Tarea 2
Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Ignacio Fuentes y Hriday Karnani

Otoño 2024

Entrega en grupos de máximo 2 estudiantes

1. Considere una consumidora que consume el bien X_1 y el bien compuesto Y. Su renta es $w = 40$, el precio del bien compuesto es $p_y = 1$ (como siempre). El consumo del bien X_1 está subsidiado, hasta $\hat{x} = 10$. Existen 3 esquemas de subsidio posibles:

   (i) El precio del bien es $p_1 = 1$ si el consumo es $x_1 < \hat{x}$. Si $x_1 \geq \hat{x}$, el subsidio se pierde y todo el consumo se paga a precio $p_1' = 2$.

   (ii) El precio del bien es $p_1 = 1$ si el consumo es $x_1 \leq \hat{x}$. Si $x_1 > \hat{x}$, el subsidio se pierde y todo el consumo se paga a precio $p_1' = 2$.

   (iii) El precio del bien es $p_1 = 1$ si el consumo es $x_1 \leq \hat{x}$. Si $x_1 > \hat{x}$, todo el consumo estrictamente por encima de ese nivel se paga a precio $p_1' = 2$.

   a) Grafique el conjunto presupuestario para cada uno de los 3 subsidios.

   b) Si sabe que la preferencia de la consumidora es continua y monótona, ¿qué puede decir de la existencia de solución al problema de la consumidora en cada caso?

   c) Si sabe que la preferencia de la consumidora es continua, monótona y convexa ¿qué puede decir de la unicidad de solución al problema de la consumidora en cada caso?

2. Demuestra la siguiente proposición:

   Si las preferencias son l.n.s. y la demanda Marshaliana es una función derivable con respecto a precios y riqueza:

   a) $\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_i(p,\omega)}{\partial p_j} + \omega \frac{\partial x_i(p,\omega)}{\partial \omega} = 0 \quad \forall i = 1, ..., n \quad \forall p, \omega$ (Fórmula de Euler)

   b) $\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j(p,\omega)}{\partial p_i} + x_i(p,\omega) = 0 \quad \forall i = 1, ..., n \quad \forall p, \omega$ (Agregación de Cournot)

   c) $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p,\omega)}{\partial \omega} = 1 \quad \forall p, \omega$ (Agregación de Engel)

3. A partir de la proposición anterior, demostrar:

   a) $\sum_{k=1}^{L} \epsilon_{\ell,k}(p,\omega) + \epsilon_{\ell,\omega}(p,\omega) = 0$ para $\ell = 1,..L$

   b) $\sum_{\ell=1}^{L} b_\ell(p,\omega)\epsilon_{\ell,k}(p,\omega) + b_k(p,\omega) = 0$

   c) $\sum_{\ell=1}^{L} b_\ell(p,\omega)\epsilon_{\ell,w}(p,\omega) = 1$

   donde

   - $\epsilon_{\ell k}$ es la elasticidad-precio del bien ℓ (respecto al precio p_k).
   - $\epsilon_{\ell\omega}$ es la elasticidad-renta del bien ℓ.
   - $b_\ell(p,w) = p_\ell x_\ell(p,w)/w$ es la fracción del presupuesto asignada al consumo del bien ℓ dados precios p y renta w.

4. Suponga que un consumidor tiene la función de gasto:

$$e(p_1,p_2,u) = \left(\frac{p_1}{3} + 2\frac{p_2}{3} + (p_1p_2)^{\frac{1}{2}}\right) u.$$

   Encuentre las funciones de demanda compensadas (o Hicksianas) y Marshallianas y la función de utilidad indirecta.

5. Calcule la matriz de sustitución de Slutsky para el caso de 3 bienes y preferencias cuasilineales, cuando la función de utilidad es de la forma $u(x_1,x_2,x_3) = x_1 + \ln(x_2x_3)$. (Resuelva en el rango en que la renta w y el precio del bien 1 cumplen la condición $w > 2p_1$).

   Verifique que los términos de la diagonal son negativos y que la matriz es semi-definida negativa y simétrica. Identifique si existen bienes complementarios y sustitutos.

6. Un consumidor que maximiza utilidades, tiene preferencias estrictamente convexas y estrictamente monótonas en $X = I\!R_+^2$. Asuma que $p = (1,1)$. El consumidor tiene una renta anual de w que consume enteramente cada año. Su consumo actual es $(x_1^*, x_2^*) \gg 0$. Le ofrecen una beca de monto g_1 para el año que viene (adicional a su renta w) con la condición de que la beca debe ser gastada únicamente en el bien 1. Sabemos además que $g_1 \leq x_1^*$ y que el consumidor puede decidir no aceptar la beca.

