Profesor	: Eduardo Engel	Mayo 11, 2022
Ayudantes	: Benjamin Peña y Giovanni Villa	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2022	
Guía	: Repaso	

1. **Ecuación para tiempos tormentosos**

   (a) Considere el modelo de equivalencia cierta (utilidad cuadrática, no hay activo riesgoso, $r = \delta$). Entonces el consumo óptimo viene dado por:

   $$C_t = \frac{r}{1+r}\left\{\sum_{k\geq 0}\beta^k \mathrm{E}_t Y_{L,t+k} + A_t\right\},$$

   donde $\beta = 1/(1+r)$, $Y_{L,t}$ denota el ingreso laboral en t, A_t activos financieros al comienzo del período t y suponemos que el timing es tal que el ingreso financiero durante el período t, $Y_{K,t}$, es igual a $r(A_{t-1} + Y_{L,t-1} - C_{t-1})$.

   Recordando que, por definición, ahorro durante t, S_t, es igual a la diferencia entre ingreso total y consumo, muestre que:

   $$S_t = Y_{L,t} - r\sum_{k\geq 0}\beta^{k+1}\mathrm{E}_t Y_{L,t+k}.$$

   A continuación muestre, a partir de la expresión anterior, que:

   $$S_t = -\sum_{k\geq 1}\beta^k \mathrm{E}_t[\Delta Y_{L,t+k}], \tag{1}$$

   donde $\Delta Y_{L,t} \equiv Y_{L,t} - Y_{L,t-1}$. Explique por qué este resultado muestra que una reducción en el ahorro no necesariamente presagia menor crecimmiento en el futuro. También explique por qué esta ecuación se conoce como la "ecuación de días tormentosos".

   (b) A continuación usamos el resultado anterior para predecir cambios futuros en el ingreso en base al ahorro corriente. Suponemos que el ingreso sigue un proceso ARIMA(0,1,1):

   $$\Delta Y_t = g + \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1},$$

   con ε_t i.i.d. con media nula y varianza σ^2. Use la ecuación de días tormentosos (1) para mostrar cómo se puede utilizar los ahorros del período t para predecir el cambio de ingreso entre t y $t+1$.

Solución:

(a) Tenemos que:

$$S_t = Y_t - C_t = Y_{K,t} + Y_{L,t} - \frac{r}{1+r}\{\sum_{k\geq 0}\beta^k E_t\left[Y_{L,t+k}\right] + A_t\}$$

Comparando la expresión anterior para A_t e $Y_{K,t}$ tenemos que:

$$Y_{K,t} = \frac{r}{1+r} A_t,$$

que combinadas con la expresión anterior para S_t y usando que bajo equivalencia cierta $\beta(1+r) = 1$, llegamos a:

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{r}{1+r} A_t + Y_{L,t} - \frac{r}{1+r} \{ \sum_{k \geq 0} \beta^k E_t \left[Y_{L,t+k} \right] + A_t \} \\ &= Y_{L,t} - r \sum_{k \geq 0} \beta^{k+1} E_t \left[Y_{L,t+k} \right] \end{aligned}$$

Para derivar la segunda expresión, se comienza con la expresión a la que se quiere llegar:

$$S_t = - \sum_{k \geq 1} \beta^k E_t \left[\Delta Y_{L,t+k} \right] = - \sum_{k \geq 1} (\beta^k E_t Y_{L,t+k} - \beta^k E_t Y_{L,t+k-1}).$$

Si se abre la suma, el coeficiente de $E_t \left[Y_{L,t+k} \right]$ es $-\beta^k + \beta^{k+1}$ si $k \geq 1$ y β si $k = 0$. Y por lo tanto $-\beta^k + \beta^{k+1} = -r\beta^{k+1}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} - \sum_{k \geq 1} \beta^k E_t \left[\Delta Y_{L,t+k} \right] &= -r \sum_{k \geq 1} \beta^{k+1} E_t \left[Y_{L,t+k} \right] + \beta Y_{L,t} = \\ &= -r \sum_{k \geq 0} \beta^{k+1} E_t \left[Y_{L,t+k} \right] + (\beta + r\beta) \, Y_{L,t} \end{aligned}$$

Recordando que $\beta + r\beta = 1$ completa la demostración.

Esta expresión para S_t dice que el ahorro es igual el valor presente esperado de futuras caídas del ingreso laboral. Por eso una caída en el ahorro no presagia necesariamente menor crecimiento en el futuro. Por esta misma razón se conoce como la ”ecuación de días tormentosos”, porque se ahorra para cubrir futuras y esperadas caídas en el ingreso laboral.

