Pregunta 1

a) Primero que nada, planteamos cual sería el problema de maximizar de los individuos. Para esto asumimos que h_t es el capital humano disponible por el individuo, $\bar{h}$ es el capital promedio en la economía, y el individuo distribuye una fracción u_t de capital humano para trabajo productivo, mientras que $1-u_t$ es para seguir capacitándose. Luego, el problema del individuo sería:

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^{\infty} \frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t}\, dt$$

$$\text{s.a} \quad \dot{K} = A K^{\alpha} (u h)^{\lambda} \bar{h}^{\varepsilon} - c - \delta K$$

$$\dot{h} = B(1-u)h - \delta h$$

Planteamos el Hamiltoniano en valor presente:

$$H = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda_1\left(A K^{\alpha} (u h)^{\lambda} \bar{h}^{\varepsilon} - c - \delta K\right) + \lambda_2\left(B(1-u)h - \delta h\right)$$

Condiciones de primer orden

$$\frac{\partial H}{\partial c}: \quad c^{-\theta} = \lambda_1 \iff -\theta \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial K}: \quad \lambda_1\left(\alpha A K^{\alpha-1} (u h)^{\lambda} \bar{h}^{\varepsilon} - \delta\right) = -\dot{\lambda}_1 + \lambda \rho \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha A K^{\alpha-1} (u h)^{\lambda} \bar{h}^{\varepsilon} - \delta - \rho = -\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}$$

$\frac{\partial H}{\partial \mu}$: $\lambda_1 \lambda A K^{\alpha} (uh)^{\lambda-1} \cdot \cancel{K} \cdot \bar{h}^{\varepsilon} = \lambda_2 B \cancel{K} \iff \lambda_1 \lambda A K^{\alpha} (uh)^{\lambda-1} \cdot u \bar{h}^{\varepsilon} = \lambda_2 B u$ (3)

$\frac{\partial H}{\partial h}$: $\lambda_1 \lambda A K^{\alpha} (uh)^{\lambda-1} \cdot u \bar{h}^{\varepsilon} + \lambda_2 B(1-\mu) - \delta = -\dot{\lambda}_2 + \lambda_2 \rho$ (4)

Remplazando (3) en (4):

$$\lambda_2 B u + \lambda_2 B(1-\mu) - \delta = -\dot{\lambda}_2 + \lambda_2 \rho$$

$$B - \delta - \rho = -\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} \qquad (5)$$

Para resolver, nota que $h = \bar{h}$ en equilibrio pues todas las firmas son iguales. Con (1) y (2) obtenemos la ecuación de Euler:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \left(A \alpha K^{\alpha-1} (uh)^{\lambda} h^{\varepsilon} - \delta - \rho \right)$$

Asumiendo que estamos en la senda estable, la tasa de crecimiento es constante. Luego:

$$\theta \gamma_c + \delta - \rho = A \alpha \frac{(uh)^{\lambda} h^{\varepsilon}}{K^{1-\alpha}}$$

Tomamos logaritmo y derivamos en el tiempo:

$$0 = \lambda(g_u + g_h) + \varepsilon g_h - (1-\alpha) g_K$$

$$\Rightarrow g_K (1-\alpha) = g_h (\lambda + \varepsilon)$$

$$g_K = g_h \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha}$$

Ahora, vamos a la ecuación del producto:

$$Y = A K^{\alpha}(hu)^{\lambda} h^{\varepsilon}$$

$$g_y = \alpha g_K + g_h(\lambda + \varepsilon)$$

usando que $g_K = g_h \frac{\lambda + \varepsilon}{1-\alpha}$

$$\Rightarrow g_y = g_h \frac{\alpha(\lambda+\varepsilon)}{(1-\alpha)} + g_h(\lambda+\varepsilon)$$

$$g_y = \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} g_h = g_K$$

Luego, $g_y = g_K$.

