Macroeconomía I
Ayudantía 3

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Marcelo Gómez, Alberto Undurraga

Matemático I: Modelo AK

Considere la función de producción de Romer (1986) para la firma j :

$$y_j(t) = k_j^{\alpha}(t)A^{\eta}(t);\ \text{con } 0 < \alpha < 1$$
$$A(t) = A_0 \frac{\sum_{j=1}^{N} k_j(t)}{N}$$

donde y es el producto, k es el capital por trabajador, y N es el número total de firmas. Suponga que s denota la tasa de ahorro constante, n es la tasa de crecimiento de la población (también constante), y δ es la tasa de depreciación del capital físico.

(a) Encuentre la ecuación diferencial para k cuando todas las firmas son idénticas

(b) Represente gráficamente la tasa de crecimiento del modelo para los siguientes casos de la función de producción: (i) retornos decrecientes a escala, es decir, $\alpha + \eta < 1$; (ii) retornos constantes a escala, $\alpha + \eta = 1$; (iii) retornos crecientes a escala, $\alpha + \eta > 1$

(c) Describa qué sucede con la tasa de crecimiento de largo plazo, ante un cambio en la tasa de ahorro s para cada uno de los tres casos de (b)

(d) Considere el efecto un shock. Suponga un terremoto destruye la mitad del stock del capital de la economía. Describa qué pasa en cada uno de los tres casos a: la tasa de creciimento inmediatamente después del shock, la tasa de crecimiento de largo plazo, y el nivel de ingreso que se hubiera alcanzado si no hubiera sucedido el shock. Los efectos del shock son temporales o permanentes?

Matemático II: Aprendizaje por la práctica

Una posible inquietud que se podría tener sobre el modelo de aprendizaje por la práctica es que el efecto externo puede tener límites. Si el número de industrias es fija y los límites al aprendizaje son acotados, el crecimiento no puede existir en el largo plazo. En esta pregunta, veremos una posible solución al problema.

Para esto, considere una economía con un continuo de bienes $s \in (0, \infty)$. El conocimiento es público, por lo que sus mercados son perfectamente competitivos. Existen además L consumidores que ofrecen una unidad de trabajo, y cuya función instantánea de utilidad es

$$u(t) = \int_0^{\infty} ln(x(s,t) + 1)ds,$$

donde $x(s,t)$ es la cantidad del bien s. No se puede almacenar, por lo que en cada t los consumidores gastan todo su ingreso en consumo. Los bienes se producen con la tecnología

$$x(s,t) = \frac{L(s,t)}{a(s,t)},$$

donde $L(s,t)$ es la cantidad de trabajadores empleados en la producción de s y $a(s,t)$ es el requerimiento de trabajo. En este modelo, el aprendizaje por la práctica está capturado en el hecho de que $a(s,t)$ cae en el tiempo. Suponga que $a(s,t) = e^{s-S(t)}$ para un bien en el cual aún existe espacio para aprender, donde $S(t)$ captura el efecto de aprendizaje por la práctica y es creciente en el tiempo.

Eventualmente, el aprendizaje por la práctica de un determinado bien termina y $\bar{a}(s) = a(s,t) = e^{-s}$, lo cual se alcanza en tiempo finito. Note que el hecho de que $\bar{a}(s)$ sea decreciente en s implica que estamos diciendo que productos más nuevos (s más grande) son más sofisticados que los más viejos. Note además, que $S(t)$ define el límite para el cual los productos s alcanzaron su mínimo requerimiento de trabajo, $\bar{a}(s)$, y que los productos más nuevos tienen más espacio para aprender por la práctica. Entonces, podemos expresar la función de aprendizaje por la práctica como

$$a(s,t) = \begin{cases} e^{-s} & \text{for } s \leq S(t) \\ e^{s-2S(t)} & \text{for } s > S(t) \end{cases}.$$

El apredizaje por la práctica de toda la economía ocurre de acuerdo a

$$\dot{S}(t) \equiv \frac{dS(t)}{dt} = \int_{S(t)}^{N(t)} \psi L(s,t) ds, \quad \psi > 0,$$

donde $N(t)$ denota al bien más nuevo producido en cada instante. Note que esta ecuación implica que cada trabajador aprende a una tasa ψ, independiente del bien que produzca.

(a) Muestre que $a(s,t)$, como función de s, tiene una forma de U y es simétrica en torno a $S(t)$.

(b) Encuentre el precio de los bienes de consumo.

(c) Explique por qué los consumidores solo consumen una cierta variedad de productos en cada período. ¿Por qué no consumen todos los distintos tipos de bienes? (Hint: ¿como es la curva de indiferencia entre dos bienes?)

(d) (Doble puntaje) En equilibrio estático, denote $M(t)$ como el bien más viejo que efectivamente se consume. Con esto, muestre que la función de demanda para un bien s en el período t está dada por

$$x(s,t) = \begin{cases} e^{s-M(t)} - 1 & \text{for } M(t) \leq s \leq S(t) \\ e^{N(t)-s} - 1 & \text{for } S(t) \leq s \leq N(t) \end{cases}$$

(e) Muestre que $x(s,t)$ es simétrico en torno a $S(t)$ y tiene forma de U invertida.

