CONTROL I – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: DIEGO FICA - NICOLÁS SUÁREZ

Pregunta 1 (40 puntos)

Considere una economía de intercambio con dos periodos, $t \in \{0,1\}$. Hay N individuos y K mercancías. Cada $i \in \{1,\ldots,N\}$ tienen una asignación inicial de recursos $w_t^i \in \mathbb{R}^K_{++}$ en el periodo t y sus preferencias pueden ser representadas por una función de utilidad $U^i : \mathbb{R}^K_+ \times \mathbb{R}^K_+ \to \mathbb{R}$, la cual es continua, estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

Las mercancías son semi-perecederas. Esto es, luego del consumo de una unidad de la mercancía $k \in \{1,\ldots,K\}$ en el primer periodo, $\delta_k \in (0,1)$ unidades están disponibles en $t=1$.

Dados vectores de precios $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^K_+$ para las mercancías en cada periodo, el agente i puede demandar planes de consumo en su conjunto presupuestario $B^i(p_0,p_1)$, el cual es caracterizado por los vectores $(x_0^i, x_1^i) \in \mathbb{R}^K_+ \times \mathbb{R}^K_+$ tales que:

$$p_0 \cdot x_0^i \ \leq \ p_0 \cdot w_0^i\,, \qquad\qquad p_1 \cdot x_1^i \ \leq \ p_1 \cdot w_1^i + \sum_{k=1}^K \delta_k p_{1,k} x_{0,k}^i.$$

Asumiendo las *hemicontinuidades*, *convexidades* y *compacidades* necesarias, pero haciéndolas notar en sus argumentos, demuestre que esta economía tiene al menos un equilibrio competitivo.

Solución. Comenzaremos con algunas definiciones que serán útiles para restringir las variables endógenas del modelo a conjuntos compactos.[1] Defina

$$\Omega = 2 \max_{1\leq k\leq K} \left\{ \sum_{i=1}^N w_{0,k}^i,\ \sum_{i=1}^N w_{1,k}^i + \delta_k \sum_{i=1}^N w_{0,k}^i \right\}, \qquad \Delta = \left\{ v \in \mathbb{R}^K_+ : \sum_{k=1}^K v_k = 1 \right\}.$$

Note que, para cada $i \in \{1,\ldots,N\}$, la correspondencia $\Gamma^i : \Delta \times \Delta \twoheadrightarrow [0,\Omega]^{2K}$ definida por $\Gamma^i(p_0,p_1) = B^i(p_0,p_1) \cap [0,\Omega]^{2K}$ es continua y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Por lo tanto, como las funciones de utilidad de los consumidores son continuas y cóncavas, el Teorema del Máximo de Berge nos asegura que las correspondencias

$$\gamma^i(p_0,p_1) = \operatorname*{arg\,max}_{(x_0^i,x_1^i)\in B^i(p_0,p_1)\cap[0,\Omega]^{2K}} U^i(x_0^i,x_1^i), \qquad i \in \{1,\ldots,N\},$$

son hemicontinuas superiores y tienen valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

Por conveniencia de notación, dados dos vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$, denote $a \circ b$ al vector $(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$. Como toda función lineal en cada variable es también continua y cuasi-cóncava en cada variable, el

[1] Como siempre, estos conjuntos serán lo suficientemente "amplios" como para no generar fricciones en el modelo, pero lo suficientemente "estrechos" como para atacar con técnicas de punto fijo el problema de existencia de equilibrio.

