respecto de su grado de veracidad ('incierta'). Justifique su elección en no más de 50 palabras. Su evaluación dependerá de su justificación.

   a) Las predicciones de los modelos de consumo cambian dramáticamente si se supone que los hogares pueden asegurarse contra eventos fortuitos.

   Respuesta
   Verdadero. Vimos en clases que cuando los hogares pueden diversificar riesgo, su consumo no responde a shocks idiosincrásicos (paper de Townsend).

   b) Un investigador con datos de consumo e ingreso a nivel de hogares no podrá determinar si los datos se ajustan más a teorías con ahorro por precaución o a teorías con restricciones al crédito.

   Respuesta
   Verdadero. En clases se vio que cuando $u'(0) = \infty$, la teoría de ahorro por precaución predice una suerte de restricción de liquidez autoimpuesta, en el sentido que los hogares nunca gastarán más del ingreso que tienen (nunca se endeudarán) debido a que la posibilidad de tener ingreso 0 en el futuro limitará su posibilidad de endeudarse (en otras palabras, se tendrá que $D_t \leq \sum_{k\geq 0} \beta^k \min\{y_{t+k}\} = 0$). Si bien Carroll predice que el mínimo ingreso posible será 0, en la práctica no se conoce el mínimo. Luego, existe una dificultad para el econometrista de distinguir entre restricciones de liquidez y ahorro por precaución.

   c) El puzzle del premio por riesgo accionario es consecuencia de tomarse demasiado en serio las condiciones de Euler.

   Respuesta
   Incierto. Una opción es que el puzzle se explique porque la condición de Euler no se cumple todos los periodos. Sin embargo, hay más razones que podrían explicar el puzzle: independencia del coeficiente de aversión al riesgo y sustitubilidad intertemporal (cambiar la función de utilidad), formación de hábitos de consumo, agentes heterógeneos (no toda la población posee acciones), entre otras.

   d) Los consumidores hiperbólicos enfrentan problemas de consistencia dinámica.

   Respuesta
   Verdadero en la medida que se trate de un consumidor hiperbólico sofisticado.

   e) El modelo de suavizamiento de los impuestos de Barro sugiere que la reconstrucción luego de una catástrofe natural mayor debe financiarse principalmente vía deuda.

   Respuesta
   Verdadero. La reconstrucción supone una alta inversión en un período acotado de tiempo,

lo cual no sería consistente con una recaudación obtenida de impuestos puesto que éstos deberían estar suavizados en el tiempo. De este modo, financiar vía deuda permite obtener los recursos y mantener los impuestos suavizados.

2. **Equivalencia Cierta y Proceso de Ingresos de Carroll (20 pts)**

El ingreso del hogar, Y_t, satisface $Y_t = P_t\varepsilon_t$, con $P_t = (1+g)P_{t-1}N_t$. ε_t es i.i.d., y es igual a cero con probabilidad p e igual a una realización de una variable con media uno con probabilidad $1-p$. Los N_t son independientes de los ε_t e i.i.d. con media uno.

Se cumplen los supuestos de equivalencia cierta y $\beta(1+g) < 1$.

a) Determine el consumo óptimo, C_t. La expresión que obtenga no debe involucrar ninguna sumatoria.

Respuesta
Dado que estamos bajo equivalencia cierta podemos utilizar que el consumo óptimo viene dado por:

$$C_t = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \sum_{s\geq 0}\beta^s \mathrm{E}_t Y_{t+s}\right\}.$$

