Modelo de Ramsey

A diferencia del modelo de Solow ahora tomamos en consideración la maximización de los consumidores $\Rightarrow$ · vamos a determinar s
· vamos a ver Δs según los estados de la economía.

Modelo

① Los Hogares

- viven ∞
- eligen s, c para max. su UT. s.a. su restricción
- Proveen L a cambio de w
- Reciben intereses por sus activos
- son idénticos
- L crece a tasa $n \Rightarrow$ $\boxed{L_t = e^{nt} \cdot \cancel{L(0)}^{1}}$
- economía cerrada

$\longrightarrow$ consumo percápita: $\boxed{c_t = \frac{C_t}{L_t}}$

$\Rightarrow$ Los hogares maximizan:

$$U = \int_0^\infty \underbrace{u(c_t)} \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} \quad \boxed{\rho > n}$$

- $u'(c_t) > 0$
- $u''(c_t) < 0$

$\Rightarrow$ la concavidad genera el deseo de suavizar consumo.

- $u(c_t)$ cumple cond. de Inada
  $\left[\begin{array}{l} u'(c_t) \to \infty \text{ cuando } c_t \to 0 \\ u'(c_t) \to 0 \text{ cuando } c_t \to \infty \end{array}\right.$

- Luego, los hogares mantienen activos en la forma de propiedad sobre K y préstamos

$\rightarrow$ como hay un hogar representativo
$\Rightarrow$ préstamos $= 0$ (pues o todos quieren pedir \$ o todos quieren prestar \$)

- capital y préstamo son sustitutos perfectos
  $\Rightarrow$ pagan la misma tasa $r(t)$
- Toman como dado $r(t), w(t) \Leftrightarrow$ son competitivos
- c/adulto ofrece una unidad de trabajo inelásticamente por unidad de tiempo.
- lo que no se consume $\rightarrow$ se usa para acumular más activos.

$$\boxed{\dot{A}_t = r(t) \cdot A(t) + w(t) \cdot L(t) - C(t)}$$

$\rightarrow$ lo escribimos de forma percápita

$$\frac{\dot{A}_t}{L_t} = r_t \cdot \frac{A_t}{L_t} + w_t \frac{\cancel{L_t}}{\cancel{L_t}} - \frac{C_t}{L_t}$$

$$\hookrightarrow \dot{a}_t = \dot{\left(\frac{A_t}{L_t}\right)} = \frac{\dot{A}_t \cancel{L_t}}{L_t^{2}} - \underbrace{\frac{\dot{L}_t}{L_t}}_{n} \underbrace{\frac{A_t}{L_t}}_{a_t} \Rightarrow \dot{a}_t = \frac{\dot{A}_t}{L_t} - n a_t$$

$$\Rightarrow \dot{a}_t + n a_t = r_t \cdot a_t + w_t - c_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{a}_t = (r_t - n) a_t + w_t - c_t} \Rightarrow$$

$\uparrow \dot{a}_t$ cuando $\uparrow$ el ingreso percápita $(r_t \cdot a_t + w_t)$ y $\downarrow \dot{a}_t$ cuando $\uparrow c_t$ o aumenta la población.

$\rightarrow$ Queremos evitar que los hogares caigan en un esquema Ponzi $\Rightarrow$ se impone una restricción en el endeudamiento:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} \left\{ a_t \cdot \exp\left[-\int_0^t (r(v) - n) dv \right] \right\} \geq 0} \rightarrow \text{VP de los activos} \geq 0$$

Esta restricción indica que en el L.P. la deuda percápita no puede crecer tan rápido como $r(t)-n$ ($\Rightarrow$ no puede crecer tan rápido como $r(t)$)

→ En síntesis, el problema del consumidor es:

$$\max \quad U=\int_0^\infty u(c_t)\, e^{nt}\, e^{-\rho t}\, dt$$

s.a. $\dot{a}_t = r_t \cdot a_t + w_t - c_t - n \cdot a_t$

a_0 dado

$$\lim_{t\to\infty} a_t \cdot \exp\left(-\int_0^t r(v)-n\, dv\right) \geq 0$$

$c_t \geq 0$

→ El Hamiltoniano es:

$$H = u(c_t)\cdot e^{-(\rho-n)t} + \underbrace{v_t}_{\text{precio sombra de los activos}}\left((r_t-n)a_t + w_t - c_t\right)$$

↳ Precio sombra de los activos (representa el valor de un incremento de ingreso recibido en t en unidades de utilidad en t=0)

→ C.P.O.

$\frac{\partial H}{\partial c}=0 \Rightarrow v = u'(c)\, e^{-(\rho-n)t}$

$\frac{\partial H}{\partial a} = -\dot{v} \Rightarrow \dot{v} = -(r-n)v$

$\lim_{t\to\infty} v_t \cdot a_t = 0$

Euler:

$$\boxed{r = \rho \underbrace{- \frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)} \cdot \frac{\dot{c}}{c}}_{(+)}}$$

↳ compensación por ahorrar.

$$* \boxed{\frac{-u''(c)\, c}{u'(c)}}$$ → medida de la concavidad de $u(c)$ → "recíproco de la elasticidad de sustitución intertemporal".

