PAUTA CONTROL III - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2021

[1] Considere una subasta de Vickrey-Clarke-Groves para la venta de dos objetos, a y b. Asuma que hay tres potenciales compradores, $i \in \{1, 2, 3\}$. Dado $\alpha > 0$, suponga que las valoraciones de los compradores vienen dadas por

i	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
1	α	5	15
2	4	3	α
3	7	$\alpha + 1$	10

Determine los valores de α para los cuales es óptimo adjudicar los objetos a personas diferentes. Además, determine quienes se llevan los objetos, el precio que pagan y los ingresos del vendedor. Justifique detalladamente sus argumentos.

La subasta de Vickrey-Clarke-Groves adjudicará los objetos de tal forma de maximizar la valoración agregada (ver tablas abajo). Por lo tanto, si queremos evitar que un mismo individuo se lleve los dos objetos, hay que asegurar que existe alguna distribución de a y b a individuos diferentes que induce una valoración agregada mayor o igual que $\max\{15, \alpha\}$ unidades monetarias.[1]

Recibe a	Recibe b	Valoración Agregada
1	1	15
2	2	α
3	3	10
1	2	$\alpha + 3$
2	1	9

Recibe a	Recibe b	Valoración Agregada
1	3	$2\alpha + 1$
3	1	12
2	3	$\alpha + 5$
3	2	10

Una simple inspección de la tablas de valoraciones agregadas nos deja claro que con $\max\{15, \alpha\}$ solo pueden competir las valoraciones agregadas $2\alpha + 1$ y $\alpha + 5$, pues las otras son menores que alguna de estas dos o son menores que $\max\{15, \alpha\}$. Ahora, como $2\alpha + 1 \leq \alpha + 5$ si y solo si $\alpha \leq 4$, caso en el cual $\alpha + 5 \leq 9$, concluimos que la única valoración agregada que puede competir con $\max\{15, \alpha\}$ es $2\alpha + 1$. Ahora $2\alpha + 1 \geq \max\{15, \alpha\}$ si y solo si $\alpha \geq 7$. Por lo tanto, si $\alpha \geq 7$, la subasta adjudica el objeto a al individuo 1 y el objeto b al individuo 3 (caso contrario adjudica ambos objetos al individuo 1).

Recordemos que en una subasta VCG cada individuo pagará el costo social que genera al llevarse algunos objetos. Esto es, la diferencia entre la valoración máxima por los objetos cuando él no está en la sociedad y la valoración de los objetos que el resto recibe cuando él está en la subasta.

Sigue de lo anterior que el individuo 1 paga la valoración máxima del resto cuando él no está, $\alpha + 5$, menos la valoración que los otros dan a lo que reciben cuando él está, $\alpha + 1$. Esto es, el individuo 1 paga 4 unidades monetarias por el objeto a. Análogamente, el individuo 3 paga $\max\{15, \alpha + 3\} - \alpha$ unidades monetarias por el objeto b. El vendedor recibe la suma de estos pagos, $\max\{19 - \alpha, 7\}$. □

[1] Implícitamente estamos asumiendo que, caso sea indiferente entre entregar ambos objetos a un mismo individuo o distribuirlos entre dos individuos, el planificador central escogerá la segunda opción. Si no se asume esto, hay que cambiar "*mayor o igual que* $\max\{15, \alpha\}$" por "*mayor que* $\max\{15, \alpha\}$".

[2] Considere un modelo de emparejamiento bilateral uno-a-uno entre mujeres $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ y hombres $M = \{m_1, m_2, m_3\}$. Asuma que se cumplen las siguientes propiedades:

- Cada $h \in M \cup W$ tiene preferencias $\succ_h$ completas, transitivas y estrictas.
- Cada mujer considera a todos los hombres aceptables.
- Cada hombre considera a todas las mujeres aceptables.
- Cada hombre es la mejor alternativa de alguna mujer.
- Cada mujer es la mejor alternativa de algún hombre.

Determine cuantos perfiles de preferencia $(\succ_{w_1}, \succ_{w_2}, \succ_{w_3}, \succ_{m_1}, \succ_{m_2}, \succ_{m_3})$ cumplen con todas las propiedades antes descritas. Además, determine para cuales de esos perfiles de preferencias hay un único emparejamiento estable. Justifique detalladamente sus argumentos.

Hay seis formas de ordenar a los tres hombres para que cada uno de ellos sea la mejor alternativa de alguna mujer. Además, luego de definir quien está en el primer lugar de su preferencia, cada mujer tiene dos formas de ordenar a los otros dos hombres. Por lo tanto, hay $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ posibles perfiles de preferencias para las mujeres que cumplen con los requisitos descritos en el enunciado. Por simetría, también hay 48 perfiles de preferencias para los hombres. Esto es hay $48^2 = 2.304$ posibles perfiles de preferencia $(\succ_{w_1}, \succ_{w_2}, \succ_{w_3}, \succ_{m_1}, \succ_{m_2}, \succ_{m_3})$ que cumplen con todas las propiedades requeridas.

