AYUDANTÍA II

Profesora: Adriana Piazza.
Ayudantes: Agustín Farías Lobo, Camila Carrasco.

Pregunta 1

Una relación de preferencias $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$ es débilmente monótona si y solamente si $x \geq y$ implica que $x \succsim y$.

a) Demuestre que si una relación de preferencias es monótona entonces es débilmente monótona.

Respuesta

Recuerde que $\succsim$ es monótona si para todo $x, y \in X$, se cumple que

$$x \gg y \implies x \succ y.$$

Suponga por contradicción que $\succsim$ es monótona pero que no es débilmente monótona. Suponga que $x \gg y$. En tal caso, puesto que $\succsim$ no es débilmente monótona, se tiene que $x \not\succsim y$, por lo que $y \succsim x$. Sin embargo, ello contradice que $x \succ y$.

Así, concluimos que si $\succsim$ es monótona entonces es débilmente monótona.

b) Demuestre que si $\succsim$ es transitiva, localmente no saciada, y débilmente monótona entonces es monótona.

Respuesta

Suponga que $\succsim$ es transitiva, localmente no saciada y débilmente monótona. Suponga que $x \gg y$. Luego, por la monotonía débil se tiene que $x \succsim y$.

Dado que $\succsim$ es localmente no saciada, para cada $y \in X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $z \in X$ tal que $||y - z|| \leq \varepsilon$ y que $z \succ y$. De esta manera, existe un $z \ll x$ tal que $z \succ y$ al escoger un ε lo suficientemente pequeño.

Dado que $x \gg z$, la monotonía débil asegura que $x \succsim z$. Dado que $x \succsim z$ y que $z \succ y$, la transitividad asegura que $x \succ y$. Luego, $x \gg y$ implica $x \succ y$, por lo que $\succsim$ es monótona.

Pregunta 2

Sea $\succsim$ una relación de preferencias racional y $u : X \to \mathbb{R}$ una función de utilidad que la representa. Muestre que $\succsim$ es convexa si y solo si u es cuasicóncava. Asimismo, muestre que $\succsim$ es estrictamente convexa si y solo si u es estrictamente cuasicóncava.

Respuesta

Suponga que $\succsim$ es convexa y que es representable por u. Sean x e y dos canastas de consumo tales que $x \succsim y$. Así, la convexidad de $\succsim$ asegura que

$$\lambda x + (1-\lambda)y \succsim y, \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Dado que u representa a $\succsim$, se tiene que

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq u(y) = \text{mín}\{u(x), u(y)\}.$$

Luego, hemos demostrado que si $\succsim$ es convexa, entonces u es cuasicóncava.

Suponga ahora que $\succsim$ es representable por u y que u es cuasicóncava. Suponga que $u(y) \geq u(x) \geq u(z)$. Luego, la cuasiconcavidad de u asegura que

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \text{mín}\{u(x), u(y)\} = u(x) \geq u(z).$$

Dado que u representa a $\succsim$, se tiene que $y \succsim z$, que $x \succsim z$ y que

$$\lambda x + (1-\lambda)y \succsim z.$$

Así, si u es cuasicóncava y representa a $\succsim$, entonces $\succsim$ es convexa.

Para la convexidad estricta y la cuasiconcavidad estricta el procedimiento es análogo. Suponga que $\succsim$ es estrictamente convexa y que es representable por u. Sean x e y dos canastas de consumo tales que $x \succsim y$. Así, la convexidad de $\succsim$ asegura que

$$\lambda x + (1-\lambda)y \succ y, \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Dado que u representa a $\succsim$, se tiene que

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) > u(y) = \text{mín}\{u(x), u(y)\}.$$

Luego, hemos demostrado que si $\succsim$ es estrictamente convexa, entonces u es estrictamente cuasicóncava.

Suponga ahora que $\succsim$ es representable por u y que u es estrictamente cuasicóncava. Suponga que $u(y) \geq u(x) \geq u(z)$. Luego, la cuasiconcavidad estricta de u asegura que

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \text{mín}\{u(x), u(y)\} = u(x) \geq u(z).$$

Dado que u representa a $\succsim$, se tiene que $y \succsim z$, que $x \succsim z$ y que

$$\lambda x + (1-\lambda)y \succ z.$$

Así, si u es estrictamente cuasicóncava y representa a $\succsim$, entonces $\succsim$ es estrictamente convexa.