* comentarios

- los hogares eligen su consumo con el fin de igualar r a la tasa de preferencia intertemporal (ρ) + la disminución de la utilidad marginal del consumo

↳ si $\frac{\dot{c}}{c} > 0 \Rightarrow$ consumo futuro > consumo pasado

→ Agentes quieren suavizar c ⇒ para que $c_{t+1} > c_t$ deben ser recompensados por posponer consumo.

→ Le daremos forma funcional a $u(c)$:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}$$

$1/\theta$: elasticidad de sustitución intertemporal

⇒ A mayor θ → mayor es la caída en $u'(c)$ cuando ↑c

⇒ hogares están menos dispuestos a aceptar desviaciones de consumo (↓ elast. sust. intertemporal).

⇒ cuando $\theta \to 0 \Rightarrow u(c) \to$ lineal (⇒ hogares son indiferentes al momento de consumir). → si $r=\rho$

* comentario sobre la condición de transversalidad: Esta nos dice que el valor de los activos percápita debe tender a 0 con $t\to\infty$

↳ ie: no dejan activos cuando "mueren".

→ Podemos desarrollar la condición de transversalidad:

$$\dot{v}_t = -(r-n)v_t$$

$\Rightarrow \dot{V}_t + (r-n)V_t = 0 \quad / e^{(r-n)t} \quad / \int$

$\Rightarrow V_t e^{(r-n)t} + V_0 = 0$

$\Rightarrow V_t = \underbrace{(-V_0)}_{(+) \to u'(c_0)>0} \cdot \exp\left(-\int_0^t r(v)-n \, dv\right)$ ↳ (asumiendo r_t no constante).

$\Rightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} a_t \cdot \exp\left(-\int_0^t r(v)-n \, dv\right) = 0}$

↳ "los activos no pueden crecer a una tasa tan alta o mayor a $r-n$ (r).

* comentarios sobre la función de consumo.

→ Necesitamos estudiar el factor

$\exp\left(-\int_0^t r(v)\,dv\right)$ → representa el de V.P que convierte una un. de ingreso en t a un. equivalente en t=0

cte ⇓ e^{-rt}

Promedio $\bar{r}_t = \frac{1}{t}\int_0^t r(v)\,dv \Rightarrow e^{\bar{r}_t \cdot t}$

→ Ahora, utilizamos esta simplificación para encontrar la función de consumo:

→ De la restricción presupuestaria:

$\dot{a}_t = (r_t - n)a_t + w_t - c_t$

$\Rightarrow \dot{a}_t - (\bar{r}_t - n)a_t = w_t - c_t \quad / \cdot e^{-(\bar{r}_t-n)t} \quad / \int_0^T$

$a_t \cdot e^{-(\bar{r}_t-n)t}\Big|_0^T = \int_0^T w_t \cdot e^{-(\bar{r}_t-n)t}\,dt - \int_0^T c_t e^{-(\bar{r}_t-n)t}\,dt$

$= a_T e^{-(r(T)-n)T} - a_0 = \underbrace{\qquad\qquad}_{\shortparallel}$

$\Rightarrow a_T e^{-(r(T)-n)T} + \int_0^T c_t \cdot e^{-(\bar{r}_t-n)t}\,dt = a_0 + \int_0^T w_t \cdot e^{-(\bar{r}(t)-n)t}\,dt$

si $T\to\infty$:

$$\underbrace{\int_0^\infty c_t e^{-(\bar{r}_t-n)t}\,dt}_{\text{valor presente del consumo}} = \underbrace{a_0}_{\text{Activos iniciales}} + \underbrace{\int_0^\infty w_t \cdot e^{-(\bar{r}(t)-n)t}\,dt}_{\text{Valor presente del ingreso laboral}} \quad (1)$$

$= \tilde{w}(0)$

→ luego utilizamos la ecuación de Euler:

$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}(r(t)-\rho) \iff \dot{c}_t - \frac{1}{\theta}(r(t)-\rho)c_t = 0 \quad / e^{-1/\theta(r(t)-\rho)} \quad / \int$

$\Rightarrow c_t \cdot e^{-1/\theta(\bar{r}(t)-\rho)t} + c_0 = 0$

$\Rightarrow c_t = (-c_0)e^{1/\theta(\bar{r}(t)-\rho)t} \quad (2)$

→ (2) en (1):

$\int_0^\infty c_0 e^{1/\theta(\bar{r}(t)-\rho)t} \cdot e^{-(\bar{r}(t)-n)} = a_0 + \tilde{w}_0$

$\Rightarrow c_0 = (a_0 + \tilde{w}_0)\underbrace{\mu_0}_{\text{Propensión marginal a consumir de la riqueza.}}$ con $\frac{1}{\mu_0} = \int_0^\infty e^{(\bar{r}_t(\frac{1-\theta}{\theta}) - \frac{\rho}{\theta} + n)t}\,dt$

¿Qué ocurre con el consumo si ↑ la tasa de interés $r(t)$?

