Control 2

Macroeconomía I - Otoño 2024

Profesor: Luis Felipe Céspedes **Ayudantes:** Matías Muñoz y María Jesús Negrete

1. Pregunta 1: Quasi Modelo AK

Suponga una variante del modelo neoclásico con preferencias en $t = 0$ dadas por

$$\int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \tag{14}$$

Asuma que la población L es constante y el trabajo se ofrece de manera inelástica. A diferencia del modelo visto en clases, la función de producción viene dada por:

$$F(K, L) = A_K K + G(L, K) \tag{15}$$

donde G es una función diferenciable, homogénea de grado 1 y satisface las condiciones de Inada. Además, el capital se deprecia a una tasa δ, donde $A_K > \rho + \delta$. Los mercados del capital y del trabajo son competitivos.

a) ¿Es F una función de producción neoclásica? Discuta si cumple cada una de las condiciones.

Respuesta

- Rendimientos constantes a escala en capital y trabajo.

$$F(\lambda K, \lambda L) = A_K \lambda K + G(\lambda L, \lambda K) = A_K \lambda K + \lambda G(L, K) = \lambda F(K, L)$$

  Se cumple.

- Productividad marginal positiva y decreciente en cada insumo.

$$\frac{\partial F}{\partial K} = A_K + G_K(L, K) > 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial L} = G_L(L, K) > 0$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = G_{KK}(L, K) < 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial L^2} = G_{LL}(L, K) < 0$$

  Se cumple.

- Condiciones de Inada.

$$\lim_{K \to 0} \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) = \infty$$
$$\lim_{K \to \infty} \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) = A_K$$
$$\lim_{L \to 0} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) = \infty$$
$$\lim_{L \to \infty} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) = 0$$

  Por ende, no se cumple la segunda condición de Inada.

- Que los insumos sean esenciales viene de las condiciones anteriores, por ende, no se cumple.

Puntajes: 2 puntos por comprobar las primeras dos condiciones, 1 punto por las condiciones de Inada.

b) Derive el sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza la evolución del capital y del consumo en el equilibrio descentralizado. Encuentre también el precio de los factores.

Respuesta

El problema de maximización del hogar es el siguiente:

$$\begin{gathered}\max \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \\ \text{s.a } \dot{a}(t) = ra(t) + w - c(t)\end{gathered}$$

Resolviendo el problema de optimzación queda,

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r-\rho) \tag{1}$$

La firma resuelve:

$$\begin{gathered}\max \pi = A_K K + G(L,K) - (r+\delta)K - wL \\ \max \pi = L \cdot (A_K k + g(k) - (r+\delta)k - w)\end{gathered}$$

Las CPO nos entregan

$$\begin{gathered}r = A_k + g'(k) - \delta \\ w = f(k) - (r+\delta)k\end{gathered}$$

Tomando la CPO respecto a k y reemplazando en la ley de movimiento del consumo,

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[A_K + g'(k) - \delta - \rho\right]$$

Y la dinámica del capital será:

$$\dot{k}(t) = f(k) - \delta k(t) - c(t)$$

Puntajes: 5 puntos por llegar a la ecuación (1). 5 puntos por llegar a los precios de los factores y 5 puntos por llegar al sistema de ecuaciones diferenciales correcto. También hay otras expresiones diferentes a las de esta pauta igual de válidas dependiendo de si se tomó el problema de la firma en términos per cápita o no.

c) Derive el sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza la evolución del capital y del consumo en el equilibrio del planificador social. ¿Es igual a lo encontrado en la pregunta anterior? ¿Por qué?

Respuesta

El problema del planificador es,

$$\begin{gathered}\max \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \\ \text{s.a } \dot{k}(t) = A_k k(t) + g(k) - \delta k(t) - c(t)\end{gathered}$$

Por lo que el hamiltoniano es:

$$H = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} + \lambda(t) \left[A_K k(t) + g(k) - \delta k(t) - c(t) \right]$$

Las CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\rho t} c(t)^{-\theta} - \lambda(t) = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial k} = A_K \lambda(t) + g'(k)\lambda(t) - \delta\lambda(t) = -\dot{\lambda(t)}$$

Diferenciando en el tiempo la primera condición, luego, juntando con la segunda nos queda,

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \left[A_K + g'(k) - \delta - \rho \right]$$
$$\dot{k}(t) = f(k) - \delta k(t) - c(t)$$

Que es lo mismo que el problema descentralizado. Esto ocurre porque no hay distorsiones de mercado (como externalidades), por lo que se cumple el primer teorema de bienestar y el equilibrio walrasiano (de mercado) de la economía es Pareto eficiente.

Puntajes: 8 puntos por llegar a las mismas ecuaciones del problema descentralizado y 2 puntos por explicar por qué ocurre que son iguales.

d) Muestre que esta economía genera crecimiento sostenido sin cambio tecnológico. Encuentre la tasa de crecimiento asintótica de esta economía. ¿Depende este crecimiento de G? Interprete.

Respuesta
La tasa de crecimiento del consumo asintótica será, cuando $k \to \infty$,

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta} \left[A_K - \delta - \rho \right]$$

Por lo que observamos que la tasa de crecimiento del consumo es constante.

La tasa de crecimiento del capital viene dada por,

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{f(k)}{k(t)} - \delta - \frac{c(t)}{k(t)}$$
$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A_k + \frac{g(k)}{k(t)} - \delta - \frac{c(t)}{k(t)}$$

Asintóticamente,

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A_K - \delta - \frac{c(t)}{k(t)}$$

Podemos ver que asintóticamente, dado que $g(k)$ posee rendimientos marginales decrecientes, $\frac{g(k)}{k(t)}$ tenderá a cero. Además, de la dinámica del capital es fácil ver que $k(t)$ y $c(t)$ crecerán a la misma tasa en estado estacionario, por lo que $\frac{c(t)}{k(t)}$ será constante y el capital crecerá a una tasa constante.

Puntajes: 7 puntos por llegar a alguna de las dos tasas de crecimiento anteriores y 3 puntos por la explicación acerca de la no dependencia de G (o g).