CONTROL II – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: DIEGO FICA - NICOLÁS SUÁREZ

Pregunta 1

Considere una economía $\mathcal{E}$ con dos periodos. Hay $S \geq 2$ estados de la naturaleza en el segundo periodo y una única mercancía. Cada agente $i \in \{1, \dots, N\}$ tiene una asignación inicial de recursos $(w_0^i, \dots, w_S^i) \gg 0$ y preferencias representables por una función de utilidad $U^i : \mathbb{R}_+^{S+1} \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y estrictamente cóncava. Existen $J < S$ activos *numerarios*. Esto es, cada contrato $j \in \{1, \dots, J\}$ es caracterizado por promesas $(A_{s,j})_{s \in \{1,\dots,S\}} \neq 0$ medidas en unidades de la única mercancía disponible.

Tomando el precio de la mercancía como numerario y dados precios $q = (q_1, \dots, q_J) \in \mathbb{R}_+^J$ para los activos, el agente i puede demandar planes de consumo y portafolios financieros en su conjunto presupuestario $B^i(q)$, el cual es caracterizado por los vectores $(x^i, z^i) \in \mathbb{R}_+^{S+1} \times \mathbb{R}^J$ tales que:

$$x_0^i + \sum_{j=1}^{J} q_j z_j^i \quad \leq \quad w_0^i \,, \qquad\qquad x_s^i \leq w_s^i + \sum_{j=1}^{J} A_{s,j} z_j^i, \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}.$$

En este contexto, suponga que para cada agente i existe un vector $(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_J^i) \in \mathbb{R}_+^J$ tal que, dado $(z_1^i, \dots, z_J^i) \in \mathbb{R}^J$ tenemos que

$$\left[\, w_s^i + \sum_{j=1}^{J} A_{s,j} z_j^i \geq 0, \ \forall s \in \{1, \dots, S\} \right] \iff \left[\, z_j^i \geq -\varepsilon_j^i, \quad \forall j \in \{1, \dots, J\} \, \right].$$

Demuestre que es posible definir una economía de intercambio estática $\mathcal{E}^*$ con $J+1$ mercancías de tal forma que existe una correspondencia biunívoca entre los equilibrios de la economía con mercados incompletos $\mathcal{E}$ y los equilibrios de $\mathcal{E}^*$.[1]

Solución. Fije $i \in \{1, \dots, N\}$ y $\overline{q} = (\overline{q}_1, \dots, \overline{q}_J) \in \mathbb{R}_{++}^J$. Note que, por la monotonía estricta de las preferencias, la canasta $(\overline{x}^i, \overline{z}^i) \in \mathbb{R}_+^{S+1} \times \mathbb{R}^J$ maximiza la función de utilidad U^i en el conjunto presupuestario $B^i(\overline{q})$ si y solamente si $(\overline{x}_0^i, \overline{z}^i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^J$ maximiza la función

$$V^i(x_0^i, z^i) = U^i \left(x_0^i, \left(w_s^i + \sum_{j=1}^{J} A_{s,j} z_j^i \right)_{s \in \{1,\dots,S\}} \right)$$

en el conjunto

$$\left\{ (x_0^i, z^i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^J : x_0^i + \sum_{j=1}^{J} \overline{q}_j z_j^i \leq w_0^i \,, \quad w_s^i + \sum_{j=1}^{J} A_{s,j} z_j^i \, \geq \, 0, \quad \forall s \in \{1, \dots, S\} \right\}.$$

Esta última propiedad es a su vez equivalente a afirmar que $(\overline{x}_0^i, \overline{z}^i)$ maximiza V^i en el conjunto

$$\left\{ (x_0^i, z^i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^J : x_0^i + \sum_{j=1}^{J} \overline{q}_j (z_j^i + \varepsilon_j^i) \leq w_0^i + \sum_{j=1}^{J} \overline{q}_j \varepsilon_j^i \,, \quad z_j^i + \varepsilon_j^i \geq 0, \ \forall j \in \{1, \dots, J\} \right\}.$$

[1] Puede ser útil pensar en el cambio de variables $y_j^i = z_j^i + \varepsilon_j^i$. Note que no es necesario probar que esos conjuntos de equilibrio son diferentes de vacío.