① Aumenta el costo de consumir hoy v/s en el futuro → efecto sustitución intertemporal

② Aumenta el consumo ∀ t → efecto ingreso

→ ¿cuál efecto domina?
Depende de θ.

↳ si $\theta < 1$ ⇒ Hay alta elast. de sustitución intertemporal ($1/\theta > 1$)
⇓
no me importa mucho suavizar consumo
⇓
Dominará el efecto sustitución
$\uparrow \bar{r}(t) \to \uparrow \Rightarrow \downarrow \mu(0)$
$\Rightarrow \downarrow c(0)$.

↳ si $\theta > 1$ ⇒ La elast. de sustitución es pequeña ($1/\theta < 1$)
⇓
quiero suavizar
⇓
Efecto sustitución será pequeño
$\Rightarrow \uparrow \bar{r}(t) \Rightarrow \downarrow 1/\mu(0) \Rightarrow \uparrow \mu(0) \Rightarrow \uparrow c(0)$

↳ con $\theta = 1$ ⇒ el efecto sustitución es igual al efecto ingreso pues $\mu(0)$ solo dependerá de ρ y n. ($\rho - n > 0$)

* OJO: este análisis no considera el efecto de $\bar{r}(t)$ sobre $\tilde{\omega}(0)$, solo sobre $\mu(0)$.
→ si $\uparrow \bar{r}(t) \Rightarrow \downarrow \tilde{\omega}(0)$

② Las Empresas

- Producen bienes
- Pagan w → por L
- Pagan → por K
- tienen acceso a la siguiente tecnología:

$$\boxed{Y(t) = F(K(t), L(t), T(t))}$$

- la tecnología crece a una tasa x

$$\boxed{T(t) = e^{xt}} \quad (T(0) = 1)$$

- F cumple las condiciones neoclásicas (retornos constantes a escala en K y L; Producto marginal de K y L positivo y decreciente).

* Vamos a tener un estado estacionario con progreso tecnológico constante ssi el progreso tecnológico es "labour aumenting"

$$\underbrace{\boxed{Y(t) = F[K(t), T(t) \cdot L(t)]}}$$

- Definimos el trabajo efectivo como $\hat{L} = L \cdot T(t)$

$$\Rightarrow \boxed{Y(t) = F[K(t), \hat{L}(t)]} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{y} = Y/\hat{L} \\ \hat{k} = K/\hat{L} \end{array}\right\} \boxed{\hat{y} = f(\hat{k})}$$

→ Propiedades:

- $f(0) = 0$
- $$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial(\hat{y} \cdot \hat{L})}{\partial K} = \frac{\partial(f(\hat{k})\hat{L})}{\partial K} = \frac{\partial f(\frac{K}{\hat{L}}) \cdot \hat{L}}{\partial K}$$

$$= f'(K/\hat{L}) \cdot \frac{1}{\cancel{\hat{L}}} \cancel{\hat{L}} = \boxed{f'(\hat{k}) = \frac{\partial Y}{\partial K}}$$

- $$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial(f(\frac{K}{LT}) \cdot LT)}{\partial L} = \left[f'\left(\frac{K}{LT}\right) \cdot (-1) \cdot L^{\cancel{-2}\,-1} \cdot \frac{K}{T}\right] \cdot \cancel{L}T$$

$$+ T f\left(\frac{K}{LT}\right)$$

$$= \left[-f'(\hat{k})\hat{k} + f(\hat{k})\right] e^{xt}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial Y}{\partial L} = \left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k})\hat{k}\right] e^{xt}}$$

• Inada

$$\lim_{\hat{k}\to 0} f'(\hat{k}) = \infty \qquad \lim_{\hat{k}\to\infty} f'(\hat{k}) = 0$$

→ luego, seguimos con los supuestos:

• No hay costo de instalación de capital

• una un producto → consumo

↳ capital

↳ la tasa de beneficio que obtienen los propietarios es $\boxed{R(t) - \delta}$

como capital y préstamo son sustitutos perfectos: $\boxed{R - \delta = r}$

↳ tasa de retorno de los activos.

