Profesor	: Eduardo Engel	Abril 8, 2022
Ayudantes	: Benjamín Peña y Giovanni Villa	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2022	
Guía	: No. 1	
Entrega	: Martes 12 de abril, antes de las 8am	

1. **Burbujas racionales**

Considere un inversionista neutro al riesgo que puede invertir en un activo libre de riesgo con retorno neto $r > 0$ y en un activo riesgoso con precio p_t que paga dividendo d_t en el período t. Suponemos $r > 0$ y que no varía en el tiempo. También suponemos que el proceso d_t es exógeno, de conocimiento común y acotado[1].

(a) Use un argumento de arbitraje (los inversionistas deben estar indiferentes entre invertir en el activo fijo y el riesgoso) para explicar por qué se cumple

$$\frac{\mathrm{E}_t p_{t+1} - p_t}{p_t} + \frac{d_t}{p_t} = r,$$

de modo que, denotando $R = 1 + r$,

$$p_t = R^{-1}\mathrm{E}_t p_{t+1} + R^{-1} d_t. \tag{1}$$

Respuesta: La inversionista debe estar indiferente entre invertir un peso en el activo riesgoso y invertir el mismo peso en el activo libre de riesgo. El lado izquierdo y lado derecho corresponden, respectivamente, al retorno esperado para el activo riesgoso y para el activo libre de riesgo. Donde usamos que la inversionista es neutra al riesgo.

(b) Suponga que se cumple

$$\lim_{T\to\infty} R^{-T}\mathrm{E}_t p_{t+T} = 0. \tag{2}$$

Muestre que entonces (1) tiene una única solución y que ésta viene dada por

$$p_t^s = \sum_{k\geq 0} R^{-k-1}\mathrm{E}_t d_{t+k}. \tag{3}$$

Respuesta: Partimos de (1), reemplazamos p_{t+1} por la expresión que resulta de sustituir $t+1$ por t en (1) y usamos la LIE para obtener:

$$\begin{aligned}
p_t &= R^{-1}\mathrm{E}_t p_{t+1} + R^{-1} d_t \\
&= R^{-1}\mathrm{E}_t[R^{-1}\mathrm{E}_{t+1} p_{t+2} + R^{-1} d_{t+1}] + R^{-1} d_t \\
&= R^{-2}\mathrm{E}_t p_{t+2} + R^{-1} d_t + R^{-2}\mathrm{E}_t d_{t+1}.
\end{aligned}$$

[1] Que d_t es acotado significa que existe una constante M tal que $|d_t| \leq M$ para todo t.

Y procediendo de la misma manera varias veces se llega a

$$p_t = R^{-T}\mathrm{E}_t p_{t+T} + \sum_{k=0}^{T-1} R^{-k-1}\mathrm{E}_t d_{t+k}.$$

Tomando límite cuando T tiende a infinito y usando (2) concluye la demostración.

(c) Considere ahora un proceso b_t tal que

$$b_{t+1} = \begin{cases} Rb_t/q & \text{con probabilidad } q, \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-q, \end{cases}$$

donde $0 < q < 1$ es una constante.

Explique por qué b_t se puede interpretar como una burbuja racional. Debe explicar los dos términos, por qué burbuja y por qué racional.

Respuesta: Como $\mathrm{E}_t b_{t+1} = Rb_t > b_t$, tenemos que el precio esperado del activo crece explosivamente, como en una burbuja financiera. Al mismo tiempo, con probabilidad uno eventualmente la burbuja revienta y el precio se desploma a cero, también como en una burbuja financiera.

(d) Muestre que $p_t^s + b_t$, con p_t^s definido en (3), también es una solución de (1). Concluya que existen infinitas soluciones para el proceso de precios del activo.

Respuesta: Como p_t^s satisface (1), tendremos que $p_t^s + b_t$ es solución de (1) si y sólo si

$$b_t = R^{-1}\mathrm{E}_t b_{t+1}.$$

Y como tenemos que

$$\mathrm{E}_t b_{t+1} = q\frac{Rb_t}{q} + (1-q)0 = Rb_t$$

concluimos que, efectivamente, $p_t^s + b_t$ también satisface (1).

(e) ¿Por qué las partes (b) y (d) no son contradictorias? Es decir, explique por qué la existencia de múltiples soluciones no contradice la solución supuestamente única que obtuvo en (b).

Respuesta: Porque $p^s(t) + b_t$ *no* satisface (2). En efecto, como p_t^s satisface (2), tendremos que $p^s(t) + b_t$ cumplirá esta condición si y sólo si

$$\lim_{T\to\infty} R^{-T}\mathrm{E}_t b_{t+T} = \lim_{T\to\infty} R^{-T}R^{T+1}b_0 = Rb_0 > 0.$$

(f) Concluya que es necesario descartar burbujas financieras para que (1) tenga una solución única. En caso contrario pueden existir "burbujas racionales".

