Guía 1

Macroeconomía I - Otoño 2024

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Matías Muñoz (mmunozdo@fen.uchile.cl)
María Jesús Negrete (mnegrete@fen.uchile.cl)

Fecha de entrega: Jueves 23 de mayo hasta las 23:59. Enviar por mail a ambos ayudantes.

Pregunta 1: Modelo Harrod-Domar (aplicación modelo de Solow)[1]

Considere el modelo de Solow-Swan con tasa constante de ahorro s. Asuma que función de producción viene dada por la siguiente función de Leontief:

$$Y = \min(AK, BL)$$

donde A y B son constantes tecnológicas, y K y L corresponde al stock de capital y empleo. El capital se deprecia a una tasa δ y el nivel inicial de capital per cápita es k_0.

a) Muestre que si la tasa de crecimiento poblacional es cero, la tasa de crecimiento del stock de capital per cápita (k) viene dado por:

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k)}{k} - \delta$$

Respuesta

Partimos escribiendo la función de producción en términos per cápita. Ya que $F(K, L)$ es homogénea de grado 1, podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} F(K,L) &= \text{mín}\{AK, BL\} \\ \frac{1}{L}\cdot F(K,L) &= \frac{1}{L}\cdot \text{mín}\{AK, BL\} \\ f(k) &= \text{mín}\{Ak, B\} \end{aligned}$$

Ahora, partiendo de la dinámica del capital tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= sF(K,L) - \delta K \\ \frac{\dot{K}}{L} &= \frac{1}{L}\cdot sF(K,L) - \delta\frac{K}{L} \end{aligned} \tag{1}$$

Para continuar tenemos que derivar K/L respecto al tiempo para obtener una expresión para $\frac{\dot{K}}{L}$:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \left(\frac{\dot{K}}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - k\cdot \overbrace{\cancel{\frac{\dot{L}}{L}}}^{=n=0} \\ \dot{k} &= \frac{\dot{K}}{L} \end{aligned}$$

[1] Dudas de este ejercicio a: mmunozdo@fen.uchile.cl

Reemplazamos esto en la ecuación (1):

$$\dot{k} = sF(\frac{K}{L}, 1) - \delta k$$
$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - \delta$$

Con lo que llegamos a la expresión solicitada.

Puntajes: 1 punto por la dinámica del capital. 2 puntos por llegar a la expresión justificando por qué $\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k}$, notar que no es obvio si L no es constante. Justificaciones válidas eran explicar que la igualdad anterior se cumple porque L es constante (dado que $n = 0$), o derivando $\frac{K}{L}$ con respecto al tiempo como se hizo en esta pauta.

Para los ítemes b), c), d) y e), asuma que $Ak < B \ \forall k$.

b) Asuma que $sA > \delta$. ¿Cuál es el stock de capital de estado estacionario? ¿Cuál es la dinámica de k a lo largo del tiempo y a qué tiende el capital en el largo plazo? **HINT:** Recuerde que el estado estacionario es la situación en el cual las variables crecen a una tasa constante.

Respuesta

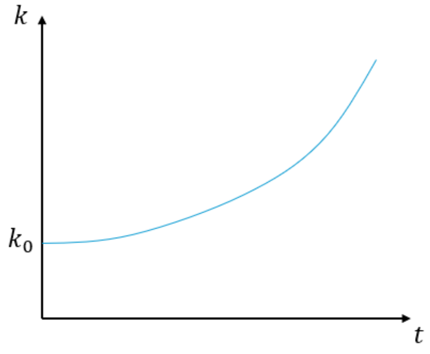
Debido a que se nos pide que asumamos que se cumple que $Ak < B \ \forall k$. Tenemos que $f(k))Ak$. Así, reemplazando en la expresión derivada en el ítem anterior llegamos a:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA - \delta$$

Como sabemos por el enunciado que $sA > \delta$, tendremos que

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA - \delta > 0$$

Por lo que k estará creciendo a tasa constante y su dinámica vendrá dada por:



