P1

a) El problema a maximizar es:

$$\max E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \frac{C_{t+i}^{1-\eta}}{1-\eta}$$

$$\text{sa.} \quad K_t = (A_t N_t)^{\alpha} K_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta) K_{t-1} - C_t$$

$$\mathcal{L}: \; E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \frac{C_{t+i}^{1-\eta}}{1-\eta} + \lambda_t \left((A_t N_t)^{\alpha} K_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta) K_{t-1} - C_t - K_t \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t C_t^{-\eta} - \lambda_t = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = -\lambda_t + E_t \lambda_{t+1} \left((1-\alpha)(A_{t+1} N_{t+1})^{\alpha} K_t^{-\alpha} + (1-\delta) \right) = 0 \qquad (2)$$

- Adelantando (1) en 1 período:

$$\beta^{t+1} C_{t+1}^{-\eta} = \lambda_{t+1} \qquad (3)$$

- (1) y (3) en (2):

$$\frac{\beta^t}{C_t^{\eta}} = \frac{\beta^{t+1}}{C_{t+1}^{\eta}} \left((1-\alpha)(A_{t+1} N_{t+1})^{\alpha} K_t^{-\alpha} + (1-\delta) \right)$$

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{\eta} = \beta \left((1-\alpha)(A_{t+1} N_{t+1})^{\alpha} K_t^{-\alpha} + (1-\delta) \right) \qquad (4)$$

- Por otro lado, el problema de optimización de la firma será:

$$\text{máx } \Pi = (A_t N_t)^{\alpha} K_{t-1}^{1-\alpha} - W_t N_t - R_t K_{t-1} + (1-\delta) K_{t-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial K_{t-1}} = (1-\alpha)(A_t N_t)^{\alpha} K_{t-1}^{-\alpha} - R_t + (1-\delta) = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial N_t} = \alpha (A_t N_t)^{\alpha-1} A_t K_{t-1}^{1-\alpha} - W_t = 0 \qquad (6)$$

- Reagrupando (6):

$$R_t = (1-\alpha)(A_t N_t)^{\alpha} K_{t-1}^{-\alpha} + (1-\delta) \qquad (7)$$

- Juntando (7) y (4), llegamos a la ~~[illegible]~~ ec. de Euler:

$$\frac{1}{C_t^{\eta}} = \beta \, E_t\left(\frac{1}{C_{t+1}^{\eta}} R_{t+1}\right)$$

- Luego, de la ec. (6), tenemos que:

$$W_t = \alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_{t-1}^{1-\alpha}$$

- ~~Si además, en el problema del consumidor derivamos $\mathcal{L}$ respecto a N_t:~~

$$\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = \lambda_t \left(\alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_{t-1}^{1-\alpha}\right) = 0 \quad \text{con } \lambda_t = \beta^t C_t^{-\eta}}$$

b) En este caso, para plantear el problema en su forma recursiva, definimos la ec. de Bellman como:

$$V(K_{t-1}, A_t) = \underset{K_t}{\text{máx}} \left\{ \begin{array}{l} \left[(A_t N_t)^{\alpha} K_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta) K_{t-1} - K_t \right]^{1-\eta} / (1-\eta) \\ + \beta E_t V(K_t, A_{t+1}) \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial V(\cdot)}{\partial K_t} = C_t^{-\eta} \cdot -1 + \beta E_t V'(K_t, A_{t+1}) = 0$$

$$C_t^{-\eta} = \beta E_t V'(K_t, A_{t+1}) \qquad (8)$$

- Luego, para encontrar $V'(K_t, A_{t+1})$ ocupamos el teorema de la envolvente:

$$V'(K_t, A_{t+1}) = C_{t+1}^{-\eta} \left[(1-\alpha)(A_{t+1} N_{t+1})^{\alpha} K_t^{-\alpha} + (1-\delta) \right]$$
$$= C_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}$$

- Reemplazando lo anterior en (8):

$$C_t^{-\eta} = \beta E_t C_{t+1}^{-\eta} R_{t+1}$$

$$\frac{1}{C_t^{\eta}} = \beta E_t \left(\frac{1}{C_{t+1}^{\eta}} \cdot R_{t+1} \right) \longrightarrow \text{ec. de Euler.}$$

Pd: Notamos que la ec. de Euler encontrada es igual a la de la parte a).

