Solemne Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Benjamín Peña, Marcelo Gómez, Valeria Ulloa

17 de mayo de 2022

Lea atentamente las siguientes indicaciones:

- Ud. tiene 140 minutos para resolver la prueba.
- La prueba consta de 4 ejercicios y tiene un total de 120 puntos.
- Los puntos asociados a cada pregunta están indicados en cada pregunta. Todas las partes de la pregunta dan el mismo puntaje.
- Lea todas las preguntas antes de comenzar a responder, esto le permitirá planificar su trabajo de forma eficiente. Evite dedicar mucho tiempo a una pregunta.
- Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
- Este es un control a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.
- En caso de descubrir un intento de copia, éste se sancionará de acuerdo con el reglamento de copia y plagio de la facultad.

Pregunta 1: (20 puntos) Considere una economía de solamente 2 bienes: x y el bien compuesto y cuyo precio es $p_y = 1$. Supongamos que una persona tiene preferencias $\succeq$ racionales, continuas y localmente no saciadas.

1. El precio del bien x es $p_x = 1$ por cada unidad hasta un nivel de consumo $\hat{x}$ (se tiene que $\hat{x} < 2w$). Todo **lo que se consume más allá de $\hat{x}$, se paga a precio** $p'_x = 2$ (sólo el exceso se paga a p'_x). Para la siguiente afirmación dé una demostración o un contra-ejemplo (puede ser un contra-ejemplo gráfico)

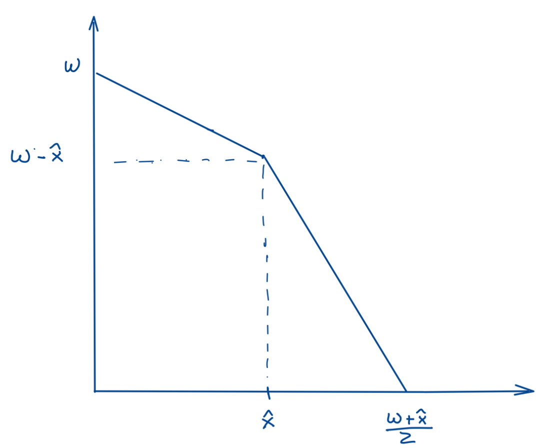
   "Si $\succeq$ es estrictamente convexa, la demanda Marshalliana es siempre un único punto."

2. El precio del bien x es $p_x = 1$ por unidad si el consumo es menor o igual a $\hat{x}$ (se tiene que $\hat{x} < 2w$). Si el consumo supera el nivel $\hat{x}$, **todo lo consumido se paga a precio** $p'_x = 2$. Para la siguiente afirmación dé una demostración o un contra-ejemplo (puede ser un contra-ejemplo gráfico)

   "Si $\succeq$ es estrictamente convexa, la demanda Marshalliana es siempre un único punto."

Respuesta

1. La afirmación es verdadera. La demostración se basa en observar que el conjunto presupuestario es cerrado y convexo.



(2 puntos) por el gráfico

Dado que la preferencia es continua y el conjunto presupuestario es cerrado, la demanda Marshalliana será distinta de vacío. (2 puntos)

Para ver que es un único punto, suponemos que existen $x_1 \neq x_2$, ambos en la correspondencia de demanda Marshalliana. Dado que el conjunto presupuestario es convexo, todos los puntos que son combinación convexa de x_1 y x_2 son también factibles. (3 puntos)

Debido a la convexidad estricta de la preferencia $\succeq$, los puntos intermedios son estrictamente preferidos a x_1 y x_2. Esto contradice la optimalidad de x_1 y x_2. (3 puntos) Fue absurdo suponer que hay dos puntos en la correspondencia de demanda Marshalliana.

Pauta: basta demostrar que un punto entre x_1 y x_2 es estrictamente preferido, para llegar a una contradicción (acá se muestra que todos los puntos entre x_1 y x_2 son preferidos a x_1 y x_2.)