Por lo que el nivel de capital per cápita de estado estacionario viene dado por la solución a la ecuación diferencial de la dinámica del capital:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA - \delta$$

$$\dot{k} = (sA - \delta)k$$
$$\dot{k} - (sA - \delta)k = 0$$

Por lo que estamos en presencial de una ecuación diferencial ordinaria homogénea de coeficientes constantes de primer orden. El polinomio característico viene dado por:

$$\lambda - sA + \delta = 0$$
$$\lambda = sA - \delta$$

La solución tendrá la siguiente forma:

$$k^*(t) = c \cdot e^{\lambda t}$$

Donde c es una constante. Así reemplanzando λ tenemos que:

$$k^*(t) = c \cdot e^{(sA-\delta)t}$$

Despejamos c usando que $k(0) = k_0$:

$$k(0) = c \cdot e^{(sA-\delta)\cdot 0} = k_0$$

Por lo que el capital de estado estacionario será:

$$k^*(t) = k_0 \cdot e^{(sA-\delta)t}$$

Y en el largo plazo tenderá a infinito: $\lim_{t\to\infty} k_0 \cdot e^{(sA-\delta)t} \to \infty$.

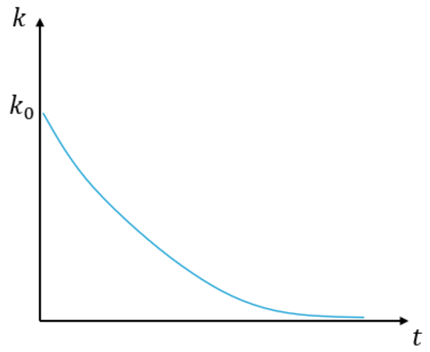
Notar que el nivel de estado estacionario depende de t, esto no es ninguna contradicción conceptual ya que en clases definimos que el estado estacionario se refiere a la situación donde las variables crecen a tasa constante. Haber llegado a que el nivel capital de estado estacionario es 0 por haber asumido que en estado estacionario $\dot{k} = 0$ está mal porque en este caso no se cumple que el capital de estado estacionario no crece. Notar también que la expresión anterior nos da la forma de la curva de la dinámica, que es una exponencial, función que captura una tasa de crecimiento constante.

Puntajes: 3 puntos por graficar o mencionar que la dinámica del capital es creciente. 3 puntos por notar que el capital tiende a infinto en el largo plazo. 2 puntos por llegar a la expresión del capital de estado estacionario.

c) Asuma que $sA < \delta$. ¿Cuál es el stock de capital de estado estacionario? ¿Cuál es la dinámica de k a lo largo del tiempo y a qué tiende el capital en el largo plazo? **HINT:** Recuerde que el estado estacionario es la situación en el cual las variables crecen a una tasa constante.

Respuesta

En este caso tenemos que $\frac{\dot{k}}{k} = sA - \delta < 0$, por lo que el capital decrece a tasa constante y el nivel de estado estacionario es $k^*(t) = k_0 \cdot e^{(sA-\delta)t}$. En el largo plazo el nivel de capital per cápita tenderá a 0, $\lim_{t\to\infty} k_0 \cdot e^{(sA-\delta)t} = 0$.

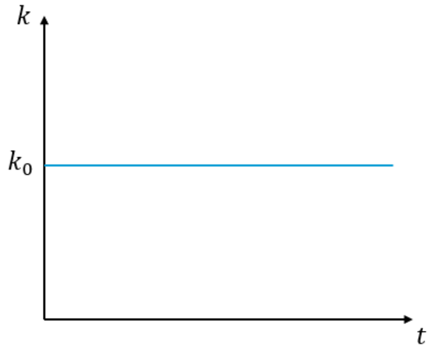


Puntajes: 3 puntos por graficar o mencionar que la dinámica del capital es decreciente. 3 puntos por notar que el capital tiende a cero en el largo plazo. 2 puntos por llegar a la expresión del capital de estado estacionario.

d) Asuma que $sA = \delta$. ¿Cuál es el stock de capital de estado estacionario? ¿Cuál es la dinámica de k a lo largo del tiempo y a qué tiende el capital en el largo plazo? **HINT:** Recuerde que el estado estacionario es la situación en el cual las variables crecen a una tasa constante.

