PAUTA SOLEMNE II - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2023

Pregunta 1. Considere un modelo de emparejamiento bilateral uno-a-uno entre agentes de los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Las preferencias son estrictas y vienen dadas por:

$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$	$\succ_{m_4}$	$\succ_{w_1}$	$\succ_{w_2}$	$\succ_{w_3}$	$\succ_{w_4}$
w_1	w_2	w_3	w_4	m_2	m_1	m_4	m_3
w_3	w_4	w_1	w_2	m_3	m_4	m_1	m_2
w_2	w_1	w_4	w_3	m_1	m_2	m_3	m_4
w_4	w_3	w_2	w_1	m_4	m_3	m_2	m_1
m_1	m_2	m_3	m_4	w_1	w_2	w_3	w_4

Justificando sus argumentos, muestre que hay al menos tres emparejamientos estables.

Comenzaremos aplicando el algoritmo de aceptación diferida con alguno de los lados del mercado haciendo las propuestas, pues sabemos que eso nos lleva siempre a un emparejamiento estable. Note que cuando los miembros de M hacen las propuestas, los cuatro le proponen a agentes diferentes de W. Como los agentes de W consideran a todos los agentes de M admisibles, las propuestas son aceptadas y el proceso termina en la primera etapa, con el matching $\mu_M = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3), (m_4, w_4)\}$. Lo mismo ocurre cuando los agentes de W hacen las propuestas, pues todos le proponen a individuos diferentes, los cuales los consideran admisibles. En este caso llegamos al emparejamiento $\mu_W = \{(m_1, w_2), (m_2, w_1), (m_3, w_4), (m_4, w_3)\}$.

Sabemos que μ_W deja a los individuos de M con la peor pareja que pueden tener en un emparejamiento estable. Por lo tanto, mirando las preferencias de los individuos de M vemos que cada m podría tener alguna pareja adicional a $\mu_M(m)$ y $\mu_W(m)$ en un emparejamiento estable. De forma más concreta: m_1 podría emparejarse con w_3, que está entre $w_1 = \mu_M(m_1)$ y $w_2 = \mu_W(m_1)$. Análogamente, m_2 podría emparejarse con w_4, m_3 con w_1 y m_4 con w_2. Intentaremos verificar si el emparejamiento $\mu = \{(m_1, w_3), (m_2, w_4), (m_3, w_1), (m_4, w_2)\}$ es estable. Evidentemente, como en μ todos consideran a sus parejas admisibles, nadie tiene incentivos a bloquear para quedarse solo. Además, dado $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, estando en el emparejamiento μ el agente m_i solo puede mejorar al emparejarse con w_i, pero w_i nunca prefiere a m_i por sobre $\mu(m_i)$. Por lo tanto, el emparejamiento μ es estable. □

Pregunta 2. En el contexto de modelos de emparejamiento bilateral uno-a-uno entre un grupo M de hombres y un grupo W de mujeres, considere mecanismos que están definidos para todo perfil de preferencias completas, transitivas y estrictas $(\succ_h)_{h \in M \cup W}$ tales que:

- Para cada $m \in M$, $\succ_m$ está definida en $W \cup \{m\}$.
- Para cada $w \in W$, $\succ_w$ está definida en $M \cup \{w\}$.

Asuma que los conjuntos M y W tienen más de ochenta agentes cada uno. Sea AD_M el mecanismo que asocia a cada perfil de preferencias el resultado de aplicar el algoritmo de aceptación diferida cuando los hombres hacen las propuestas.

(a) Sea Ω un mecanismo estable. Suponga que $\succ = (\succ_h)_{h \in M \cup W}$ es un perfil de preferencias tal que $\Omega[\succ] \neq \text{AD}_M[\succ]$ y asuma que $m_1 \in M$ se empareja en $\text{AD}_M[\succ]$ con la mujer w_1. Sea $\succ'_{m_1}$ una relación de preferencias para m_1 que pone a w_1 como su única pareja admisible. Demuestre que m_1 se empareja con w_1 en $\mu = \Omega[\succ'_{m_1}, \succ_{-m_1}]$.

