AYUDANTÍA I

Profesora: Adriana Piazza.
Ayudantes: Agustín Farías Lobo, Camila Carrasco.

Pregunta 1

Demuestre la siguiente proposición vista en clases:

"Si $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ es una estructura de elección que cumple con

(i) Satisfacer el ADPR.

(ii) $\mathscr{B}$ incluye a todos los subconjuntos de X que tienen al menos tres elementos.

Luego, existe una única relación de preferencia racional $\succsim$ que *racionaliza* $C(\cdot)$ relativo a $\mathscr{B}$, es decir, $C(B) = C^*(B, \succsim)$, $\forall B \in \mathscr{B}$."

Respuesta
Se define la relación de preferencia revelada $\succsim^*$ como sigue: si para un $B \in \mathscr{B}$ se tiene que $x, y \in B$, y que $x \in C(B)$, entonces $x \succsim^* y$.

Primero comprobamos que $\succsim^*$ es racional y que racionaliza $C(\cdot)$ relativo a $\mathscr{B}$, para posteriormente chequear su unicidad.

Suponga que $\{x, y\} \in X$. Luego, por la hipótesis (ii), $\{x, y\} \in \mathscr{B}$. Por la definición $C(\cdot)$, x y/o y deben ser un elemento de $C(\{x, y\})$, por lo que se debe tener que $x \succsim^* y$ y/o que $y \succsim^* x$. Así, $\succsim^*$ es completa.

Suponga que $x \succsim^* y$, que $y \succsim^* z$ y que $B = \{x, y, z\}$. Para demostrar la transitividad nos basta demostrar que $x \in C(B)$, pues ello implica que $x \succsim^*$. Se sabe que $C(B) \neq \emptyset$, por lo que x, y o z deben estar en $C(B)$. Suponga que $y \in C(B)$. Dado que $x \succsim^* y$, se debe tener que $x \in C(B)$. Suponga ahora que $z \in C(B)$. Puesto que $y \succsim^* z$, se tiene que $y \in C(B)$, por lo que se llega al mismo resultado. Por tanto, $x \in C(\{x, y, z\})$, lo que $x \succsim^* z$. Luego, $\succsim^*$ es transitiva. Con ello, $\succsim^*$ es racional.

Suponga que $x \in C(B)$, lo que implica que $x \succsim^* y$, $\forall y \in B$. Ello lleva a que $x \in C^*(B; \succsim^*)$, por lo que $C(B) \subset C^*(B; \succsim^*)$.

A continuación, suponga ahora que $x \in C^*(B; \succsim)$, lo que implica que $x \succsim^* y$, $\forall y \in B$. Luego, para $y \in B$ debe existir un conjunto $B_y \in \mathscr{B}$, tal que $x, y \in B_y$ y que $x \in C(B_y)$. Dado que por el ADPR cualquier conjunto B' que contenga a x y a y debe cumplir con que $x \in C(B')$ (en otro caso, se contradiría el ADPR), es posible afirmar que $x \in C^*(B, \succsim^*)$. Luego, $C^*(B; \succsim^*) \subset C(B)$. Por tanto, se concluye que $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$.

Para asegurar la unicidad, es posible notar que $\mathscr{B}$ incluye a todos los subconjuntos de X con dos elementos. Por ello, la elección $C(\cdot)$ determina completamente las relaciones de preferencias entre dos elementos (*de a pares*) de X para cualquier relación de preferencias que racionalice a $C(\cdot)$ relativo a $\mathscr{B}$.

Pregunta 2

Suponga que $X = \{x,y,z\}$, $\mathscr{B} = \{\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\}\}$, $C(\{x,y\}) = \{x\}$, $C(\{y,z\}) = \{y\}$, y que $C(\{x,z\}) = \{z\}$.

(a) Demuestre que esta estructura de elección satisface ADPR.

(b) Demuestre que no se pueden obtener preferencias racionales a partir de esta estructura, ¿Qué propiedad necesaria no se está cumpliendo?

Suponga ahora que $\mathscr{B} = \{\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$, que $C(\{x,y,z\})$ está definido, y que el resto de elementos se mantienen iguales.

(c) Demuestre que esta estructura de elección no satisface ADPR.

Pregunta 3 (Examen de Grado, Enero 2025)

Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de X, y sea $C : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ una regla de elección. Recuerde que una regla de elección C asocia a cada conjunto $A \in \mathscr{B}$ un conjunto $C(A)$ tal que $C(A) \subseteq A$.

a) Enuncie el Axioma Débil de la Preferencia Revelada (ADPR).

Considere la propiedad de *estabilidad frente a subconjuntos* definida a continuación:

$$x \in C(A) \quad \Longrightarrow \quad x \in C(B), \quad \text{para todo } B \subseteq A \text{ con } x \in B.$$

b) Demuestre o dé un contraejemplo de la siguiente afirmación: "Si la regla de elección C cumple con el ADPR, entonces también cumple estabilidad frente a subconjuntos."

Pregunta 4 (Solemne, Otoño 2024)

Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^+$, $(\mathscr{B} = [a,b] : a,b \in \mathbb{R}^+, a < b)$.

1. Considere la regla de elección definida por $C([a,b]) = a$. Determine si la estructura de elección $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ satisface el ADPR. Demuestre o de un contraejemplo.

