Microeconomía I

Ayudantía 1

Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

Doctorado y Magíster en Economía
Facultad de Economía y Negocios
Universidad de Chile

17 de abril de 2021

PREGUNTA 1)

Sea una estructura de elección $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ que satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada (ADPR). Considere las siguientes 2 posibles relaciones de preferencias reveladas, $\succ^*$ y $\succ^{**}$:

1) $x \succ^* y \iff$ existe algún $B \in \mathscr{B}$ tal que $x, y \in B$, $x \in C(B)$ y $y \notin C(B)$
2) $x \succ^{**} y \iff x \succsim^* y$ pero no $y \succsim^* x$

Donde $\succsim^*$ es la relación revelada "al menos tan buena como" tal que: $x \succsim^* y \iff$ existe algún $B \in \mathscr{B}$ tal que $x, y \in B$, y $x \in C(B)$.

Responda lo siguiente:

A) Muestre que $\succ^*$ y $\succ^{**}$ producen la misma relación sobre X, esto es, para cualquier $x, y \in X$, $x \succ^* y \iff x \succ^{**} y$. Esto se cumple si $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ no satisface ADRP?

B) Es $\succ^*$ transitiva?

C) Muestre que si $\mathscr{B}$ incluye todos los subconjuntos de 3 elementos de X, entonces $\succ^*$ es transitiva

Suponga que $x \succ^* y$, esto implica que existe un $B \in \mathscr{B}$ tal que $x,y \in B$, $x \in C(B)$ y $y \notin C(B)$. Luego, $x \succsim^* y$. Suponga por contradicción que $y \succsim^* x$, entonces existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x,y \in B$ y $y \in C(B)$, pero ADRP (ver definición 1.C.1 MWG) implica que $x \in C(B)$, esto es una contradicción, Por qué? Luego, si $x \succ^* y$ no podemos tener que $y \succsim^* x$, esto es, $x \succ^{**} y$.

Ahora mostraremos que $x \succ^{**} y \implies x \succ^* y$. Luego, suponga que $x \succ^{**} y$, esto implica que $x \succsim^* y$ pero no $y \succsim^* x$. Por lo tanto, existe un $B \in \mathscr{B}$, $\quad x,y \in B$, $\quad x \in C(B)$ y para cualquier $B' \in \mathscr{B}$ si $x,y \in B'$ entonces $y \notin C(B')$. En particular, $x \in C(B)$ y $y \notin C(B)$. Concluimos que $x \succ^* y$ y para cualquier $x,y \in X$, $\quad x \succ^* y \iff x \succ^{**} y$.

Por otro lado, la equivalencia de las relaciones anteriores no se garantiza sin ADRP como lo muestra el siguiente contraejemplo:

Defina $X = \{x,y,z\}$, $\quad \mathscr{B} = \{\{x,y\},\{x,y,z\}\}$, $\quad C(\{x,y\}) = \{x\}$, $\quad C(\{x,y,z\}) = \{y\}$. Luego, $x \succ^* y$ y $y \succ^* x$, pero no se cumple $x \succ^{**} y$ ni $y \succ^{**} x$.

$\succ^*$ no es transitiva como lo muestra el siguiente contraejemplo:

Defina $X = \{x, y, z\}$, $\mathscr{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}\}$, $C(\{x, y\}) = \{x\}$, $C(\{y, z\}) = \{y\}$. Tenemos que $x \succ^* y$ y $y \succ^* z$ pero no se cumple que $x \succ^* z$ (porque ninguno de los dos sets en $\mathscr{B}$ incluye $\{x, z\}$).

Denote $x, y, z \in X$ $x \succ^* y$ y $y \succ^* z$. Luego, $x, y, z \in \mathscr{B}$ y por $A)$ tenemos que $x \succ^{**} y$ y $y \succ^{**} z$, esto implica que $y \not\succsim^* x$ y $z \not\succsim^* y$. Como $x \succsim^* y$ racionaliza $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ (ver proposición 1.D.2 MWG) , $y \notin C(\{x, y, z\})$ y $z \notin C(\{x, y, z\})$. Además, como $C(\{x, y, z\}) \neq \emptyset$ sigue que $C(\{x, y, z\}) = \{x\}$, por lo tanto $x \succ^* z$.

