Curso	: ENECO 630 (Macroeconomía I)	Marzo 31, 2025
Semestre	: Otoño 2025	
Profesor	: Eduardo Engel	
Ayudantes	: Miguel Del Valle, Agustín Farías y María Jesús Negrete	
Ayudantía	: No. 3	

1. **Volatilidad del gasto en durables**

Tal como vimos al analizar los datos de Chile en la unidad de consumo, el gasto en bienes de consumo durables (casas, automóviles, etc.) es mucho más volátil que el gasto en bienes de consumo no durables. En esta pregunta exploramos una posible explicación para esta observación, basada en que el beneficio que los hogares derivan de la compra de durables se extiende más allá del período en que se realiza dicha compra.

Un hogar consume un bien durable (D) y un bien no durable (C), maximizando su utilidad

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(C_t) + v(D_t)].$$

Donde $\beta \in (0, 1)$ y u y v son crecientes, cóncavas y satisfacen condiciones de Inada que aseguran óptimos interiores. Los servicios que proporciona el bien durable son proporcionales al stock del durable: $D_t = \alpha K_t$ con $\alpha > 0$. El stock del durable evoluciona de acuerdo a:

$$K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + E_t,$$

donde $\delta \in [0, 1]$ es la tasa a la cual se deprecia el durable y E denota el gasto en durables. Note el timing que asumimos: los durables adquiridos en t llevan a mayor utilidad en el mismo período. En cada período el hogar recibe un ingreso fijo $Y_t = Y$; los hogares no pueden endeudarse ni prestar.

(a) Escriba la ecuación de Bellman para este problema. ¿Que restricción deben cumplir E_t, C_t y Y en cada período? Indique cuáles son las variable de estado y cuáles son las variables de decisión.

(b) A partir de la condición de primer orden de la ecuación de Bellman y el teorema de la envolvente derive la siguiente ecuación de Euler:

$$u'(C_t) = \alpha v'(\alpha K_t) + \beta(1 - \delta)u'(C_{t+1}). \quad (1)$$

(c) Denote mediante $\overline{K}$, $\overline{C}$ y $\overline{E}$ los valores de estado estacionario del stock del durable, consumo del no durable y gasto en el durable, respectivamente. Derive una expresión que determina unívocamente $\overline{E}$.

A continuación utilizamos este simple modelo para proveer una explicación de por qué el gasto en durables fluctúa más que el gasto en no durables.

El ingreso del hogar en estado estacionario experimenta una caía inesperada a $Y - \Delta y$ en el período 0 y el hogar sabe con certeza que su ingreso será $Y + \Delta y$ en el período siguiente, retornando a continuación a Y, su valor de estado estacionario.

Denote $K_0 = \bar{K} - \lambda \Delta y$ y $C_0 = \bar{C} - (1-\lambda)\Delta y$, donde $\lambda \in [0,1]$ captura la medida en que el ajuste al shock negativo de ingreso se realiza mediante una reducción del consumo del durable y, nuevamente, $\bar{C}$ y $\bar{K}$ denotan los valores de estado estacionario de C y K. Para simplificar el álgebra, suponemos $\beta = 1$ e imponemos que K regresa a su valor de estado estacionario en el período 1 (lo cual significa que C retorna a $\bar{C}$ en el período 2).

(d) Partiendo de la ecuación de Euler (1), use una expansión de Taylor de primer orden alrededor de los valores de estado estacionario de C y K para derivar el valor óptimo de λ. [**Indicación:** Primero exprese C_1 como una función de los parámetros y variable de estado estacionario, luego use esta expresión y las expresiones para C_0 y K_0 para escribir la ecuación de Euler en el período 0, y sólo entonces use la aproximación de Taylor de primer orden. La relación de estado estacionario que derivó en (c) le será útil para simplificar la expresión que obtenga.]

(e) Ahora suponga $\alpha = \delta$ y $u = v$. Explique por qué estos supuestos proveen un benchmark razonable. Use la expresión que derivó en (d) para mostrar que $\lambda = 0.5$ para $\delta = 1$ mientras que $\lambda = 1$ para $\delta = 0$. Lo anterior sugiere (no es necesario que lo demuestre) que λ es creciente en la durabilidad del bien (es decir, es decreciente en δ).

2. Una economía de dotación muy particular

Consideramos una economía poblada por una infinidad de agentes idénticos donde el único activo son árboles, de los cuales suponemos existe una unidad. El producto de esta economía es la fruta que cae del árbol, la cual no puede ser almacenada y sigue un proceso estocástico exógeno d_t.

La formulación secuencial del problema del agente representativo en $t = 0$ es

$$\max_{\{c_t, a_{t+1};\, t=0,1,2,\ldots\}} \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^{\,t} u(c_t), \tag{2}$$

$$\text{s.a. } (p_t + d_t)a_t = p_t a_{t+1} + c_t, \tag{3}$$

donde $\gamma = 1/(1+\delta)$ denota el factor subjetivo de descuento; a_t el número de árboles que tiene el agente en t; p_t el precio de cada árbol en t y c_t su consumo en t.

A continuación suponemos que p_t también es dado exógenamente y derivamos la condición de primer orden que determina el consumo del agente. Luego reintepretamos la c.p.p. notando que el consumo está dado exógenamente (tiene que ser igual a d_t) y determinamos p_t en función de los d_t.

Ayuda: Tenga presente que es posible (y relativamente fácil) responder las partes (e), (f) y (g) aun si no pudo responder (c) y (d).

(a) Interprete la restricción (3).

(b) Si el proceso d_t es persisente, uno esperaría que el precio p_t fuera creciente en d_t. De la intuición tras la afirmación anterior.

(c) Formule la ecuación de Bellman del agente representativo.

Ayuda: Considere la variable de estado $x_t = (p_t + d_t)a_t$ y maximice sobre a_{t+1}. Lo cual significa usar (3) para expresar c_t en función de x_t, a_{t+1} y p_t.

(d) Obtenga la CPO del lado derecho de la ecuación de Bellman. Aplique el Teorema de la Envolvente a la ecuación de Bellman. Combine las dos expresiones anteriores para mostrar que

$$p_t u'(c_t) = \gamma \, \mathrm{E}_t[u'(c_{t+1})(p_{t+1} + d_{t+1})].$$

(e) Use la expresión que derivó en (d) y $c_t = d_t$ para concluir que

$$p_t = \mathrm{E}_t[M_{t,t+1}(p_{t+1} + d_{t+1})], \tag{4}$$

donde $M_{t,t+1}$ denota el factor de descuento estocástico (kernel de precios) que vimos en clases:

$$M_{t,t+1} = \gamma \frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}.$$

(f) Aplique (4) recursivamente para mostrar que

$$p_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}_t[M_{t,t+k} d_{t+k}], \tag{5}$$

donde

$$M_{t,t+k} = \gamma^k \frac{u'(d_{t+k})}{u'(d_t)}.$$

Interprete $M_{t,t+k}$ y a partir de esta interpretación interprete (5).

Ayuda: Para que se cumpla (5), puede suponer que una expresión que emerge en su análisis, que involucra $\gamma^j p_{t+j}$, tiende a cero cuando j tiende a infinito.

(g) Considere el caso particular en que $u(c) = \log(c)$. Use (5) para calcular p_t. Concluya que p_t no depende de expectativas sobre los valores futuros de d_t de modo que *no* se cumple la intuición que dimos en (b). ¿Qué faltó en esa intuición?