Enunciado de la Prueba de Macroeconomía

Problema 1. Consumo óptimo con ingreso diversificable (25 puntos)

Considere el caso particular del problema de fluctuación de ingresos donde el ingreso laboral es diversificable y la única opción de ahorro es un activo riesgoso. Concretamente, en $t = 0$ el individuo recibe en efectivo un monto igual al valor presente descontado de su ingreso de por vida, el cual forma parte de los activos financieros iniciales.

La formulación secuencial del problema en $t = 0$ es:

$$\max_{C_0, C_1, \ldots} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log C_t \right]$$

s.a.

$$A_{t+1} = R_t(A_t - C_t), \quad A_0, R_0 \text{ dados.}$$

Notación:

- β: factor de descuento subjetivo.
- $\mathbb{E}_t$: esperanza condicional en la información disponible en t. La cual incluye R_t y A_t.
- A_t: activos financieros antes del consumo del período t.
- R_t: retorno bruto a los ahorros en t, que suponemos estocástico.
- C_t: consumo en t.

Suponemos que $\log R_t$ sigue un proceso AR(1):

$$\log R_t = (1 - \phi) \log \overline{R} + \phi \log R_{t-1} + \epsilon_t,$$

donde ($\phi \in [0, 1)$) y (ϵ_t) es una innovación i.i.d. con ($\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$) y ($\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma^2$)

a) Plantee la ecuación de Bellman para este problema, indique las variables de estado y de decisión. Proporcione intuición económica de por qué no se puede escribir con solo una variable de estado.

b) Asumiendo la existencia de una única solución para la ecuación de Bellman, muestre que ésta es de la forma:
$$V(A_t, R_t) = k_0 + k_1 \log A_t + k_2 \log R_t.$$

c) Encuentre expresiones explícitas para k_1 y k_2. No es necesario encontrar k_0.

d) Encuentre una expresión explícita para C_t como función de las variables de estado correspondientes.

e) (2 ptos.) Para fijar ideas y sin que necesariamente sea la expresión correcta, en todo lo que sigue suponga que

$$C_t = (1-\gamma)A_t.$$

La expresión anterior depende de γ y A_t pero no de R_t. ¿Significa esto que la trayectoria óptima de consumo no depende de la trayectoria de los retornos de los activos? Justifique su respuesta.

f) (6 ptos.) Muestre que $\log A_t$ y $\log C_t$ siguen procesos ARIMA. Identifique los valores de p, d y q en cada caso, los polinomios autoregresivos y de media móvil y el proceso de innovación.

g) (3 ptos.) La expresión que obtuvo para V en b se puede escribir de la forma

$$V(A_t, R_t) = c_0 + c_1 \log A_t + c_2[\log R_t - \log \bar{R}].$$

donde c_0, c_1 y c_2 son constantes y donde le contamos que (no es necesario que lo demuestre) solo c_2 depende de la autocorrelación de primer orden ϕ. ¿Esperaría que c_2 fuera creciente o decreciente en ϕ? No es necesario que calcule nada, basta con que justifique su respuesta dando la intuición económica. ¿Por qué es relevante que c_0 y c_1 no dependen de ϕ?

Problema 2. Ahorro por precaución y costos de ajuste (25 puntos)

Considere un agente que vive dos períodos ($t = 0$ y $t = 1$) con activos iniciales $A_0 = 0$, tasa subjetiva de descuento $\beta = 1$, tasa de interés $r = 0$, y utilidad instantánea $u(C_t) = \log C_t$. Se cumple la condición de no Ponzi. El ingreso en $t = 0$ es $y_0 = 1$, y en $t = 1$ es:

$$y_1 = \begin{cases} 3+\Delta & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}, \\ 3-\Delta & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad 0 \leq \Delta < 2.$$

a) Explique por qué $0 < C_0 < 4-\Delta$. Es decir, por qué $C_0 > 0$ y $C_0 < 4-\Delta$.

b) Escriba el problema de optimización del agente en $t = 0$ para determinar C_0. Debe obtener un problema donde se maximiza una función de C_0 sujeto a la restricción analizada en a. Es decir, debe derivar una función $F(C_0; \Delta)$ tal que determinar C_0 equivale a resolver

$$\max_{0<C_0<4-\Delta} F(C_0; A).$$

c) Determine la CPO y muestre que es una ecuación de segundo grado en C_0. No resuelva.

d) Suponga ahora utilidad logarítmica y que se cumplen los supuestos de EC. Determine C_0 bajo equivalencia cierta.

Volvemos al caso con utilidad instantánea logarítmica, para todo lo que resta de la pregunta, y suponemos que la expresión que resuelve la CPO de la parte c es

$$C_0 = 2 - \frac{1}{4}\Delta^2.$$

e) Obtenga una expresión para el ahorro por precaución en $t = 0$. Concluya que es creciente en Δ. Interprete.

f) Suponga el problema de c), pero ahora el agente no tiene acceso a crédito. ¿Cuál es el C_0 óptimo? ¿Se cumple el resultado de equivalencia entre modelos con ahorro precautorio y restricciones de liquidez? Justifique.

