ENECO 630 – Macroeconomía I
Cátedra I2

Inversión
Teoría q

Eduardo Engel

Magíster en Economía, FEN, U. de Chile.

Abril 28, 2022.

Sinopsis

Primera teoría de inversión propiamente tal:

- Determina conjuntamente la producción e inversión óptmas, incluyendo el impacto dinámico de inversión sobre producción.

Rol clave de q:

- El cuociente del valor marginal de una unidad de capital adicional (VPD de beneficios futuros) y su costo de reemplazo.

I/K queda determinado por q (además es creciente en q):

- q es un **estadístico suficiente** para medir los beneficios futuros descontados de invertir hoy.

Para llevar la teoría q a los datos:

- El q (q marginal) no se observa.
- El $\overline{q}$ promedio (Brainard y Tobin, 1968) –el valor de mercado de la firma dividido por el costo de reemplazar su capital– sí se observa
- Bajo cierta condiciones (Hayashi, 1982), $q = \overline{q}$ y se puede usar valores observados de $\overline{q}$ para testear y estimar parámetros de la teoría q.

La teoría q incorpora costos de ajustar el capital

- Valor de una unidad de capital instalada puede ser distinto del valor de la misma unidad al comprarla

Denotamos por V_t el valor de la firma en t (valor presente descontado de beneficios).

Definimos el q marginal como

$$q_t = \frac{\mathrm{d}V_t / \mathrm{d}K_t}{p_{K,t}}.$$

q_t: cambio en el valor de la firma por peso que se gasta en capital.

Si $q_t > 1$: incentivos para aumentar el capital.

Si $q_t < 1$: incentivos para disminuir el capital.

Modelo

Costos internos de ajustar el capital, no para otros insumos.

Costos internos: reorganización del espacio, trabajadores que no pueden trabajar mientras se instala los nuevos equipos, tiempo y esfuerzo para aprender a usar nuevos equipos.

Costos convexos de instalar (y desinstalar) capital, es decir, de ajustar capital.

Mercados de insumos competitivos: firma toma precios como dados.

No hay restricciones de crédito.

Función de producción con retornos constantes:

$$Y_t = F(K_t, L_t, z_t),$$

donde z_t denota shocks de productividad.

Demanda isoelástica:

$$Y_t = P_t^{-1/\eta}$$

de modo que la elasticidad

$$\eta_{Y,P} = 1/\eta.$$

Caso particular $\eta = 0$ corresponde a competencia perfecta.

Función de beneficio y retornos decrecientes

Función de beneficio igual a aquella de la Teoría Neoclásica:

$$\pi(K_t, x_t) = \text{máx}_{L_t}\, p_{Y,t} F(K_t, L_t, z_t) - w_t L_t \tag{1}$$

con $x_t = (p_{Y,t}, w_t, z_t)$.

Por simplicidad, en lo que sigue $z = 1$ y $F(K, L, z) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$.

Comenzamos por determinar L^* como función de K (omitimos los t).

Dado K y x, resolvemos

$$\text{máx}_L [K^{\alpha} L^{1-\alpha}]^{1-\eta} - wL.$$

De la CPO c.r. a L se obtiene:

$$L^* = C_0(x) K^{\alpha(1-\eta)/[\eta+\alpha(1-\eta)]}.$$

Sustituyendo esta expresión en (1):

$$\begin{aligned}\pi(K,x) &= C_1(x)K^{\alpha(1-\eta)}[L^*]^{(1-\alpha)(1-\eta)} - wL^* \\ &= C_2(x)K^{\alpha(1-\eta)}[K^{\alpha(1-\eta)/[\eta+\alpha(1-\eta)]}]^{(1-\alpha)(1-\eta)} - wC_0(x)K^{\alpha(1-\eta)/[\eta+\alpha(1-\eta)]|}.\end{aligned}$$

Notando que el exponente de K en la primera expresión se simplifica a $\alpha(1-\eta)/[\eta+\alpha(1-\eta)]$, concluimos que

$$\pi(K_t,x_t) = C(x_t)K_t^{\alpha(1-\eta)/[\eta+\alpha(1-\eta)]}$$

donde $C(x_t)$ es una constante.

