Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Departamento de Economía

Macroeconomía I
ENECO 630
Semestre Otoño 2020

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Martin Ferrari y Catalina Gómez

Examen II Parte Crecimiento

3 de Agosto 2020

Formulario

- *Procesos de Poisson*

  Un proceso que describe el número de eventos en distintos intervalos de tiempo es un proceso de Poisson con tasa de llegada λ si los tiempos entre llegadas son i.i.d con distribución exponencial de parámetro λ. Es decir, la cumulativa y la densidad de la distribución de los tiempos entre llegadas satisfacen, para $t \geq 0$:

$$F(t) = Pr(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

  El valor esperado de esta variable aleatoria es $1/\lambda$ que es la duración promedio entre eventos.

- *Fórmula de Leibniz*

  Con $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t\right)' = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}t + f(h(x),x)\cdot h'(x) - f(g(x),x)\cdot g'(x)$$

1 Pandemia y Crecimiento (30 ptos, 5 ptos cada ítem)

Considere una economía cuyo agente representativo tiene una función de utilidad de la forma

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \, \mathrm{d}t$$

y enfrenta una restricción presupuestaria

$$\dot{a} = ra + w - c$$

Donde $a(t)$ es su nivel de activos, $w(t)$ es su salario, $r(t)$ es el retorno de sus activos y $c(t)$ es su nivel de consumo en el período t. Esta es una economía pequeña y cerrada por lo que el único activo en oferta neta es el capital, $k(t) = a(t)$. El capital se deprecia a una tasa δ.

Imagine ahora que cada empresa en esta economía tiene una función de producción de la forma:

$$Q_t = A \cdot K_t$$

Donde Q_t es el producto final y K_t es el stock de capital de cada firma. El número de personas en la economía L es constante.

Asuma ahora que un virus ataca al país y genera un efecto negativo en la economia. En particular, asuma que el **virus le "quita" a la economía una fracción** $(1-p)$ **de la producción**. Es decir, las personas en una economía atacada por el virus logran mantener una fracción p de la producción que existiría en tiempos normales.

La autoridad de este país puede reducir los efectos del virus en el economía gastando recursos en un sistema de "testeo, trazabilidad y aislamiento". Asuma que los recursos destinados a este sistema son iguales a G unidades del producto final. Las pérdidas asociadas al virus son decrecientes en G (p es creciente en G). Pero dado un nivel de G, el sistema de "testeo, trazabilidad y aislamiento" es menos efectivo cuando la actividad económica "efectiva" es mayor. Defina Y como la cantidad de producto final que las empresas logran producir una vez que el país ha sido atacado por el virus (actividad económica efectiva). **Con todo,** p **es una función de** G/Y **con** $p' > 0$**, y** $p'' < 0$**.**

El nivel de producto una vez que el virus ha afectado a la economía es:

$$Y_t = A \cdot K_t \cdot p(G_t/Y_t)$$

Para financiar el sistema de protección frente al virus el gobierno debe cobrar impuestos al producto efectivo. Asuma que la tasa de impuestos es constante e igual a τ. El gobierno mantiene un presupuesto balanceado por lo que **su restricción presupuestaria viene dada por:**

$$G_t = \tau Y_t$$

(a) El agente representativo elige la trayectoria para $c(t)$ y para $a(t)$, para maximizar función de utilidad sujeto a su restricción presupuestaria. Encuentre las condiciones de primer orden. Encuentre la relación entre la tasa de crecimiento del consumo y la tasa de interés. Interprete cómo cambia la tasa de crecimiento ante cambios en sus parámetros.

(b) Las empresas maximizan la utilidad después del virus y de impuestos y actúan competitivamente tomando τ y la proporción p como dados. Encuentre la expresión para las utilidades después de impuesto (la función objetivo de las empresas). Derive la condición de primer orden para las empresas.

(c) Usando la restricción presupuestaria del gobierno y la condición de primer orden obtenida previamente, encuentre una expresión para la tasa de crecimiento del consumo en estado estacionario como función del tamaño del gobierno τ y los parámetros del modelo. ¿Qué restricciones (en términos de parámetros) debe imponer para asegurar que la tasa de crecimiento del consumo sea positiva y que la utilidad tenga límite?

