PAUTA CONTROL II - MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES MARTÍNEZ
SEMESTRE PRIMAVERA - 2023

[1] En el contexto de una economía con n individuos y dos alternativas sociales, siguiendo la notación usual, denote por $f_\beta : \{-1,0,1\}^n \to \{-1,0,1\}$ a la regla de elección social caracterizada por

$$f_\beta(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \text{signo}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\theta_i\right),$$

donde $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{R}^n$. Defina las propiedades de *simetría*, *neutralidad* y *responsividad*. Además, para cada vector $\beta \in \mathbb{R}^n_+$ determine cuales de esas propiedades son satisfechas.

Dada una regla de elección social $\eta : \{-1,0,1\}^n \to \{-1,0,1\}$, tenemos que:

- La *simetría* asegura que el resultado de η no depende de la identidad de los votantes, solo de la distribución de sus votos. Formalmente, la simetría requiere que $\eta(\theta_{\sigma(1)},\ldots,\theta_{\sigma(n)}) = \eta(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ para toda función bijectiva $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ y para todo perfil de preferencias $(\theta_1,\ldots,\theta_n) \in \{-1,0,1\}^n$.
- La *neutralidad* de η asegura que la alternativa social escogida no dependa de la "etiqueta" que se le ha dado. Así, la neutralidad requiere que $\eta(\theta) = -\eta(-\theta)$ para todo $\theta \in \{-1,0,1\}^n$.
- La *responsividad* nos asegura que un aumento en el apoyo a una alternativa que ya es socialmente deseable siempre la transforma en la única alternativamente socialmente óptima. Esto es, η es responsiva si para todo par $\theta,\theta' \in \{-1,0,1\}^n$ tenemos que $\eta(\theta) \geq 0$ y $\theta' > \theta$ implican $\eta(\theta') = 1$.

La regla de elección social f_β es simétrica si y solo si β es un múltiplo del vector $(1,\ldots,1)$. Efectivamente, f_β es simétrica cuando $\beta = \alpha(1,\ldots,1)$ pues $\sum_{i=1}^n \beta_i\theta_i = \alpha\sum_{i=1}^n \theta_i = \alpha\sum_{i=1}^n \theta_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n \beta_i\theta_{\sigma(i)}$. Recíprocamente, asuma que f_β es simétrica y que $\beta_i > \beta_j$ para algún par $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Defina $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$ tal que $\theta_i = 1$, $\theta_j = -1$ y $\theta_k = 0$ para todo $k \notin \{i,j\}$. Dada una función $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ tal que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ y $\sigma(k) = k$ para todo $k \notin \{i,j\}$, tenemos que $f_\beta(\theta) = \text{signo}(\beta_i - \beta_j) = 1$ y $f_\beta(\theta_\sigma) = \text{signo}(\beta_j - \beta_i) = -1$. Una contradicción con la simetria de f_β.

La regla f_β es neutral para todo $\beta \in \mathbb{R}^n_+$ pues $\sum_{i=1}^n \beta_i\theta_i = -\sum_{i=1}^n \beta_i(-\theta_i)$. Finalmente, f_β es responsiva si y solo si $\beta \in \mathbb{R}^n_{++}$. Efectivamente, dados dos perfiles de preferencia $\theta,\theta' \in \{-1,0,1\}^n$ tales que $f_\beta(\theta) \geq 0$ y $\theta' > \theta$, tenemos que

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \beta_i\theta_i = \sum_{i=1}^n \beta_i\theta'_i + \sum_{i=1}^n \beta_i(\theta_i - \theta'_i) \leq \sum_{i=1}^n \beta_i\theta'_i,$$

donde la última desigualdad es estricta si y solo si existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $\beta_i > 0$ y $(\theta_i - \theta'_i) > 0$, pues $\beta \in \mathbb{R}^n_+$. Por lo tanto, para asegurar que $f_\beta(\theta') = 1$ es suficiente que $\beta \gg 0$. Esta última condición tambien es necesaria para asegurar la responsividad, pues si $\beta_i = 0$ y consideramos el vector $\theta' \in \{0,1\}^n$ tal que $\theta'_k = 1$ si y solo si $k = i$, entonces $f_\beta(\theta') = 0$ aunque $f_\beta(0,\ldots,0) \geq 0$ y $\theta' > (0,\ldots,0)$.

Note que, como era de esperar a partir del Teorema de May, dado $\beta \in \mathbb{R}^n_+$ la regla de elección social f_β es simétrica, neutral y responsiva si y solamente si $\beta \in \{\alpha(1,\ldots,1) : \alpha > 0\}$. $\square$

[2] Considere una economía en la cual hay un conjunto finito H de individuos, los cuales tienen preferencias por las alternativas sociales en $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$. Denote por $\mathcal{P}$ a la colección de perfiles preferencia $(\succ_h)_{h\in H}$ tales que cada $\succ_h$ está definida sobre A y es completa, transitiva y estricta.