Luego, bajo competencia perfecta ($\eta = 0$) el exponente de K_t es igual a uno y los beneficios son lineales en K_t:

$$\pi(K_t,x_t) = C(x_t)K_t.$$

En cambio, si la firma tiene poder de mercado el exponente es menor que uno y π tiene retornos decrecientes.

En resumen:

- Competencia perfecta: $\pi_{K,K} = 0$.
- Poder de mercado: $\pi_{K,K} < 0$.

Intuición:

- competencia perfecta: si K se duplica entonces π se duplica
- poder de mercado: si K se duplica, debo cobrar menos para vender más, luego π crece a menos del doble.

Bajo competencia perfecta, K_t no está determinado.

COSTOS DE AJUSTE CONVEXOS

Cuando la firma invierte I paga un costo $p_K I$ más un costo de ajuste $C(I,K)$ en unidades de capital, de modo que el costo de instalar/desinstalar capital es $p_K C(I,K)$.

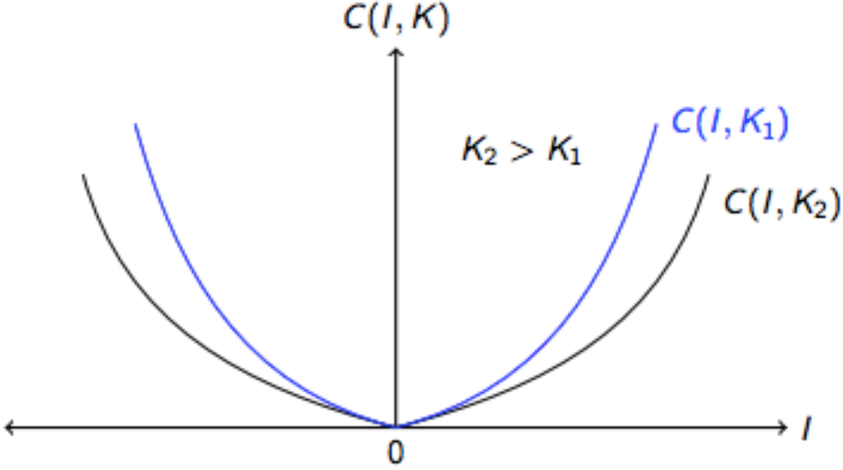
La función de costo de ajuste satisface:

$$\begin{aligned}
C(0,K) &= 0, \\
C(I,K) &> 0, \text{para } I \neq 0, \\
C_I(0,K) &= 0, \\
C_K(I,K) &< 0, \text{para todo } I, \\
C_{II}(I,K) &> 0, \text{para } I \neq 0.
\end{aligned}$$

La función más simple que cumple las condiciones anteriores es la de costos **cuadráticos** de ajuste:

$$C(I,K) = \frac{1}{2} b \frac{I^2}{K},$$

donde el parámetro b captura la magnitud de los costos de ajuste.


$C(I, K)$
$C(I, K_1)$
$K_2 > K_1$
$C(I, K_2)$
0
I

Función objetivo

Valor presente descontado de flujos de caja futuros:

$$
\begin{aligned}
V(K_0) \quad &= \quad \max_{\{I_t, t\geq 0\}} \int_0^{\infty} [\pi(K_t, x_t) - p_{K,t} I_t - p_{K,t} C(I_t, K_t)] e^{-rt} \, \mathrm{d}t \\
\text{s.a.} \quad & \quad \{x_t, t \geq 0\} \text{ y } K_0 \text{ dados} \\
& \quad \dot{K}_t = I_t - \delta K_t.
\end{aligned}
$$

Comentarios:

- $-p_{K,t} I_t > 0$ cuando $I_t < 0$, ingresos de vender capital
- Tasa de interés r está fija y es libre de riesgo, no depende del signo de I o de K, no hay restricciones de liquidez.

Solución

Problema estándar de Control Optimo:

- Control: I_t. Estado K_t. Co-estado: λ_t.

Se puede trabajar con el Hamiltoniano corriente

$$H(K_t, I_t) = \pi(K_t, x_t) - p_{K,t}[I_t + C(I_t, K_t)] + \lambda_t(I_t - \delta K_t)$$

o con el Hamiltoniano en valor presente $\mathscr{H}(K_t, I_t) = e^{-rt} H(K_t, I_t)$ y variable de co-estado $\mu_t = \lambda_t e^{-rt}$.

