Métodos Cuantitativos (ENSTA640)

Otoño 2023. Pauta Prueba 3

Profesor: *Jorge Rivera.* **Ayudante:** *Camilo Jaramillo.*

Problema 1

En $t = 0, 1, 2, \ldots$, las poblaciones de dos colonias de bacterias son x_t e y_t, respectivamente. Dadas constantes positivas α, β, δ, estas poblaciones se vinculan de la siguiente manera:

$$x_{t+1} = \alpha x_t + y_t \tag{1}$$
$$y_{t+1} = \beta y_t + \delta x_t \tag{2}$$

(a) Suponiendo que x_0 es conocido y que $\delta = \alpha\beta$, encuentre la expresión de x_t en términos de los parámetros del problema. Con esta, obtenga la expresión de y_t.

(b) Explique por qué si $0 < \alpha + \beta < 1$ y $\delta = \alpha\beta$, entonces ambas colonias desaparecen en el largo plazo.

Respuesta:

(a) De (1) tenemos que $(i) : y_t = x_{t+1} - \alpha x_t$, y así $(ii) : y_{t+1} = x_{t+2} - \alpha x_{t+1}$. Usando esto en (2) se tiene que

$$x_{t+2} - \alpha x_{t+1} = \beta(x_{t+1} - \alpha x_t) + \delta x_t \quad \Longleftrightarrow \quad x_{t+2} - (\alpha+\beta)x_{t+1} + (\alpha\beta - \delta)x_t = 0.$$

Como $\delta = \alpha\beta$, lo anterior equivale a

$$x_{t+2} - (\alpha+\beta)x_{t+1} = 0.$$

Como las soluciones de $\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda = 0$ son $\lambda_1 = \alpha+\beta$ y $\lambda_2 = 0$, la solución del problema es

$$x_t = c_1 \cdot 0 + c_2(\alpha+\beta)^t = c_2(\alpha+\beta)^t.$$

Al imponer la condición inicial tenemos $c_2 = x_0$, por lo que la solución del problema es $x_t = x_0(\alpha+\beta)^t$. Usando esto en (i) anterior se obtiene

$$y_t = x_{t+1} - \alpha x_t = x_0(\alpha+\beta)^{t+1} - \alpha x_0(\alpha+\beta)^t = \beta x_0(\alpha+\beta)^t.$$

(b) Si $0 < \alpha+\beta < 1$, entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} x_t = 0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} y_t = 0$, es decir, ambas colonias desaparecen.

Problema 2

Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$y(t)\cdot y''(t) - (y'(t))^2 + y(t)\cdot y'(t) = (y(t))^2.$$

(a) Definiendo $z(t) = \ln(y(t))$, explique por qué la ecuación diferencial anterior es equivalente a

$$z''(t) + z'(t) = 1.$$

(b) Suponiendo que $y(0) = 1$ y que $y'(0) = 0$, usando todo lo anterior muestre que $y_s(t) = e^{\left\{-1+e^{-t}+t\right\}}$.

Respuesta:

(a) Si $z(t) = \ln(y(t))$ tenemos que

$$z'(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} \quad \Rightarrow \quad z''(t) = \frac{y(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot y'(t)}{(y(t))^2}.$$

Luego

$$z''(t) + z'(t) = 1 \quad \iff \quad \frac{y(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot y'(t)}{(y(t))^2} + \frac{y'(t)}{y(t)} = 1,$$

de modo que multiplicando ambos lados de esta igualdad por $(y(t))^2$ se obtiene lo indicado.

(b) Resolviendo $z''(t) + z'(t) = t$ se tiene:

• Solución homogénea: $\lambda^2 + \lambda = 0$ implica que $\lambda_1 = 0$ y que $\lambda_2 = -1$, de modo que

$$z_h(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-t} = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

• Solución particular: es directo ver que $z_p(t) = t$ es la solución particular.

Por lo anterior, la solución de la ecuación diferencial en $z(t)$ es

$$z_s(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + t.$$

Usando esto, tenemos que

$$\ln(y(t)) = c_1 + c_2 e^{-t} + t \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{\left\{c_1 + c_2 e^{-t} + t\right\}}.$$

A partir de lo anterior,

$$y'(t) = \left(1 - c_2 e^{-t}\right) e^{\left\{c_1 + t + c_2 e^{-t}\right\}},$$

de modo que imponiendo las condiciones iniciales se tiene:

$$(i) : y(0) = e^{c_1 + c_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0, \quad (ii) : y'(0) = (1 - c_2)e^{c_1 + c_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1.$$

