Modelo de Ciclos Reales
Parte 2

Modelo estocástico de crecimiento con oferta variable de trabajo: preferencias y tecnología

- Hogar representativo.

- Mercados competitivos, completos y sin fricciones.

Modelo

- Preferencias:

$$E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty}\beta^{t+i}[u(C_{t+i})-v(L_{t+i})]\right]$$

- Donde

$$u(C)=\frac{1}{1-\gamma}C^{1-\gamma}$$
$$=\log C \text{ iff } \gamma=1$$

C: consumo
L: empleo

$$v(L)=\frac{1}{1+\varphi}L^{1+\varphi}$$

- Con $0<\beta<1;\ \gamma>0;\ \varphi>0$

- Donde γ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo; φ es la elasticidad Frisch de la oferta de trabajo.

Modelo

- Tecnología:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

- Donde Y es producto, $A^{1-\alpha}$ es la productividad total de los factores y K es capital.
- Restricción de recursos:

$$C_t + K_{t+1} = Y_t + (1-\delta) K_t$$

- Donde $0 < \delta < 1$ es la tasa de depreciación.

Modelo

- La tecnología sigue es siguiente proceso:

$$A_t/\overline{A}_t = (A_{t-1}/\overline{A}_{t-1})^{\rho} e^{\epsilon_t}$$

$$\overline{A}_t/\overline{A}_{t-1} = G = 1 + g \geq 1$$

- Donde $\bar{A}_t$ es la tendencia, $0 < \rho < 1$ y ϵ_t es un shock i.i.d. con media cero.

Modelo: problema del planificador social

- Sin fricciones en los mercados ni externalidades, la solución del planificador central y el problema descentralizado generan la misma (Pareto óptima) asignación en equilibrio.

- Primero reemplazamos la función de producción en la restricción de recursos para eliminar Y.

Modelo: problema del planificador social

- El problema secuencial que enfrenta el planificador social dado el estado inicial (K_t, A_t) es:

$$V(K_t, A_t) = \max_{\{C_{t+i}, L_{t+i}, K_{t+1+i}\}_{i\geq 0}} E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta^{t+i}\left(\frac{1}{1-\gamma}C_{t+i}^{1-\gamma} - \frac{1}{1+\varphi}L_{t+i}^{1+\varphi}\right)\right]$$

- Sujeto a:

$$C_t + K_{t+1} = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t$$

$$A_t/\overline{A} = (A_{t-1}/\overline{A})^{\rho} e^{\epsilon_t}$$

$$K_0 = K$$

$$A_0 = A$$

La ecuación de Bellman

$$V(K_t, A_t) = \max_{C_t, L_t, K_{t+1}} \frac{1}{1-\gamma} C_t^{1-\gamma} - \frac{1}{1+\varphi} L_t^{1+\varphi} + \beta E_t \{V(K_{t+1}, A_{t+1})\}$$

- Sujeto a:

$$C_t + K_{t+1} = K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha} + (1-\delta) K_t$$

- La solución a este problema nos entrega las policy functions $C(K_t, A_t), L(K_t, A_t)$ y $K_{t+1}(K_t, A_t)$.

Solución

- Para solucionar en primer lugar se usa la restricción de recursos para eliminar C en la función objetivo.
- Luego se optimiza con respecto a (K_{t+1}, L_t) y se usa el teorema de la envolvente para encontrar $V_1(K_t, A_t)$

$$C_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} + (1-\delta)\,K_t - K_{t+1}$$

Solución

- Condición de primer orden necesaria (FONC) con respecto a K_{t+1}:

$$C_t^{-\gamma} = \beta E_t\{V_1(K_{t+1}, A_{t+1}\}$$

- Teorema de la envolvente:

$$V_1(K_t, A_t) = C_t^{-\gamma}[\alpha(\frac{K_t}{A_t L_t})^{\alpha-1} + 1 - \delta]$$

$$V_1(K_{t+1}, A_{t+1}) = C_{t+1}^{-\gamma}[\alpha(\frac{K_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}})^{\alpha-1} + 1 - \delta]$$

Condiciones necesaria y suficientes para la optimalidad

- Condición de primer orden consumo:

$$C_t^{-\gamma} = E_t\{\beta C_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1}\}$$

- Donde

$$R_{t+1} = \alpha(\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}})^{\alpha-1} + (1-\delta)$$

