Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Departamento de Economía

Macroeconomía I
ENECO 670
Semestre Otoño 2020

Profesor: Eduardo Engel
Ayudante: Martín Ferrari & Catalina Gómez
Entrega 25 de Mayo, 2020

# Guía de ejercicios No 4

1. **Ajuste abultado y procesos ARCH**

   Robert Engle recibió el Nobel de Economía 2003 por haber introducido la familia ARCH de series de tiempo. Los procesos ARCH extienden los procesos autoregresivos tradicionales a una familia de procesos que captura el hecho que la volatilidad observada de la mayoría de las series financieras varía sistemáticamente a lo largo del tiempo, con períodos de gran volatilidad seguidos de períodos de baja volatilidad. Los procesos ARCH son procesos autoregresivos, salvo que la varianza de las innovaciones es función de la historia reciente de la serie de interés (por ejemplo, una función lineal del promedio de valores recientes de la variable que se está modelando o de sus cuadrados, dependiendo del caso), a diferencia de los procesos AR tradicionales, donde dicha varianza es constante. ARCH se refiere a Auto-Regressive-Conditional-Heteroscedasticity.

   En clases vimos que las series de inversión agregada siguen un proceso ARCH, otros papers han mostrado que esto también se cumple para series agregadas de otras variables con comportamiento abultado a nivel micro, como consumo de durables e inflación.

   En este problema mostramos que en el modelo de Calvo aplicado a un agente, la variable de desequilibrio $x_t$, que que corresponde a la "brecha-pre-ajuste", sigue un simple proceso ARCH.

   Considere un agente que sigue un modelo de Calvo, lo cual se formaliza como sigue:

$$x_{t+1} = (1-\xi_t)x_t + \Delta y^*_{t+1}, \tag{1}$$
$$\Delta y_t = \xi_t x_t. \tag{2}$$

   Donde los $\xi_t$ son i.i.d. Bernoulli con probabilidad de éxito $\lambda$ mientras que los $\Delta y^*_t$ son i.i.d. con media nula y varianza $\sigma^2$.

   (a) Explique en palabras las ecuaciones (1) y (2).

   (b) Use (1) para mostrar que:
$$x_t = (1-\lambda)x_{t-1} + v_t,$$
   con
$$v_t \equiv (\lambda - \xi_{t-1})x_{t-1} + \Delta y^*_t.$$

   (c) Muestre que $v_t$ no está correlacionada con $x_{t-1}$.

(d) Determine $\mathrm{E}[v_t | I_{t-1}]$, donde $I_{t-1} = \{x_{t-1}, x_{t-2}, ..., \xi_{t-2}, \xi_{t-3}, ..., \Delta y^*_{t-1}, \Delta y^*_{t-2}, ...\}$. Es decir, $I_{t-1}$ incluye todas las variables conocidas <u>antes</u> del shock que determina si hay ajuste o no en el período $t-1$, por lo cual <u>no</u> incluye $\xi_{t-1}$.

(e) Determine $\mathrm{Var}[v_t | I_{t-1}]$ y concluya que esta varianza es creciente en $x^2_{t-1}$, tal como sucede con un proceso ARCH.

(f) De una intuición económica para el resultado obtenido en la parte (e).

2. **IRF que varía en el tiempo**

La función de hazard de un modelo Ss generalizado (o modelo de increasing adjustment hazard) viene dada por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \lambda x, & \text{si } 0 < x < 1/\lambda, \\ 1, & \text{si } x > 1/\lambda. \end{cases}$$

Denotamos por $f(x,t)$ la densidad de probabilidad de la inversión mandatada justo antes del ajuste del período $t$, y definimos la tasa de inversión agregada mediante:

$$\frac{I_t}{K_t} \equiv \int x\Lambda(x) f(x,t)\,dx. \tag{3}$$

Denotamos por $\mathrm{IRF}_{k,t}$ la función de respuesta al impulso unitario en $t$, $k = 0, 1, 2, ...$

Suponga que $f(x,t)$ es una uniforme en el intervalo $[x_0, x_0 + 0.1]$, con $x_0 < 1/\lambda - 0.1$ es un parámetro dado, de modo que $f(x,t) = 10$ si $x_0 < x < x_0 + 0.1$ y $f(x,t) = 0$ en caso contrario. El parámetro $x_0$ captura la parte del ciclo económico en que está la economia, valores grandes corresponden a etapas expansivas, valores pequeños tiempos recesivos.

(a) Dibuje tres gráficas con $\Lambda(x)$ y $f(x,t)$. La primera para un $x_0 < -0.1$, la segunda para un $x_0 \in [-0.1, 0]$ y la tercera para un $x_0 > 0$.

(b) Exprese $I_t/K_t$ como función de $x_0$ y $\lambda$. En lo que sigue denotamos esta función por $y(x_0)$.

(c) Calcule y grafique $y'(x_0)$ y explique por qué esta función es igual a $\mathrm{IRF}_{0,t}$ cuando la economía es descrita por la densidad $f(x,t)$ correspondiente a $x_0$.

La familia de uniformes que consideramos en este ejercicio captura, de manera simplificada, las variaciones de la distribución de la inversión mandatada. Es decir, suponemos que en todo momento del tiempo, la densidad justo antes de ajustar $f(x,t)$ viene dada por una uniforme en $[x_0, x_0 + 0.1]$ donde lo único que varía en el tiempo es el valor de $x_0$. Seguimos suponiendo que en todo momento $x_0 < 1/\lambda - 0.1$.

(d) Luego de una serie de shocks agregados positivos y grandes, ¿la densidad que representa la economía corresponderá a valores grandes (y positivos) de $x_0$ o a valores pequeños (y hasta negativos) de $x_0$? Justifique.

(e) Luego de una serie de shocks agregados adversos, ¿la densidad que representa la economía corresponderá a valores grandes (y positivos) de $x_0$ o a valores pequeños (y hasta negativos) de $x_0$? Justifique.

(f) Use las partes (c), (d) y (e) para justifica la afirmación siguiente:

*Cuando más se necesita, un estímulo a la inversión es menos efectivo.*