Profesor	: Eduardo Engel	14 de junio, 2015
Ayudantes	: Marco Rojas y Damián Vergara	
Curso	: Macroeconomía I	
Semestre	: Otoño 2015	
Guía	: II - No. 2	
Entrega	: Viernes 19 de junio, 9.40am	

1. **Largo esperado de los ciclos de inversión y σ**

   X_t sigue un MB(μ,σ^2), con $\mu > 0$ y $X_0 \equiv 0$. T_b el tiempo transcurrido hasta la primera vez que el proceso llega a b, $b > 0$. En este problema usted probará que

   $$\mathrm{E}[T_b] = \frac{b}{\mu}, \tag{1}$$

   concluyendo que el tiempo promedio que toma llegar a b *no depende* de la desviación standard σ.

   (a) Antes de demostrar nada, dé una intuición de por qué puede ser que $\mathrm{E}[T_b]$ no depende de σ. Para ello indique dos efectos opuestos sobre $\mathrm{E}[T_b]$ asociados a un incremento de σ.

   (b) Denote $\eta(b) \equiv \mathrm{E}[T_b]$. Utilizando la discretización de un MB (con parámetros Δ, h y p) exprese $\mathrm{E}[T_{b+h}|T_b = \tau]$ como función de τ, p, Δ, h y $\mathrm{E}[T_{2\Delta}]$. Use esta expresión para concluir que para todo $b \geq 0$:

   $$\eta(b+h) = p[\eta(b) + \Delta] + (1-p)[\eta(b) + \Delta + \eta(2h)],$$

   de donde

   $$\eta(b+h) = \eta(b) + \Delta + (1-p)\eta(2h). \tag{2}$$

   (c) Usando (2) con $b = 0$ y $b = h$, determine expresiones para $\eta(h)$ y $\eta(2h)$. Sustituyendo la expresión obtenida para $\eta(2h)$ en (2) concluya que:

   $$\mathrm{E}[T_b] = \frac{b}{2p-1}\frac{\Delta}{h}.$$

   Finalmente, sustituya las expresiones para p en función de μ, Δ y h (y de ser necesario tome límite cuando Δ tiende a cero) para obtener (1).

   (d) Denotemos mediante $T_{a,b}$ la primera vez que el proceso llega ya sea a a o b, con $a < 0 < b$. Use la intuición de (a) y la ecuación (2) para determinar, sin cálculo alguno, si $\mathrm{E}[T_{a,b}]$ es creciente o decreciente en σ.

2. **Inversión óptima y costos fijos de ajuste: el caso simétrico.**

   Considere una firma que enfrenta un costo fijo, F para ajustar su nivel de capital, k_t[1]. Por su parte el nivel de capital óptimo de la firma, k_t^* sigue un movimiento browniano sin tendencia y con desviación estándar instantánea $\sqrt{2}\sigma$. Definimos el nivel deseado de inversión como:

   $$x_t = k_t^* - k_t \tag{3}$$

[1] Este costo fijo representa un costo de ajuste no convexo.

Suponemos adicionalmente que la firma tiene una función de pérdida instantánea cuadrática en el nivel deseado de inversión — como en el caso del modelo de ajuste cuadr'atico visto en clase. Luego, es posible escribir el problema de optimización que enfrenta la firma como,

$$\min_{\{\tau_i\}} \mathrm{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}dt + F\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\rho\tau_i}\right] \tag{4}$$

(a) Plantee la ecuación de HJB de este problema y muestre que viene dada por

$$\rho V(x) = x^2 + \sigma^2 V''(x) \tag{5}$$

donde $V(x)$ denota el valor presento neto de pérdidas asociados a un nivel deseado corriente de inversión x. Esta ecuación diferencial tiene una solución general dada por:

$$V(x) = a + bx^2 + Ae^{\alpha} + Be^{\beta} \tag{6}$$

Como vimos en clases, la política óptima en presencia de costos no convexos es una política caracterizada por dos gatillos ("triggers") y un objetivo ("target"). Los triggers se denotan por L y U y el target por C. Luego, las condiciones de optimalidad conocidas como *value matching* y *smooth pasting* establecen que:

$$V(C) + F = V(L) \tag{7}$$
$$V(C) + F = V(U) \tag{8}$$
$$V'(C) = V'(L) = V'(U) = 0. \tag{9}$$

(b) Encuentre expresiones para a, b, α y β, de modo que (6) sea soluci'on de (5).

