Universidad de Chile — Facultad de Economía y Negocios.

Macroeconomía I
Otoño 2020
Guía Nº4

Profesor: Eduardo Engel
Ayudantes: Catalina Gómez
& Martín Ferrari

JULIÁN GARCÍA SANHUEZA
18.623.192-9

Y CATONA

1 Ajuste abultado y procesos ARCH

Robert Engle recibió el Nobel de Economía 2003 por haber introducido la familia ARCH de series de tiempo. Los procesos ARCH extienden los procesos autoregresivos tradicionales a una familia de procesos que captura el hecho que la volatilidad observada de la mayor´ıa de las series financieras varía sistematicamente a lo largo del tiempo, con períodos de gran volatilidad seguidos de períodos de baja volatilidad. Los procesos ARCH son procesos autoregresivos, salvo que la varianza de las innovaciones es función de la historia reciente de la serie de interés (por ejemplo, una función lineal del promedio de valores recientes de la variable que se esta modelando o de sus cuadrados, dependiendo del caso), a diferencia de los procesos AR tradicionales, donde dicha varianza es constante. ARCH se refiere a Auto-Regressive-Conditional-Heteroscedasticity. En clases vimos que las series de inversión agregada siguen un proceso ARCH, otros papers han mostrado que esto tambien se cumple para series agregadas de otras variables con comportamiento abultado a nivel micro, como consumo de durables e inflación.

En este problema mostramos que en el modelo de Calvo aplicado a un agente, la variable de desequilibrio x_t, que que corresponde a la "brecha-pre-ajuste", sigue un simple proceso ARCH.

Considere un agente que sigue un modelo de Calvo, lo cual se formaliza como sigue:

$$x_{t+1} = (1-\xi_t)x_t + \Delta y_t^* \tag{1}$$

$$\Delta y_t = \xi_t x_t \tag{2}$$

Donde ξ son i.i.d. Bernoulli con probabilidad de exito λ mientras que los Δy^*. son i.i.d. con media nula y varianza σ^2.

(a) Explique en palabras las ecuaciones (1) y (2).

Respuesta:

La ecuación (1) nos señala la dinámica de la brecha de ajuste del agente representativo. Esta dinámica se explica por un parámetro $(1-\epsilon_t)$ que toma el valor 0 si el hay ajuste en t y 0 si no. Este parámetro al multiplicarse por x_t nos dice que la brecha del período anterior se cierra cuando hay ajuste. Por otro lado, se suma un Δy_t^* que representa el cambio en el nivel óptimo dinámico del agente. Este cambio en el modelo es iid lo que significa que es un shock exógeno al agente. Por ejemplo, podría ser un cambio tecnológico que traiga un shock de productividad lo que movería el nivel de capital deseado y por tanto el óptimo dinámico de manera exógena.

La ecuación (2) muestra que cuando hay ajuste en el período t ($\xi = 1$) entonces el cambio en la inversión cierra toda la brecha del período t. Por lo que las expresiones son iguales. En cambio, si no hay ajuste ($\xi = 0$) entonces el cambio es 0 lo que sugiere que el modelo incorpora un ajuste "todo o nada".

Por lo tanto, mientras la ecuación (1) muestra la dinámica de cierre de brechas en relación a si hubo ajuste o no, y a si hay cambios exógenos en el nivel óptimo dinámico, la ecuación (2) nos muestra que el ajuste siempre es de "todo o nada" e iguala al cambio en la inversión efectiva.

(b) Use (1) para mostrar que:

$$x_t = (1-\lambda)x_{t-1} + \nu_t$$
$$v_t \equiv (\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1} + \Delta y_t^*.$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}
x_t &= (1-\xi_{t-1})x_{t-1} + \Delta y_t^* \\
&= x_{t-1} - \xi_{t-1}x_{t-1} + \Delta y_t^* \\
&= (1-\lambda)x_{t-1} + \lambda x_{t-1} - \xi_{t-1}x_{t-1} + \Delta y_t^* \\
&= (1-\lambda)x_{t-1} + [(\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1} + \Delta y_t^*] \\
&= (1-\lambda)x_{t-1} + v_t
\end{aligned}$$

Donde $v_t \equiv (\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1} + \Delta y_t^*$ mostrando lo solicitado.

(c) Muestre que v_t no esta correlacionada con x_{t-1}.