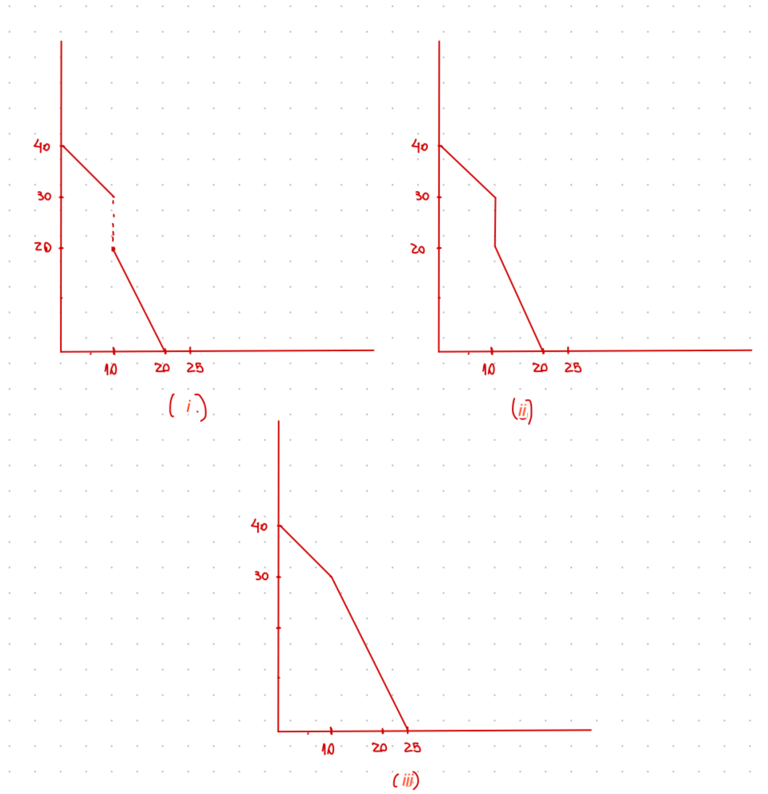
   a) Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (y proporcione una demostración que justifique su respuesta): "si el bien 1 es normal, entonces el efecto de la beca en el consumo del año que viene debe ser el mismo que el efecto que tendría una beca sin condiciones de igual monto." ¿Le conviene aceptar la beca?

   b) Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (y proporcione una demostración que justifique su respuesta): "si el bien 1 es inferior para todos los niveles de ingreso $w > x_1^* + x_2^*$, entonces el efecto de la beca en el consumo debe ser el mismo que el efecto que tendría una beca sin condiciones de igual monto." ¿Le conviene aceptar la beca?

   c) Suponga que el consumidor tiene preferencias homotéticas y su consumo sin beca es $x^* = (12,36)$. Grafique el consumo del bien 1 (x_1^*) como función del monto de la beca g_1. ¿Para qué valor de g_1 la gráfica tiene un punto de no diferenciabilidad?

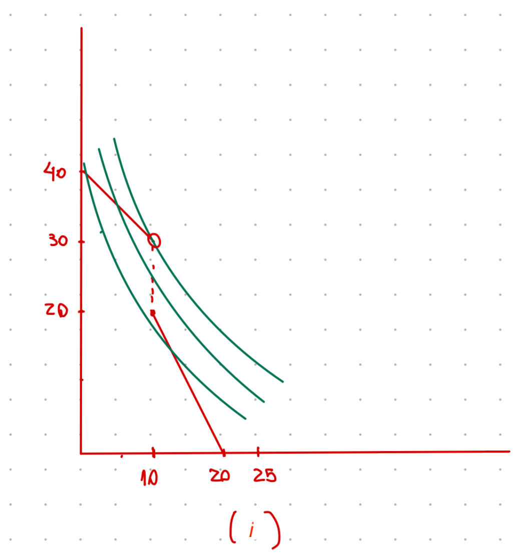
Pregunta 1.

(a)



(b) Como la preferencia es continua, sabemos que existe una función de utilidad continua que la representa. En los casos (ii) y (iii) la existencia de solución está asegurada por el Teorema de Weierstrass, dado que el conjunto presupuestario es compacto y la función objetivo es continua.

