Examen Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Benjamín Peña, Marcelo Gómez, Valeria Ulloa

Lea atentamente las siguientes indicaciones:

- Ud. tiene 180 minutos para resolver la prueba.
- La prueba consta de 4 ejercicios y tiene un total de 120 puntos.
- Los puntos están indicados en cada pregunta.
- Lea todas las preguntas antes de comenzar a responder, esto le permitirá planificar su trabajo de forma eficiente. Evite dedicar mucho tiempo a una pregunta.
- Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
- Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.
- En caso de descubrir un intento de copia, éste se sancionará de acuerdo con el reglamento de copia y plagio de la facultad.

Pregunta 1: (30 puntos)

Ana ha invitado a Beto a su fiesta. Ana debe elegir si contratar o no a un payaso. Simultáneamente, Beto debe decidir si va o no a la fiesta. A Beto le gustan las fiestas, pero odia a los payasos ¡incluso odia que otras personas vean payasos!

El pago de Ana si Beto viene a la fiesta es 4 si no hay payaso, pero $8 - x$ si hay payaso (x es el costo de contratar un payaso). El pago de Ana si Beto no viene a la fiesta es de 2 si no hay payaso, pero de $3 - x$ si hay payaso.

El pago de Beto por ir a la fiesta es 4 si no hay payaso, pero 0 si hay payaso. El pago de Beto por no ir a la fiesta es 3 si no hay payaso en la fiesta, pero 1 si hay payaso en la fiesta.

1. (15 puntos) Suponga que $x = 5$. Identifique las estrategias dominadas (si existen). Encuentre el equilibrio de Nash y los pagos de equilibrio. ¿Es único el EN? Justifique.

Respuesta

La matriz de pagos en función de x es

		Beto: ir	Beto: no ir
Ana	Payaso	$(8-x, 0)$	$(3-x, 1)$
	No Payaso	$(4, 4)$	$(2, 3)$

Si $x = 5$ la matriz de pagos es:

		Beto: ir	Beto: no ir
Ana	Payaso	$(3, 0)$	$(-2, 1)$
	No Payaso	$(4, 4)$	$(2, 3)$

Primero observamos que, independientemente del valor de x, las estrategias de Beto no son dominadas, pues:

$$\begin{aligned} u_B(Payaso, ir) &< u_B(Payaso, no\ ir) \\ u_B(No\ Payaso, ir) &> u_B(No\ Payaso, no\ ir) \end{aligned}$$

(4 puntos. Esto es igual en la parte 2., otorgar puntos una sola vez.)

La estrategia "No Payaso" domina estrictamente a la estrategia "Payaso" pues

$$\begin{aligned} u_A(No\ Payaso, ir) &> u_A(Payaso, ir) \\ u_A(No\ Payaso, no\ ir) &> u_A(Payaso, no\ ir) \end{aligned}$$

(3 puntos)

En la matriz de pagos, los números en rojo representan las mejores respuestas a cada estrategia. De allí se observa directamente que el par de estrategias (No Payaso,ir) constituye un equilibrio de Nash en estrategias puras, cuyo pago es $(4, 4)$.
(3 puntos)

Sabemos que es único porque: (i) no puede existir ningún EN donde Ana juegue "Payaso" y (ii) la estrategia de Beto "no ir" obtiene un pago estrictamente peor que la estrategia "ir" cuando Ana juega "No Payaso", por lo que no puede tener probabilidad positiva en ningún EN. (5 puntos)

2. (15 puntos) Suponga que $x = 2$. Identifique las estrategias dominadas (si existen). Encuentre el equilibrio de Nash y los pagos de equilibrio. ¿Es único el EN? Justifique.