De la ecuación de dinámica del capital, tenemos que

$$\alpha K^{\alpha-1}(uh)^{\lambda} h^{\varepsilon} = \alpha\left(\frac{\dot{K}}{K} + \delta + \frac{C}{K}\right)$$

Reemplazando en la ecuación de Euler, tenemos:

$$\theta g_c = \alpha g_K + \alpha\delta + \alpha\frac{C}{K} - \delta - \rho$$

$$\theta g_c - \alpha g_K - \alpha\delta + \delta + \rho = \alpha\frac{C}{K}$$

$$\Rightarrow g_K = g_c.$$

Luego, la tasa de crecimiento de las variables en esta economía es

$$g_Y = g_K = g_c = \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} g_h$$

Note que mientras mayor sea la externalidad, mayor será la tasa de crecimiento de la economía.

Por último, mostrando que u es constante, habremos usado el modelo

2) Para encontrar g_h, de (1) sabemos que

$$g_{\lambda_1} = -\theta g_c = -\theta \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} g_h$$

Además, de (5) tenemos que

$$-g_{\lambda_2} = B - \delta - \rho$$

Por lo tanto, tomando logaritmo de (3) y derivando con el tiempo

$$\lambda_1 \lambda A K^{\alpha} (uh)^{\lambda-1} \cdot h^{\varepsilon} = \lambda_2 B$$

$$\ln(cte) + \ln \lambda_1 + \alpha \ln k + (\lambda-1)(\ln u + \ln h) + \varepsilon \ln h = \ln(cte) + \ln(\lambda_2)$$

$$g_{\lambda_1} + \alpha g_k + (\lambda-1)(0 + g_h) + \varepsilon g_h = g_{\lambda_2}$$

$$-\theta \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} g_h + \alpha \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} g_h + (\lambda+\varepsilon-1) g_h = \rho + \delta - B$$

$$g_h \left[(\alpha-\theta) \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} + \frac{(1-\alpha)(\lambda+\varepsilon-1)}{1-\alpha} \right] = \rho + \delta - B$$

$$g_h = \frac{-\theta(\lambda+\varepsilon) + (\lambda+\varepsilon-1) + \alpha}{(1-\alpha)} = \rho + \delta - B$$

$$g_h = \frac{(1-\theta)(\lambda+\varepsilon) + \alpha - 1}{(1-\alpha)} = \rho + \delta - B$$

$$g_h = \frac{(1-\alpha)(\rho+\delta-B)}{(1-\theta)(\lambda+\varepsilon)+(\alpha-1)}$$

$(\theta-\alpha)(\lambda+\varepsilon)+(1-\varepsilon-\lambda)(1-\alpha)$

$\theta(\lambda+\varepsilon)-\alpha(\lambda+\varepsilon)+1-(\varepsilon+\lambda)-\alpha+\alpha(\varepsilon+\lambda)$

$(\theta-1)(\lambda+\varepsilon)+(1-\alpha)$ //

$$g_h = \frac{(1-\alpha)(B-(\delta+\rho))}{(1-\alpha)+(\theta-1)(\lambda+\varepsilon)} \quad // \quad \Rightarrow \quad g_k = \frac{(\lambda+\varepsilon)(B-(\delta+\rho))}{(1-\alpha)+(\theta-1)(\lambda+\varepsilon)} \quad //$$

Luego, como $g_h = B(1-u)$, tenemos que u es ct.