Problema 3. Inversión con insumos locales y extranjeros (25 puntos)

Una firma maximiza su valor descontado:

$$V(K_0) = \max_{\{L_t, F_t\}_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} \left(\pi(K_t) - p_L L_t - p_F F_t - C(I_t, K_t)\right) e^{-rt} dt$$

sujeto a:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t, \quad K_0 \text{ dado},$$

$$I_t = \alpha \log L_t + (1-\alpha) \log F_t, \quad \alpha \in (0,1).$$

En (2), L_i es la cantidad de insumos locales y F_i es la cantidad de insumos extranjeros, los que tienen precios fijos y exógenos p_L y p_F, respectivamente. La firma combina L_i y F_i para generar capital adicional, $I_i = \alpha \log L_i + (1-\alpha)\log F_i$. Note que, a diferencia de la versión que vimos en clases, el costo de ajuste $C(\cdot)$ incorpora el precio del capital. Finalmente, $\alpha \in (0,1)$.

a) (2 ptos.) Este problema puede ser resuelto en dos etapas: en la primera se elige L_i y F_i para un nivel dado de I_i y en la segunda se elige I_i. Explique la intuición de la afirmación anterior.

b) (2 ptos.) Reescriba (2) como si la primera etapa descrita en el párrafo anterior ya hubiese sido resuelta, denotando por $p(I_i)$ el costo de adquirir unidades de capital en t.

c) (8 ptos.) Explique por qué es razonable definir $q_t = \lambda_t / p'(I_t)$ en esta extensión del modelo visto en clases. Luego, sin asumir ninguna forma funcional, plantee el hamiltoniano del problema y derive las condiciones necesarias de optimalidad. Escriba las dos condiciones de optimalidad en función de K, λ, q y $\dot{q}$.

d) (5 ptos.) Es posible mostrar que $p(I)$ es de la forma

$$p(I) = \theta \exp(I),$$

donde $\theta > 0$ depende solo de p_L, p_F y α y es creciente en p_L y p_F. Asuma adicionalmente que la firma enfrenta costos cuadráticos de ajuste:

$$C(I,K) = \frac{1}{2} b I^2 K,$$

donde $b > 0$. Además, en lo que sigue puede suponer $\delta = 0$. Encuentre los valores de estado estacionario de q y K.

Suponga ahora que, partiendo con la economía en estado estacionario, de forma sorpresiva comienza una intensa guerra comercial, lo cual se traduce en un incremento sustancial del precio de los insumos importados, p_F.

e) (8 ptos.) ¿Cuáles son los efectos que tiene esta guerra comercial sobre la dinámica de la inversión, del capital y de q? Compare el caso en que se percibe que este cambio en el contexto mundial será transitorio (v.g., que durará exactamente T períodos de tiempo) con el caso en que se percibe que será permanente. Dé el mayor detalle posible sobre cuando q y K cambian de tendencia, dan saltos, etc.

Ayuda: Use diagramas de fase. Puede suponer que la dinámica es análoga a aquella del modelo original.

Problema 4. Capacitación en el modelo DMP (25 puntos)

Extensión del modelo Diamond-Mortensen-Pissarides con: Considere el modelo Diamond-Mortensen-Pissarides visto en clases con fuerza laboral normalizada a 1. Una primera diferencia es que ahora los trabajadores no trabajan para siempre. Todos los trabajadores, tanto empleados como desempleados, se retiran del mercado laboral a una tasa δ. Cada trabajador retirado es reemplazado por un trabajador joven, por lo tanto, la masa de trabajadores en la economía se mantiene constante e igual a 1. Los nuevos trabajadores entran al mercado laboral como desempleados y sin experiencia laboral previa. Pensemos en ellos como trabajadores que recién se gradúan (los llamaremos "tipo-0"). Una vez que un trabajador tipo-0 encuentra su primer empleo, se convierte en un trabajador empleado de tipo-0. Después de perder su primer empleo, vuelve al desempleo, pero ahora pasa a ser un trabajador tipo-1 (porque ya ha tenido al menos un empleo en el pasado). De este modo, en cualquier momento del tiempo, los trabajadores pueden ser de tipo-0 o tipo-1 y pueden estar empleados o desempleados. Denotemos por u_0 y u_1 la medida de trabajadores desempleados de tipo-0 y tipo-1 y por e_0 y e_1 la medida de trabajadores empleados de tipo-0 y tipo-1, respectivamente.

El supuesto clave que haremos es que los trabajadores tipo-0 empleados son menos productivos que los trabajadores tipo-1 empleados. Esto es relevante solo para los trabajadores durante su primer empleo. Una justificación podría ser que, por su falta de experiencia, estos trabajadores necesitan ser capacitados y entrenados para desarrollar su trabajo. En consecuencia, los trabajadores tipo-1 producen p unidades del bien numerario (por unidad de tiempo) cuando están empleados, mientras que los trabajadores tipo-0 producen $p - k$, con $0 < k < p$. El parámetro k puede interpretarse como el costo de capacitación que la firma debe incurrir al contratar a un trabajador sin experiencia laboral.