Respuesta:

Note que $\mathrm{C}ov(v_t, x_{t-1}) = \mathrm{E}(v_t \cdot x_{t-1}) - \mathrm{E}(v_t) \cdot \mathrm{E}(x_{t-1})$. El primer término:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(v_t \cdot x_{t-1}) &= \mathrm{E}[((\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1} + \Delta y_t^*) \cdot x_{t-1}] \\
&= \lambda \mathrm{E}(x_{t-1}^2) - \mathrm{E}(\xi_{t-1}x_{t-1}^2) + \mathrm{E}(x_{t-1}\Delta y_t^*) \\
&= \lambda \mathrm{E}(x_{t-1}^2) - \mathrm{E}(\xi_{t-1})\mathrm{E}(x_{t-1}^2) + \mathrm{E}(x_{t-1})\mathrm{E}(\Delta y_t^*) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donde en el segundo paso separamos la esperanza, en el tercero aprovechamos la independencia de ξ_{t-1} y Δy_t^* y en el último aplicamos las esperanzas conocidas por enunciado. Para el segundo término, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(v_t) &= \mathrm{E}(\lambda x_{t-1}) - \mathrm{E}(\xi_{t-1}x_{t-1}) + \mathrm{E}(\Delta y_t^*) \\
&= \lambda \mathrm{E}(x_{t-1}) - \lambda \mathrm{E}(x_{t-1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donde en el primer paso separamos la esperanza, en el segundo aplicando la esperanza conocidas por enunciado y en el último hacemos la resta respectiva. Por lo que concluimos que $\mathrm{E}(v_t \cdot x_{t-1}) - \mathrm{E}(v_t)\cdot \mathrm{E}(x_{t-1}) = 0$

(d) Determine $\mathrm{E}[v_t|\mathrm{I}_{t-1}]$, donde $\mathrm{I}_{t-1} = \{x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, \xi_{t-2}, \xi_{t3}, \cdots, \Delta y_{t-1}^*, \Delta y_{t-2}^*, \cdots\}$. Es decir, I_{t-1} incluye todas las variables conocidas antes del shock que determina si hay ajuste o no en el período $t-1$, por lo cual no incluye ξ_{t-1}.

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[v_t|\mathrm{I}_{t-1}] &= \mathrm{E}[(\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1} + \Delta y_t^* |\mathrm{I}_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[(\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1}|\mathrm{I}_{t-1}] + \mathrm{E}[\Delta y_t^* |\mathrm{I}_{t-1}] \\
&= \lambda x_{t-1} - \lambda x_{t-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donde en el segundo paso separamos la esperanza, en el tercero aplicamos la esperanza condicional a I_{t-1} para sacar constantes y usar el hecho que $\mathrm{E}(\xi_{t-1}) = \lambda$. En conclusión, el valor de $\mathrm{E}[v_t|\mathrm{I}_{t-1}] = 0$.

(e) Determine $\mathrm{V}ar[v_t|\mathrm{I}_{t-1}]$ y concluya que esta varianza es creciente en x_{t-1}^2, tal como sucede con un proceso ARCH.

Respuesta:

Note que $\mathrm{V}ar[v_t|\mathrm{I}_{t-1}] = \mathrm{E}[(v_t - \mathrm{E}[v_t|\mathrm{I}_{t-1}])^2|\mathrm{I}_{t-1}] = \mathrm{E}[v_t^2|\mathrm{I}_{t-1}]$. Luego:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[v_t^2|\mathrm{I}_{t-1}] &= \mathrm{E}[(\lambda - \xi_{t-1})^2 x_{t-1}^2 + \Delta y_t^{*2} + 2(\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1}\Delta y_t^* |\mathrm{I}_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[(\lambda - \xi_{t-1})^2 x_{t-1}^2 |\mathrm{I}_{t-1}] + \mathrm{E}[\Delta y_t^{*2}|\mathrm{I}_{t-1}] + 2\mathrm{E}[(\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1}\Delta y_t^* |\mathrm{I}_{t-1}] \\
&= x_{t-1}^2 \mathrm{E}[(\lambda - \xi_{t-1})^2|\mathrm{I}_{t-1}] + \sigma^2 + 2\mathrm{E}[(\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1}\Delta y_t^* |\mathrm{I}_{t-1}] \\
&= x_{t-1}^2 \mathrm{E}[\lambda^2 + \xi_{t-1}^2 + 2\lambda\xi_{t-1}|\mathrm{I}_{t-1}] + \sigma^2 \\
&= x_{t-1}^2 (\lambda^2 + \mathrm{E}[\xi_{t-1} - 2\lambda\xi_{t-1}|\mathrm{I}_{t-1}]) + \sigma^2 \\
&= x_{t-1}^2 \lambda(1-\lambda) + \sigma^2
\end{aligned}$$