Por lo tanto, haciendo el cambio de variables $y^i_j = z^i_j + \varepsilon^i_j$, concluimos que

$$(1) \qquad (\overline{x}^i, \overline{z}^i) \in \underset{(x^i,z^i)\in B^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}} U^i(x^i, z^i) \quad \Longleftrightarrow \quad (\overline{x}^i_0, \overline{y}^i) \in \underset{(x^i_0,y^i_0)\in C^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}} F^i(x^i_0, y^i),$$

donde

$$\begin{aligned} F^i(x^i_0, y^i) &= U^i\left(x^i_0, \left(w^i_s + \sum_{j=1}^J A_{s,j}(y^i_j - \varepsilon^i_j)\right)_{s\in\{1,\dots,S\}}\right), \\ C^i(\overline{q}) &= \left\{(x^i_0, y^i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^J_+ : x^i_0 + \sum_{j=1}^J \overline{q}_j y^i_j \le w^i_0 + \sum_{j=1}^J \overline{q}_j \varepsilon^i_j\right\}. \end{aligned}$$

Dado que los individuos tienen preferencias estrictamente monótonas y $(A_{s,j})_{s\in\{1,\dots,S\}} \neq 0$ para cada $j \in \{1, \dots, J\}$, sabemos que en un equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ el precio de cada activo será estrictamente positivo. Efectivamente, si el activo j tuviera precio cero, invirtiendo en él se podrían obtener recursos ilimitados en algún estado de la naturaleza en $t = 1$ sin incurrir en costos en $t = 0$.

Por lo tanto, sigue de la relación (1) que $(\overline{q}, (\overline{x}^i, \overline{z}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio de la economía con mercados incompletos $\mathcal{E}$, i.e.,

$$(\overline{x}^i, \overline{z}^i) \in \underset{(x^i,z^i)\in B^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}} U^i(x^i), \ \forall i \in \{1, \dots, N\}; \qquad \sum_{i=1}^N (\overline{x}^i - w^i) = 0; \qquad \sum_{i=1}^N \overline{z}^i = 0,$$

si y solamente si $(\overline{q}, (\overline{x}^i_0, \overline{y}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$, donde $\overline{y}^i_j = \overline{z}^i_j + \varepsilon^i_j$, cumple las siguientes propiedades

$$(\overline{x}^i_0, \overline{y}^i) \in \underset{(x^i_0,y^i)\in C^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}} F^i(x^i_0, y^i), \ \forall i \in \{1, \dots, N\}; \qquad \sum_{i=1}^N (\overline{x}^i_0 - w^i_0) = 0; \qquad \sum_{i=1}^N \overline{y}^i_j = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i_j, \ \forall j \in \{1, \dots, J\}.$$

Por lo tanto, $(\overline{q}, (\overline{x}^i, \overline{z}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio competitivo de $\mathcal{E}$ si y solamente si $(\overline{q}, (\overline{x}^i_0, \overline{y}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio competitivo de una economía estática $\mathcal{E}^*$ con $J+1$ mercancías y N individuos, donde cada $i \in \{1, \dots, N\}$ tiene función de utilidad F^i y asignaciones iniciales $(w^i_0, \varepsilon^i_1, \dots, \varepsilon^i_J)$. □

Pregunta 2

Describa una economía de intercambio estática con producción. Haciendo las hipótesis necesarias sobre preferencias, asignaciones iniciales y tecnologías de producción, demuestre que todo equilibrio competitivo es Pareto eficiente.