Respuesta

En este caso la matriz de pagos es

		Beto: ir	Beto: no ir
Ana	Payaso	$(6, 0)$	$(1, 1)$
	No Payaso	$(4, 4)$	$(2, 3)$

Vemos que Ana no tiene estrategias dominadas, dado que

$$\begin{aligned} u_A(No\ Payaso, ir) &< u_A(Payaso, ir) \\ u_A(No\ Payaso, no\ ir) &> u_A(Payaso, no\ ir) \end{aligned}$$

(3 puntos)

En la matriz de pagos, los números en rojo representan las mejores respuestas a cada estrategia. De allí se observa directamente que no hay EN en estrategias puras. (2 puntos)

Para encontrar el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, sea q la probabilidad de que Beto juegue "ir" y sea p la probabilidad de que Ana juegue "Payaso". En un equilibrio de Nash de estrategia mixta, q debe ser tal que Ana sea indiferente entre jugar cualquiera de sus estrategias puras, es decir, ambas deben producir el mismo pago esperado. De manera similar, p debe ser tal que Beto sea indiferente entre jugar cualquiera de sus estrategias puras, es decir, ambas deben producir el mismo pago esperado.

Por lo tanto q y p deben satisfacer

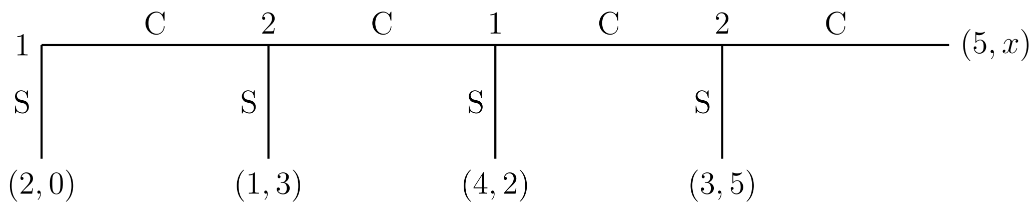
$$\begin{aligned} q6 + (1-q)1 = q4 + (1-q)2 \Rightarrow q = \frac{1}{3} \\ p0 + (1-p)4 = p1 + (1-p)3 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \quad (5 puntos) \end{aligned}$$

El equilibrio de Nash de estrategia mixta es ((1/2,1/2),(1/3,2/3)), lo que produce pagos de $(\frac{8}{3}, 2)$. (3 puntos por el cálculo del pago esperado)

Dado que cada jugador tiene sólo 2 estrategias puras, no hay ningún otro EN en estrategias mixtas, aparte del que ya se encontró (2 puntos)

Pregunta 2: (30 puntos)

Dado el parámetro $x \geq 0$, considere el siguiente juego secuencial de 2 jugadores con información completa y perfecta. En cada nodo de decisión los jugadores tienen dos estrategias disponibles $(Continuar, Salir)$.



1. (15 puntos) Encuentre todos los equilibrios de Nash (en estrategias puras).

Respuesta

La matriz de pago del juego es la siguiente:

Jug. 1 \ Jug 2	SS	SC	CS	CC
SS	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$
SC	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$
CS	$(1, 3)$	$(1, 3)$	$(4, 2)$	$(4, 2)$
CC	$(1, 3)$	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, x)$

(6 puntos por la matriz de pagos)

Los números en rojo son las mejores respuestas de cada jugador a las estrategias de su oponente. Se indica en azul el caso en que la mejor respuesta depende del valor de x.

Tenemos que $\{(SS, SS), (SS, SC), (SC, SS), (SC, SC))\}$ son equilibrios de Nash para cualquier valor de x. (5 puntos)

Y el par de estrategias (CC, CC) es también equilibrio de Nash si $x \geq 5$. (4 puntos)

2. (15 puntos) Encuentre todos los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (en estrategias puras).

Respuesta

El equilibrio de Nash del último subjuego (el subjuego que parte en el segundo nodo de decisión del Jug. 2) depende del valor de x.

- Si $x < 5$ la estrategia de equilibrio del Jug.2 es S.
- Si $x > 5$ la estrategia de equilibrio del Jug.2 es C.
- Si $x = 5$ ambos son equilibrios.

  (3 puntos)

Si S es la estrategia de equilibrio en el último subjuego, entonces

- (S, S) es la estrategia de equilibrio en el subjuego que parte en el segundo nodo de decisión del Jug. 1.
- (S, SS) es la estrategia de equilibrio en el subjuego que parte en el primer nodo de decisión del Jug. 2.
- (SS, SS) es la estrategia de equilibrio en el subjuego que parte en el primer nodo del juego.