Trabajamos con el Hamiltoniano corriente.

Analizamos a continuación las tres condiciones necesarias para un máximo.

1. Maximizando H respecto de los controles

$$H_I = 0.$$

Esto implica:

$$\boxed{1 + C_I(I_t, K_t) = \frac{\lambda_t}{p_{K,t}} \equiv q_t.} \tag{2}$$

Define I_t implícitamente en función de q_t.

Como C es convexa en I, tenemos $C_{II} > 0$ y se satisface la condición de segundo orden, por lo cual (Teorema de la Función Implícita) podemos obtener $I_t = \phi(q_t, K_t)$ con $\phi_q = 1/C_{II} > 0$.

Notar que $I = 0$ si y solo si

$$q_t = 1 + C_I(0, K_t) = 1.$$

2. Ecuaciones de Euler para los Co-estados

$$-H_K = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t.$$

de donde

$$-\pi_K(K_t, x_t) + p_{K,t}C_K(I_t, K_t) + \lambda_t\delta = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t$$

Reordenando términos:

$$\boxed{(r+\delta)\lambda_t = \dot{\lambda}_t + \pi_K(K_t, x_t) - p_{K,t}C_K(I_t, K_t).} \tag{3}$$

Recuperamos el resultado del Modelo Neoclásico de Jorgenson considerando el caso particular en que $C(I,K)=0$ en cuyo caso (2) implica que $q_t = 1$ y $\lambda_t = p_{K,t}$, de modo que la condición de optimalidad que obtuvimos la clase anterior es un caso particular de (3).

Notar que (3) se puede interpretar como condición de arbitraje, al igual que lo que hicimos para el caso particular visto la clase anterior. Ahora se trata de comprar (y luego vender) una unidad de capital **instalado** en la firma.

3. Condiciones de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t e^{-rt} K_t = 0.$$

Derivación alternativa*

La mayoría de los textos trabajan con el Hamiltoniano en valor presente, $\mathscr{H}(K_t, I_t) = e^{-rt} H(K_t, I_t)$, con precio sombra también en valor presente, $\mu_t = \lambda_t e^{-rt}$, de modo que

$$\mathscr{H}(K_t, I_t) = \left\{\pi(K_t, x_t) - p_{K,t}[I_t + C(I_t, K_t)]\right\} + \mu_t(I_t - \delta K_t).$$

Entonces la Condición 1 equivale a

$$\mathscr{H}_I = 0.$$

Y la Condición 2 equivale a

$$-\mathscr{H}_K = \dot{\mu}_t.$$

Finalmente, la Condición 3 equivale a

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t K_t = 0.$$

Obviamente, tanto el hamiltoniano corriente como el hamiltoniano en valor presente llevan a (2) y (3).

Resolviendo para q

Multiplicando los dos lados de (3) por $e^{-(r+\delta)(s-t)}$ e integrando por partes entre $s=t$ a $s=\infty$ se obtiene

$$p_{K,t}q_t = \lambda_t = \int_t^{\infty} e^{-(r+\delta)(s-t)} \{\pi_K(K_s,x_s) + p_{K,s}[-C_K(I_s,K_s)]\big)\,\mathrm{d}s + \lim_{T\to\infty} \lambda_T e^{-(r+\delta)T}.$$

Más adelante veremos que, aplicando la condición de transversalidad, la trayectoria óptima de λ_t ya sea es constante (competencia perfecta) o converge a un valor de estado estacionario (poder de mercado), de modo que el límite del último término del lado derecho es cero, lo cual suponemos a continuacion.

La expresión anterior confirma la intuición tras la definición de q:

- Si $\delta=0$, es igual a lo que se obtiene aplicando el Teorema de la Envolvente con la definición de valor de la firma de la lámina 16, mostrando que $\lambda_t = \mathrm{d}V_t/\mathrm{d}K_t$.
- Si $\delta>0$, la interpretación es similar pero se requiere calcular $\mathrm{d}V_t/\mathrm{d}K_t$ incorporando la depreciación al descontar flujos futuros para obtener $\lambda_t = \mathrm{d}V_t/\mathrm{d}K_t$.