c) A partir de la ec. (7), tenemos que:

$$R_t = (1-\alpha)\,(A_t N_t)^{\alpha}\, K_{t-1}^{-\alpha} + (1-\delta)$$

- Adelantando 1 período:

$$R_{t+1} = (1-\alpha)\left(\frac{A_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} N_{t+1}^{\alpha} + (1-\delta)$$

$$(1-\alpha)\,N_{t+1}^{\alpha}\left(\frac{A_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} = R_{t+1} - (1-\delta)$$

$$\frac{A_{t+1}}{K_t} = \left(\frac{R_{t+1}-(1-\delta)}{(1-\alpha)\,N_{t+1}^{\alpha}}\right)^{1/\alpha}$$

$$\frac{A_{t+1}}{K_t} = \left(\frac{R_{t+1}-(1-\delta)}{(1-\alpha)}\right)^{1/\alpha} N_{t+1}^{-1}$$

d) En el Estado Estacionario, tendremos que tanto el consumo, como el producto y capital crecerán a la misma tasa que la productividad, es decir:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t} = G$$

e) De la ec. de Euler, tenemos que:

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\eta} = BR$$

$$G^{\eta} = BR \quad / \log(\circ)$$

$$\eta \log(G) = \log(B) + \log(R)$$

$$g = \frac{1}{\eta}\log(B) + \frac{1}{\eta} r$$

- Luego, para encontrar las expresiones que nos piden, trabajamos primero (7):

$$R = (1-\alpha)\bar{A}^{\alpha}\left(\frac{\bar{N}}{\bar{K}}\right)^{\alpha} + (1-\delta)$$

$$R = (1-\alpha)\frac{\bar{y}}{\bar{K}} + (1-\delta)$$

$$G^{\eta} = B(1-\alpha)\frac{\bar{y}}{\bar{K}} + B(1-\delta)$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{K}} = \frac{G^{\eta} - B(1-\delta)}{B(1-\alpha)}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{K}} = \frac{R - (1-\delta)}{1-\alpha} \qquad \text{con } R \approx 1+r$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{K}} = \frac{1+r-1+\delta}{1-\alpha}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{K}} = \frac{r+\delta}{1-\alpha} \;//$$

- Luego, a partir de $\frac{\bar{Y}}{\bar{K}}$, podemos aplicar un poco de álgebra:

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} \cdot \frac{\bar{A}}{\bar{A}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{A}} \cdot \frac{\bar{A}}{\bar{K}}$$

$$= \frac{(\bar{A}\bar{N})^{\alpha}\,\bar{K}^{1-\alpha}}{\bar{A}} \cdot \frac{\bar{A}}{\bar{K}}$$

$$= \bar{A}^{\alpha-1}\,\bar{N}^{\alpha}\,\bar{K}^{1-\alpha} \cdot \frac{\bar{A}}{\bar{K}}$$

$$= \bar{N}^{\alpha}\left(\frac{\bar{K}}{\bar{A}}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\bar{K}}{\bar{A}}\right)^{-1}$$

$$= \bar{N}^{\alpha}\left(\frac{\bar{K}}{\bar{A}}\right)^{-\alpha}$$

$$= \bar{N}^{\alpha}\left(\frac{\bar{A}}{\bar{K}}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \bar{N}^{\alpha}\left(\frac{\bar{A}}{\bar{K}}\right)^{\alpha}$$

$$\frac{\bar{A}}{\bar{K}} = \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{K}}\right)^{1/\alpha} \cdot \bar{N}^{-1}$$

$$\frac{\bar{A}}{\bar{K}} = \left(\frac{r+\delta}{1-\alpha}\right)^{1/\alpha} \bar{N}^{-1} //$$

- Por último, para encontrar $\frac{\bar{C}}{\bar{Y}}$, recordemos que en EE se cumple que:

$$\Delta K_{t+1}^{\circ} = I_t - \delta K_t \Rightarrow \bar{I} = \delta\bar{K}$$

- Luego, reemplazando esto en:

$$\bar{Y} = \bar{C} + \bar{I}$$

- Tendremos:

$$\overline{c} = \overline{y} - \delta \overline{k} \quad / : \overline{y}$$

$$\frac{\overline{c}}{\overline{y}} = 1 - \delta \frac{\overline{k}}{\overline{y}}$$

$$\frac{\overline{c}}{\overline{y}} = 1 - \delta \left(\frac{1-\alpha}{r+\delta} \right)$$

→ viene del resultado para $\frac{\overline{y}}{\overline{k}}$

4) Algunos valores razonables y que se encuentran en la literatura de estos parámetros son:

$r = 0{,}015$

$\alpha = 0{,}667 \rightarrow$ classic

$\delta = 0{,}025$

$g = 0{,}005$

- Con lo anterior, tendremos que:

$$\frac{\overline{y}}{\overline{k}} = \frac{0{,}015 + 0{,}025}{1 - 0{,}667}$$

$$\boxed{\frac{\overline{y}}{\overline{k}} = 0{,}12}$$

- Por otro lado:

$$\frac{\overline{c}}{\overline{y}} = 1 - 0{,}025 \left(\frac{1 - 0{,}667}{0{,}015 + 0{,}025} \right)$$

$$\frac{\overline{c}}{\overline{y}} = 1 - 0{,}208$$

$$\boxed{\frac{\overline{c}}{\overline{y}} = 0{,}79}$$

P2

a) El problema es:

$$\max \; E_t \left\{ \sum_{j\geq 0} B^j \left[\log(C_{t+j}) + \frac{1}{1-\gamma_n}(1-N_{t+j})^{1-\gamma_n} \right] \right\}$$

s.a. $K_{t+1} = A_t^\alpha N_t^\alpha K_t^{1-\alpha} - C_t + (1-\delta) K_t$ y $\frac{A_{t+1}}{\bar{A}_{t+1}} = \left(\frac{A_t}{\bar{A}_t}\right)^\rho e^{\varepsilon_t}$

$$\mathcal{L}: \; E_t \sum_{j\geq 0} B^j \left[\log(C_{t+j}) + \frac{1}{1-\gamma_n}(1-N_{t+j})^{1-\gamma_n} \right]$$
$$+ \lambda_t \left(A_t^\alpha N_t^\alpha K_t^{1-\alpha} - C_t + (1-\delta) K_t - K_{t+1} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{B^t}{C_t} - \lambda_t = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -B^t (1-N_t)^{-\gamma_n} + \lambda_t \alpha A_t^\alpha N_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t + E_t \lambda_{t+1} \left((1-\alpha) A_{t+1}^\alpha N_{t+1}^\alpha K_{t+1}^{-\alpha} + (1-\delta) \right) = 0 \qquad (3)$$

- Adelantamos (1) en 1 período:

$$\frac{B^{t+1}}{C_{t+1}} = \lambda_{t+1} \qquad (4)$$

- Reemplazamos (1) y (4) en (3):

$$\frac{B^t}{C_t} = \frac{B^{t+1}}{C_{t+1}} \left((1-\alpha) A_{t+1}^\alpha N_{t+1}^\alpha K_{t+1}^{-\alpha} + (1-\delta) \right)$$

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = B \left((1-\alpha) A_{t+1}^\alpha N_{t+1}^\alpha K_{t+1}^{-\alpha} + (1-\delta) \right) \qquad (5)$$

- Ahora, si intentamos despejar N_t de (2):

$$\cancel{B^t}(1-N_t)^{-\eta_n} = \frac{\cancel{B^t}}{C_t}\alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha}$$

$$(1-N_t)^{-\eta_n} C_t = \alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha} \qquad (6)$$

- Dejaremos la ec. (6) así por el momento, después la ocuparemos. Ahora bien, el problema de la firma será:

$$\max \Pi = A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha} - W_t N_t - R_t K_t + (1-\delta) K_t$$

$$\frac{\partial}{\partial K_t} = (1-\alpha) A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{-\alpha} - R_t + (1-\delta) = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial N_t} = \alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha} - W_t = 0 \qquad (8)$$

- Despejando (7) tenemos que:

$$R_t = (1-\alpha) A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{-\alpha} + (1-\delta)$$

- Juntando lo anterior con la ec. (5), tenemos que:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = B R_{t+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_t} = B E_t\left(\frac{1}{C_{t+1}} \cdot R_{t+1}\right)} \longrightarrow \text{1era condic. de optimalidad.}$$

• Para encontrar la 2da condición, despejamos (8):

$$W_t = \alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha}$$

(*) Juntando lo anterior con la ec. (6):

$$\boxed{(1-N_t)^{-\tau_n} C_t = W_t} \longrightarrow$$ 2da condic. de optimalidad.

