Guía 4

Nombre: Alberto Belmar
Rut: 19.801.271-8

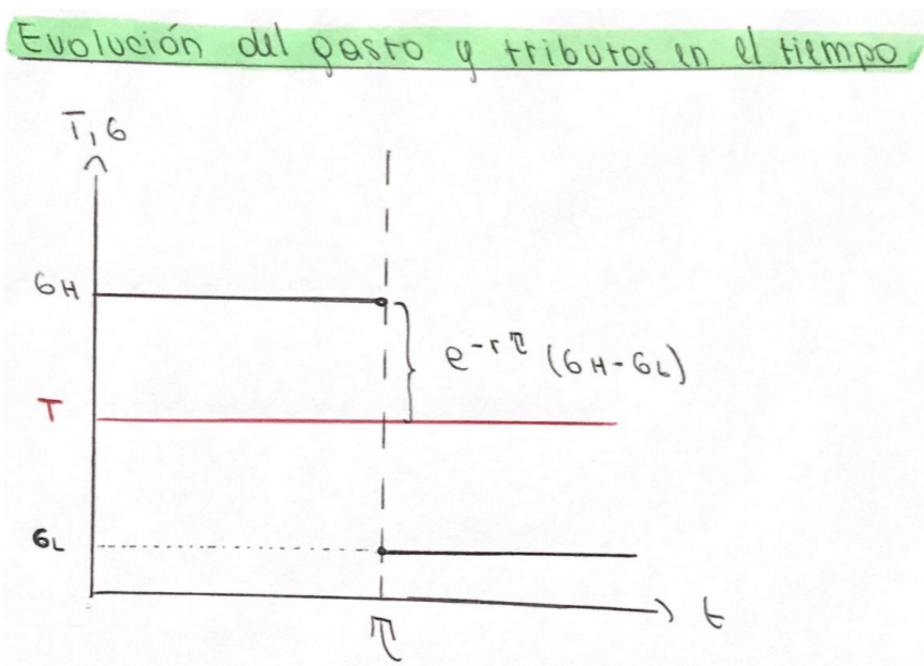
1. Suavizamiento de impuestos

Respuesta
Por lo visto en clases, sabemos que $\frac{T_t}{Y_t} = cte$, lo que nos lleva a: $Y_t = Y \ \forall t \Longrightarrow T_t = T \ \forall t$, es decir, como el cuociente es igual a una constante y el producto también es una constante, el impuesto es constante.

Luego, el gobierno cobra impuestos constantes para cumplir la restricción presupuestaria:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-rt}T(t)dt &= \int_0^\infty e^{-rt}G(t)dt \\
T\int_0^\infty e^{-rt}dt &= G_H\int_0^\tau e^{-rt}dt + G_L\int_\tau^\infty e^{-rt}dt \\
T\left(-\frac{e^{-rt}}{r}\Big|_0^\infty\right) &= G_H\left(-\frac{e^{-rt}}{r}\Big|_0^\tau\right) + G_L\left(-\frac{e^{-rt}}{r}\Big|_\tau^\infty\right) \\
T\left(0+\frac{e^0}{r}\right) &= G_H\left(-\frac{e^{-r\tau}}{r}+\frac{e^0}{r}\right) + G_L\left(0+\frac{e^{-r\tau}}{r}\right) \\
\frac{T}{r} &= G_H\left(-\frac{e^{-r\tau}}{r}+\frac{1}{r}\right) + G_L\frac{e^{-r\tau}}{r} \\
\frac{T}{r} &= \frac{1}{r}(G_H(1-e^{-r\tau}) + G_Le^{-r\tau}) \\
T &= G_H - e^{r\tau}(G_H - G_L)
\end{aligned}
$$

Gráficamente, nos quedaría:



Se aprecia que durante la pandemia, el gasto es más alto que el impuesto. Sin embargo, una vez que esta termina en el período τ, el impuesto sigue siendo el mismo mientras que el gasto es menor. De esta forma se "suaviza" impuestos y es posible financiar el mayor gasto incurrido durante la crisis sanitaria.

Por otro lado, para analizar la deuda, se deben considerar 2 períodos de tiempo:

(i) $0 \leq t \leq \tau$: Donde se acumula deuda.