Para que $g_k = g_h$, se debe dar que:

$$\frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} = 1$$

$$\lambda+\varepsilon = 1-\alpha$$

$$\varepsilon = 1-\alpha-\lambda \quad //$$

c) La solución del planner cambiaría debido a que internalizaría la externalidad. esto es, $\bar{h} = h$ desde un inicio. Así, deberíamos ver que el aumento en el BGP debería ser mayor

$$H = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda_1\left(AK^{\alpha}u^{\lambda}h^{\lambda+\varepsilon} - c - \delta K\right) + \lambda_2\left(B(1-u)h - \delta\right)$$

CPO:

$\frac{\partial H}{\partial c}$: $c^{-\theta} = \lambda_1 \iff \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\cdot -\left(\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda}\right)$ (1)

$\frac{\partial H}{\partial K}$: $\lambda_1\left(\alpha AK^{\alpha-1}u^{\lambda}h^{\lambda+\varepsilon} - \delta\right) = -\dot{\lambda}_1 + \lambda_1\rho \iff \alpha AK^{\alpha-1}u^{\lambda}h^{\lambda+\varepsilon} - \delta - \rho = -\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}$ (2)

$\frac{\partial H}{\partial u}$: $\lambda_1\left(\lambda AK^{\alpha}u^{\lambda-1}h^{\lambda+\varepsilon}\right) = \lambda_2 B h$ (3)

$\frac{\partial H}{\partial h}$: $\lambda_1(\lambda+\varepsilon)AK^{\alpha}u^{\lambda}h^{\lambda+\varepsilon-1} + \lambda_2 B(1-u) = -\dot{\lambda}_2 + \lambda_2\rho$ (4)

Sabemos que la ecuación de Euler era:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(\alpha A K^{\alpha-1} u^{\lambda} h^{\lambda+\varepsilon} - \delta - \rho\right)$$

$$\Rightarrow \theta g_c + \delta + \rho = K^{\alpha-1} u^{\lambda} h^{\lambda+\varepsilon}$$

$$\Rightarrow g_k = \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} g_h = g_y = g_c$$

Multiplicando por (3) por $\frac{u(\lambda+\varepsilon)}{\lambda}$ y reemplazando en (4), tenemos

$$\lambda_1 \lambda A K^{\alpha} u^{\lambda-1} h^{\lambda+\varepsilon} = \lambda_2 B h$$

$$\lambda_1 \lambda A K^{\alpha} u^{\lambda} h^{\lambda+\varepsilon-1} = \lambda_2 B u$$

$$(\lambda+\varepsilon)\ \lambda_1 A K^{\alpha} u^{\lambda} h^{\lambda+\varepsilon-1} = \frac{(\lambda+\varepsilon)}{\lambda} \lambda_2 B u$$

$$\rightarrow \quad \frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda} \lambda_2 B u + \lambda_2 B(1-u) - \delta = -\dot{\lambda}_2 + \lambda_2 \rho$$

$$\lambda_2 B \frac{\varepsilon}{\lambda} u + \lambda_2 B - \delta = -\dot{\lambda}_2 + \lambda_2 \rho$$

$$B \frac{\varepsilon}{\lambda} u + B - \rho - \delta = -\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}$$

Finalmente, de (3) tenemos que:

$$\lambda_1 (\lambda A K^{\alpha} u^{\lambda-1} h^{\lambda+\varepsilon}) = \lambda_2 B h$$

$$\ln(ct_1) + \ln \lambda_1 + \alpha \ln K + (\lambda-1)\ln u + (\lambda+\varepsilon)\ln h = \ln(ct_2) + \ln \lambda_2 + \ln h$$

$$-\theta g_c + \alpha g_K + (\lambda-1) g_u + (\lambda+\varepsilon) g_h = g_{\lambda_2} + g_h$$

$$-\theta \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} g_h + \alpha \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\alpha} g_h + (\lambda-1)\frac{\lambda+\varepsilon}{(1-\alpha)} g_h + (\lambda+\varepsilon-1) g_h = \delta+\rho-\left(B\frac{\varepsilon}{\lambda}u+B\right)$$

$$g_h \frac{(\lambda+\varepsilon)(\alpha-\theta+\lambda-1)+(\lambda+\varepsilon-1)(1-\alpha)}{1-\alpha} = \delta+\rho-B\frac{\varepsilon}{\lambda}uB$$

//

Por lo que en conjunto con

$$g_h = B(1-u) - \delta$$

Caracteriza el equilibrio del planner.