  (5 puntos)

Por otro lado, si C es la estrategia de equilibrio en el último subjuego, entonces

- (C, C) es la estrategia de equilibrio en el subjuego que parte en el segundo nodo de decisión del Jug. 1.
- (C, CC) es la estrategia de equilibrio en el subjuego que parte en el primer nodo de decisión del Jug. 2.
- (CC, CC) es la estrategia de equilibrio en el subjuego que parte en el primer nodo del juego.

  (5 puntos)

En resumen, tenemos lo siguiente:

- Si $x < 5$ el único ENPS es (SS, SS)
- Si $x > 5$ el único ENPS es (CC, CC).
- Si $x = 5$ hay dos ENPS: $\{(SS, SS), (CC, CC)\}$

  (2 puntos)

Pregunta 3: (30 puntos)

Considere el siguiente juego de etapa

		Jug. 2	
		A	B
Jug. 1	A	$(4,4)$	$(0,5)$
	B	$(5,0)$	(x,x)

El juego se repite infinitas veces y el pago total de los jugadores es la suma descontada de los pagos por etapa. El descuento temporal es $\delta \in (0,1)$ para ambos jugadores.

1. (10 puntos) Escriba la fórmula de la estrategia gatillo que induce a los jugadores a jugar siempre (A,A) y castiga la desviación jugando (B,B) durante una etapa.

Respuesta

Jugar (A,A) en la primera etapa (2 puntos) y luego:

- Jugar (A,A) si en la etapa anterior se jugó (A,A) o (B,B). (4 puntos)
- Jugar (B,B) si en la etapa anterior se jugó (A,B) o (B,A). (4 puntos)

2. (15 puntos) Encuentre la(s) condición(es) que x y δ debe(n) cumplir para que la estrategia descrita en la parte anterior sea un ENPS.

Respuesta

Para que la estrategia propuesta en la parte anterior sea un ENPS, debe inducir un EN en todos los subjuegos del juego (incluyendo el juego completo). En este juego podemos identificar dos tipos de nodos:

- Nodos donde corresponde jugar (A,A) (que llamaremos nodos de tipo I)
- Nodos donde corresponde jugar (B,B) (que llamaremos nodos de tipo II)

(3 puntos)

Dado que el juego es simétrico, solo consideramos desvíos del jugador 1.

Si estamos en un nodo de tipo I y no hay desvíos, el desarrollo del juego será el siguiente:

$$(A,A) \to (A,A) \to (A,A) \to (A,A) \to \ldots$$

y el pago total será $u_1^* = \frac{4}{1-\delta}$. (2 puntos) Si el jugador 1 desvía, el desarrollo del juego será el siguiente:

$$(B, A) \to (B, B) \to (A, A) \to (A, A) \to ...$$

y el pago total será $u_1 = 5 + \delta x + \delta^2 \frac{4}{1-\delta}$ (2 puntos)

Para que no sea conveniente desviar en un nodo de tipo I, se debe cumplir la condición:

$$\frac{4}{1-\delta} \geq 5 + \delta x + \delta^2 \frac{4}{1-\delta} \Leftrightarrow (4 - x)\delta \geq 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{\delta} \geq x \quad (2 puntos)$$

Si estamos en un nodo de tipo II y no hay desvíos, el desarrollo del juego será el siguiente:

$$(B, B) \to (A, A) \to (A, A) \to (A, A) \to ...$$

y el pago total será $u_1^* = x + \frac{4\delta}{1-\delta}$. (2 puntos) Si el jugador 1 desvía, el desarrollo del juego será el siguiente:

$$(A, B) \to (B, B) \to (A, A) \to (A, A) \to ...$$

y el pago total será $u_1 = 0 + \delta x + \delta^2 \frac{4}{1-\delta}$ (2 puntos)

Para que no sea conveniente desviar en un nodo de tipo II, se debe cumplir la condición:

$$x + \frac{4\delta}{1-\delta} \geq \delta x + \delta^2 \frac{4}{1-\delta} \Leftrightarrow x(1-\delta) + 4\delta \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-4\delta}{1-\delta}$$

(2 puntos)

3. (5 puntos) Afirmación:

> Dado que los jugadores pueden asegurar un pago mínimo de 0 en cada etapa, es imposible que la estrategia propuesta sea un ENPS si x es negativo.