(ii) $\tau < t$: Donde ya no se acumula deuda y esta se debe pagar.

En (i) el déficit es la tasa de cambio de la deuda:

$$D'(t) = (G_H - T) + rD(t) > 0$$

Ahora bien, integramos el valor presente de los déficit hasta τ por partes, es decir:

$$\int_0^\tau e^{-rt} D'(t)dt \quad = \quad \left(e^{-rt} D(t) \Big|_0^\tau \right) + \int_0^\tau e^{-rt} rD(t)dt$$

Si consideramos $D'(t) = (G_H - T) + rD(t)$ y $D(0) = 0$:

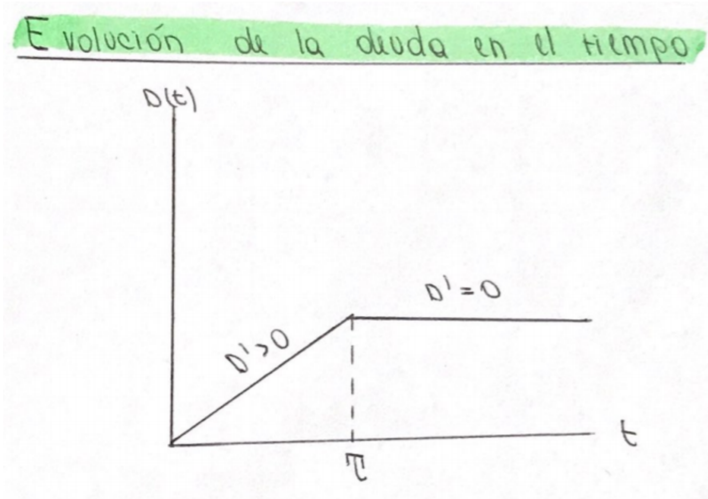
$$\begin{aligned}
\int_0^\tau e^{-rt}(G_H - T)dt + \int_0^\tau e^{-rt} rD(t)dt &= e^{-r\tau} D(\tau) + \int_0^\tau e^{-rt} rD(t)dt \\
(G_H - T) \left(-\frac{e^{-rt}}{r} \Big|_0^\tau \right) dt &= e^{-r\tau} D(\tau) \\
(G_H - T) \left(-\frac{e^{-r\tau}}{r} + \frac{1}{r} \right) &= e^{-r\tau} D(\tau) \\
D(\tau) &= \frac{(G_H - T)}{re^{-r\tau}}(1 - e^{-r\tau}) \\
D(\tau) &= \frac{(G_H - T)}{r}(e^{r\tau} - 1)
\end{aligned}$$

En (ii) ya no se adquiere más deuda ($D'(t) = 0$), sino que se deben pagar impuestos para financiar el gasto post guerra (G_L) y los intereses de la deuda. Es decir, cuando $t > \tau$:

$$\begin{aligned}
D'(t) &= (G_L - T) + rD(\tau) \\
T - G_L &= rD(\tau) \\
T &= G_L + rD(\tau)
\end{aligned}$$

Lo que indica que período a período, se financia el gasto post pandemia (G_L) y también los interéses de la deuda ($rD(\tau)$) con impuestos.

Gráficamente:



Vemos que hasta el período en que termina la pandemia (τ) la deuda crece y luego, deja de crecer para poder pagarla y no se vuelva insostenible.

2. Modelo de q de Tobin y Subsidio a la Inversión

(a)

Respuesta

Es razonable pensar que el gobierno no subsidiará los costos de ajuste, ya que indirectamente se asume que estos no forman parte del costo de capital, sino que son costos internos de la firma y dependen de cada una de ellas, por lo que son difíciles de medir dados los problemas de monitoreo.

Si por ejemplo, los costos de ajuste fueran iguales para cada firma, que se daría en el caso en que las firmas enfrentaran el mismo costo de instalación por unidad de capital (entre otras cosas), se podría considerar el costo de ajsute como costo de capital y de esta forma, haría más sentido suponer que el subsidio involucra los costos de ajuste.

