SOLEMNE I – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: DIEGO FICA - NICOLÁS SUÁREZ

Pregunta 1 (15 puntos)

Considere una economía de intercambio estática con N consumidores y L mercancías, donde la oferta agregada de recursos es $W \in \mathbb{R}^L_{++}$. Cada individuo $i \in \{1, \ldots, N\}$ tiene una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava. Diremos que una distribución de recursos $(x^i)_{i \in \{1,\ldots,N\}}$ es *libre de envidia* si $u^i(x^i) \geq u^i(x^j)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Una asignación factible es *justa* si es Pareto eficiente y libre de envidia.

(i) De un ejemplo de una economía donde las distribuciones de recursos que se obtienen en un equilibrio competitivo *no* son justas.

Solución. Para que la distribución de recursos que se obtiene en un equilibrio sea *justa* debe ser *libre de envidia*. Intuitivamente, es imposible que esto ocurra en economías donde los individuos tienen rentas monetarias muy desiguales. Por ejemplo, si $N = 2$, $u^1(x, y) = u^2(x, y) = \sqrt{xy}$ y $W = w^1 + w^2 = (10, 10) + (1, 1)$, entonces en el único equilibrio Walrasiano los agentes demandan sus asignaciones iniciales y el individuo $i = 2$ envidia la situación del individuo $j = 1$, pues $u^i(\overline{x}^j) = \sqrt{100} > \sqrt{1} = u^i(\overline{x}^i)$. □

(ii) Demuestre que siempre existen distribuciones de recursos justas.

Solución. Para asegurar la justicia de una distribución de recursos es suficiente probar que $u^i(x^i) = u^j(x^j)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Considere el siguiente problema de maximización del bienestar social, en el cual un planificador central se preocupa del individuo que está en la peor situación en términos de utilidad:

$$\begin{array}{ll} \max & \min\{u^1(x^1), \ldots, u^N(x^N)\} \\ (x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}^{LN}_+ : & \sum_{i=1}^N x^i \leq W. \end{array}$$

Como las funciones de utilidad son continuas y el conjunto de asignaciones factibles es compacto, sigue del Teorema de Weierstrass que existe una solución para el problema anterior. Además, en toda solución $(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^N)$ tenemos que $u^i(\overline{x}^i) = u^j(\overline{x}^j)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Si no fuera así, existiría un agente i tal que $\min_{j \neq i} u^j(\overline{x}^j) < u^i(\overline{x}^i)$. Luego, por la continuidad de las funciones de utilidad, existiría $\theta \in (0, 1)$ tal que $\min_{j \neq i} u^j\left(\overline{x}^j + \frac{(1-\theta)}{N-1}\overline{x}^i\right) < u^i(\theta\overline{x}^i)$, lo que implicaría que $\min\left\{u^i(\theta\overline{x}^i), \min_{j \neq i} u^j\left(\overline{x}^j + \frac{(1-\theta)}{N-1}\overline{x}^i\right)\right\} > \min_i u^i(\overline{x}^i)$. Esto contradeciría la optimalidad de $(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^N)$. □

Pregunta 2 (15 puntos)

Considere una economía con dos periodos, dos estados de la naturaleza en el segundo periodo $s \in \{u, d\}$ y una única mercancía, la cual está disponible para consumo sólo en el segundo periodo. Hay dos agentes, A y B, que negocian activos en $t = 0$ para suavizar su consumo en $t = 1$. Hay dos activos, j y k, con promesas reales $(N_{j,u}, N_{j,d}) = (1, 0)$ y $(N_{k,u}, N_{k,d}) = (0, 1)$.

Suponga que los agentes son caracterizados por utilidades y asignaciones iniciales

$$V^A(x_u, x_d) = 2\sqrt{x_u + 1} + \sqrt{x_d}, \qquad w^A = (1, 1),$$

$$V^B(x_u, x_d) = \sqrt{x_u + 1} + 2\sqrt{x_d}, \qquad w^B = (1,1).$$

(i) Encuentre las demandas de equilibrio en esta economía. Para los precios de equilibrio, puede reportar una ecuación que los determine.