Pregunta 3

Sea $\succsim$ una relación de preferencias racional y $u : X \to \mathbb{R}$ una función de utilidad que la representa. Demuestre o dé un contraejemplo de la siguiente afirmación:

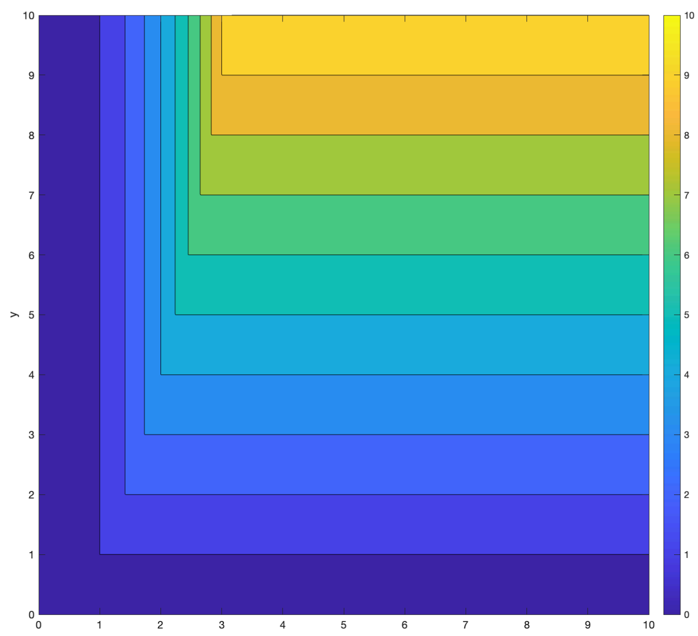
$$\succsim \text{ es convexa} \iff u \text{ es cóncava.}$$

Respuesta

Suponga una relación de preferencias definda sobre $X = \mathbb{R}^2_+$ que es representable por una función de utilidad

$$u(x,y) = \text{mín}\{x, y^2\}.$$

A continuación se presentan gráficamente la función de utilidad en un plano $x - y$:



Es posible notar que los conjuntos de conjunto superior son convexos. Luego, $\succsim$ es convexa.

Ahora bien, $u(x,y)$ no es cóncava. En efecto, suponga que $A = (100,5)$, $B = (100,10)$ y $C = (100,7{,}5)$. Por tanto $u(A) = 25$, $u(B) = 100$ y $u(C) = 7{,}5^2 = 56,25$. Dado que $C = 0{,}5A + 0,5B$ es una combinación convexa de A y B, y que $u(C) < 0,5 \cdot u(A) + 0,5 \cdot u(B)$, es posible concluir que u no es cóncava.

Sin embargo, ¡es posible mostrar que es cuasicóncava! Suponga que $u(A) \geq u(B)$. Una combinación convexa de A y B está dada por $C = (\lambda x_A + (1-\lambda)x_B, \lambda y_A + (1-\lambda)y_B)$.

Suponga que $x_A \leq y_A^2 \wedge x_B \leq y_B^2$, generando que $u(A) = x_A$ y que $u_B = x_B$. Por lo que $x_A \geq x_B$. Luego, $u(C) = \lambda x_A + (1-\lambda)x_B \geq x_B = \text{mín}\{\text{u(A), u(B)}\}$.

Suponga que $x_A \geq y_A^2 \wedge x_B \geq y_B^2$, generando que $u(A) = y_A^2$ y que $u(B) = y_B^2$. Por lo que $y_A^2 \geq y_B^2$ (recuerde que $X = \mathbb{R}^2$). Luego, $u(C) = (\lambda y_A + (1-\lambda)y_B)^2 \geq y_B^2 = \text{mín}\{u(A), u(B)\}$.

Suponga que $x_A \geq y_A^2 \wedge x_B \leq y_B^2$, generando que $u(A) = y_A^2$ y que $u(B) = x_B$. Por lo que $y_A^2 \geq x_B$ (recuerde que $X = \mathbb{R}^2$). Luego, $u(C) = \text{mín}\{\lambda x_A + (1-\lambda)x_B, \lambda y_A^2 + (1-\lambda)y_B^2\} \geq x_B = \text{mín}\{u(A), u(B)\}$.

Suponga que $x_A \leq y_A^2 \wedge x_B \geq y_B^2$, generando que $u(A) = x_A$ y que $u(B) = y_B^2$. Por lo que $x_A \geq y_B^2$. Luego, $u(C) = \text{mín}\{\lambda x_A + (1-\lambda)x_B, \lambda y_A^2 + (1-\lambda)y_B^2\} \geq y_B^2 = \text{mín}\{u(A), u(B)\}$.

Con ello, hemos demostrado que u es cuasicóncava.

Pregunta 4

Sea $\succsim$ una relación de preferencias definida en $\mathbb{R}_+^3$. Suponga que $\succsim$ puede ser representada por la siguiente función de utilidad

$$u(x,y,z) = -(x-y-z)^2.$$

a) ¿Es $\succsim$ estrictamente convexa?

Respuesta

Suponga $A = (2,1,1)$, $B = (4,2,2)$ y una combinación convexa entre las canastas anteriores $C = (3,1{,}5,1{,}5)$. Note que $u(A) = u(B) = u(C)$, por lo que $C \not\succ A \ \wedge \ C \not\succ B$. Así, $\succsim$ no es estrictamente convexa.

b) ¿Es $\succsim$ localmente no saciada?

Respuesta

Recuerde que una función de utilidad que representa preferencias localmente no saciadas no debe tener máximos globales en X. Sin embargo, el máximo valor que alcanza u es cero. Así, $\succsim$ no es localmente no saciada.