(b)

Respuesta

Se debe tener presente lo siguiente antes de plantear el problema de optimización:

- $p_{k,t} = 1$
- $\delta = 0$
- $C(I_t, K_t) = \frac{b}{2} \frac{I_t^2}{K_t}$
- $\pi(K) = F(K)^{1-\eta}$

Luego, la firma maximiza:

$$\max_{I_t, t\geq 0} \quad \int_0^\infty \left[\pi(K_t, x_t) - (1-\sigma)I_t - \frac{b}{2}\frac{I_t^2}{K_t}\right] e^{-rt}dt$$
$$s.a. \quad K_0 \; dado; \quad K'(t) = I_t$$

Se define I_t como variable control, x_t y K_t como variables estado y λ_t la variable co-estado. Entonces, el Hamiltoniano corriente es:

$$H(K_t, I_t) = \pi(K_t, x_t) - (1-\sigma)I_t - \frac{b}{2}\frac{I_t^2}{K_t} + \lambda_t(I_t)$$

Las CPO's (considerando las condiciones necesarias para un máximo) son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial I_t} &= 0 \Longrightarrow (1-\sigma) + b\frac{I_t}{K_t} = \lambda_t \\
-\frac{\partial H}{\partial K} &= \lambda_t' - r\lambda_t \Longrightarrow \pi_K(K_t) + \frac{b}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} = -\lambda_t' + r\lambda_t \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda} &= 0 \Longrightarrow I_t = K'(t)
\end{aligned}$$

De la primera CPO obtenemos la q de Tobin:

$$q_t \equiv \lambda_t = (1-\sigma) + b\frac{I_t}{K_t}$$

Si a partir de la ecuación anterior despejamos $\frac{I_t}{K_t}$ llegamos a:

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{[q_t - (1-\sigma)]}{b} \tag{1}$$

De la segunda CPO tenemos:

$$\pi_K(K_t) + \frac{b}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} + \lambda_t' = r\lambda_t$$

De la tercera CPO combinada con (1):

$$K'(t) = \frac{[q_t - (1-\sigma)]}{b}K_t$$

Ahora bien, en estado estacionario $K'(t) = 0$, por lo tanto, de la ecuación anterior obtenemos:

$$q^* = (1-\sigma)$$

Podemos ver que en este caso q^* es menor a uno sin subsidio, ya que que el costo de la inversión disminuye gracias al subsidio. Por lo tanto, las firmas invertirán hasta que el valor del capital y el subsidio excedan el costo de capital.

Por otro lado, tomando la **segunda CPO** (una vez que reemplazamos (1) por $\frac{I_t^2}{K_t^2}$) y teniendo en cuenta que $\lambda_t = q_t$, llegamos a:

$$\lambda_t' = q_t' = rq_t - \pi_K(K_t) - \frac{[q_t - (1-\sigma)]^2}{2b} \tag{2}$$

Si al igual que en clases, consideramos $\pi(K_t) = F(K_t)^{1-\eta}$ (cuando se ignora el factor trabajo), entonces, tendremos que $\pi_K(K_t)$ (la derivada de π con respecto a K) se puede representar como:

$$\pi_K(K_t) = (1-\eta)F(K_t)^{-\eta}F_K(K_t)$$

Asumiendo en (2) $q' = 0$ por el estado estacionario y reemplazando $\pi_K(K_t)$ por la expresión anterior, nos queda:

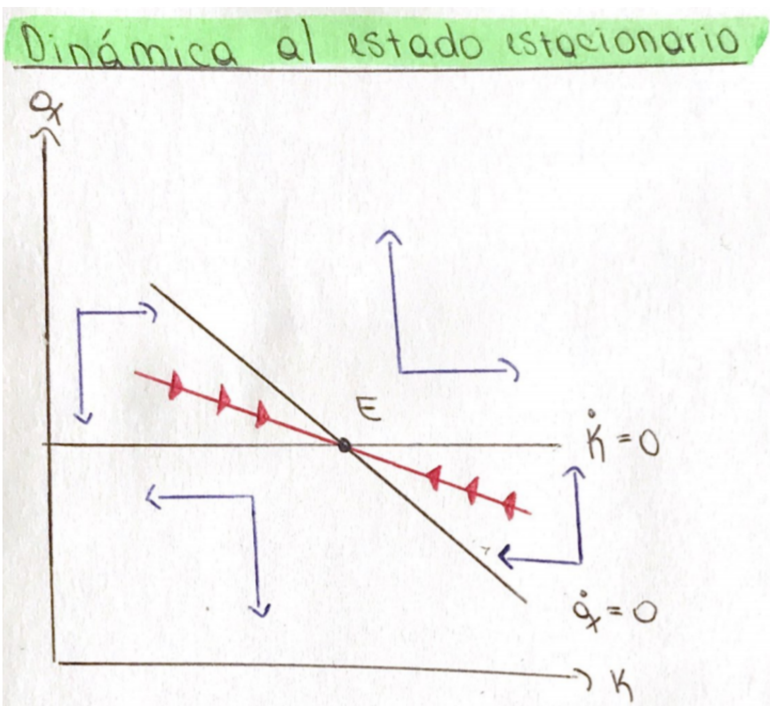
$$\begin{aligned}
\pi_K(K^*) &= rq^* - \frac{[q^* - (1-\sigma)]^2}{2b} \\
(1-\eta)F(K^*)^{-\eta}F_K(K^*) &= r(1-\sigma) - \frac{[(1-\sigma)-(1-\sigma)]^2}{2b} \\
F_K(K^*) &= \frac{r(1-\sigma)}{(1-\eta)F(K^*)^{-\eta}}
\end{aligned}$$

que es la ecuación por la cual se determina el capital de estado estacionario.

(c)

Respuesta

El diagrama de fase en el espacio (K, q) es:



La justificación de las flechas es la siguiente:

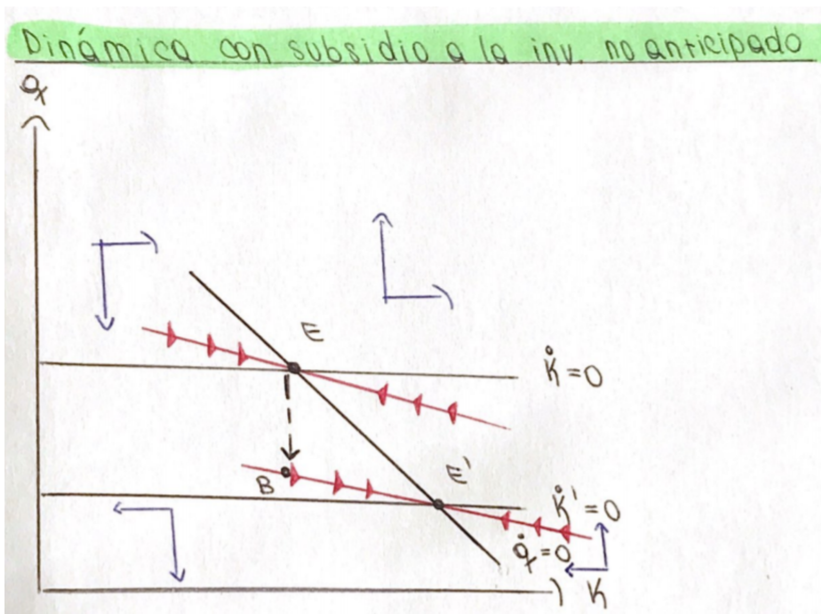
- Si tomamos un punto (K_0, q_0) que esté sobre la recta $\dot{K}$ y tomamos el punto (K_0, q_1) con $q_1 > q_0$, notamos que: $\uparrow q \Longrightarrow \uparrow K'(t)$ o $\dot{K}$, por lo que los puntos sobre la recta $\dot{K} = 0$ se mueven hacia la derecha y bajo $\dot{K} = 0$ hacia la izquierda.

- Si tomamos el punto (K_2, q_2) que está sobre la curva $\dot{q} = 0$ y tomamos el punto (K_3, q_2) que se encuentra a la derecha de la curva (ya que $K_3 > K_2$), vemos que: $\uparrow K \Longrightarrow \downarrow \pi_K(K_t) \Longrightarrow \uparrow q'_t$ o $\dot{q}$, por lo que los puntos a la derecha de la curva $\dot{q} = 0$ se mueven hacia arriba y los puntos a la izquierda van hacia abajo.