Note que $\text{AD}_M[\succ]$ sigue siendo estable bajo el perfil de preferencias $(\succ'_{m_1}, \succ_{-m_1})$, pues los agentes $h \neq m_1$ no cambian de preferencias al pasar de $\succ$ a $(\succ'_{m_1}, \succ_{-m_1})$, mientras que el agente m_1 ahora considera a $w_1 = \text{AD}_M[\succ](m_1)$ su única pareja aceptable.

Como $w_1 \in W$, sigue del Teorema del Hospital Rural que m_1 va a estar emparejado con una mujer—no va a estar solo—en todo matching estable bajo $(\succ'_{m_1}, \succ_{-m_1})$. Como w_1 es la única mujer admisible bajo $\succ'_{m_1}$ y μ es estable, llegamos a que $\mu(m_1) = w_1$. $\square$

(b) Sabemos que AD_M es un mecanismo estable y *strategy-proof* para los hombres. Demuestre que AD_M es el único mecanismo que cumple estas propiedades.

Suponga que existe un mecanismo estable $\Omega \neq \text{AD}_M$ que es *strategy-proof* para los hombres. Entonces, existe un perfil de preferencias $\succ$ tal que $\Omega[\succ] \neq \text{AD}_M[\succ]$. Como AD_M implementa el mejor de los emparejamientos estables para M, existe $m \in M$ tal que $\text{AD}_M[\succ](m) \succ_m \Omega[\succ](m)$.

Si $w = \text{AD}_M[\succ](m)$, sigue del ítem anterior—los argumentos valen para cualquier (m, w)—que cuando m reporta preferencias $w \succ'_m m \succ'_m \cdots\cdots$, tenemos que $\Omega[\succ'_m, \succ_{-m}](m) = w$. Luego, como $w = \text{AD}_M[\succ](m) \succ_m \Omega[\succ](m)$, llegamos a que $\Omega[\succ'_m, \succ_{-m}](m) \succ_m \Omega[\succ](m)$, lo cual contradice el hecho que Ω es *strategy-proof*. $\square$

Pregunta 3. Considere un mercado habitacional con tres individuos y tres casas, las cuales denotaremos por h_1, h_2, h_3. Cada individuo $i \in \{1, 2, 3\}$ es propietario de la casa h_i y tiene una relación de preferencias $\succ_i$ por las casas, la cual es completa, transitiva y estricta:

$$h_3 \succ_1 h_2 \succ_1 h_1,$$

$$h_1 \succ_2 h_3 \succ_2 h_2,$$

$$h_1 \succ_3 h_2 \succ_3 h_3.$$

Justificando detalladamente su argumentos,

(a) Encuentre las distribuciones de casas que son Pareto eficientes e individualmente racionales.

Como todos los individuos consideran todas las casas tan buenas cuanto su propiedad, toda distribución de casas es individualmente racional. Para encontrar aquellas que son Pareto eficientes es suficiente aplicar el algoritmo *serial dictatorship* para todos los posibles ordenes de los individuos.

Orden	1	2	3
1,2,3	h_3	h_1	h_2
1,3,2	h_3	h_2	h_1
2,1,3	h_3	h_1	h_2
2,3,1	h_3	h_1	h_2
3,1,2	h_3	h_2	h_1
3,2,1	h_2	h_3	h_1

Por lo tanto, hay tres distribuciones Pareto eficientes e individualmente racionales: (h_3, h_1, h_2), (h_3, h_2, h_1) y (h_2, h_3, h_1) (la i-ésima coordenada indica la casa que recibe el agente i). $\square$

(b) Encuentre las distribuciones de casas que son Pareto eficientes y no pueden ser bloqueadas por la coalición formada por los individuos 1 y 3.

La distribución (h_3, h_2, h_1) no puede ser bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$, pues los agentes 1 y 3 ya intercambian sus propiedades en ella. Sin embargo, (h_3, h_1, h_2) y (h_2, h_3, h_1) si pueden ser bloqueadas por $\{1, 3\}$. Cuando 1 y 3 desvían para intercambiar sus casas, el individuo 3 mejora en relación a (h_3, h_1, h_2) y el individuo 1 queda igual. Análogamente, cuando 1 y 3 intercambias sus propiedades, el individuo 1 mejora en relación a (h_2, h_3, h_1) y el individuo 3 queda igual. Concluimos que (h_3, h_2, h_1) es la única distribución Pareto eficiente que no es bloqueada por $\{1, 3\}$. $\square$

