Examen Microeconomía I

Profesora: Adriana Piazza
Ayudantes: Jorge Arenas, Kevin Sepúlveda, Alberto Undurraga

12 de julio de 2021

Lea atentamente las siguientes indicaciones:

- Para el desarrollo de la prueba se usará la plataforma Cisco Webex y la plataforma Canvas.
- Los estudiantes deben conectarse a la prueba en Webex (el link está programado en Canvas) a las 9:50.
- A las 10:00 la prueba quedará disponible en la página de inicio del curso en la plataforma Canvas.
- Ud. tiene 180 minutos para resolver la prueba.
- Luego de los 180 minutos de duración de la prueba, tendrá 20 minutos adicionales para escanear y subir el archivo de respuestas.
- Durante la rendición de la prueba usted debe permanecer conectado a la sala Cisco Webex. Por este medio se informarán instrucciones adicionales (en caso de que sea estrictamente necesario).
- Solo podrá abandonar la sala de Cisco Webex una vez que haya cargado sus respuestas en Canvas.
- En caso de que tenga problemas de conexión durante el desarrollo de la prueba, usted debe informar inmediatamente por correo electrónico a su ayudante (siempre que pueda hacerlo). Si es posible, continuar con el desarrollo de la prueba.
- La prueba consta de 4 ejercicios y tiene un total de 120 puntos.
- Los puntos asociados a cada pregunta están indicados en cada pregunta. Todas las partes de la pregunta dan el mismo puntaje a menos que se indique explícitamente lo contrario.
- Lea todas las preguntas antes de comenzar a responder, esto le permitirá planificar su trabajo de forma eficiente. Evite dedicar mucho tiempo a una pregunta.
- Responda cada pregunta en una hoja distinta e indique cuál pregunta está respondiendo.
- Utilice lápiz pasta para responder.
- Finalizada la prueba, Ud. deberá utilizar *CamScanner*, o un programa similar, para escanear sus respuestas y subirlas a Canvas en un único archivo pdf.
- El link de Canvas permite un único intento para subir la prueba. En caso que tenga problemas para subir la prueba, comuníquese con el ayudante.
- *Es su responsabilidad asegurarse que el archivo incluye todas sus respuestas.* No se aceptarán actualizaciones del archivo posteriores a la finalización de la prueba.
- Durante la prueba puede consultar sus apuntes personales. No se permite consultar ningún otro tipo de material. Tampoco se puede recurrir a otra persona.
- En caso de descubrir un intento de copia, éste se sancionará de acuerdo con el reglamento de copia y plagio de la facultad.

Pregunta 1 (30 puntos) (cada parte vale 10 puntos, en todas las preguntas)

Para las siguientes afirmaciones, dé una demostración o un contraejemplo:

a) Todas las funciones de utilidad que representan una relación de preferencias estrictamente convexa, son estrictamente cóncavas.

> **Respuesta**
> **FALSA.** Un contraejemplo posible es el siguiente: La función de utilidad de Cobb-Douglas $f(x, y) = xy$, representa una relación de preferencias que es estrictamente convexa (dado que el conjunto de contorno superior es estrictamente convexo). (6 puntos)
> Sin embargo, la función $f(x, y)$ no es estrictamente convexa. Basta ver que si fijamos una de las dos variables $y = y_o$, la función restringida es lineal en x. (4 puntos)

b) Considere una firma que produce un único bien a partir de un único insumo cuya función de producción $f(z)$ es estrictamente cóncava y creciente. La firma produce actualmente $y_o > 0$ unidades de producto a partir de $z_o > 0$ unidades de insumo.

Afirmación: Un aumento en el precio del producto siempre aumenta la producción.

> **Respuesta**
> **VERDADERA.** La firma se encuentra produciendo en una solución interior que satisface
>
> $$pf'(z_o) = w$$
>
> (4 puntos) donde w es el precio del insumo z. Si p aumenta y w permanece constante, entonces necesariamente en la nueva solución (z') debe cumplirse que $f'(z_o) > f'(z')$. (3 puntos) Gracias a la concavidad de f sabemos que esto es equivalente a decir que $z_o < z'$ y dado que f es creciente obtenemos que $y' = f(z') > y_o = f(z_o)$. (3 puntos)

c) Sea $u : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ una función tres veces derivable que mide la utilidad de un individuo en función de su riqueza. Si u es estrictamente cóncava, estrictamente creciente y tal que $u''' < 0$, entonces tanto la *aversión absoluta al riesgo* como la *aversión relativa al riesgo* son estrictamente crecientes.