Por tanto, lo relevante es poder conocer $\mathrm{E}_t Y_{t+s}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t Y_{t+s} &= \mathrm{E}_t P_{t+s}\cdot \mathrm{E}_t\varepsilon_{t+s} && \text{Los } N_t \text{ son independientes de los } \varepsilon_t.\\
\mathrm{E}_t Y_{t+s} &= \mathrm{E}_t P_{t+s}\cdot[p\cdot 0 + (1-p)\cdot 1]\\
\mathrm{E}_t Y_{t+s} &= (1-p)(1+g)\mathrm{E}_t P_{t+s-1}\cdot \underbrace{\mathrm{E}_t N_{t+s}}_{1}\\
\vdots &= \quad \vdots \quad \vdots\\
\mathrm{E}_t Y_{t+s} &= (1-p)(1+g)^s P_t \quad \text{para} \quad s \geq 1.
\end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión:

$$\begin{aligned}
C_t &= \frac{r}{1+r}\left\{A_t + P_t\varepsilon_t + (1-p)P_t\sum_{s\geq 1}[\beta(1+g)]^s\right\}\\
C_t &= \frac{r}{1+r}\left\{A_t + P_t\left[\varepsilon_t + \frac{(1-p)(1+g)\beta}{1-(1+g)\beta}\right]\right\}\\
C_t &= \frac{r}{1+r}A_t + P_t\left[\frac{r}{1+r}\varepsilon_t + \frac{(1-p)(1+g)r\beta}{r-g}\right]
\end{aligned}$$

b) Encuentre la propensión marginal a consumir del ingreso permanente, P_t, y la propensión marginal a consumir del ingreso transitorio ε_t. Dé la intuición para las expresiones que obtenga.
Respuesta

Se puede chequear que la propensión marginal a consumir del ingreso permanente y la del ingreso transitorio están, respectivamente, dadas por:

$$\frac{\partial C_t}{\partial P_t} = \frac{r}{1+r}\varepsilon_t + \frac{(1-p)(1+g)r\beta}{r-g} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial C_t}{\partial \varepsilon_t} = \frac{r}{1+r}P_t$$

La intuición de las expresiones obtenidas se condice con que el suavizamiento del consumo, y es el siguiente:

- Un aumento en el ingreso permanente genera un cambio positivo en el nivel de consumo el cual depende tanto de p como g: (i) Si $p = g = 0$ el aumento será en promedio igual a uno, puesto que no hay probabilidad de estar desempleado y el aumento en el ingreso permanente es completamente persistente. (ii) Si $p = 0$ y $g > 0$ el aumento será más que proporcional, puesto que el aumento del ingreso permanente será creciente. (iii) Si $p > 0$ el aumento puede ser menos que proporcional, puesto que el individuo ahorrará dada la probabilidad que esté desempleado en el futuro.
- Un aumento en el ingreso transitorio generará que el consumo sólo aumente en los intereses que genera, puesto que el resto es ahorrado (se anualiza para suavizar consumo).

3. **Exceso de suavizamiento y diferencias de información (24 pts)**

Se cumplen los supuestos de equivalencia cierta,[1] de modo que cambios en consumo vienen dados por:

$$\Delta c_t = \frac{r}{1+r}\sum_{u\geq 0}\beta^u \left\{\mathrm{E}[y_{t+u}|\Omega_t] - \mathrm{E}[y_{t+u}|\Omega_{t-1}]\right\}, \tag{1}$$

donde Ω_t denota la información de que disponen los hogares en t.

El ingreso laboral es generado por un proceso:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

donde $0 \leq \alpha < 1$ y ε_t y x_t son variables aleatorias i.i.d. con media nula, varianza σ_ε^2 y σ_x^2, no correlacionadas entre sí, ni con valores pasados de y.

La información utilizada por los hogares para determinar su consumo (Ω_t en (1)) incluye tanto y_t como x_t (también incluye valores pasados de estas variables pero no los va a necesitar). En cambio, el econometrista sólo observa y_t, de modo que sólo los hogares utilizan x_t cuando predicen ingresos.

a) Encuentre $y_t - \mathrm{E}[y_t|\Omega_{t-1}]$ para los hogares.

Respuesta

Se tiene que:

$$\begin{aligned} y_t - E_{t-1}y_t &= \alpha y_{t-1} + x_{t-1} + \varepsilon_t - \alpha y_{t-1} - x_{t-1} \\ &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

[1] Utilidad instantánea cuadrática, $\gamma = 1/(1+r)$.

b) Encuentre $\mathrm{E}[y_{t+u}|\Omega_t] - \mathrm{E}[y_{t+u}|\Omega_{t-1}]$, $u \geq 1$, para los hogares.