Respuesta

En este caso tenemos que $\frac{\dot{k}}{k} = sA - \delta = 0$, por lo que el capital se queda constante y el nivel de estado estacionario es $k^*(t) = k_0 \cdot e^{(sA-\delta)t} = k_0$. En el largo plazo el nivel de capital per cápita tenderá se mantendrá en su nivel inicial k_0.



Puntajes: 3 puntos por graficar o mencionar que la dinámica del capital es constante. 3 puntos por notar que el capital se mantiene en k_0 en el largo plazo. 2 puntos por llegar a la expresión del capital de estado estacionario.

e) Después de considerar los resultados obtenidos en (2), (3) y (4), Harrod y Domar concluyeron que las economías capitalistas como la descrita previamente generan inherentemente estados estacionarios indeseados. ¿Está de acuerdo?

Respuesta

Los tres posibles resultados en esta economía son capital creciente hasta infinito, capital decreciente hasta 0 y capital estancado en el nivel incial. Así, bajo el esquema del modelo, todos los resultados son indeseados ya que si el capital se va a infinito puede ser un exceso subóptimo por razones climáticas, de capacidad ociosa, espacio, etc. Capital constante en el nivel inicial también es indeseado porque representa una economía estancada sin crecimiento y sin mejoras en los niveles de vida. Finalmente, capital decreciente hasta 0 es una economía en recesión que pierde todo el capital, por lo que también es indeseado y estaríamos de acuerdo con Harrod y Domar. Sin embargo, uno podría estar en desacuerdo con la afirmación cuestionando los supuestos del modelo.

Puntaje: Se asignó puntaje según la coherencia de cada argumentación considerando las líneas generales estipuladas en esta respuesta.

Pregunta 2: Interpretación de la Tecnología[2]

En esta pregunta vamos a analizar dos formas distintas de interpretar el progreso tecnológico. Una visión es que la productividad de los bienes de capital disponibles en t depende del estado de la tecnología en el periodo t y no se ve afectado por el progreso tecnológico subsecuente (esto es conocido como *embodied technological progress*). Ahora vamos a ver los efectos de esta visión:

a) Vamos a modificar el modelo de Solow para que el progreso tecnológico sea 'Capital augmenting' en vez de 'Labor augmenting'. Asumiremos que la función de producción es Cobb-Douglas tal que $Y(t) = [A(t)K(t)]^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$. Asumiremos que A crecer a una tasa g.

   Muestre que la economía converge a una senda estable de crecimiento y encuentre las tasas de crecimiento de K y de Y en esta senda. **HINT:** Muestre que podemos escribir $Y/(A^{\phi}L)$ como función de $K/(A^{\phi}L)$ con $\phi = \alpha/(1-\alpha)$, luego analice las dinámicas de $K/(A^{\phi}L)$. Además, asuma que la ley de movimiento de capital es la usual.

Respuesta

Partimos usando el HINT del enunciado y escribiendo Y y K de forma conveniente:

$$\frac{Y_t}{A_t^{\phi}L_t} = \frac{A_t^{\alpha}K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}}{A^{\alpha/1-\alpha}L_t} = (\frac{K_t}{A_t^{\phi}L_t})^{\alpha}$$

Llamamos a estas nuevas variables convenientes como y_t e k_t, por lo tanto:

$$y_t = k_t^{\alpha}$$

Luego, para calcular la tasa de crecimiento aplicamos logaritmo y luego derivamos en función del tiempo:

$$log(y_t) = \alpha log(k_t) \backslash \frac{\partial}{\partial t} \implies \frac{\dot{y_t}}{y_t} = \alpha\frac{\dot{k_t}}{k_t}$$

Por lo tanto, para obtener la tasa de crecimiento de y_t debemos calcular la de k_t. Para eso, aplicamos el truco de la derivada de una división y reemplazamos $\dot{L_t}/L_t = n$, $\dot{A_t}/A_t = g$:

$$\dot{k_t} = \frac{\dot{K_t}}{A_t^p hiL_t} = \frac{\dot{K_t}(A_t^{\phi}L_t) - (\dot{A_t^{\phi}L_t})K_t}{(A_t^{\phi}L_t)^2} \implies \frac{\dot{K_t}}{A_t^{\phi}L_t} - \phi g k_t - nk_t$$

