Microeconomía I
Ayudantía 6

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

Pregunta 1

a) Muestre que si un individuo tiene una función de utilidad Bernoulli cuadrática de la forma:

$$u(\cdot) = \beta x^2 + \gamma x$$

Entonces la utilidad derivada de una distribución es determinada por la media y la varianza de la distribución y de hecho solo de estos momentos. Adicionalmente, Qué valores debe tomar el número β y x para asegurar que $u(\cdot)$ sea creciente y cóncava?.

Solución:
Primero, denote por $F(\cdot)$ la función de distribución acumulada (CDF), entonces:

$$\begin{aligned} U(F) &= \int u(x)\mathrm{d}F(x) \\ &= \int (\beta x^2 + \gamma x)\mathrm{d}F(x) \\ &= \beta \int x^2 \mathrm{d}F(x) + \gamma \int x \mathrm{d}F(x) \\ &= \beta E(x^2) + \gamma E(x) \end{aligned}$$

Utilizando la relación $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \implies E(x^2) = [E(x)]^2 + V(x)$ tenemos que:

$$U(F) = \beta[E(x)]^2 + \beta V(x) + \gamma E(x)$$

Donde $E(\cdot)$ denota la esperanza matemática bajo la distribución F.
Adicionalmente, para que $u(\cdot)$ sea creciente y cóncava tiene que cumplir que:

$$u'(x) \geq 0 \iff 2\beta x + \gamma \geq 0 \text{ } y,$$
$$u''(x) \leq 0 \iff 2\beta \leq 0$$

Entonces, se debe cumplir que:

$$\beta \leq 0 \quad y \quad x \leq -\gamma/2\beta$$

b) Suponga que una función de utilidad $U(\cdot)$ sobre las distribuciones es dada por:

$$U(F) = (\text{media de F}) - r(\text{varianza de F}), \quad \text{con } r > 0$$

Muestre que (a menos que el conjunto de posibles distribuciones sea bastante restringido) $U(\cdot)$ no puede ser compatible con ninguna función de utilidad Bernoulli. Dé un ejemplo de 2 loterias L y L' sobre la misma cantidad de dinero x' y $x'' > x'$, tal que L de una mayor probabilidad que L' a x'' y pese a esto bajo $U(\cdot)$, L' es preferida a L.

Solución:
Haremos la demostración por contradicción. Entonces, suponga que existe una función de utilidad Bernoulli $u(\cdot)$ *tal que* $U(F) = \int u(x)\mathrm{d}F(x)$, ***para toda distribución*** $F(\cdot)$. *Denote* x *e* y *2 montos de dinero,* $G(\cdot)$ *la distribución que asigna probabilidad 1 a* x *y* $H(\cdot)$ *la distribucion que asigna probabilidad 1 a* y. *Luego,*

$$\begin{aligned} u(x) = U(G) = (\textit{media de } G) - r(\textit{varianza de } G) = x - 0 = x \\ u(y) = U(H) = (\textit{media de } H) - r(\textit{varianza de } H) = y - 0 = y \end{aligned}$$

Así, $x \geq y \iff u(x) \geq u(y)$, *esto es,* $u(\cdot)$ *es estrictamente creciente. Note que hemos demostrado que* $U(\cdot)$ *no es compatible con ninguna función de utilidad Bernoulli, dado que* $u(x) = x$ *implica que el individuo es neutral al riesgo:*

$$u\left(\int x\mathrm{d}F(x)\right) = \int u(x)\mathrm{d}F(x) \iff \int x\mathrm{d}F(x) = \int x\mathrm{d}F(x)$$

Pero la varianza que induce $F(\cdot)$ *resta a* $U(\cdot)$, *es decir, no es neutral al riesgo, una contradicción.*

Ahora daremos el ejemplo solicitado:
Denote por $F_0(\cdot)$ *la distribución que asigna probabilidad 1 a* $x' = 0$ *y* $F(\cdot)$ *la distribución que asigna probabilidad 1/2 a* $x' = 0$ *y 1/2 a* $x'' = 4/r > 0$.
Notemos que:

$$U(F_0) = (\textit{media de } F_0) - r(\textit{varianza de } F_0) = 0 - r \cdot 0 = 0$$