Respuesta

Se tiene que:

$$\begin{aligned} y_{t+u} &= \alpha y_{t+u-1} + x_{t+u-1} + \varepsilon_{t+u} \\ &= \alpha^2 y_{t+u-2} + \alpha x_{t+u-2} + \alpha\varepsilon_{t+u-1} + x_{t+u-1} + \varepsilon_{t+u} \end{aligned}$$

Sustituyendo recursivamente, finalmente llegamos a:

$$y_{t+u} = \alpha^u y_t + \alpha^{u-1} x_t + resto$$

en donde *resto* corresponden a variables cuya esperanza en t será 0. Así, calculando la esperanza en t, llegamos a que $E_t y_{t+u} = \alpha^u y_t + \alpha^{u-1} x_t$.

Otra manera de verlo es que:

$$E_t y_{t+u} = E_t\left[\alpha y_{t+u-1} + x_{t+u-1} + \varepsilon_{t+u}\right] = \alpha E_t y_{t+u-1}$$

Realizando esa sustitución recursivamente, llegamos a:

$$E_t y_{t+u} = \alpha E_t y_{t+u-1} = \alpha^2 E_t y_{t+u-2} = \ldots = \alpha^{u-1} E_t y_{t+1}$$

Y como $E_t y_{t+1} = \alpha y_t + x_t$, se llega a que $E_t y_{t+u} = \alpha^u y_t + \alpha^{u-1} x_t$.

Finalmente, tendremos que:

$$\begin{aligned} E_t y_{t+u} - E_{t-1} y_{t+u} &= \alpha^u \left(y_t + \frac{x_t}{\alpha} - \alpha y_{t-1} - x_{t-1} \right) \\ &= \alpha^u \left(\varepsilon_t + \frac{x_t}{\alpha} \right) = \alpha^{u-1}(\alpha\varepsilon_t + x_t) \end{aligned}$$

c) Use (1), (a) y (b) para determinar Δc para los hogares.

Respuesta

De las partes anteriores, se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta C_t &= \frac{r}{1+r}\left\{ \sum_{u\geq 0} \beta^u \left[E_t y_{t+u} - E_{t-1} y_{t+u}\right] \right\} \\ &= \frac{r}{1+r}\left\{ \varepsilon_t + \sum_{u\geq 1} \beta^u \alpha^u \left[\varepsilon_t + \frac{x_t}{\alpha}\right] \right\} \\ &= \frac{r}{1+r}\varepsilon_t + \frac{r}{1+r}\left(\varepsilon_t + \frac{x_t}{\alpha}\right) \sum_{u\geq 1} (\alpha\beta)^u \\ &= \frac{r}{1+r}\varepsilon_t + \frac{r}{1+r}\left(\varepsilon_t + \frac{x_t}{\alpha}\right) \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \\ &= \frac{r}{1+r}\frac{1}{1-\alpha\beta}(\varepsilon_t + \beta x_t) = \frac{r}{1+r-\alpha}(\varepsilon_t + \beta x_t) \end{aligned}$$

d) Repita (a), (b) y (c) con la información disponible para el econometrista.

Respuesta

En este escenario, x_t no es observable. Luego, el econometrista ve que $y_t = \alpha y_{t-1} + w_t$ con $w_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$ no observable. Así, para $u \geq 0$ se tendrá que:

$$\begin{aligned} E_t y_{t+u} &= \alpha^u y_t \\ E_{t-1} y_{t+u} &= \alpha^{u+1} y_{t-1} \end{aligned}$$