En un modelo como el descrito en el enunciado, existe un único emparejamiento estable si y solo si el resultado del *algoritmo de aceptación diferida* no depende del lado del mercado que hace las propuestas. Sabemos que (i) mujeres diferentes consideran a hombres diferentes como la mejor alternativa, (ii) hombres diferentes consideran a mujeres diferentes como la mejor alternativa, y (iii) para cada hombre o mujer todos los individuos del otro grupo son aceptables. Estas propiedades nos aseguran que la única forma que el algoritmo de aceptación diferida genere el mismo resultado—pues en este caso siempre termina en la primera etapa—es que la mejor alternativa de cada mujer la considere a ella su mejor alternativa.

Por lo tanto, si fijamos las mejores alternativas para las mujeres. Hay 8 perfiles de preferencias para ellas que respetan esa elección y otros 8 perfiles de preferencia para los hombres que aseguran "reciprocidad" entre las mejores alternativas. En total, 64 perfiles de preferencias para la sociedad. Como hay 6 formas de ordenar a los tres hombres en el top de las preferencias de las tres mujeres, tenemos $6 \cdot 64 = 384$ posibles perfiles $(\succ_{w_1}, \succ_{w_2}, \succ_{w_3}, \succ_{m_1}, \succ_{m_2}, \succ_{m_3})$ para los cuales hay un único emparejamiento estable. $\square$

Comentario. Si las preferencias no fueran observables y cualquier perfil que cumpliera con las condiciones del enunciado fuera equiprobable, tendríamos una probabilidad de $384/2.304 = 1/6$ de tener un único emparejamiento estable. Y esta probabilidad cae rápidamente cuando la población crece (verifíquelo!).

[3] Considere un modelo de emparejamiento bilateral uno-a-uno con un conjunto M de hombres y un conjunto W de mujeres. Hay n hombres y n mujeres, con $n \geq 5$. Cada mujer tiene preferencias completas, transitivas y estrictas por los hombres y los considera a todos aceptables. Lo mismo se cumple para las preferencias de los hombres por las mujeres.

Mirando este modelo desde la perspectiva de la *teoría de elección social*, podemos identificar los *emparejamientos* (las distribuciones de la población en parejas) con las "alternativas sociales". Además, para cada $h \in M \cup W$ se pueden definir preferencias (no necesariamente estrictas) sobre estas "alternativas sociales": el individuo h prefiere un emparejamiento μ a un emparejamiento η si y solo si $\mu(h) \succ_h \eta(h)$, donde $\succ_h$ son las preferencias de h por parejas.

Asumiendo que las mujeres hacen las propuestas, demuestre o dé un contra-ejemplo: *el mecanismo de Boston es Maskin monótono.* Justifique detalladamente sus argumentos.

La afirmación es falsa. Por ejemplo, suponga que $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$. Asuma que todos los hombres tienen las mismas preferencias por mujeres, $w_2 \succ w_1 \succ w_3 \succ w_4 \succ w_5$. Además, para cada $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, la mujer w_i considera al hombre m_{i-1} su mejor opción, mientras que la mujer w_1 tiene preferencias $m_1 \succ m_2 \succ m_3 \succ m_4 \succ m_5$.

Entonces, al aplicar el mecanismo de Boston, en la primera etapa w_2 y w_1 le hacen propuestas a m_1 y w_1 es rechazada. Además, en esa misma etapa m_2, m_3 y m_4 se emparejan definitivamente con w_3, w_4 y w_5, respectivamente. Por lo tanto, w_1 termina emparejada con su peor opción, m_5. Llamemos μ al emparejamiento inducido, el cual es caracterizado por $\mu(m_i) = w_{i+1}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mu(m_5) = w_1$.

Imagine ahora que las preferencias cambian, de tal forma que w_1 tiene preferencias $m_2 \succ m_3 \succ m_4 \succ m_5 \succ m_1$ y el resto de los participantes en el mercado tienen las mismas preferencias. Note que, con esta modificación, para cada hombre y para cada mujer, las alternativas que eran peores que la pareja que recibían en μ continuan siendo peores. Esto es, pensando en las preferencias de los individuos por emparejamientos, los matchings que eran peores que μ en el escenario inicial, continúan siendo peores que μ luego del cambio de preferencias. Por lo tanto, si el mecanismo de Boston fuera Maskin monótono debería continuar implementando μ. Pero esto no es verdad, pues bajo las nueva preferencias el mecanismo de Boston empareja a w_1 con m_2. $\square$