→ El Problema de la Firma es:

$$\boxed{\max \ \pi = F(K, \hat{L}) - \underbrace{(r+\delta)}_{R} K - wL}$$

$$\Leftrightarrow \max \ \pi = \frac{\hat{L}}{\hat{L}}\left(F(K,\hat{L}) - (r+\delta)K - wL\right)$$

$$\boxed{\pi = \hat{L}\left(f(\hat{k}) - (r+\delta)\hat{k} - w \cdot e^{-xt}\right)}$$

→ C.P.O.

$$\frac{\partial \pi}{\partial \hat{k}} \Rightarrow \boxed{f'(\hat{k}) = r+\delta}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \hat{L}} = \cancel{L} f'(\hat{k}) \cdot (-1) K \cdot L^{-1-2^{-1}} + f(\hat{k}) - we^{-xt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(f(\hat{k}) - f'(\hat{k}) \cdot \hat{k}\right) e^{xt} = w}$$

③ Equilibrio

→ como estamos en economía cerrada se cumple que $\boxed{k = a}$

$$\Rightarrow \dot{k} = \dot{a}$$

$$\Rightarrow \dot{k} = (r_t - n) k_t + w_t - c_t$$

$$= (r_t - n) k_t + e^{xt} f(\hat{k}) - e^{xt} f'(\hat{k}) \cdot \hat{k} - c_t$$

→ luego $\hat{k} = k \cdot e^{-xt} \rightarrow \hat{k} e^{xt} = k$

$$\Rightarrow \dot{k} = \dot{\hat{k}} e^{xt} + x \hat{k} e^{xt}$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{k}} \cancel{e^{xt}} + x \hat{k} \cancel{e^{xt}} = (r-n) \hat{k} \cancel{e^{xt}} + \cancel{e^{xt}} f(\hat{k}) - \cancel{e^{xt}} f'(\hat{k}) \hat{k} - c_t$$

$$c_t \rightarrow \hat{c}_t \cancel{e^{xt}}$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{k}} + x\hat{k} = (r-n)\hat{k} + f(\hat{k}) - f'(\hat{k})\hat{k} - \hat{c}_t$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{k}} = (r - n - x - f'(\hat{k}))\hat{k} + f(\hat{k}) - \hat{c}_t$$

$$\dot{\hat{k}} = (\cancel{r} - n - x - \cancel{r} - \delta)\hat{k} + f(\hat{k}) - \hat{c}_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{k}(n + x + \delta) - \hat{c}_t} \quad (*)$$

↳ De aquí se determina la evolución de $\hat{k}$ y de $\hat{y} = f(\hat{k})$

→ luego utilizamos la ecuación de Euler para terminar de describir el equilibrio

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho) = \frac{1}{\theta}(f'(\hat{k}) - \delta - \rho)$$

→ luego como $\hat{c} = c \cdot e^{-xt} \Rightarrow c = \hat{c} e^{xt}$

$$\Rightarrow \dot{c} = \dot{\hat{c}} e^{xt} + x \hat{c} e^{xt}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\hat{c}} e^{xt} + x\hat{c}e^{xt}}{\hat{c}e^{xt}} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - \delta - \rho)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} + \frac{x\hat{c}}{\hat{c}} \Longrightarrow \boxed{\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(f'(\hat{k}) - \delta - \rho - x\theta)} \; (**)$$

→ con (*), (**), $k(0)$ y la condición de transversalidad determinan las sendas para $\hat{c}$ y $\hat{k}$.

*comentario → podemos reescribir la cond. de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} a_t \cdot \exp\left(-\int_0^t r(v) - n \, dv\right)$$
$$\downarrow$$
$$k_t$$

→ en términos de trab. efectivo $\hat{k} = k \cdot e^{-xt}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \hat{k} e^{-xt} \cdot \exp\left(-\int_0^t f'(\hat{k}) - \delta - n \, dv\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} \hat{k} \exp\left(-\int_0^t f'(\hat{k}) - \delta - x - n \, dv\right) = 0}$$

$\Longrightarrow f'(\hat{k}) - \delta > x + n$ → Para que converja asintóticamente en el E.E.

- Estado Estacionario

mostramos que $\hat{k}$ y $\hat{c}$ son constantes en estado estacionario. sabemos que:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \hat{c} = f(\hat{k}) - (x+n+\delta)\hat{k} - \hat{k}\gamma_k^* \quad / \partial/\partial t$$

$$\dot{\hat{c}} = f'(\hat{k}) \; \dot{\hat{k}}(x+n+\delta+\gamma^*_k)$$

$$\dot{\hat{c}} = \dot{\hat{k}}\left(\underbrace{f'(\hat{k}) - (x+n+\delta+\gamma_k^*)}_{(+) \to \text{por condición de transversalidad}}\right)$$

$\Longrightarrow \gamma_{\hat{c}}^*$ y γ^*_k tienen el mismo signo

→ Ahora mostremos que tienen que ser igual a cero:

- si $\gamma_k^* > 0 \Rightarrow \hat{k} \to \infty \Rightarrow f'(\hat{k}) \to 0$

Pero $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x)$, $f'(\hat{k}) \to 0$

