Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Departamento de Economía

Macroeconomía I
ENECO 630
Semestre Otoño 2020

Profesor: Luis Felipe Céspedes
Ayudantes: Martin Ferrari y Catalina Gómez

Tarea N° 3 (Pauta)

Entrega: 17 de Julio (11 am), 2020

Un Modelo RBC

Considere la siguiente economía: un consumidor representativo cuyas preferencias están representadas por

$$E_t \left\{ \sum_{j \geq 0} \beta^j \left[\log(C_{t+j}) + \frac{1}{1-\gamma_n}(1-N_{t+j})^{1-\gamma_n} \right] \right\}$$

donde C_{t+j} es el consumo en el período $t+j$ y $\gamma_n \geq 0$. La tecnología de producción está dada por

$$Y_t = A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha}$$

con $0 < \alpha < 1$. Y_t es el producto, A_t es el parámetro exógeno de la productividad del trabajo, K_t representa el capital y N_t es el trabajo. El parámetro A_t evoluciona de acuerdo a:

$$\frac{A_{t+1}}{\overline{A}_{t+1}} = \left(\frac{A_t}{\overline{A}_t} \right)^{\theta} \exp(\varepsilon_t)$$

con $0 < \theta < 1$, y donde ε_t es un shock i.i.d. $\overline{A}_t$ evoluciona de acuerdo a:

$$\overline{A}_{t+1} = (1+g)\overline{A}_t$$

La restricción presupuestaria de esta economía es:

$$K_{t+1} = Y_t - C_t + (1-\delta)K_t$$

donde $0 < \delta < 1$ es la tasa de depreciación del capital.

(a) Derive las dos condiciones de optimalidad para el problema de un planificador central que decide sobre C_t, K_{t+1} y N_t cada período para maximizar la utilidad del consumidor, sujeto a la tecnología y la restricción presupuestaria.

Respuesta:

Las condiciones de primer orden serán:

$$\{C_t\}: \quad \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \tag{1}$$

$$\{N_t\}: \quad -(1-N_t)^{-\gamma_n} + \lambda_t \alpha A_t^{\alpha} \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{1-\alpha} = 0 \tag{2}$$

$$\{K_{t+1}\}: \quad -\lambda_t + E_t \left\{ \lambda_{t+1} \left[(1-\alpha) A_t^{\alpha} \left(\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}}\right)^{-\alpha} + (1-\delta) \right] \right\} = 0 \tag{3}$$

Definimos:

$$R_t = (1-\alpha) A_t^{\alpha} \left(\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}}\right)^{-\alpha} + (1-\delta) \tag{4}$$

$$W_t = \alpha A_t^{\alpha} \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{1-\alpha} \tag{5}$$

Combinando las CPOS y las definiciones anteriores, tendremos:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left\{ \frac{1}{C_{t+1}} R_{t+1} \right\} \tag{6}$$

$$C_t (1-N_t)^{-\gamma_n} = W_t \tag{7}$$

La ecuación (6) es la ecuación de sustitución intertemporal. La ecuación (7) es la sustitución intratemporal entre ocio y consumo.

(b) Muestre que la solución obtenida en (a) será igual a la obtenida descentralizadamente en un equilibrio competitivo, donde un consumidor representativo decide sobre C_t, K_{t+1} y N_t para resolver

$$\max E_t \left\{ \sum_{j \geq 0} \beta^j \left[\log(C_{t+j}) + \frac{1}{1-\gamma_n} (1-N_{t+j})^{1-\gamma_n} \right] \right\}$$

$$\text{s.t} \quad K_{t+1} = R_t K_t + W_t N_t - C_t$$

Mientras que una firma representativa decide sobre K_t y N_t para resolver

$$\begin{aligned} \max \quad & Y_t - (R_t - (1-\delta)) K_t - W_t N_t \\ \text{s.t} \quad & Y_t = A_t^{\alpha} N_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

donde R_t es la tasa de interés y W_t es el salario.

Hint: No es necesario que resuelva el problema en ambos casos, basta con mostrar que las condiciones que determinan el equilibrio son idénticas.