PREGUNTA 2

Considere el siguiente problema de maximización de utilidad:

$$\begin{aligned} max \quad & u(x) \\ s.t. \quad & p \cdot x \leq w \end{aligned}$$

Donde $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$.
Determine el grado de homogeneidad de las demandas Walrasianas (óptimas) $x(p,w)$. Adicionalmente, muestre que si las $\succsim$ son LNS entonces se cumple la Ley de Walras, esto es, muestre que se cumple $p \cdot x = w$, $\forall x \in x(p,w)$.

PREGUNTA 2 R.

Recordemos que una función $f(x_1,...,x_n)$ es homogénea de grado k (en sus argumentos) si cumple que:

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, ..., x_n), \quad \forall \alpha > 0$$

Y es es homogénea de grado k en x_1 (por ejemplo) si cumple que:

$$f(\alpha x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha^k f(x_1, ..., x_n), \quad \forall \alpha > 0$$

Primero definamos el conjunto de canastas presupuestariamente factibles como:

$$B(p,w) \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x \leq w \right\}$$

Notemos que $B(p,w) = B(\alpha p, \alpha w)$ con $\alpha > 0$. Luego, $x(p,w) = x(\alpha p, \alpha w)$, esto es, las demandas Walrasianas son h-g-0 en (p,w).

Ahora demostraremos que si las $\succsim$ son LNS entonces $p \cdot x = w$, $\forall x \in x(p,w)$. Suponga por contradicción que $p \cdot x < w$, como las preferencias son LNS existe un $y \in \mathbb{R}^n_+$ en un vecindario de x tal que $\|y - x\| \leq \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, con $y \succ x$, esto es, existe un $y \in B(p,w)$ tal que $u(y) > u(x)$, una contradicción con la optimalidad de $x \in x(p,w)$.

PREGUNTA 3

Considere una extensión al conjunto presupuestario competitivo B a un conjunto de consumo arbitrario X tal que $B(p,w) = \{x \in X : p \cdot x \leq w\}$. Asuma que $(p,w) \gg 0$.

A) Si X es un conjunto de consumo donde solo un bien puede ser consumido simultáneamente, $B(p,w)$ es convexo?

B) Muestre que si X es un conjunto convexo, entonces $B(p,w)$ también lo es.

PREGUNTA 3.A) R.

No, tome $x, x' \in B(p,w)$ con $x, y \in \mathbb{R}^L_+ \setminus \{0\}$ y defina $x'' \equiv \alpha x + (1-\alpha)x'$ con $\alpha \in (0,1)$. Luego, x'' tiene coordenadas positivas de más de un bien, concluimos por tanto que $x'' \notin B(p,w)$.

Nuevamente, tome $x, x' \in B(p,w)$ y defina $x'' \equiv \alpha x + (1-\alpha)x'$ con $\alpha \in (0,1)$. En este caso como X es convexo, $x'' \in X$. Adicionalmente, $p \cdot x'' = \alpha(p \cdot x) + (1-\alpha)(p \cdot x') \leq \alpha w + (1-\alpha)w = w$. Por lo tanto, $x'' \in B(p,w)$.

Pregunta 4

Muestre que si $x(p,w)$ es homogénea de grado 1 (h-g-1) en w y satisface la Ley de Walras, entonces $\varepsilon_{l,w}(p,w) = 1$ para cada l. Interprete. Puede decir algo sobre $D_w x(p,w)$ y la forma de las funciones y curvas de Engel en este caso?

Recordemos que $\varepsilon_{l,w}(p,w) = \frac{\mathrm{d}x_l(p,w)}{x_l(p,w)} \frac{w}{\mathrm{d}w}$ (reemplace w por k y el diferencial es respecto a p_k).