$\Longrightarrow \gamma_{\hat{c}}^* < 0$ →※← Pues dijimos que tenían igual signo

$\Longrightarrow$ la única posibilidad para γ_k^* igual signo que γ^*_c es que $\boxed{\gamma_k^* = \gamma_{\hat{c}}^* = 0}$

$\Longrightarrow \hat{k}, \hat{c}$ cte en estado estacionario

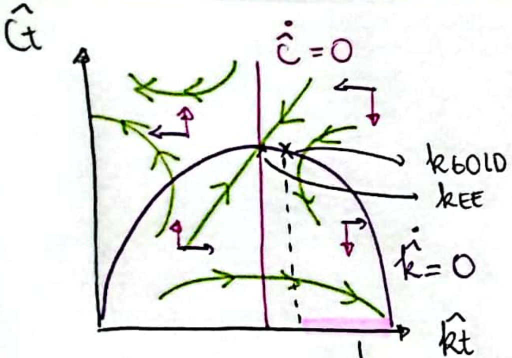
$\Longrightarrow \hat{y}$ cte en EE.

→ Ahora vemos los valores de EE

$\dot{\hat{k}} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{c} = f(\hat{k}) - (x+n+\delta)\hat{k}}$ (1)

$\dot{\hat{c}} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(\hat{k}) = \delta + \rho + \theta x}$ (2) $\wedge$ $\boxed{\hat{c}^* = 0}$ (3)

↳ 3 potenciales estados estacionarios !



→ nadie estará aquí! (no hay sobre ahorro) → nadie traspasa el k_{GOLD}

* comentarios

- $k_{GOLD} > k_{EE}$
  ↳ Dem: $\frac{\partial c}{\partial k} = 0$ → condición de k_{GOLD}
  ↳ $= f'(\hat{k}_G) = x+n+\delta$
  y sabemos que.
  $f'(\hat{k}_{EE}) = \delta + \rho + \theta x$

→ luego de la cond. de transversalidad sabemos que: $f'(\hat{k}_E) > \delta + n + x$

$\Rightarrow f'(\hat{k}_{EE}) > f'(k_{GOLD})$

→ como f creciente y cóncava $\Rightarrow \boxed{k_{GOLD} > k_{EE}}$

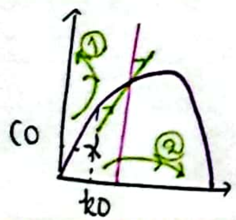
$\Downarrow$

$x + n + \cancel{\delta} < \cancel{\delta} + \rho + \theta x$

$\Rightarrow \boxed{\rho > n + (1-\theta) x}$
↳ condición parámetros.

→ Análisis del Diagrama de Fase

→ si iniciamos en $\hat{k}_0 < \hat{k}_{EE}$



1) $c > c_0 \Rightarrow$ tasa ahorro inicial muy baja ⇒ nos vamos por ①
⇒ $k \to 0 \Rightarrow y \to 0 \Rightarrow \underline{c \to 0}$ no puede ocurrir x inada!

⇒ NO es un equilibrio

2) $c < c_0 \Rightarrow$ tasa de ahorro muy alta
⇒ junto mucho k
⇒ $R = f'(\hat{k}) - \delta$ cae por debajo de $x+n$ ⇒ nos vamos por ②
↳ se viola transversalidad
⇒ $\downarrow c$ → no puede ocurrir.

⇒ NO es un equilibrio

→ solo nos deja una opción de equilibrio estable → la cual lleva a $\hat{k}^*$

→ La importancia de la condición de transversalidad (en la determinación de un único equilibrio)

- suponemos que el mundo termina en T

$\Rightarrow V = \int_0^T u(t) \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} \, dt$

no ponzi: $a \cdot \exp\left(-\int_0^T r(v) - n \, dv\right) \geq 0$

→ como ahora el tiempo es finito ⇒ cambia la condición de transversalidad:

$\underbrace{a_T \cdot \exp\left(-\int_0^T r(v) - n \, dv\right)}_{\neq 0 \text{ en tiempo finito}} = 0$

$\Rightarrow \underbrace{a_T = 0}_{\Rightarrow K_T = 0}$ (no dejan activos cuando mueren).

⇒ Ahora, para determinar $\hat{c}(0)$ debo considerar que en $K_T = 0$ ⇒ el brazo estable ya no me sirve pues no conduce a $\hat{k}_T = 0$ ⇒ el nuevo equilibrio debe estar sobre el brazo estable (①)

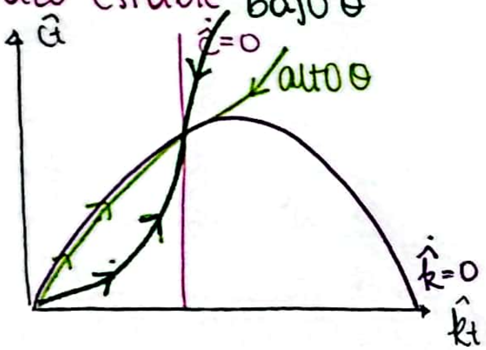
* Elegimos un equilibrio u otro según la cond. de transv.

