Fuente: Examen Parcial de Econometría II 2021

1. (50 puntos) Considere el siguiente modelo:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde $e = 4{,}2$; $f = 2{,}1$; $a = d = 0{,}5$; $b = 0{,}1$ y $c = 0{,}4$.

- **(a) (10 puntos)** Determine si el modelo es estacionario. En caso de serlo, encuentre las medias incondicionales de y y x.
- **(b) (20 puntos)** A partir del modelo VAR:
  - **i.** Derive el proceso univariado de x_t consistente con el modelo VAR (Ayuda: Utilizando polinomios de rezagos en la primera ecuación, obtenga una expresión para y en función de x y sustituya esta expresión en la segunda ecuación).
  - **ii.** Determine si este proceso univariado es débilmente estacionario. De serlo, encuentre la media incondicional de x.
  - **iii.** Suponga ahora $\nu_{1,t} = 0$ para todo t. Encuentre la función de impulso-respuesta (5 periodos) para x ante un shock en ν_2.
- **(c) (20 puntos)** Suponga ahora que la matriz de varianzas y covarianzas de las innovaciones viene dada por:

  $$V[\nu_1; \nu_2]^T = \begin{pmatrix} g & h \\ h & i \end{pmatrix} \tag{2}$$

  Puede demostrarse que

  $$E[y_t | x_t; y_{t-1}; x_{t-1}] = j + k y_{t-1} + l x_{t-1} + m x_t \tag{3}$$

  donde $j = e - fm$, $k = a - cm$, $l = b - dm$, $m = h/i$. (5 puntos extra para quien derive esta expresión)

  - **i.** Si el parámetro de interés es a, encuentre las condiciones bajo las cuales x es débilmente exógena para a.
  - **ii.** ¿Puede hacer un test de exogeneidad en este caso utilizando el test de sobre-identificación de modelos IVAR? De ser así, describa la forma su matríz B_0:
  - **iii.** ¿Puede ser x fuertemente exógena para a?
  - **iv.** Suponga que i no es constante, ¿bajo que condiciones puede ser x super exógena para a?