CONTROL III – MICROECONOMÍA II

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ
AYUDANTES: MARTÍN FERRARI - CATALINA GÓMEZ

Pregunta 1

Considere una economía estática con dos mercancías, dos agentes y recursos agregados $W \in \mathbb{R}^2_{++}$. Denote por $\mathcal{U}$ al conjunto de funciones de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ continuas y estrictamente crecientes. Sea $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ la correspondencia que asocia a cada $(u^1, u^2) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ el conjunto de asignaciones Pareto eficientes cuando las preferencias individuales son representables por (u^1, u^2). Demuestre que $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ es implementable en estrategias Nash.

Vamos a probar que f es Maskin monótona y cumple con *no poder de veto*.

La propiedad de *no poder de veto* es trivialmente satisfecha, pues los individuos tienen utilidades estrictamente crecientes. Así, es imposible que exista una alternativa social que sea la mejor para un individuo, pues mientras más recursos tenga es mejor.

Para verificar la monotonía Maskin, fije funciones de utilidad $u^1, u^2, \tilde{u}^1, \tilde{u}^2$ en $\mathcal{U}$. Además, dado $(x^1, x^2) \in f(u^1, u^2)$ asuma que para cada $i \in \{1, 2\}$ e $(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ tenemos que

$$u^i(x^i) \geq u^i(y^i) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{u}^i(x^i) \geq \tilde{u}^i(y^i).$$

Queremos probar que $(x^1, x^2) \in f(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$. Supongamos, por contradicción, que (x^1, x^2) no es Pareto eficiente cuando las preferencias individuales son representables por $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$. Esto es, existen canastas $(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ tal que $y^1 + y^2 = W$, $\tilde{u}^1(y^1) > \tilde{u}^i(x^1)$ y $\tilde{u}^2(y^2) \geq \tilde{u}^2(x^2)$.[1] La continuidad y monotonía estricta de las preferencias nos asegura que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $(\tilde{u}^1(\theta y^1), \tilde{u}^2(y^2 + (1-\theta)y^1)) \gg (\tilde{u}^1(x^1), \tilde{u}^2(x^2))$. Por lo tanto, $u^1(\theta y^1) > u^1(x^1)$ y $u^2(y^2 + (1-\theta)y^1) > u^2(x^2)$. Como $(\theta y^1, y^2 + (1-\theta)y^1)$ es una distribución de los recursos agregados W, llegamos a que (x^1, x^2) no es Pareto eficiente, una contradicción. ☹

[1] Sin perdida de generalidad, asumimos que existe una redistribución de recursos que mejora la situación del individuo $i = 1$ sin perjudicar al individuo $j = 2$.

Pregunta 2

En el contexto de emparejamientos bilaterales uno-a-uno entre miembros de dos grupos del mismo tamaño, M y W, asuma que cada individuo considera que todos los miembros del otro grupo son aceptables. Así, un emparejamiento es caracterizado por una función biyectiva $\mu : M \to W$.

A diferencia del modelo clásico, suponga que cada individuo $i \in M \cup W$ tiene preferencias estrictas P^i sobre el conjunto de posibles emparejamientos $\{\mu : M \to W : \mu \text{ es biyectivo}\}$. Esto es, existen *externalidades*, pues los individuos no solamente se importan por su propia pareja.

En este contexto, diremos que un emparejamiento μ es *estable bajo externalidades* si no existe ningún par de individuos que, estando separados en μ, estarían mejor en cualquier emparejamiento que los mantuviera juntos. Formalmente, μ es estable si no existen $m \in M$ y $w \in W$, con $w \neq \mu(m)$, tales que $\mu' P^m \mu$ y $\mu' P^w \mu$ para todo emparejamiento μ' tal que $w = \mu'(m)$.

(a) Fije $m \in M$. Para cada $w \in W$, sea $\mu_{m,w}$ el emparejamiento peor posicionado por m entre aquellos en los cuales es emparejado con w. Sea $\widehat{P}^m$ la preferencia estricta definida sobre W y caracterizada por: $w\widehat{P}^m w'$ si y solamente si $\mu_{m,w} P^m \mu_{m,w'}$. De forma análoga, para cada $w \in W$ defina la preferencia estricta $\widehat{P}^w$ sobre M. Demuestre que siempre existe un emparejamiento estable en el modelo $(M, W, (\widehat{P}^i)_{i \in M \cup W})$. Además, describa detalladamente como podemos encontrarlo.