Pd: Notamos que la 1era condic. es la ec. de sustitución intertemporal, mientras que la 2da condic. indica la sustitución intratemporal entre ocio y consumo.

b) En este caso, el problema a resolver será el siguiente:

$$\max \; E_t \sum_{j\geq 0} B^j \left[\log(C_{t+j}) + \frac{1}{1-\tau_n}(1-N_{t+j})^{1-\tau_n} \right]$$

$$\text{sa.} \quad K_{t+1} = R_t K_t + W_t N_t - C_t$$

$$\mathcal{L}: \; E_t \sum_{j\geq 0} B^j \left[\log(C_{t+j}) + \frac{1}{1-\tau_n}(1-N_{t+j})^{1-\tau_n} \right.$$
$$\left. + \lambda_t (R_t K_t + W_t N_t - C_t - K_{t+1}) \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{B^t}{C_t} - \lambda_t = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -B^t (1-N_t)^{-\tau_n} + \lambda_t W_t = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} R_{t+1} = 0 \qquad (11)$$

- Adelantamos (9) en 1 periodo:

$$\frac{B^{t+1}}{C_{t+1}} = \lambda_{t+1}$$

- Reemplazando lo anterior y (9) en (11):

$$\frac{B^{t}}{C_{t}} = \frac{B^{t+1}}{C_{t+1}} R_{t+1}$$

Sólo nos falta chequear la forma que toma R_t.

$$\boxed{\frac{1}{C_t} = BE_t\left(\frac{1}{C_{t+1}} \cdot R_{t+1}\right)}$$

De esta forma, llegamos a la 1era condición de optimalidad encontrada en a).

- Ahora bien, el problema de la firma es:

$$\text{máx} \quad \Pi = A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha} - R_t K_t + (1-\delta) K_t - W_t N_t$$

$$\frac{\partial}{\partial K_t} = (1-\alpha) A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{-\alpha} - R_t + (1-\delta) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial N_t} = \alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha} - W_t = 0 \quad (13)$$

(*) Ahora ~~bien~~, del problema de cons., específicamente de la ec. (10), obtenemos:

$$\cancel{B^t} (1-N_t)^{-\gamma_n} = \frac{\cancel{B^t}}{C_t} \cdot W_t$$

$$\boxed{C_t (1-N_t)^{-\gamma_n} = W_t}$$

2da condic. de optimalidad, que es idéntica a la parte a)

Sólo falta ver la forma que toma W_t.

(*) Por último, a partir de los CPOs del problema de la firma, es decir, las ec. (12) y (13), podemos ver la forma que toma R_t y W_t:

$$R_t = (1-\alpha) A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{-\alpha} + (1-\delta)$$

$$W_t = \alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha}$$

Pd: Notamos que R_t y W_t toman exactamente la misma forma que en la parte a), pq. la solución descentralizada es la misma que la del planificador.

c) Empezamos por la ec. que tenemos para R_t:

$$R_t = (1-\alpha) A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{-\alpha} + (1-\delta)$$

$$R_t = (1-\alpha) \frac{y_t}{K_t} + (1-\delta)$$

$$\frac{K_t}{y_t} = \frac{1-\alpha}{R_t - (1-\delta)}$$

- Ahora bien, de la 1era condición de optimalidad, le daremos a R_t una forma en función de parámetros:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta R \longrightarrow$$ Recordar que en EE. $\frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t} = (1+g) = G$

$$\boxed{R = \frac{G}{\beta}} \quad (13)$$

- Reemplazando (13) en la ec. que teníamos para $\frac{k_t}{y_t}$:

$$\frac{k_t}{y_t} = \frac{1-\alpha}{\frac{6}{B} - (1-\delta)}$$

$$\therefore \boxed{\frac{k}{y} = \frac{B(1-\alpha)}{6 - B(1-\delta)}}$$

- A partir de la expresión $\frac{k}{y}$, si la trabajamos un poco:

$$\frac{k}{y} \cdot \frac{AN}{AN} = \frac{k}{AN} \cdot \frac{AN}{A^{\alpha} N^{\alpha} k^{1-\alpha}}$$

$$= \left(\frac{k}{AN}\right)^{1} \cdot \left(\frac{k}{AN}\right)^{\alpha-1}$$

$$= \left(\frac{k}{AN}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{y} = \left(\frac{k}{AN}\right)^{\alpha}$$

$$\therefore \boxed{\frac{k}{AN} = \left(\frac{B(1-\alpha)}{6 - B(1-\delta)}\right)^{1/\alpha}}$$

- Luego, sabemos que en EE.:

$$I_t = \delta k_t \Rightarrow y_t = c_t + \delta k_t$$

- Despejando el consumo y dividiendo por el producto:

$$\frac{c}{y} = 1 - \delta \frac{k}{y}$$

$$\therefore \boxed{\frac{c}{y} = 1 - \frac{\delta B(1-\alpha)}{6 - B(1-\delta)}}$$