La afirmación anterior, ¿es verdadero o falsa? Justifique y comente.

Respuesta

La afirmación es FALSA.

De las condiciones anteriores, se ve claramente que la cota inferior encontrada para x es negativa para todo valor de δ. (2 puntos) Más aún, para valores muy pequeños de δ ($\delta < 1/4$) la cota superior también es negativa y x solo puedo ser negativo.

Esto indica que si el futuro pesa relativamente poco, la amenaza debe ser negativa (es decir una amenaza "mayor") para poder sostener la cooperación en el par de estrategias (A, A).

Intuitivamente, los valores negativos de x son posibles en un ENPS porque los jugadores están dispuestos a tener un pago negativo en una etapa, a fin de volver a inducir el par de estrategias (A, A) y recibir el pago positivo. Si desvían en la etapa de castigo para evitar el pago negativo x y asegurarse el pago 0, no podrán acceder al pago de 4 en la etapa posterior. Si δ es suficientemente grande, el pago positivo de la etapa posterior compensa el pago negativo en la etapa de castigo. (3 puntos)

Pregunta 4: (30 puntos)

Un comprador y un vendedor negocian sobre el intercambio de un bien indivisible. El comprador valora en bien en $b > 0$ y el vendedor lo valora en $s = 0$.

Considere un juego de información incompleta donde el vendedor no conoce la valoración del comprador. Es información común que la valoración es:

$$b = \begin{cases} \bar{b} & \text{con probabilidad } q \\ \underline{b} & \text{con probabilidad } 1 - q \end{cases}$$

con $\bar{b} > \underline{b} > 0$ y $q \in (0, 1)$. Todos los demás elementos del juego son información común, la información incompleta se restringe a la valoración del comprador.

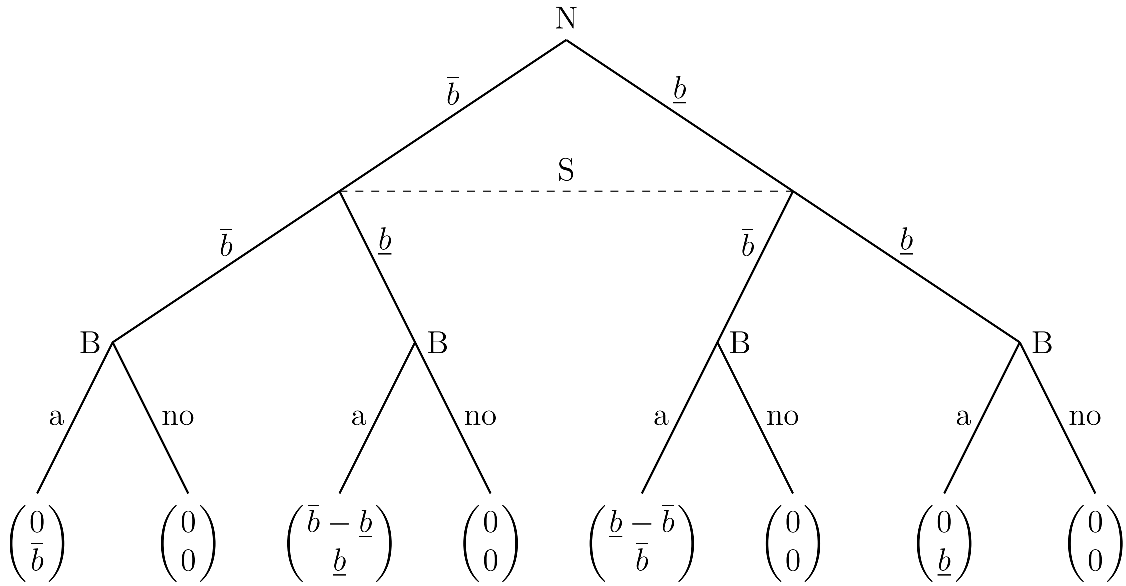
El mecanismo de intercambio es el siguiente.

