Profesor	: Eduardo Engel	Abril 13, 2023
Ayudantes	: Miguel Del Valle y Benjamín Peña	
Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	
Semestre	: Otoño 2023	
Guía	: No. 1	
Entrega	: Lunes 17 de abril, antes de las 8am	

1. **Derivando ΔC_t bajo Equivalencia Ciert**

   Usando sólo las expresiones

$$C_t = \frac{r}{R}[A_t + \sum_{k\geq 0}\beta^k \mathrm{E}Y_{t+k}] \qquad \text{y} \qquad A_{t+1} = R(A_t + Y_t - C_t),$$

   muestre que bajo Equivalencia Cierta,

$$\Delta C_t = \frac{r}{1+r}\sum_{k\geq 0}\beta^k[\mathrm{E}_t Y_{t+k} - \mathrm{E}_{t-1}Y_{t+k}].$$

2. **El Teorema de Muth y la Crítica de Lucas**

   El ingreso, Y_t, es exógeno e igual a la suma de un camino aleatorio (shocks permanente), P_t, y un ruido blanco (componente transitoria), u_t,

$$\begin{aligned} Y_t &= P_t + u_t, \\ P_t &= P_{t-1} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

   Donde ε_t es i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, u_t i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma_u^2)$, ε_t y u_t independientes.

   A diferencia del análisis que vimos en cátedra, ahora suponemos que los agentes observan las Y_t pero no sus componentes.

   (a) Muestre que ΔY_t sigue un MA(1) y derive una expresión para θ como función de $Q \equiv \sigma_\varepsilon^2/\sigma_u^2$ en la representación de Wold para ΔY_t:

$$\Delta Y_t = v_t - \theta v_{t-1}. \tag{1}$$

   Use esta expresión para expresar las innovaciones de Wold innovations, v_t, en términos de valores presentes y pasados de ΔY.

   Ayuda: La expresión que debiera obtener es

$$\theta = \frac{1}{2}\left[Q + 2 - \sqrt{(Q+2)^2 - 4}\right].$$

   Si no la obtiene, úsela igual en lo que sigue.

(b) Para $k = 1, 2, 3, 4, ...$ encuentre $\mathrm{E}_t[\Delta Y_{t+k}]$ (donde la información disponible en t son todos los valores pasados y presentes de Y, lo cual significa que también se conocen todos los valores presentes y pasados de ΔY). Use la expresión que obtuvo para mostrar que para todo $k \geq 1$:

$$\mathrm{E}_t[Y_{t+k}] = (1-\theta) \sum_{j \geq 0} \theta^j Y_{t-j}. \tag{2}$$

Se sigue que las proyecciones de valores futuros de Y no dependen del horizonte de proyección, En lo que sigue, denotamos $\mathrm{E}_t[Y_{t+k}]$ por $\hat{Y}_t$.

(c) A continuación asuma suponga que la relación ente ΔC_t y el proceso de ingreso está determinada por el modelo de equivalencia cierta visto en clases, de modo que

$$\Delta C_t = \frac{r}{R} \sum_{u \geq 0} \beta^u \{\mathrm{E}_t Y_{t+u} - \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+u}\}.$$

Use esta expresión para mostrar que ΔC_t se puede escribir como:

$$\Delta C_t = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \Delta Y_{t-k}.$$

Encuentre expresiones para los α_k.

(d) En $t = 0$ la macroeconomista usa las series agregadas para estimar

$$\Delta C_t = \sum_{k \leq 0} \alpha_k \Delta Y_{t-k}. \tag{3}$$

Poco después, la varianza de la componente cíclica del ingreso aumenta de manera inesperada y permanente (todo lo restante no cambia). La macroeconomista está consciente del cambio en el entorno económico pero confía que los nuevos valores de ΔY lo van a capturar adecuadamente, por lo cual sigue usando (**??**) para proyectar el consumo. ¿Es correcto este supuesto? Justifique.

3. **Ahorro por precaución, función de utilidad CARA e ingreso camino aleatorio**

Suponga que $r = \delta = 0$, el individuo vive T períodos (desde $t = 0$ hasta $t = T - 1$) y tiene utilidad instantánea CARA $u(C) = -e^{-\alpha C}/\alpha$ con aversión absoluta al riesgo α.