> **Respuesta**
> **VERDADERA.** Del enunciado sabemos que $u''' < 0$, $u'' < 0$ y $u' > 0$.
> El coeficiente de aversión absoluta al riesgo es $r_A(u, x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$. Tomando derivada obtenemos:
>
> $$r'_A(u, x) = -\left[\frac{u'''(x)}{u'(x)} - \frac{(u''(x))^2}{(u'(x))^2}\right] = \frac{-u'''(x)}{u'(x)} + \frac{(u''(x))^2}{(u'(x))^2}$$
>
> El primer término es positivo porque $-u''' > 0$ y $u' > 0$. El segundo término es positivo por estar elevado al cuadrado. (5 puntos)

Por otro lado, el coeficiente de aversión relativa al riesgo es $r_R(x,u) = -\frac{-xu''(x)}{u'(x)}$. Derivando obtenemos:

$$r'_R(u,x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} + x\left(\frac{-u''(x)}{u'(x)}\right)' = -\frac{u''(x)}{u'(x)} + xr'_A(u,x)$$

El primer término es positivo porque $u'' < 0$ y $u' > 0$ y el segundo es positivo por la parte anterior. (5 puntos)

Pregunta 2 (30 puntos)

Considere el siguiente juego en forma normal:

Jugador 2

		L	C	R
	T	$(2,1)$	$(1,1)$	$(4,2)$
Jugador 1	M	$(3,4)$	$(1,2)$	$(2,3)$
	B	$(1,3)$	$(0,2)$	$(3,0)$

a) Encuentre todas las estrategias que sobreviven al algoritmo de eliminación iterada de las estrategias estrictamente dominadas.

b) Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras (si existen)

c) Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias mixtas (si existen)

Respuesta

a) Primero observamos que la estrategia B del jugador 1, está estrictamente dominada por la estrategia T. Al eliminarlo obtenemos el siguiente juego reducido:

Jugador 2

		L	C	R
	T	$(2,1)$	$(1,1)$	$(4,2)$
Jugador 1	M	$(3,4)$	$(1,2)$	$(2,3)$

(5 puntos)

En este juego, es fácil ver que la estrategia C del jugador 2 está estrictamente dominada por la estrategia R.

Jugador 2

		L	R
	T	$(2,1)$	$(4,2)$
Jugador 1	M	$(3,4)$	$(2,3)$

(5 puntos)

b) Los equilibrios de Nash en estrategias puras son (T,R) y (M,L) dado que ningún jugador tiene incentivo a desviar. (Esto se puede ver tanto en la matriz original como en la matriz del juego reducido). (5 puntos por cada equilibrio encontrado)

Jugador 2

		L	R
	T	$(2,1)$	$(4,2)$
Jugador 1	M	$(3,4)$	$(2,3)$

c) Por lo visto en clases sabemos que ninguna estrategia estrictamente dominada puede estar presente en un EN, por lo tanto buscamos equilibrios de Nash en estrategias mixtas donde el jugador 1 solo asigna probabilidad positiva a las estrategias T y M (las denotaremos por p y $1-p$, respectivamente) y el jugador 2 solo asigna probabilidad positiva a las estrategias L y R (las denotaremos por q y $1-q$, respectivamente). (5 puntos)

Sabemos que si (σ_1^*, σ_2^*) es equilibrio de Nash, entonces

$$u_1(T, \sigma_2^*) = u_1(M, \sigma_2^*)$$
$$u_2(\sigma_1^*, L) = u_1(\sigma_1^*, R)$$

Por lo tanto,

$$u_1(T, \sigma_2^*) = u_1(M, \sigma_2^*) \Rightarrow 2q + 4(1-q) = 3q + 2(1-q) \Rightarrow 2(1-q) = q \Rightarrow q = 2/3$$
$$u_2(\sigma_1^*, L) = u_1(\sigma_1^*, R) \Rightarrow p + 4(1-p) = 2p + 3(1-p) \Rightarrow (1-p) = p \Rightarrow p = 1/2$$