Luego, sabemos que $\dot{K_t} = sY_t - \delta K_t$, por lo que lo reemplazamos en nuestro resultado anterior:

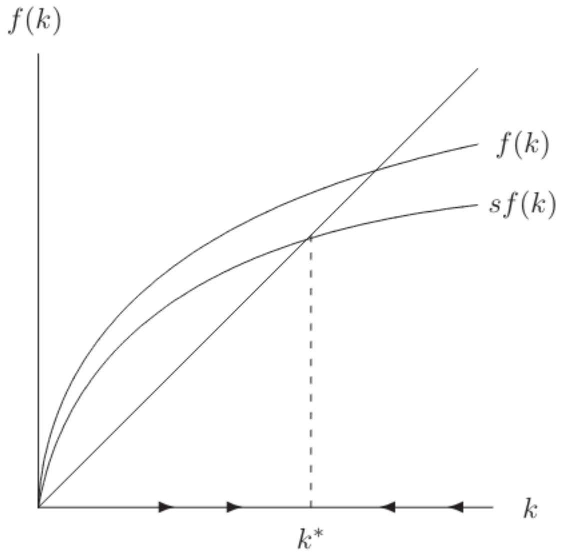
$$\dot{k_t} = \frac{sY_t - \delta K_t}{A_t^{\phi}L_t} - \phi g k_t - nk_t \implies \dot{k_t} = sk_t^{\alpha} - k_t(\delta + \phi g + n)$$

Luego, podemos calcular el Estado Estacionario de nuestra economía para conocer a que convergerá :

[2] Dudas de este ejercicio a: mnegrete@fen.uchile.cl

$$sk_{EE}^{\alpha-1} = \delta + \phi g + n \Longrightarrow k_{EE} = (\tfrac{\delta+\phi g+n}{s})^{1/\alpha-1} \Longrightarrow y_{EE} = (\tfrac{\delta+\phi g+n}{s})^{\alpha/\alpha-1}$$

Como existe estado estacionario, esto implica que existirá una senda estable de crecimiento. En particular, sabemos que con nuestras variables 'transformadas' y_t e k_t podemos representar el modelo de Solow clásico gráficamente:



Finalmente, si queremos rescatar las tasas de crecimiento de nuestras variables originales (Y_t, K_t) podemos usar un poco de álgebra:

$$k_t = \frac{K_t}{A_t^{\phi} L_t}$$

Luego, en estado estacionario se cumple que:

$$k_{EE} = \frac{K_t}{A_t^{\phi} L_t} \Longrightarrow K_t = k_{EE} A_t^{\phi} L_t$$

Aplicamos log y derivamos en función del tiempo:

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \phi \frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{\dot{L}_t}{L_t} = \phi g + n$$

Haciendo lo mismo de forma análoga para Y_t:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \phi g + n$$

Luego, podemos ver que Y_t y K_t van a crecer a la misma tasa, por lo tanto, existirá una senda estable de crecimiento (esta es otra forma de justificarlo).

b) Ahora asumamos que la función de producción será de la forma $Y(t) = J(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$, donde $J(t)$ será el stock de capital. La dinámica del capital será $\dot{J}(t) = sA(t)Y(t) - \delta J(t)$. La presencia de $A(t)$ en esta expresión significa que la productividad de la inversión en el periodo t depende de la tecnología en el periodo t.

Muestre que la economía converge a una senda estable de crecimiento y encuentre las tasas de crecimiento de J y de Y. **HINT:** Defina $\bar{J(t)} = J(t)/A(t)$ y haga lo mismo que en (a), pero con $\bar{J(t)}/(A^{\phi}L)$ en vez de $K/(A^{\phi}L)$.

