Métodos Matemáticos

Profesor: Jorge Rivera
Ayudante: Emilio Guaman[1]

AYUDANTÍA 7
OTOÑO 2021

1 Consumo y formación de hábitos

Varios trabajos exploran el impacto de la formación de hábitos sobre el consumo. La idea es que niveles altos de consumo en el pasado reciente llevarán a una mayor utilidad marginal del consumo presente, porque el consumo es adictivo o formador de hábitos. Un enfoque para modelar la formación de hábitos es suponiendo que la función de utilidad instantánea toma la forma $u(C_t - bC_{t-1})$ o la forma $u[C_t/C_{t-1}^p]$, donde $u(\cdot)$ tiene las propiedades habituales de una función de utilidad y b y p toman valores entre 0 y 1. Los términos bC_{t-1} y C_{t-1}^p representan el hábito del hogar: un valor más alto del consumo reciente reduce la utilidad del consumo presente aumentando la utilidad marginal del consumo de hoy.

Considere la formulación secuencial del hogar con formación de hábitos. En $t = 0$ el hogar maximiza la utilidad descontada esperada:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t u(C_t, C_{t-1})$$

sujeto a la riqueza inicial A_0, a la condición de No Ponzi[2] y a la restricción presupuestaria intertemporal: $A_{t+1} = (1+r)(A_t + Y_t - C_t)$. γ denota el factor subjetivo de descuento, r es la tasa de interés (constante), A_t denota riqueza financiera al comienzo de t y Y_t denota el ingreso laboral del hogar en el periodo t, el cual sigue un proceso markoviano[3]. E_t denota la expectativa condicional en la información hasta el periodo t. La función de utilidad $u(C_t, C_{t-1})$ representa el flujo de utilidad experimentado por el hogar en t. Esta función permite capturar de manera general que el consumo presente y del periodo anterior afectan la utilidad presente; esta formulación incluye como casos particulares los dos ejemplos de formación de hábitos antes mencionados.

(a) Identifique las variables de estado y variables de control. Indique cuáles variables de estado son endógenas y cuáles exógenas, donde las endógenas son determinadas por acciones del agente económico y la exógenas no dependen de dichas acciones.

(b) Escriba la ecuación de Bellman del problema. Determine la condición de primer orden para el lado derecho de la ecuación de Bellman y las condiciones de la envolvente para cada una de las variables de estado endógenas.

[1] eguaman@fen.uchile.cl

[2] $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{(1+r)^T} = 0$. En términos simples, implica que la deuda del hogar no puede crecer infinitamente (no puede crecer más rápido que el interés).

[3] Proceso exógeno que no tiene memoria. El ingreso futuro es independiente del pasado, dado el ingreso presente.

(c) Utilice las expresiones de la parte (b) para mostrar que la ecuación de Euler viene dada por:

$$u_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t u_2(C_{t+1}, C_t) = \gamma(1+r)E_t\left[u_1(C_{t+1}, C_t) + \gamma u_2(C_{t+2}, C_{t+1})\right] \quad (1)$$

Donde u_1 y u_2 denotan denotan la derivada parcial de u con respecto a su primer y segundo argumento, respectivamente.

(d) En esta parte derivamos (1) de una manera alternativa. Suponga que C_{t-1}, C_t, C_{t+1} y C_{t+2} son los valores que toma el consumo en la trayectoria óptima y suponga que se reduce C_t en Δ, ahorrando dicho monto y consumiendo lo ahorrado en $t+1$. Considerando que para Δ pequeño esta variante en la trayectoria del consumo no altera la utilidad descontada esperada del hogar, derive (1).

2 Un problema de crecimiento en horizonte finito y luego en horizonte infinito

El siguiente problema está basado en Brock y Mirman (1972). Considere la versión simplificada de este:

$$\max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$\text{s.a} \quad f(k_t) + (1-\delta_t)k_t \geq c_t + k_{t+1}$$

Donde c es el consumo per cápita, k es el nivel de capital (per cápita) y δ es la tasa de depreciación del capital. El tiempo $t \geq 0$ es discreto y la función $u(c)$ cumple las condiciones de Inada.