Entonces, de la h-g-1 en w tenemos que $x(p,\alpha w) = \alpha x(p,w), \quad \forall \alpha > 0$. Diferenciando esta expresión con respecto a α y evaluando en $\alpha = 1$ obtenemos:

$$wD_w x(p,w) = x(p,w) \implies D_w x(p,w) = (1/w)x(p,w)$$

Concluimos por tanto que $\varepsilon_{l,w}(p,w) = \frac{\mathrm{d}x_l(p,w)}{x_l(p,w)} \frac{w}{\mathrm{d}w} = 1$.

Este resultado nos dice que un 1 % de aumento (o disminución) en la riqueza produce un aumento (disminución) en el consumo de todos los bienes en un 1 %.
Como $(1/w)x(p,w) = x(p,1)$ Por qué? Luego, $D_w x(p,w)$ es una función solo de p y por lo tanto la curva de Engel $E_p = \{x(p,w) : w > 0\}$ es una recta a través de $x(p,1)$.

PREGUNTA 5

Suponga que $x(p,w)$ es una función de demanda que es h-g-1 en w, satisface la Ley de Walras y h-g-0 (en (p,w)). Suponga también que todas las derivadas cruzadas respecto a precios son cero, esto es, que $\partial x_l(p,w)/\partial p_k = 0$ cuando $k \neq l$. Muestre que esto implica que para cada l, $x_l(p,w) = \alpha_l w/p_l$, donde $\alpha_l > 0$ es una constante independiente de (p,w).

Como $x(p,w)$ es h-g-1 en w tenemos que $x(p,\alpha w) = \alpha x(p,w), \quad \forall \alpha > 0$. Tome $\alpha = 1/w$ esto implica que $x_l(p,1) = (1/w)x_l(p,w)$. Adicionalmente, $\partial x_l(p,1)/\partial p_k = \partial x_l(p)/\partial p_k = 0$ cada vez que $k \neq l$, luego $x_l(p,1)$ es una función de p_l solamente. Sigue que podemos escribir $x_l(p,w) = x_l(p_l)$.

Dado que $x(p,w)$ es h-g-0 $(en(p,w))$, $x_l(p_l)$ debe ser homogénea de grado -1 (*) y por lo tanto concluimos que existe $\alpha > 0$ tal que $x_l(p_l) = \alpha_l/p_l$, ya que:

$$x_l(\alpha p_l) = \alpha^{-1} x_l(p_l), \quad \text{tomando} \quad \alpha = 1/p_l \quad \text{tenemos que:}$$
$$\iff x_l(1) = p_l x_l(p_l)$$
$$\iff cte = p_l x_l(p_l)$$
$$\implies x_l(p_l) = cte/p_l$$
$$\text{Denotando esta constante por} \quad \alpha_l \quad \text{tenemos que} \quad x_l(p_l) = a_l/p_l$$

Pregunta 5 R.

De las relaciones anteriores esto implica que $x_l(p,w) = \alpha_l w/p_l$.

Finalmente, por la Ley de Walras sabemos que $\sum_l p_l x_l = \sum_l p_l(\alpha_l w/p_l) = \sum_l \alpha_l w = w \sum_l \alpha_l = w$ luego, los α_l satisfacen que $\sum_l \alpha_l = 1$

(*) Nota: como $x(p,w)$ es h-g-1 en w y h-g-0 en (p,w) sigue que:

$x(p,\alpha w) = \alpha x(p,w) \quad$ y $\quad x(\alpha p, \alpha w) = \alpha^0 x(p,w) \implies x(\alpha p, w) = \alpha^{-1} x(p,w)$ (No es por la propiedad de la derivada parcial dicha en la ayudantía).

Pregunta 6

Suponga que $x(p,w)$ es diferenciable, satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada (ADPR), la Ley de Walras y h-g-0. Muestre que si $x(\cdot,\cdot)$ es h-g-1 en w, entonces la Ley de Demanda se cumple incluso para cambios de precios no-compensados. Establezca lo anterior para el caso discreto y continuo.

Pregunta 6 R.