→ La forma de la trayectoria estable

La relación entre la variable de control (c_t) y estado (k_t) se conoce como "policy function", la cual dependerá de los parámetros del modelo

⇒ según estos parámetros tendremos la forma del brazo estable

θ



(): Partimos de un $k < k_E$

- cuando θ es alto ⇒ $\frac{1}{\theta}$ bajo ⇒ baja elasticidad de sustitución ⇓ quieren suavizar su consumo ⇐ como parten de un nivel de c menor → quieren traer consumo futuro al presente

⇒ nos movemos por la curva verde claro donde el C aumenta harto en la transición → la transición será lenta

- cuando θ es bajo ⇒ $\frac{1}{\theta}$ alto ⇒ alta elast. de sust ⇓ están dispuestos a posponer consumo ⇐ nos movemos por el brazo verde oscuro

⇒ la transición será rápida → a medida que $k \to \hat{k}$ el consumo aumenta rápidamente.

→ comportamiento de la tasa de ahorro

$$\boxed{s = 1 - \frac{\hat{c}}{f(\hat{k})} = 1 - \frac{\hat{c}}{\hat{y}}}$$

→ en Solow s es constante, en Ramsey los agentes la determinan optimamente.

- El comportamiento de s es ambigua pues existen 2 efectos actuando

① Efecto sustitución: Al $\uparrow \hat{k} \Rightarrow \downarrow f'(\hat{k}) \Rightarrow$ cae la tasa de retorno del ahorro

⇒ A medida que la economía se desarrolla la tasa de ahorro cae.

② Efecto ingreso: El ingreso por trabajador efectivo $f(\hat{k}) = \hat{y}$ está muy por debajo en economías pobres. → como quieren suavizar → quieren traer consumo futuro a presente ⇒ bajas s cuando $\hat{k}$ pequeño y a medida que crece lo contrario

⇒ A medida que la economía se desarrolla la tasa de ahorro cae.

⇒ el comportamiento de s depende de cual efecto domina.

→ Asumimos una Cobb-Douglas para el análisis: $\boxed{Y = K^{\alpha}(T \cdot L)^{1-\alpha}} \Rightarrow \hat{y} = \hat{k}^{\alpha}$

en EE 1) $\dot{\hat{k}} = 0 \Rightarrow \hat{c} = f(\hat{k}) - (x+n+\delta)\hat{k}$

$\hat{c} = \hat{k}^{\alpha} - (x+n+\delta)\hat{k}$

2) $f'(\hat{k}) = \delta + \rho + \theta x$

$\alpha \hat{k}^{\alpha-1} = \delta + \rho + \theta x \to \hat{k}^{1-\alpha} = \alpha/(\delta+\rho+\theta x)$

$$\Rightarrow s^* = 1 - \frac{\hat{k}^{\alpha} - (x+n+\delta)\hat{k}}{\hat{k}^{\alpha}} = \cancel{1} - \cancel{1} + (x+n+\delta)\hat{k}^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{s^* = \frac{(x+n+\delta)\cdot\alpha}{\delta+\rho+\theta x}} \Rightarrow s^* < \alpha$$

→ Vamos a reescribir el sistema de ecuaciones para el análisis

→ Queremos escribir todo en función de $\frac{\hat{c}}{\hat{y}}$

$$\frac{\hat{c}}{\hat{y}} \;/ \ln \Rightarrow \ln(\hat{c}) - \ln(\hat{y}) \;/ \partial/\partial t$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} - \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} - \frac{\alpha \hat{k}^{\alpha-1}\cdot\dot{\hat{k}}}{\cancel{\hat{k}^{\alpha}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(\dot{\hat{c}/\hat{y}})}{(\hat{c}/\hat{y})} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} - \alpha\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}}$$

→ Pero tenemos expresiones para $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}}$ y $\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(\alpha\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x)$$

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \hat{k}^{\alpha-1} - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - (x+n+\delta)$$

$$\Rightarrow \frac{(\dot{\hat{c}/\hat{y}})}{(\hat{c}/\hat{y})} = \frac{1}{\theta}(\alpha\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x) - \alpha\left(\hat{k}^{\alpha-1} - \frac{\hat{c}}{\hat{y}}\cdot\hat{k}^{\alpha-1} - (x+n+\delta)\right)$$