(a) Asuma que $\delta_t = 1, \forall t$ y que el problema es en **tiempo finito**, donde $t \in [0, T]$. Explique la optimalidad del problema en los casos en que $t = T$ y $0 \leq t < T$. Para este último caso, encuentre la ecuación de Euler.

(b) Siga asumiendo $\delta_t = 1, \forall t$ y **tiempo finito**. Suponga además $u(c) = \ln(c)$ y $f(k) = k^\alpha$. Resuelva el problema en base a lo encontrado en el ítem anterior y encuentre la trayectoria óptima del capital. Muestre también que la trayectoria óptima cumple:

$$\lim_{T\to\infty} k_{t+1} = \alpha\beta k_t^\alpha, \quad \forall t$$

(c) Volvemos al problema original (**tiempo infinito**) y seguimos asumiendo $\delta_t = 1, \forall t$. Escriba la ecuación de Bellman e indique por qué el problema tiene solución. Obtenga la ecuación de Euler.

(d) Ocupando la trayectoria óptima del capital encontrada antes (el límite cuando $T \to \infty$), muestre que la candidata a función valor del problema general tiene la siguiente forma:

$$V(k_0) = A + D\ln(k_0)$$

P1

(a) Controles → C_t , A_{t+1} ⇒ Activos al inicio del sig. periodo.

(variables decisión)

Estado endógenas → A_t y C_{t-1} (Sí se determina a partir de decisiones de ahorro/consumo).

Estado exógena → Y_t

(No se determina en el modelo)

(b) $E_t X_t = E[X_t \mid \underbrace{\text{Info que tengo en } t}_{A_t,\, Y_t,\, C_{t-1},\, A_{t-1},\, Y_{t-1},\, \dots}]$

<u>Bellman</u>:

$$\Rightarrow V(C_{t-1}, A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t V(C_t, A_{t+1}) \right\}$$

Problema con incertidumbre (La incertidumbre es sobre Y_t).

$$\text{s.a. } A_{t+1} = (1+r)(A_t + Y_t - C_t)$$

⇒ A_0 dado

No ponzi: $\lim_{T \to \infty} \frac{A_T}{(1+r)^T} = 0$

Reemplazo la restricción:

$$V(C_{t-1}, A_t) = \max_{C_t} \left\{ U(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t V\left[C_t, (1+r)(A_t + Y_t - C_t) \right] \right\}$$

Solo 1 var control

$U_1 \to$ Derivada de U con respecto al primer componente

$$U(C_t, C_{t-1}) \Rightarrow U_1(C_t, C_{t-1}) = \frac{\partial U(C_t, C_{t-1})}{\partial C_t}$$

$$\Rightarrow U_2(C_t, C_{t-1}) = \frac{\partial U(C_t, C_{t-1})}{\partial C_{t-1}}$$

CPO lado derecho (Derivar con resp. a C_t):

$$U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t V_1(C_t, A_{t+1}) - \gamma E_t V_2(C_t, A_{t+1})(1+r) = 0$$

Ec(2): $U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t V_1(C_t, A_{t+1}) = \gamma(1+r) E_t V_2(C_t, A_{t+1})$

Teo. envolvente: Si $X(\alpha) = (X_1(\alpha), \dots, X_n(\alpha))$ es la trayectoria óptima y reemp. en f. objetivo:

$\Rightarrow f(x(\alpha), \alpha)$ es la f. obj. evaluada en el óptimo.

$$\Rightarrow \frac{d f(x(\alpha), \alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial f(x(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha} \Rightarrow \text{Derivada directa.}$$

Ocurre porque $\underbrace{\frac{\partial f(x(\alpha),\alpha)}{\partial x}}_{=0} \cdot \frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha}$

por que estoy en óptimo

(punto crítico → derivada = 0).