Luego, se tiene que $E_t y_{t+u} - E_{t-1} y_{t+u} = \alpha^u (y_t - \alpha y_{t-1}) = \alpha^u (w_t) = \alpha^u (\varepsilon_t + x_{t-1})$.
Así, finalmente,

$$\begin{aligned} \Delta C_t &= \frac{r}{1+r} \sum_{u \geq 0} \beta^u \left\{ E_t Y_{t+u} - E_{t-1} Y_{t+u} \right\}. \\ &= \frac{r}{1+r} (\varepsilon_t + x_{t-1}) \sum_{u \geq 0} (\alpha\beta)^u \\ &= \frac{r}{1+r} \frac{1}{1-\alpha\beta} (\varepsilon_t + x_t) = \frac{r}{1+r-\alpha} (\varepsilon_t + x_t) \end{aligned}$$

e) Muestre que la varianza que estima el econometrista para Δc será mayor que la varianza verdadera de Δc.

Respuesta

Aplicando varianza a ambas expresiones y calculando el ratio, tenemos que:

$$\frac{V(\Delta C_t^H)}{V(\Delta C_t^E)} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 + \beta^2 \sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_x^2}$$

el cual es menor a 1, dado que $\beta \in (0,1)$. Se concluye entonces que la varianza del consumo predicha por el econometrista es mayor a la verdadera.

f) El puzzle del *suavizamiento excesivo del consumo* se refiere a la observación empírica de que las series cronológicas de consumo observadas responden a shocks no anticipados de ingreso en menor medida de lo que señalan las estimaciones del modelo de equivalencia cierta.[2] Use los resultados anteriores para dar una posible explicación para este hallazgo.

Respuesta

Los agentes tienen más información que el econometrista (observan x_t), luego pueden suavizar mejor el consumo que lo predicho por el modelo. Esto no quiere decir que el ingreso no fluctúe, sino que los hogares anticipan mejor dichas fluctuaciones y pueden entonces planificar mejor sus trayectorias de consumo, siendo éste menos volátil. Así, los resultados anteriores pueden constituir una solución al hallazgo empírico: las series muestran menor volatilidad de consumo que la predicha por el modelo, porque a la hora de estimar el modelo el econometrista no incorpora información que sí es relevante para los hogares.

[2] Este puzzle guarda una relación cercana con el puzzle del exceso de sensibilidad del consumo visto en clases.

4. **Restricciones de crédito e impaciencia (36 pts)**

El tiempo $t \geq 0$ es discreto. Un hogar recibe un ingreso constante $y > 0$ en cada perído antes de decidir cuánto consumir. El hogar puede endeudarse contra ingresos futuros y ahorrar, ambos a una tasa de interés fija y exógena r. El timing es el siguiente: El hogar comienza el período t con dinero-en-mano x_t^B; recibe ingresos de y que resulta en dinero-en-mano $x_t = x_t^B + y$. A continuación el hogar elige consumo para el período t, c_t, y ahorro/deuda de $x_t - c_t$ a una tasa bruta de $R \equiv 1 + r$. El período t concluye y el hogar comienza $t+1$ con dinero-en-mano $x_{t+1}^B = R(x_t - c_t)$. En lo que sigue nos centramos en x_t, por lo cual notamos que:

$$x_{t+1} = R(x_t - c_t) + y.$$

El hogar maximiza $\sum_{t \geq 0} \gamma^t u(c_t)$, donde $\gamma \in [0,1)$ denota el factor de descuento subjetivo del hogar y $u(c) = c^{1-\frac{1}{\sigma}} / \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)$ con $\sigma > 0$. Definimos δ vía $\gamma = 1/(1+\delta)$ y suponemos $\delta > r$. El dinero-en-mano inicial x_0^B viene dado y es positivo.