En EE $(\dot{\hat{c}/\hat{y}})/(\hat{c}/\hat{y}) = 0$

$$\hat{k}^{\alpha-1}\alpha\frac{\hat{c}}{\hat{y}} = -\frac{1}{\theta}\alpha k^{\alpha-1} - \frac{1}{\theta}(-\delta-\rho-\theta x) + \alpha k^{\alpha-1} - \alpha(x+n+\delta)$$

$$\hat{k}^{\alpha-1}\frac{\hat{c}}{\hat{y}} = \left(1-\frac{1}{\theta}\right)k^{\alpha-1} + \frac{1}{\theta\alpha}(\delta+\rho+\theta x) - (x+n+\delta)$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{c}}{\hat{y}} = \left(1-\frac{1}{\theta}\right) + \underbrace{\left\{\frac{\delta+\rho+\theta x}{\theta\alpha} - (x+n+\delta)\right\}}_{\text{"}\psi\text{"}} \underbrace{\hat{k}^{1-\alpha}}_{\hat{k}/\hat{y}}$$

"ψ" si $>0 \Rightarrow$ Pendiente (+)
$<0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow s = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{\theta} - \underset{\psi}{(CTE)}\frac{\hat{k}}{\hat{y}}$$

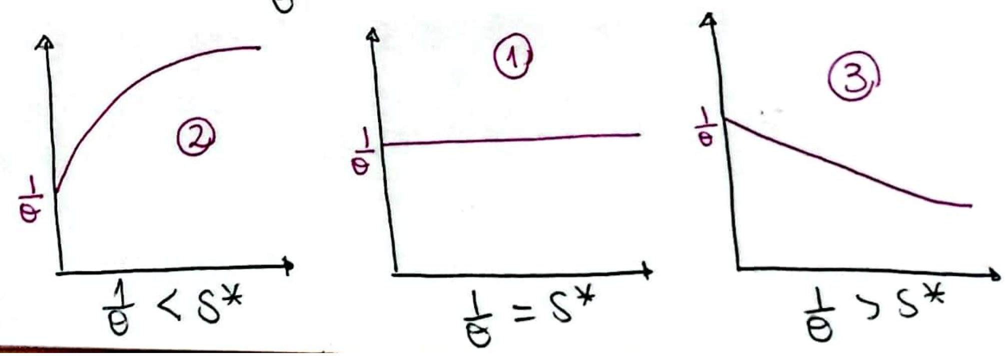
$$\Rightarrow s = \frac{1}{\theta} - \underset{\psi}{(CTE)}\frac{\hat{k}}{\hat{y}}$$

→ Asumimos para el análisis: $\overset{\psi}{CTE} = 0$

① $\Rightarrow s = \frac{1}{\theta}$ → tasa de ahorro cte durante la transición → efecto sustitución y riqueza se anulan

② si estamos en el caso donde θ es alto
$\Rightarrow 1/\theta$ bajo $\Leftrightarrow$ baja elast sustitución
$\Rightarrow \psi < 0$ (con mayor probabilidad)
$\Rightarrow$ Hay poco efecto sustitución
$\Rightarrow s$ aumentará durante la transición
$\Rightarrow s^* > \frac{1}{\theta}$

③ en el caso donde θ es bajo ocurre lo contrario $\Rightarrow$ domina el efecto sustitución y efecto riqueza es bajo
$\Rightarrow s^* < \frac{1}{\theta}$ (pues $\psi > 0$)



→ Velocidad de convergencia

Volvemos al equilibrio de Ramsey:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\hat{k} \quad (1)$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left(f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right) \quad (2)$$

→ para ver la velocidad de convergencia log-linearizamos en torno al EE.

→ De (1):

$$\underbrace{\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}} = \underbrace{\hat{k}^{\alpha-1} - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - (x+n+\delta)}$$

forma "conveniente"

$$\frac{\partial \ln \hat{k}}{\partial t} = e^{-(1-\alpha)\ln(\hat{k})} - e^{\ln(\hat{c})-\ln(\hat{k})} - (x+n+\delta)$$

→ Hacemos la expansión de Taylor entorno al E.E. (de 1er orden)

$$(\dot{\ln \hat{k}}) = \Big(\underbrace{e^{-(1-\alpha)\ln(\hat{k})}(-(1-\alpha)) - e^{\ln(\hat{c})-\ln(\hat{k})}(-1)}_{\partial f/\partial \ln(\hat{k})}\Big)\Big|_{EE}$$

$$\cdot\,(\underset{x_1}{\ln(\hat{k})} - \underset{x_{01}}{\ln(\hat{k}_{EE})}) + \Big(\underbrace{-e^{\ln(\hat{c})-\ln(\hat{k})}}_{\partial f/\partial \ln(\hat{c})}\Big)\Big|_{EE}$$

$$\cdot\,(\underset{x_2}{\ln(\hat{c})} - \underset{x_{02}}{\ln(\hat{c}_{EE})})$$

→ En EE. se cumple:

1. $e^{-(1-\alpha)\ln(\hat{k})} - e^{\ln(\hat{c})-\ln(\hat{k})} = x+n+\delta \quad (3)$