Condiciones envolvente:

Para C_{t-1}, derivamos $V(C_{t-1}, A_t)$ c/r a C_{t-1}:

$$\boxed{V_1(C_{t-1}, A_t) = U_2(C_t, C_{t-1}) \quad : \text{Ec } (3)}$$

Para A_t, derivo $V(C_{t-1}, A_t)$ c/r a A_t:

$$\boxed{V_2(C_{t-1}, A_t) = \gamma E_t V_2(C_t, A_{t+1})(1+r) \Rightarrow \text{Ec } (4)}$$

(c) Ley de expectativas iteradas (LIE)

I y J son conjuntos de variables aleatorias

y $I \subset J$ ⇒ para cualquier var. aleatoria x

I subconjunto estricto de J

$$E(E[x|J] \mid I) = E[y|I]$$

LIE implica: $E_t E_{t+1} X_{t+1} = E\left[E(X_{t+1} \mid \text{Info en } t+1) \mid \text{Info en } t\right]$

$= E(X_{t+1} \mid \text{Info en } t)$

$= E_t X_{t+1}$

pues Info en $t \underset{\text{subconj.}}{\subset}$ Info en $t+1$.

Tomo Ec (4): $V_2(C_{t-1}, A_t) = \gamma(1+r) E_t V_2(C_t, A_{t+1})$

y voy a reemp. en Ec (2):

$$U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t V_1(C_t, A_{t+1}) = \gamma(1+r) E_t V_2(C_t, A_{t+1})$$

Me queda:

$$\boxed{Ec\ (*) \quad U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t V_1(C_t, A_{t+1}) = V_2(C_{t-1}, A_t)}$$

Como Ec (3): $V_1(C_{t-1}, A_t) = U_2(C_t, C_{t-1})$

$\Rightarrow$ Adelanto un periodo: $V_1(C_t, A_{t+1}) = U_2(C_{t+1}, C_t)$

Reemp en Ec (*):

$$U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t U_2(C_{t+1}, C_t) = V_2(C_{t-1}, A_t)$$

Adelanto esto un periodo:

$$\boxed{Ec(5): \ U_1(C_{t+1}, C_t) + \gamma E_{t+1} U_2(C_{t+2}, C_{t+1}) = V_2(C_t, A_{t+1})}$$

Ahora tomo Ec (2) de nuevo:

$$U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t V_1(C_t, A_{t+1}) = \gamma(1+r) E_t V_2(C_t, A_{t+1})$$

por ec (3) $\Rightarrow$ $V_1(C_t, A_{t+1}) = U_2(C_{t+1}, C_t)$

Adelantando un periodo

Reemp:

$$\boxed{U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t U_2(C_{t+1}, C_t) = \gamma(1+r) E_t V_2(C_t, A_{t+1}) \quad Ec\ (6)}$$

Reemp Ec (5) en ec (6):

$$U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t U_2(C_{t+1}, C_t) = \gamma(1+r) E_t \left[U_1(C_{t+1}, C_t) + \gamma E_{t+1} U_2(C_{t+2}, C_{t+1}) \right]$$

por LIE: $\gamma^2(1+r) E_t E_{t+1} U_2(C_{t+2}, C_{t+1})$

$$= \gamma^2(1+r) E_t U_2(C_{t+2}, C_{t+1})$$

$\Rightarrow$ Con esto:

$$U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t U_2(C_{t+1}, C_t) = \gamma(1+r) E_t \left(U_1(C_{t+1}, C_t) + \gamma U_2(C_{t+2}, C_{t+1}) \right)$$

$\mathrel{/\!/}$?

Ec (1) del enunciado.

(d) Tomamos la f. valor y usamos que $\{C_t\}_{t=0}^{\infty}$ es la trayectoria óptima:

$$\Rightarrow V(C_{t-1}, A_t) = U(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t V(C_t, A_{t+1})$$

Adelanto un periodo:

Ec (*): $V(C_t, A_{t+1}) = U(C_{t+1}, C_t) + \gamma E_{t+1} V(C_{t+1}, A_{t+2})$

$\Rightarrow$

Adelanto ahora 2 periodos

Ec (**): $V(C_{t+1}, A_{t+2}) = U(C_{t+2}, C_{t+1}) + \gamma E_{t+2} V(C_{t+2}, A_{t+3})$

Reemp Ec (**) en Ec (*):

$$\boxed{V(C_t, A_{t+1}) = U(C_{t+1}, C_t) + \gamma E_{t+1} U(C_{t+2}, C_{t+1}) + \gamma^2 E_{t+1} V(C_{t+2}, A_{t+3})} \Rightarrow E_t \quad (***)$$

(pues por LIE : $E_{t+1} E_{t+2} V = E_{t+1} V$).