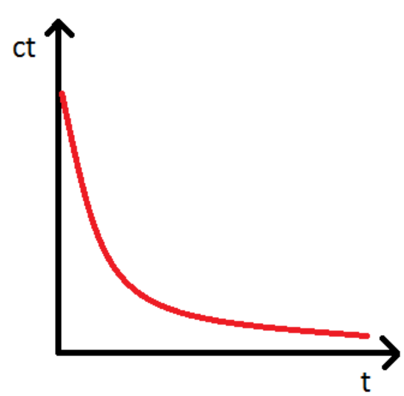
a) **(10 pts)** Escriba la ecuación de Euler (no es necesario que la derive) y utilícela para obtener la trayectoria óptima de consumo. Muestre que es decreciente a tasa geométrica y determine esta tasa. Grafique el consumo vs. el tiempo. ¿Se endeuda el hogar contra ingreso futuro? Muestre que el consumo óptimo en $t = 0$, c_0, es lineal en x_0 y encuentre la propensión marginal a consumir de dinero-en-mano en $t = 0$, es decir, encuentre $c_0'(x_0)$.

Respuesta

De la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \gamma R u'(c_{t+1}) \\ c_t^{-\frac{1}{\sigma}} &= \gamma R c_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad c_{t+1} = (\gamma R)^{\sigma} c_t \end{aligned}$$

Como $\gamma R < 1$ (ya que $\delta > r$), se desprende que la trayectoria de consumo es decreciente, y decae geométricamente a tasa $(\gamma R)^{\sigma}$. El gráfico del consumo contra el tiempo es el siguiente:



Ciertamente el individuo se endeuda, ya que la trayectoria de consumo es decreciente y el ingreso exógeno es constante. Luego, en los primeros períodos $c_t > y$, lo que implica que deberá pedir prestado.

Finalmente, por la condición de No-Ponzi, en $t = 0$ tendremos que $W_0 = \sum_{s\geq 0} R^{-s} c_s$. Además, sabemos que $W_0 = x_0^B + \sum_{s\geq 0} R^{-s} y_s = x_0^B + \frac{1+r}{r} y = x_0 + \frac{y}{r}$. Luego:

$$\begin{aligned} W_0 = x_0^B + \frac{1+r}{r} y &= \sum_{s\geq 0} R^{-s} c_s \\ &= c_0 \sum_{s\geq 0} R^{-s} (R\gamma)^{\sigma s} \\ &= c_0 \sum_{s\geq 0} \left[R^{\sigma-1} \gamma^{\sigma}\right]^s \end{aligned}$$

Lo que implica que:

$$c_0^* = \left(x_0^B + \frac{1+r}{r} y\right)\left(1 - R^{\sigma-1}\gamma^{\sigma}\right)$$

o, equivalentemente,

$$c_0^* = \left(x_0 + \frac{y}{r}\right)\left(1 - R^{\sigma-1}\gamma^{\sigma}\right)$$

Se aprecia que $c_0(x_0)$ es lineal en x_0. Finalmente, la propensión marginal a consumir del dinero-en-mano en $t = 0$ será:

$$\frac{\partial c_0}{\partial x_0} = 1 - R^{\sigma-1}\gamma^{\sigma}$$

A continuación asumimos que el hogar no puede endeudarse contra ingreso futuro. Es decir, tenemos un hogar impaciente con restricciones de crédito. Por simplicidad también suponemos $r = 0$.

Denotando mediante $c_0^*, c_1^*, c_2^*, ...$ la secuencia óptima de consumo, se puede mostrar (no es necesario que lo haga) que ésta se determina como sigue:

- Asuma c_0^* conocido y mayor que y.
- Denote por T el mayor t para el cual $\gamma^{\sigma t} c_0^* > y$. Entonces $c_t^* = \gamma^{\sigma t} c_0^*$ para $t \leq T$ y $c_t^* = y$ para $t \geq T + 1$.
- Finalmente, c_0^* y T se determinan resolviendo $\sum_{t=0}^{T} (c_t^* - y) = x_0 - y$.

b) **(5 pts)** Discuta brevemente la intuición para la trayectoria de consumo recién descrita. Distinga entre períodos donde se cumple la ecuación de Euler de la parte *a)* y períodos donde no se cumple.