Respuesta:

En este caso, las condiciones de primer orden del consumidor serán:

$$\begin{aligned}
\{C_t\}: &\quad \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 &(8)\\
\{N_t\}: &\quad -(1-N_t)^{-\gamma_n} + \lambda_t W_t = 0 &(9)\\
\{K_{t+1}\}: &\quad -\lambda_t + E_t \lambda_{t+1} R_{t+1} = 0 &(10)
\end{aligned}$$

Entonces, las condiciones de primer orden serán:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_t} &= \beta E_t \left\{ \frac{1}{C_{t+1}} R_{t+1} \right\} &(11)\\
C_t (1-N_t)^{-\gamma_n} &= W_t &(12)
\end{aligned}$$

Por otro lado, del problema de optimización de la firma, las condiciones de primer orden serán:

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha)(A_t N_t)^{\alpha} K_t^{-\alpha} - R_t + (1-\delta) = 0 &(13)\\
&\alpha A_t^{\alpha} N_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha} - W_t = 0 &(14)
\end{aligned}$$

En este caso, llegaremos a

$$\begin{aligned}
R_t &= (1-\alpha) A_t^{\alpha} \left(\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} \right)^{-\alpha} + (1-\delta) &(15)\\
W_t &= \alpha A_t^{\alpha} \left(\frac{K_t}{N_t} \right)^{1-\alpha} &(16)
\end{aligned}$$

que es idéntico al caso centralizado.

(c) Encuentre expresiones para los valores de estado estacionario de $\frac{K}{Y}, \frac{C}{Y}, R, \frac{K}{AN}, N$.

Respuesta: De la ecuación de Euler, tendremos

$$\frac{C'}{C} = \beta R$$

donde $\frac{C'}{C} = (1+g)$. De esto, se obtiene:

$$R = \frac{G}{\beta}$$

Luego, de la ecuación

$$R = (1-\alpha) A^{\alpha} \left(\frac{K}{N} \right)^{-\alpha} + (1-\delta)$$

donde se cumple la equivalencia:

$$R = (1-\alpha)\frac{Y}{K} + (1-\delta)$$

Por lo que obtendremos:

$$\frac{K}{Y} = \frac{\beta(1-\alpha)}{G - \beta(1-\delta)}$$

Por otro lado, en estado estacionario se debe cumplir:

$$\delta K = Y - C$$

diviendo por Y y usando la forma de K/Y, se obtendrá:

$$\frac{C}{Y} = 1 - \delta \frac{\beta(1-\alpha)}{G - \beta(1-\delta)}$$

Luego, de K/Y podemos desarrollar la expresión:

$$\frac{K}{Y} \cdot \frac{AN}{AN} = \frac{K}{AN} \cdot \frac{AN}{(AN)^{\alpha} K^{1-\alpha}}$$

De lo anterior se concluye que

$$\frac{K}{AN} = \left(\frac{K}{Y}\right)^{1/\alpha}$$

De esto se obtiene

$$\frac{K}{AN} = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{G - \beta(1-\delta)}\right]^{1/\alpha}$$

Por último, N se determina de la ecuación de sustitución intratemporal.

$$C(1-N)^{-\gamma_n} = W_t = \alpha \frac{Y}{N}$$

De esto, tendremos que:

$$N(1-N)^{-\gamma_n} = \alpha \left(\frac{C}{Y}\right)^{-1}$$

Por lo que la condición para N en estado estacionario será:

$$N(1-N)^{-\gamma_n} = \alpha \left[1 - \delta \frac{\beta(1-\alpha)}{G - \beta(1-\delta)}\right]^{-1}$$

(d) Realice una aproximación log-lineal a las condiciones de optimalidad y las restricciones, y encuentre expresiones para k_{t+1}, c_t, n_t, y_t y r_t (donde las variables en minúscula representan el logaritmo de las variables originales, i.e. $x_t = \log X_t$). **Respuesta:**

Log-linealizando las restricciones tendremos:

- **Función de producción:**

  $$y_t = \alpha a_t + \alpha n_t + (1-\alpha) k_t$$

  Esto también se puede expresarse en términos de desviaciones c/r al EE:

  $$\tilde{y}_t = \alpha \tilde{a}_t + \alpha \tilde{n}_t + (1-\alpha) \tilde{k}_t$$

- **Restricción presupuestaria:**
  La RP describe la evolución del capital:

  $$K_{t+1} = Y_t - C_t + (1-\delta) K_t$$

Dado que estamos en un caso con crecimiento, en estado estacionario se cumplirá

$$\frac{Y}{K} = \frac{C}{K} + \delta + g$$

La RP puede trabajarse a partir de las desviaciones c/r al EE. En este caso, se tendrá:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{Y}{KG}\tilde{y}_t - \frac{C}{KG}\tilde{c}_t - \frac{1-\delta}{G}\tilde{k}_t$$

donde $\tilde{x}_t = \log(X_t) - \log(X)$ es la desviación porcentual respecto al estado estacionario. Donde todos los parámetros son valores conocidos (derivados en EE).