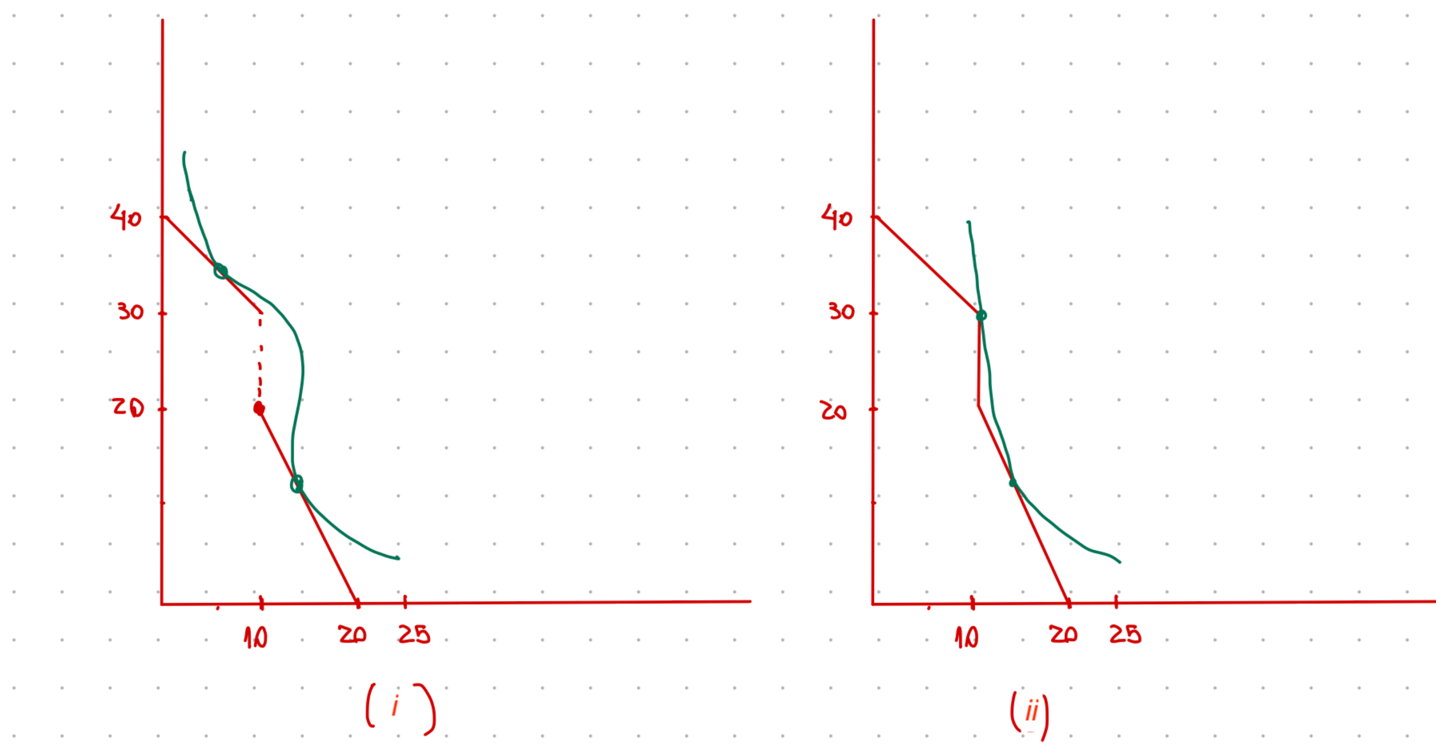
En el caso (i), no se puede asegurar la existencia de solución, pues el conjunto presupuestario no es cerrado. La siguiente figura, ilustra un caso donde no existe solución.



(c) Para el subsidio detallado en (iii), la solución es única pues el conjunto presupuestario es convexo.

Para el caso (i), la solución también es única, pero se necesita una justificación más sofisticada. Observe el panel izquierdo de la figura siguiente. Si hay 2 soluciones al problema del/la consumidor/a, la derivada de la curva de indiferencia debe ser igual al precio relativo en las canastas óptimas. Sin embargo, en la región donde $x_1 < 10$ el precio relativo es $p_1/p_2 = 1$, en la región donde $x_1 \geq 10$ el precio relativo es $p_1'/p_2 = 2$. Como la preferencia es convexa, su derivada debe ser decreciente en valor absoluto, y no puede ser igual a 1 en la región donde $x_1 < 10$ e igual a 2 en la región donde $x \geq 10$.

