2)

i) $x \succsim y \iff \sum_e x_e \leq \sum_e y_e$

- completas? Si, $\forall x,y \in \mathbb{R}^L_+$, $\sum_e x_e \geq \sum_e y_e$ o $\sum_e x_e \leq \sum_e y_e$
- transitivas? $x,y,z \in \mathbb{R}^L_+$ tal que $x \succsim y \wedge y \succsim z$

entonces, $\sum_e x_e \leq \sum_e y_e \wedge \sum_e y_e \leq \sum_e z_e$

entonces, $\sum_e x_e \leq \sum z_e \Rightarrow x \succsim z$ ✓

- monotónicas? $x \gg y \Rightarrow x \succ y$

Dado que $x \gg y \Rightarrow \sum_e x_e > \sum y_e \Rightarrow y \succ x$

No son monotónicas

- L.N.S.? No!, $x = (0,0,0, \dots 0) \in \mathbb{R}^L_+$

es un punto de saciedad

- convexas? $x \succsim z \wedge y \succsim z \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \succsim z$, $\lambda \in [0,1]$

$x \succsim z \Rightarrow \sum_e x_e \leq \sum z_e$, $\cdot \lambda$

$y \succsim z \Rightarrow \sum_e y_e \leq \sum_e z_e$ $\cdot (1-\lambda)$

$\lambda \sum x_e + (1-\lambda) \sum y_e \leq \lambda \sum_e z_e + (1-\lambda) \sum_e z_e$

$\sum_e (\lambda x_e) + \sum_e (1-\lambda) y_e \leq \sum_e z_e$

$\sum_e (\lambda x_e + (1-\lambda) y_e) \leq \sum_e z_e$

$\Updownarrow$

$\lambda x + (1-\lambda) y \succsim z$ ✓

- Homotéticas?
Si
$x \sim y \iff$
$\alpha x \sim \alpha y \ \forall \alpha \geq 0$

2]

ii) $x \succsim y \iff \max\{x_\ell\} \geq \max\{y_\ell\}$

- completas? Si, $\forall x, y \in \mathbb{R}^L_+$ $\max\{x_\ell\} \gtreqless \max\{y_\ell\}$
- transitivas? $x, y, z \in \mathbb{R}^L_+$, $x \succsim y$ $\wedge$ $y \succsim z$, entonces

  $\max\{x_\ell\} \geq \max\{y_\ell\}$ $\wedge$ $\max\{y_\ell\} \geq \max\{y_\ell\}$

- monótonas? $x \gg y \Rightarrow x \succ y$, Si $x \gg y$, entonces

  ~~max~~ $x_\ell > y_\ell$ $\forall \ell \in L$, i.e., $\max\{x_\ell\} > \max\{y_\ell\}$

- l.n.s.? Si, por que son monótonas
- convexas?

$\neg$ $(1, 0, 0 \dots 0) \succsim (0.9, 0, \dots, 0)$

$(0, 0, \dots, 0, 1) \succsim (0.9, 0, \dots, 0, 0)$

Para $\lambda = 0.5$, tenemos

$0.5 \cdot (1, 0, \dots, 0) + 0.5 (0, 0, \dots, 0, 1) = (0.5, 0, \dots, 0.5)$

y $(0.9, 0, \dots, 0) \succ (0.5, 0, \dots, 0, 0.5)$

NO SON CONVEXAS

Homotéticas? Si

2

iii) $x \succsim y \Leftrightarrow \min\{x_e\} \geq \min\{y_e\}$

- completas? Si por lo mismo que $\max\{\}$
- transitivas? Si " " " " "
- monotónicas? Si " " " " "
- L.N.S? Si por que son monótonas
- convexas?

$x \succsim z \wedge y \succsim z$, para $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_L + (1-\lambda) y_L \end{pmatrix}$$

Si $\min\{x_e\} \geq \min\{z_e\}$
$\min\{y_e\} \geq \min\{z_e\}$ $\Rightarrow \min\{\lambda x_e + (1-\lambda) y_e\} \geq \min\{z_e\}$

son convexas

- Homotéticas? Si!

