Microeconomía I, 2025. Guía 2

Sebastián Rivera - Cristobal Donoso

Pregunta 1: Dos empresas, A y B, están considerando desarrollar un nuevo dispositivo. La empresa que primero logre desarrollar el nuevo dispositivo gana una patente valorada en \$200 millones. Una vez que una de las empresas obtiene la patente, la otra empresa no obtiene ingresos y el juego termina.

Desarrollar un nuevo dispositivo implica varios pasos. Las empresas se turnan para moverse, comenzando con A, hasta que una de ellas gana la patente. Todos los movimientos son observados. En cada turno, una empresa puede elegir tomar 0, 1 o 2 pasos de desarrollo. Tomar 0 pasos en un turno no tiene costo. Tomar 1 paso cuesta \$40 millones, y tomar 2 pasos cuesta \$110 millones. Para simplificar, suponemos una tasa de descuento de cero.

Inicialmente, cada empresa está a 4 pasos de completar el desarrollo.

a) Describe y explica detalladamente qué sucederá en esta carrera de patentes y por qué. (Para eso hay que encontrar el o los ENPS).

b) Explica brevemente cuál es la justificación económica para otorgar derechos de propiedad intelectual como las patentes. ¿Cuáles son algunas desventajas para la sociedad de otorgar tales derechos?

Solución: Para el ejercicio se usará la notación $[abcd]$ para indicar que un jugador avanza a, b, c, d en ese orden a lo largo del juego. El corchete también puede ser de menor tamaño. También (a, b) representará los pasos avanzados por cada jugador, es decir, a los pasos hechos por A y b los pasos dados por B.

a) Primero notemos que los avances [22] no genera beneficios pero aseguran ganar la patente, pues el gasto de \$220 millones para ambos jugadores, sería mayor al pago final que es de \$200 millones. Sin embargo, ante cualquier plan del jugador B, el jugador A puede optar por [220] ó [211] y así asegurar la patente con un beneficio final de $-\$20$ millones y \$10 millones respectivamente. Pero, si un jugador pierde la patente y habiendo realizado al menos un movimiento no nulo, la pérdida (en beneficios) será mayor. Así que lo óptimo es asegurar la patente si es que se va a jugar. Dicho esto, A tiene el control del juego, por ende, la discusión es encontrar la forma más óptima de hacer esto para el jugador A.

   Razonando hacia atrás, la situación más óptima para A es $(1, b)$. Luego, B ante esta situación, como ya sabe que va a perder, decide no avanzar, entonces la situación se mantiene igual a $(1, b)$. Anterior a esto, A debe decidir sus últimos dos avances son 2 y 1 ó 1 y 1 en cuyo caso sus avances totales serán [121] y [211], y así B responde con los avances [000] (pérdida absoluta de la patente) y [22] (asegurarse la patente con pérdidas bajas). Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{ENPS} = \{A \quad &: \quad \text{Turno 1: Avanza 1 si B avanza 0, Turno 3: Avanza 2,} \\ B \quad &: \quad \text{Avanza 0 si A avanza 1, Avanza 2 si A avanza 2}\} \end{aligned}$$

   Además, este ENPS es único pues el razonamiento hacia atrás nos entrega las respuesta óptimas en cada nodo.

b) Según Schumpeter, la idea de entregar patentes es incentivar la innovación y la inversión en I+D. Al garantizar un monopolio temporal, digamos 20 años, las patentes permiten que los innovadores recuperen sus costos y obtengan beneficios, compensando los riesgos asociados a la investigación. Esto fomenta la creación de nuevos productos y tecnologías, impulsando así el progreso económico.

   Mientras que algunas desventajas podrían ser los monopolios ineficientes que elevan artificialmente los precios, limitan la competecia, el acceso al conocimiento y en algunos casos, frenan la innovación acumulativa al restringir el uso de tecnologías patentadas.

Pregunta 2: Considere el siguiente juego de etapa:

	C	D
C	(3,3)	(0,5)
D	(5,0)	(2,2)

El juego se repite infinitas veces y el pago de cada jugador es la suma descontada por un factor de descuento δ de todos los pagos de etapa. Se propone la siguiente estrategia gatillo con retardo:

- En $t = 1$ y $t = 2$, jugar C.
- Después:
  - Jugar C si (D, D) o (C, C) fue jugado en $t - 2$.
  - Jugar D si (D, C) o (C, D) fue jugado en $t - 2$.

Caracterice los valores de δ para los cuales es ENPS que ambos jugadores jueguen la estrategia gatillo con retardo.