(d) Si el gobierno quiere maximizar la tasa de crecimiento de la economía, ¿qué tasa de impuesto fijaría? Interprete

(e) Considere un planificador social que internaliza la restricción presupuestaria del gobierno antes de tomar las decisiones de consumo e inversión. ¿Cuál es la tasa de crecimiento que elegiría el planificador social? ¿Es esta tasa diferente de la tasa de crecimiento obtenida en (c)? Interprete. ¿Cuál es la tasa de impuesto óptima que elegiría el planificador central? Explique intuitivamente.

(f) Imagine ahora que el virus es transitorio, dura un período de tiempo determinado. Desafortunadamente, el virus puede tener un efecto negativo permanente en la productividad A. Imagine que el nivel de productividad una vez que el virus ha "desaparecido"[1] es $A^{SV} = A^{CV} \cdot p$. Es decir, mientras mayor sea p, menor serán los efectos permanentes en la productividad. Asuma ahora que el gobierno puede endeudarse en los mercados financieros internacionales a una tasa r^* (los privados no pueden endeudarse). Explique intuitivamente cuál podría ser la política óptima por parte del gobierno en este caso. No es necesario hacer ninguna derivación matemática.

2 Modelo de Ramsey con Gasto Público (30 ptos, 7.5 ptos cada ítem)

Considere una economía con un hogar representativo cuyas preferencias son representadas por

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + G_t \right) dt \tag{3}$$

donde G_t es un bien público financiado por el gobierno. La función de producción es $Y_t = F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$.
El gobierno financia G_t recaudando impuestos τ_t sobre la inversión $I_t = Y_t - C_t$. De esta forma, la ley de movimiento del capital es:

$$\dot{K} = (1-\tau_t)I_t - \delta K_t$$

y se cumple que $G_t = \tau_t I_t$. Asuma que la trayectoria de impuestos $[\tau_t]_{t=0}^{\infty}$ está dada.

(a) Plantee el problema de optimización del hogar y derive las condiciones de primer orden.

(b) Muestre que la ecuación de Euler de este problema será:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\dot{\tau}_t}{1-\tau_t} + (1-\tau_t) f'(k_t) - \delta - \rho \right)$$

Explique la intuición de esta expresión. ¿Cómo se comporta el consumo cuándo $\dot{\tau}_t > 0$?

(c) Asuma que $\lim_{t\to\infty} \tau_t = \tau$. Encuentre los valores de estado estacionario para c, k y G.

(d) Defina τ^* como la tasa de impuesto que maximiza la utilidad de estado estacionario. ¿Se cumplirá que τ^* maximiza la utilidad del hogar representativo si la economía se encuentra inicialmente lejos del estado estacionario? Justifique su respuesta.

3 I+D, Poder Monopólico y Crecimiento (30 ptos, 5 ptos cada ítem)

Considere el siguiente modelo de I+D, poder monopólico y crecimiento.

Consumidores

[1] Donde A^{SV} denota A sin virus (cuando ya desapareció) y A^{CV} denota A con virus

Los consumidores son idénticos y maximizan la siguiente función de utilidad:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \, \mathrm{d}t$$

Sujeto a la restricción presupuestaria:

$$\dot{a} = ra + w - c$$

Donde a son los activos per cápita, w es el salario real y c es el consumo per cápita. Los consumidores toman r y w como dados. El valor presente de los activos debe converger a un número no negativo cuando el tiempo va a infinito y $a_0 > 0$ está dado.

Productores del bien final
Los productores del bien final contratan trabajo, L, a un salario w, e insumos intermedios x_j, a un precio p_j, para producir el bien final y. Este sector opera bajo competencia perfecta. El precio del bien final es normalizado a 1. La oferta de trabajo está fija. La función de producción viene dada por:

$$y_t = AL_t^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N} x_{jt}^{\alpha} \tag{4}$$

Donde N_t es el número de bienes inventdos hasta el momento t y $0 < \alpha < 1$. La población L_t es una constante con $L_t = L$. Las empresas toman el salario y el precio del bien intermedio como dados y maximizan sus utilidades:

$$\Pi_t = y_t - wL_t - \sum_{j=1}^{N} p_j x_{jt}$$

Sector I+D
Las empresas en el sector I+D enfrentan una toma de decisiones de dos partes. Primero deben decidir si pagan el costo fijo de investigación y desarrollo, η, el cual les otorga un monopolio en la producción y comercialización del bien intermedio inventado.