3

a) Es directo demostrar que las preferencias $\succsim$ lex pueden ser representadas por

$$u: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto u(x,y) = x - \frac{1}{1+y}$$

b) Demostración realizada en clases

4)

Si X es **compacto** y $\succsim$ son **continuas**, entonces $\succsim$ no son L.N.S. ¿Por qué? Porque en un compacto una función continua alcanza un máximo $\hat{x}$, que en nuestro caso sería un punto de saciación

5

- Sea $x_N = x + 1/N * \mathbb{1}$ con $N = 1, 2, 3, \ldots$ vector de unos

- Tenemos que

$$x_N \gg x \geq y \text{ , por monotonía tenemos}$$

$$x_N \succsim y \quad \forall N = 1, 2, 3 \ldots$$

- Por lo tanto,

$$x_N \in U_{\succsim}(y) \wedge x_N \in U_{\succsim}(y)$$

- Por semi-continuidad superior, $U_{\succsim}$ es cerrado, implicando que, si $x_N \to x$, entonces

$$x \in U_{\succsim}(y)$$

- I.e.,

$$x \geq y \Rightarrow x \succsim y$$

6]

i) $\succsim$ continua y M compacto, por Weierstrass

$\exists \hat{x}$ tal que $\hat{x} \succsim x \quad \forall x \in M$

ii) Por Berge (teo. del máximo), tenemos que

$$\{z \in M : z \succsim x\}$$

es compacto.

7)

(a) - Sean $a, b \in M$ tal que

$$a \succsim x \quad , \forall x \in M$$
$$b \succsim x \quad , \forall x \in M$$

- Para $\lambda \in [0,1]$ tenemos $\lambda a + (1-\lambda) b \succsim x$ ($\succsim$ convexas)

- ~~Entonces el conjunto {z ≿ x, ∀ {z ∈ M : z ≿ x}~~ ~~es convexo.~~

- Entonces, el conjunto $\{z \in M : z \succsim x \ , \forall x \in M\}$ es convexo.

9]

(e) Tenemos que demostrar que $u(x)$ es estrictamente cóncava, i.e., que el Hessiano de $u(x)$ es definido negativo.

Dado de $\dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \forall i \neq j$, para un $v \in \mathbb{R}^L$, tenemos

$$v^T H(x) v = (v_1 \cdots v_L) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_l^2} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_L \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{l=1}^{L} v_l^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_l^2}$$

entonces, dado que $\dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_l^2} < 0 \quad \forall l \in L$, $v^T H(x) v < 0$ implicando que $u(x)$ es estrictamente cóncava y $x(p,w)$ es un singleton

9)

b) - De las condiciones de primer orden, tenemos

$$u_e'(x_e(p,w)) = \lambda(p,w)\, p_e \qquad \forall e \in L$$

↑ multiplicador lagrangeano

- Derivando respecto a w

$$u_e''(x_e(p,w)) \frac{\partial x_e}{\partial w}(p,w) = \frac{\partial \lambda}{\partial w}(p,w)\, p_e$$

despejando

$$\frac{\partial x_e}{\partial w}(p,w) = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial w}(p,w)\, p_e}{u_e''(x_e(p,w))}$$

- De la restricción presupuestaria

$$\sum_{e=1}^{L} p_e \frac{\partial x_e}{\partial w}(p,w) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \lambda}{\partial w}(p,w) \sum_{e=1}^{L} p_e \frac{p_e}{u_e''(x_e(p,w))} = 1$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w}(p,w) = \frac{1}{\sum_{e=1}^{L} \frac{p_e^2}{u_e''(x_e(p,w))}} < 0$$

Dado que $\frac{\partial \lambda}{\partial w}(p,w) < 0$, tenemos que $\frac{\partial x_e}{\partial w}(p,w) > 0 \quad \forall e \in L$