(d)

Respuesta

Dado un aumento no anticipado del subsidio, en $t = 0$ cae el costo de la inversión $(1 - \sigma)$, lo que hace caer q hasta alcanzar el nuevo brazo estable (punto B). Luego de esto, el capital va creciendo y q cayendo más camino al nuevo estado estacionario E', donde K alcanza su nuevo valor, por lo que el gráfico queda:

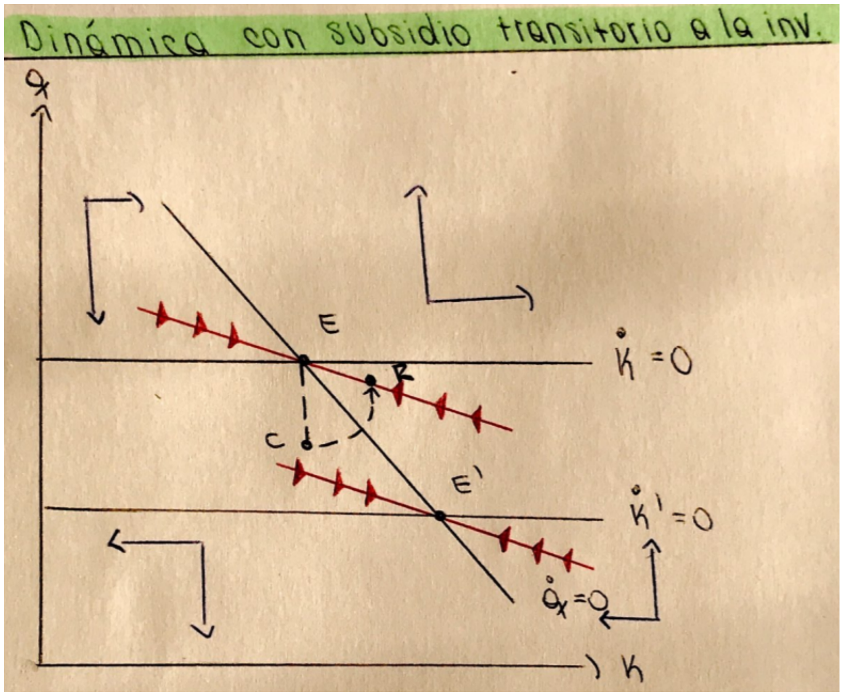


Importante notar que en $t = 0$ el K no se modifica porque en el corto plazo es fijo. Sin embargo, de $t = 0$ en adelante, este comienza a aumentar gradualmente hsta llegar a E'.

(e)

Respuesta

Si el subsidio es transitorio y dura de $t = 0$ a $t = T$, tenemos que:



Donde nuevamente se observa que q cae dado el aumento de σ, pero cae menos que en el caso anterior puesto que el subsidio es transitorio. Una vez que q llega al punto C en $t = 0$, la dinámica del estado estacionario hará que el K vaya hacia la derecha, pues dado el aumento de σ, tendremos que $q^* > 1-\sigma$ y hay incentivos de aumentar el capital. Por lo tanto, en $t = T$ nos encontraremos en el punto R, que forma parte del mismo brazo estable inicial. Desde el punto R el capital comenzará a disminuir y el q a aumentar, rumbo al estado estacionario inicial E.

3. Costos externos de ajuste

(a)

Respuesta

Si la firma toma la inversión agregada como dada y considerando que estamos bajo un escenario con tiempo continuo, el problema se resume en:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad \int_0^\infty e^{-rt}[\pi(k_t) - p(I_t)i_t]dt \\ &s.a. \quad \dot{k}_t = i_t - \delta k_t; \quad I_t, K_t \ dados; \quad k_0 \ dado \end{aligned}$$

(b)

Respuesta

El Hamiltoniano en valor corriente es:

$$H = \pi(k_t) - p(I_t)i_t + \lambda_t(i_t - \delta k_t)$$

Las CPO's:

$$\frac{\partial H}{\partial i_t} = 0 \Longrightarrow p(I_t) = \lambda_t \Longrightarrow \frac{\lambda_t}{p(I_t)} = 1 \tag{3}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t \Longrightarrow -\pi'(k_t) + \delta\lambda_t = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t \Longrightarrow \dot{\lambda}_t = -\pi'(k_t) + \lambda_t(\delta + r) \tag{4}$$

A partir de (3), concluímos que $q_t = \frac{\lambda_t}{p(I_t)} = 1$ no varía en el tiempo. El motivo de esto es que una unidad instalada en la firma vale lo mismo que una unidad en la tienda, ya que no existen costos de instalación del capital.

