Tarea 4

María Jesús Negrete Salinas (19.562.341-4)
Emiliano Quinteros Handal (20.286.206-3)

PREGUNTA 1

Partimos analizando el juego de etapa según la matriz de pagos, buscando los equilibrios de Nash de la etapa, notemos que los EN* serán {(TL), (MC)}. Así, en la etapa, el Equilibrio {(BR)} no es un equilibrio de Nash.

* en estrategias puras.

		J2		
		L	C	R
J1	T	3,1	0,0	5,0
	M	2,1	1,2	3,1
	B	1,2	0,1	4,4

Ahora, que existan estos EN en est. puras no evita que podamos inducir un Equilibrio de Nash, dado que el juego se repite finitamente y tiene más de un ENash en su etapa.

Bajo esta premisa, dado que el juego es de dos etapas, diseñamos una estrategia basada en castigos tal que los incentivos permitan alcanzar un ENPS en estrategias puras que tenga como pago en la primera etapa (4,4).

Ahora, para obtener el pago (4,4), notemos que para el jugador 2, usar la acción R cuando el jugador 1 juega B será su mejor respuesta. Dado ello, debemos diseñar una estrategia que induzca al jugador

Fecha: / / L M M J V S D

1 a jugar B. La idea es que en la segunda etapa se jueguen los equilibrios de nash en puros de etapa, haciendo que el jugador 1 reciba un pago de castigo si se desvía en la primera etapa, y un premio si coopera.

La estrategia para el jugador 1 será:

$\boxed{J2}$ → estrategia S

$$\begin{cases} \text{En 2do etapa jugar } L, \text{ Si en 1ero etapa se jugó } \{(BR)\} \\ \text{En 2do etapa jugar } C, \text{ Si en 1ero etapa \underline{no} se jugó } \{(BR)\} \end{cases}$$

Notemos que si en la 2da etapa el jugador 2 juega L, los pagos del EN inducido serán (3,1), y si en la 2do etapa el jugador 2 juega C, los pagos inducidos serán (1,2). Así, el que J2 juegue L sería un premio por cooperar que recibe el jugador 1, y que J2 juegue C sería un castigo por desviarse.

Ahora veamos los pagos para el jugador 1 cuando sabe que el jugador 2 emplea la estrategia S.

Veamos el pago de cooperación:

$$Pago_1^c \Rightarrow 4 + 3\cdot\cancel{\delta}^{1} = 7$$

El pago de cooperación se descompone en dos elementos: (a) pago de 4 por jugar (B,R) en la primera etapa. (b) pago de 3 por premio inducido por la estrategia S.

Veamos el pago de desvío:

$$Pago_1^D = 5 + 1 \cdot \delta^1 = 6$$

Este pago se compone de 2 elementos: (a) pago de 5. Este pago nace de que el agente 1 sabe que el jugador 2 empleará como acción R, por cuanto juega su mejor respuesta. (b) pago de 1 dado que el agente 2 "activó" el castigo derivado de la estrategia S.

Así:

$$Pago_1^C = 7 > Pago_1^D = 6$$

Bajo la estrategia S, al jugador 1 no le convendrá el desvío dado que el pago de desvío será menor.

Así, sí es posible obtener un pago de (4,4) en un ENPS en estrategias puras en el primer periodo de juego.

Pregunta 2

→ En 1er lugar buscamos el δ donde hay equilibrio cooperativo.

→ Calculamos los valores presentes

$$VP\text{cooperar} = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + \ldots = \frac{4}{1-\delta}$$

$$VP\text{ desvío} = 5 + 4\delta + 1\delta^2 + \ldots$$
$$= 5 + 4\delta + \delta^2(1 + \delta^2 + \ldots)$$
$$= 5 + 4\delta + \frac{\delta^2}{1-\delta}$$

↓

Aquí asumimos que el jugador que desvía luego vuelve a la estrategia propuesta. ⇒ si en los períodos previos (sin incluir el 1er período anterior) nadie jugó D ⇒ juega ND (y el otro jugador también).
Luego, en el período subsiguiente como hace 2 períodos atrás uno de ellos jugó D ⇒ se juega D, D por siempre desde ahora.