Solución. Como las funciones de utilidad son estrictamente crecientes, en equilibrio los precios de los activos son estrictamente positivos y en el primer periodo los individuos no pierden recursos que podrían utilizar para consumo en el segundo periodo. Esto es, $q_j z_j^h + q_k z_k^h = 0$, donde (z_j^h, z_k^h) es el portafolio financiero del individuo $h \in \{A, B\}$ y $(q_j, q_k) \gg 0$ son los precios de los activos. Por lo tanto, normalizando $q_j = 1$, obtenemos que $z_j^h = -q_k z_k^h$. Luego, como el consumo del segundo periodo es

$$(x_u^h, x_d^h) = (1 + z_j^h, 1 + z_k^h) = (1 - q_k z_k^h, 1 + z_k^h),$$

los problemas individuales son equivalentes a

$$\max_{z_k^A \in \mathbb{R}} 2\sqrt{2 - q_k z_k^A} + \sqrt{1 + z_k^A}, \qquad \max_{z_k^B \in \mathbb{R}} \sqrt{2 - q_k z_k^B} + 2\sqrt{1 + z_k^B}.$$

Calculando las condiciones de primer orden y haciendo las manipulaciones algebraicas necesarias Ud. debería llegar a que

$$(z_k^A(q_k), z_k^B(q_k)) = \left(\frac{2 - 4q_k^2}{4q_k^2 + q_k}, \frac{8 - q_k^2}{q_k^2 + 4q_k} \right).$$

Si $\overline{q}_k$ es un precio de equilibrio entonces $z_k^A(\overline{q}_k) + z_k^B(\overline{q}_k) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{2 - 4q_k^2}{4q_k + 1} = \frac{q_k^2 - 8}{q_k + 4} \qquad \Longrightarrow \qquad 8\overline{q}_k^3 + 17\overline{q}_k - 34\overline{q}_k - 16 = 0.$$

Así, hemos encontrado fórmulas para el consumo y los portafolios óptimos en función de $\overline{q}_k$, junto a una ecuación cuya solución estrictamente positiva determinará el precio de este activo.[1] □

(ii) Suponga que sólo se pueden demandar portafolios en el conjunto $\{(z_j, z_k) \in \mathbb{R}^2 : z_j + z_k \geq 0\}$. Demuestre que esta restricción compromete la existencia de equilibrio.

Solución. Suponga que existe un equilibrio en el cual los portafolios vienen dados por $(\overline{z}_j^A, \overline{z}_k^A)$ y $(\overline{z}_j^B, \overline{z}_k^B)$. Como la factibilidad de mercado asegura que $\overline{z}_j^A + \overline{z}_j^B = 0 = \overline{z}_k^A + \overline{z}_k^B$, sabemos que

$$(\overline{z}_j^A + \overline{z}_k^A) + (\overline{z}_j^B + \overline{z}_k^B) = 0.$$

Así, sigue de las restricciones financieras que $\overline{z}_j^A + \overline{z}_k^A = 0$. Por otro lado, normalizando a uno el precio del activo j, la restricción presupuestaria del primer periodo asegura que $\overline{z}_j^A = -\overline{q}_k \overline{z}_k^A$. Estas dos propiedades nos permiten concluir que $\overline{z}_k^A = \overline{q}_k \overline{z}_k^A$.

Sea $\overline{\alpha} = \overline{z}_k^A$. Sigue de los argumentos hechos en el ítem previo que

$$\overline{\alpha} \in \operatorname*{argmax}_{\alpha \in \mathbb{R}} \; 2\sqrt{2 - \overline{q}_k \alpha} + \sqrt{1 + \alpha}, \qquad \overline{\alpha} \in \operatorname*{argmax}_{\alpha \in \mathbb{R}} \; \sqrt{2 + \overline{q}_k \alpha} + 2\sqrt{1 - \alpha},$$

lo cual implica que

$$\overline{\alpha} = \frac{2 - 4q_k^2}{4q_k^2 + q_k} = -\frac{8 - q_k^2}{q_k^2 + 4q_k}.$$