Costos cuadráticos

Consideramos la siguiente familia de funciones que cumple con las condiciones de la lámina 14:

$$C(I,K) = \frac{1}{2} b \frac{I^2}{K}.$$

Este caso es útil cuando estudiemos la dinámica del modelo y para trabajo empírico. Se puede justificar como una aproximación obtenida de un desarrollo de Taylor de $C(I,K)$ de segundo orden en I, en torno a $I=0$.

Con costos de ajuste cuadráticos, las condiciones 1 y 2 llevan a:

$$\begin{aligned} \frac{I}{K} &= \frac{q-1}{b}, \\ \dot{q} &= (r+\delta)q - \frac{\pi_K(K)}{p_K} - \frac{1}{2} b \left(\frac{I}{K}\right)^2 = (r+\delta)q - \frac{\pi_K(K)}{p_K} - \frac{(q-1)^2}{2b}. \end{aligned}$$

Donde usamos que $\lambda_t = q_t p_{K,t}$ y, en la segunda expresión, reemplazamos I/K por lo obtenido en la primera expresión.

Sinopsis

Modelo

Estado estacionario y dinámica

Aplicaciones

Evidencia

Dinámica

Supuestos para simplificar el análisis:

$$p_{K,t} \equiv 1, \qquad \delta = 0, \qquad C(I,K) = \frac{1}{2} b \frac{I^2}{K}, \qquad x_t \equiv x. \tag{4}$$

Entonces $\dot{p}_{K,t} = 0$, $I_t = \dot{K}_t$, $\lambda = q$ y π_K solo depende de K_t, de modo que (2) y (3) equivalen a

$$\dot{K} = \frac{q-1}{b} K, \tag{5}$$

$$\dot{q} = rq - \pi_K(K_t) - \frac{(q-1)^2}{2b}. \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) y (6) definen la dinámica del modelo.

El estado estacionario, que estudiamos a continuación, se define mediante

$$\dot{K}_t = 0, \qquad \dot{q}_t = 0. \tag{7}$$

Estado estacionario: competencia perfecta

En este caso, por lo visto en la lámina 13, tenemos que $\pi_K = \text{cte}$ de modo que (5)–(6) junto a (7) llevan a

$$q = 1, \qquad r = \pi_K = \text{cte}.$$

Salvo en el caso muy improbable en que el único valor que toma π_K es r, no tendremos un estado estacionario.

Abel (1980) fue el primer modelo en esta linea, pero trabajó con retornos constantes y no se dio cuenta que no había estado estacionario.

Estado estacionario: poder de mercado

Ahora, por lo visto en la lámina 13, tenemos que $\pi_{KK}(K,x)<0$, por lo cual el estado estacionario será

$$q=1, \qquad K=\pi_K^{-1}(r).$$

El supuesto clave para el análisis dinámico de este tipo de modelos (análisis de diagrama de fase) es que K evoluciona lentamente (variable continua) mientras que q, al ser un precio, puede saltar ante cambio en el entorno económico (q es la "variable que salta" o "jump variable" en inglés.

La condición de transversalidad se cumple solo si estamos en el brazo estable (ver lámina siguiente), de modo que dado un valor inicial K_0, el precio correspondiente, q_0, se ajusta al valor en el brazo estable, para luego converger al estado estacionario.