- Condición de primer orden para oferta de trabajo:

$$(1-\alpha)A_t(\frac{K_t}{A_t L_t})^{\alpha} C_t^{-\gamma} = L_t^{\varphi}$$

- Condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t C_t^{-\gamma} K_{t+1} = 0$$

Modelo completo

Variables endógenas: $(Y_t, L_t, C_t, R_{t+1}, K_{t+1})$

Estados predeterminados: (K_t, A_t)

Producto: $$Y_t = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

Trabajo: $$(1-\alpha)A_t(\frac{K_t}{A_t L_t})^{\alpha} = \frac{L_t^{\varphi}}{C_t^{-\gamma}}$$

Consumo/ahorro: $$C_t^{-\gamma} = E_t\{\beta C_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1}\}$$

Tasa de retorno del capital: $$R_{t+1} = \alpha(\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}})^{\alpha-1} + 1 - \delta$$

Restricción de recursos: $$K_{t+1} = Y_t + (1-\delta)\, K_t - C_t$$

Evolución de la tecnología: $$A_t/\overline{A} = (A_{t-1}/\overline{A})^{\rho} e^{\epsilon_t}$$

Fuerza que genera ciclo: fluctuaciones en A_t.

Solución descentralizada

- Problema de decisión de los hogares

$\Gamma_t \equiv$ estado macro (K_t, A_t);

$$V(K_t(h), \Gamma_t) = \max_{\{C(h), L(h)_t, K(h)_{t+1}\}} E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{1}{1-\gamma} C_t(h)^{1-\gamma} - \frac{1}{1+\varphi} L_t(h)^{1+\varphi}\right)\right]$$

Sujeto a la restricción presupuestaria de período

$$C_t(h) + K_{t+1}(h) = W_t L_t(h) + (Z_t + 1 - \delta) K_t(h)$$

Y la condición terminal para eliminar esquemas de Ponzi

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T \left(\frac{C_T(h)}{C_t(h)}\right)^{-\gamma} (Z_T + 1 - \delta) K_T(h) \geq 0$$

Solución descentralizada

- Empresas

Problema de decisión de la firma

$$\max_{K_t(f),L_t(f)} \; Y_t(f) - Z_t K_t(f) - W_t L_t(f)$$

Sujeto a

$$Y_t(f) = A_t^{1-\alpha} K_t(f)^{\alpha} L_t(f)^{1-\alpha}$$

Estado estacionario determinístico (caso sin crecimiento)

Cuatro variables Y, K, C, L:

Producto $$Y = K^{\alpha}(\overline{A}L)^{1-\alpha}$$

Mercado laboral $$(1-\alpha)\frac{Y}{L} = L^{\varphi}/C^{-\gamma}$$

Consumo/ahorro $$1 = \beta(\frac{C^{'}}{C})^{-\gamma}[\alpha(\frac{K}{\overline{A}L})^{\alpha-1} + 1 - \delta] \rightarrow$$

$$\alpha(\frac{K}{\overline{A}L})^{\alpha-1} + 1 - \delta = \beta^{-1}(= R)$$

Restricción de recursos $$K = Y + (1-\delta)K + C \rightarrow$$

$$Y = \delta K + C$$

Dinámica de transición:

$(K_t/\overline{A}L_t) < K/\overline{A}L \rightarrow \alpha(\frac{K_t}{\overline{A}L_t})^{\alpha-1} + 1 - \delta > \beta^{-1} \rightarrow$ Aumenta ahorro $(\frac{C^{'}}{C} \uparrow) \rightarrow$ $(K_t/\overline{A}L_t)$ converge a $K/\overline{A}L.$

$C \downarrow$ por aumento en ahorro $\rightarrow L \uparrow \rightarrow Y \uparrow$ lo que acelera convergencia

Estado estacionario determinístico (caso con crecimiento)

Variables estacionarias: $\frac{Y}{K}, \frac{K}{AL}, \frac{C}{K}, L$

$\frac{Y}{K}, \frac{K}{AL}, \frac{C}{K}$ Determinadas por la función de producción, la relación consumo/ahorro y la restricción de recursos.

$$\frac{Y}{K} = (\frac{K}{AL})^{\alpha-1}$$

$$1 = \beta(\frac{C'}{C})^{-\gamma}[\alpha\frac{Y}{K} + 1 - \delta]$$

$$\frac{Y}{K} = \frac{C}{K} + \delta + g$$

Con $\frac{C'}{C} = 1 + g$

Equilibrio en mercado del trabajo determina L

$$(1-\alpha)\frac{Y}{L} = L^{\varphi}/C^{-\gamma}$$

Notar que si $g > 0 \rightarrow \gamma = 1$ Para que L sea constante en la balance growth path.