- **Ecuación de Euler**

  De la ec. de Euler
  $$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left\{ R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} \right\}$$

  Ésta puede aproximarse mediante desviaciones al estado estacionario. En este caso, debemos recordar que en EE se cumplirá $R\beta = G$. A partir de esto se tendrá

  $$\tilde{c}_t = G \cdot E_t\{\tilde{c}_{t+1} - \tilde{r}_{t+1}\}$$

  La aproximación para $\tilde{r}_{t+1}$ será:

  $$\tilde{r}_{t+1} \approx \frac{\beta}{G}(1-\alpha)\frac{Y}{K}[\alpha(\tilde{a}_{t+1} + \tilde{n}_{t+1} + (1-\alpha)\tilde{k}_{t+1})]$$

- **Equilibrio en el mercado del trabajo:** A partir de la ecuación para el M$^{\text{o}}$ del trabajo, tendremos:

  $$w_t = \ln\alpha + y_t - n_t$$

  Por otro lado, se tendrá:

  $$c_t - \gamma_n \phi(n_t) = w_t$$

  donde $\phi(n_t) = \ln(1 - \exp(n_t))$. Se cumplirá:

  $$c_t = \ln\alpha + y_t + \gamma_n\phi(n_t) - n_t$$

- **Evolución de la productividad**:

  Log-linealizando la productividad tendremos:

  $$a_{t+1} - \bar{a}_{t+1} = \theta(a_t - \bar{a}_t) + \varepsilon_t$$

  Y donde se cumplirá que:
  $$\bar{a}_{t+1} = g + \bar{a}_t$$

  Es decir, este es un proceso con tendencia.

  De esto tendremos:
  $$a_{t+1} = g + \theta a_t + (1-\theta)\bar{a}_t + \varepsilon_t$$

  Podemos sacar la primera diferencia para poder tener un proceso estacionario:

  $$\Delta a_{t+1} = (1-\theta)g + \theta\Delta a_t + +u_t$$

(e) Asuma los siguiente valores para los parámetros: $r = 0.015, g = 0.005, \delta = 0.025, \alpha = 0.667$. Calcule numéricamente el impacto dinámico de un cambio en una unidad de a_t sobre las 5 variables endógenas para los siguientes 4 casos[1]:

(i) $\theta = 0.5$, $\sigma_n = 1$

(ii) $\theta = 0.5$, $\sigma_n = \infty$

(iii) $\theta = 0.95$, $\sigma_n = 1$

(iv) $\theta = 0.95$, $\sigma_n = \infty$

Compare la evolución del producto con la evolución del parámetro de productividad en el tiempo. ¿Cómo depende la respuesta del producto de la elasticidad de la oferta de trabajo? ¿Cómo depende la respuesta del empleo de la persistencia del shock tecnológico?

[1]Donde se cumple que $\sigma_n = \frac{1}{\gamma_n}$

Nota sobre Log-Linealización

Los modelos RBC presentan ecuaciones no lineales en equilibrio, lo que dificulta su análisis y programación. Una solución para esto es realizar una log-linealización en torno al estado estacionario, donde conocemos el comportamiento de las variables.
Para explicar la intuición de esta solución, suponga que las condiciones de optimalidad de un problema pueden escribirse como

$$f(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

donde $\bar{x},\bar{y}$ son los valores de estado estacionario de x e y. Una condición de optimalidad puede ser, por ejemplo, la ecuación de Euler o el cumplimiento de la restricción presupuestaria.

Si diferenciamos implícitamente la expresión anterior, evaluando en el óptimo debe cumplirse:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \cdot dy = 0 \tag{17}$$

Alternativamente,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) \cdot \bar{x}\frac{dx}{\bar{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \cdot \bar{y}\frac{dy}{\bar{y}} = 0 \tag{18}$$

Donde podemos hacer la aproximación

$$\frac{dy}{\bar{y}} = \frac{y-\bar{y}}{\bar{y}} \approx \log\left(1+\frac{y-\bar{y}}{\bar{y}}\right) = \log\left(\frac{y}{\bar{y}}\right) \equiv \tilde{y}$$

El argumento $\tilde{y}$ es la **desviación porcentual con respecto al estado estacionario**. Esta caracterización nos permite expresar valores cercanos al estado estacionario como una función de este. De esta forma, podemos reescribir (18) incoporando desviaciones, de forma:

$$\tilde{x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) \cdot \bar{x}\right] + \tilde{y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \cdot \bar{y}\right] \approx 0 \tag{19}$$

La expresión anterior es **lineal en las desviaciones**, i.e. en $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$. Esto es una forma sencilla y más conveniente para trabajar.