→ Ahora, imponemos VPcooperar $\geq$ VP desvío :

$$\frac{4}{1-\delta} \geq 5 + 4\delta + \frac{\delta^2}{1-\delta} \quad / \cdot (1-\delta)$$

$$4 \geq 5(1-\delta) + 4\delta(1-\delta) + \delta^2$$
$$4 \geq 5 - 5\delta + 4\delta - 4\delta^2 + \delta^2$$

$\Rightarrow 3\delta^2 + \delta - 1 \geq 0$ → calculamos la cuadrática

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

→ nos sirve la solución con la raíz positiva pues $\delta \in (0,1)$

$\Rightarrow \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6} \approx 0{,}43 \Rightarrow \boxed{\delta \geq 0{,}43}$

→ Vamos a ver ahora si jugar (Gatillo modificado, Gatillo modificado) es ENPS

Podemos describir el juego con desvío de la siguiente forma

t = antes de t=1	t = 1	t=2	t=3, 4, 5, ...
ND, ND	$\underbrace{\text{D, ND}}_{\text{J1 desvía}}$	$\underbrace{\text{ND, ND}}_{\text{vuelven a la estrategia modificada}}$	D, D

En este período tenemos problemas pues:

- Si J1 asume que J2 juega Gatillo Modificado
  $\Rightarrow$ sabe que en t=2 juega ND y luego solo jugará D
  $\Rightarrow$ mejor le conviene jugar D en t=2 y luego seguir con la estrategia propuesta pues

  $$5 + \delta 1 \cancel{+ \delta^2 1 +} > 4 + \delta \cancel{1 + \delta^2} + \dots$$

  $$5 > 4$$

  $\Rightarrow$ Hay incentivos de J1 a desviarse

- Por otro lado, si J2 asume que J1 juega Gatillo modificado
  → Por la misma lógica anterior también le conviene jugar D → incentivo a desviarse

como hay incentivos a desviarse en la etapa "2"

⇓

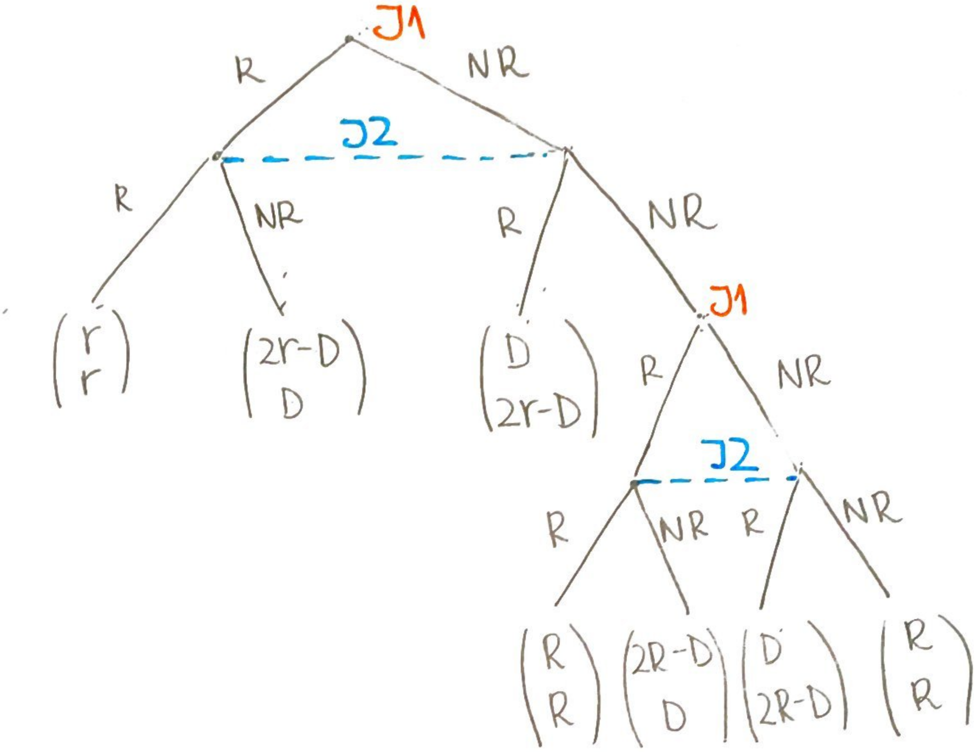
Jugar la estrategia (Gatillo modificado, Gatillo modificado) <u>no</u> será ENPS (independiente del valor de δ que habíamos calculado)