Sus ingresos siguen un camino aleatorio

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t,$$

con e_t's i.i.d. normal con media nula y varianza σ^2.

Las preguntas que siguen están estructuradas de modo que puede responder las partes 2, 3, 4 y 5 aún si no respondió alguna de las partes anteriores.

(a) Muestre que si C_t sigue el proceso siguiente (que es un camino aleatorio con drift $\frac{\alpha\sigma^2}{2}$) se cumple la ecuación de Euler del consumidor:

$$C_t = C_{t-1} + \frac{\alpha\sigma^2}{2} + e_t.$$

Ayuda: Recuerde que si $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $\mathrm{E}(\exp(X)) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$.

(b) Imponga la restricción presupuestaria que involucra ingresos y consumo acumulado entre $t = 0$ y $t = T - 1$. Luego tome el valor esperado en $t = 0$ de esta restricción y use los procesos de camino aleatorio que siguen C_t y Y_t para mostrar que

$$C_0 = \frac{A_0}{T} + Y_0 - \frac{\alpha(T-1)\sigma^2}{4}.$$

Ayuda: Recuerde que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(c) Use la parte 2 para concluir que

$$C_t = \frac{A_t}{T-t} + Y_t - \frac{\alpha(T-t-1)\sigma^2}{4}, \qquad t = 0, ..., T-1.$$

Ayuda: Responder esta parte no requiere ningún cálculo.

(d) La expresión que derivamos en clases para el consumo bajo equivalencia cierta supone $r > 0$, por lo cual no aplica en este caso. Apelando a la intuición de que equivalencia cierta consiste en suavizar el consumo esperado, dé la intuición de por qué el consumo óptimo bajo equivalencia cierta, C_t^{eq}, viene dado por:

$$C_t^{\text{eq}} = \frac{A_t}{T-t} + Y_t, \qquad t = 0, ..., T-1.$$

(e) Concluya que el ahorro por precaución, $S_t^p \equiv C_t^{\text{eq}} - C_t$, es creciente en α, σ^2 y $T - t$ y dé la intuición para cada caso.

4. **Ahorro por precaución, función de utilidad CARA e ingreso i.i.d.**

Considere el modelo del problema general de consumo visto en clases (lámina 22 y siguientes), con función de utilidad instantánea con coeficiente de aversión absoluta al riesgo constante:

$$u(c) = -\frac{1}{\theta}e^{-\theta c},$$

donde $\theta > 0$ denota el coeficiente de aversión absoluta al riesgo. La tasa de descuento subjetiva es δ, la tasa de interés es r y las dos son constantes. El ingreso laboral, y_t, es i.i.d., de modo que

$$y_t = \bar{y} + \varepsilon_t,$$

con ε_t i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Los activos del hogar al comienzo de un período evolucionan de acuerdo a

$$A_{t+1} = (1+r)[A_t + y_t - c_t]. \tag{4}$$

Se puede mostrar que existe una solución única a la ecuación de Bellman y que existe una correspondencia uno-a-uno entre esta solución y la solución a la ecuación de Euler. No es necesario que demuestre lo anterior. Se sigue que la ecuación de Euler tiene una única solución, en la cual nos enfocamos en lo que sigue.

Suponemos que la solución de la ecuación de Euler toma la forma:

$$c_t = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + y_t + \frac{1}{r}\bar{y}\right\} - P(r,\theta,\delta,\sigma), \tag{5}$$

donde P es una constante (que depende de r, θ, δ y σ). A continuación encontramos el valor de P para el cual (**??**) resuelve la ecuación de Euler.

(a) Asumiendo que se cumple (**??**), use (**??**) y un poco de álgebra para mostrar que:

$$\Delta c_t = \frac{r}{1+r}\varepsilon_t + rP. \tag{6}$$

(b) Use (**??**) y la ecuación de Euler para derivar una expresión explícita para P.

(c) Muestre que P es creciente en σ y decreciente en δ. Interprete los dos resultados.

(d) Ahora asuma que $r = \delta$. El ahorro por precaución se define como la diferencia entre el ahorro efectivo y el ahorro que prescribe el modelo de equivalencia cierta. Muestre que el ahorro por precaución será igual a P y que P es estrictamente positivo.