Reemp E_t $(***)$ en f. valor original :

$$V(C_{t-1}, A_t) = U(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t \left[U(C_{t+1}, C_t) + \gamma E_{t+1} U(C_{t+2}, C_{t+1}) + \gamma^2 E_{t+1} V(C_{t+2}, A_{t+3}) \right]$$

$$V(C_{t-1}, A_t) = U(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t U(C_{t+1}, C_t) + \gamma^2 E_t U(C_{t+2}, C_{t+1}) + \gamma^3 E_t V(C_{t+2}, A_{t+3})$$

$\Rightarrow$ (Donde usé LIE)

Ahora consideramos que en t: Reduzco C_t en Δ,

pérdida en términos de utilidad: $= -\underbrace{\Delta}_{\text{unidades que dejo de consumir}} \cdot \underbrace{U_1(C_t, C_{t-1})}_{\text{lo que valoraba por unidad.}}$

¿En $t+1$?

por un lado, gano: $\Delta(1+r) \cdot U_1(C_{t+1}, C_t)$

pero pierdo, pues si reduzco C_t: $-\Delta \cdot U_2(C_{t+1}, C_t)$

¿En $t+2$? Solo gano: $\Delta(1+r) \cdot U_2(C_{t+2}, C_{t+1})$

Como estoy en óptimo y si Δ es muy chico

$\Rightarrow$ El cambio en $V(A_t, C_{t-1}) = 0$.

Entonces:

$$V(A_t, C_{t-1}) = U(\underset{\text{cambia}}{C_t}, C_{t-1}) + \gamma E_t U(\overset{\text{cambia}}{C_{t+1}}, \overset{\text{cambia}}{C_t}) + \gamma^2 E_t U(\underset{\text{no cambia}}{C_{t+2}}, \overset{\text{cambia}}{C_{t+1}}) + \gamma^3 E_t \underbrace{V(C_{t+2}, A_{t+3})}_{\text{no cambia}}$$

Por tanto:

$$-\Delta U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma[(1+r)\Delta E_t U_1(C_{t+1}, C_t) - \Delta E_t U_2(C_{t+1}, C_t)] + \gamma^2 E_t U_2(C_{t+2}, C_{t+1}) \cdot \Delta(1+r) = 0$$

Reordeno:

$$\Delta[U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t U_2(C_{t+1}, C_t)] = \Delta \gamma (1+r) E_t[U_1(C_{t+1}, C_t) + \gamma U_2(C_{t+2}, C_{t+1})]$$

Cancelo los Δ:

$$\underbrace{U_1(C_t, C_{t-1}) + \gamma E_t U_2(C_{t+1}, C_t) = \gamma (1+r) E_t[U_1(C_{t+1}, C_t) + \gamma U_2(C_{t+2}, C_{t+1})]}_{\text{Ec}(1).}$$

P2)

INADA: $\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty$

$\Rightarrow \lim_{c\to\infty} u'(c) = 0$

(a) Note que $f(k_t) + (1-\cancel{d_t})k_t \geq c_t + k_{t+1}$

$$f(k_t) \geq c_t + k_{t+1}$$

Está activa siempre $\Rightarrow$ como $U(\cdot)$ es estrict. creciente en el consumo hace sentido consumir lo más posible

$\Rightarrow f(k_t) = c_t + k_{t+1}$

Por INADA $\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty \Rightarrow \underline{c_t > 0, \forall t}$

Además $k_t > 0$, $t = 0, \dots, T$ $\Rightarrow$ si $k_t = 0 \Rightarrow f(k_t) = 0$ y si $k_{t+1} \geq 0$

$\Rightarrow c_t = -k_{t+1} \leq 0$ X

y además $k_{t+1} < f(k_t) \Rightarrow$ si $k_{t+1} = f(k_{t+1})$ Restricción $\Rightarrow c_t = 0$.

2 escenarios

1) $t = T$ $\Rightarrow$ No hay periodo siguiente $\Rightarrow k_{T+1} = 0$

$$C_T + \cancel{k_{T+1}}^{\,0} = f(k_T)$$
$$C_T^* = f(k_T)$$

2) $\underline{0 \leq t < T}$: Consumimos una parte y otra la guardamos para acumular capital. (ya vimos que si no (si $k_t = 0$) $\rightsquigarrow$ $c_t \leq 0$ ✗ No puede pasar por $\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$).