Nota: recuerde que una matriz M de $N \times N$ es semidefinida negativa (positiva) si:

$$z^T M z \leq 0 \quad (z^T M z \geq 0), \forall z \in \mathbb{R}^N.$$

Adicionalmente si la desigualdad es estricta $\forall z \neq 0$ entonces M es definida negativa (positiva).

Probaremos primero la versión discreta:

Por la h-g-1 en w tenemos que $x(p,1) = (1/w)x(p,w)$, por lo tanto, es suficiente demostrar que:

$$(p' - p) \cdot (x(p',1) - x(p,1)) \leq 0 \quad \text{para cada } p, p'.$$

Notemos que podemos reescribir la diferencia de las demandas como (nuevamente por la homogeneidad de las demandas):

$$\begin{aligned} x(p',1) - x(p,1) = &\frac{1}{p' \cdot x(p,1)} \left(x(p', p' \cdot x(p,1)) - x(p,1) \right) \\ &+ \left(x(p, \frac{1}{p' \cdot x(p,1)}) - x(p,1) \right) \end{aligned}$$

Nota: el primer término de la izquierda de la igualdad anterior es equivalente al primer término del lado derecho de la igualdad (por la h-g-1 en w), esto es:

$$\frac{1}{p' \cdot x(p,1)} x(p', p' \cdot x(p,1)) = x(p', \frac{p' \cdot x(p,1)}{p' \cdot x(p,1)}) = x(p',1)$$

Los otros términos siguen la misma lógica.

Luego, es suficiente mostrar que:

$$(p'-p)\cdot(x(p',p'\cdot x(p,1))-x(p,1))\leq 0 \quad (*)$$

y

$$(p'-p)\cdot\left(x(p,\tfrac{1}{p'\cdot x(p,1)})-x(p,1)\right)\leq 0 \quad (**)$$

Para $(*)$ note que:

$$\begin{aligned}
&(p'-p)\cdot\big(x(p',p'\cdot x(p,1))-x(p,1)\big)\\
&=p'\cdot x(p',p'\cdot x(p,1))-p'\cdot x(p,1)-p\cdot x(p',p'\cdot x(p,1))+p\cdot x(p,1)\\
&=p'\cdot x(p,1)-p'\cdot x(p,1)-p\cdot x(p',p'\cdot x(p,1))+1\\
&=-p\cdot x(p',p'\cdot x(p,1))+1
\end{aligned}$$

Por qué? Aquí ocupamos que se cumple la Ley de Walras, esto implica que:

$$p\cdot x(p,w)=w$$

En particular en este caso $p'\cdot x(p',p'\cdot x(p,1))=p'\cdot x(p,1)$ y $p\cdot x(p,1)=1$

Es decir tenemos que notar que en $p'\cdot x(p',p'\cdot x(p,1))$ la riqueza es $w=p'\cdot x(p,1)$, esto hace eliminar los términos multiplicados por p' que es lo que está más arriba, además queda 1 donde estaba $p\cdot x(p,1)$.
Si $x(p',p'\cdot x(p,1))=x(p,1)$ entonces la expresión anterior es igual a cero. Si por el contrario $x(p',p'\cdot x(p,1))\neq x(p,1)$, ADRP (en este contexto ver definición 2.F.1 MWG) implica que $p\cdot x(p',p'\cdot x(p,1))>1$. Esto es, la expresión anterior es ≤ 0.

Nota: Respecto a ADRP, tenemos que a precios p' el agente podía comprar la canasta $x(p,1)$ ya que su riqueza es precisamente $w = p' \cdot x(p,1)$ cuando demandó la canasta $x(p',p' \cdot x(p,1))$ pero no lo hizo ya que eligió la canasta $x(p',p' \cdot x(p,1))$ que asumimos distinta a $x(p,1)$, por lo tanto ADRP implica que bajo precios p y riqueza $w = 1$ la canasta $x(p',p' \cdot x(p,1))$ no la puede consumir ya que le cuesta más que su riqueza, esto es, $p \cdot x(p',p' \cdot x(p,1)) > 1$ (por eso cuando se pasa a precios p y $w = 1$ no consume $x(p',p' \cdot x(p,1))$ y consume $x(p,1)$). Eso fue lo que ocupamos más arriba.