Próximos pasos

- Log-linearizar el modelo.
- Calibrar los parámetros del modelo.
- Evaluar las dinámicas del ciclo económico versus los datos trimestrales.

Modelo log-linearizado

$$\tilde{a}_t = (1-\alpha)a_t; \sigma = \gamma^{-1}$$

Función de producción

$$y_t = \tilde{a}_t + \alpha k_t + (1-\alpha)\, l_t$$

Equilibrio mercado del trabajo

$$y_t - l_t = w_t = \varphi l_t + \gamma c_t$$

Consumo/ahorro

$$c_t = -\sigma E_t \left\{ \alpha \frac{Y}{K} (y_{t+1} - k_{t+1}) \right\} + E_t \{c_{t+1}\}$$

Evolución del capital

$$k_{t+1} = \frac{Y}{KG} y_t - \frac{C}{KG} c_t + \frac{1-\delta}{G} k_t$$

con $\tilde{a}_t = \rho \tilde{a}_{t-1} + \varepsilon_t.$

Oferta de trabajo

- Equilibrio en el mercado del trabajo:

$$\begin{aligned} l_t &= \varphi^{-1}(y_t - l_t) - (\gamma/\varphi)c_t \\ &= \varphi^{-1}w_t - (\gamma/\varphi)c_t \end{aligned}$$

- φ^{-1} es la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo.
- Las estimaciones de esta elasticidad dependen de si l refleja el margen intensivo o extensivo. Para el primero $\sim 0{,}5$ y para el segundo ~ 1.
- El segundo término refleja el efecto de riqueza en la oferta de trabajo. La importancia de este efecto se incrementa con γ (mayor deseo a suavizar consumo).
- Nota: Nuestra interpretación del modelo es que los hogares ajustan L en su margen intensivo (horas).

Solución

- Combinando la función de producción con el equilibrio en el mercado del trabajo obtenemos:

$$l_t = \frac{1}{\alpha+\varphi}(\tilde{a}_t + \alpha k_t) - \frac{\gamma}{\alpha+\varphi}c_t$$

$$y_t = \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}\right)(\tilde{a}_t + \alpha k_t) - \frac{(1-\alpha)\gamma}{\alpha+\varphi}c_t \rightarrow$$

$$y_t = y(\tilde{a}_t, k_t, c_t)$$

- $\tilde{a}_t + \alpha k_t$ refleja productividad la cual tiene un efecto directo e indirecto (a través de la demanda por trabajo) en y.
- c_t refleja el efecto riqueza en la oferta de trabajo.
- Tres parámetros claves: α, φ y γ.

Solución

- Si usamos las relaciones previas para y_t para eliminar y_{t+1}, obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden para c_t y k_{t+1}

$$c_t = -\sigma E_t \left\{ \alpha \frac{Y}{K} \left(y(\tilde{a}_{t+1}, k_{t+1}, c_{t+1}) - k_{t+1} \right) \right\} + E_t \left\{ c_{t+1} \right\}$$

$$k_{t+1} = \frac{Y}{KG} y(\tilde{a}_t, k_t, c_t) - \frac{C}{KG} c_t - \frac{1-\delta}{G} k_t$$

- Con $$\tilde{a}_t = \rho \tilde{a}_{t-1} + \varepsilon_t$$
- Y $0 \leq \rho \leq 1$ y donde $\tilde{a}_t$ y k_t son variables predeterminadas.

Solución

- El sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden tiene dos raíces características: una es mayor a la unidad (inestable) y una es menor a la unidad (estable).

- La inestable está asociada a la variable forward looking (consumo) y la estable al capital.

Solución

- La forma reducida de las policy functions para c_t y k_{t+1}

$$c_t = \pi_{ca}\tilde{a}_t + \pi_{ck}k_t$$

$$k_{t+1} = \pi_{ka}\tilde{a}_t + \pi_{kk}k_t$$

- donde los coeficientes π son funciones de los parámetros del modelo y pueden ser obtenidas utilizando el método de los coeficientes indeterminados (ver Campbell, JME 1994).