(b) Una derivación directa muestra que:

$$\mathrm{E}_t[\Delta Y_{L,t+k}] = \begin{cases} g, & \text{for } k \geq 2, \\ g + \theta \varepsilon_t & \text{for } k = 1 \end{cases}$$

Usando la segunda expresión para S_t que se obtuvo antes, tenemos:

$$\begin{aligned}
S_t &= -\sum_{k\geq 1} \beta^k E_t\left[\Delta Y_{L,t+k}\right] \\
&= -\beta E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] - \sum_{k\geq 2} \beta^k E_t\left[\Delta Y_{L,t+k}\right] \\
&= -\beta E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] - \sum_{k\geq 2} \beta^k g \\
&= -\beta E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] - g\beta^2 \sum_{k\geq 0} \beta^k \\
&= -\beta E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] - \frac{g\beta^2}{1-\beta}
\end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$E_t\left[\Delta Y_{L,t+1}\right] = -\frac{g\beta}{1-\beta} - \frac{S_t}{\beta} = -\frac{g}{r} - (1+r)\, S_t.$$

Se concluye por lo tanto, que una caída en el ahorro presente genera un aumento en el ingreso futuro esperado.

2. **Modelo de búsqueda con dos sectores y crecimiento de la población**

Para este ejercicio consideraremos una extensión del modelo de Diamond, Mortensen y Pissarides (DMP). En este modelo existen dos sectores, uno donde hay trabajadores capacitados (C) y otro donde hay trabajadores no capacitados (NC). Los cuales serán indexados por C y NC.

La fuerza laboral de cada sector es L_C y L_{NC}. La función de matching es la misma para ambos sectores $m(U_i, V_i) = m(u_i L_i, v_i L_i)$, al igual que en el modelo base esta depende del número de empleados U_i y el número de vacantes V_i para cada sector, con $i = \{C, NC\}$.

Las firmas *deciden* si abrir una vacante para un trabajador del tipo C o para uno del tipo NC (solo contratan a un tipo de trabajador). En el caso base el valor de la producción por unidad de tiempo de un trabajador lo denominábamos por p. En este modelo p será el valor de una unidad *efectiva* de trabajo. Asumimos que cada trabajador no capacitado tiene una unidad de trabajo efectivo, mientras que los capacitados tienen $\eta > 1$ unidades efectivas.

Las vacantes son costosas en ambos sectores. El costo por unidad de tiempo de cada una la denotaremos por γ_C y γ_{NC}. La tasa de separación es exógena y puede diferir entre sectores, las denotamos por λ_C y λ_{NC}.

Por último, en esta economía la tasa de crecimiento de L_C y de L_{NC} es n_C y n_{NC} respectivamente. Asuma que los individuos "nacen" sin empleo.

(a) En este modelo, definimos el estado estacionario como aquel en que la tasa de desempleo de *cada sector* permanece constante ($\dot{u}_i = 0 \quad i = C, NC$). Comenzando con una ecuación para el cambio en el nº de desempleados ($\dot{U}$), muestre que las Curva de Beveridge serán de esta forma:

$$u_i = \frac{\lambda_i + n_i}{\lambda_i + n_i + \theta_i q(\theta_i)}$$

Respuesta:

Omitiré los subíndices

$$\dot{U} = (L-U)\lambda - U\theta q(\theta) + \dot{L} \quad \text{Dividimos por L}$$
$$\frac{\dot{U}}{L} = (1-u)\lambda - u\theta q(\theta) + n$$

Usamos que $\dot{u} = \frac{\dot{U}L - U\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{U}}{L} - u \cdot n$ para llegar a:

$$\dot{u} + u \cdot n = (1-u)\lambda - u\theta q(\theta) + n$$

Despejando u y usando $\dot{u} = 0$ llegamos al resultado (fin de la respuesta)

(b) Escriba las ecuaciones de Bellman de la firma para cada sector (4 en total).
Respuesta:

$$\begin{aligned} rJ_C &= p\eta - w_C + \lambda_C(V_C - J_C), \\ rJ_{NC} &= p - w_{NC} + \lambda_{NC}(V_{NC} - J_{NC}), \\ rV_C &= -\gamma_C + q(\theta_C)(J_C - V_C), \\ rV_{NC} &= -\gamma_{NC} + q(\theta_{NC})(J_{NC} - V_{NC}). \end{aligned}$$

En este modelo (no es necesario que lo demuestre) las ecuaciones de Bellman para los trabajadores junto con la ecuación de salario, son análogas la modelo base. [1]