Donde en el segundo paso se separan las esperanzas, en el tercero se aprovecha el hecho que la esperanza condicional de Δy^{*2}_t es σ^2 y se saca el valor no estócastico de x_{t-1}^2. En el cuarto se desarrolla el cuadrado y se usa el hecho que la Δy_t^* es independiente y con media cero. En el quinto se usa el hecho que para una Bernoulli $\xi^2 = \xi$ y por último se aplican las esperanzas condicionales.

Note que dado que $\lambda(1-\lambda) > 0$ la expresión es creciente en x_{t-1}^2 demostrando lo solicitado.

(f) De una intuición económica para el resultado obtenido en la parte (e).

Respuesta:

Note que si $x_{t-1} = 0$ entonces tenemos que $Var[v_t|I_{t-1}] = \sigma^2$ lo que significa que su varianza no depende del tiempo. Sin embargo, cuando $x_{t-1} \neq 0$ tenemos que la volatibilidad del término innovación en la dinámica de la brecha dada la información disponible en el período anterior, crece a medida que crece el nivel de brecha del período previo. Dado que la economía se representa por este único agente, entonces tenemos que una brecha mayor genera mayores niveles de incertidumbre en el futuro (mayor varianza). Por ejemplo, si las brechas son altas pues se postergan mucho los ajustes entonces habrá mucha incertidumbre sobre si se realizarán los cierres de brecha, la que irá creciendo período a período hasta que se cierren la brecha.

Por otro lado, la volatibilidad crece la incertidumbre debido a que crece el termino de la varianza de la variable de ajuste (i.e $\lambda(1-\lambda)$. Pensemos, por ejemplo, en entornos de mucha velocidad de ajustes (industrias con altísima tecnología como telefonía móvil) es esperable que tengan una volatibilidad creciente en el tiempo.

2 IRF que varía en el tiempo

La funcion de hazard de un modelo Ss generalizado (o modelo de increasing adjustment hazard) viene dada por:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \leq 0 \\ \lambda x & si \quad 0 < x < \frac{1}{\lambda} \\ 1 & si \quad x > \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Denotamos por $f(x,t)$ la densidad de probabilidad de la inversión mandatada justo antes del ajuste del período t, y definimos la tasa de inversión agregada mediante:

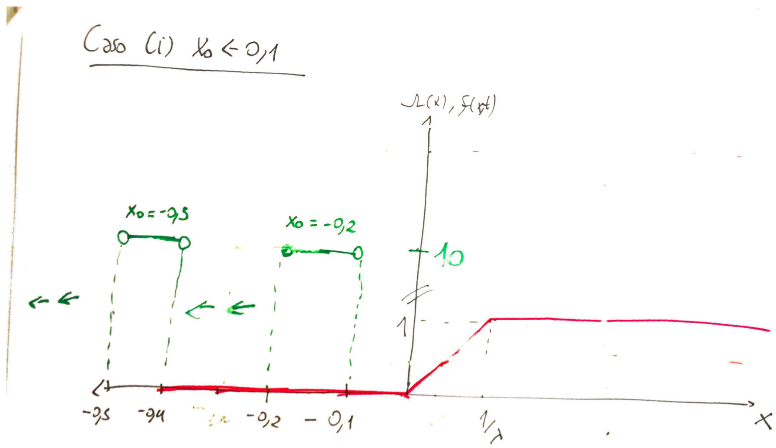
$$\frac{I_t}{K_t} \equiv \int x\Lambda(x) f(x,t)dx$$

