Guía 4

Macroeconomía I - Otoño 2024

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Matías Muñoz (mmunozdo@fen.uchile.cl)
María Jesús Negrete (mnegrete@fen.uchile.cl)

Fecha de entrega: Jueves 20 de junio hasta las 23:59. Enviar por mail a ambos ayudantes.

Pregunta 1:Modelo Simple de Crecimiento de las Ideas [1]

Vamos a estudiar una variante de los modelos vistos en clases. Suponga que existe un continuo de bienes intermedios utilizados en la producción del bien, tal que:

$$Y_t = L^{1-\alpha} \int_0^1 A_{it}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha} di$$

Donde A_{it} representa la calidad del producto intermedio i en t. Cada producto intermedio tiene su propio monopolio y su precio es igual al producto marginal de la variedad en el sector del bien final.

Asuma que el monopolista utiliza una unidad del bien final para producir, L es constante y el precio del bien final esta normalizado a 1.

(a) Resuelva el problema del monopolista. ¿Cuál es la producción x_{it} de equilibrio?

Respuesta

Sabemos que $P_{it} = \frac{\partial Y_t}{\partial X_{it}} = L_t^{1-\alpha} A_{it}^{1-\alpha} \alpha X_{it}^{\alpha-1}$. Por lo tanto, el monopolio maximizará:

$$\pi = L_t^{1-\alpha} A_{it}^{1-\alpha} \alpha X_{it}^{\alpha-1} \cdot X_{it} - X_{it} \cdot 1$$
$$\implies \frac{\partial \pi}{\partial X_{it}} = \alpha L_t^{1-\alpha} A_{it}^{1-\alpha} \alpha X_{it}^{\alpha-1} - 1 = 0$$
$$\implies X_{it} = (\frac{1}{\alpha^2})^{1/(\alpha-1)} L_t A_{it} = \alpha^{2/1-\alpha} L_t A_{it}$$

(b) Exprese Y_t y el GDP de la economía en función de parámetros y de la productividad agregada $A_t = \int_0^1 A_{it} di$

Respuesta

Sabemos que Y_t será:

$$Y_t = L_t^{1-\alpha} \cdot \int_0^1 A_{it} (\alpha^{2/1-\alpha} L_t A_{it})^{\alpha} di = L_t \alpha^{2\alpha/1-\alpha} \int_0^1 A_{it} di = L\alpha^{2\alpha/1-\alpha} A_t$$

Luego, notamos que el GDP será $Y_t - X_t$:

$$GDP = Y_t - \int_0^1 X_{it} di = L\alpha^{2\alpha/1-\alpha} A_t - \int_0^1 \alpha^{2/1-\alpha} L A_{it} = L\alpha^{2\alpha/1-\alpha} A_t - \alpha^{2/1-\alpha} L A_t = L A_t (\alpha^{2\alpha/1-\alpha} - \alpha^{2/1-\alpha})$$
$$\implies GDP = L A_t \alpha^{2\alpha/1-\alpha} (1-\alpha)$$

Ahora asuma que el costo de producir una innovación ya no es η sino mas bien $\eta - T$ donde T es un subsidio para la investigación.

[1] Dudas de este ejercicio a: mnegrete@fen.uchile.cl

(c) Asumiendo que la tasa de interés r es constante (es decir, no depende de v y t) encuentre V(t) en función de π y la tasa de interés.

Respuesta

Sabemos que el valor presente de innovar es:

$$V(t) = \int_t^\infty \pi e^{-\bar{r}(v-t)} dv,$$

Donde $\bar{r}$ lo usamos para denotar que r es constante. Ahora resolvemos la integral para calcular lo solicitado:

$$V(t) = \pi e^{\bar{r}t} \int_t^\infty e^{-\bar{r}v} dv = \pi e^{\bar{r}t} \cdot (\frac{-1}{r} e^{-\bar{r}v})|_t^\infty = \pi e^{\bar{r}t} \cdot (lim_{v\to\infty} e^{-\bar{r}v} - e^{-\bar{r}t}) = \pi e^{\bar{r}t} \cdot \frac{1}{\bar{r}} e^{\bar{r}t} = \frac{\pi}{r}$$

(d) Imponiendo la condición de libre entrada, calcule la tasa de interés de equilibrio.