Respuesta

La información que tenemos es que el individuo enfrenta restricciones de liquidez y, por la ecuación de Euler, que su trayectoria de consumo óptima (en ausencia de restricciones) es decreciente. El agente no puede pedir prestado para consumir a cabalidad su trayectoria óptima (que como argumentamos antes, en los primeros periodos es mayor a y), pero sí puede diferir su dinero-en-mano inicial (dado y positivo) entre distintos periodos para ir satisfaciendo una trayectoria decreciente. Como su dinero-en-mano inicial es limitado, podrá utilizar esta estrategia solo para una determinada cantidad de periodos (para todo $t \leq T$) y, luego, se verá limitado a consumir y en todos los periodos siguientes. Como óptimamente su trayectoria es decreciente, no tendrá incentivos a diferir parte de su ingreso y en los periodos $t \geq T+1$, razón por la cual en dichos periodos se consumirá todo su ingreso.

En los periodos $t \leq T$, el individuo cumple la ecuación de Euler, ya que si bien el nivel del consumo inicial es menor, la tasa geométrica a la que decae el consumo es la misma que en el escenario sin restricciones. Por otro lado, en los periodos $t \geq T+1$, el invididuo consume más de su óptimo, por ende no se cumple la ecuación de Euler.

***c)* (5 pts)** Encuentre $\bar{x_0} > y$ tal que $c_0^{*\prime}(x_0) = 1$ para $x_0 \in (y, \bar{x_0})$.

Respuesta

En valores de x_0 cercanos a y, se tiene que $c_0^* = x_0$ y $c_t^* = y$ para $t \geq 1$. La intuición de aquella expresión es que x_0 es muy bajo, luego lo gastará todo en su primer periodo y no le alcanzará para diferir hacia los períodos futuros con la finalidad de satisfacer la trayectoria decreciente de consumo (hablar de valores de x_0 cercanos a y es equivalente a hablar de valores de x_0^B cercanos a 0).

Precisando, para que lo recién descrito sea óptimo, se deberá cumplir que $c_0^*\gamma^\sigma \leq y$, es decir que x_0^B debe ser lo suficientemente pequeño para que no sea óptimo diferir parte de él para el segundo periodo. La expresión anterior implica que $x_0 \leq \gamma^{-\sigma} y$, por lo que podremos definir $\bar{x_0} = \gamma^{-\sigma} y$, concluyendo que $c_0^{*\prime}(x_0) = 1$ para todo $x_0 \in (y, \bar{x_0})$.

***d)* (10 pts)** Suponga que la trayectoria óptima de consumo recién descrita se cumple y que tenemos que x_0 y $x_0 + \Delta x$ son mayores que y para $t \leq T$ e iguales a y para $t \geq T+1$, donde $\Delta x > 0$ es pequeño. Calcule la propensión marginal a consumir del dinero-en-mano inicial x_0. Muestre que es decreciente en T y que se aproxima al valor obtenido en la parte *a)* cuando T tiende a infinito. Dé la intuición económica para este resultado.

Respuesta

De las condiciones propuestas en el enunciado, se tiene que:

$$\sum_{t=0}^{T} (c_0^* \gamma^{\sigma t} - y) = c_0^* \frac{1 - \gamma^{\sigma(T+1)}}{1 - \gamma^\sigma} - (T+1)y = x_0 - y$$

$$\Rightarrow \quad c_0^* = [Ty + x_0] \left(\frac{1 - \gamma^\sigma}{1 - \gamma^{\sigma(T+1)}} \right)$$

lo que implica que:

$$c_0^{*\prime}(x_0) = \frac{1 - \gamma^\sigma}{1 - \gamma^{\sigma(T+1)}}$$

Se puede apreciar que la expresión es decreciente en T (a medida que T crece, el denominador cae, puesto que γ es menor a 1). Adicionalmente, cuando $T \to \infty$, tenemos que $\gamma^{\sigma(T+1)} \to 0$, lo que implica que:

$$c_0^{*\prime}(x_0) = 1 - \gamma^{\sigma}$$

que es equivalente a la expresión encontrada para el escenario en ausencia de restricciones de liquidez (recordar que ahora estamos asumiendo que $r = 0$). La intuición es que si T es muy grande entonces mi nivel de dinero-en-mano inicial es muy alto, puesto que me permite diferirlo por varios periodos manteniendo una trayectoria de consumo decreciente (a la tasa geométrica óptima). En el límite (cuando $T \to \infty$), T nunca llega, lo que es equivalente a decir que el nivel de dinero-en-mano inicial es lo suficiente grande como para satisfacer mi trayectoria de consumo decreciente óptima en un mundo sin restricciones. En otras palabras, niveles de riqueza inicial muy grandes implican que la restricción de liquidez no es activa, y por ende ambos escenarios son equivalentes.

e) **(6 pts)** Concluya que c_0^* es una función lineal por tramos y cóncava de x_0.

Respuesta

Por lo discutido hasta ahora, para valores de x_0 cercanos a y, tendremos que $c_0^*(x_0) = x_0$. Así, existirá un tramo para x_0 asociado a $c_0^*(x_0) = x_0$. Luego, pasado cierto umbral, x_0 será tal que permitirá diferir ingreso para $t = 1$ y luego la pendiente caerá (los aumentos en x_0 se distribuirán entre $t = 0$ y $t = 1$, y no uno a uno como el caso anterior). Así, luego existirá otro umbral que volverá a hacer caer la pendiente, y así sucesivamente. Se concluye entonces que c_0^* será una función lineal por tramos y cóncava de x_0 (unión de rectas con pendiente cada vez menor).

5. **Consumo con utilidad instantánea CARA (20 pts)**

El hogar maximiza

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t u(c_t)$$

donde $0 < \gamma < 1$ y

$$u(c) = -\frac{1}{A} e^{-Ac}.$$

La tasa de interés es constante e igual a r, no hay restricciones para endeudarse (más allá de la condición de no Ponzi), el consumo puede ser negativo y $R \equiv 1 + r$.

Consideramos primero el caso en que los ingresos del hogar son conocidos y vienen dados por $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$. Los activos iniciales son a_0.

Denotamos mediante $\{c_t^*(a_0)\}_{t=0}^{\infty}$ la secuencia de consumo que resuelve el problema del hogar, como función de los activos iniciales. Es decir:

$$\begin{aligned} \{c_t^*(a_0)\}_{t=0}^{\infty} \quad &\equiv \quad \operatorname{argmax}_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ -\frac{1}{A} \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t e^{-Ac_t} \right\} \\ &\text{s.a.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} R^{-t} c_t \leq a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} R^{-t} y_t. \end{aligned}$$

En este problema nos proponemos mostrar que existe una constante positiva α tal que

$$c_t^*(a_0+x) = c_t^*(a_0) + \alpha x. \tag{2}$$

a) Suponiendo que se cumple (2), determine el valor de la constante α.

Indicación: En otras palabras, lo que se le pide es encontrar el valor de α tal que la expresión propuesta sea factible.

Respuesta

Dada la función de utilidad, la restricción presupuestaria debe cumplirse con igualdad. Además, al nombrar $a' = a_0 + x$, tenemos que siempre se debe cumplir que:

$$\sum_{t\geq 0} R^{-t} c_t^*(a_0) - a_0 = \sum_{t\geq 0} R^{-t} y_t = \sum_{t\geq 0} R^{-t} c_t^*(a') - a'$$

Luego, utilizando (2):

$$\begin{aligned}
\sum_{t\geq 0} R^{-t} c_t^*(a_0) - a_0 &= \sum_{t\geq 0} R^{-t}[c_t^*(a_0) + \alpha x] - a_0 - x \\
\sum_{t\geq 0} R^{-t} c_t^*(a_0) + x &= \sum_{t\geq 0} R^{-t} c_t^*(a_0) + ax \sum_{t\geq 0} R^{-t} \Rightarrow \alpha^* = \frac{r}{1+r}
\end{aligned}$$

b) Use la optimalidad de $c_t^*(a_0)$ (cuando $x = 0$) para mostrar que $c_t^*(a_0+x) = c_t^*(a_0) + \alpha x$, con el valor de α derivado en *a)*, es óptimo cuando los activos iniciales son $a_0 + x$.