Reemplazamos $c_t = f(k_t) - k_{t+1}$ en f. objetivo:

$$\max_{k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(f(k_t) - k_{t+1})$$

CPO (Derivo con respecto a k_{t+1}):

$$\beta^t u'(f(k_t) - k_{t+1}) \cdot (-1) + \beta^{t+1} u'(f(k_{t+1}) - k_{t+2}) \cdot f'(k_{t+1}) = 0$$

Divido por β^t y reorganizo:

Ec. Euler: $$u'(\underbrace{f(k_t) - k_{t+1}}_{c_t}) = \beta f'(k_{t+1}) u'(\underbrace{f(k_{t+1}) - k_{t+2}}_{c_{t+1}})$$

(b) Como $U = \ln(c) \Rightarrow u'(c) = \frac{1}{c}$

$$f(k) = k^\alpha \Rightarrow f'(k) = \alpha k^{\alpha - 1}$$

Reemp. en Ec. Euler:

$$\frac{1}{C_t} = \beta \cdot \frac{1}{C_{t+1}} \cdot \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}$$

$$\text{como } C_t = \underbrace{k_t^{\alpha}}_{f(k_t)} - k_{t+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k_t^{\alpha} - k_{t+1}} = \beta \left(\frac{1}{k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}} \right) \cdot \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \frac{k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}}{k_t^{\alpha} - k_{t+1}} = \alpha \beta k_{t+1}^{\alpha-1}$$

$$k_{t+1}^{1-\alpha} \left(\frac{k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}}{k_t^{\alpha} - k_{t+1}} \right) = \alpha \beta$$

$$\text{pues } \frac{1}{k_{t+1}^{\alpha-1}} = k_{t+1}^{-(\alpha-1)} = k_{t+1}^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{k_{t+1}^{1\cancel{-\alpha}\cancel{+\alpha}} - k_{t+1}^{1-\alpha} k_{t+2}}{k_t^{\alpha} - k_{t+1}} = \alpha \beta$$

multiplico por uno conveniente en lado izquierdo:

$$\frac{\frac{1}{k_{t+1}}}{\frac{1}{k_{t+1}}} \cdot \left(\frac{k_{t+1} - k_{t+1}^{1-\alpha} k_{t+2}}{k_t^{\alpha} - k_{t+1}} \right) = \alpha \beta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - \dfrac{k_{t+2}}{k_{t+1}^{\alpha}}}{\dfrac{k_t^{\alpha}}{k_{t+1}} - 1} = \alpha\beta$$

Defino $z_t \equiv \dfrac{k_{t+1}}{k_t^{\alpha}} \Rightarrow z_{t+2} = \dfrac{k_{t+2}}{k_{t+1}^{\alpha}}$,

$$\frac{1}{z_t} = \frac{k_t^{\alpha}}{k_{t+1}}$$

Entonces:

$$\frac{1 - z_{t+2}}{\dfrac{1}{z_{t+1}} - 1} = \alpha\beta \Rightarrow \quad 1 - z_{t+2} = \alpha\beta\left(\frac{1}{z_{t+1}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - z_{t+2} = \frac{\alpha\beta}{z_{t+1}} - \alpha\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{z_{t+1} = \frac{\alpha\beta}{1 - z_{t+2} + \alpha\beta}}$$

Ahora: $z_{T+1} = \dfrac{\overset{=0}{k_{T+1}}}{k_T^{\alpha}} = 0.$

$\Rightarrow$ En $T+1 \Rightarrow z_{T+1} = 0$

En T: $z_T = \dfrac{\alpha\beta}{1 - \underset{=0}{z_{T+1}} + \alpha\beta} = \dfrac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta}$

En T-1):
$$z_{T-1} = \frac{\alpha\beta}{1 - z_T + \alpha\beta} = \frac{\alpha\beta}{1 - \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} + \alpha\beta}$$

$$\Rightarrow z_{T-1} = \frac{\alpha\beta}{\frac{1+\cancel{\alpha\beta} - \cancel{\alpha\beta} + \alpha\beta(1+\alpha\beta)}{(1+\alpha\beta)}}$$

$$\boxed{z_{T-1} = \frac{\alpha\beta(1+\alpha\beta)}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2}}$$

