Tarea 1
Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Gabriela Denis, Pedro Schilling

Otoño 2023

Entrega en grupos de hasta 2 estudiantes

1. Una relación de preferencia $\succsim$, definida en $X = I\!R^L_+$, se dice que es homotética, si $x \sim x'$ implica $\lambda x \sim \lambda x'$, para todo $\lambda \geq 0$. Demuestre que una relación de preferencia que es reflexiva, completa, transitiva, continua y monótona, es homotética si y solo si admite una representación por una función de utilidad homogénea de grado 1.

2. A partir de la condición necesaria de Optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (ver Teorema 10.3.1 del apunte de Métodos Matemáticos por el Prof. Jorge Rivera) demuestre que si x^* es solución al problema del/ de la consumidor/a:

$$(\text{P}) \quad \begin{cases} \max\limits_{x} & u(x) \\ s.a. & p \cdot x \leq \omega \\ & x \in \mathbb{R}^L_+ \end{cases}$$

entonces x^* debe satisfacer la siguiente condición: existe $\lambda \geq 0$ tal que

$$\nabla u(x^*) \leq \lambda p \quad \text{y} \quad x^* \cdot [\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0$$

3. Considere la función de utilidad $u(x_1, x_2) = [x_1^\rho + x_2^\rho]^{1/\rho}$, donde $\rho > 0$.

   a) ¿Qué forma tiene la función de utilidad cuando $\rho = 1$, $\rho \to 0$ y $\rho \to -\infty$?
   b) Calcule la demanda Marshalliana y la función de utilidad indirecta.
   c) Muestre que sucede con la demanda Marshalliana encontrada en la parte anterior cuando $\rho = 1$, $\rho \to 0$ y $\rho \to \infty$. Comente.

4. Una función de utilidad $u : I\!R^L_+ \to I\!R$ se dice aditivamente separable si

$$u((x_1, x_2, \ldots, x_L)) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \cdots + u_L(x_L). \tag{1}$$

   a) Muestre que una relación de preferencia en $I\!R^2_+$ representada por una función de utilidad Cobb-Douglas de la forma $u((x_1, x_2)) = (x_1)^\alpha x_2^\beta$ con $\alpha, \beta > 0$ puede ser representada por una función de utilidad aditivamente separable.
   b) Muestre que si $u_i(\cdot)$ es cóncava para todo $i = 1, \ldots, L$ entonces la función $u(\cdot)$ dada en (1) también es cóncava.
   c) Muestre que si la función $u(\cdot)$ dada en (1) representa a una preferencia localmente no saciada y las funciones $u_i(\cdot)$ son cóncavas y continuamente diferenciables entonces los bienes son normales. Sugerencia: use las condiciones encontradas en la pregunta 2.

5. Una consumidora tiene preferencias $\succeq$ racionales, continuas y localmente no saciadas definidas en $X = \mathbb{R}^2_+$. La renta de la consumidora es $w = 40$ y el precio del bien 2 es $p_2 = 2$.

   Comente sobre la existencia de solución, unicidad de solución y el cumplimiento de la Ley de Walras en los siguientes casos. ¿Qué cambia si la preferencia $\succeq$ es monótona?

   a) El consumo del bien 1 está subsidiado: para las primeras 10 unidades de consumo el precio es $p_1 = 1$ y para el consumo por encima de 10 unidades el precio es $p_1 = 2$.

   b) El consumo del bien 1 está subsidiado. Si se consumen menos de 10 unidades, el precio es $p_1 = 1$ y si se consumen 10 unidades o más, el subsidio se pierde completamente y todo el consumo es paga a $p_1 = 2$, es decir,
   $$p_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < 10 \\ 2 & \text{si } x_1 \geq 10. \end{cases}$$

   c) El consumo del bien 1 está subsidiado. Si se consumen 10 unidades o menos, el precio es $p_1 = 1$ y si se consumen más de 10 unidades, el subsidio se pierde completamente y todo el consumo es paga a $p_1 = 2$, es decir,
   $$p_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \leq 10 \\ 2 & \text{si } x_1 > 10. \end{cases}$$

6. Considere la función de utilidad dependiente de 2 bienes $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

   a) Encuentre la correspondencia de demanda Marshalliana de este consumidor, $x^*(p, w)$, para un precio p y una renta w.

   b) Encuentre la condición que tienen que cumplir p y w para que $x^*(p, w)$ sea un sólo punto.

   c) Verifique (a partir de la definición de semi-continuidad superior) que $x^*(p, w)$ es semi-continua superior en el punto $((5, 5), 10)$.