DINÁMICA CON PODER DE MERCADO

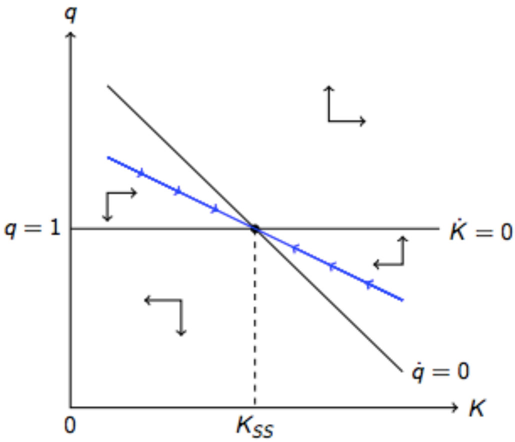


Diagrama de fase y decisión de la firma

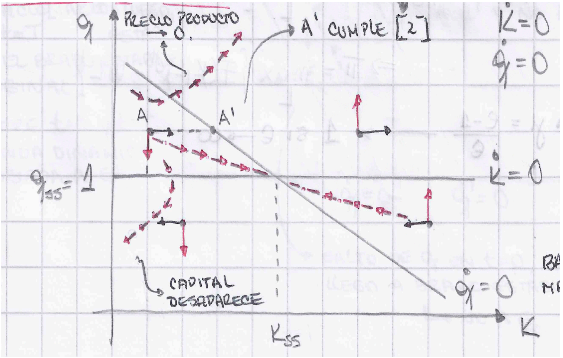
Dado $K = K_0$, existe un único valor de q, aquel sobre el brazo estable (linea con múltiples flechas) de modo que la firma (o la economía si suponemos que la firma representa toda la economía) converge al estado estacionario.

Como tenemos una variable (q) que puede saltar y otra (K) que no, q se puede ajustar de modo que la economía esté en el brazo estable.

Es posible mostrar que si q toma un valor distinto al valor del brazo estable correspondiente a K_0, la dinámica viola la condición de transversalidad $(K \longrightarrow \infty)$ o la firma desaparece $(K \longrightarrow 0)$. Por lo tanto, que q salte de modo que (K_0, q_0) esté sobre el brazo estable es óptimo para la firma. [Ver lámina siguiente.]

Aplicando lo anterior tenemos que, por ejemplo, si partimos en un valor de K inferior a aquel de estado estacionario (v.g., estábamos en estado estacionario y un terremoto destruye parte del stock de capital), en la trayectoria al estado estacionario q tomará valores mayores que uno, decrecientes, mientras que K crecerá monotónicamente.

DINÁMICA: DESCARTANDO TRAYECTORIAS FUERA DEL BRAZO ESTABLE



Dinámica cerca del estado estacionario*

Se linealiza las ecuaciones para $\dot{K}$ y $\dot{q}$, mediante desarrollo de Taylor en torno al estado estacionario, y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{K}_t \\ \dot{q}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_t - K^* \\ q_t - 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

La solución será de la forma

$$\begin{aligned} K_t - K^* &= c_1 e^{-\gamma_1 t} + c_2 e^{-\gamma_2 t}, \\ q_t - 1 &= c_3 e^{-\gamma_3 t} + c_4 e^{-\gamma_4 t}. \end{aligned}$$

Sinopsis

Modelo

Estado estacionario y dinámica

Aplicaciones

Evidencia

Aplicación 1: Shock de productividad

La economía parte en estado estacionario, cuando sucede un shock positivo de productividad:

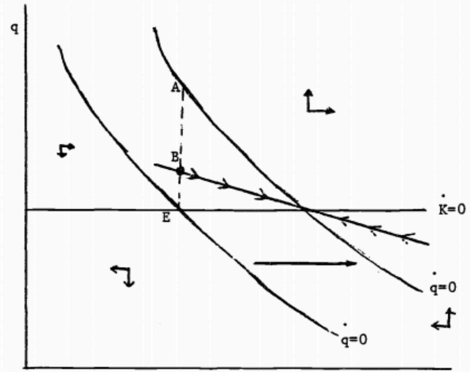
$$\pi_K(K) \longleftarrow z\pi_K(K),$$

con $z > 1$.

El shock es no anticipado y sucederá una sola vez.

Revise las derivaciones que hicimos y concluya, formalmente, que:

- $q = 1$ y $(1+z)\pi_K = r$ caracterizan el nuevo estado estacionario, luego K será mayor que en el estado estacionario anterior al shock
- El lugar geométrico $\dot{K} = 0$ no cambia
- El lugar geométrico $\dot{q} = 0$ se desplaza hacia la derecha.


q
A
B
E
$\dot{K}=0$
$\dot{q}=0$
$\dot{q}=0$

Luego la dinámica hacia el nuevo estado estacionario será la siguiente (ver la figura de la lámina anterior):

- Inmediatamente después del shock, la economía salta de E a B. El valor de q sube, porque el incremento de productividad significa que el capital instalado vale más.
- El stock de capital crece y q va cayendo, camino al nuevo estado estacionario, donde $q = 1$ y K alcanza su nuevo valor.