PREGUNTA 6 R.

Para $(**)$ note que:

$$
\begin{aligned}
&(p' - p) \cdot \left(x(p, \frac{1}{p' \cdot x(p,1)}) - x(p,1) \right) \\
&= p' \cdot x(p, \frac{1}{p' \cdot x(p,1)}) - p' \cdot x(p,1) - \frac{1}{p' \cdot x(p,1)} + 1 \\
&= 2 - \left[p' \cdot x(p,1) + \frac{1}{p' \cdot x(p,1)} \right] \\
&\leq 2 - 2\sqrt{(p' \cdot x(p,1))(\frac{1}{p' \cdot x(p,1)})} \\
&= 2 - 2 = 0
\end{aligned}
$$

Nota: Nuevamente ocupamos la propiedades de homogeneidad de las demandas. Adicionalmente, denote $x = \sqrt{p' \cdot x(p,1)}$ y $y = \sqrt{\frac{1}{p' \cdot x(p,1)}}$. Sumando $2\sqrt{(p' \cdot x(p,1))(\frac{1}{p' \cdot x(p,1)})} = 2xy$ en la tercera y cuarta línea tenemos que: $-[x-y]^2 \leq 0$, por lo tanto la desigualdad de cumple.

Ahora Probaremos la versión continua:

Tenemos que $x(p, \alpha w) = \alpha x(p,w), \quad \forall \alpha > 0$. Diferenciando esta expresión con respecto a α y evaluando en $\alpha = 1$ obtenemos:

$$wD_w x(p,w) = x(p,w) \implies D_w x(p,w) = (1/w)x(p,w)$$

Luego, sabemos que la matriz de Slutzky satisface que $S(p,w) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w)x(p,w)^T = D_p x(p,w) + (1/w)x(p,w)x(p,w)^T$ (por lo anterior). Esto implica que:

$$D_p x(p,w) = S(p,w) - (1/w)x(p,w)x(p,w)^T$$

Sabemos que $S(p,w)$ es semidefinida negativa. Adicionalmente, $(1/w)x(p,w)x(p,w)^T$ es semidefinida positiva. Concluimos que $D_p x(p,w)$ es semidefinida negativa.

PREGUNTA 7

Muestre que si $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa $\succsim$, entonces $\succsim$ es continua.

Para esta demostración utilizaremos la caracterización secuencial de la continuidad en las preferencias (ver defınción 3.C.1 MWG).
Luego, tomemos una secuencia de vectores (x_n, y_n) tal que:

- $x_n \succsim y_n, \forall n$
- $x_n \to x$
- $y_n \to y$

Esto implica que $u(x_n) \geq u(y_n), \forall n$. Adicionalmente la continuidad de $u(\cdot)$ asegura que $u(x) \geq u(y)$ y por tanto $x \succsim y$.

PREGUNTA 8

Sea $\succsim$ una relación de preferencia definida sobre $\mathbb{R}^L_+$, completa, transitiva, continua, fuertemente monótona y estrictamente convexa. Demuestre que la solución al problema de maximización de la utilidad es única, $\forall (p, w) \in \mathbb{R}^{L+1}_{++}$.

PREGUNTA 8 R.

Suponga por contradicción que existen dos solución al problema anterior $(x,x') \in B(p,w)^2$ que cumple $x \sim x' \succsim z, \forall z \in B(p,w)$. Como las preferencias son estrictamente convexas (ver definición 3.B.5 MWG) $\alpha x + (1-\alpha)x' \succ x \sim x', \forall \alpha \in (0,1)$. Adicionalmente:

$$\begin{aligned} p \cdot (\alpha x + (1-\alpha)x') &= \alpha p \cdot x + (1-\alpha) p \cdot x' \\ &\leq \alpha w + (1-\alpha) w \\ &= w \end{aligned}$$

Luego, $\alpha x + (1-\alpha)x' \in B(p,w)$. Una contradicción con la optimalidad de $(x,x') \in B(p,w)^2$.