De esta manera, $c_2 = 1$ y $c_1 = -1$, por lo que

$$y_s(t) = e^{\left\{-1 + e^{-t} + t\right\}}.$$

Problema 3

(a) Dadas ciertas condiciones iniciales, considere el siguiente problema de control óptimo

$$\begin{aligned} \min_u & \int_0^T e^{-rt} \left[\psi(x(t)) + \theta(u(t))\right] dt \\ \text{s.a.} \quad & x'(t) = ax(t) + bu(t). \end{aligned}$$

Plantee las condiciones de optimalidad y explique por qué se tiene lo siguiente:

$$u'(t) = \frac{1}{\theta''(u(t))} \left[b\psi'(x(t)) - (a - r)\, \theta'(u(t))\right].$$

(b) Usando lo anterior (**o el método que prefiera**), resuelva completamente el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_u \int_0^\infty e^{-t} & \left[(x(t))^2 + \frac{1}{2}(u(t))^2\right] dt \\ \text{s.a.} \quad & x'(t) = x(t) + u(t) \\ & x(0) = 1. \end{aligned}$$

mostrando que la solución es $x^*(t) = e^{-t}$, $u^*(t) = -2e^{-t}$. **Nota**. *En alguna parte debe usar condiciones de transversalidad.*

Respuesta:

(a) Para el problema, tenemos que

$$H = e^{-rt}\left[\psi(x(t)) + \theta(u(t))\right] + \lambda(t)\cdot\left[ax(t) + bu(t)\right].$$

Las condiciones de optimalidad implican que

$$\bullet \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-rt}\left[\theta'(u(t))\right] + b\,\lambda(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = -\frac{e^{-rt}\theta'(u(t))}{b} \tag{3}$$

$$\bullet \frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda' \quad \Rightarrow \quad e^{-rt}\left[\psi'(x(t))\right] + a\,\lambda(t) = -\lambda'(t). \tag{4}$$

De (3) tenemos

$$\lambda'(t) = -\frac{1}{b}\left(-re^{-rt}\theta'(u(t)) + e^{-rt}\theta''(u(t))\,u'(t)\right). \tag{5}$$

Usando (3) y (5) en (4) se obtiene

$$e^{-rt}\left[\psi'(x(t))\right] - a\,\frac{e^{-rt}\theta'(u(t))}{b} = \frac{1}{b}\left(-re^{-rt}\theta'(u(t)) + e^{-rt}\theta''(u(t))\,u'(t)\right),$$

por lo que (multiplicar por b ambos lados y cancelar la exponencial)

$$\left[b\,\psi'(x(t))\right] - a\,\theta'(u(t)) = -r\theta'(u(t)) + \theta''(u(t))\,u'(t).$$

Finalmente, despejando la derivada del control se obtiene

$$u'(t) = \frac{1}{\theta''(u(t))}\left[b\,\psi'(x(t)) - (a-r)\,\theta'(u(t)\right].$$

(b) El problema es

$$\begin{aligned} \min_u \int_0^\infty e^{-t} & \left[(x(t))^2 + \frac{1}{2}(u(t))^2\right] dt \\ \text{s.a.} \quad & x'(t) = x(t) + u(t) \\ & x(0) = 1. \end{aligned}$$

a partir lo cual identificamos:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \psi(x) = x^2, \quad \theta(u) = \frac{u^2}{2}, \quad r = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta'(u) = u, \quad \theta''(u) = 1, \quad \psi'(x) = 2x.$$

Con esto, por la mostrado en en la parte anterior, tenemos que

$$u'(t) = \frac{1}{\theta''(u(t))}\left[b\,\psi'(x(t)) - (a-r)\,\theta'(u(t)\right] = 2x(t),$$

de modo que el sistema de ecuaciones diferenciales por resolver es

$$u'(t) = 2x(t) \tag{6}$$
$$x'(t) = x(x) + u(t) \tag{7}$$

Derivando en (7) se tiene que $x''(t) = x'(t) + u'(t)$, y usando (6) es esto último tenemos

$$x''(t) = x'(t) + 2x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0.$$

Resolviendo $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ se tiene que

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$$

por lo que

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}.$$

Con $x(t)$ de lo anterior tenemos que

$$u(t) = x'(t) - x(t) = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} - c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} = c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-t}.$$

Luego, usando que $b = 1, \theta'(u) = u$, $r = 1$ obtenemos

$$\lambda(t) = -\frac{e^{-rt}\theta'(u(t))}{b} = -e^{-t} \cdot \left(c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-t}\right) = -c_1 e^{t} + 2c_2 e^{-2t}.$$

Las *condiciones de borde* del problema son

$$x(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 e^0 + c_2 e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 1$$
$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \left(-c_1 e^t + 2c_2 e^{-2t}\right) = 0.$$

Para que el límite anterior sea cero debe ocurrir que $c_1 = 0$, implicando que $c_2 = 1$. Con todo esto, la solución del problema es

$$x(t) = e^{-t}, \quad u(t) = -2e^{-t}.$$