- El vendedor anuncia un precio $p_1 \geq 0$.
- El comprador observa el precio y decide si aceptar o no aceptar:
  - Si el comprador elige aceptar, el intercambio se realiza a precio p_1. La utilidad del comprador es $b - p_1$ y la utilidad del vendedor es p_1.
  - Si el comprador elige no aceptar, ambos obtienen pago igual a 0.

Atención: asumimos que el comprador **siempre elige aceptar** si es indiferente entre aceptar o no aceptar. En esta parte, solo consideramos dos estrategias para el vendedor: ofrecer $p_1 = \bar{b}$ ó $p_1 = \underline{b}$.

1. (10 puntos) Dibuje el árbol del juego.

Respuesta



El primer valor en el vector de pagos corresponde al pago de B (comprador).

(3 puntos por la estructura del árbol del juego)

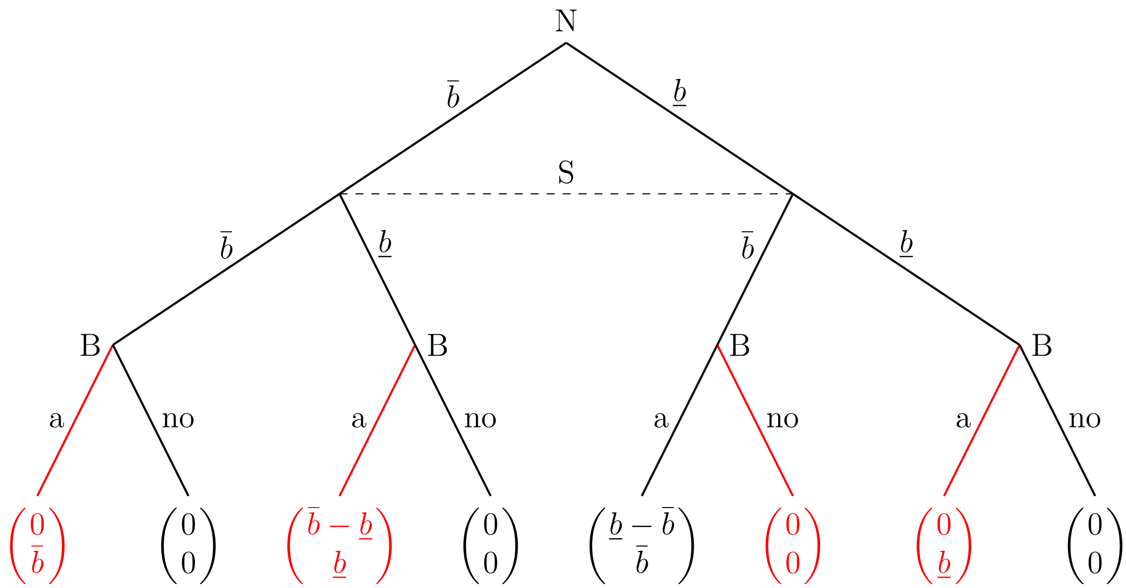
(4 puntos por los conjuntos de información)

(3 puntos por los pagos)

2. (10 puntos) Demuestre que si se cumple la condición $q\bar{b} < \underline{b}$ entonces el precio de equilibrio es $p_1 = \underline{b}$.

Respuesta

Se indica en rojo la decisión del comprador en cada uno de sus 4 nodos de decisión.



(3 puntos)

El vendedor sabe que si ofrece un precio $p = \bar{b}$ obtendrá un pago de $\bar{b}$ solo en el caso en que el comprador sea de tipo $\bar{b}$, mientras que, si ofrece el precio bajo, siempre logrará vender el bien. Sea $u_S(\cdot)$ la utilidad esperada del vendedor, tenemos que:

$$\begin{aligned} u_S(\bar{b}) &= q \times \bar{b} + (1-q) \times 0 = q\bar{b} \qquad (3 puntos) \\ u_S(\underline{b}) &= q \times \underline{b} + (1-q) \times \underline{b} = \underline{b} \qquad (3 puntos) \end{aligned}$$