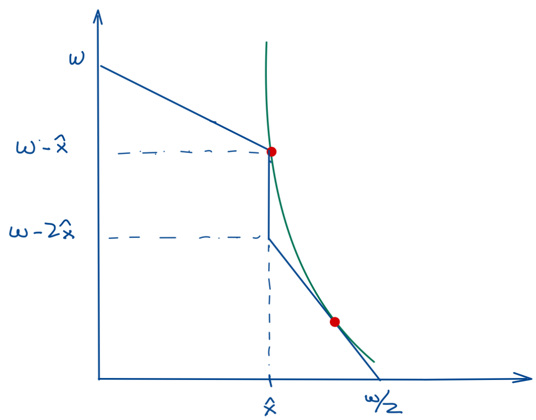
2. La afirmación es falsa.

   El conjunto presupuestario es cerrado, así que se puede concluir como en la parte 1. que el conjunto de demanda es distinta de vacío. Sin embargo, puede tener más de un punto.

   Estos 2 puntos no pueden estar ambos a la izquierda (o ambos a la derecha) de $\hat{x}$, pues en ese caso se llega a una contradicción al igual que en la parte 1.

   Tampoco pueden cumplir $x_1 < \hat{x} < x_2$, pues la pendiente de la restricción presupuestaria en x_1 es menor que en x_2 mientras que la TMS es estrictamente decreciente (en valor absoluto).

   Por lo tanto para construir un contraejemplo necesariamente uno de los puntos tiene que ser $\hat{x}$. Observar el esquema que se presenta en la figura, donde los puntos indicados en rojo pertenecen a la demanda Marshalliana.



   Pauta: Los comentarios **no** son necesarios para tener una respuesta correcta. Con la gráfica (correcta) es suficiente para tener todo el puntaje. Asignar (5 puntos) por hacer el conjunto presupuestario correctamente y (5 puntos) por encontrar el contra-ejemplo.

Pregunta 2: (40 puntos) Un/a consumidor/a tiene una función de utilidad $u(x, y, z) = \sqrt{z \min\{\alpha x, y\}}$, donde $\alpha \in I\!R$ es un parámetro constante y estrictamente positivo. Los precios de los tres bienes están dados por $p = (p_x, p_y, p_z)$ y la renta es w.

1. Demuestre que las preferencias son monótonas pero no fuertemente monótonas.
2. Encuentre las funciones de demanda Marshalliana de los tres bienes.
   Sugerencia: observe que la función de utilidad se puede escribir como $u(V, z)$ con $V = \min\{\alpha x, y\}$.
3. Encuentre la función de gasto ($e(p, u)$) y la demanda Hicksiana ($h(p, u)$). Compruebe que $e(p, u)$ es homogénea de grado 1 en p y que $h(p, u)$ es homogénea de grado 0 en p.
4. Calcule la variación equivalente si p_z se duplica.

Respuesta

1. Para ver que son monótonas debemos chequear que

$$(x, y, z) \gg (x', y', z') \Rightarrow u(x, y, z) > u(x', y', z')$$

lo que se cumple pues

$$\left.\begin{array}{c} \min\{x, y\} > \min\{x', y'\} \\ z > z' \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{z \min\{\alpha x, y\}} > \sqrt{z' \min\{\alpha x', y'\}} \quad \text{(5 puntos)}$$

Sin embargo, la preferencia no es estrictamente monótona. Considere (x, y, z) donde $\alpha x > y$. Evidentemente $(x, y, z) \geq (y/\alpha, y, z)$ pero $u(x, y, z) = u(y/\alpha, y, z)$. (5 puntos)

2. Si definimos la nueva variable $V = \min\{\alpha x, y\}$, el problema del/de la consumidor/a se reduce a maximizar una función Cobb Douglas $u(V, z) = \sqrt{zV}$ sujeto a la restricción presupuestaria $p_V V + p_z Z = w$. La solución es entonces $V = w/2p_V$ y $z = w/2p_z$. (4 puntos)