(c) Pruebe que $A = B$.

(d) Pruebe que $L = -U$. ¿Cu'al es la intuición para este resultado? ¿De qu'e supuestos del problema depende?

3. **q marginal y costos no convexos de ajuste**

Nota: *Varios cálculos en este problema son considerablemente más simples si piensa cuidadosamente en qué le están pidiendo antes de responder y no procede mecánicamente*[2]

Al ingresar a su último período de operación, una firma tiene un contrato de arriendo para una unidad de capital ($K_0 = 1$) pagando un arriendo de \$1 (por período). Si la firma decide modificar su stock de capital, debe pagar un costo fijo f, con $0 < f < 1$. Luego de pagar este costo puede arrendar el número de unidades de capital que desee pagando un arriendo de \$1 por unidad. Se tiene entonces que las utilidades de la firma en este problema de un período, como función del stock de capital que elige para ese período, K_1, son

$$\Pi(K_1, \theta) = 2\theta\sqrt{K_1} - K_1 - f[K_1 \neq K_0],$$

[2]Por supuesto, esto vale en general, pero más aán en este problema.

donde $[K_1 \neq K_0]$ es igual a 1 si $K_1 \neq K_0$ e igual a cero en caso contrario, y θ denota un shock de rentabilidad que toma valores entre 0 y 2. La firma conoce el valor de θ antes de decidir respecto de su inversión. También note que estamos asumiendo, implícitamente, que los mercados de capitales son perfectos.

(a) Muestre que la política de inversión de la firma, como función de θ, $I(\theta)$, satisface:

$$I(\theta) = \begin{cases} \theta^2 - 1, & \text{si } \theta \in A, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde el conjunto A depende de f. Determine explícitamente el conjunto A. Grafique $I(\theta)$.

(b) Determine la función de valor ('value function') de la firma, $V(K_0 = 1, \theta)$, es decir, las utilidades netas de la firma dado K_0 y un shock θ, antes de tomar la decisión de inversión. Note que en el contexto de un problema de un período, esta función también corresponde al flujo de caja.

(c) Calcule q marginal como función de θ (es decir, calcule la derivada parcial de $V(K_0, \theta)$ respecto de K_0, evaluada en $K_0 = 1$). No debiera sorprenderse si encuentra que q-marginal toma valores "cercanos" a cero (en lugar de uno); esto se debe a que el capital se arrienda por un período (en lugar de comprarse).

(d) Grafique la curva de inversión de la firma, su q marginal y su flujo de caja, todos como función de θ, que toma valores entre 0 y 2. Muestre que la curva de inversión de la firma y su flujo de caja crecen con el parámetro de rentabilidad θ, mientras que q marginal no es monotóno en θ.

(e) Discuta la relevancia de lo que obtuvo en (d) tanto para la teoría q de inversión como para teorías que enfatizan las imperfecciones de los mercados financieros.

A continuación asuma que existe un continuo de firmas como la descrita anteriormente, todas las cuales ingresan a su último período con un stock de capital $K_0 = 1$ y enfrentan un shock común θ, pero difieren en su costo de ajuste f el cual tiene una distribución uniforme en $[0, 1]$. Como antes, θ toma valores entre 0 y 2.

(f) Muestre que la inversión agregada como función de θ satisface:

$$I_A(\theta) = (\theta + 1)(\theta - 1)^3.$$

Indicación: Si $I(\theta; f)$ denota inversión de una firma con costo de ajuste f cuando el shock es θ, entonces la inversión agregada, como función de θ, satisface:

$$I_A(\theta) = \int_0^1 I(\theta; f) df.$$

(g) De manera similar a lo indicado en (f) se puede mostrar (no necesita hacerlo) que el q marginal agregado, denotado por q_A, como función de θ, satisface:

$$q_A(\theta) = (1 - \theta)\theta(\theta - 2).$$

Haga un gráfico cualitativo en el espacio (I, q) del lugar geométrico de $(I_A(\theta), q_A(\theta))$ a medida que θ varía entre 0 y 2.[3] ¿Tiene sentido estimar la inversión agregada como función de q_A? ¿Es cierto que q_A determina (es decir, es "suficiente") para I_A? ¿Qué sucedió con la teoría q de inversión?

[3] $\theta = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ pueden ser una buena elección de valores de θ donde evaluar el lugar geométrico. Todo lo que necesita es saber si I y q toma un valor mayor, igual o menor que cero.