Respuesta

En esta pregunta volvemos a repetir el primer paso que hicimos en la pregunta anterior:

$$\frac{Y_t}{A_t^{\phi}L_t} = \frac{J_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}}{A_t^{\alpha/1-\alpha}} = (\frac{J_t}{A_t^{1/1-\alpha}L_t})^{\alpha}$$

Luego usamos un uno conveniente (A_t/A_t) dentro del paréntisis para hacer aparecer el término que nos dan en el HINT $(\bar{J}_t = J_t/A_t)$

$$\frac{Y_t}{A_t^{\phi}L_t} = (\frac{J_t}{A_t}\frac{A_t}{A_t^{1/1-\alpha}L_t})^{\alpha} = (\frac{\bar{J}_t}{A_t^{\phi}L_t})^{\alpha}$$

Luego, llamando de nuevo a nuestras 'variables modificadas' como y_t e $\bar{j}_t$ notamos que:

$$y_t = \bar{j_t}^{\alpha}$$

Obtienendo un resultado análogo al encontrado en la parte a). Por lo tanto repetimos el mismo truco que antes para obtener la tasa de crecimiento que se expresará como:

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \alpha\frac{\dot{\bar{j}}_t}{\bar{j}_t}$$

Ahora calculamos $\dot{\bar{j}}_t$:

$$\dot{\bar{j}}_t = \frac{\dot{\bar{J}}_t}{A_t^{\phi}L_t} - \frac{\bar{J}_t(\dot{\overline{A_t^{\phi}L_t}})}{(A_t^{\phi}L_t)^2} = \frac{\dot{\bar{J}}_t}{A_t^{\phi}L_t} - \bar{j}_t(\phi g + n)$$

Luego, sabemos que $\dot{J}_t = sA_tY_t - \delta J_t$, pero nosotros queremos calcular $\dot{\bar{J}}_t$, asi que tenemos que volver a aplicar el mismo truco:

$$\dot{\bar{J}}_t = \frac{\dot{J}_t}{A_t} = \frac{\dot{J}_t}{A_t} - g\bar{J}_t \Longrightarrow \dot{\bar{J}}_t = \frac{sA_tY_t - \delta J_t}{A_t} - g\bar{J}_t = sY_t - \bar{J}_t(\delta + g)$$

Ahora reemplazamos este resultado en la expresión que obtuvimos previamente para $\dot{\bar{j}}_t$:

$$\dot{\bar{j}}_t = \frac{sY_t - \bar{J}_t(\delta+g)}{A_t^{\phi}L_t} - \bar{j}_t(\phi g + n) \Longrightarrow \dot{\bar{j}}_t = sy_t - \bar{j}_t(\delta + n + g(1+\phi))$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento de $\bar{j}_t$ será:

$$\frac{\dot{\bar{j}}_t}{\bar{j}_t} = s\bar{j_t}^{\alpha-1} - (\delta + n + g(1+\phi))$$

Con este expresión tenemos la tasa de crecimiento de y_t y de $\bar{j}_t$. Luego, podemos calcular el estado estacionario:

$$\bar{j_{EE}} = (\frac{\delta+n+g(1+\phi)}{s})^{1/\alpha-1} \Longrightarrow y_{EE} = \bar{j_{EE}}^{\alpha}$$

Luego podemos recuperar las tasas de crecimiento de $\bar{J}_t$ e Y_t utilizando el mismo truco que el ítem anterior:

$$\bar{j_{EE}} = \frac{\bar{J}_t}{A_t^{\phi}L_t} \Longrightarrow j_{EE}A_t^{\phi}L_t = \bar{J}_t \Longrightarrow \frac{\dot{\bar{J}}_t}{\bar{J}_t} = \phi g + n$$

Análogo para Y_t:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \phi g + n$$

Como nuevamente tienen la misma tasa de crecimiento, existirá una senda estable de crecimiento.

c) Encuentre la elasticidad del producto en la senda de crecimiento estable con respecto a s.

Respuesta

Sabemos que la elasticidad del producto respecto a la tasa de ahorro será:

$$\eta = \frac{\partial y}{\partial s}\frac{s}{y}$$

Y además, sabemos que en estado estacionario el producto será:

$$y_{EE} = (\frac{\delta+n+g(1+\phi)}{s})^{\alpha/\alpha-1} = (\frac{s}{\delta+n+g(1+\phi)})^{\alpha/1-\alpha}$$

Luego calculamos η usando este valor de estado estacionario:

$$\eta = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} \cdot s \cdot (\frac{1}{\delta+n+g(1+\phi)})^{\alpha/1-\alpha} \cdot (\frac{1}{\delta+n+g(1+\phi)})^{-\alpha/1-\alpha} \cdot s^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \Longrightarrow \eta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

d) En la senda estable ¿a qué velocidad converge la economía?