Falta determinar p_V. Como estamos maximizando la utilidad, nos interesa la combinación de bienes x e y más barata que nos pueda entregar V. Esto es, en el óptimo tomaremos $\alpha x = y = V$, con lo cual, la renta necesaria para obtener el nivel V es $p_x V/\alpha + p_y V = (p_x/\alpha + p_y)V$ y definimos $p_V = (p_x/\alpha + p_y)$ (4 puntos)

Con esto obtenemos que la demanda Marshalliana es

$$\mathbf{x}(p, w) = \begin{pmatrix} \frac{w}{2\alpha(p_x/\alpha+p_y)} \\ \frac{w}{2(p_x/\alpha+p_y)} \\ \frac{w}{2p_z} \end{pmatrix} \quad \text{(2 puntos)}$$

3. Primero calculamos la utilidad obtenida con la demanda Marshalliana $u(\mathbf{x}) = \frac{w}{2\sqrt{(p_x/\alpha+p_y)p_z}}$.

Por lo tanto, la renta necesaria para obtener una utilidad u es

$$e(p, u) = 2u\sqrt{(p_x/\alpha + p_y)p_z}. \quad \text{(3 puntos)}$$

Y la demanda Hicksiana es

$$h(p, u) = \nabla_p e(p, u) = \begin{pmatrix} \frac{u\sqrt{p_z}}{\alpha(p_x/\alpha+p_y)^{1/2}} \\ \frac{u\sqrt{p_z}}{(p_x/\alpha+p_y)^{1/2}} \\ \frac{u\sqrt{(p_x/\alpha+p_y)}}{p_z^{1/2}} \end{pmatrix} \quad \text{(3 puntos)}$$

Para comprobar la homogeneidad evaluamos ambas funciones en $p' = \lambda p$ y obtenemos

$$\begin{aligned} e(\lambda p, u) &= 2u\sqrt{(\lambda p_x/\alpha + \lambda p_y)\lambda p_z} = 2u\sqrt{\lambda^2(p_x/\alpha + p_y)} = \lambda e(p, u) \quad \text{(2 puntos)} \\ h(\lambda p, u) &= h(p, u) \quad \text{(2 puntos (falta escribir la verificación))} \end{aligned}$$

4. Definimos $p^0 = (p_x, p_y, p_z)$ y $p^1 = (p_x, p_y, 2p_z)$.
La función de utilidad indirecta $v(p^1, w) = u(\mathbf{x}(p^1, w)) = \frac{w}{2\sqrt{(p_x/\alpha+p_y)2p_z}} = \frac{w}{2\sqrt{2}\sqrt{(p_x/\alpha+p_y)p_z}}$ (3 puntos).

La renta necesaria para obtener la utilidad indirecta $v(p^1, w)$ cuando los precios son p^0 es

$$e(p^0, v(p^1, w)) = 2\frac{w}{2\sqrt{2}\sqrt{(p_x/\alpha + p_y)p_z}}\sqrt{(p_x/\alpha + p_y)p_z} = \frac{w}{\sqrt{2}}. \quad \text{(5 puntos)}$$

La variación equivalente es $VE = \frac{w}{\sqrt{2}} - w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) w < 0$ (2 puntos)

Pregunta 3: (30 puntos)

1. Sea Y un conjunto de producción. Decimos que Y es aditivo si $Y = Y + Y$ y decimos que Y es divisible si
$$y \in Y \text{ y } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{implica que} \quad \alpha y \in Y.$$
Demuestre que si Y es aditivo y divisible, entonces Y es convexo y presenta rendimientos constantes a escala.

2. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de producción asociada con una tecnología que produce un único producto y a partir de un único insumo z. Sea Y el conjunto de producción de esta tecnología. Demuestre que Y satisface rendimientos constantes a escala si y sólo si f es homogénea de grado uno.

