# Capital Humano

Partimos con un modelo de un sector con K y H

$\Rightarrow$ $Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$ $\qquad H = h \cdot L$

↳ cap. humano individuo representativo.

(Asumimos L cte $\Rightarrow$ H crece ssi $\uparrow h$)

→ También asumimos A cte.

* El output se usa en → C, I → K, H

* $\delta_H = \delta_K = \delta$

→ La restricción Pptaria de la economía es

$$\boxed{Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha} = C + \underbrace{I}_{I_K + I_H}}$$

→ El stock de K, H está dado por:

$\dot{K} = I_K - \delta K \qquad \dot{H} = I_H - \delta H$

→ los individuos maximizan:

$$U = \int_0^{\infty} u(c_t)e^{-\rho t}\,dt \qquad (n=0)$$

s.a. $\dot{K} = I_K - \delta K$

$\dot{H} = I_H - \delta H$

$AK^{\alpha}H^{1-\alpha} = C + I_K + I_H$

$\Rightarrow \mathcal{H} = u(c)\cdot e^{-\rho t} + V_t(I_K - \delta K) + \mu_t(I_H - \delta H) + w_t(AK^{\alpha}H^{1-\alpha} - C - I_K - I_H)$

→ usando $u(c) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}$

→ controles: $C, I_K, I_H$

estado: $K, H$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_K} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = -\dot{V}_t \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial} = -\dot{\mu}_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{1}{\theta}\left\{A\alpha\left(\frac{K}{H}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right\}}$$

$$\boxed{\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{1}{\theta}\left\{A(1-\alpha)\left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} - \delta - \rho\right\}}$$

→ Deben ser iguales

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{A}\alpha\left(\frac{K}{H}\right)^{-(1-\alpha)} - \cancel{\delta}}_{\text{Pmg neto K}} = \underbrace{\cancel{A}(1-\alpha)\left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} - \cancel{\delta}}_{\text{Pmg neto L}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{K}{H} = \frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow r = A(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha} - \delta = \boxed{A(1-\alpha)^{(1-\alpha)}\alpha^{\alpha} - \delta = r}$$

↳ cte = modelo AK!

→ Hay ret. decrecientes ssi K, H crecen x separado

→ si crecen a la misma tasa $\Rightarrow \frac{\dot{c}}{c}$ cte

$$\Rightarrow \gamma = \left(\frac{1}{\theta}\right)(A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta - \rho)$$

→ luego, notemos que:

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}\cdot\underbrace{\left(\frac{K}{K}\right)}_{1} = AK\cdot K^{\alpha-1}H^{1-\alpha} = AK\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha} = AK\underbrace{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}_{\text{Análogo al modelo AK.}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{h}}{h} = \frac{\dot{y}}{y}}$$

(x transversalidad)

→ Restricción de la inversión bruta no-negativa

→ suponemos que iniciamos con K(0), H(0)

→ si $\frac{K(0)}{H(0)} \neq \frac{\alpha}{1-\alpha}$ → Ajustamos ambos capitales hasta que se cumpla la igualdad → Aquí suponemos que la inversión es reversible → Pow reajusta

→ Entonces asumiremos inversión irreversible, es decir $I_K \geq 0$, $I_H \geq 0$

⇒ si $\frac{K(0)}{H(0)} < \frac{\alpha}{1-\alpha}$ ⇒ H relativamente abundante a K

↳ $I_H = 0$ ⇒ $\dot{H} = I_H - \delta H$

⇒ $\frac{\dot{H}}{H} = -\delta$

→ $\boxed{H(t) = H(0)e^{-\delta t}}$ $t = 0, \ldots$

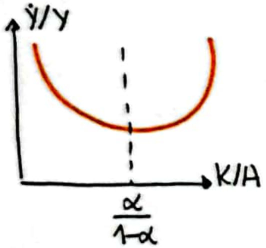
→ si $H = u(c)e^{-\rho t} + v(AK^{\alpha}H^{1-\alpha} - c - \delta K)$

↳ Esto es como el modelo clásico donde optimizamos un puro capital.

→ la diferencia crucial con el modelo neoclásico es que K/H crece en el tiempo y alcanza el valor $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ en tiempo finito.

→ En la transición → sirve el modelo neoclásico pero en el L.P. el ratio de crecimiento es (+) (por

Gráficamente:




## UZAWA-LUCAS MODEL

→ lo que estamos haciendo es considerar el trabajo como capital humano ⇒ se puede acumular

→ Ahora asumiremos que K, H son bienes distintos producidos por tecnologías distintas → modelo de 2 sectores

Producción Final → necesita $<^{K}_{H}$ } output puede ser utilizado para ↙ consumo ↘ transformarlo en K.

$$\boxed{\dot{K} = AK_Y^{\alpha}H_Y^{1-\alpha} - c - \delta_K K} \Leftarrow$$

Producción de $\underbrace{H}$ → necesita $<^{K}_{H}$ } $\boxed{\dot{H} = BK_H^{\eta}H_H^{1-\eta} - \delta_H H}$

(Bien rival) $(B \neq A)$

⇓

$\boxed{H = H_K + H_H}$

↳ u → fracción de H utilizada en la producción de bienes finales

↳ 1-u → fracción utilizada en el proceso educativo.

→ Uzawa-Lucas asumen $\eta = 0$ ⇒ solo utiliza H para producir capital humano

⇒ Todo K es usado en el sector del bien final.