(c) Suponga que $\gamma_C = \gamma_{NC} = \gamma$, $n_C = n_{NC} = n$, $\lambda_C = \lambda_{NC} = \lambda$ y $z = 0$. Usando las ecuaciones de Bellman de la firma, junto con las condiciones de libre entrada y las Curvas de Beveridge, muestre que $u_{NC} > u_C$ y $\theta_C > \theta_{NC}$ en este caso especial. Interprete. Muestre qué sucede con la diferencia salarial entre ambos sectores. Interprete.
Respuesta:
De la condición de libre entrada ($V_C = V_{NC} = 0$) tenemos que

$$J_i = \frac{\gamma}{q(\theta_i)} \tag{2}$$

[1] Le recordamos que en el modelo base estas son:

$$rU = z + \theta q(\theta)(W - U)$$
$$rW = w + \lambda(U - W)$$

Donde z es el ingreso de los desempleados. Mientras que la ecuación de salario es:

$$w = (1-\beta)z + \beta[p + \theta\gamma]$$

Como $\eta > 1$ sabemos que los trabajadores capacitados generan mayores rentas a la firmas $J_C > J_{NC}$. De (2) concluímos que $q(\theta_C) < q(\theta_{NC})$ y esto implica que $\theta_C > \theta_{NC}$ porque $q' \leq 0$. De la CB se concluye que $u_{NC} > u_C$

Interpretación: todo lo demás constante, los trabajadores capacitados generan mayores rentas a las firmas, por lo que las empresas estarán más dispuestas a crear este tipo de trabajos (abrir más vacantes). Lo único que igualará sus ganancias marginales es una tasa de matching menor (menor $q(\theta_C)$), es decir, una tasa más baja de desempleo.

La diferencia salarial será:

$$w_C - w_{NC} = \beta p(\eta - 1) + \beta\gamma(\theta_C - \theta_{NC})$$

Esta solo dependerá de $\theta_C - \theta_{NC} > 0$ y de $\eta - 1 > 0$, es decir, $w_C - w_{NC} > 0$. A mayor cantidad de unidades efectivas que tienen los trabajadores capacitados, todo lo demás constante, tendrán que pagarle más porque son más productivos.

(d) Describa y grafique en el plano (w,θ) y en el plano (v,u) cómo se ven afectados w_C, w_{NC}, θ_C, θ_{NC}, u_C, u_{NC}, v_C y v_{NC} luego de un incremento en z ¿Sobre qué tipo de trabajadores el aumento de z impacta más, en términos relativos,[2] en su salario?

Respuesta: La figura muestra el efecto en ambos sectores:

Figure 6: Plano (θ, w)

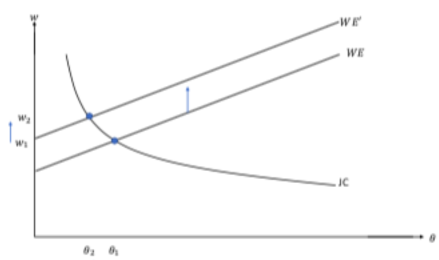
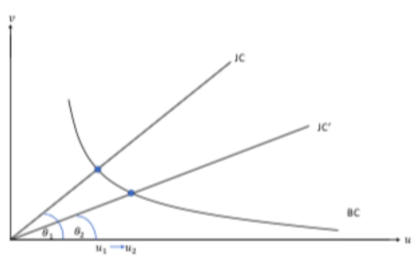


Figure 7: Plano (u, v)



El efecto será más grande sobre w_{NC}, porque los capacitados ganan más por ser más productivos ($\eta > 1$) y la parte $(1 - \beta)z$ es una menor proporción de su salario.

3. **Aplicación de la q de Tobin: Mercado inmobiliario (40 ptos)**

[2] Es decir, como fracción de su salario

Una variación interesande del modelo de q de Tobin aparece al estudiar la inversión en el mercado inmobiliario. Asumimos que las personas que son dueñas de una casa lo hacen para ganar el retorno de esta. Existe una masa de individuos normalizada a 1. No hay crecimiento de la población.

Denotaremos H como el *stock* de casas, es el capital en este modelo. R es la renta de tener una casa, que es una función decreciente de H. Es decir, $R = R(H)$ y $R'(H) < 0$.

El precio de las casas q se fija por la condición de no arbitraje, con r la tasa de interés:

$$r = \frac{R + \dot{q}}{q}$$

Sea I la tasa de inversión que es creciente en q tal que $I = I(q)$ con $I'(q) > 0$. La ley de movimiento de H es:

$$\dot{H} = I - \delta H$$

(a) Encuentre las ecuaciones para $\dot{H} = 0$ y $\dot{q} = 0$. Grafique ambas ecuaciones en el espacio (H, q). *Indicación:* Calcule la pendiente de cada curva y muestre que $\dot{H} = 0$ tiene pendiente positiva y $\dot{q} = 0$ pendiente negativa.