Solución

$$\begin{aligned} l_t &= \frac{1}{\alpha+\varphi}(\tilde{a}_t+\alpha k_t)-\frac{\gamma}{\alpha+\varphi}c_t \\ &= \frac{1-\gamma\pi_{ca}}{\alpha+\varphi}\tilde{a}_t+\frac{\alpha-\gamma\pi_{ck}}{\alpha+\varphi}k_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_t &= \left(1+\frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}\right)(\tilde{a}_t+\alpha k_t)-\frac{(1-\alpha)\,\gamma}{\alpha+\varphi}c_t \\ &= \left(1+(1-\alpha)\frac{1-\gamma\pi_{ca}}{\alpha+\varphi}\right)\tilde{a}_t+(1+(1-\alpha)\frac{\alpha-\gamma\pi_{ck}}{\alpha+\varphi})\alpha k_t \end{aligned}$$

$$k_{t+1}=\frac{Y}{KG}y_t-\frac{C}{KG}(\pi_{ca}\tilde{a}_t+\pi_{ck}k_t)+\frac{1-\delta}{G}k_t$$

Solución

- Si asumimos que k_t (la desviación del stock de capital de su valor de estado estacionario) es pequeño a lo largo del ciclo económico, podemos asumir que:

$$c_t \approx \pi_{ca}\tilde{a}_t \rightarrow$$

$$l_t \approx \frac{1-\gamma\pi_{ca}}{\alpha+\varphi}\tilde{a}_t$$

$$y_t \approx \left(1 + (1-\alpha)\frac{1-\gamma\pi_{ca}}{\alpha+\varphi}\right)\tilde{a}_t$$

Solución

- Dado

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t = Y_t - C_t \rightarrow \frac{I}{Y} inv_t = y_t - \frac{C}{Y} c_t \rightarrow$$

$$inv_t = \frac{Y}{I} y_t - \frac{C}{I} c_t \rightarrow$$

$$inv_t \approx \frac{Y}{I}[\left(1 + (1-\alpha)\frac{1-\sigma\pi_{ca}}{\alpha+\varphi}\right) - \frac{C}{Y}\pi_{ca}]\tilde{a}_t$$

- Notar que inv_t es probablemente más volátil que c_t. ¿Por qué?

Solución

- Dado

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t = Y_t - C_t \rightarrow \frac{I}{Y} inv_t = y_t - \frac{C}{Y} c_t \rightarrow$$

$$inv_t = \frac{Y}{I} y_t - \frac{C}{I} c_t \rightarrow$$

$$inv_t \approx \frac{Y}{I}[\left(1 + (1-\alpha)\frac{1-\sigma\pi_{ca}}{\alpha+\varphi}\right) - \frac{C}{Y}\pi_{ca}]\tilde{a}_t$$

- Notar que inv_t es probablemente más volátil que c_t. ¿Por qué?
- π_{ca} no debiese ser muy grande debido a suavizamiento del consumo. Especialmente si el shock de productividad es menos persistente. Y/I es mayor a 1.

Calibración

- Use filtro HP para sacarle a tendencia a los datos.