Clave: La variable de salto no puede dar saltos anticipados, porque esto significa que habrían oportunidades de arbitraje y las condiciones necesarias que derivamos descartan esa posibilidad.

Los MIT shocks

El shock de productividad de la aplicación anterior fue "no anticipado y de una sola vez".

- **No anticipado**: si la firma los anticipara, comenzaría a acumular capital antes.
- **De una sola vez**: porque si se repitieran, las firmas aprenderían a anticiparlo y también actuarían distinto.

Es decir, son shocks que requieren de fuertes supuestos para protegerse de la crítica de Lucas.

La crítica anterior ha llevado a macroeconomistas de "aguas dulces" (Chicago, Minesotta) a describir estos shocks, de manera despectiva, como "MIT-shocks", haciendo referencia a que fueron popularizados por académicos de esa universidad.

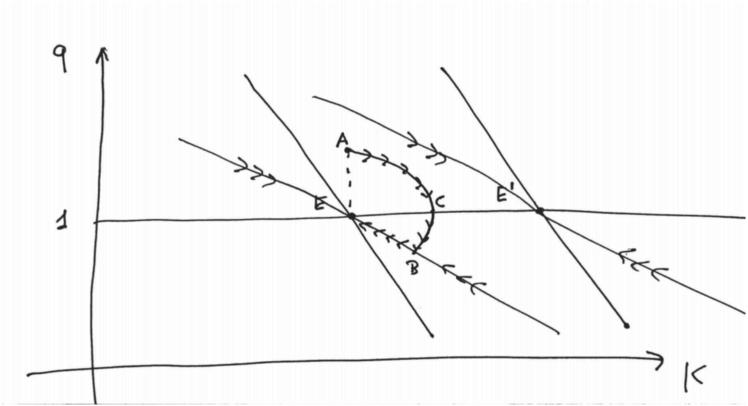
En la aplicación anterior y la que sigue, vemos que el uso juicioso de estos shocks permite obtener insights cualitativos muy útiles, por lo cual este tipo de análisis debiera ser parte del "maletín de herramientas" de toda macroeconomista.

SHOCK TRANSITORIO DE PRODUCTIVIDAD

En $t = 0$ ocurre el mismo shock de productividad anterior, pero esta vez se sabe que será transitorio. Concretamente, durará entre $t = 0$ y $t = T$.

Elemento clave del análisis que sigue:

- No pueden haber saltos anticipados de q.
- En cada momento manda la dinámica del estado estacionario que está activo.



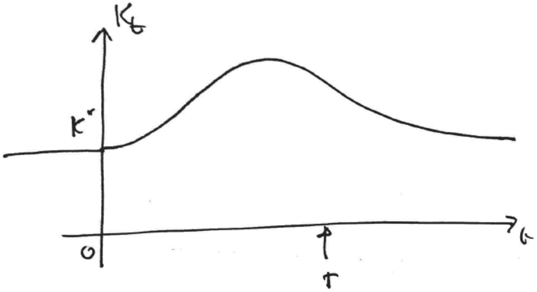
q
1
K
A
C
E
E'
B

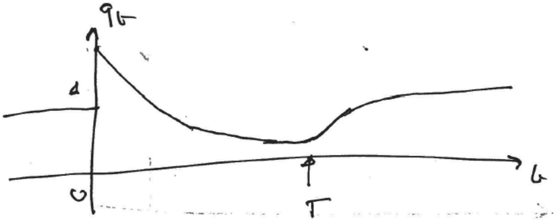
Comentarios a la figura anterior

La economía regresa a E, de modo que en $t = T$ debe estar en el brazo estable que corresponde a ese estado estacionario, de modo que q no de un salto anticipado.

Luego el salto de q en $t = 0$ será menor que con un shock permanente, más pequeño mientras menos dure el shock.

El tamaño del salto es tal que en $t = T$ la economía está en lo que pasará a ser el brazo estable a partir de ese momento.