El modelo $(M, W, (\widehat{P}^h)_{h \in M \cup W})$ está en el contexto clásico, pues $\widehat{P}^h$ es una preferencia sobre individuos (y no sobre emparejamientos, como es el caso de P^h). Por lo tanto, sigue del Teorema de Gale y Shapley que siempre podemos encontrar un emparejamiento estable utilizando el siguiente algoritmo, conocido como *aceptación diferida*:

Etapa 1

- Cada $m \in M$ le pide formar pareja al individuo en W que más valora.
- Cada $w \in W$ acepta la propuesta del pretendiente $m \in M$ que más valora.
- Si cada $m \in M$ está emparejado, el algoritmo termina.
  Caso contrario, pasamos a la siguiente etapa.

Etapa $k > 1$

- Los $m \in M$ que aún están solos le piden formar pareja al $w \in W$ que más valoran entre aquellos a los que aún no le ha hecho una propuesta.
- Cada $w \in W$ que recibe nuevas propuestas de emparejamiento acepta la del individuo que más valora entre aquellos que le han hecho propuestas en esta etapa y su actual pareja (caso exista).
- Si cada $m \in M$ está emparejado, el algoritmo termina.
  Caso contrario, pasamos a la siguiente etapa.

Como cada $m \in M$ hará a lo más $\#W$ propuestas, el algoritmo termina en un número finito de etapas. Además, si el emparejamiento $\overline{\mu}$ que se obtiene a través del algoritmo de aceptación diferida no fuera un emparejamiento estable, entonces (por definición) habría un par de individuos $(m, w) \in M \times W$ que preferirían estar juntos a mantener sus actuales parejas. Suponga que eso ocurre. Como $w\widehat{P}^m \mu(m)$, m le hizo una propuesta a w durante el proceso de aceptación diferida, la cual fue rechazada. Eso implica que $\overline{\mu}(w)\widehat{P}^w m$. Una contradicción. $\square$

(b) Demuestre que siempre existe un emparejamiento estable bajo externalidades.

Queremos probar que existe un emparejamiento *estable bajo externalidades* en el contexto del modelo original $(M, W, (P^h)_{h\in M\cup W})$. Evidentemente, no hace sentido aplicar el algoritmo de aceptación diferida en un contexto con externalidades, pues no es creíble que un par de individuos que quieren estar juntos sean capaces de controlar las características de las otras parejas que se forman simplemente por declararse su mutuo interés.

Antes de pensar en algoritmos sofisticados, apostaremos por $\overline{\mu}$. Intuitivamente, es un candidato natural: es estable en un contexto donde las preferencias se han obtenido a partir de $(P^h)_{h\in M\cup W}$ enfocando en los *peores* escenarios y estabilidad bajo externalidades requiere (por definición) que no existan pares de individuos que al desviar mejoren su situación *independiente* de lo que los otros hagan luego de su desvío.

Si $\overline{\mu}$ no es estable bajo externalidades, existen $(m, w) \in M \times W$ tales que $\overline{\mu}(m) \neq w$ y para todo emparejamiento μ' tal que $\mu'(m) = w$ tenemos que $\mu' P^m \overline{\mu}$ y $\mu' P^w \overline{\mu}$. En particular, como $\mu_{m,w}(m) = w$, obtenemos $\mu_{m,w} P^m \overline{\mu}$. Además, dado que $\mu_{m,\overline{\mu}(m)}$ es el peor emparejamiento para m entre aquellos en los cuales está emparejado con $\overline{\mu}(m)$, sigue que $\overline{\mu} P^m \mu_{m,\overline{\mu}(m)}$. Por lo tanto, $\mu_{m,w} P^m \mu_{m,\overline{\mu}(m)}$, lo cual implica que $w \widehat{P}^m \overline{\mu}(m)$. Argumentos análogos permiten mostrar que $m \widehat{P}^w \overline{m}$, donde $\overline{m}$ es la pareja de w en $\overline{\mu}$ (i.e., $\overline{\mu}(\overline{m}) = w$). Esto contradice la estabilidad de $\overline{\mu}$ en el modelo sin externalidades $(M, W, (\widehat{P}^h)_{h\in M\cup W})$. Así, $\overline{\mu}$ es *estable bajo externalidades*. $\square$