Respuesta

De forma genérica en el modelo de Solow Clásico sabemos que la velocidad de convergencia será:

$$\beta = -\frac{\partial \dot{k_t}/k_t}{\partial log(k_t)}$$

En nuestro caso particular, debemos calcular:

$$\beta = -\frac{\partial \dot{\bar{j}_t}/j_t}{\partial log(\bar{j}_t)}$$

Para eso, debemos reescribir nuestra expresión de $\frac{\dot{\bar{j}_t}}{\bar{j}_t}$ para hacer aparecer $log(\bar{j}_t)$. Por simplicidad llamaremos a $(\delta + n + g(1+\phi)) = C$ donde C es una constante.

$$\frac{\dot{\bar{j}_t}}{\bar{j}_t} = s \cdot exp(log(\bar{j_t}^{\alpha-1})) - C \Longrightarrow \frac{\dot{\bar{j}_t}}{\bar{j}_t} = s \cdot exp((\alpha-1)log(\bar{j}_t)) - C$$

Con esta expresión ya podemos calcular la derivada para conocer la velocidad de convergencia:

$$-\frac{\partial \dot{\bar{j}_t}/j_t}{\partial log(\bar{j}_t)} = -s(\alpha-1)exp((\alpha-1)log(\bar{j}_t)) = s(1-\alpha)\bar{j_t}^{\alpha-1}$$

Ahora, vamos a ver otra visión de la tecnología. Asumiremos que la tasa de crecimiento tecnológico exógeno es constante, es decir $A(t) = A$.

e) Muestre que un estado estacionario puede coexistir con el progreso tecnológico si y solo sí este progreso adopta una forma 'labour augmenting'. ¿Cuál es la intuición para este resultado?

Respuesta

Un estado estacionario es cuando las variables del modelo estan creciendo a una tasa constante (esta tasa puede ser 0 o puede ser cualquier otra constante).

Para hacer esta demostración partiremos asumiendo que tenemos una función genérica (cumple los supuestos neoclásicos) que es labour augmenting y capital augmenting:

$$Y_t = F(K_t B_t, L_t A_t)$$

Asumiremos que $A_t = e^{xt}$ y $B_t = e^{zt}$, notemos que esto es lo mismo que decir que $\frac{\dot{A}_t}{A_t} = x$ y que $\frac{\dot{B}_t}{B_t} = z$, con $z, x > 0$

Con estas definiciones podemos reescribir nuestra función de utilidad genérica:

$$Y_t = F(K_t \cdot e^{zt}, L_t \cdot e^{xt})$$

Ahora haremos un poco de álgebra y expresaremos la función de producción en términos 'per-capital':

$$\frac{Y_t}{K_t} = F(e^{zt}, \frac{L_t}{K_t} e^{xt}) = e^{zt} F(1, \frac{L_t}{K_t} e^{(x-z)t}) = e^{zt} f(\frac{L_t}{K_t} e^{(x-z)t})$$

Ahora, asumiremos que $\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n \implies e^{nt} = L_t$ y que el capital crece a una tasa constante γ_K, es decir $\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \gamma_K \implies e^{\gamma_K t} = K_t$. Reemplazando estas igualdades en la función de producción:

$$\frac{Y_t}{K_t} = e^{zt} f(e^{(x+n-z-\gamma_K)t})$$

Luego, como dijimos en un inicio, para que haya senda estable las variables deben crecer a una tasa constante, en particular, sabemos que :

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = s\frac{Y_t}{K_t} - \delta = \gamma_K$$

Por lo tanto, para que γ_K sea constante $\frac{Y_t}{K_t}$ debe ser constante.