Respuesta:

La condición $\dot{H} = 0$ lleva a $I(q) = \delta H$. Esto es, para que el stock de casas se mantenga constante, la nueva inversión debe igualar la depreciación del stock existente. Diferenciando ambos lados de la expresión con respecto a H nos lleva a:

$$I'(q)\frac{dq}{dH} = \delta$$
$$\frac{dq}{dH} = \delta / I'(q) > 0$$

Si $\dot{q} = 0$ entonces $q = R(H)/r$. Diferenciando ambos lados de la expresión con respecto a H da:

$$\frac{dq}{dH} = R'(H)/r < 0$$

(La figura 1 en (c) muestra el gráfico)

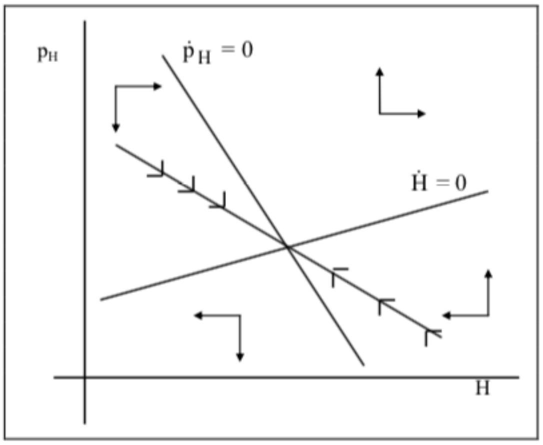
(b) ¿Por qué la curva $\dot{H} = 0$ *no* es horizontal en este modelo? Interprete

Respuesta:

Porque la inversión depende del precio de las casas q. La depreciación es una proporción del stock de casas y por lo tanto es mayor a mayores niveles de H, por lo tanto para mantener H constante a mayores niveles de H se necesita mayor inversión (recordar la condición $\delta H = I(q)$). Pero para tener más inversión el precio debe ser mayor, ya que $I'(q) > 0$

(c) ¿Cuáles son las dinámicas de H y q en cada región del diagrama de fase resultante? Dibuje el diagrama de fase, con los vientos y el *saddle path*

Respuesta:



(d) Suponga que los mercados está en su equilibrio de largo plazo y que hay un incremento permanente e inesperado sobre r. ¿Qué pasa con H y q al momento del cambio? ¿Cómo se comporta H, q, I y R a través del tiempo, luego del cambio? Explique y grafique. *Indicación:* Fíjese no solo en desplazamiento de las curvas sino también en cambios de pendientes de estas.

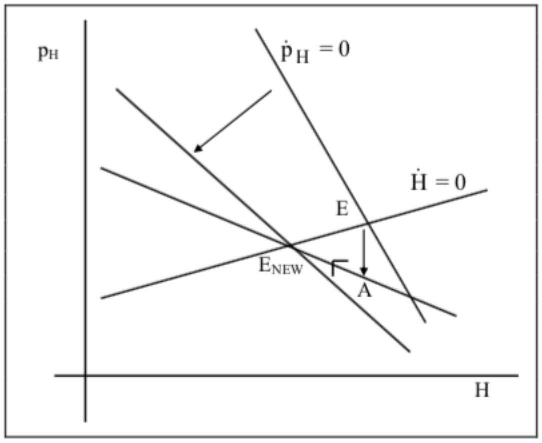
Respuesta:

La curva $\dot{q} = 0$ es definida para $q = R(H)/r$. Un incremento en r significa los q que hacen que $\dot{q} = 0$ son menores para un nivel dado de H. La curva $\dot{q} = 0$ se desplaza a la izquierda.

Además, la pendiente de esta curva es $R'(H)/r$, aumento en r hace la pendiente más pequeña (menos negativa). La curva $\dot{H} = 0$ no depende de r por lo que se mantiene constante.

Al momento del incremento en r, H no puede saltar discontinuamente. El precio de las casas q tiene que saltar hacia abajo para poner a la economía en el nuevo *saddle path*. Se observa el salto del punto E al punto A.

Este salto discontinuo en q hace que la inversión disminuya abrutamente. La inversión no es suficiente para compensar la depreciación al valor inicial de H. El stock de casas comienza a disminuir. Dado que H comienza a disminuir, $R(H)$ comienza a aumentar ya que $R'(H) < 0$. A medida que la economía se mueve a su nuevo estado estacionario el precio q va en aumento, lo que significa que la inversión va en aumento. Finalmente la economía alcanza el punto E_{NEW} donde el q es constante a un menor nivel (inversión es es constante a un menor nivel). H es constante a un menor nivel. La renta R es mayor.



(e) En este modelo, los costos de cambiar el stock de casas H ¿Son *internos* o *externos*? Justifique.

Respuesta:

Los costos son *externos*. No hay costos directos de construir casas en este modelo. Pero si hay un costo ya que cuando las firmas invierten, el precio se ajusta para que los individuos no desee n invertir o desinvertir a tasas infinitas.