Note que no es posible que esas dos expresiones se anulen al mismo tiempo, i.e., en un equilibrio debe haber negociación de activos. Como $\overline{z}_k^A = \overline{q}_k \overline{z}_k^A \neq 0$, obtenemos que $\overline{q}_k = 1$. Reemplazando este valor en la igualdad previa, llegamos a que $2 = 7$. Una contradicción. □

[1] La ecuación $8\overline{q}_k^3 + 17\overline{q}_k - 34\overline{q}_k - 16 = 0$ tiene una única raiz real positiva $\overline{q}_k \approx 1.52421$. Evidentemente, Ud. no tenía que hacer este cálculo numérico.

Pregunta 3 (15 puntos)

Sea $\mathcal{E}(w)$ una economía con producción en la cual hay L mercancías, J firmas y N consumidores con asignaciones iniciales $w = (w^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}} \gg 0$. Los consumidores son los propietarios de las firmas, aunque al menos uno de ellos *no tiene* derechos propiedad sobre ninguna empresa. Asuma que las demandas de los consumidores $(x^i(p))_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ y las decisiones óptimas de producción de las firmas $(y^j(p))_{j\in\{1,\ldots,J\}}$ son funciones bien definidas y diferenciables en el espacio de precios $\mathbb{R}^L_{++}$. A partir de los resultados vistos en clase para economías de intercambio y bajo los supuestos usuales en preferencias y tecnologías de producción, demuestre que para casi todo $w \in \mathbb{R}^{LN}_{++}$ la economía $\mathcal{E}(w)$ tiene un número finito e impar de equilibrios.

Solución. Asumiremos que los individuos tienen preferencias representables por funciones de utilidad continuas, estrictamente crecientes y estrictamente cuasi-cóncavas. Además, cada firma j tiene un conjunto de producción Y^j cerrado y convexo tal que $[y_j \in Y^j \wedge y'_j \leq y_j] \Longrightarrow y'_j \in Y^j$, $Y^j \cap (-Y^j) = \{0\}$. Bajo estas condiciones cada economía $\mathcal{E}(w)$ tiene un conjunto no-vacío de equilibrios competitivos.

Como las restricciones presupuestarias de los consumidores son homogéneas de grado cero en precios, sin perdida de generalidad podemos utilizar la mercancía L como numerario, normalizando su precio a uno. Defina la función $\widehat{z} : \mathbb{R}^{LN}_{++} \times \mathbb{R}^{L-1}_{++} \to \mathbb{R}^{L-1}$ por

$$\widehat{z}(w,p) = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(x^i_l(p,1) - w^i_l \right) - \sum_{j=1}^{J} y^j_l(p,1) \right)_{l\in\{1,\ldots,L-1\}}.$$

La Ley de Walras nos asegura que $(p,1) \gg 0$ es un equilibrio de $\mathcal{E}(w)$ si y solamente si $\widehat{z}(w,p) = 0$. Por lo tanto, para caracterizar el conjunto de precios de equilibrio de una economía $\mathcal{E}(w)$ es suficiente caracterizar las soluciones del sistema de ecuaciones $\widehat{z}(w,p) = 0$.

Dado $w \in \mathbb{R}^{LN}_{++}$, argumentos idénticos a los aplicados a la función exceso de demanda truncada de una economía de intercambio *sin producción* nos permiten afirmar que, si $D_p\widehat{z}(w,p)$ es invertible cuando $\widehat{z}(w,p) = 0$, entonces $\{p \in \mathbb{R}^{L-1}_{++} : \widehat{z}(w,p) = 0\}$ es un conjunto de puntos localmente aislados. Esto es, toda economía regular tiene un conjunto de precios de equilibrio cuyos elementos son localmente aislados.