- Finalmente, para tener una expresión de N_t, ocupamos la 2da condición de optimalidad encontrada en a) y b):

$$C_t (1-N_t)^{-\eta_n} = W_t \quad \left(= \alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha} \right)$$

$$C_t (1-N_t)^{-\eta_n} = \alpha \frac{y_t}{N_t}$$

$$N_t (1-N_t)^{-\eta_n} = \alpha \left(\frac{C_t}{y_t} \right)^{-1}$$

$$\therefore \boxed{N (1-N)^{-\eta_n} = \alpha \left(1 - \frac{\delta B (1-\alpha)}{G - B(1-\delta)} \right)^{-1}}$$

d) Comenzamos por la función de producción:

$$y_t = A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha} \quad / \log(\cdot)$$

$$\log(y_t) = \alpha \log(A_t) + \alpha \log(N_t) + (1-\alpha) \log(K_t)$$

$$\tilde{y}_t = \alpha a_t + \alpha n_t + (1-\alpha) k_t$$

- Luego, de la RP. que describe la evolución del capital:

$$K_{t+1} = y_t - C_t + (1-\delta) K_t \quad / : K_t$$

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{y_t}{K_t} - \frac{C_t}{K_t} + (1-\delta)$$

$$\cancel{1} + g = \frac{y_t}{K_t} - \frac{C_t}{K_t} + (\cancel{1} - \delta)$$

$$\frac{y_t}{K_t} = \frac{C_t}{K_t} + g - \delta$$

- Por lo tanto, para encontrar una expresión de k_{t+1} podemos trabajar la RP a partir de las desviaciones con respecto al EE. En este caso, con $\tilde{x}_t = \log(x_t) - \log(x)$ que es la desviación porcentual respecto al EE., nos quedaría:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{y}{KG} \tilde{y}_t - \frac{C}{KG} \tilde{c}_t - \frac{(1-\delta)}{G} \tilde{k}_t$$

- Continuando con la ecuación de Euler para obtener alguna expresión de t:

$$\frac{1}{C_t} = B\, E_t\left(\frac{1}{C_{t+1}} \cdot R_{t+1}\right) \Big/ \log(\cdot)$$

$$\cancel{\log(1)}^{0} - \log(C_t) = \log(B) + \log\left(\frac{R_{t+1}}{C_{t+1}}\right)$$

$$-c_t = \log(B) + r_{t+1} - c_{t+1}$$

$$r_{t+1} = -\log(B) - c_t + c_{t+1}$$

- Ahora bien, recordando que en EE se cumple que $RB = G$, la ec. de Euler también se puede aproximar mediante desviaciones respecto al EE, quedando:

$$\tilde{c}_t = G\, E_t\left(\tilde{c}_{t+1} - \tilde{r}_{t+1}\right)$$

- Por lo que la aproximación para $\tilde{r}_{t+1}$ quedaría:

$$\tilde{r}_{t+1} \approx \frac{B}{G}(1-\alpha)\frac{y}{K}\left\{\alpha\left[\tilde{a}_{t+1} + \tilde{n}_{t+1} + (1-\alpha)\tilde{k}_{t+1}\right]\right\}$$

- Por otra parte, a partir del equilibrio en el mercado del trabajo, tenemos:

$$w_t = \ln\alpha + y_t - n_t$$

- Por otro lado, tendremos:

$$c_t - \gamma_n \phi(n_t) = w_t \qquad \text{con } \phi(n_t) = \ln(1 - e^{n_t})$$

- P/q se cumplirá:

$$c_t = \ln\alpha + \gamma_n \phi(n_t) + y_t - n_t$$

- Por último, si linealizamos la productividad:

$$\frac{A_{t+1}}{\overline{A}_{t+1}} = \left(\frac{A_t}{\overline{A}_t}\right)^{\theta} e^{\varepsilon_t} \quad / \log(\cdot)$$

$$a_{t+1} - \overline{a}_{t+1} = \theta\left(a_t - \overline{a}_t\right) + \varepsilon_t \qquad (14)$$

- Donde además se cumple:

$$\frac{\overline{A}_{t+1}}{\overline{A}_t} = (1+g) \quad / \log(\cdot)$$

$$\overline{a}_{t+1} = g + \overline{a}_t \qquad \text{con} \quad \log(1+g) \approx g$$

- Reemplazando lo anterior en (14):

$$a_{t+1} - g - \overline{a}_t = \theta a_t - \theta \overline{a}_t + \varepsilon_t$$

$$a_{t+1} = g + \theta a_t + (1-\theta)\overline{a}_t + \varepsilon_t$$

- ~~Podríamos finalmente sacar primeras diferencias para que el proceso anterior fuese estacionario:~~

$$\cancel{\Delta a_{t+1} = \Delta(1-\theta)}$$

Pd: De esta forma, llegamos a todas las expresiones que se piden.