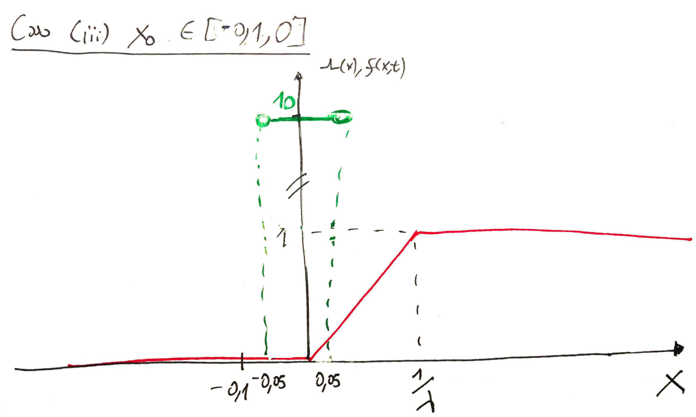
Denotamos por IRFk,t la funcion de respuesta al impulso unitario en $t, k = 0, 1, 2, \cdots$.

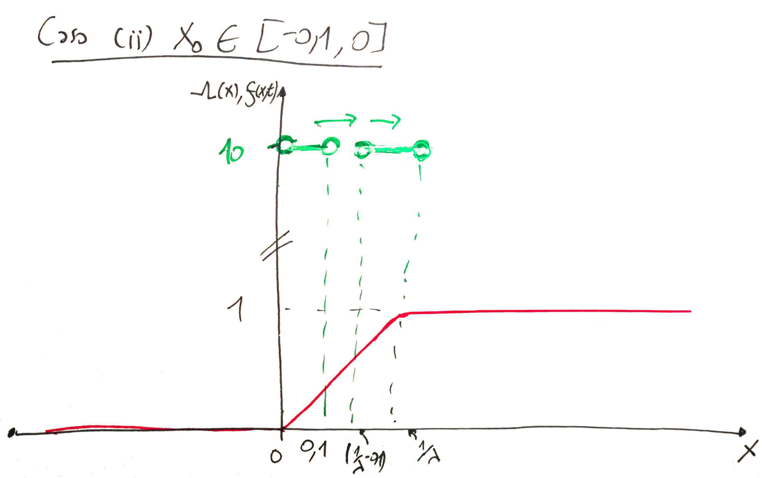
Suponga que $f(x,t)$ es una uniforme en el intervalo $[x_0, x_0+0.1]$, con $x_0 < 1/\lambda - 0.1$ es un parámetro dado, de modo que $f(x,t) = 10$ si $x_0 < x < x_0 + 0.1$ y $f(x,t) = 0$ en caso contrario. El parámetro x_0 captura la parte del ciclo económico en que está la economía, valores grandes corresponden a etapas expansivas, valores pequeños tiempos recesivos.

(a) Dibuje tres gráficas con $\Gamma(x)$ y $f(x,t)$. La primera para un $x_0 < -0.1$, la segunda para un $x_0 \in [-0.1, 0]$ la tercera para un $x_0 > 0$.

Respuesta:







Se grafican los 3 casos donde en $x_0 < -0.1$ elegimos dos $x_0 = \{-0.5, -0.2\}$, en $x_0 \in [0.1, 0]$ elegimos $x_0 = 0.1$ y en $x_0 >$ se eligen $x_0 = \{0, 1 - \frac{1}{\lambda}\}$. Esto lo hacemos para ver su evolución.

(b) Exprese $\mathrm{I}t/\mathrm{K}t$ como función de x_0 y λ. En lo que sigue denotamos esta función por $y(x_0)$.

Respuesta:

Tendremos cuatro casos dependiendo del dominio de $y(x_0)$. Esto viene dado porque x tiene discontinuidades en $\Lambda(x)$ (función de increasing hazard). Por tanto:

(i) Caso $x_0 < 0.1$:

$$\begin{aligned} y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+0.1} x\Lambda(x) f(x,t)\,dx &= \int_{x_0}^{x_0+0.1} x\cdot 0\cdot f(x,t)\,dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde se hace $\Delta(x) = 0$ al ser evaluado en $x = x_0 - 0.1 < 0$.

(ii) $x_0 \in [0.1, 0]$:

$$\begin{aligned} y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+0.1} x\Lambda(x) f(x,t)\,dx &= \int_{x_0}^{0} \lambda x^2 f(x,t)\,dx + \int_{0}^{x_0+0.1} \lambda x^2 f(x,t)\,dx \\ &= \lambda \int_{0}^{x_0+0.1} x^2 f(x,t)\,dx \\ &= 10\lambda \int_{0}^{x_0+0.1} x^2\,dx \\ &= \frac{10\lambda}{3}(x_0+0.1)^3 \end{aligned}$$

Donde en el segundo paso tenemos nuevamente que $\Delta(x) = 0$ al ser evaluado en $x = x_0 < 0$.

