CONTROL II – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: MARTÍN FERRARI - CATALINA GÓMEZ

Pregunta

Considere una economía con dos periodos $t \in \{0,1\}$. No hay incertidumbre en $t = 0$, mientras que en $t = 1$ se realiza un estado de la naturaleza $s \in \{1, \ldots, S\}$. En cada periodo hay L mercancías disponibles para intercambio. Hay N individuos, caracterizados por funciones de utilidad separables

$$U^i(x_0, (x_s)_{s\in\{1,\ldots,S\}}) = u^i(x_0) + \sum_{s=1}^{S} \pi_s u^i(x_s),$$

donde $u^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ es continua, estrictamente creciente y estrictamente cóncava. Además, cada agente i tiene una asignación inicial de recursos $(w_0^i, (w_s^i)_{s\in\{1,\ldots,S\}}) \in \mathbb{R}^{L(S+1)}_{++}$ tal que $w_s^i = w_{s'}^i$ para todo $s, s' \in \{1, \ldots, S\}$. Así, las preferencias por consumo y las asignaciones iniciales no se ven afectadas por el estado de la naturaleza que se realiza en el segundo periodo. Finalmente, existen $J \leq S$ activos nominales no-redundantes, los cuales están disponibles para negociación en $t = 0$ y hacen promesas $(N_{s,j})_{j\in\{1,\ldots,J\}}$ en los diferentes estados de la naturaleza $s \in \{1, \ldots, S\}$.

Utilizando la notación usual para precios, canastas de consumo y portafolios financieros, diremos que $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}^i, \overline{z}^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}})$ es un *equilibrio sunspot* si existen estados de la naturaleza diferentes $s, s' \in \{1, \ldots, S\}$ tales que $\overline{x}_s^i \neq \overline{x}_{s'}^i$ para algún agente $i \in \{1, \ldots, N\}$.

En este contexto, demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) En una asignación Pareto eficiente cada individuo i recibe una misma canasta en cada estado de la naturaleza en el segundo periodo.

Sea $(x^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ una asignación Pareto eficiente, donde $x^i = (x_0^i, (x_s^i)_{s\in\{1,\ldots,S\}})$. Asuma, por contradicción, que para algún agente h existen dos estados de la naturaleza en el segundo periodo, $k \neq k'$, tales que $x_k^h \neq x_{k'}^h$. Sea $\overline{x}^i = \sum_{s=1}^{S} \pi_s x_s^i$ la media de las canastas que podría recibir el individuo $i \in \{1, \ldots, N\}$ en el segundo periodo. Note que las canastas $(y^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ definidas por $y^i = (x_0^i, (\overline{x}^i, \ldots, \overline{x}^i))$ constituyen una distribución de recursos factible, pues

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{x}^i = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \sum_{i=1}^{N} x_s^i \leq \sum_{s=1}^{S} \pi_s \sum_{i=1}^{N} w_s^i = \sum_{i=1}^{N} w_s^i,$$

donde la desigualdad es una consecuencia de la factibilidad de $(x^i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$, mientras que la última igualdad sigue del hecho que $w_s^i = w_{s'}^i$ para todo par de estados $s, s' \in \{1, \ldots, S\}$. Además, la concavidad de las funciones de utilidad nos asegura que

$$U^i(y^i) = u^i(x_0^i) + u^i(\overline{x}^i) \geq u^i(x_0^i) + \sum_{s=1}^{S} \pi_s u^i(x_s^i) = U^i(x^i), \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Como $(x^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ es Pareto eficiente, concluimos que $U^i(y^i) = U^i(x^i)$ para todo agente i. Sin embargo, la concavidad estricta de las funciones de utilidad implica que $U^h(y^h) > U^h(x^h)$, una contradicción. $\square$

(b) Si los mercados son completos, existe al menos un equilibrio competitivo y ninguno de ellos es un *equilibrio sunspot*.

Si los mercados son completos, siempre existe equilibrio. Esto es una consecuencia del resultado de existencia de equilibrio en mercados contingentes, el cual puede ser aplicado pues las utilidades son continuas, estrictamente crecientes y estrictamente cóncavas, mientras que las asignaciones iniciales son interiores. Además, todo equilibrio en mercados completos implementa consumos eficientes (Primer Teorema del Bienestar Social). Por lo tanto, sigue del ítem previo que en equilibrio cada individuo demandará una misma canasta en cada estado de la naturaleza del segundo periodo. Esto es, no existen *equilibrios sunspot*.