Respuesta

Sean $x,y \in \mathbb{R}^+$ tales que $x \neq y$, y que $x,y \in B$. Si $x \in C(B)$, entonces $x < y$. Así, para todo conjunto B' tal que $y \in C(B')$ se cumplirá que $x \notin B'$. Por tanto, se cumple el ADPR.

2. Considere la regla de elección definida por $C([a,b]) = a,b$. Determine si la estructura de elección $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ satisface el ADPR. Demuestre o de un contraejemplo.

Respuesta

Considere los conjuntos $[0,1]$ y $[0,2]$. Note que 0 y 1 pertenecen a $C([0,1])$ y a $[0,2]$, pero $1 \notin C([0,2])$. Así, la estructura de elección no satisface el ADPR.

Pregunta 5

Suponga que la estructura de elección de $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ satisface el axioma débil de la preferencia revelada (ADPR). Considere las siguientes posibles relaciones de preferencia revelada, $\succ^*$ y $\succ^{**}$:

$$x \succ^* y \iff \text{existe un } B \in \mathscr{B} \text{ tal que } x, y \in B,\ x \in C(B),\ \text{e } y \notin C(B). \tag{1}$$

$$x \succ^{**} y \iff x \succsim^* y \text{ pero no } y \succsim^* x, \tag{2}$$

donde $\succsim^*$ es la relación revelada de "tan preferido como".

1. Muestre que $\succ^*$ y $\succ^{**}$ entregan la misma relación sobre X. Esto es, para cualquier $x, y \in X$, se tiene que $x \succ^* y \iff x \succsim^{**} y$.

Respuesta

Suponga que $x \succ^* y$. Por la definición de $\succ^*$ se sabe que existe un $B \in \mathscr{B}$ tal que $x, y \in B$, donde $x \in C(B)$ e $y \notin C(B)$. De la definición de una regla de elección sabemos que si $x \in C(B)$, entonces $x \succsim z$, $\forall z \in B$. Por lo tanto, $x \succsim y$. Ahora bien, puesto que $y \notin C(B)$, se sabe que $y \not\succsim x$. Luego, $x \succsim^{**} y$. Con ello, hemos demostrado que $x \succ^* y \implies x \succ^{**} y$.

Suponga ahora que $x \succ^{**} y$. Dada la definición de $\succ^{**}$, sabemos que $x \succsim^* y$ pero que $y \not\succsim^* x$. De esta manera, $x \in C(\{x, y\})$ e $y \notin C(\{x, y\})$, por lo que $x \succsim^* y$. Así, hemos demostrado que $x \succ^{**} y \implies x \succ^* y$.

Dados los resultados anteriores, concluimos que $x \succ^* y \iff x \succsim^{**} y$.

2. ¿El resultado de 1. se sostiene si $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ no satisface el ADPR?

Respuesta

El resultado anterior no se sostiene si $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ no satisface el ADPR. Ello lo mostramos con el siguiente contraejemplo.

Suponga que $x = C(\{x, y\}$ y que $y = C(\{x, y, z\}$. En este caso $y \notin C(\{x, y\}$, por lo que $x \succ^*$; y $x \notin C(\{x, y, z\})$, por lo que $y \succ^* x$. Ahora bien, se tiene $x \succ^* y \wedge y \succ^*$, por lo que no se cumple que $x \succsim^* y \wedge y \not\succsim^* x$. Así, concluimos que $x \succ^* y \not\Rightarrow x \succ^{**} y$.

3. La relación revelada $\succ^*$ debe ser transitiva. Demuestre o dé un contraejemplo.

Respuesta

Suponga que $\mathscr{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}\}$. Asimismo, suponga que $x = C(\{x, y\})$ y que $y = C(\{y, z\})$. Con lo anterior se tiene que $x \succ^* y \wedge y \succ^* z$. Sin embargo, dado que no existe ningún $B \in \mathscr{B}$ que contenga a x y a z simultáneamente, no es posible asegurar $x \succ^* z$. Luego, $\succ^*$ no necesariamente es transitiva.

4. Muestre que si $\mathscr{B}$ incluye todos los subconjuntos de al menos tres elementos de X, entonces $\succ^*$ es transitiva.

Respuesta

Suponga por contradicción que $\mathscr{B}$ incluye a todos los subconjuntos de al menos tres elementos de X, pero que $\succ^*$ no es transitiva.

Suponga que $x,y,z \in B$, que $x \succ^* y \ \wedge \ y \succ^* z$, pero que $x \not\succ^* z$. Por la definición de $\succ^*$, se sabe que $x \in C(B)$, pero que $y \notin C(B)$; y que siendo $B' \subset B$ que no contiene a x, se tiene que $y \in C(B')$ y que $z \notin C(B')$.

Ahora bien, si $x \not\succ^* z$, entonces $z \in C(B)$. Como la estructura de elección satisface el ADPR, entonces puesto que $y,z \in B$, $y,z \in B'$, $y \in C(B')$ e $z \in C(B)$, entonces $z \in C(B')$. Sin embargo, ello contradice que $y \succ^* z$. Hemos alcanzado una contradicción.

Luego, concluimos que $\succ^*$ debe ser transitiva.