(iii) $x_0 > 0$:

$$\begin{aligned} y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+0.1} x\Lambda(x) f(x,t)\,dx &= \int_{x_0}^{x_0+0.1} \lambda x^2 f(x,t)\,dx \\ &= \lambda \int_{x_0}^{x_0+0.1} x^2 f(x,t)\,dx \\ &= 10\lambda \int_{x_0}^{x_0+0.1} x^2\,dx \\ &= \frac{10\lambda}{3}\left[(x_0+0.1)^3 - x_0^3\right] \end{aligned}$$

(iv) $x_0 > \frac{1}{\lambda}$

$$\begin{aligned} y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+0.1} x\Lambda(x) f(x,t)\,dx &= \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}+0.1} x\cdot 0\cdot f(x,t)\,dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde el último paso viene dado porque $f(x,t)$ al evaluar en el dominio $x > \frac{1}{\lambda}$ da igual a 0.

Por lo tanto, la función $y(x_0)$ puede escribirse como:

$$y(x_0) = \begin{cases} 0, & si \quad x_0 < -0.1 \\ \frac{10\lambda}{3}(x_0+0.1)^3 & si \quad -0.1 < x_0 < 0 \\ \frac{10\lambda}{3}[(x_0+0.1)^3 - x_0^3] & si \quad \frac{1}{\lambda} > x_0 > 0 \\ 0 & si \quad x_0 > \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

(c) Calcule y grafique y $y'(x_0)$ y explique por que esta función es igual a $\mathrm{IRF}_{0,t}$ cuando la economía es descrita por la densidad $f(x,t)$ correspondiente a x_0.

Respuesta:

Note que para $x_0 < -0.1$ y $x_0 > \frac{1}{\lambda}$ la derivada siempre es 0. Para los casos intermedios es distinto. Para $x_0 \in [-0.1, 0]$ tenemos que:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \frac{\partial y}{\partial x_0}(\frac{10\lambda}{3}(x_0+0.1)^3) \\ &= 10\lambda(x_0+0.1)^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, cuando $x_0 \in (0, \frac{1}{\lambda})$:

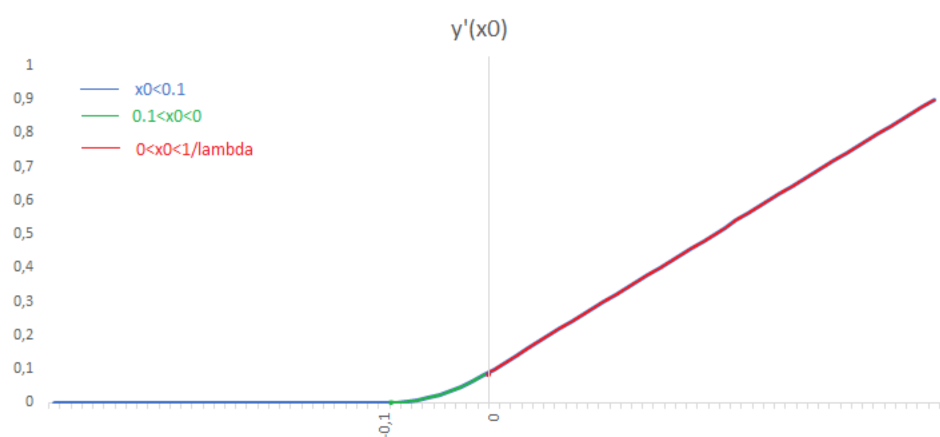
$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \frac{\partial y}{\partial x_0}(\frac{10\lambda}{3}(x_0+0.1)^3) - \frac{\partial y}{\partial x_0}(\frac{10\lambda}{3}(x_0)^3) \\ &= \frac{10\lambda}{3}3(x_0+0.1)^2 - \frac{10\lambda}{3}3(x_0^2) \\ &= 10\lambda[x_0^2 + 0.1^2 + 2x_0 * 0.1 - x_0^2] \\ &= \lambda[2x_0 + 0.1] \end{aligned}$$