En el modelo visto en clases la firma del sector I+D conservaba un monopolio perpetuo sobre el uso comercial de su invención. En este caso, se asumirá que el poder monopólico se erosiona con el tiempo, es decir, su duración es **limitada e incierta**. En particular, la duración del monopolio está descrita por un **proceso de Poisson** con una tasa de llegada exógena de Poisson $p \geq 0$; la misma para todos los monopolios. Es decir, si el bien intermedio j está actualmente monopolizado, este bien se vuelve competitivo en el próximo instante dT con probabilidad $p \cdot dT$. El cese de diferentes monopolios son eventos independientes.[2]

Se asumirá que N es grande y que los hogares poseen acciones en diferentes firmas, por lo que los hogares pueden diversificar este riesgo. Dado lo anterior es posible asumir que r, la tasa de interés de un activo libre de riesgo es la tasa de descuento relevante en el cálculo del valor de las empresas de I+D.

En la segunda etapa, las empresas deben decidir el precio que cobrarán mientras sean monopolio. Tomando su demanda como dada (la demanda que se obtuvo en la sección previa). El costo marginal de producir el bien intermedio x_j es 1 (es decir, se necesita una unidad del bien final para producir una unidad del bien intermedio). Maximizan:

$$\pi_j = p_j X_j - X_j$$

Para cuando le sea útil, puede recordar que la demanda del modelo base y del planificador central son:

[2] Desde ahora en adelante, llamaremos “modelo base” al modelo visto en clases sin erosión del monopolio, y lo designaremos por un subíndice B, mientras que variables del planificador social las denotaremos con subíndice SP

$$X_B = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}LN \qquad\qquad X_{PS} = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{1/(1-\alpha)}LN$$

(a) El beneficio en valor presente de tener una firma de R&D en este modelo es

$$V(t) = \pi^m \int_t^{\infty} e^{-\int_t^v (r(s)+p)ds}\,\mathrm{d}v$$

Donde r es la tasa de interes libre de riesgo y π^m las utilidades de la firma cuando es monopolio. Derive esta expresión matemáticamente y expliquela con palabras.

(b) Utilizando la fórmula de Leibniz determine cuál es la condición de no arbitraje. Usando esta condición y la condición de libre entrada determine la tasa de retorno r. Compare la nueva tasa de retorno con la del modelo base y la del planificador central. Interprete sus resultados. Recuerde que la tasa de retorno socialmente óptima y la del modelo base son:

$$r_{SP} = \frac{L}{\eta}A^{1/(1-\alpha)}\frac{1-\alpha}{\alpha}\alpha^{1/(1-\alpha)} \qquad\qquad r_B = \frac{L}{\eta}A^{1/(1-\alpha)}\frac{1-\alpha}{\alpha}\alpha^{2/(1-\alpha)}$$

(c) Muestre que el nivel de producto del bien final en la economía viene dado por:

$$Y = LNA^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}[1 + \frac{N^c}{N}(\alpha^{-\alpha/(1-\alpha)} - 1)]$$

Donde N^c es el número de firmas de bienes intermedios que se han vuelto competitivas. Compare el nuevo producto con el del modelo base y el del planificador social. Interprete sus resultados. Recuerde que el producto socialmente óptimo y del modelo base son:

$$Y_{SP} = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}LN \qquad\qquad Y_B = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LN$$

(d) Suponga que el valor de p puede ser elegido por el gobierno. Comente la siguiente afirmación y relaciónela con los resultados de (b) y (c).