Solución: Compararemos los pagos en donde hay colaboración, con los que se obtienen al desviar (en $t = 1$ y en $t = 2$). Dicho esto, procedemos a calcular el pago si no hay desvío:

$$\begin{aligned} P_{\text{coop}} &= \sum_{i=0}^{\infty} 3\delta^i \\ &= \frac{3}{1-\delta}. \end{aligned} \tag{1}$$

Mientras que si un jugador desvía, digamos en $t = 1$, el retardo en $t = 2$ le dará un pago de 3δ y para $t = 3$, el retardo se hace efectivo y juega D, luego el pago es $2\delta^2$, luego dado que ambos coincidieron en $t = 3$, vuelven a jugar C para $t \geq 4$ y el pago vuelve a ser 3:

$$\begin{aligned} P_{\text{desv}} &= 5 + 3\delta + 2\delta^2 + \sum_{i=3}^{\infty} 3\delta^i \\ &= 5 + 3\delta + 2\delta^2 + 3\left(\frac{\delta^3}{1-\delta}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Así, desde (1) y (2):

$$\begin{aligned} P_{\text{coop}} \geq P_{\text{desv}} \quad &\iff \quad \frac{3}{1-\delta} \geq 5 + 3\delta + 2\delta^2 + 3\left(\frac{\delta^3}{1-\delta}\right) \\ &\iff \quad 0 \geq \delta^3 - \delta^2 - 2\delta + 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Donde las raíces de $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ son $x_1 = -1$ y $x_2 = -\sqrt{2}$ y $x_3 = \sqrt{2}$, y desde que $0 < \delta < 1$ se sigue que no existen δ's que incentiven a cooperar.

El caso en que un jugador desvía, digamos en $t = 2$, la situación es análoga los jugadores vuelven a jugar lo mismo en $t = 4$, así, el pago por desviar será:

$$P_{\text{desv}} = 3 + 5\delta + 3\delta^2 + 2\delta^3 + 3\left(\frac{\delta^4}{1-\delta}\right),$$

y al resolver $P_{\text{coop}} \geq P_{\text{desv}}$ se tiene (después de unos cálculos) que es equivalente a:

$$0 \geq \delta^4 - \delta^3 - 2\delta^2 + 2\delta,$$

donde el polinomio $p(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x$ tiene por soluciones a $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$, y desde que $0 < \delta < 1$ se sigue no hay δ's que incentiven a cooperar.

En suma, no existe $0 < \delta < 1$ de modo que la cooperación de la estrategia gatillo con retardo sea ENPS, luego, siempre conviene desviar.

Pregunta 3: Dos jugadores A y B, se turnan para proponer una división de una torta de tamaño unitario. Primero, A hace una oferta. Si B acepta, el juego termina. En caso contrario, B rechaza y pasa una unidad de tiempo, durante la cual ambos jugadores descuentan su utilidad. Este proceso continúa durante N períodos. Si se llega a un acuerdo (a, b) en el período t (con $a + b = 1$), entonces el pago del jugador A es $\alpha^t a$ (donde α es el factor de descuento de A) y el pago de B es $\beta^t b$ (donde β es el factor de descuento de B).

a) Suponiendo que $\alpha, \beta < 1$ encuentre los ENPS de este juego y discuta qué ocurre cuando $N \to \infty$.

b) Explique qué ocurre con este resultado límite cuando $\alpha = \beta = 1$.

Solución:

1. Se razonará hacia atrás suponiendo que es el turno del jugador A en un instante t (el caso de B será simétrico). Si (a_t, b_t) es la propuesta de A en el período t, entonces A busca maximizar $a_t + b_t = 1$, es decir, $a_t = 1 - b_t$. El jugador B aceptará (y por ende el juego termina) siempre que $b_t \geq \beta b_{t+1}$, donde b_{t+1} es lo que recibiría en el período $t+1$ según el descuento β si es que rechaza la oferta en t, es decir, cuando es oferente. Entonces la propuesta óptima del jugador A cumplirá:

$$a_t = 1 - \beta b_{t+1}, \tag{4}$$

así la propuesta de A según (4) en t será $(1-\beta b_{t+1}, b_t)$ con $b_t = \beta b_{t+1}$. Dicho esto, el ENPS será aceptar siempre la propuesta, es decir, el ENPS estará formado por *aceptar,aceptar* en todos los períodos, y dependiendo la paridad de N es quien plantea la propuesta; si N es impar, propone A, mientras que si N es par, propone B.

Nota: El caso en que B sea el que decide en un instante t, la propuesta cumplirá $b_t = 1 - \alpha a_{t+1}$ con $a_t = \alpha a_{t+1}$.