- Obtenga $\tilde{a}_t = y_t - \alpha k_t - (1-\alpha) l_t$

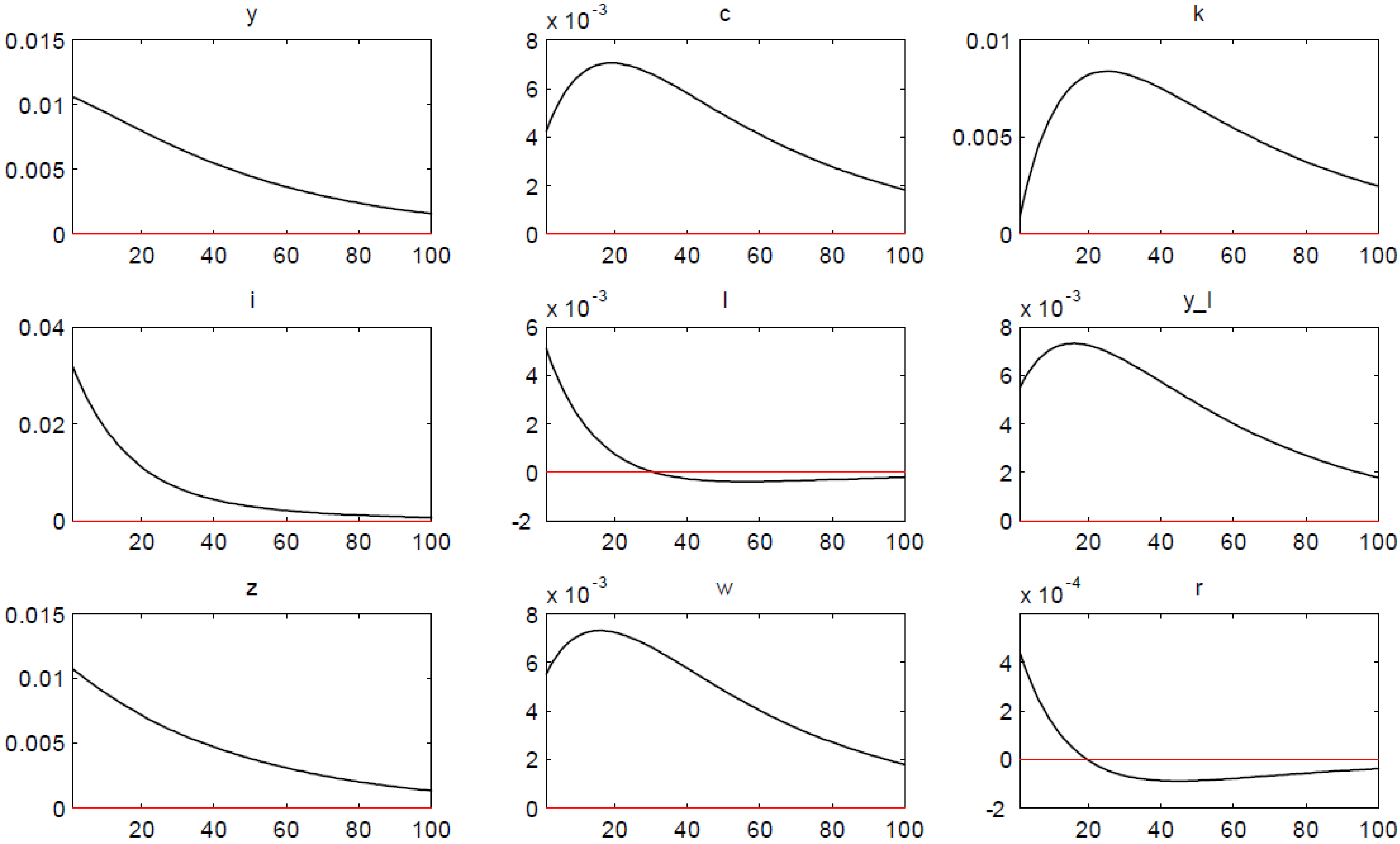
- Use la data obtenida para estimar $\tilde{a}_t = \rho \tilde{a}_{t-1} + \epsilon_t.$

Elección de parámetros

- Parámetros:

$$(\beta, \gamma = \sigma^{-1}, \varphi, \alpha, \delta, g, \rho, \sigma_a^2)$$

- $\beta = 0{,}9375$ anual (0,984 trimestral)
- $g = 0{,}016$ anual (0,004 trimestral)
- $\alpha = 0{,}33$ participación del capital
- $\delta = 0{,}1$ (0,025 trimestral)
- $\varphi^{-1} = 1$
- $\gamma = 1$



y
0.015
0.01
0.005
0
20
40
60
80
100
c
x 10^-3
8
6
4
2
0
k
0.01
0.005
0
i
0.04
0.02
0
l
x 10^-3
6
4
2
0
-2
y_l
x 10^-3
8
6
4
2
0
z
0.015
0.01
0.005
0
w
x 10^-3
8
6
4
2
0
r
x 10^-4
4
2
0
-2

Propiedades

- Un modelo RBC razonablemente calibrado puede generar una desviación estándar del producto que es un 70% de la desviación estándar del producto en los datos.

- El modelo puede generar la mitad de la volatilidad de las horas observadas en los datos.

- La inversión es más volátil que el consumo como en los datos.

Defectos del modelo RBC

- No hay propagación interna de los shocks (el producto es driven por la productividad).
- El residuo de Solow que se estima puede contener muchos factores más allá de shocks a la PTF.
- La correlación entre la productividad y las horas ha pasado a ser negativa después de 1984 en EEUU (recuperaciones sin trabajo).
- El modelo no puede explicar la magnitud de las fluctuaciones en empleo.
- No hay papel para la política monetaria y las fricciones financieras no están presentes en el modelo.