Para el caso (ii), la solución puede **no** ser única. En el panel derecho de la figura, se ilustra un caso donde la solución no es única. La diferencia con el caso (i) es que la canasta $(10, 30)$ pertenece al conjunto presupuestario y, si esta canasta fuese óptima, no es necesario tener la condición de optimalidad de que la derivada de la curva de indiferencia sea igual al precio relativo (esto porque el conjunto presupuestario no es derivable en el punto $(10, 30)$).
Alternativamente, si las preferencias fuesen de tipo Leontieff (por ejemplo $u(x_1, x_2) = \text{mín}\{2x_1, x_2\}$) todo el segmento entre las canastas $(10, 20)$ y $(10, 30)$ es óptimo.



Pregunta 2.

Con preferencias l.n.s. y demanda marshalliana derivable se cumple

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w} x_j(p,w) \quad \forall i, j = 1, ..., n \ \forall p, w$$

a)

$$\begin{aligned} h_i(\lambda p, w) &= h_i(p,w) \\ \frac{\partial h_i(\lambda p, w)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial h_i(p,w)}{\partial \lambda} \\ \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial h_i(\lambda p, w)}{\partial p_j} p_j &= 0 \\ \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial h_i(p, w)}{\partial p_j} p_j &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_j \frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} &= p_j \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w} p_j x_j(p,w) \\ \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} &= \sum_{j=1}^{n} (p_j \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w} p_j x_j(p,w)) \\ 0 &= \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j(p,w) \\ 0 &= \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w} w \quad \forall i = 1, ..., n \end{aligned}$$

b)

$$D_p h(p,w) = D_p' h(p,w)$$
$$D_p h(p,w) p = D_p' h(p,w) p$$
$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_j} \\ \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_2(p,u)}{\partial p_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_n(p,u)}{\partial p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_1} \\ \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_1} \\ \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

$$p_j \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} = p_j \frac{\partial x_j(p,w)}{\partial p_i} + p_j \frac{\partial x_j(p,w)}{\partial w} x_i(p,w)$$
$$\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j(p,w)}{\partial p_i} + x_i(p,w) \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j(p,w)}{\partial w}$$
$$0 = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j(p,w)}{\partial p_i} + x_i(p,w) \quad \forall i = 1, ..., n$$

c)

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i(p,w) = w$$
$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n p_i x_i(p,w)}{\partial w} = \frac{\partial w}{\partial w}$$
$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w} = 1$$

Pregunta 3.

a)

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} w \quad \forall l = 1, ..., L \\
0 &= \frac{1}{x_l(p,w)} \sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{1}{x_l(p,w)} \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} w \\
0 &= \sum_{k=1}^{L} \epsilon_{l,k}(p,w) + \epsilon_{l,w}(p,w)
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + x_k(p,w) \quad \forall k = 1, ..., L \\
0 &= \frac{p_k}{w} \sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{p_k}{w} x_k(p,w) \\
0 &= \sum_{l=1}^{L} \frac{x_l}{x_l} \frac{p_k}{w} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + b_k(p,w) \\
0 &= \sum_{l=1}^{L} b_l(p,w) \epsilon_{l,k}(p,w) + b_k(p,w)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} &= 1 \\
\sum_{l=1}^{L} \frac{w x_l(p,w)}{w x_l(p,w)} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} &= 1 \\
\sum_{l=1}^{L} b_l(p,w) \epsilon_{l,w}(p,w) &= 1
\end{aligned}
$$

Pregunta 4.

$$
\begin{aligned}
h_1(p,u) &= \frac{\partial}{\partial p_1}\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\Big)u \\
h_2(p,u) &= \frac{\partial}{\partial p_2}\Big(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\Big)u \\
e(p,v(p,w)) &= w \Longrightarrow v(p,w) = \frac{w}{\frac{p_1}{3}+\frac{2p_2}{3}+\sqrt{p_1p_2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(p,w) = h(p,v(p,u)) \quad \Rightarrow \quad x_1(p,w) &= \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}}{\frac{p_1}{3}+\frac{2p_2}{3}+\sqrt{p_1p_2}}w \\
x_2(p,w) &= \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}}{\frac{p_1}{3}+\frac{2p_2}{3}+\sqrt{p_1p_2}}w
\end{aligned}
$$

La demanda Marshalliana también puede obtenerse a partir de $v(p,w)$ utilizando la Identidad de Roy.