En el caso en que $N \to \infty$, ambos jugadores plantearán siempre la misma propuesta, puesto que cualquier subjuego que comience en $t + j$ con $j > 0$, tendrá la misma cantidad de períodos que el juego que comienza en t. Es decir, las estrategias son invariantes en el tiempo y nuevamente el ENPS será formado por estrategias de aceptar,aceptar. Dicho esto, si (a_1^*, b_1^*) y (a_2^*, b_2^*) son las propuestas de A y B respectivamente, bajo el argumento del inciso a), se tendrá que la oferta óptima de A debe cumplir con $b_1^* = \beta b_2^*$ y la oferta óptima de B con $a_2^* = \alpha a_1^*$. Así, desde que $a_1^* + b_1^* = a_2^* + b_2^* = 1$, se sigue el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} a_1^* &= 1 - \beta b_2^* \\ b_2^* &= 1 - \alpha a_1^* \end{aligned}$$

el cual tiene por solución a la propuesta de A:

$$a_1^* = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \qquad \text{y} \qquad b_1^* = \frac{\beta - \alpha\beta}{1-\alpha\beta}. \tag{5}$$

Desde (5) se puede establecer que:

   i. Si $\alpha = \beta = \delta$ entonces los pagos finales para A y B serán $\frac{1}{1+\delta}$ y $\frac{\delta}{1+\delta}$ respectivamente. Es decir, B recibirá menos.

   ii. Si $\alpha = \beta = \delta$ y luego $\delta \to 1$ se tendrá que ambos reciben el mismo pago igual a $\frac{1}{2}$.

2. Si $\alpha = \beta = 1$, (5) no es preciso. Sin embargo, podemos hacer uso del comentario ii. hecho en el inciso anterior para concluir que ambos reciben un mismo pago igual a $\frac{1}{2}$.

Pregunta 4: Hay dos candidatos, A y B, que compiten en una elección. El resultado de la elección —es decir, si el candidato A o el candidato B es elegido— depende del voto de dos ciudadanos. La economía puede encontrarse en uno de dos estados posibles: $\{a, b\}$. Ambos ciudadanos coinciden en que el candidato A es mejor en el estado a, y que el candidato B es mejor en el estado b.

Cada ciudadano tiene preferencias idénticas, determinadas de la siguiente manera:

- Reciben una utilidad de 1 si gana el candidato que es mejor para el estado actual.
- Reciben una utilidad de 0.5 si hay un empate (es decir, si ambos candidatos reciben el mismo número de votos).
- Reciben una utilidad de 0 si gana el candidato que no es el mejor para el estado.

El Ciudadano 1 conoce el estado verdadero de la economía. El Ciudadano 2 cree que el estado verdadero es a con probabilidad 0.9 (y por lo tanto b con probabilidad 0.1). Cada ciudadano puede votar por A, votar por B, o abstenerse de votar.

a) Formule este problema como un juego bayesiano.

b) Demuestre que el juego tiene exactamente dos equilibrios de Nash en estrategias puras: uno en el que el Ciudadano 2 no vota, y otro en el que vota por A. Comente sobre la dominancia débil en uno de estos equilibrios.

Solución: A lo largo del problema, por comodidad ponemos $\omega_a = a, \omega_b = b$.

a) Dado que un juego bayesiano está formado por jugadores y estados, en nuestro caso:

   i. Los estados son los estados de la economía, a saber, ω_a y ω_b, luego $\Omega = \{\omega_a, \omega_b\}$.
   ii. Los jugadores son los dos ciudadanos, digamos C_1 y C_2, luego, $J = \{C_1, C_2\}$.

   Ahora, sólo falta precisar la información manejada por cada jugador:

   iii. Cada jugador puede votar A, B o abstenerse. Denotamos estas acciones como V_a, V_b o Abs respectivamente.
   iv. Las señales para C_1 son dadas, es decir, $\tau_1(\omega_a) = \omega_a$ y $\tau_1(\omega_b) = \omega_b$. Mientras que para C_2 no son dadas, es decir, $\tau_2(\omega_a), \tau_2(\omega_b) \notin \{\omega_a, \omega_b\}$.
   v. Las creencias para C_1 son tales que $\Pr(\omega_a|\tau_1(\omega_a)) = \Pr(\omega_b|\tau_2(\omega_b)) = 1$. Mientras que para C_2, al no tener señales dadas, estas son tales que $\Pr(\omega_a|\tau_2) = 0{,}9$ y $\Pr(\omega_b|\tau_2) = 0{,}1$.
   vi. En cuanto a los pagos de Bernoulli, sean $j, k \in \{a, b\}$ con $j \neq k$ entonces:

$$
\begin{aligned}
u_1(V_j, \omega_j) &= u_2(V_j, \omega_j) = 1 \\
u_1(V_j, \omega_k) &= u_2(V_k, \omega_k) = 0{,}5 \\
u_1(V_j, \omega_k) &= u_2(V_j, \omega_k) = 0.
\end{aligned}
$$

b) Para demostrar que el juego tiene exactamente dos equilibrios de Nash en estrategias puras, analizaremos las mejores respuestas de cada ciudadano en función de sus creencias y la información disponible. Se identifican dos ENPS mediante el análisis de las mejores respuestas de cada jugador.

