Procesos de Poisson y modelos epidemiológicos

a) $\dot{S}_t = -S_t \cdot I_t \cdot b$. La intuición es que cada infectado tiene contacto con b personas, de las cuales una fracción S_t son susceptibles.

b) $\dot{R}_t = kI_t$. Los nuevos recuperados son el número de infectados multiplicada por la tasa a la que se recuperan (k).

c) $\dot{S}_t + \dot{I}_t + \dot{R}_t = 0 \implies \dot{I}_t = -\left(\dot{S}_t + \dot{R}_t\right) = bI_tS_t + kI_t$.

d) $\dot{I}_0 = bI_0S_0 - kI_0 = I_0k\,(b/k - 1) > 0$. Para que lo anterior sea mayor a cero, $b/k \equiv R_0 > 0$.

Salario mínimo y desempleo

a) Ecuaciones de Bellman:

$$\begin{aligned} rV_e &= w - \lambda(V_e - V_u), \\ rV_u &= z - \phi(e) + \mu e\,(V_e - V_u) = z - \tfrac{e^{1+\gamma}}{1+\gamma} + \mu e\,(V_e - V_u). \end{aligned}$$

b) Trabajando las ecuaciones de Bellman:

$$\begin{aligned} rV_e - r_V u &= w - \lambda(V_e - V_u) - z + \phi(e) - \mu e(V_e - V_u) \\ (r + \lambda + \mu e)(V_e - V_u) &= w - z + \phi(e) \\ V_e - V_u &= \frac{w - z + \phi(e)}{r + \lambda + \mu e} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de Bellman para un trabajador desempleado y maximizando ello:

$$\max_e rV_u = z - \phi(e) + \mu e \left(\frac{w - z + \phi(e)}{r + \lambda + \mu e}\right).$$

c) Se tiene que

$$\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) e^{1+\gamma} + \frac{r+\lambda}{\mu} e^{\gamma} = w - z.$$

Las derivadas solicitadas se obtienen a partir del teorema de la envolvente.

La interpretación:

- $\frac{\partial e^*}{\partial w} > 0$: e^* es creciente en w, debido a que con un mayor salario, el valor presente de un trabajador empleado (V_e) crece, por lo que el trabajador se esfuerza más para conseguir empleo pues ello le generará una mayor probabilidad de emplearse.
- $\frac{\partial e^*}{\partial \mu} > 0$: e^* es creciente en w puesto que una mayor probabilidad de conseguir empleo aumenta el impacto marginal que tiene el esfuerzo sobre la probabilidad de conseguir un empleo. Es decir, una unidad extra de esfuerzo genera un mayor aumento en la probabilidad de emplearse.
- $\frac{\partial e^*}{\partial z} < 0$: e^* es decreciente en z debido a que ello reduce la diferencia del valor presente descontado de estar empleado y desempleado, por lo que estar desempleado se vuelve relativamente más atractivo.

- $\frac{\partial e^*}{\partial r} < 0$: ante una mayor tasa de descuento, mayor desutilidad genera el esfuerzo en el periodo actual para conseguir un empleo, por lo que el esfuerzo e^* es decreciente en r.
- $\frac{\partial e^*}{\partial \lambda} < 0$: e^* es decreciente en λ porque la probabilidad de perder el empleo una vez contratado es mayor, lo que reduce el valor presente descontado de estar empleado.
- $\frac{\partial e^*}{\partial \gamma} < 0$: dado que γ captura la desutilidad marginal que genera el esfuerzo, un mayor nivel de γ aumenta la desutilidad que genera el esfuerzo y, por lo tanto, reduce el esfuerzo óptimo.

d) Se tiene que $\dot{u}_t = 0$ en steady state, por lo que

$$\begin{aligned}
\dot{u}_t &= \lambda(1-u_t) - \mu e \cdot u_t \\
0 &= \lambda(1-u_t) - \mu e \cdot u_t \\
\lambda(1-u_t) &= \mu e \cdot u_t \\
u_t &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu e}
\end{aligned}$$

Dado que $\partial e^*/\partial w > 0$, un aumento de salario tiene un efecto negativo sobre la tasa de desempleo.