Respuesta

1. Veamos primero que es convexo.

   Dados $y_1, y_2 \in Y$ queremos demostrar que $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in Y$ para todo $\alpha \in (0,1)$.

   Dado que $\alpha, (1-\alpha) \in (0,1)$ por divisibilidad sabemos que $\alpha y_1 \in Y$ y $(1-\alpha)y_2 \in Y$. (3 puntos)
   Luego por aditividad tenemos que $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in Y$. (3 puntos)

   Para ver que presenta rendimientos constantes a escala, tenemos que probar que $\alpha y \in Y$ para todo $y \in Y$ y $\alpha \geq 0$. Dividimos en 2 casos.

   - $\alpha \in [0,1]$. Lo que queremos probar se cumple por separabilidad. (3 puntos)
   - $\alpha > 1$. Sea k un entero mayor que α.
     Por aditividad, sabemos que $Y + Y = Y$. Iterando, se tiene que
     $$\underbrace{Y + \cdots + Y}_{k} = Y,$$
     y concluimos que $ky \in Y$. (3 puntos) Luego, de nuevo por divisibilidad, concluimos que
     $$\alpha y = \underbrace{\frac{\alpha}{k}}_{<1}(ky) \in Y. \quad \text{(3 puntos)}$$

2. Primero suponemos que f es homogénea de grado 1 para demostrar que Y presenta rendimientos constantes a escala.

   Sea $(-z, q) \in Y$, deben satisfacer que $q \leq f(z)$. Por lo tanto, $\alpha q \leq \alpha f(z) = f(\alpha z)$ para todo $\alpha > 0$ (usamos homogeneidad de f). Y con eso se concluye que $(-\alpha z, \alpha q) \in Y$ y queda demostrada la primera parte. (5 puntos)

   Ahora suponemos que Y presenta rendimientos constantes a escala para demostrar que f es homogénea de grado 1.

   Si $q = f(z)$ sabemos que $(-z, q) \in Y$. Por rendimientos constantes, sabemos que $(-\alpha z, \alpha q) \in Y$ y con ello concluimos que
   $$\alpha f(z) = \alpha q \leq f(\alpha z). \quad \text{(5 puntos)}$$

   Repetimos el razonamiento con $q' = f(\alpha z)$. Sabemos que $(-\alpha z, q) \in Y$ y por rendimientos constantes (usando el factor α^{-1}) tenemos que $(-z, \alpha^{-1} q) \in Y$, es decir que
   $$\alpha^{-1} q \leq f(z) \Rightarrow \alpha^{-1} f(\alpha z) \leq f(z) \Rightarrow f(\alpha z) \leq \alpha f(z). \quad \text{(5 puntos)}$$

   Con ambas desigualdades se concluye que $f(\alpha z) = \alpha f(z)$.

Pregunta 4: (30 puntos) Una persona tiene función de utilidad de Bernoulli u cóncava y riqueza inicial w. L es una lotería que ofrece un pago A con probabilidad p y un pago de B con probabilidad $1-p$ (asuma que $A > B$).

1. Si el individuo es dueño del billete de lotería, **encuentre la ecuación** que caracteriza el precio mínimo al cual estaría dispuesto a venderlo (p_V). Ilustre gráficamente.
2. Si no tiene el billete de lotería, encuentre **encuentre la ecuación** el precio máximo que el individuo estaría dispuesto a pagar por el billete (p_C). Ilustre gráficamente.
3. Si la función u presenta aversión absoluta al riesgo decreciente, ¿p_V es mayor, igual o menor que p_C? Justifique matemáticamente y dé una interpretación económica a su respuesta.