Teorema del Máximo de Berge implica que la correspondencia $\pi : [0,\Omega]^{2KN} \twoheadrightarrow \Delta\times\Delta$ definida por

$$\pi((x_0^i,x_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}) = \operatorname*{arg\,max}_{(p_0,p_1)\in\Delta\times\Delta} \; p_0\cdot\sum_{i=1}^N (x_0^i - w_0^i) + p_1\cdot\sum_{i=1}^N (x_1^i - w_1^i - \delta\circ w_0^i),$$

es hemicontinua superior con valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

Por lo tanto, la correspondencia $\Phi : \Delta\times\Delta\times[0,\Omega]^{2KN} \twoheadrightarrow \Delta\times\Delta\times[0,\Omega]^{2KN}$ caracterizada por

$$\Phi(p_0,p_1,(x_0^i,x_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}) = \pi((x_0^i,x_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}) \times \prod_{i=1}^N \gamma^i(p_0,p_1)$$

es hemicontinua superior y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Dado que $\Delta\times\Delta\times[0,\Omega]^{2KN}$ es convexo, compacto y diferente de vacío, aplicando el Teorema del Punto Fijo de Kakutani, concluimos que existe $(\overline{p}_0,\overline{p}_1,(\overline{x}_0^i,\overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}) \in \Delta\times\Delta\times[0,\Omega]^{2KN}$ tal que $(\overline{p}_0,\overline{p}_1,(\overline{x}_0^i,\overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}) \in \Phi(\overline{p}_0,\overline{p}_1,(\overline{x}_0^i,\overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$.

En particular, como $(\overline{p}_0,\overline{p}_1)\in\pi((\overline{x}_0^i,\overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$, para todo $(p_0,p_1)\in\Delta\times\Delta$ tenemos que

$$p_0\cdot\sum_{i=1}^N(\overline{x}_0^i - w_0^i) + p_1\cdot\sum_{i=1}^N(\overline{x}_1^i - w_1^i - \delta\circ w_0^i) \;\le\; \overline{p}_0\cdot\sum_{i=1}^N(\overline{x}_0^i - w_0^i) + \overline{p}_1\cdot\sum_{i=1}^N(\overline{x}_1^i - w_1^i - \delta\circ w_0^i).$$

Escogiendo $p_1 = \overline{p}_1$, obtenemos

$$p_0\cdot\sum_{i=1}^N(\overline{x}_0^i - w_0^i) \;\le\; \overline{p}_0\cdot\sum_{i=1}^N(\overline{x}_0^i - w_0^i) \;\le\; 0, \quad \forall p_0\in\Delta,$$

donde la última desigualdad sigue del hecho que $(\overline{x}_0^i,\overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}\in\prod_{i=1}^N B^i(\overline{p}_0,\overline{p}_1)$. Por lo tanto, escogiendo p_0 como cualquiera de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^K$, llegamos a que $\sum_{i=1}^N \overline{x}_0^i \le \sum_{i=1}^N w_0^i$. Esto último implica que $\overline{x}_0^i\in[0,\Omega)$ para todo $i\in\{1,\dots,N\}$. Así, la monotonía estricta de las preferencias nos permite concluir que $\overline{p}_0 \gg 0$ y $\overline{p}_0\cdot(\overline{x}_0^i - w_0^i) = 0$, $\forall i\in\{1,\dots,N\}$. Las propiedades

$$\sum_{i=1}^N \overline{x}_0^i \le \sum_{i=1}^N w_0^i, \qquad \overline{p}_0 \gg 0, \qquad \overline{p}_0\cdot(\overline{x}_0^i - w_0^i) = 0,\ \forall i\in\{1,\dots,N\}$$

implican que $\sum_{i=1}^N \overline{x}_0^i = \sum_{i=1}^N w_0^i$. Más aún, esta última igualdad y $(\overline{p}_0,\overline{p}_1)\in\pi((\overline{x}_0^i,\overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ implican que para todo $p_1\in\Delta$ tenemos que

$$p_1\cdot\sum_{i=1}^N(\overline{x}_1^i - w_1^i - \delta\circ\overline{x}_0^i) \;\le\; \overline{p}_1\cdot\sum_{i=1}^N(\overline{x}_1^i - w_1^i - \delta\circ\overline{x}_0^i) \;\le\; 0,$$

donde la última desigualdad es una consecuencia del hecho que $(\overline{x}_0^i,\overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}\in\prod_{i=1}^N B^i(\overline{p}_0,\overline{p}_1)$. Escogiendo p_1 como cualquiera de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^K$, llegamos a que

$$\sum_{i=1}^N \overline{x}_1^i \le \sum_{i=1}^N (w_1^i + \delta\circ\overline{x}_0^i).$$