Es decir, como la media y la varianza que induce $F_0(\cdot)$ *son cero,* $U(F_0) = 0$. *Además, mostramos que* $u(\cdot)$ *es estrictamente creciente y por lo tanto* $U(F) = \int u(x)\mathrm{d}F(x) > 0$, *ya que* $(1/2)(4/r) > 0$. *Sin embargo:*

$$\begin{aligned} U(F) &= (\textit{media de } F) - r(\textit{varianza de } F) \\ &= E(x) - r[V(x)], \ (\textit{bajo } F) \\ &= E(x) - r\left\{E(x^2) - [E(x)]^2\right\} \\ &= (1/2)\cdot 0 + (1/2)\cdot(4/r) - r\left\{(1/2)\cdot 0^2 + (1/2)\cdot(4/r)^2 - 4/r^2\right\} \\ &= -2/r < 0 \end{aligned}$$

Lo último es una contradicción con el hecho que $U(F) > 0$. *Note además que hemos dado otra demostración de la incompatibilidad de* $U(\cdot)$ *con alguna función de utilidad Bernoulli. Adicionalmente, tenemos 2 loterias* F_0 *Y* F *tal que* F *asigna una mayor probabilidad a* $x'' > x'$ *que* F_0, *pero* F_0 *es preferida a* F *bajo* $U(\cdot)$.

Pregunta 2

Suponga que existen N activos riesgosos cuyos retornos son $(z_1, \cdots, z_N)$ por dólar invertido y se distribuyen conjuntamente de acuerdo a la CDF $F(z_1, \cdots, z_N)$. Asuma que todos los retornos son no-negativos con probabilidad 1. Considere un individuo que tiene una función de utilidad Bernoulli $u(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, continua, creciente y cóncava. Defina la función de utilidad $U(\cdot)$ de este inversionista sobre $\mathbb{R}_+^N$, el conjunto de todos los portafolios no negativos, tal que:

$$U(\alpha_1, \cdots, \alpha_N) = \int u(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_N z_N)\, \mathrm{d}F(z_1, \cdots, z_N)$$

a) Muestre que $U(\cdot)$ es creciente.

Solución:
Considere 2 portafolios $\alpha = (\alpha_1, \cdot, \alpha_N) \in \mathbb{R}_+^N$, $\alpha' = (\alpha'_1, \cdots, \alpha'_N) \in \mathbb{R}_+^N$ tal que $\alpha \geq \alpha'$.
Entonces, $\sum_n \alpha_n z_n \geq \sum_n \alpha'_n z_n$ para casi toda realización $(z_1, \cdots, z_N)$, dado que todas los retornos son no-negativos con probabilidad 1. Como u es creciente, $u(\sum_n \alpha_n z_n) \geq u(\sum_n \alpha'_n z_n)$ con probabilidad 1. Luego:

$$\int u\left(\sum_n \alpha_n z_n\right)\, \mathrm{d}F(z_1, \cdots, z_N) \geq \int u\left(\sum_n \alpha'_n z_n\right)\, \mathrm{d}F(z_1, \cdots, z_N) \iff U(\alpha) \geq U(\alpha')\ .$$

Concluimos por tanto que $U(\cdot)$ es creciente.

b) Muestre que $U(\cdot)$ es cóncava.

Solución:
Considere 2 portafolios $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_+^N$, $\alpha' = (\alpha'_1, \cdots, \alpha'_N) \in \mathbb{R}_+^N$ y $\lambda \in (0,1)$, luego por la concavidad de u tenemos que para casi toda realización $(z_1, \cdots, z_N)$:

$$\begin{aligned} u\left(\sum_n (\lambda\alpha_n + (1-\lambda)\alpha')z_n\right) &= u\left(\lambda \sum_n \alpha_n z_n + (1-\lambda)\sum_n \alpha'_n z_n\right) \\ &\geq \lambda u\left(\sum_n \alpha_n z_n\right) + (1-\lambda) u\left(\sum_n \alpha'_n z_n\right) \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} & U(\lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha') \\ =& \int u\left(\sum_n (\lambda\alpha_n + (1-\lambda)\alpha'_n)z_n\right)\, \mathrm{d}F(z_1, \cdots, z_N) \\ \geq& \int \left[\lambda u\left(\sum_n \alpha_n z_n\right) + (1-\lambda) u\left(\sum_n \alpha'_n z_n\right)\right]\, \mathrm{d}F(z_1, \cdots, z_N) \\ =& \lambda \int u\left(\sum_n \alpha_n z_n\right)\, \mathrm{d}F(z_1, \cdots, z_N) + (1-\lambda)\int u\left(\sum_n \alpha'_n z_n\right)\, \mathrm{d}F(z_1, \cdots, z_N) \\ =& \lambda U(\alpha) + (1-\lambda)U(\alpha') \end{aligned}$$