Respuesta

La condición de libre entrada nos dice que el valor presente de invertir tiene que ser igual al costo de invertir, es decir $V(t) = \eta - T$. Reemplazando esto en nuestra igualdad del ítem anterior:

$$\eta - T = \frac{\pi}{r} \implies r = \frac{\pi}{\eta - T}$$

(): Aqui se podría reemplazar las ganancias de la firma con lo calculado anteriormente.

(e) ¿Por qué subsidiamos el costo a la innovación?

Respuesta

El crecimiento en este modelo se genera a partir de la creación de nuevas ideas. Para que se generar nuevas ideas los individuos deben invertir. Para motivar la inversión (y en consecuencia, la creación de nuevas ideas) el planner puede subsidiar el costo a la innovación haciendo que sea un mercado mucho mas atractivo.

Pregunta 2: Modelo de Romer de Cambio Tecnológico [2]

En esta pregunta derivaremos el Modelo de Romer de Cambio Tecnológico. Para eso puede utilizar algunos resultados útiles derivados del Modelo Simple de generación de Crecimiento a través de nuevas Ideas (visto en clases).

El Costo de una Innovación será $\frac{\eta w}{N}$, es decir ahora no será un costo fijo como en el modelo simple, sino será un costo que depende de la cantidad de ideas en la economía y el salario.

(a) Responda: ¿Por qué esta nueva forma de ver los costos de innovar podría generar spillovers?

Respuesta

Los costos vienen dados por $\frac{\eta w}{N}$, por lo que si hay mayor cantidad de ideas en la economía (N), entonces los costos caen. Este es un efecto spillover sobre el costo de invertir que los inversores no toman en consideración. Entonces, si yo invierto en una nueva idea, entonces esto favorecerá al resto de la economía al pasar de N a N+1 y en consecuencia a un costo $\frac{\eta w}{N+1}$.

[2] Dudas de este ejercicio a: mnegrete@fen.uchile.cl

(b) Sabiendo que el salario w es $(1-\alpha)\frac{Y}{L}$, muestre que $\frac{w\eta}{N} = \eta A^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}$. Para eso asuma que el bien final se produce bajo competencia perfecta y la función de producción es:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N}(X_{ij})^{\alpha}$$

Respuesta

Del enunciado sabemos que w es $(1-\alpha)\frac{Y}{L}$, por lo que nuestro costo de innovar será: $\frac{\eta w}{N} = \frac{\eta(1-\alpha)\frac{Y}{L}}{N}$. Dicho esto, debemos calcular cuanto es $\frac{Y}{L}$ para luego reemplazarlo.

Para eso resolvemos el problema del monopolio y luego reemplazamos en la producción del bien final. Sabemos que el precio del bien intermedio es igual a la productividad marginal que tiene en la producción del bien final:

$$P_{x_{ij}} = \frac{\partial Y_i}{\partial X_{ij}} = A(L-L_R)^{1-\alpha}\alpha X_{ij}^{\alpha-1}$$

Luego, calculamos la cantidad óptima de X_{ij} al resolver el problema de maximización del monopolio:

$$max\pi = maxA(L-L_R)^{1-\alpha}\alpha X_{ij}^{\alpha-1}\cdot X_{ij} - X_{ij}\cdot 1$$
$$\frac{\partial\pi}{\partial X_{ij}} = A(L-L_R)^{1-\alpha}\alpha\alpha X_{ij}^{\alpha-1} - 1 = 0 \implies X_{ij} = \alpha^{2/1-\alpha}(L-L_R)A^{1/1-\alpha}$$

Reemplazamos en la función de producción del bien final y notamos que X_{ij} no depende de j por lo que podemos sacarlo de la sumatoria:

$$Y_i = A(L-L_R)^{1-\alpha}\alpha^{2\alpha/1-\alpha}(L-L_R)^{\alpha}A^{\alpha/1-\alpha}\sum_j^N 1 = A^{1/1-\alpha}(L-L_R)\alpha^{2\alpha/1-\alpha}N$$

Con esto ya podemos calcular $\frac{Y}{L}$ y luego reemplazarlo:

$$\frac{Y}{L} = \frac{A^{1/1-\alpha}(L-L_R)\alpha^{2\alpha/1-\alpha}N}{L-L_R} = A^{1/1-\alpha}\alpha^{2\alpha/1-\alpha}N$$
$$\implies \frac{\eta w}{N} = \frac{\eta(1-\alpha)\cdot A^{1/1-\alpha}\alpha^{2\alpha/1-\alpha}N}{N} = \eta(1-\alpha)\cdot A^{1/1-\alpha}\alpha^{2\alpha/1-\alpha}$$

Sabemos que $r(t) = \frac{\pi}{V(t)}$ donde $r(t)$ es la tasa de interés, π son las utilidades del monopolio y $V(t)$ es el valor presente de los retornos de invertir.