Para que esto ocurra necesitamos que $= e^{zt} f(e^{(x+n-z-\gamma_K)t})$ sea constante. Hay dos formas de que eso ocurra:

- **Forma 1:** z=0 y $\gamma_K = x + n$ Si esto ocurre se cumple que:

  $$\frac{Y_t}{K_t} = e^{0t} f(e^{0t}) = f(1)$$

  Por lo tanto, $\frac{Y_t}{K_t}$ será constante y se cumplirá que hay senda estable.

  Este caso particular, es justamente cuando la función es labour augmenting pero no es capital augmenting (z=0).
- **Forma 2:** $z \neq 0$ y $e^{zt} = \frac{1}{e^{(x+n-z-\gamma_K)t}}$
  Este es particularmente el caso de la pregunta f, por lo tanto lo resolveremos en ese apartado.

*Comentarios: en el enunciado se pedía cuando la tecnología no crecía es decir, cuando z=0 y x=0, la pauta esta con la resolución general, pero cuando se cumplen estos supuestos la matemática se simplifica bastante y solo bastaba con ponerse en el caso 1.

f) Asuma que la función de producción es $Y = F[B(t)K, A(t)L]$, donde $B(t) = e^{zt}$ y $A(t) = e^{xt}$, con $z > 0$ y $x \geq 0$. Muestre que si $z > 0$ y el estado estacionario existe, la función de producción toma la forma de una Cobb-Douglas.

Respuesta

Continuando con el ítem anterior, sabemos que si $\frac{Y_t}{K_t}$ debe ser constante en el tiempo, entonces se debe cumplir que su derivada en función del tiempo sea igual a 0. Es decir:

$$\frac{\partial Y_t/K_t}{\partial t} = 0 = \frac{\partial e^{zt} f(e^{(x+n-z-\gamma_K)t})}{\partial t} = z \cdot e^{zt} \cdot f(e^{(x+n-z-\gamma_K)t}) + e^{zt} \cdot f'(e^{(x+n-z-\gamma_K)t}) \cdot e^{(x+n-z-\gamma_K)t} \cdot (x+n-z-\gamma_K)$$
$$\Longrightarrow z \cdot f(e^{(x+n-z-\gamma_K)t}) + \cdot f'(e^{(x+n-z-\gamma_K)t}) \cdot e^{(x+n-z-\gamma_K)t} \cdot (x+n-z-\gamma_K) = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{-z}{x+n-z-\gamma_K} = \frac{f'(e^{(x+n-z-\gamma_K)t}) \cdot e^{(x+n-z-\gamma_K)t}}{f(e^{(x+n-z-\gamma_K)t})}$$

Vamos a llamar nuevamente $C = \frac{-z}{x+n-z-\gamma_K}$ y definamos $X = e^{(x+n-z-\gamma_K)t}$):

$$\Longrightarrow \frac{C}{X} = \frac{f'(X)}{f(X)}$$

Luego, podemos integrar en función de x la ecuación anterior:

$$C \int \frac{1}{X} dX = \int \frac{f'(X)}{f(X)} dX \Longrightarrow C(ln(X) + cte) = ln(f(X)) + cte$$

Aplicamos euler para eliminar los logaritmos:

$$e^{Cln(X)} e^{cte} = f(X) e^{cte} \Longrightarrow X^C \cdot cte = f(X)$$

Es decir, logramos concluir que si se cumple esa forma de función de producción vamos a tener una senda estable de crecimiento. Notemos que esa forma será exactamente la de una Cobb-Douglas:

$$\frac{Y_t}{K_t} = e^{zt} f(e^{(x+n-z-\gamma_K)t})) = e^{zt} f(\frac{L_t}{K_t} e^{(x-z)t}) = e^{zt} f(\frac{L_t \cdot A_t}{K_t \cdot B_t}) = B_t (\frac{L_t \cdot A_t}{K_t \cdot B_t})^C \cdot cte$$
$$\Longrightarrow Y_t = K_t \cdot B_t \cdot (\frac{L_t \cdot A_t}{K_t \cdot B_t})^C \cdot cte = (K_t B_t)^{1-C} (L_t A_t)^C \cdot cte$$

Es decir, la función de producción debe ser Cobb-Douglas.