Pregunta 5.

$$\begin{aligned}
\max \quad & u(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \ln(x_2 x_3) \\
\text{s.a.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = w \\
& x_2 = x_3 \frac{p_3}{p_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + \ln\left(\frac{w - p_1 x_1}{2p_2} \frac{w - p_1 x_1}{2p_3}\right) \\
\text{c.p.o.} \quad & \frac{\partial[x_1 + \ln(\frac{w-p_1x_1}{2p_2} \frac{w-p_1x_1}{2p_3})]}{\partial x_1} = 0 = 1 - \frac{2p_1}{w - p_1 x_1} \\
& x_1 = \frac{w - 2p_1}{p_1} \\
& x_2 = \frac{p_1}{p_2} \\
& x_3 = \frac{p_1}{p_3}
\end{aligned}$$

$$S(p, w) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{p_1} & \frac{1}{p_2} & \frac{1}{p_3} \\ \frac{1}{p_2} & -\frac{p_1}{p_2^2} & 0 \\ \frac{1}{p_3} & 0 & -\frac{p_1}{p_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
y'Sy &= -\frac{2y_1^2}{p_1} + \frac{y_1 y_2}{p_2} + \frac{y_1 y_3}{p_3} + \frac{y_1 y_2}{p_2} - \frac{p_1 y_2^2}{p_2^2} + \frac{y_1 y_3}{p_3} - \frac{p_1 y_3^2}{p_3^2} \\
&= \frac{-2p_2^2 p_3^2 y_1^2 + 2p_1 p_2 p_3^2 y_1 y_2 + 2p_1 p_2^2 p_3 y_1 y_3 - p_1^2 p_3^2 y_2^2 - p_1^2 p_2^2 y_3^2}{p_1 p_2^2 p_3^2} \\
&= \frac{-p_2^2 p_3^2 y_1^2 + 2p_1 p_2 p_3^2 y_1 y_2 - p_1^2 p_3^2 y_2^2 - p_2^2 p_3^2 y_1^2 + 2p_1 p_2^2 p_3 y_1 y_3 - p_1^2 p_2^2 y_3^2}{p_1 p_2^2 p_3^2} \\
&= \frac{-(p_2 p_3 y_1 - p_1 p_3 y_2)^2 - (p_2 p_3 y_1 - p_1 p_2 y_3)^2}{p_1 p_2^2 p_3^2} \\
y'Sy &< 0 \quad \forall y \neq 0_3
\end{aligned}$$

Se puede observar que $S(p, w)$ es simétrica, los elementos en su diagonal son negativos y la matriz es semidefinida negativa. Por su parte, debido a que $\frac{\partial h_2}{\partial p_3} = \frac{\partial h_3}{\partial p_2} = 0$, estos bienes no son ni sustitutos ni complementos o bien tienen cierto grado de complementariedad y de sustitución. Mientras que x_1 es sustituto de ambos, pues su demanda compensada es creciente en los precios de ambos precios. Esto debido a la cuasilinealidad de la utilidad en este bien. Que nos permite sustituir el consumo de los bienes 2 y 3 perfectamente con consumo en x_1.

Pregunta 6.

(a) Verdadero. Con la beca, el consumidor maximizará $u(x_1, x_2)$ sujeto a $x_1 + x_2 \leq m + g_1$ y $x_1 \geq g_1$. Sabemos que cuando maximiza su utilidad sujeta a $x_1 + x_2 \leq m$, elige $x_1^* \geq g_1$. Como x_1 es un bien normal, la cantidad del bien 1 que elegirá si se le da una beca sin restricciones de g_1 es algún número $x_1' > x_1^* \geq g_1$. Dado que esta elección satisface la restricción $x_1' \geq g_1$, también es la elección que haría si se viera obligado a gastar g_1 en el bien 1.

(b) FALSO. Supongamos por ejemplo que $g_1 = x_1$. Entonces si consigue una beca sin restricciones, dado que el bien 1 es inferior, elegirá reducir su consumo a menos de $x_1 = g_1$. Pero con la beca restringida, debe consumir al menos g_1 unidades del bien 1.
Sí aceptará la beca, ya que con ella siempre puede consumir al menos la misma cantidad de ambos bienes que sin la beca.

(c) Si obtuviera una beca sin restricciones de g_1, gastaría $(48 + g_1)/4$ en el bien 1. Esto es exactamente lo que gastaría si $g_1 \leq (48 + g_1)/4$. Pero si $g_1 > (48 + g_1)/4$, gastará g_1 en el bien 1. Por lo tanto, la curva tiene pendiente $1/4$ si $g_1 < 16$ y pendiente 1 si $g_1 > 16$. El punto de inflexión está en $g_1 = 16$.