El resto del modelo es estándar. El total de trabajadores desempleados se denota por $u = u_0 + u_1$, y el número de vacantes por v. La tecnología de emparejamiento viene dada por $m(u, v)$, donde m es una función con retornos constantes a escala y creciente en ambos argumentos. Se define la estrechez del mercado laboral como $\theta = \frac{v}{u}$. Note que las firmas no pueden discriminar entre trabajadores de tipo-0 y tipo-1 (aunque quisieran), de modo que los trabajadores desempleados encuentran trabajo a tasa $\theta q(\theta)$ y las empresas llenan sus vacantes a tasa $q(\theta)$.

Una gran cantidad de firmas decide si participan en el mercado laboral ofreciendo exactamente una vacante cada una. Cuando una firma es emparejada con un trabajador, se crea un puesto de trabajo y el producto generado depende del tipo de trabajador empleado (como se discutió previamente). Mientras la vacante no se llena, la firma paga un costo c por unidad de tiempo. En un emparejamiento activo, la firma paga al trabajador un salario determinado mediante una negociación de Nash, que depende de su tipo: w_0 si es tipo-0, w_1 si es tipo-1. Denotamos por β el poder de negociación del trabajador y notamos que los parámetros c y β no dependen del tipo de trabajador.

Las separaciones ocurren a una tasa exógena λ que no depende del tipo de trabajador. Cuando ocurre una separación, la firma cierra el puesto de trabajo y el trabajador pasa al grupo de desempleados de tipo-1. Los trabajadores desempleados, de todos los tipos, reciben un seguro de desempleo z por unidad de tiempo. La tasa de descuento de los agentes es r. En las preguntas que siguen consideramos solo los equilibrios de estado estacionario.

a) Escriba las 2 curvas de Beveridge (BC_0, BC_1) de la economía. Más precisamente, exprese u_1 y u_0 en función de parámetros y la estrechez del mercado laboral θ definida anteriormente.

b) Escriba las funciones de valor de los trabajadores. Serán cuatro ecuaciones que involucran cuatro funciones de valor: U_0, U_1, W_0 y W_1, donde la notación es la extensión natural de lo que vimos en clases. Recuerde incorporar, en cada ecuación, la posibilidad de que el trabajador abandone el mercado laboral.

c) Escriba las funciones de valor de las firmas. Son tres ecuaciones que involucran tres funciones: V (vacante), J_0 (puesto ocupado por tipo-0) y J_1 (puesto ocupado por tipo-1). Los salarios que reciben los trabajadores tipo-0 y tipo-1 son w_0 y w_1, respectivamente. Recuerde incorporar la posibilidad de que una fuente de trabajo activa quede inactiva porque el trabajador se retira de la fuerza laboral. Imponga la condición de libre entrada y encuentre una ecuación que involucre sólo w_0, w_1 y una función de θ.

Ayuda: Comience por encontrar una expresión para la probabilidad de que una vacante se llene con un trabajador de tipo-0 y denote esta probabilidad por γ.

d) Escriba la solución del problema de negociación entre una empresa y un trabajador tipo-1, y derive la curva de salario para los trabajadores de tipo-1 (WC_1); esta debe ser una ecuación que vincule el salario de los trabajadores de tipo-1, w_1, con la estrechez de mercado, θ, y donde no aparecen funciones de valor. No es necesario que despeje w_1, basta con que encuentre la ecuación de donde se podría despejar.

De manera análoga a la parte d), se puede escribir la solución del problema de negociación entre una empresa y un trabajador tipo-0 y a partir de esa derivar la curva de salario para estos trabajadores (WC_0). Con álgebra tediosa pero que no involucra desafíos conceptuales, se obtiene:

$$\mathrm{w}_0\left[1+\frac{\beta\theta q(\theta)}{r+\delta+\lambda}-\frac{(1-\beta)\lambda\theta q(\theta)}{(r+\delta+\lambda)(r+\delta+\theta q(\theta))}\right]=\beta(p-k)+(1-\beta)z+\frac{(p-k)\beta\theta q(\theta)}{r+\delta+\lambda}-\frac{(1-\beta)\lambda\theta q(\theta)}{(r+\delta+\lambda)(r+\delta+\theta q(\theta))}w_1.(1)$$

e) Proporcione la intuición para el hecho de que en la expresión anterior w_0 depende de w_1.

f) Defina brevemente el equilibrio de estado estacionario del modelo. Resuma cuántas variables de equilibrio tenemos, qué condiciones cumplen y enumere los pasos a seguir para calcular estas variables. Su respuesta no necesita tener más de 4 o 5 líneas.

g) Dé la intuición de por qué el valor de equilibrio de w_0 en este modelo podría ser negativo. Muestre que esto sucede cuando $z=0$ y k es cercano a p.