Esto último implica que $\overline{x}_1^i\in[0,\Omega)$ para todo $i\in\{1,\dots,N\}$. Así, la monotonía estricta de las preferencias nos permite concluir que $\overline{p}_1\gg 0$ y $\overline{p}_1\cdot(\overline{x}_1^i - w_1^i - \delta\circ\overline{x}_0^i) = 0$, $\forall i\in\{1,\dots,N\}$. Análogo a lo ya hecho para las decisiones del primer periodo, las propiedades

$$\sum_{i=1}^N \overline{x}_1^i \le \sum_{i=1}^N (w_1^i + \delta\circ\overline{x}_0^i), \qquad \overline{p}_1 \gg 0, \qquad \overline{p}_1\cdot(\overline{x}_1^i - w_1^i - \delta\circ\overline{x}_0^i) = 0,\ \forall i\in\{1,\dots,N\}$$

implican que $\sum_{i=1}^{N}\overline{x}_1^i = \sum_{i=1}^{N}(w_1^i + \delta \circ \overline{x}_0^i) = \sum_{i=1}^{N}(w_1^i + \delta \circ w_0^i)$. Esto nos permite asegurar que las canastas $(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ cumplen con las restricciones de factibilidad de mercado.

Para concluir que $(\overline{p}_0, \overline{p}_1, (\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio competitivo, nos falta asegurar que $(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ son decisiones óptimas a precios $(\overline{p}_0, \overline{p}_1)$. Esto es, queremos probar que

$$(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i) \in \underset{(x_0^i, x_1^i)\in B^i(\overline{p}_0,\overline{p}_1)}{\arg\max} U^i(x_0^i, x_1^i), \qquad \forall i \in \{1,\dots,N\}.$$

Fije $i \in \{1,\dots,N\}$. Sabemos que $U^i(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i) \geq U^i(x_0^i, x_1^i)$, $\forall (x_0^i, x_1^i) \in B^i(\overline{p}_0,\overline{p}_1) \cap [0,\Omega)^{2K}$. Asuma, por contradicción, que existe $(y_0^i, y_1^i) \in B^i(\overline{p}_0,\overline{p}_1)$ tal que $U^i(y_0^i, y_1^i) > U^i(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)$. Entonces, la concavidad estricta de U^i implica que

$$U^i\left(\lambda(y_0^i, y_1^i) + (1-\lambda)(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)\right) > U^i(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i), \qquad \forall \lambda \in (0,1).$$

Ahora, como $B^i(\overline{p}_0,\overline{p}_1)$ es convexo y $(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i) \in [0,\Omega)^{2K}$, para $\lambda \in (0,1)$ suficientemente pequeño tendremos que $\lambda(y_0^i, y_1^i) + (1-\lambda)(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i) \in B^i(\overline{p}_0,\overline{p}_1) \cap [0,\Omega)^{2K}$, lo cual contradice la optimalidad de $(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)$ en $B^i(\overline{p}_0,\overline{p}_1) \cap [0,\Omega)^{2K}$. Por lo tanto,

$$(\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i) \in \underset{(x_0^i, x_1^i)\in B^i(\overline{p}_0,\overline{p}_1)}{\arg\max} U^i(x_0^i, x_1^i), \qquad \forall i \in \{1,\dots,N\}.$$

La propiedades destacadas en azul nos aseguran que el punto fijo de Φ, $(\overline{p}_0, \overline{p}_1, (\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$, es un equilibrio competitivo. □

Pregunta 2 (20 puntos)

En la economía de la pregunta anterior, ¿todo equilibrio competitivo es Pareto eficiente?
En caso afirmativo, demuéstrelo. Alternativamente, dé un contra-ejemplo.