Note que, como las asignaciones iniciales son interiores, el individuo que no tiene derechos de propiedad sobre ninguna firma tendrá recursos incluso cuando algunas mercancías (no todas) tengan precio cero. Por lo tanto, argumentos análogos a los ya aplicados para economías sin producción implican que en toda economía regular el conjunto de precios es finito. A partir de esto, y gracias al Teorema del Índice, sabemos que toda economía regular tiene un número finito e impar de precios de equilibrio.

Por otro lado, aplicando el Teorema de Transversalidad—lo cual se hacía perturbando las asignaciones iniciales de un individuo, por lo que se puede repetir en un ambiente con producción—podemos concluir que casi toda economía es regular.

Finalmente, juntando todos los resultados anteriores, concluimos que para casi todo $w \in \mathbb{R}^{LN}_{++}$ la economía $\mathcal{E}(w)$ tiene un número finito e impar de equilibrios. □

Pregunta 4 (15 puntos)

Considere una economía con dos periodos en la cual hay incertidumbre sobre el estado de la naturaleza $s \in \mathcal{S} = \{1,\ldots,S\}$ que se realizará en el segundo periodo. Hay una única mercancía y un activo real con promesas $(A_s)_{s\in\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^S_+ \setminus \{0\}$. Suponga que en esta economía, en la cual hay muchos individuos, Felipe tiene asignaciones iniciales $w = (w_s)_{s\in\{0\}\cup\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ y preferencias representables por una función de utilidad continua $V : \mathbb{R}^{S+1}_+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\in\mathbb{R}^{S+1}_{++}:\|x\|\to+\infty} V(x) = +\infty.$$

Además asuma que el acceso a crédito de Felipe está limitado por la restricción

$$100 + qz \geq 0,$$

donde q es el precio de activo y $z \in \mathbb{R}$ su posición financiera.

Tomando el precio de la mercancia como numerario, suponga que existe $\Omega > 0$ tal que

$$\max_{s \in \{0\} \cup \mathcal{S}} x_s(q) \leq \Omega,$$

donde $(x_s(q))_{s \in \{0\} \cup \mathcal{S}}$ es la demanda de mercancías de Felipe a precios q. Demuestre que existe $\underline{Q} > 0$ que depende de $(\Omega, V, w, (A_s)_{s \in \mathcal{S}})$ tal que $q \geq \underline{Q}$.

Solución. Intuitivamente, si no se pudiera limitar inferiormente el precio q, Felipe podría vender parte de su asignación inicial y comprar muchas unidades del activo en $t = 0$. Esa inversión le daría retornos muy altos en al menos un estado de la naturaleza en el segundo periodo, asegurándole un nivel de utilidad superior a $V(\Omega, \ldots, \Omega)$. Esto sería incompatible con la optimalidad de $(x_s(q))_{s \in \{0\} \cup \mathcal{S}}$.

Formalmente, suponga que Felipe utiliza la mitad de su asignacíon inicial en el primer periodo para comprar $\alpha > 0$ unidades del activo en $t = 0$. Esta acción le permite financiar la canasta de consumo $y(\alpha) := (0.5w_0, (w_s + A_s\alpha)_{s \in \mathcal{S}}) \gg 0$. Como $(x_s(q))_{s \in \{0\} \cup \mathcal{S}}$ es su demanda a precios q, sabemos que

$$V\left(y(\alpha)\right) \leq V((x_s(q))_{s \in \{0\} \cup \mathcal{S}}) \leq V(\Omega, \ldots, \Omega).$$

Ahora, $(A_s)_{s \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}^S_+ \setminus \{0\}$ implica que $\lim_{\alpha \to +\infty} \|y(\alpha)\| = +\infty$. Por lo tanto, $\lim_{\alpha \to +\infty} V(y(\alpha)) = +\infty$.

Esto implica que debe existir $\overline{\alpha} > 0$ tal que Felipe no puede nunca comprar más que $\overline{\alpha}$ unidades del activo con la venta de la mitad de su asignación inicial de recursos en $t = 0$. Esto es, $0.5w_0 \leq q\overline{\alpha}$. Definiendo $\underline{Q} = 0.5w_0/\overline{\alpha}$ concluimos la demostración. $\square$