Pregunta 4. Considere una economía con un conjunto $H = \{h_1, \ldots, h_{63}\}$ de agentes y un conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ de alternativas sociales. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de perfiles de preferencia $\succ = (\succ_h)_{h \in H}$ tales que cada $\succ_h$ es una relación de preferencia completa, transitiva y estricta definida sobre A. Sea $f : \mathcal{P} \twoheadrightarrow A$ la regla de elección social caracterizada por las siguientes propiedades:

- La alternativa social a_1 está en $f(\succ)$ si y solamente si a_1 es Pareto eficiente bajo $\succ$ y el individuo h_1 la considera su mejor alternativa.
- La alternativa social a_2 está en $f(\succ)$ si y solamente si a_2 es Pareto eficiente bajo $\succ$ y el individuo h_7 la considera su mejor alternativa.
- La alternativa social a_3 está en $f(\succ)$ si y solamente si a_3 es Pareto eficiente bajo $\succ$ y el individuo h_{18} <u>no</u> la considera su peor alternativa.

Determine si f cumple las condiciones suficientes del Teorema de Maskin para ser totalmente implementable en estrategias Nash.

Como hay más de dos agentes en el mercado, nos piden verificar si f es Maskin monótona y cumple la propiedad de "no poder de veto". Dada una alternativa social $a \in A$, sean $\succ, \succ' \in \mathcal{P}$ dos perfiles de preferencia tales que $a \in f(\succ)$ y para todo $a' \in A$ y $h \in H$ tenemos que $a \succ_h a'$ implica que $a \succ'_h a'$. Para asegurar que f es Maskin monótona hay que probar que $a \in f(\succ')$:

- Si $a = a_1$, entonces el individuo h_1 considera a_1 su mejor alternativa bajo $\succ_{h_1}$. Luego, a_1 sigue siendo la mejor alternativa bajo $\succ'_{h_1}$ (pues todo lo que era peor que a_1 bajo $\succ_{h_1}$ sigue siendo peor bajo $\succ'_{h_1}$). Además, a_1 es Pareto eficiente bajo $\succ'$, pues como h_1 la considera su mejor opción, es imposible mejorar a otros sin perjudicarlo. Luego, la definición de f nos asegura que $a_1 \in f(\succ')$.
- Si $a = a_2$, entonces el individuo h_7 considera a_2 su mejor alternativa bajo $\succ_{h_7}$. Luego, a_2 sigue siendo la mejor alternativa bajo $\succ'_{h_7}$. Además, a_2 es Pareto eficiente bajo $\succ'$, pues como h_7 la considera su mejor opción, es imposible mejorar a otros sin perjudicarlo. Luego, $a_2 \in f(\succ')$.
- Si $a = a_3$, entonces h_{18} no considera a_3 su peor alternativa bajo $\succ_{h_{18}}$. Esto es, debe existir una alternativa social $\tilde{a}$ que h_{18} considere peor que a_3 bajo $\succ_{h_{18}}$. Eso implica que $a_3 \succ'_{h_{18}} \tilde{a}$. Por otro lado, como a_3 es Pareto eficiente bajo $\succ$, no hay ninguna alternativa social que todos consideren mejor que a_3—cuando las preferencias son estrictas, la única forma de hacer una mejora de Pareto es mejorándolos a todos. Luego, a_3 debe ser Pareto eficiente bajo $\succ'$, pues sabemos que $a' \succ'_h a_3$ implica $a' \succ_h a_3$ para todo $a \in A$ y $h \in H$. Por lo tanto, sigue de la definición de f que $a_3 \in f(\succ')$.

Concluimos que $a \in f(\succ')$. Luego, la regla de elección social f es Maskin monótona.

Note que, si en un perfil de preferencias $\succ \in \mathcal{P}$ todos los individuos diferentes de h_{18} consideran a_3 su mejor alternativa, entonces a_3 es Pareto eficiente. Sin embargo, no necesariamente es verdad que $a_3 \in f(\succ)$. Efectivamente, para que esto último ocurra se requiere que h_{18} no considere a a_3 su peor alternativa bajo $\succ_{h_{18}}$. Por lo tanto, no se cumple la propiedad de "no existencia de poder de veto". $\square$