10 - De las condiciones de primer orden,

$$\phi'(x_1) = \frac{p_1}{p_2 x_2}$$

- Sabemos que $x_1 = \frac{w - p_2 x_2}{p_1}$, derivando respecto de p_2

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = -\frac{1}{p_1}\frac{\partial (p_2 x_2)}{\partial p_2}$$

Como $p_1 > 0$, $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 0$ si y sólo si $\frac{\partial (p_2 x_2)}{\partial p_2} = 0$

- Reescribimos las C.P.O

$$\phi'\left(\frac{w - p_2 x_2}{p_1}\right) = \frac{p_1}{p_2 x_2} \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial p_2}$$

$$-\underbrace{\phi''\left(\frac{w - p_2 x_2}{p_1}\right)}_{<0} \times \underbrace{\frac{1}{p_1}}_{>0}\frac{\partial (p_2 x_2)}{\partial p_2} = \underbrace{-\frac{p_1}{(p_2 x_2)^2}}_{<0}\frac{\partial (p_2 x_2)}{\partial p_2}$$

implicando que $\frac{\partial (p_2 x_2)}{\partial p_2} = 0$

- Por lo tanto, $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 0$

11) En clases.

$\boxed{12}$ Sean (p^0, w^0) y (p^1, w^1) tal que

$$x^0 \in x(p^0, w^0) \quad , \quad x^1 \in x(p^1, w^1)$$

y $\quad x^0 \in B(p^1, w^1) \quad \wedge \quad x^0 \notin x(p^1, w^1)$

Tenemos que demostrar que $x^1 \notin x^0(p^0, w^0)$ dado que $x^1 \notin B(p^0, w^0)$

- Dado que $x^0 \notin x(p^1, w^1)$, debemos tener que $x^1 \succ x^0$
- Asumamos que $x^1 \in B(p^0, w^0)$, entonces, como

$$x^1 \succ x^0 \succsim x \quad \forall x \in B(p^0, w^0),$$

tenemos que $x^1 \in x(p^0, w^0) \wedge x^0 \notin x(p^0, w^0)$

Contradiccϕ

- Entonces, $x^1 \notin B(p^0, w^0)$ y WARP se obtiene

13

(a) ~~[illegible]~~ El hessiano es

$$D^2 u(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$, claramente $u(x)$

no es cóncava

Hessiano para cuasi-concavidad

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \partial^2 u / \partial x_2 \partial x_1 & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_1+p \\ x_2 & x_1+p & 0 \end{pmatrix}$$

Con determinante

$$-\begin{pmatrix} 1 & x_1+p \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1+p \end{pmatrix} = +(x_1+p)x_2 + x_2(x_1+p) > 0$$

$\therefore$ $u(x)$ es estrictamente cuasicóncava

13)

b) $\succsim$ es estrictam. convexa porque

$u(x)$ es estrictam. cuasi-cóncava

c) A tener cuidado porque podemos tener soluciones esquina!

i) ¿Puede ser $x_2=0$? No, dado que

$$u(x_1,0) < u(\epsilon,\epsilon) \quad \text{para cualquier } \epsilon>0, \; x_1>0$$

ii) Asumamos que $x_1>0$, entonces, de las C.P.O.

$$\frac{x_2}{x_1+\gamma} = \frac{p_1}{p_2}$$

reemplazando en la restricción presupuestaria $x_1 = \dfrac{w-\gamma p_1}{2p_1}$

y $x_2 = \dfrac{w+p_1\gamma}{2p_2}$.

Para que esta solución esté bien def., necesitamos

$$x_1>0 \Rightarrow \frac{w-\gamma p_1}{2p_1}>0 \rightarrow p_1 < w/\gamma$$

iii) Si $x_1=0$, tenemos $x_2 = w/p_2$

13] Entonces la demanda Walrasiana es

$$x(p,w) = \begin{cases} \left(\dfrac{w - \gamma p_1}{2p_1}, \dfrac{w + p_1 \gamma}{2p_2} \right) & \text{si} \quad w \geq \gamma p_1 \\[2ex] \left(0, \; w/p_2 \right) & \text{si} \quad w < \gamma p_1 \end{cases}$$

Curvas de Engel