(c) Sabiendo esto, calcule $V(t)$. Para eso debe calcular primero las utilidades del monopolio sabiendo que un bien intermedio cuesta una unidad del bien final para ser producido (su resultado puede quedar en función de $r(t)$).

Respuesta

Partimos calculando las utilidades del monopolio:

$$\pi = A(L-L_R)\alpha X_{ij}^{\alpha} - X_{ij}$$
$$\implies \pi = A(L-L_R)\alpha(\alpha^{2/1-\alpha}(L-L_R)A^{1/1-\alpha})^{\alpha} - \alpha^{2/1-\alpha}(L-L_R)A^{1/1-\alpha}$$
$$\implies \pi = A^{1/1-\alpha}(L-L_R)\alpha^{2/1-\alpha}(\alpha^{-1}-1) = A^{1/1-\alpha}(L-L_R)\alpha^{2/1-\alpha}(\frac{1-\alpha}{\alpha})$$

Luego, sabemos que $V(t) = \pi/r(t)$, por lo tanto:

$$V(t) = A^{1/1-\alpha}(L-L_R)\alpha^{2/1-\alpha}(\frac{1-\alpha}{\alpha})(\frac{1}{r})$$

(d) Imponga la condición de libre entrada y obtenga el valor de la tasa de interés $r(t)$

Respuesta

La condición de libre entrada supone que $V(t) = \frac{\eta w}{N}$, reemplazamos los valores obtenidos para ambos términos y despejamos r para obtener lo pedido en el enunciado:

$$A^{1/1-\alpha}(L - L_R)\alpha^{2/1-\alpha}(\tfrac{1-\alpha}{\alpha})(\tfrac{1}{r}) = \eta(1-\alpha) \cdot A^{1/1-\alpha}\alpha^{2\alpha/1-\alpha}$$
$$\implies r = \frac{A^{1/1-\alpha}(L-L_R)\alpha^{2/1-\alpha}(\frac{1-\alpha}{\alpha})}{\eta(1-\alpha)\cdot A^{1/1-\alpha}\alpha^{2\alpha/1-\alpha}} = \frac{(L-L_R)\alpha}{\eta}$$

(e) El cambio en el número de variedades viene dado por $\dot{N} = L_R\frac{N}{\eta}$. Sabiendo esto y utilizando también la condición óptima de los hogares, encuentre la tasa de crecimiento de la economía.

Respuesta

La condición óptima de los hogares vienen dada por $\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$. Además, sabemos que la tasa de crecimiento en el número de variedades, será igual a la tasa de crecimiento de la economía pues de aquí nace el crecimiento endógeno del modelo. Además, esta tasa será igual a la tasa de crecimiento del consumo.

Sabiendo esto, utilizamos el hecho de que: $\dot{N} = L_R\frac{N}{\eta} \implies \frac{\dot{N}}{N} = \gamma = \frac{L_R}{\eta} = \frac{\dot{C}_t}{C_t}$.

Para despejar el valor exacto de la tasa de crecimiento γ reemplazamos el valor de r en nuestra ecuación de $\frac{\dot{C}_t}{C_t}$:

$$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \gamma = \frac{1}{\theta}(\frac{(L-L_R)\alpha}{\eta} - \rho) = \frac{1}{\theta}(\frac{L\alpha}{\eta} - \frac{L_R\alpha}{\eta} - \rho) = \frac{1}{\theta}(\frac{L\alpha}{\eta} - \gamma - \rho)$$

Despejamos el γ de esta ecuación y así obtenemos la tasa de crecimiento de la economía:

$$\gamma = \frac{1}{\theta+\alpha}(\frac{\alpha L}{\eta} - \rho)$$

(f) Discuta las implicancias del modelo (Cómo se genera crecimiento endógeno y que distorsiones hay)

Respuesta

Cosas importantes a mencionar del modelo:

- La tasa de crecimiento no depende de A porque el sector de producción de ideas no utiliza bienes intermedios como insumo.
- Existen dos distorsiones: la primera es el monopolio en los bienes intermedios (que genera que estos tengan incentivos a invertir) y el segundo es que existe spillovers en el costo de la innovación, dado que a medida que aumenta N cae el costo.