Respuesta

1. La persona está dispuesta a vender el billete si la utilidad cierta que obtendrá con la venta del billete supera a la utilidad esperada de la lotería. Es decir, el precio mínimo al cual está dispuesta a vender el billete es aquel p_V que satisface la ecuación

$$u(w+p_V) = pu(w+A) + (1-p)u(w+B). \quad \text{(6 puntos)}$$

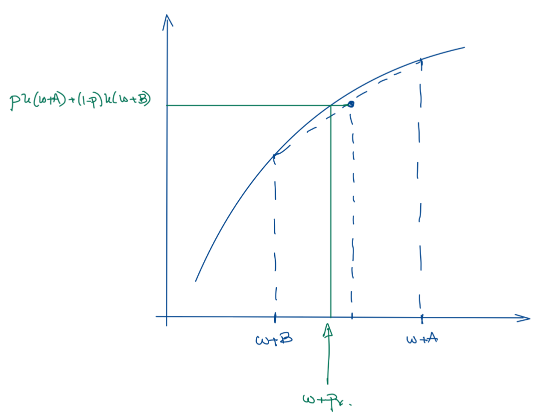
Otra forma de caracterizarlo es decir que el precio de venta es

$$p_V = c(L, u_v) \qquad (1)$$

donde $c(F, u_v)$ es el equivalente cierto de la lotería L y $u_v(x) = u(w+x)$.

Análogamente, puede ser $p_V = c(L', u) - w$ donde L' es la lotería que entrega $A+w$ con probabilidad p y $B+w$ con probabilidad $(1-p)$.

Pauta: cualquiera de las tres caracterizaciones anteriores son válidas.



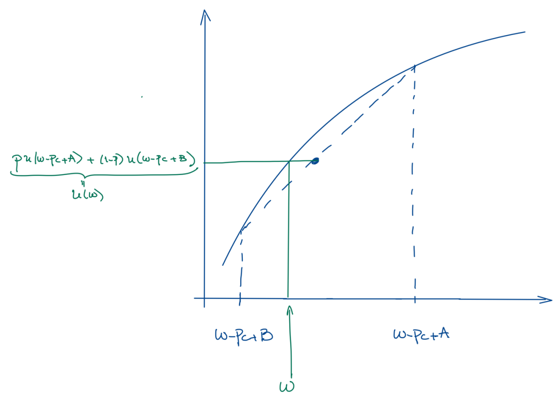
(4 puntos por el gráfico)

2. La persona está dispuesta a comprar el billete si la utilidad esperada que obtendrá con la compra del billete supera a la utilidad que puede obtener de su riqueza inicial. Es decir, el precio máximo al cual está dispuesta a vender el billete es aquel p_C que satisface la ecuación

$$u(w) = pu(w-p_C+A) + (1-p)u(w-p_C+B). \quad \text{(6 puntos)}$$

Otra forma de caracterizarlo es decir que el precio de compra es tal que el equivalente cierto $c(L, u_C)$ es igual a la riqueza inicial w donde $u_C(x) = u(w - p_C + x)$. Es decir que $w - p_C + c(F, u_C) = w$ y por lo tanto

$$p_C = c(F, u_C). \qquad (2)$$



(4 puntos por el gráfico)

3. Si la función presenta aversión absoluta al riesgo decreciente, sabemos que el equivalente cierto de la función $u_C(x)$ es menor que el equivalente cierto de $u_V(x)$ (4 puntos) .

   Por otro lado, las ecuaciones (1) y (2) indican que

$$p_V = c(L, u_V) \qquad \text{(1 puntos)}$$
$$p_C = c(F, u_C) \qquad \text{(1 puntos)}$$

   y por lo tanto, $p_C < p_V$.

   Las personas cuya función de utilidad exhibe aversión absoluta al riesgo decreciente, toman más riesgos a medida que tienen más riqueza. La persona que posee el billete de lotería, tiene más riqueza que aquella que no lo posee. Por lo tanto, en el primer caso la persona toma más riesgos y el valora el billete de lotería más que la persona que está considerando comprarlo. (4 puntos) .