Pregunta 3

Considere una función de utilidad Bernoulli $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente. Muestre que:

a) $u(\cdot)$ exhibe aversión relativa al riesgo constante igual a ρ si y solo si $u(x) = \beta x^{1-\rho} + \gamma$, donde $\beta > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

Solución:
El coeficiente de aversión relativo al riesgo se define como:

$$r_R(x,u) = -xu''(x)/u'(x)$$

Luego, para esta función de utilidad $u'(x) = \beta(1-\rho)x^{-\rho}$ *y* $u''(x) = \beta(1-\rho)(-\rho)x^{-\rho-1}$*, esto implica que* $r_R(x,u) = -x(\beta(1-\rho)(-\rho)x^{-\rho-1})/(\beta(1-\rho)x^{-\rho}) = \rho$.
Ahora, suponga que u exhibe aversión relativa al riesgo constante ρ, esto es,
$r_R(x,u) = -xu''(x)/u'(x) = \rho \implies u''(x)/u'(x) = -\rho/x$*, integrando tenemos que:*

$$\int u''(x)/u'(x) = \int -\rho/x$$
$$\implies \log u'(x) = -\rho \log x + c_1, \ \textit{con } c_1 \in \mathbb{R}$$

Aplicando exponencial a ambos lados:

$$u'(x) = \mathrm{e}^{(\log \mathrm{x}^{-\rho} + \mathrm{c}_1)} = \mathrm{e}^{\log \mathrm{x}^{-\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{c}_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{c}_1}\mathrm{x}^{-\rho}$$

Integrando nuevamente tenemos:

$$u(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{c}_1}\mathrm{x}^{1-\rho}/(1-\rho) + \mathrm{c}_2, \quad \textit{con } \mathrm{c}_2 \in \mathbb{R}$$

Denotando, $\beta = \mathrm{e}^{\mathrm{c}_1}/(1-\rho)$ *y* $\gamma = c_2$*, completamos la demostración.*

b) $u(\cdot)$ exhibe aversión relativa al riesgo constante igual a 1 si y solo si $u(x) = \beta \log x + \gamma$, donde $\beta > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

Solución:
Propuesto, siga los mismos pasos que en a).

c) $\lim\limits_{\rho \to 1} \frac{x^{1-\rho}-1}{1-\rho} = \log x, \ \forall x > 0$

Solución:

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{x^{1-\rho}-1}{1-\rho} = \frac{0}{0}$$

Luego, podemos aplicar la regla de L'hopital que se enuncia como sigue:
Defina funciones $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *y* $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *diferenciables en un intervalo abierto I tal que $a \in I$. Asuma que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *(o* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *y* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$*), con $g'(x) \neq 0$ si $x \neq a$. Entonces:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Así denotando $f(\rho) = x^{1-\rho} - 1$ *y* $g(\rho) = 1 - \rho$ *y ocupando la regla anterior tenemos que:*

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{f(\rho)}{g(\rho)} = \lim_{\rho \to 1} \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)} = \frac{-x^{1-\rho}\log x}{-1} = \log x$$

Pregunta 4

En una economía de 2 periodos, un consumidor tiene una riqueza en el primer periodo de w y su utilidad viene dada por:

$$u(c_1, c_2) = u(c_1) + v(c_2)$$

Donde $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ son funciones cóncavas y c_1 y c_2 denotan los niveles de consumo en el primer y segundo periodo respectivamente. Denote por x el monto que ahorra el consumidor en el primer periodo, así ($c_1 = w - x$ y $c_2 = x$), y denote por x_0 el valor óptimo en este problema.
Ahora introducimos incertidumbre en esta economía. Si el consumidor ahorra un monto x en el primer periodo, su riqueza en el segundo periodo viene dado por $(x + y)$, donde y se distribuye de acuerdo a la CDF $F(\cdot)$. En lo que sigue, $E[\cdot]$ denota la esperanza matemática con respecto a $F(\cdot)$. Asuma en este contexto que la función de utilidad Bernoulli sobre los valores de riqueza realizados en los 2 periodos (w_1, w_2) es $u(w_1) + v(w_2)$. Entonces, el consumidor ahora resuelve:

$$\max_x u(w - x) + E[v(x + y)]$$

Por último, denote la solución a este problema por x^*.

a) Muestre que si $E[v'(x_0 + y)] > v'(x_0)$, entonces $x^* > x_0$.