Veamos 2 ejemplos para graficar esto:

- **Restricción Presupuestaria:** La restricción presupuestaria de un problema cualquiera es

  $$K_{t+1} - Y_t + C_t - (1-\delta)K_t = 0$$

  . Esta restricción se cumple en el óptimo y podemos linealizarla. Tenemos 4 variables: K_{t+1}, Y_t, C_t y K_t, denotaremos los valores de estado estacionario como $\bar{K}, \bar{C}$ e $\bar{Y}$. De esta forma, tenemos una función $f(K_{t+1}, Y_t, C_t, K_t)$ donde se cumple que $f(\bar{K}, \bar{C}, \bar{Y}, \bar{K}) = 0$. Aplicando la fórmula (19) tendremos:

  $$\bar{K}\tilde{k}_{t+1} - \bar{Y}\tilde{y}_t + \bar{C}\tilde{c}_t - (1-\delta)\bar{K}\tilde{k}_t \approx 0$$

  Luego, despejando tendremos una forma log-linealizada para $\tilde{k}_{t+1}$:

  $$\tilde{k}_{t+1} \approx \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}\tilde{y}_t - \frac{\bar{C}}{\bar{K}}\tilde{c}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t$$

  Donde se tiene una función **lineal en las desviaciones**. Los valores de $\bar{Y}/\bar{K}$ y $\bar{C}/\bar{K}$ son conocidos, ya que se obtienen a partir de las condiciones de estado estacionario.

- **Ecuación de Euler:** Un caso más interesante es la ecuación de Euler. Analizaremos el caso general para una función CRRA con parámetro σ. La ecuación de Euler debe cumplir con la restricción[2]

$$\beta E_t[C_{t+1}^{-\sigma} R_{t+1}] - C_t^{-\sigma} = 0$$

En este caso, tenemos 3 variables: C_t, C_{t+1} y R_{t+1}, cuyos valores de estado estacionario son $\bar{C}, \bar{R}$. Es decir, tenemos una función $f(C_t, C_{t+1}, R_{t+1})$ que cumple con $f(\bar{C}, \bar{C}, \bar{R}) = 0$.

Podemos aplicar nuevamente la fórmula (19):

$$\beta E_t[\sigma \bar{C}^{-\sigma-1} \bar{C} \cdot \tilde{c}_{t+1} \bar{R} + \bar{C}^{-\sigma} \bar{R} \tilde{r}_{t+1}] + \sigma \bar{C}^{-\sigma-1} \bar{C} \cdot \tilde{c}_t \approx 0$$

Usando que en estado estacionario se cumple $\beta \bar{R} = 1$ ($= G$ en un caso con crecimiento) la expresión anterior puede simplificarse (notar que el valor $\bar{C}$ se elimina):

$$E_t[\sigma(\tilde{c}_t - \tilde{c}_{t+1}) + \tilde{r}_{t+1}] \approx 0$$

Ahora tenemos que encontrar una aproximación para $\tilde{r}_{t+1}$. Recordemos que la tasa de interés se obtiene igualando a la productividad marginal del capital, lo que se resumen en la condición de optimalidad:

$$R_{t+1} = (1-\alpha)\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} + (1-\delta)$$

Dejando todo en el lado izquierdo para igualar a 0, tendremos:

$$R_{t+1} - (1-\alpha)\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} - (1-\delta) = 0$$

Tenemos 3 variables: R_{t+1}, Y_{t+1} y K_{t+1} cuyos valores de EE son $\bar{R}, \bar{Y}$ y $\bar{K}$. Aplicando la fórmula (19):

$$\bar{R}\tilde{r}_{t+1} - (1-\alpha)\frac{\bar{Y}}{\bar{K}}\tilde{y}_{t+1} + (1-\alpha)\frac{\bar{Y}}{\bar{K}^2}(\bar{K})\tilde{k}_{t+1} \approx 0$$

Trabajando la expresión, y recordando que $R^* = \beta^{-1}$:

$$\tilde{r}_{t+1} = \beta(1-\alpha)\frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(\tilde{y}_{t+1} - \tilde{k}_{t+1})$$

[2] Notar que analizamos la restricción igualando a 0. Esto es simplemente un aspecto formal.