Pregunta 3

a) J1: Ana
J2: Bruno

Estrategias

R: Retira
NR: No retira



b) Primero, partimos escribiendo la matriz de pagos considerando que las estrategias posibles son: (R,R), (NR,R), (R,NR), (NR,NR).

J1 \ J2	(R,R)	(NR,R)	(R,NR)	(NR,NR)
(R,R)	r, r	2r−D, D	r, r	2r−D, D
(NR,R)	D, 2r−D	R, R	D, 2r−D	2R−D, D
(R,NR)	r, r	2r−D, D	r, r	2r−D, D
(NR,NR)	D, 2r−D	D, 2R−D	D, 2r−D	R, R

CASO 1 $R + D > 2r \Rightarrow R > 2r - D$

↳ en la matriz de pagos se subrrayó en celeste las mejores respuestas

↳ se encontraron 5 equilibrios de Nash:

$= \{(R,R),(R,R)\}, \{(NR,R),(NR,R)\}, \{(R,R),(R,NR)\},$
$\{(R,NR),(R,R)\}, \{(R,NR),(R,NR)\}$

→ Debemos ver que sean perfectos en subjuego

→ El subjuego tiene la siguiente matriz de pagos

J1 \ J2	R	NR
R	R, R	2R-D, D
NR	D, 2R-D	R, R

→ El equilibrio de Nash en el subjuego es (R, R)

→ Si "intersectamos" los equilibrios de Nash del juego completo y el único subjuego obtenemos que los ENPS son:

$\{(R,R),(R,R)\}, \{(NR,R),(NR,R)\}$

CASO 2 $R + D < 2r \Rightarrow R < 2r - D$

↳ en la matriz de pagos se sobrerrayó en rosado las mejores respuestas

↳ se encontraron 4 equilibrios de Nash:

$= \{(R,R),(R,R)\}, \{(R,NR),(R,R)\}, \{(R,R),(R,NR)\},$
$\{(R,NR),(R,NR)\}$

→ Volvemos a verificar cuales son perfectos en subjuego

J1 \ J2	R	NR
R	R, R	2R-D, D
NR	D, 2R-D	R, R

→ obtenemos el mismo EN que en el caso anterior (R, R)

→ Si volvemos a "intersectar" los E.N obtenemos el siguiente ENPS:

$$\{(R,R),(R,R)\}$$

c) volvemos a escribir la matriz de pagos

J1 \ J2	(R, R)	(NR, R)	(R, NR)	(NR, NR)
(R, R)	r, r	2r-D, r	r, r	2r-D, r
(NR, R)	r, 2r-D	R, R	r, 2r-D	2R-D, D
(R, NR)	r, r	2r-D, r	r, r	2r-D, r
(NR, NR)	r, 2r-D	D, 2R-D	r, 2r-D	R, R

→ como se obtienen los mismos E.N que en el caso 1 del ítem b y además el subjuego no cambia ⇒ tenemos los mismos ENPS que antes:

$$\{(R,R),(R,R)\},\ \{(NR,R),(NR,R)\}$$

↓

en este equilibrio BF sigue quebrando

→ luego, notamos que (NR, R) domina debilmente a todas las estrategias, mientras que antes de incluir la garantía (NR, R) solo dominaba debilmente a (NR, NR)

⇒ Al incluir la garantía aumenta la probabilidad de que BF no quiebre pues la estrategia debilmente dominante no se retira en el 1er período.