Se concluye que $\sigma_1^* = (1/2, 1/2)$ y $\sigma_2^* = (2/3, 1/3)$ es el único EN en estrategias estrictamente mixtas. (5 puntos)

Pregunta 3 (30 puntos)

Considere el siguiente juego con dos jugadores. El jugador 1 elige entre *salir (OUT)* o *quedarse (IN)*. Si $J1$ elige OUT el juego termina y su pago es 2, mientras que el pago de $J2$ es 0. Si $J1$ elige IN, entonces $J2$ observa esta decisión y escoge entre *salir (OUT)* o *quedarse (IN)*. Si $J2$ elige OUT entonces el juego termina y el pago de $J2$ es 2, mientras que el pago de $J1$ es 0. Si ambos escogen IN, entonces juegan el siguiente juego simultáneo, donde $k \in \mathbb{N}$:

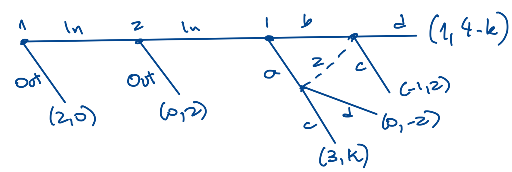
		Jugador 2	
		c	d
	a	$(3, k)$	$(0, -2)$
Jugador 1	b	$(-1, 2)$	$(1, 4 - k)$

a) Dibuje la forma extensa (árbol del juego) y la forma normal (matriz) de este juego.

Respuesta

		Jugador 2			
		Out c	Out d	In c	In d
	Out a	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$
Jugador 1	Out b	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$
	In a	$(0, 2)$	$(0, 2)$	$(3, k)$	$(0, -2)$
	In b	$(0, 2)$	$(0, 2)$	$(-1, 2)$	$(1, 4 - k)$

(5 puntos)



(5 puntos)

b) Para el caso en que $k = 1$, encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras del juego. Identifique cuales de ellos son Equilibrios de Nash perfectos en subjuegos.

Respuesta

		Jugador 2			
		Out c	Out d	In c	In d
	Out a	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$
Jugador 1	Out b	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 0)$
	In a	$(0, 2)$	$(0, 2)$	$(3, 1)$	$(0, -2)$
	In b	$(0, 2)$	$(0, 2)$	$(-1, 2)$	$(1, 3)$

De la matriz de pagos, es fácil identificar que hay 6 EN:

$$\{(Out\ a, Out\ c), (Out\ b, Out\ c), (Out\ a, Out\ d), (Out\ b, Out\ d), (Out\ a, In\ d), (Out\ b, In\ d)\}$$

(1 punto por cada EN encontrado, descontar si identifican perfiles de estrategia que no sean EN.)

Aplicando inducción hacia atrás en el juego, debemos empezar por el subjuego final. En este es fácil identificar que hay dos equilibrios de Nash:$\{(a, c), (b, d)\}$.

- Si los jugadores asumen que en el subjuego final se jugará (a, c), entonces J2 elegirá Out. En ese caso, J1 también elegirá Out dado que lo más conveniente sabiendo que J2 elegirá Out. Tenemos entonces el ENPS $(Out\ a, Out\ c)$
- Si los jugadores asumen que en el subjuego final se jugará (b, d), entonces 2 elegirá In. Pero J1 elegirá Out dado que 2 es mayor que 1. Tenemos entonces el ENPS $(Out\ b, In\ d)$

(2 puntos por cada ENPS correctamente identificado. Descontar si se identifican perfiles de estrategia que no sean ENPS)

$c)$ Encuentre el rango de valores de k para el cual hay un único ENPS en estrategias puras.

Respuesta

Para que haya sólo un ENPS, necesitamos que el subjuego final tenga solamente un equilibrio de Nash en estrategias puras. (6 puntos) Para esto basta que $4 - k < 2$ lo que se cumple para todo $k \geq 3$. (4 puntos)

Pregunta 4 (30 puntos)

Ana y Beto participan de una subasta para obtener el primer frasco de monedas utilizado como ejemplo en una clase de Microeconomía, autografiado por la profesora de la época.