Ahora bien, si derivamos (3) con respecto al tiempo, nos queda:

$$\dot{\lambda}_t = p'(I_t)\dot{I}_t$$

Reemplazando el $\dot{\lambda}_t$ anterior en (4) y considerando que $\lambda_t = p(I_t)$ por la ecuación (3), tenemos que:

$$p'(I_t)\dot{I}_t = -\pi'(k_t) + p(I_t)(\delta + r)$$

$$\pi'(k_t) = p(I_t)(\delta + r) - p'(I_t)\dot{I}_t \tag{5}$$

Mientras que, en el modelo neoclásico de Jorgenson teníamos que:

$$\pi'(k_t) = p_{K,t}(\delta + r) - \dot{p}_{K,t} \tag{6}$$

Notando que con costos externos $p_{K,t} = p(I_t)$ y que, por lo tanto, $\dot{p}_{K,t} = p'(I_t)\dot{I}_t$; al comparar las dos expresiones, concluímos que la firma satisface una versión modificada de la regla de inversión de costos de usuario del modelo neoclásico, en que el precio del capital depende de la inversión agregada.

(c)

Respuesta

Vamos a utilizar dos expresiones para caracterizar el estado estacionario. Primero, la clásica ecuación que describe la evolución del capital en su versión agregada y segundo, la ecuación (5) pero también en su versión agregada, ya que $K = k$. Entonces:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \tag{7}$$

$$\pi'(K_t) = p(I_t)(\delta + r) - p'(I_t)\dot{I}_t \tag{8}$$

En estado estacionario se impone $\dot{K}_t = \dot{I}_t = 0$, quedando las dos ecuaciones anteriores como:

$$I_{EE} = \delta K_{EE} \tag{9}$$

$$\pi'(K_{EE}) = p(I_{EE})(\delta + r) \tag{10}$$

Reemplazando (9) en (10) llegamos a:

$$\pi'(K_{EE}) = p(\delta K_{EE})(\delta + r) \tag{11}$$

Notamos que el lado izquierdo es decreciente en K, mientras el lado derecho es creciente en él, por lo que la expresión anterior tiene solución única.

Ahora bien, con el fin de determinar la dinámica de la economía, vamos a dibujar el diagrama de fase, para lo cual necesitamos el lugar geométrico de los pares (K, I) donde $\dot{K}_t = 0$ e $\dot{I}_t = 0$.

De (7) tenemos que el lugar geométrico donde $\dot{K}_t = 0$ es:

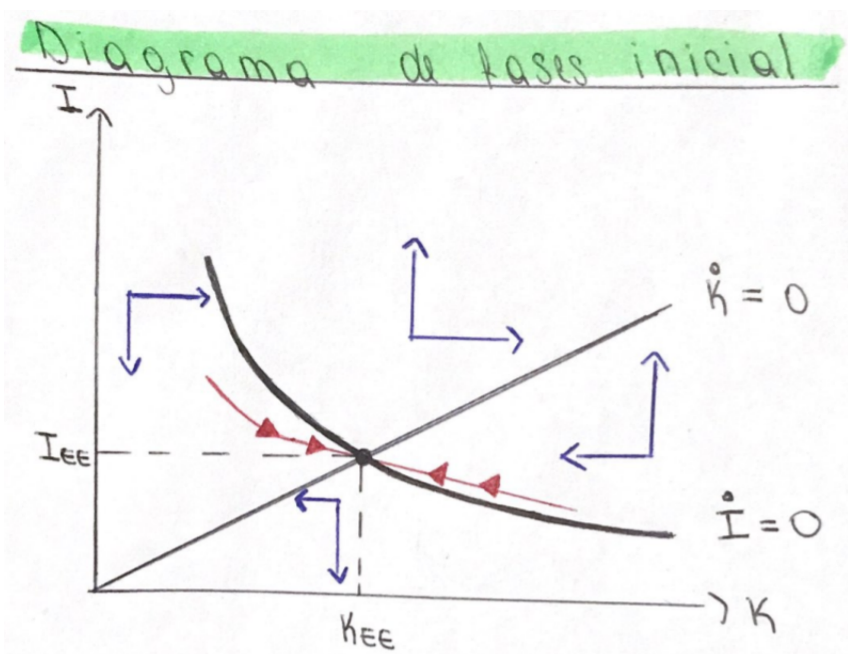
$$I_t = \delta K_t \tag{12}$$

Mientras que de (8) tenemos que el lugar geométrico donde $\dot{I}_t = 0$ es:

$$\pi'(K_t) = p(I_t)(\delta + r) \tag{13}$$

En esta última ecuación, si $\uparrow K_t \Longrightarrow \downarrow \pi'(K_t) \Longrightarrow \downarrow p(I_t) \Longrightarrow \downarrow I_t$, por lo que este último lugar geométrico tendrá pendiente negativa.

Luego, el diagrama de fase será de la siguiente forma:



Donde la justificación de las flechas y la dinámica es la siguiente:

- Si tomamos un punto (K_0, I_0) que esté sobre la recta $\dot{K}$ y tomamos el punto (K_0, I_1) con $I_1 > I_0$, notamos de la ecuación (7) que si $\uparrow I \Longrightarrow \uparrow \dot{K}$, por lo que los puntos sobre la recta $\dot{K} = 0$ se mueven hacia la derecha y bajo $\dot{K} = 0$ hacia la izquierda.
- Si tomamos el punto (K_2, I_2) que está sobre la curva $\dot{I} = 0$ y tomamos el punto (K_3, I_2) que se encuentra a la derecha de la curva $(K_3 > K_2)$; a partir de la ecuación (8), si $\uparrow K \Longrightarrow \downarrow \pi_K(K_t) \Longrightarrow \uparrow \dot{I}$ (dejando lo demás constante), por lo que los puntos a la derecha de la curva $\dot{I} = 0$ se mueven hacia arriba y los puntos a la izquierda lo hacen hacia abajo.

Por último, I puede saltar en este modelo porque no hay costos internos de ajuste. Notar sin embargo que los saltos de I son acotados porque sube el precio del capital, a diferencia de lo que ocurriría en el modelo neoclásico donde los saltos de I sin costos internos de ajuste serían infinitos.

(d)

Respuesta

En (c) vimos que:

$$\pi'(K_{EE}) = p(\delta K_{EE})(\delta + r)$$

Reemplazando $p(\delta K_{EE})$ por $(1-\tau)p(\delta K_{EE})$ llegamos al nuevo estado estacionario:

$$\pi'(K_{EE}) = (1-\tau)p(\delta K_{EE})(\delta + r)$$

Ahora bien, para probar que el capital del nuevo estado estacionario será mayor que en el estado estacionario original, basta con mostrar que K_{EE} es creciente en τ, para lo cual, partimos con la identidad que define $K_{EE}(0)$:

$$\pi'(K_{EE}(0)) = (\delta + r)p(\delta K_{EE}(0)) \Longrightarrow \pi'(K_{EE}(0)) > (1-\tau)(\delta + r)p(\delta K_{EE}(0))$$

Para reestablecer la igualdad anterior, debe $\uparrow K_{EE}$, pues eso reduce el lado izquierdo $(\pi(K_t)' < 0)$ y aumenta el lado derecho $(p'(\delta K_t) > 0)$. Luego, tenemos que K_{EE} e I_{EE} serán mayores en el nuevo estado estacionario.

Para realizar el diagrama de fase, caracterizamos nuevamente el brazo estable donde $\dot{K}_t = 0$ e $\dot{I}_t = 0$.

Notamos que el brazo estable donde $\dot{K}_t = 0$ no cambia y sigue siendo:

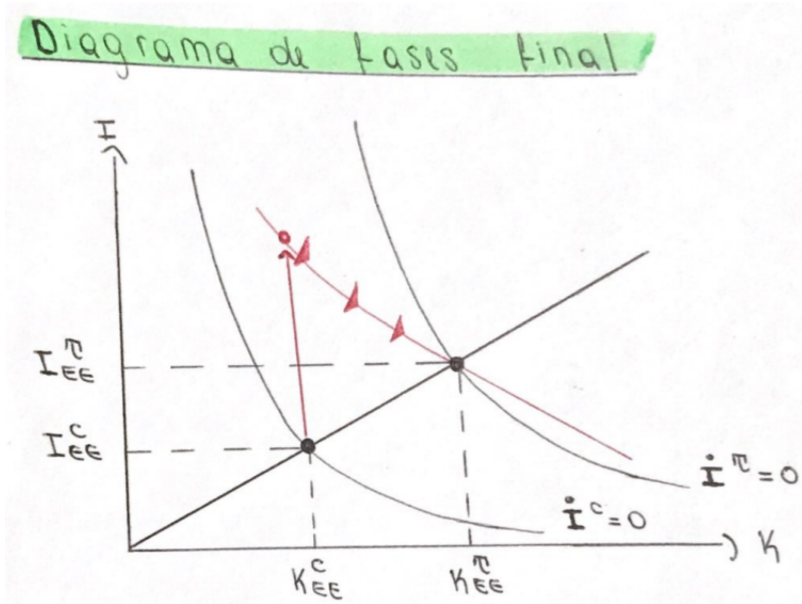
$$I_t = \delta K_t$$

Mientras que el brazo estable para $\dot{I}_t = 0$ es:

$$\pi'(K_t) = (1-\tau)p(I_t)(\delta + r)$$

es decir, aumenta y por lo tanto se desplaza hacia afuera.

Gráficamente quedaría:



Notamos que I salta hasta llegar al nuevo brazo estable (punto rojo), desde donde comenzará a bajar y K comenzará a aumentar hasta llegar al nuevo estado estacionario ($K^{\tau}_{EE}, I^{\tau}_{EE}$). Notar también que en el nuevo estado estacionario, K^{τ}_{EE} e I^{τ}_{EE} son mayores que K^{c}_{EE} e I^{c}_{EE} respectivamente, tal como se había afirmado antes de hacer el gráfico.

(e)

Respuesta

La firma resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \int_0^{\infty} e^{-rt}[\pi(K_t) - p(I_t)I_t]dt \\ s.a. \quad & \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \end{aligned}$$

ya que actúa como monopsonista y por lo tanto trabaja con variables agregadas.

El Hamiltoniano quedaría:

$$H = \pi(K_t) - p(I_t)I_t + \lambda_t(I_t - \delta K_t)$$

con $p(I_t) = I_t^{\eta}$

Las CPO's:

$$\frac{\partial H}{\partial I_t} = 0 \Longrightarrow -(\eta I_t^{\eta-1}I_t + p(I_t)) + \lambda_t = 0 \Longrightarrow p(I_t)(1+\eta) = \lambda_t \tag{14}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial K_t} = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t \Longrightarrow -\pi'(K_t) + \delta\lambda_t = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t \Longrightarrow \dot{\lambda}_t = \lambda_t(r+\delta) - \pi'(K_t) \tag{15}$$

Derivando (14) con respecto al tiempo:

$$p'(I_t)\dot{I}_t(1+\eta) = \dot{\lambda}_t \tag{16}$$

Reemplazando (14) y (16) en (15):

$$p'(I_t)\dot{I}_t(1+\eta) = p(I_t)(1+\eta)(r+\delta) - \pi'(K_t)$$

$$\pi'(K_t) = p(I_t)(1+\eta)(r+\delta) - p'(I_t)\dot{I}_t(1+\eta) \tag{17}$$

Recordar también la expresión clásica para la evolución del capital:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \tag{18}$$

Luego, en estado estacionario $\dot{K}_t = \dot{I}_t = 0$, por lo que, (17) y (18) nos quedarían respectivamente como:

$$\pi'(K_{EE}) = p(I_{EE})(1+\eta)(r+\delta) \tag{19}$$

$$I_{EE} = \delta K_{EE} \tag{20}$$

Reemplazando (20) en (19):

$$\pi'(K_{EE}) = p(\delta K_{EE})(1+\eta)(r+\delta) \tag{21}$$

Luego, la única diferencia entre la ecuación (11) y (21) es el término $1+\eta$. Por lo tanto, tendremos que K_{EE} será menor para $\eta > 0$ que para $\eta = 0$. La intuición es que un sector monopsónico invierte menos ya que internaliza el impacto de sus decisiones de inversión sobre el precio del capital.