Solución:
El problema 1 (sin incertidumbre) es:

$$\max_x \{u(c_1, c_2) = u(w - x) + v(x)\}$$

Luego la condición de primer orden es:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u(c_1,c_2)}{\partial x} = 0 &\iff u'(w-x)(-1) + v'(x) = 0 \\ &\implies u'(w - x_0) = v'(x_0) \end{aligned}$$

El segundo problema (con incertidumbre) es:

$$\max_x \{u(c_1, c_2) = u(w - x) + E[v(x + y)]\}$$

Luego la condición de primer orden es:

$$\tfrac{\partial u(c_1,c_2)}{\partial x} = 0 \iff u'(w - x)(-1) + E[v'(x + y)] = 0$$

Para el segundo problema defina $\phi(x) = u(w - x) + E[v(x + y)]$, luego $\phi'(x) = -u'(w - x) + E[v'(x + y)])$ y $\phi''(x) = u''(w - x) + E[v''(x + y)])$.
Entonces, $\phi'(x^*) = 0$ y $\phi''(x) \leq 0$ para toda x (dado que u y v son cóncavas).

Esto implica que $\phi'(x)$ es una función decreciente y por lo tanto $\phi'(x) > 0 \implies x^* > x$.
Por enunciado tenemos que $E[v'(x_0 + y)] > v'(x_0)$, luego:

$$\phi'(x_0) = -u'(w - x_0) + E[v'(x_0 + y)] = -v'(x_0) + E[v'(x_0 + y)] > 0$$

Concluimos por tanto que $x^* > x_0$.

*b) Defina el coeficiente de **prudencia** absoluta de una función de utilidad $v(\cdot)$ al nivel de riqueza x como $p = -v'''(x)/v''(x)$. Muestre que si el coeficiente p_1 de una función de utilidad $v_1(\cdot)$ no es mayor al coeficiente p_2 de una función de utilidad $v_2(\cdot)$ para todos los niveles de riqueza, entonces $E[v_1'(x_0 + y)] > v_1'(x_0)$ implica $E[v_2'(x_0 + y)] > v_2'(x_0)$. Cuales son las implicancias de este hecho en el contexto de la parte a)?*

Solución:
Definamos 2 funciones η_1 y η_2 tal que :

$$\eta_1(x) = -v_1'(x) \;\; y \;\; \eta_2(x) = -v_2'(x)$$

Como v_1 y v_2 son cóncavas sigue que η_1 y η_2 son crecientes. Además los coeficientes de prudencia absoluta de v_1 y v_2 son iguales a los coeficientes de aversión absoluta al riesgo de η_1 y η_2, ya que recordemos que el coefiecte de aversión absoluta al riesgo se define como $r_A(x,u) = -u''(c)/u'(x)$.

Luego si el coeficiente de prudencia absoluta de v_1 no es mayor al de v_2, entonces el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de η_1 no es mayor que el de η_2.
Note que por enunciado $E[v_1'(x_0+y)] > v_1'(x_0)$, esto es quivalente a $E[\eta_1(x_0+y)] < \eta_1(x_0)$.
En este punto ocuparemos la proposición siguiente:

$$r_A(x,v_2) \geq r_A(x,v_1) \forall x$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\int v_2(x)\,\mathrm{d}F(x) \geq V_2(cte) \implies \int v_1(x)\,\mathrm{d}F(x) \geq V_1(cte), \;\; \forall (F \text{ y cualquier constante})$$

Por lo tanto, aplicando esta proposición obtenemos que $E[\eta_2(x_0+y)] < \eta_2(x_0)$. Para ver esto, suponga que $E[\eta_2(x_0+y)] \geq \eta_2(x_0)$, como $r_A(x,\eta_1) \leq r_A(x,\eta_2)$, de la proposición anterior tenemos que:

$$E[\eta_2(x_0+y)] \geq \eta_2(x_0) \implies E[\eta_1(x_0+y)] \geq \eta_1(x_0)$$

Pero hemos mostrado que $E[\eta_1(x_0+y)] < \eta_1(x_0)$, una contradicción.
Adicionalmente, $E[\eta_2(x_0+y)] < \eta_2(x_0)$ es equivalente a $E[v_2'(x_0+y)] > v_2'(x_0)$, que era lo que se quería demostrar.