El propietario actual decide que la venta ser hará a través de una subasta a sobre cerrado a segundo precio.

Denotamos por b_A y b_B, las ofertas de Ana y Beto respectivamente. Si $b_A = b_B$, se lanzará una moneda equilibrada para decidir quién se queda con el frasco y esa persona tendrá que pagar la oferta que hizo. La persona que no recibe el frasco, nunca debe pagar nada.

El frasco vale \$ 6 millones para Ana y \$ 4 millones para Beto y ellos son los únicos participantes de la subasta. No se permiten ofertas negativas.

La función de pago de Ana es entonces:

$$u_A(b_A, b_B) = \begin{cases} 6 - b_B & \text{si } b_A > b_B \\ 0 & \text{si } b_A < b_B \\ \frac{1}{2}(6 - b_B) & \text{si } b_A = b_B \end{cases}$$

La función de pago de Beto es análoga. Todo lo anterior es información común.

a) ¿Cuáles de los siguientes perfiles de estrategia son equilibrios de Nash: (6, 4), (2, 4), (10, 0)? (El primer número es b_A y el segundo es b_B.) Justifique.

> **Respuesta**
>
> - $(6, 4)$ es equilibrio de Nash.
>
>   Dado que Ana gana la subasta su pago es $u_A(6, 4) = 6 - 4 = 2$. Si Ana desvía con cualquier oferta $b_A > 4$, sigue ganando la subasta y su pago permanece igual. Si desvía con cualquier oferta $b_A < 4$, pierde la subasta y su pago es 0. Si desvía con la oferta $b_A = 4$ su pago es $u_A(4, 4) = \frac{1}{2}(6 - 4) = 1$. Ana no tiene incentivo a desviar. (2 puntos)
>
>   El pago de Beto es 0. Si desvía con cualquier oferta $b_B < 6$ su pago sigue siendo 0. Si desvía con una oferta $b_B \geq 0$ su pago será negativo. Beto no tiene incentivo a desviar. (2 puntos)
>
> - $(2, 4)$ no es equilibrio de Nash.
>
>   El pago de Ana $u_A(2, 4) = 0$ y Ana obtendría un pago positivo con cualquier oferta $b_A \in (4, 6)$. (2 puntos)
>
> - $(10, 0)$ es equilibrio de Nash.
>
>   El pago de Ana es $u_A(10, 0) = 6$ y no obtendrá un pago mayor con ninguna oferta positiva. (2 puntos) El pago de Beto es 0. Si Beto desvía con cualquier oferta $b_B < 10$ sigue obteniendo 0, si desvía con cualquier oferta $b_B \geq 10$ su pago es negativo. Beto no tiene incentivo a desviar. (2 puntos)

b) Para la siguiente afirmación, dé una demostración o un contraejemplo: “No existe ningún equilibrio de Nash en el que Beto gane el frasco”.

> **Respuesta**
>
> **FALSA** Un contraejemplo posible es el perfil $(0, 10)$. El pago de Beto es $u_B(0, 10) = 4$ que es el mayor pago posible para él. Y el pago de Ana es 0, la única forma que Ana tendría de ganar la oferta es ofertando $b_A > 10$ en cuyo caso su pago sería negativo. (10 puntos)

c) Para la siguiente afirmación, dé una demostración o un contraejemplo: "Los jugadores no tienen ninguna estrategia estrictamente dominada"

Respuesta

VERDADERA. Presento a continuación la justificación para Ana, la justificación para Beto es completamente análoga.

Empiezo por recordar la definición de estrategia estrictamente dominada:

Una estrategia b_A es estrictamente dominada por otra b'_A si y solamente si

$$u_A(b_A, b_B) < u_A(b'_A, b_B) \quad \forall b_B.$$

Para demostrar que b'_A no domina estrictamente a b_A basta considerar una estrategia b_B lo suficientemente grande, de forma de que Ana no gane la subasta con ninguna de las dos ofertas. (7 puntos)

Es decir, dados b_A y b'_A, tomo $b_B > \text{máx}\{b_A, b'_A\}$ y entonces tenemos que $u_A(b_A, b_B) = 0 = u_A(b'_A, b_B)$ y no es cierto que b'_A domine estrictamente a b_A. (3 puntos)