Indicación: La demostración es por contradicción. Suponga que existe una secuencia $\widetilde{c}_t$ que satisface la condición de no Ponzi (con activos iniciales $a_0 + x$) y que logra un mayor valor de U que $c_t^*(a_0) + \alpha x$ y concluya que esto significa que la secuencia $\{c_t^*(a_0)\}_{t=0}^{\infty}$ no era óptima cuando los activos iniciales eran a_0, ya que existirá otra secuencia factible que otorgue mayor utilidad en ese escenario. Lo anterior constituye una contradicción con la optimalidad de $\{c_t^*(a_0)\}_{t=0}^{\infty}$.

Respuesta

Supongamos que $\{\tilde{c}_t\}_{t=0}^{\infty}$ es mejor que $\{c_t^*(a')\}_{t=0}^{\infty}$ cuando los activos iniciales son $a_0 + x$. Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{\gamma} \sum_{t\geq 0} \beta^t \exp(-\gamma \tilde{c}_t) &> \frac{-1}{\gamma} \sum_{t\geq 0} \beta^t \exp(-\gamma c_t^*(a')) && (3) \\
\text{y} \quad \sum_{t\geq 0} R^{-t} \tilde{c}_t &= a' + \sum_{t\geq 0} R^{-t} y_t && (4)
\end{aligned}$$

Luego, tomando la desigualdad anterior en (3) y multiplicando convenientemente por $\exp\left(\gamma x \frac{r}{1+r}\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{-\exp\left(\gamma x \frac{r}{1+r}\right)}{\gamma} \sum_{t\geq 0} \beta^t \exp(-\gamma \tilde{c}_t) &> \frac{-\exp\left(\gamma x \frac{r}{1+r}\right)}{\gamma} \sum_{t\geq 0} \beta^t \exp(-\gamma c_t^*(a')) \\
\Leftrightarrow \frac{-1}{\gamma} \sum_{t\geq 0} \beta^t \exp\left(-\gamma\left(\tilde{c}_t - x\frac{r}{1+r}\right)\right) &> \frac{-1}{\gamma} \sum_{t\geq 0} \beta^t \exp\left(-\gamma\left(c_t^*(a') - x\frac{r}{1+r}\right)\right) \\
(5) \quad \Leftrightarrow \frac{-1}{\gamma} \sum_{t\geq 0} \beta^t \exp\left(-\gamma\left(\tilde{c}_t - x\frac{r}{1+r}\right)\right) &> \frac{-1}{\gamma} \sum_{t\geq 0} \beta^t \exp\left(-\gamma c_t^*(a_0)\right)
\end{aligned}$$

A su vez, la restricción presupuestaria en (4) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\sum_{t\geq 0} R^{-t}\tilde{c}_t + (x-x) &= a' + \sum_{t\geq 0} R^{-t} y_t \\
\Leftrightarrow \sum_{t\geq 0} R^{-t}\left(\tilde{c}_t - \frac{r}{1+r}x\right) + x &= a' + \sum_{t\geq 0} R^{-t} y_t \\
\Leftrightarrow \sum_{t\geq 0} R^{-t}\left(\tilde{c}_t - \frac{r}{1+r}x\right) &= a_0 + \sum_{t\geq 0} R^{-t} y_t \qquad (6)
\end{aligned}$$

De este modo, tomando (6) vemos que la canasta $\left(\tilde{c}_t - \frac{r}{1+r}x\right)$ es factible con activos a_0. Además, considerando (5) vemos que es preferida a $c_t^*(a_0)$, lo cual genera una contradicción con que $c_t^*(a_0)$ haya sido óptimo inicialmente. Así, se concluye que $c_t^*(a_0+x) = c_t^*(a_0) + \alpha x$ es óptima.