Solución. En una economía estática con producción hay N individuos que son propietarios de J firmas. Los individuos utilizan sus recursos iniciales y los beneficios obtenidos por sus empresas para demandar L mercancías perfectamente divisibles. Los mercados son competitivos y los individuos toman los precios como dados. Cada individuo $i \in \{1, \dots, N\}$ es caracterizado por una función de utilidad $U^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$, una asignación inicial de recursos $w^i \in \mathbb{R}^L_+$ y derechos de propiedad sobre las firmas $\theta^i = (\theta^i_1, \dots, \theta^i_J) \ge 0$, los cuales cumplen $\sum_{i=1}^N \theta^i = (1, \dots, 1)$. Cada firma es caracterizada por un conjunto de posibilidades de producción $Y^j \subseteq \mathbb{R}^L$.

Un equilibrio para esta economía es dado por un vector de precios $\overline{p} \in \mathbb{R}^L_+ \setminus \{0\}$ junto con decisiones óptimas de consumo y producción $((\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}, (\overline{y}^j)_{j\in\{1,\dots,J\}})$ tales que,

$$\overline{y}^j \in \underset{y^j\in Y^j}{\operatorname{argmax}} \ \overline{p} \cdot y^j, \quad \forall j \in \{1, \dots, J\}, \qquad \overline{x}^i \in \underset{x^i\in B^i(\overline{q})}{\operatorname{argmax}} U^i(x^i), \ \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

$$\sum_{i=1}^N \overline{x}^i = \sum_{i=1}^N w^i + \sum_{j=1}^J \overline{y}^j,$$

donde $B^i(\overline{p}) := \left\{x^i \in \mathbb{R}^L_+ : \overline{p} \cdot x^i \le \overline{p} \cdot w^i + \overline{p} \cdot \sum_j \theta^i_j \overline{y}^j\right\}$ es el conjunto presupuestario de i a precios $\overline{p}$.

Diremos que una distribución de recursos $(x^i)_{i\in\{1,\dots,N\}} \in \mathbb{R}^{LN}_+$ es *factible* si existen planes de producción $(y^j)_{j\in\{1,\dots,J\}} \in \prod_j Y^j$ tales que $\sum_{i=1}^N x^i \leq \sum_{i=1}^N w^i + \sum_{j=1}^J y^j$.

Fije un equilibrio $(\overline{p}, (\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}, (\overline{y}^j)_{j\in\{1,\dots,J\}})$ y suponga que la distribución de recursos $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ no es Pareto eficiente. Entonces, existe otra distribución factible $(x^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ tal que $U^i(x^i) \geq U^i(\overline{x}^i)$ para todo agente $i \in \{1,\dots,N\}$ y $U^k(x^k) > U^k(\overline{x}^k)$ para algún $k \in \{1,\dots,N\}$. Si las preferencias son localmente no-saciadas, lo anterior implica que

$$\overline{p}\cdot x^k \;>\; \overline{p}\cdot w^k + \overline{p}\cdot \sum_{j=1}^J \theta_j^k \overline{y}^j; \qquad\qquad \overline{p}\cdot x^i \;\geq\; \overline{p}\cdot w^i + \overline{p}\cdot \sum_{j=1}^J \theta_j^i \overline{y}^j, \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}\setminus\{k\}.$$

Agregando estas desigualdades y utilizando la factibilidad de $(x^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ obtenemos que

$$\overline{p}\cdot\sum_{i=1}^N w^i + \overline{p}\cdot\sum_{j=1}^J y^j \geq \overline{p}\cdot\sum_{i=1}^N x^i > \overline{p}\cdot\sum_{i=1}^N w^i + \overline{p}\cdot\sum_{j=1}^J \overline{y}^j$$

para algún vector de planes de producción $(y^j)_{j\in\{1,\dots,J\}} \in \prod_j Y^j$. Así, $\overline{p}\cdot\sum_{j=1}^J y^j > \overline{p}\cdot\sum_{j=1}^J \overline{y}^j$. Esto implica que existe alguna firma j tal que $\overline{p}\cdot y^j > \overline{p}\cdot\overline{y}^j$. Una contradicción con la optimalidad de las decisiones de las empresas en un equilibrio. Por lo tanto, si las preferencias de los individuos son localmente no-saciadas, todo equilibrio competitivo (caso exista) es Pareto eficiente. □