   Se identifican dos EN en estrategias puras mediante el análisis de las mejores respuestas de cada jugador.

   a) **Equilibrio 1:** ((**Votar A, Votar B**), **Abstenerse**)
   - **Estrategia del Ciudadano 1:** Votar por el candidato preferido según el estado real de la economía ($s_1(a) =$ Votar A, $s_1(b) =$ Votar B).

- **Estrategia del Ciudadano 2:** Abstenerse ($s_2 =$ Abstenerse).
- **Justificación:**
  - **Ciudadano 1:** Si el Ciudadano 2 se abstiene, la mejor respuesta del Ciudadano 1 es asegurar la victoria de su candidato preferido, lo cual logra votando por A en el estado "a" y por B en el estado "b".
  - **Ciudadano 2:** Dada la estrategia del Ciudadano 1, si el Ciudadano 2 se abstiene, el resultado siempre es el óptimo para el estado actual (A gana en "a", B gana en "b"). La utilidad esperada para el Ciudadano 2 es $0{,}9 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 1 = 1$. Cualquier otra acción (Votar A o Votar B) le reporta una utilidad esperada estrictamente menor. Por tanto, abstenerse es su mejor respuesta.

b) **Equilibrio 2:** $((\textbf{Abstenerse, Votar B}), \textbf{Votar A})$

- **Estrategia del Ciudadano 1:** Abstenerse si el estado es "a", y Votar B si el estado es "b" ($s_1(a) =$ Abstenerse, $s_1(b) =$ Votar B).
- **Estrategia del Ciudadano 2:** Votar por A ($s_2 =$ Votar A).
- **Justificación:**
  - **Ciudadano 1:**
    - Si el estado es "a" y el Ciudadano 2 vota por A, el candidato A gana independientemente de si el Ciudadano 1 vota por A o se abstiene. Ambas acciones le dan una utilidad de 1. Abstenerse es una mejor respuesta.
    - Si el estado es "b" y el Ciudadano 2 vota por A, el Ciudadano 1 debe votar por B para forzar un empate (utilidad de 0.5) y evitar la victoria de A (utilidad de 0). Votar B es su mejor respuesta.
  - **Ciudadano 2:** Dada la estrategia del Ciudadano 1, si el Ciudadano 2 vota por A, su utilidad esperada es $0{,}9 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}95$. Esta utilidad es mayor que la que obtendría votando B (0.1) o absteniéndose (0.55). Por tanto, votar A es su mejor respuesta.

El segundo equilibrio, ((Abstenerse, Votar B), Votar A)), se sustenta en una estrategia débilmente dominada para el Ciudadano 1 de tipo "a". Comparemos las acciones `Votar A` y `Abstenerse` para el Ciudadano 1 cuando su tipo es "a":

- Si el Ciudadano 2 vota por A: $U_1(\text{Votar A}) = 1$ y $U_1(\text{Abstenerse}) = 1$. (Son indiferentes).
- Si el Ciudadano 2 vota por B: $U_1(\text{Votar A}) = 0{,}5 > U_1(\text{Abstenerse}) = 0$. (`Votar A` es estrictamente mejor).
- Si el Ciudadano 2 se abstiene: $U_1(\text{Votar A}) = 1 > U_1(\text{Abstenerse}) = 0{,}5$. (`Votar A` es estrictamente mejor).

La acción `Votar A` para el tipo "a" del Ciudadano 1 genera un pago igual o superior a `Abstenerse` contra todas las posibles acciones del Ciudadano 2, y estrictamente superior en al menos un caso. Por lo tanto, `Votar A` **domina débilmente a** `Abstenerse`.

Este tipo de equilibrios, aunque consistentes con la definición de Nash, son a menudo considerados menos *robustos* o *razonables* en la literatura, ya que el jugador está eligiendo una estrategia que es *riesgosa* sin ninguna ventaja compensatoria. Ciertos refinamientos del equilibrio de Nash, como el equilibrio perfecto en subjuegos (para juegos secuenciales) o el equilibrio perfecto en la mano temblorosa (para juegos estratégicos), buscan eliminar equilibrios que se basan en estrategias débilmente dominadas.