Fuente: Examen Parcial de Econometría II 2021 (Soluciones Propuestas)

3. (40 puntos) El DGP de y es un MA(1) no invertible:

$$y_t = u_t + u_{t-1}, \quad u_t \sim N(0,1).$$

Se consideran un AR(1) y un AR(2) como procesos para describir y:

$$M_1 : y_t = \alpha_1 y_{t-1} + v_t,$$
$$M_2 : y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + v_t,$$

postulando $v_t \sim N(0, \sigma^2)$. **(a) (20 puntos)** Tenemos:

$$\mu = E(y) = 0, \quad \gamma_0 = 2, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_j = 0 \ (j > 1)$$
$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = 1/2, \quad \rho_j = 0 \ (j > 1)$$

Para derivar las autocorrelaciones parciales, tenemos que:

$$PAC_1 \xrightarrow{LD} \hat{\alpha}_1, \quad PAC_2 \xrightarrow{LD} \hat{\beta}_2,$$

donde $\xrightarrow{LD}$ quiere decir que tiene la misma distribución límite. En este caso se tiene que: $\hat{\alpha}_1 \xrightarrow{P} \rho_1 = 1/2$. Por otro lado, tenemos:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y$$

donde,

$$X'X = \begin{pmatrix} \sum y_{t-1}^2 & \sum y_{t-1} y_{t-2} \\ \sum y_{t-1} y_{t-2} & \sum y_{t-2}^2 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} \sum y_t y_{t-1} \\ \sum y_t y_{t-2} \end{pmatrix}.$$

(b) (10 puntos) Ya sabemos que:

$$\hat{\alpha}_1 \xrightarrow{P} \rho_1 = 1/2$$
$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

(c) (10 puntos) Escogeremos M_1 sobre M_2 si $BIC_1 < BIC_2$. En este caso:

$$BIC_i = \ln(\hat{\sigma}_i^2) + \frac{k_i}{T} \ln(T),$$

donde $k_i = i \ (i = 1, 2)$.