Entonces, si se cumple la condición $q\bar{b} < \underline{b}$ prefiere ofrecer $p = \underline{b}$. (1 puntos)

De ahora en más, vamos a considerar que el juego sigue si el comprador no acepta p_1. En efecto, el mecanismo anterior se repite una vez y las utilidades obtenidas en esta segunda parte están descontadas por $\delta \in (0, 1)$. Es decir que:

- Si el comprador elige no aceptar p_1, el vendedor ofrece un precio p_2.
- El comprador observa p_2 y decide si aceptar o no aceptar:

- Si el comprador elige aceptar, el intercambio se realiza a precio p_2. La utilidad del comprador es $\delta(b - p_2)$ y la utilidad del vendedor es δp_2.
- Si el comprador elige no aceptar, ambos obtienen pago igual a 0.

Asuma que $q = \frac{1}{2}$ y se cumple que $0 < \underline{b} < \frac{1}{2}\bar{b}$.

3. (10 puntos) Demuestre que las siguientes estrategias constituyen un Equilibrio de Nash Bayesiano:

   - El vendedor ofrece el precio $\tilde{p}_1 = \bar{b} - \delta(\bar{b} - \underline{b})$. Si éste no es aceptado, ofrece el precio $\tilde{p}_2 = \underline{b}$.
   - Si la valoración del comprador es $\bar{b}$ su estrategia es: aceptar el primer precio si y solo si es menor o igual $\tilde{p}_1$; aceptar el segundo precio si y solo si es menor o igual a $\underline{b}$.
   - Si la valoración del comprador es $\underline{b}$ su estrategia es la misma para el primer o para el segundo precio: aceptar si y solo si es menor o igual a $\underline{b}$. [1]

Respuesta

Vamos a verificar que ninguno de los jugadores tiene incentivos para desviar.

En el equilibrio, los jugadores de tipo II tienen utilidad cero. Observamos que si quisieran desviar aceptando p_1, tendrían utilidad negativa dado que $p_1 > \underline{b}$. Podrían desviar no aceptando p_2 en cuyo caso también tendrían utilidad 0, así que no tienen incentivos a desviar. (2 puntos)

En el equilibrio, los compradores tipo $\bar{b}$ tienen pago $\bar{b} - p_1 = \delta(\bar{b} - \underline{b})$. Si desvían, no aceptando p_1, compraran el bien a un precio menor, $p_2 = \underline{b}$, pero su beneficio estará descontado por δ. Así que obtendrían una utilidad $\delta(\bar{b} - \underline{b})$: exactamente la misma utilidad y no tienen incentivo a desviar. (2 puntos)

En el equilibrio el vendedor tiene una utilidad esperada

$$u_S = q \times p_1 + \delta(1-q) \times p_2 = q\bar{b}(1-\delta) + \delta\underline{b} = \frac{1}{2}\bar{b}(1-\delta) + \delta\underline{b}$$

(1 puntos)

Si desvía en la primera etapa ofreciendo un precio mayor a p_1 sabe que **todos** los compradores jugarán no aceptar en la primera etapa y compran el bien a precio $p_2 = \underline{b}$, con lo cual la utilidad esperada del vendedor es $\delta\underline{b} < u_S$. (1 puntos)

[1] Observar que en la segunda etapa ambos tipos de compradores usan la misma estrategia.

Si desvía en la primera etapa ofreciendo un precio $p \in (\underline{b}, p_1)$, el vendedor estará vendiendo el bien más barato a los compradores de tipo I (los de tipo II no aceptan) y evidentemente su utilidad esperada será menor que la obtenida en equilibrio. (1 puntos)

Si ofrece $p_1 \leq \underline{b}$ en la primera etapa, **todos** los compradores compran en la primera etapa y su utilidad será $p_1 \leq \underline{b}$. Sin embargo, $\underline{b} < u_S$ por lo que no le conviene desviar (para la desigualdad se ocupa la condición $\bar{b} > 2\underline{b}$). (2 puntos)

En la segunda etapa, y dado que todos los compradores aceptan si y solo si el precio es menor o igual a $\underline{b}$, no tiene incentivo a ofrecer un precio distinto a $\underline{b}$. (1 puntos)