En T-2):
$$z_{T-2} = \frac{\alpha\beta}{1 - z_{T-1} + \alpha\beta} = \frac{\alpha\beta}{1 - \frac{\alpha\beta(1+\alpha\beta)}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2} + \alpha\beta}$$

$$\Rightarrow z_{T-2} = \frac{\alpha\beta}{\frac{1+\cancel{\alpha\beta}+\cancel{(\alpha\beta)^2} - \cancel{\alpha\beta} - \cancel{(\alpha\beta)^2} + \alpha\beta(1+(\alpha\beta)+(\alpha\beta)^2)}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2}}$$

Es T-(T-2)

$$\Rightarrow z_{T-\underline{2}} = \frac{\alpha\beta(1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2)}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2+(\alpha\beta)^3} = \frac{\alpha\beta\sum_{t=0}^{2}(\alpha\beta)^t}{\sum_{t=0}^{3}(\alpha\beta)^t}$$

Es T-(T-2-1)

Si sigo repitiendo ; patrones.

En t+1):
$$z_{t+1} = \frac{\alpha\beta\sum_{t=0}^{T-(t+1)}(\alpha\beta)^t}{\sum_{t=0}^{T-t}(\alpha\beta)^t} = \frac{\alpha\beta\sum_{t=0}^{T-t-1}(\alpha\beta)^t}{\sum_{t=0}^{T-t}(\alpha\beta)^t}$$

Recordar que $\sum_{t=0}^{T} \alpha^t = \frac{1-\alpha^{T+1}}{1-\alpha}$

Por tanto:

$$z_{t+1} = \frac{\alpha\beta\left(\frac{1-(\alpha\beta)^{T-t-1+1}}{1-(\alpha\beta)}\right)}{\frac{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}}{1-(\alpha\beta)}} = \alpha\beta\left(\frac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}}\right)$$

Como $z_{t+1} = \frac{k_{t+1}}{k_t^{\alpha}}$

Reemplazo:

$$\Rightarrow \quad k_{t+1} = \alpha\beta\left(\frac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}}\right) k_t^{\alpha}$$

Note que T solo sale en la expresión entre paréntesis y que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}} = 1 \quad \text{, pues } \lim_{T\to\infty} (\alpha\beta)^{T} = 0$$

dado $|\alpha\beta| < 1$.

Entonces:

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} k_{t+1} = \alpha\beta k_t^{\alpha} \cdot \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}}\right) = \alpha\beta k_t^{\alpha}.}$$

(c) $V(k_0) = \max_{k_1} \{ u(f(k_0) - k_1) + \beta V(k_1) \}$

Que generalizando es:

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}} \left\{ U(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta V(k_{t+1}) \right\}$$

Ahora vimos antes que $k_t > 0$ y $k_t < f(k_t)$

pero tomamos ahora $k_t \geq 0$ y $k_t \leq f(k_t)$

pues como $k_t > 0$, cumple con $k_t \geq 0$ y análogo para $k_t < f(k_t)$.

Lo hacemos para tener a k_t en un conjunto compacto.

$\Rightarrow$ $k_{t+1} \in [0, f(k_t)] \to$ Es compacto

y como $V(k_t)$ es continua (pues U lo es)

$\Rightarrow$ Por Teo Weirstrass $\to$ f. continua maximizada en conj. compacto $\Rightarrow$ hay solución.