Solución. La demostración clásica del Primer Teorema del Bienestar Social comienza asumiendo, por contradicción, que la distribución de recursos generada por un equilibro competitivo NO es Pareto eficiente. Esto es, se asume que se pueden redistribuir los recursos de tal forma que al menos un individuo mejora su situación si alterar el nivel de utilidad de los otros individuos. Esto último, junto a la no-saciedad local de las preferencias, implica que el costo de las nuevas canastas no puede ser menor al costo de las canastas originales (demandas Marshalianas). Es más, el individuo que mejora debe estar consumiendo ahora una canasta que antes no podía financiar. A partir de ahi, agregando los costos netos de las nuevas canastas, se llega a una contradicción con la factibilidad de mercado de la distribución de recursos que implementa las mejoras de Pareto.

Si quisiéramos repetir este argumento en el modelo de la pregunta anterior, para llegar a una contradicción, nos encontrariamos con las dificultades generadas por la existencia de más de una restricción presupuestaria. Efectivamente, aunque es verdad que una canasta (y_0^i, y_1^i) que le genera más utilidad al individuo i que su demanda Marshaliana a precios $(\overline{p}_0, \overline{p}_1)$ no puede ser financiada a precios $(\overline{p}_0, \overline{p}_1)$, esto sólo implica que en *algún* periodo (y_0^i, y_1^i) cuesta más que los recursos que i tiene disponibles. Con eso, no necesariamente se puede repetir la demostración del Primer Teorema del Bienestar Social: una mejora de Pareto se podría implemetar con canastas que son más costosas en periodos diferentes, y más baratas en los otros, con lo cual al agregar los costos no se llega a ninguna contradicción. Esta intuición nos debería incentivar a buscar un contraejemplo.

Cualquier contraejemplo al Primer Teorema del Bienestar Social pasa por asegurar que los individuos no son capaces de utilizar el mercado para suavizar su consumo de forma eficiente. Una de las formas de que esto último ocurra es que los recursos individuales estén muy concentrados en un periodo y no se puedan pasar al otro, para adelantar o posponer consumo. Esto es, es probable que en un contraejemplo debamos asumir que las tasas de depreciación de las mercancías son altas.

Pensemos en una economía con una mercancía, pues así aseguramos que en todo equilibrio los individuos consumen sus asignaciones iniciales. Y asumamos que hay dos individuos con asignaciones iniciales $w^1 = (10, 2)$ y $w^2 = (2, 10)$. Si las utilidades vienen dadas por $U^1(x_0, x_1) = U^2(x_0, x_1) = \sqrt{x_0} + \sqrt{x_1}$ y la depreciación de la mercancía es $(1 - \delta) \in (0, 1)$, entonces los individuos tendrán en equilibrio niveles de utilidad

$$\overline{U}^1 = \sqrt{10} + \sqrt{2 + 10\delta}, \qquad \overline{U}^2 = \sqrt{2} + \sqrt{10 + 2\delta},$$

los cuales son el resultado de consumir las asignaciones iniciales de recursos. Ahora, si distribuimos equitativamente los recursos en cada periodo entre los dos individuos, cada uno de ellos obtendrá una utilidad igual a $\sqrt{6} + \sqrt{6(1 + \delta)}$. Por lo tanto, para asegurar que el equilibrio NO es Pareto eficiente es suficiente que

$$\sqrt{6}(1 + \sqrt{(1 + \delta)}) > \max\left\{\sqrt{10} + \sqrt{2 + 10\delta}, \sqrt{2} + \sqrt{10 + 2\delta}\right\}.$$

Note que la función $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(\delta) = \sqrt{6}(1 + \sqrt{(1 + \delta)}) - \max\left\{\sqrt{10} + \sqrt{2 + 10\delta}, \sqrt{2} + \sqrt{10 + 2\delta}\right\}$$

es continua y cumple $F(0) = 2\sqrt{6} - \sqrt{10} - \sqrt{2} > 0$. Por lo tanto, para $\delta \in (0, 1)$ suficientemente pequeño tendremos que $F(\delta) > 0$. Así, en esta economía, cuando el factor de depreciación de la mercancía, $(1 - \delta)$, es suficiente alto los equilibrios no son eficientes en el sentido de Pareto. $\square$