↳ $Y = C + \dot{K} + \delta K = AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha}$

$\dot{H} + \delta H = B(1-u)H$

→ Individuos → $\max\ U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left(\frac{C^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta}\right)dt$

s.a. $\dot{H} = B(1-u)H - \delta H$

$\dot{K} = AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} - c - \delta K$

$K(0)$, $H(0)$

→ controles: c, u, Planteamos el Hamiltoniano

$$H = e^{-\rho t}\left(\frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right) + v_t\{AK^{\alpha}u^{1-\alpha}H^{1-\alpha} - c - \delta K\}$$

$$+ \mu_t\{B(1-u)H - \delta H\}$$

Escaneado con CamScanner

$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 = e^{-\rho t} \frac{\cancel{(1-\theta)} C^{-\theta}}{\cancel{(1-\theta)}} - V_t$

$\Rightarrow V_t = e^{-\rho t} C^{-\theta} \;/\; \ln$

$\ln(V_t) = (-\rho t) - (\theta)\ln(C) \;/\; \partial/\partial t$

$\frac{\dot{V}_t}{V_t} = -\rho - \theta \frac{\dot{C}_t}{C_t}$

$\Rightarrow \frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{1}{\theta}\left[-\frac{\dot{V}_t}{V_t} - \rho\right]$ (1)

$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = V_t (1-\alpha) u^{-\alpha} A K^{\alpha} H^{1-\alpha} - \mu_t B H$ (2)

$\frac{\partial H}{\partial K} = -\dot{V}_t = V_t (A \alpha K^{\alpha-1} H^{1-\alpha} u^{1-\alpha} - \delta)$ (3)

$\frac{\partial H}{\partial H} = -\dot{\mu}_t = \mu_t (B(1-u) - \delta) + V_t ((1-\alpha) A K^{\alpha} u^{1-\alpha} H^{-\alpha})$ (4)

Transversalidad

$\lim_{t\to\infty} V_t \cdot \quad = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \mu_t \cdot H_t = 0$

→ (3) en (1)

$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha K^{\alpha-1} H^{1-\alpha} u^{1-\alpha} - \delta - \rho\right] = \gamma_c^*$

$\gamma_c^* = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha u^{1-\alpha} \left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right]$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{\theta\gamma_c^* + \delta + \rho}{A\alpha u^{1-\alpha}}}_{\text{ctes !}} = \left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha}$

ctes ! $\Rightarrow \frac{H}{K}$ cte. $\Rightarrow \boxed{\gamma_H^* = \gamma_K^*}$

→ De la restricción de $\dot{K}$

$\frac{\dot{K}}{K} = A K^{\alpha-1} (uH)^{1-\alpha} - \frac{c}{K} - \delta K$

$\underset{\text{en EE cte}}{\gamma_*^K} = A u^{1-\alpha} \underbrace{\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha}}_{\text{cte}} - \underbrace{\frac{c}{K}}_{\text{cte}} - \delta$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma^*_c = \gamma^*_K = \gamma^*_H = \gamma^*$

→ Falta mostrar que $\gamma^*_Y = \gamma^*$

$Y = AK^{\alpha} H^{1-\alpha} u^{1-\alpha} = \underset{\text{cte}}{A} \underset{\text{cte}}{\left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha}} H \underset{\text{cte}}{(u^*)^{1-\alpha}} \rightarrow$ Y crece con H

$\Rightarrow Y = \text{cte}\, H \;/\; \ln \Rightarrow \ln(Y) = \ln(\text{cte}) + \ln(H) \;/\; \partial/\partial t$

$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{H}}{H} = \gamma_Y^*$

$\Rightarrow \boxed{\gamma^*_c = \gamma^*_K = \gamma^*_H = \gamma^*_Y = \gamma^*}$

→ De (2)

$V_t (1-\alpha) A K^{\alpha} u^{-\alpha} H^{1-\alpha} = \mu_t B \cancel{H} \;/ \cdot u$

$V_t (1-\alpha) A K^{\alpha} u^{1-\alpha} H^{-\alpha} = \mu_t B \cdot u$

$V_t \underbrace{(1-\alpha) A u^{1-\alpha} \left(\frac{H}{K}\right)^{-\alpha}}_{\text{cte}} = \mu_t \cdot \underbrace{B \cdot u}_{\text{cte}}$ (5)

$\Rightarrow \frac{\dot{V}_t}{V_t} = \frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} \Leftrightarrow \boxed{\gamma_V^* = \gamma_\mu^*}$

luego notemos que podemos meter (5) en (4)

$-\dot{\mu}_t = \mu_t\,(B(1-u^*) - \delta) + \mu_t B \cdot u^*$

$\Rightarrow \frac{-\dot{\mu}_t}{\mu_t} = B(1-u^*) - \delta + Bu^* = B - \cancel{Bu^*} - \delta + \cancel{Bu^*}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{-\dot{\mu}_t}{\mu_t} = B - \delta = -\frac{\dot{V}_t}{V_t}}$

$\Rightarrow \boxed{\gamma_c^* = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[B - \delta - \rho] = \gamma_Y^* = \gamma_K^* = \gamma_H^*}$

Parámetro que afecta el crecimiento es el de la product. del sector educativo

→ calculamos $u^*$

→ De la restricción de $\dot{H}$

$\underbrace{\frac{\dot{H}}{H}}_{\gamma_H^*} = B(1-u^*) - \delta \quad \Rightarrow \boxed{u^* = 1 - \frac{\gamma^* + \delta}{B}}$

→ Para que la UT $\not\to \infty \Rightarrow \rho > (1-\theta)\gamma_c^*$

→ esto viene de que $C_t = C_0 \cdot e^{\overbrace{1/\theta[B-\delta-\rho]}^{\gamma^*} t}$ → resolviendo la EDO

$\Rightarrow V = \frac{C_0' e^{\gamma^*(1-\theta)t} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} \Rightarrow \rho > (1-\theta)\gamma^*$

→ **Dinámica** → ssi K/H son ≠ a la cond. de EE.