Derivamos ahora la Ec. de Euler

CPO del lado derecho Ec. Bellman:

$$\frac{\partial V(k_t)}{\partial k_{t+1}} = 0 \Leftrightarrow U'(f(k_t) - k_{t+1}) \cdot (-1) + \beta V'(k_{t+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{U'(f(k_t) - k_{t+1}) = \beta V'(k_{t+1}) \Rightarrow Ec (*)}$$

Condición envolvente:

$$\frac{\partial V(k_t)}{\partial k_t} = V'(k_t) = U'(f(k_t) - k_{t+1}) \cdot f'(k_t)$$

Adelanto un periodo: $V'(k_{t+1}) = U'(f(k_{t+1}) - k_{t+2}) f'(k_{t+1})$

y reemplazo en Ec. (A):

$$\boxed{U'(\underbrace{f(k_t) - k_{t+1}}_{c_t}) = \beta f'(k_{t+1})\, U'(\underbrace{f(k_{t+1}) - k_{t+2}}_{c_{t+1}})}$$

la misma ec. Euler que en caso con tiempo finito.
(para $0 \leq t < T$)

(d) Teníamos $\lim_{T\to\infty} k_{t+1} = \alpha\beta k_t^{\alpha}$

Tomamos esto $\Rightarrow$ $k_{t+1} = \alpha\beta k_t^{\alpha}$

Reemplazo en $V(k_0)$ (función valor, dada la cond. inicial).

si $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ es trayectoria óptima:

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(\underbrace{k_t^{\alpha}}_{f(k_t)} - \overbrace{\alpha\beta k_t^{\alpha}}^{k_{t+1}})$$

como $U = \ln(c)$

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(k_t^{\alpha} - \alpha\beta k_t^{\alpha}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left((1-\alpha\beta) k_t^{\alpha}\right)$$

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(1-\alpha\beta) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \alpha \ln(k_t)$$

Como $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \frac{1}{1-\beta}$

$$V(k_0) = \frac{\ln(1-\alpha\beta)}{1-\beta} + \alpha \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(k_t)$$

Ahora, como: $k_{t+1} = \alpha\beta k_t^{\alpha}$

En $t=0$: $k_1 = \alpha\beta k_0^{\alpha}$

En $t=1$: $k_2 = \alpha\beta k_1^{\alpha} = \alpha\beta(\alpha\beta k_0^{\alpha})^{\alpha}$

$$k_2 = \alpha\beta \cdot (\alpha\beta)^{\alpha} \cdot k_0^{\alpha^2}$$

$$k_2 = (\alpha\beta)^{1+\alpha} k_0^{\alpha^2}$$

En $t=2$: $k_3 = \alpha\beta k_2^{\alpha} = \alpha\beta\left((\alpha\beta)^{1+\alpha} \cdot k_0^{\alpha^2}\right)^{\alpha}$

$$k_3 = \alpha\beta \cdot \alpha\beta^{\alpha(1+\alpha)} \cdot k_0^{\alpha^3}$$

$$k_3 = (\alpha\beta)^{1+\alpha+\alpha^2} \cdot k_0^{\alpha^3}$$

$$\vdots$$

$$k_t = (\alpha\beta)^{1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{t-1}} \cdot k_0^{\alpha^t}$$

Aplico ln:

$$\ln(k_t) = \underbrace{(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{t-1})}_{\sum_{k=0}^{t-1}\alpha^k}\ln(\alpha\beta) + \alpha^t \ln(k_0)$$

$$\Rightarrow \ln(k_t) = \ln(\alpha\beta)\sum_{k=0}^{t-1}\alpha^k + \alpha^t \ln(k_0)$$

$$\ln(k_t) = \ln(\alpha\beta)\left(\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}\right) + \alpha^t \ln(k_0)$$

Reemplazo esto en $V(k_0)$:

$$V(k_0) = \frac{\ln(1-\alpha\beta)}{1-\beta} + \alpha\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[\ln(\alpha\beta)\left(\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}\right) + \alpha^t\ln(k_0)\right]$$

$$V(k_0) = \frac{\ln(1-\alpha\beta)}{1-\beta} + \frac{\alpha\ln(\alpha\beta)}{1-\alpha}\cdot\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(1-\alpha^t) + \alpha\sum_{t=0}^{\infty}(\alpha\beta)^t\ln(k_0)$$

Sumatoria geométrica en β y α $\Rightarrow$ será una cte.

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln(k_0)$$

Definiendo:

$$A \equiv \frac{\ln(1-\alpha\beta)}{1-\beta} + \frac{\alpha\ln(\alpha\beta)}{1-\alpha}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(1-\alpha^t)$$

$$\text{y}\quad D \equiv \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

Tengo

$$V(k_0) = A + B\ln(k_0)$$

$\square$