Donde en el segundo paso aprovechamos lo calculado para $x_0 \in [-0.1, 0]$. Tenemos que $y'(x_0)$ corresponderá a la siguiente función por partes:

$$y'(x_0) = \begin{cases} 0, & si \quad x_0 < -0.1 \\ 10\lambda(x_0+0.1)^2 & si \quad -0.1 < x_0 < 0 \\ \lambda(2x_0+0.1) & si \quad \frac{1}{\lambda} > x_0 > 0 \\ 0 & si \quad x_0 > \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Note que el cálculo anterior corresponde a la derivada de la función $y(x_0)$ la que representaba el ratio de inversión y capital agregado. Al derivar este ratio y evaluarlo en x_0 lo que estamos haciendo en realidad es ver el impacto que tiene la densidad $f(x,t)$ cuando x_0 toma un valor dado. Así, la derivada evaluada corresponde cuánto afecta la estructura de la economía en 0 (la densidad evaluada en x_0) al ratio de inversión capital del período t. Lo anterior, equivale a la $\mathrm{IRF}_{0,t}$. Por lo que podemos decir que $y'(x_0) = \mathrm{IRF}_{0,t}$, el cual crece para valores más grandes de x_0 y tiende a 0 para valores cada vez más pequeños (e incluso negativos).

En el siguiente gráfico se muestran los casos donde $x_0 < \frac{1}{\lambda}$. Debido a que posterior a $\frac{1}{\lambda}$ la derivada vale 0 no se considero relevante incluirlo en el gráfico. El comportamiento de la $\mathrm{IRF}_{0,t}$ sugiere que a valores más pequeños de x_0 el efecto es menor, y tiene un pronunciamiento leve entre 0.1 y 0, y la mayor pendiente cuando $\frac{1}{\lambda} > x_0 > 0$. Posteriormente cuando $x_0 > \frac{1}{\lambda}$, como mencionamos el valor de la derivada se hará 0, es decir, una recta plana en el eje x.



(d) La familia de uniformes que consideramos en este ejercicio captura, de manera simplificada, las variaciones de la distribución de la inversión mandatada. Es decir, suponemos que en todo momento del tiempo, la densidad justo antes de ajustar $f(x,t)$ viene dada por una uniforme en $[x0, x0+0.1]$ donde lo único que varía en el tiempo es el valor de x_0. Seguimos suponiendo que en todo momento $x0 < 1/\lambda 0.1$.

Luego de una serie de shocks agregados positivos y grandes, ¿la densidad que representa la economía corresponderá a valores grandes (y positivos) de x_0 o a valores pequeños (y hasta negativos) de x_0? Justifique.

Respuesta:

Si los shocks son positivos y grandes debiesen mover la distribución hacia valores más grandes de x_0 y por lo tanto hacia la derecha (hacerse más positiva). Por lo que concluimos que la densidad que representa la economía corresponderá a valores grandes de x_0 (y positivos).

(e) Luego de una serie de shocks agregados adversos, ¿la densidad que representa la economía corresponderá a valores grandes (y positivos) de x_0 o a valores pequeños (y hasta negativos) de x_0? Justifique

Respuesta:

Si los shocks son adversos esperaríamos que estos fueran llevando a x_0 hacia valores más pequeños, lo que correrería las funciones de densidad hacia la izquierda (hacerse más negativa). Por lo tanto, la densidad que representa a la economía corresponderá más bien a valores pequeños de x_0 (e incluso negativos).

(f) Use las partes (c), (d) y (e) para justifica la afirmación siguiente: *Cuando mas se necesita, un estímulo a la inversión es menos efectivo*.

Respuesta:

En (c) vimos que la respuesta a un shock positivo viene dada por $\text{IRF}_{0,t} = y'(x_0)$. Entonces, dados los cálculos de (c) y lo conversado en (d) y (e), cuando x_0 toma valores muy pequeños (e incluso negativos) el efecto sobre el ratio inversión y capital agregado es muy pequeño y al revés cuando $x_0 > 0$. Lo que confirma que cuando arrastramos una recesión (i.e. $x_0 < 0$) la inversión reaccionará muy poco ante shocks positivos (IRF creciente en x_0). Por lo que concluimos que cuando más se necesita, un estímulo a la inversión es menos efectivo.