> *Esta extensión del modelo base ilustra un dilema clásico de la política antimonopolio y la legislación de patentes*

Ahora, el número agregado de innovaciones en la economía por unidad de tiempo es:

$$\dot{N} = \frac{R}{\eta}$$

Donde R es la inversión agregada en actividades de I+D. El bien final es usado para consumo, inversión en I+D y para la producción de los bienes intermedios. Lo anterior implica que:

$$Y = C + R + (N - N^C)X^m + N^c X^c$$

Donde X^m denota la cantidad de cada bien intermedio que se produce en la economía bajo un monopolio y X^c bajo competencia perfecta.

(e) Demuestre que, en estado estacionario, el cociente N^c/N viene dado por:

$$\left(\frac{N^c}{N}\right)^* = \frac{p}{\gamma_{N^c} + p}$$

Donde γ_{N^c} es la tasa de crecimiento en estado estacionario de N^c. Pista: Encuentre una expresión para $\dot{N}^c$ considerando que la duración del monopolio sigue un proceso de Poisson. También muestre que en estado estacionario, C, Y, N, y N^c crecen a tasa γ_c, donde γ_c es la tasa de crecimiento del consumo.

(f) Considere un gobierno que está decidiendo la mejor política de subsidios para mejorar las ineficiencias de esta economía. Sus opciones son:

- I) Pagar un subsidio constante σ a la compra de cualquier bien intermedio suministrado por un monopolio. De modo que el precio neto enfrentado por la firma del bien final es $p_j(1-\sigma)$.
- II) Implementar un subsidio T a los costos de innovar, para cada innovación tal que el nuevo costo es $\eta - T$ (caso visto en la Tarea 3)

Suponga que ambos subsidios se financian con un impuesto de suma fija. Sin hacer ningún cálculo: ¿Qué efectos trae cada subsidio? Explique intuitivamente cómo encontraría el subsidio óptimo en cada caso ¿Recomendaría implementar I, II, ambos o ninguno? ¿Por qué?

4 Modelo RBC (20 ptos)

Considere un modelo de ciclo económico real donde hay un consumidor representativo con preferencias sobre consumo C_{t+i} y trabajo N_{t+i}, dadas por

$$E_t\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\left[\frac{C_{t+i}^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \theta N_{t+i}\right]\right\}$$

con $\gamma > 0$. La restricción presupuestaria del consumidor representativo en cada período viene dada por:

$$C_t + B_{t+1} = W_t N_t + (1+r_t)B_t$$

Donde B_t representa la cantidad de un bono libre de riesgo de un período comprado en $t-1$ y que madura en t; r_t es la tasa de interés del bono libre de riesgo y W_t es el salario. La función de producción es lineal en el trabajo y viene dada por

$$Y_t = A_t N_t$$

donde la evolución del parámetro tecnológico A_t viene dada por

$$A_{t+1} = A_t^{\rho} \cdot \exp(\varepsilon_{t+1})$$

Con $0 < \rho < 1$ y donde ε_{t+1} es una variable aleatoria i.i.d. Finalmente, la restricción de recursos de la economía viene dada por:

$$Y_t = C_t$$

Note que el capital (e inversión) están ausentes del modelo.

(a) (5 ptos) Derive e interprete las condiciones de primer orden para el empleo desde la perspectiva del planificador social.

(b) (7.5 ptos) Derive expresiones logarítmicas de forma reducida para Y_t, C_t y N_t. ¿Hasta qué punto la variación en $\log Y_t$ imita la variación en $\log A_t$? ¿Qué papel juega el coeficiente de aversión relativa al riesgo γ? ¿Cuál es la correlación entre $\log Y_t$ y $\log A_t$?

(c) (7.5 ptos) Encuentre las expresiones para el salario real de equilibrio y la tasa de interés real de equilibrio que corresponde al equilibrio descentralizado. En el mundo real, el salario real es relativamente constante a través del ciclo y la tasa de interés es ligeramente procíclica. ¿Es este modelo consistente con los datos? ¿Cómo afecta la persistencia del shock de productividad a la pro-ciclicidad o contra-ciclicidad de la tasa de interés real?

Hint: Suponga que las firmas funcionan en una industria competitiva, por lo que deben tener utilidad igual a 0.