Respuesta: Hemos mostrado que se requiere la condición (2), que dice que el precio del activo debe crecer más lento que la tasa de interés bruta, para tener una solución única de (1). Si no se cumple (1), existen una infinidad de soluciones, todas las cuales incluyen al menos una burbuja.

2. **Dinámica de activos bajo equivalencia cierta**

(a) Suponga que Y_t es i.i.d. con esperanza μ. Determine $\mathrm{E}_t Y_{t+s}$ para $s = 0, 1, 2, ...$

Respuesta: Computando las esperanzas tenemos que:

$$
\begin{aligned}
s = 0 &\rightarrow E_t Y_t = Y_t \\
s = 1 &\rightarrow E_t Y_{t+1} = \mu \\
s = 2 &\rightarrow E_t Y_{t+2} = \mu \\
&\vdots \\
s = k &\rightarrow E_t Y_{t+k} = \mu
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$
E_t Y_{t+s} = \begin{cases} Y_t & s = 0 \\ \mu & s \geq 1 \end{cases} \tag{4}
$$

(b) Suponga que Y_t sigue un camino aleatorio con drift cero:

$$
Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t,
$$

donde los ε_t son i.i.d. con media nula.
Determine $\mathrm{E}_t Y_{t+s}$ para $s = 0, 1, 2, ...$

Respuesta: Repitiendo el proceso de computar las esperanzas tenemos que:

$$
\begin{aligned}
s = 0 &\rightarrow E_t Y_t = Y_t \\
s = 1 &\rightarrow E_t Y_{t+1} = Y_t \\
s = 2 &\rightarrow E_t Y_{t+2} = Y_t \\
&\vdots \\
s = k &\rightarrow E_t Y_{t+k} = Y_t
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\mathrm{E}_t Y_{t+s} = Y_t \ \forall s \geq 0 \tag{5}
$$

Para las preguntas que siguen se considera el modelo de equivalencia cierta.

(c) Suponga que Y_t sigue el proceso de la parte (a). Demuestre que A_t sigue un camino aleatorio.

Respuesta: Sabemos que $A_{t+1} = R(A_t + Y_t - C_t)$. Ahora, usando la expresión usual para encontrar el consumo sumado al resultado de 4:

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{r}{R}\left(A_t + \sum_{s\geq 0} \beta^s E_t Y_{t+s}\right) \\ &= \frac{r}{R}\left(A_t + Y_t + \sum_{s\geq 1} \beta^s \mu\right) \\ &= \frac{r}{R}\left(A_t + Y_t + \frac{\mu}{r}\right) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando esta expresión en ΔA_{t+1} tenemos que:

$$\begin{aligned} \Delta A_{t+1} &= R(A_t + Y_t - C_t) - A_t \\ &= R\left(A_t + Y_t - \frac{r}{R}\left(A_t + Y_t + \frac{\mu}{r}\right)\right) - A_t \\ &= -\mu + A_t(R - r - 1) + Y_t(R - r) \\ &= \underbrace{Y_t - \mu}_{\text{i.i.d. con media 0}} \end{aligned}$$

Donde podemos ver que ΔA_{t+1} sigue un proceso i.i.d con media nula, lo que es equivalente a un camino aleatorio.

(d) Suponga que Y_t sigue el proceso de la parte (b). ¿Qué proceso sigue A_t? Interprete su respuesta.

Respuesta: Repitiendo el proceso, el consumo viene dado por:

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{r}{R}\left(A_t + \sum_{s\geq 0} \beta^s E_t Y_{t+s}\right) \\ &= \frac{r}{R}\left(A_t + \sum_{s\geq 0} \beta^s Y_t\right) \\ &= \frac{r}{R}\left(A_t + \frac{R}{r} Y_t\right) \end{aligned}$$

Ahora, usando el proceso dado en 5 tenemos que:

$$\begin{aligned} \Delta A_{t+1} &= R(A_t + Y_t - C_t) - A_t \\ &= R\left(A_t + Y_t - \frac{r}{R}\left(A_t + \frac{R}{r} Y_t\right)\right) - A_t \\ &= A_t(R - r - 1) + Y_t(1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La interpretación viene del hecho que al seguir los ingresos un camino aleatorio, los shocks de ingreso tienen un efecto permanente, lo cual hace que los individuos no suavicen consumo y, por consiguiente, no varíen su stock de activos en el tiempo.