(f) Muestre que el rango de productos que se consume, $(N(t) - M(t))$ está determinado por

$$S(t) = ln(2(\tau(t) - 1)e^{\tau(t)} - 1),$$

donde $\tau(t) = (N(t) - M(t))/2 = S(t) - M(t)$.

(g) Ahora pasemos al equilibrio dinámico. Muestre que

$$\dot{S}(t) = \frac{\psi L}{2}$$

(h) Finalmente, encuentre la tasa de crecimiento de la economía, que es equivalente a la tasa de reducción de $a(s,t)$ promedio.

Matemático III: Gasto de Gobierno

Considere una economía cuyo agente representativo tiene una función de utilidad de la forma

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \mathrm{d}t$$

y enfrenta una restricción presupuestaria

$$\dot{a} = ra + w - c$$

Donde $a(t)$ es su nivel de activos, $w(t)$ es su salario, $r(t)$ es el retorno de sus activos y $c(t)$ es su nivel de consumo en el período t. Esta es una economía pequeña y cerrada por lo que el único activo en oferta neta es el capital, $k(t) = a(t)$. El capital se deprecia a una tasa δ. Imagine ahora que cada empresa en esta economía tiene una función de producción de la forma:

$$Q_t = A \cdot K_t$$

Donde Q_t es el producto final y K_t es el stock de capital de cada firma. El número de personas en la economía L es constante.
Asuma ahora que un virus ataca al país y genera un efecto negativo en la economía. En particular, asuma que el virus le "quita" a la economía una fracción $(1-p)$ de la producción. Es decir, las personas en una economía atacada por el virus logran mantener una fracción p de la producción que existiría en tiempos normales.

La autoridad de este país puede reducir los efectos del virus en el economía gastando recursos en un sistema de "testeo, trazabilidad y aislamiento". Asuma que los recursos destinados a este sistema son iguales a G unidades del producto final. Las pérdidas asociadas al virus son decrecientes en G (p es creciente en G). Pero dado un nivel de G, el sistema de "testeo, trazabilidad y aislamiento" es menos efectivo cuando la actividad económica "efectiva" es mayor. Defina Y como la cantidad de producto final que las empresas logran producir una vez que el país ha sido atacado por el virus (actividad económica efectiva). Con todo, p es una función de G/Y con $p' > 0$, y $p'' < 0$. El nivel de producto una vez que el virus ha afectado a la economía es:

$$Y_t = A \cdot K_t \cdot p\left(G_t/Y_t\right)$$

Para financiar el sistema de protección frente al virus el gobierno debe cobrar impuestos al producto efectivo. Asuma que la tasa de impuestos es constante e igual a τ. El gobierno mantiene un presupuesto balanceado por lo que su restricción presupuestaria viene dada por:

$$G_t = \tau Y_t$$

a. El agente representativo elige la trayectoria para $c(t)$ y para $a(t)$, para maximizar función de utilidad sujeto a su restricción presupuestaria. Encuentre las condiciones de primer orden. Encuentre la relación entre la tasa de crecimiento del consumo y la tasa de interés. Interprete cómo cambia la tasa de crecimiento ante cambios en sus parámetros.

b. Las empresas maximizan la utilidad después del virus y de impuestos y actúan competitivamente tomando τ y la proporción p como dados. Encuentre la expresión para las utilidades después de impuesto (la función objetivo de las empresas). Derive la condición de primer orden para las empresas.

c. Usando la restricción presupuestaria del gobierno y la condición de primer orden obtenida previamente, encuentre una expresión para la tasa de crecimiento del consumo en estado estacionario como función del tamaño del gobierno τ y los parámetros del modelo. ¿Qué restricciones (en términos de parámetros) debe imponer para asegurar que la tasa de crecimiento del consumo sea positiva y que la utilidad tenga límite?

d. Si el gobierno quiere maximizar la tasa de crecimiento de la economía, ¿qué tasa de impuesto fijaría? Interprete

e. Considere un planificador social que internaliza la restricción presupuestaria del gobierno antes de tomar las decisiones de consumo e inversión. ¿Cuál es la tasa de crecimiento que elegiría el planificador social? ¿Es esta tasa diferente de la tasa de crecimiento obtenida en (c)? Interprete. ¿Cuál es la tasa de impuesto óptima que elegiría el planificador central? Explique intuitivamente.

f. Imagine ahora que el virus es transitorio, dura un período de tiempo determinado. Desafortunadamente, el virus puede tener un efecto negativo permanente en la productividad A. Imagine que el nivel de productividad una vez que el virus ha "desaparecido"[1] es $A^{SV} = A^{CV} \cdot p$. Es decir, mientras mayor sea p, menor serán los efectos permanentes en la productividad. Asuma ahora que el gobierno puede endeudarse en los mercados financieros internacionales a una tasa r^* (los privados no pueden endeudarse). Explique intuitivamente cuál podría ser la política óptima por parte del gobierno en este caso. No es necesario hacer ninguna derivación matemática.

[1] Donde A^{SV} denota A sin virus (cuando ya desapareció) y A^{CV} denota A con virus