

# Tarea 3 - Econometría

Otoño 2025

Fecha de entrega: 16 de Mayo a las 18:00

## Preguntas

### 1. Varianza con asignación individual (10 puntos)

Suponga que un programa se asigna aleatoriamente a individuos, con probabilidad  $P$  de recibir tratamiento. Cada individuo tiene un resultado  $Y_i$  con varianza  $\sigma^2$ , y las observaciones son independientes entre sí.

Demuestre que el estimador de diferencias de medias entre el grupo tratado y el grupo de control, definido como:

$$\hat{\beta} = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$$

tiene varianza:

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{NP(1-P)}$$

donde  $N$  es el tamaño total de la muestra.

### 2. Varianza con asignación por grupos (15 puntos)

Ahora suponga que el tratamiento se asigna aleatoriamente a grupos (clústeres) en lugar de individuos, y que hay  $J$  grupos de tamaño  $n$  cada uno. Los individuos dentro de un grupo tienen resultados correlacionados, con:

- varianza individual  $\sigma^2$ , y
- correlación intra-cluster  $\rho = \text{Corr}(Y_{ij}, Y_{ik})$  para  $j \neq k$  (mismo grupo),  $i \neq k$ .

Demuestre que la varianza del estimador de diferencia de medias entre grupos tratados y de control es:

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{JP(1-P)} \cdot \left( \rho + \frac{1-\rho}{n} \right)$$

### 3. Cálculo del MDE usando datos agrupados (5 puntos)

Suponga que tiene un experimento con aleatorización a nivel de grupo. Hay  $J = 40$  grupos, cada uno con  $n = 10$  personas. La proporción de tratamiento es  $P = 0.5$ , la varianza individual del resultado es  $\sigma^2 = 1$ , y la correlación intra-grupo es  $\rho = 0.05$ . Calcule el tamaño mínimo detectable (MDE) para un test bilateral con nivel de significancia  $\alpha = 0.05$  y poder estadístico del 80%.

### 4. Simulación Monte Carlo para detectar efectos pequeños (20 puntos)

Simule un experimento con las siguientes características:

- 40 grupos, 10 individuos por grupo
- Varianza individual del resultado: 1
- ICC ( $\rho$ ) = 0.05
- Proporción de tratamiento: 0.5

- a) Simule 1000 experimentos donde el efecto verdadero es de 0.3 desviaciones estándar. ¿En qué proporción se rechaza  $H_0$ ?
- b) Repita el experimento con un efecto verdadero de 0.4 desviaciones estándar. Compare los resultados. Explique sus resultados.

### 5. Error al usar fórmula individual cuando hay agrupamiento (20 puntos)

Suponga que se desea detectar un efecto de 0.1 desviaciones estándar ( $0.1\sigma$ ) usando la fórmula para el MDE bajo aleatorización individual, con  $\alpha = 0.05$  y poder estadístico de 80%. La fórmula es:

$$\text{MDE}_{\text{indiv}} = \frac{z_{1-\alpha} + z_{1-\kappa}}{\sqrt{NP(1-P)}} \cdot \sigma$$

- a) Calcule el tamaño muestral  $N$  necesario para detectar un efecto de 0.1 usando esta fórmula. Use  $P = 0.5$ ,  $\sigma = 1$ .

Ahora, suponga que en realidad existen 4 grupos iguales (clústeres), cada uno con  $N/4$  observaciones, y que existe una correlación intra-grupo de  $\rho = 0.05$ .

b) Genere un experimento de Monte Carlo en el que simule esta estructura (aleatorización por grupos con correlación intra-cluster) y repita la estimación 1000 veces. Utilice el mismo  $N$  de la pregunta a). Calcule en qué proporción se rechaza la hipótesis nula de que  $\beta = 0$ .

c) Compare el poder efectivo de este diseño de clústers con el supuesto de la parte a). Comente los resultados.