Dados $P = (\succ_h)_{h\in H}$ y $P' = (\succ'_h)_{h\in H}$ en el conjunto $\mathcal{P}$, diremos que *una alternativa social a_i no reduce su ranking al pasar de P a P'* cuanto $a_i \succ_h a_j$ implica $a_i \succ'_h a_j$ para todo $a_j \in A$ y $h \in H$.

Sea $f : \mathcal{P} \to A$ una función que cumple las siguientes propiedades:

(i) El conjunto $\{a \in A : f(P) = a$ para algún $P \in \mathcal{P}\}$ tiene al menos tres elementos.

(ii) Dados $P, P' \in \mathcal{P}$ y $a_i \in A$, si la alternativa social a_i no reduce su ranking al pasar de P a P', entonces $f(P) = a_i$ implica que $f(P') = a_i$.

Demuestre que existe un individuo $\hat{h} \in H$ tal que, para cada perfil de preferencias $P = (\succ_h)_{h \in H} \in \mathcal{P}$ la alternativa social $f(P)$ es la mejor opción para $\hat{h}$ cuando sus preferencias vienen dadas por $\succ_{\hat{h}}$.

Note que $\overline{A} = \{a \in A : f(P) = a$ para algún $P \in \mathcal{P}\}$ son los valores que toma la función f. Por lo tanto, podemos considerar que $f : \mathcal{P} \to \overline{A}$ pues $f(\mathcal{P}) = \overline{A}$. Como la condición (i) nos asegura que $|\overline{A}| \geq 3$, si probamos que la condición (ii) implica que f es Condorcet monótona, el resultado es una consecuencia del Teorema de Yu (2013).

Sean $P, P' \in \mathcal{P}$ dos perfiles de preferencia que coinciden sobre un par de alternativas sociales $a_i, a_j \in A$, las cuales son top bajo P'. Para asegurar la monotonía Condorcet de f tenemos que probar que, bajo estas condiciones, $f(P) = a_i$ implica que $f(P') = a_i$. Ahora, como $\{a_i, a_j\}$ son top bajo P' y los perfiles P y P' coinciden en esas dos alternativas, a_i no reduce su ranking al pasar de P a P'. Así, la condición (ii) nos asegura la propiedad deseada. □

[3] Considere una subasta de Vickrey-Clarke-Groves en la cual se venden dos objetos, a y b. Asuma que en la subasta participan tres potenciales compradores, $i \in \{1, 2, 3\}$, cuyas valoraciones vienen dadas por:

i	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
1	0	0	β
2	0	α	β
3	γ	0	δ

donde los parámetros cumplen $0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta < \alpha + \gamma$.

(i) Explicando detalladamente sus argumentos, determine la distribución de los objetos, el precio que paga cada comprador y los ingresos del vendedor.

La subasta de Vickrey-Clarke-Groves asignará los objetos de tal forma de maximizar el bienestar social. Note que, si se entregan los dos objetos a un único individuo, el máximo bienestar social se alcanza al entregarle $\{a, b\}$ al individuo 3, pues $\delta > \beta$. Alternativamente, si se entregan los objetos a individuos diferentes, el máximo bienestar social se obtiene al entregarle b al individuo 2 y a al individuo 3, lo cual genera un bienestar social de $\alpha + \gamma$. Como $\alpha + \gamma > \delta$, concluimos que la subasta asignará el objeto b al individuo 2 y el objeto a al individuo 3. Cada individuo pagará el costo social que genera su presencia en la subasta. El individuo 1 no pagará nada, pues su presencia no afecta la asignación. El individuo 2 pagará $\delta - \gamma$, pues en su ausencia ambos objetos se asignarían al individuo 3 generando un bienestar social δ en vez del bienestar social γ que los individuos $\{1, 3\}$ tienen cuando 2 está presente. El individuo 3 pagará $\beta - \alpha$, pues en su ausencia ambos objetos se asignarían a un único individuo generando un bienestar social β, el cual es mayor que el bienestar social α que los individuos $\{1, 2\}$ tienen cuando 3 está presente. Concluimos que los ingresos del vendedor serán $(\delta - \gamma) + (\beta - \alpha)$. □

(ii) Demuestre que el vendedor podría recaudar más recursos si impide la participación de alguno de los potenciales compradores.

Suponga que se impide la participación del individuo 3. En este caso, el máximo bienestar social es β y se alcanza asignando ambos objetos a un mismo individuo, 1 ó 2. Además, quien recibe los objetos debe pagar una cantidad β por ellos, pues en su ausencia el otro individuo se los llevaría y tendría un bienestar β en vez de cero. Por lo tanto, en este contexto los ingresos del vendedor son iguales a β. Como en la presencia de todos los potenciales compradores el vendedor tiene ingresos $(\delta - \gamma) + (\beta - \alpha) = \beta - (\alpha + \gamma - \delta) < \beta$, concluimos que al impedir la participación de alguno de los potenciales compradores se pueden aumentar los ingresos de la subasta. Esta "anti-monotonía" de los ingresos es una de las patologías de la subasta VCG. Esencialmente, es uno de los costos asociados a dar incentivos a los potenciales compradores a revelar sus verdaderas preferencias. □