2. $\alpha\hat{k}^{\alpha-1} = \alpha e^{-(1-\alpha)\ln(\hat{k})} = \delta+\rho+\theta x$

$$\Rightarrow e^{-(1-\alpha)\ln(\hat{k})} = \frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha} \quad (4)$$

→ (4) en (3):

$$-e^{\ln(\hat{c})-\ln(\hat{k})} = x+n+\delta - \frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha} \quad (5)$$

→ usando (3), (4) y (5) en taylor:

$$(\dot{\ln(\hat{k})}) = \left(\frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha}(-(1-\alpha)) + \frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha} - (x+n+\delta)\right)$$

$$\cdot\,(\ln(\hat{k}) - \ln(\hat{k}_{EE}))$$

$$+\left(x+n+\delta - \frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha}\right)(\ln(\hat{c}) - \ln(\hat{c}_{EE}))$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\ln(\hat{k})} &= (\cancel{\delta}+\rho+\theta x - x - n - \cancel{\delta})(\ln(\hat{k}) - \ln(\hat{k}_{EE}))\\ &+ \left(x+n+\delta - \frac{\delta+\rho+\theta x}{\alpha}\right)(\ln(\hat{c}) - \ln(\hat{c}_{EE}))\end{aligned}}$$

→ Ahora hacemos la expansión de taylor entorno al EE para (2)

$$(2) = \dot{\ln(\hat{c})} = \frac{\alpha}{\theta}\hat{k}^{\alpha-1} - \left(\frac{\delta+\rho+\theta x}{\theta}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\theta}e^{-(1-\alpha)\ln(\hat{k})} - \left(\frac{\delta+\rho+\theta x}{\theta}\right)$$

$$\dot{\ln(\hat{c})} \approx \frac{\alpha}{\theta}e^{-(1-\alpha)\ln(\hat{k})}(-(1-\alpha))\Big|_{EE}(\ln(\hat{k}) - \ln(\hat{k}_{EE}))$$

$$+\,0\cdot(\ln(\hat{c}) - \ln(\hat{c}_{EE}))$$

$$= -\frac{\cancel{\alpha}(1-\alpha)}{\theta}\cdot\frac{\delta+\rho+\theta x}{\cancel{\alpha}}(\ln(\hat{k}) - \ln(\hat{k}_{EE}))$$

$$\boxed{(\dot{\ln(\hat{c})}) \approx \left(-\frac{(1-\alpha)(\delta+\rho+\theta x)}{\theta}\right)(\ln(\hat{k}) - \ln(\hat{k}_{EE}))}$$

Escaneado con CamScanner

→ Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{\ln}(\hat{k}) \\ \dot{\ln}(\hat{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho - n - (1-\theta)x & x+n+\delta - \frac{(\delta+\rho+\theta x)}{\alpha} \\ -\frac{(1-\alpha)(\delta+\rho+\theta x)}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(\hat{k})-\ln(\hat{k}_E) \\ \ln(\hat{c})-\ln(\hat{c}_E) \end{bmatrix}$$

le calculamos el determinante a $\begin{bmatrix} a-\beta & b \\ c & d-\beta \end{bmatrix}$ y lo igualamos a cero.

$$0 = \underbrace{1}_{a}\beta^2 - \beta\underbrace{(\rho-n-(1-\theta)x}_{b} + \underbrace{\left(\frac{(1-\alpha)(\delta+\rho+\theta x)}{\theta}\right)\cdot\left(x+n+\delta-\frac{(\delta+\rho+\theta x)}{\alpha}\right)}_{c}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{2\beta = \left(\varepsilon^2 + 4\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)(\rho+\delta+\theta x)\left[\frac{\rho+\delta+\theta x}{\alpha} - (n+x+\delta)\right]\right)^{1/2} - \varepsilon^2}$$

con $\varepsilon^2 = \rho - n - (1-\theta)x > 0$

→ luego, si la tasa de ahorro es constante

$$\boxed{\beta^* = (1-\alpha)(x+n+\delta}$$

→ Políticas

* El crecimiento de y, c es exogeno
* Y depende de θ, ρ, δ, n y de la forma de $f(\cdot)$
* Diferencias entre países vienen dadas por Δ Preferencias y Δ tecnologías
* Instituciones podrían ser relevantes!
  ↳ introducimos impuestos para analizar este tema.

→ Impuestos.

↳ introducimos el impuesto en la tasa de interés:

$$\boxed{r = (1-\tau)(f'(\hat{k})-\delta)} \Rightarrow \text{distorsiona!}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left((1-\tau)(f'(\hat{k}-\delta)-\rho-\theta x\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(\hat{k}) = \frac{\rho+\theta x}{(1-\tau)} + \delta} \Rightarrow \text{un mayor impuesto reduce } \hat{k}_E$$

⇓

reduce $\hat{y}_E$