La implicancia de lo anterior respecto al punto a) es que si el coeficiente de prudencia absoluta de la primera no es mayor a la segunda y si el riesgo de y induce a un mayor ahorro en el primer periodo, entonces también induce al segundo a ahorrar más.
Luego, el coeficiente de prudencia absoluta así definido mide cuanto estan dispuestos a ahorrar los individuos cuando enfrentan un riesgo en su riqueza futura.

c) Muestre que si $v'''(\cdot) > 0$ y $E[y] = 0$, entonces $E[v'(x+y)] > v'(x)$, para todo x.

Solución:
Si $v'''(x) > 0$, entonces $\eta''(x) = -v'''(x) < 0$ y por lo tanto η exhibe aversión al riesgo ($\eta(\cdot)$ es estrictamente cóncava). Luego, ocupando que $E[y] = 0$:

$$\begin{aligned} &\eta(E[x+y]) > E[\eta(x+y)] \\ \implies &\eta(x) > E[\eta(x+y)] \\ \implies &-v'(x) > E[-v'(x+y)] \end{aligned}$$

Lo anterior implica que $E[v'(x+y)] > v'(x)$

d) Muestre que si el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de $v(\cdot)$ es decreciente con la riqueza, entonces $-v'''(x)/v''(x) > -v''(x)/v'(x)\ \forall x$, y por lo tanto $v'''(\cdot) > 0$.

Solución:
El coeficiente de aversión absoluta al riesgo se define como:

$$r_A(x,v) = -v''(x)/v'(x)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_A(x,v)}{\partial x} &= -\left[\frac{v'''(x)v'(x) - v''(x)v''(x)}{(v'(x))^2}\right] \\ &= \frac{v''(x)}{v'(x)}\left[\frac{-v'''(x)}{v''(x)} + \frac{v''(x)}{v'(x)}\right] \\ &\leq 0\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad viene del enunciado. Luego, como v es creciente y cóncava, sigue que $\frac{v''(x)}{v'(x)} \leq 0$, *por lo tanto* $\left[\frac{-v'''(x)}{v''(x)} + \frac{v''(x)}{v'(x)}\right] > 0$. *Esto es,* $\frac{-v'''(x)}{v''(x)} > \frac{-v''(x)}{v'(x)}$ $\forall x$, *además, como* $-\frac{v''(x)}{v'(x)} \geq 0$ *para que* $\frac{-v'''(x)}{v''(x)}$ *sea mayor a cero, se debe cumplir que* $v'''(\cdot) > 0$, *que es lo que se quería mostrar.*

Pregunta 5

Asuma que una firma es neutral al riesgo con respecto a los beneficios y si hay alguna incertidumbre en precios, las decisions de producción son hechas después de la resolución de esa incertidumbre.
Suponga que la firma enfrenta una elección entre dos alternativas. En la primera los precios son inciertos. En la segunda, los precios no son aleatorios y son iguales al vector de precios esperado de la primera alternativa. Muestre que una firma que maximiza los beneficios esperados preferirá la primera alternativa sobre la segunda.

Solución:
Denotemos la función de beneficios y la CDF de los precios aleatorios por $\pi(\cdot)$ y $F(\cdot)$ respectivamente. Dado que $\pi(\cdot)$ es convexa (para esta propiedad mire el libro MWG que esta en la bibliografía del curso) se cumple que:

$$\pi\left(\int p \, \mathrm{d}F(p)\right) \leq \int \pi(p) \, \mathrm{d}F(p)$$

Luego, note que el lado izquierdo de la desigualdad anterior es la utilidad de los precios esperados y el lado derecho de la desigualdad es la utilidad esperada bajo estos precios aleatorios. Por lo tanto, la firma prefiere la primera alternativa ya que la encuentra al menos tan buena como la segunda.