K_t
K^*
0
t
T


q_t
1
0
t
T

q-MEDIO Y q-MARGINAL

Tenemos dos versiones de q:

q-**marginal**:

$$q_t \equiv \frac{\mathrm{d}V_t}{\mathrm{d}K_t}.$$

- Es el concepto relevante en los modelos que vimos. Nada de obvio como se mide.

q-**medio**:

$$\bar{q}_t \equiv \frac{V_t}{K_t}.$$

- Usando el valor accionario de una firma, este concepto se puede medir. Nada de obvio que tenga que ver con el concepto de la teoría q.

Resultado de Hayashi (1982, ECMA)

Suponemos que $\pi(K,x)=\pi_K K$ (firmas competitivas en el mercado de bienes) y que $C(I,K)$ tiene retornos constantes.

Entonces:

$$q_t=\bar{q}_t=\frac{V_t}{K_t}.$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad suponemos $\delta=0$ y $p_{K,t}\equiv 1$.

Recordamos que las condiciones necesarias que derivamos fueron:

$$\begin{aligned} \pi_K &= C_k+rq-\dot{q}, \\ q &= 1+C_I. \end{aligned}$$

Usando que C y Π tienen retornos constantes (Teorema de Euler para C, resultado de la lámina 13 para K):

$$(\dot{qK})=\dot{q}K+q\dot{K}=(C_k+rq-\pi_K)K+(1+C_I)I=C-\pi+rqK+I.$$

Multiplicamos los dos lados de la identidad anterior por $e^{-r(s-t)}$ e integramos de $s=t$ a $s=\infty$. Usando integración por partes y la condición de transversalidad, el lado izquierdo queda:

$$\int_t^\infty (\dot{qK})_s e^{-r(s-t)}\,\mathrm{d}s = -q_t K_t + r\int_t^\infty (qK)_s e^{-r(s-t)}\,\mathrm{d}s.$$

Haciendo lo mismo con el lado derecho da:

$$-\int_t^\infty [\pi(K_s,x) - I_s - C(I_s,K_s)]e^{-r(s-t)}\,\mathrm{d}t + r\int_t^\infty (qK)_t e^{-r(s-t)}\,\mathrm{d}s = -V_t + r\int_t^\infty (qK)_t e^{-r(s-t)}\,\mathrm{d}s.$$

Comparando las dos expresiones, hemos demostrado que $q_t = V_t/K_t$. $\square$

EVIDENCIA

Summers (1981 BPEA).

Datos anuales EE.UU. 1931-1978 para estimar la relación anterior con MCO.

Usa la identidad de Hayashi y estima:

$$\frac{I_t}{K_{t-1}} = \alpha + \beta \bar{q}_t + e_t.$$

Es decir, corresponde a costos de ajuste cuadráticos con $b = 1/\beta$.

Obtiene $\hat{b}$ muy grande: Para $I/K = 20\%$ se tiene $C(I,K) = 65\%$. Aunque cabe notar que toma 10 años en acumular la mitad de la inversión correspondiente a un shock de esta magnitud.

Posibles explicaciones:

- No se cumplen las condiciones de Hayashi: ¿Competencia perfecta? ¿Burbujas accionarias?
- Error de medición en q: $\hat{\beta}$ sesgado hacia cero $\Longrightarrow \hat{b}$ sobreestimado.
- Endogeneidad: $\frac{I}{K}$ y q son endógenos, ¿cuál debiera ir al lado derecho y cuál al lado izquierdo?

Cummins, Hassett y Hubbard (1994)

Usan las grandes reformas impositivas en EE.UU. (1962, 1971, 1982, 1986) para reducir el error de medición en q (trabajan solo con datos en torno a las reformas) y comparan el impacto de q sobre I/K a través de sectores.

Obtienen costos de ajuste mucho más razonables: los costos asociados a $I/K = 20\%$ ahora son de solo un 4%.

Al trabajar con efectos sectoriales, ignora el impacto agregado que pueden tener estas reformas (un estímulo a la inversión puede subir el precio de todos los bienes de capital, como documenta Goolsbee, 1998).

Veremos críticas adicionales a la teoría q en la cátedra siguiente.

ENECO 630 – Macroeconomía I
Cátedra I2

Inversión
Teoría q

Eduardo Engel
ENECO 670. Macroeconomía I
Magíster en Economía, FEN, U. de Chile.
Abril, 2022.