Hasta aquí, no era necesario suponer que cada activo pagaba lo mismo en los diferentes estados de la naturaleza. Esta hipótesis sólo será utilizada en el ítem (c).[1]

(c) Independiente de la estructura financiera, siempre hay un equilibrio competitivo que no es un *equilibrio sunspot*.

Considere una economía con un único estado de la naturaleza en el segundo periodo. Sabemos que, independiente de la estructura financiera, esta economía siempre tiene al menos un equilibrio competitivo. Efectivamente, se trata de una economía con activos nominales en la cual las características de los individuos cumplen las hipótesis del resultado de existencia de equilibrio estudiado en clases. Por lo tanto, fije un equilibrio $((\overline{p}_0, \overline{p}_1, \overline{q}), (\overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i, \overline{z}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$, donde $\overline{x}_1^i$ denota el consumo del agente i en el único estado de la naturaleza del segundo periodo.

Considere ahora una economía con $S > 1$ estados de la naturaleza en el segundo periodo tal que $N_{s,j} = N_{1,j}$ para todo $s \in \{2,\dots,S\}$ y $j \in \{1,\dots,J\}$. Entonces, como las funciones de utilidad son separables, $((\overline{p}_0, (\overline{p}_1)_{s\in\{1,\dots,S\}}, \overline{q}), (\overline{x}_0^i, (\overline{x}_1^i)_{s\in\{1,\dots,S\}}, \overline{z}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio competitivo. Esto es una consecuencia del hecho que las utilidades, asignaciones iniciales y pagos de los activos no dependen del estado de la naturaleza: $\overline{x}_1^i$ es presupuestariamente factible *en cualquier estado* s si los precios son $\overline{p}_1$. Esto demuestra que siempre existe un equilibrio competitivo que no es un *equilibrio sunspot*. $\square$

---

[1] En el enunciado de la pregunta se afirmaba que los activos eran no-redundantes. La única forma de tener mercados completos, no-redundancia y pagos independientes del estado de la naturaleza es tener $S = 1$, lo cual asegura de forma inmediata que no pueden haber *equilibrios sunspot*. Quien argumentó esto en el ítem (b), tiene la respuesta correcta (la parte de no-existencia de *equilibrios sunspot*).

De todas formas, es importante destacar que el resultado del ítem (b) no requiere asumir que los pagos de los activos son constantes. El objetivo de esa pregunta, como lo indica la pauta, era que argumentaran a través de la eficiencia de Pareto y su caracterización.

(d) Si los mercados son incompletos, puede haber *equilibrios sunspot*.

Para ilustrar esta posibilidad es suficiente considerar un ejemplo en que los mercados sean incompletos y pueda haber *equilibrios sunspot*. Por eso, consideremos el caso extremo en el cual no hay activos ($J = 0$). En este caso, como las utilidades son separables, un vector de precios para las mercancías $(\overline{p}_0, (\overline{p}_s)_{s\in\{1,\dots,S\}})$ junto con demandas individuales $(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s\in\{1,\dots,S\}})_{i\in\{1,\dots,N\}}$ constituye un equilibrio competitivo si y solamente si se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $(\overline{p}_0, (\overline{x}_0^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio competitivo de la *economía estática* caracterizada por $(u^i, w_0^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$.

(ii) Para cada estado de la naturaleza $s \in \{1, \dots, S\}$, $(\overline{p}_s, (\overline{x}_s^i)_{i\in\{1,\dots,N\}})$ es un equilibrio competitivo de la *economía estática* caracterizada por $(u^i, \widetilde{w}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$, donde $\widetilde{w}^i$ es la asignación inicial de recursos del individuo i en cualquiera de los estados del segundo periodo (sabemos que es la misma en todos los estados).

Por lo tanto, para tener un equilibrio sunspot es necesario y suficiente que $S > 1$ y que la economía estática caracterizada por $(u^i, \widetilde{w}^i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ tenga al menos dos equilibrios en los cuales al menos un consumidor tenga demandas diferentes. Y economías estáticas con ese tipo de multiplicidad de equilibrios sabemos que existen. $\square$