3. **Combinando la Teoría del Ingreso Permanente con la Teoría del Ciclo de Vida**

El tiempo es discreto. Los individuos nacen sin activos, trabajan los primeros L años de su vida y luego se jubilan. Para simplificar la matemática suponemos que viven indefinidamente.

El ingreso laboral sigue un camino aleatorio

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

con ε_t i.i.d., con media nula y varianza σ^2.

Se cumplen los supuestos de equivalencia cierta, en particular, la tasa de interés r es igual a la tasa subjetiva de descuento δ.

(a) Considere un individuo en el año s de su vida. Encuentre una expresión para su consumo ese año, C_s, como función de sus activos financieros al comienzo del año, A_s, sus ingresos laborales en ese período, Y_s, y r. Considere por separado cuando $s \leq L$ y cuando $s > L$.

Respuesta: Partiendo del caso para el cual $s \leq L$ tenemos que:

$$\begin{aligned} C_s &= \frac{r}{R}\left[A_s + \sum_{j\geq 0}^{L-s} R^{-j} E_s Y_{s+j}\right] \\ &= \frac{r}{R}\left[A_s + Y_s + R^{-1}Y_s + R^{-2}Y_s + \cdots + R^{-(L-s)}Y_s\right] \\ &= \frac{r}{R}\left[A_s + Y_s \frac{R}{r}\left(1 - R^{-(L+1-s)}\right)\right] \end{aligned}$$

Donde usamos la expresión encontrada en 5 para la esperanza de un proceso de ingreso con camino aleatorio.
Notemos que el caso de $s > L$ es sencillo, ya que los individuos no tienen ingresos laborales presentes ni futuros, por lo que solo consumirán desde su stock de riqueza. Por lo tanto:

$$C_s = \begin{cases} \frac{r}{R} A_s + Y_s\left(1 - R^{-(L+1-s)}\right) & s \leq L \\ \frac{r}{R} A_s & s > L \end{cases} \tag{6}$$

(b) Use la expresión de (a) para encontrar $\partial C_s / \partial \varepsilon_s$, donde ε_s denota la innovación del ingreso en el año s de su vida. Muestre que la expresión obtenida es menor que uno y converge a uno cuando L tiende a infinito. ¿Cuál es la intuición para este resultado? También muestre que la expresión obtenida es decreciente en s y de la intuición correspondiente.

Respuesta: Notando que el shock ε_s afecta C_s solo mediante su efecto en Y_s y usando el hecho de que el ingreso sigue un camino aleatorio, por lo que los efectos de los shocks sobre el ingreso son 1 a 1, tenemos que:

$$\frac{\partial C_s}{\partial \varepsilon_s} = \begin{cases} \left(1 - R^{-(L+1-s)}\right) & s \leq L, \\ \\ 0 & s > L \end{cases} \tag{7}$$

Donde como $R > 1$, la expresión obtenida para $s \leq L$ es menor a 1, además de converger a 1 cuando L tiende a infinito.

La intuición de este resultado viene del hecho de que en este caso a diferencia del caso clásico de equivalencia cierta con un proceso de ingreso siguiendo un camino aleatorio, los individuos no trabajan hasta el infinito, por lo que el shock de ingresos ya no representa un ingreso permanente sino que un ingreso persistente hasta que el individuo se jubile. A medida que el período de jubilación es más lejano, más cercano estamos al caso clásico y de los efectos 1 a 1 de los shocks de ingreso sobre el consumo.

(c) Considere ahora una economía donde cada año nacen individuos como los descritos en las partes anteriores. La población crece a una tasa n y los shocks de ingresos son comunes a todos los individuos. Ahora denotamos por C_t el consumo *agregado* de la economía per cápita, de modo que $\partial C_t / \partial \varepsilon_t$ denota la respuesta del consumo agregado per cápita a la innovación en los ingresos. Determine si esta respuesta es creciente, decreciente o no depende de n. **Ayuda**: No es necesario que calcule $\partial C_t / \partial \varepsilon_t$, se puede responder aplicando los resultados de la parte (b) sin hacer álgebra.

Respuesta: La respuesta combina tres elementos:

- La respuesta del consumo agregado per cápita a un shock ε_t será un promedio ponderado de las respuestas de las cohortes.
- Por lo que vimos en (b), la respuesta de las cohortes más jóvenes es mayor que aquella de las cohortes mayores.
- Mientras mayor es n, mayor es la fracción de la población que es joven y que responde mucho al shock. En tal caso el promedio ponderado anterior de más peso a generaciones jóvenes y el valor de $\partial C_t / \partial \varepsilon_t$ será más grande.