Métodos Matemáticos

Profesor: Jorge Rivera
Ayudante: Alberto Belmar[1]

AYUDANTÍA 6
OTOÑO 2022

Ecuaciones diferenciales y en diferencias

(a) Muestre que la función $T(x,t) = \psi e^{-\alpha\beta^2 t}\sin(\beta x)$ es una solución de la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Respuesta: Primero, es importante recordar que $(\sin(z))' = \cos(z)$ y $(\cos(z))' = -\sin(z)$.

Ahora bien, tomamos la función $T(x,t)$ y vemos si se cumple la relación,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= -\alpha\beta^2\psi e^{-\alpha\beta^2 t}\sin(\beta x) = 0 \\
\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} &= \psi e^{-\alpha\beta^2 t}\cos(\beta x)\beta = 0 \\
\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} &= -\psi e^{-\alpha\beta^2 t}\sin(\beta x)\beta^2 = 0
\end{aligned}$$

Si multiplicamos la última derivada por α, llegamos a la relación solicitada, por lo que $T(x,t)$ es una solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales.

(b) Solucione la ecuación en diferencias $y_t - \alpha y_{t-1} = \alpha t + \beta$. Considere $y_0 = 0$.

Respuesta: La solución homogénea sería:

$$y_t^h - \alpha y_{t-1}^h = 0 \Longleftrightarrow y_{t+1}^h - \alpha y_t^h = 0$$

Candidato a solución es $y_t^h = \lambda^t$, reemplazando:

$$\begin{aligned}
\lambda^{t+1} - \alpha\lambda^t &= 0 \\
\lambda^t(\lambda - \alpha) &= 0 \\
\lambda &= \alpha
\end{aligned}$$

[1] abelmarp@fen.uchile.cl

La solución homogénea es $y_t^h = c_1\alpha^t$ (recordar que si α^t es solución de la homogénea, cualquier combinación lineal también lo es).

Ahora, la solución particular $y_t^p = bt + d$. Reemplazando en la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} b(t+1) + d - \alpha(bt+d) &= \alpha t + \beta \\ bt + b + d - \alpha bt - \alpha d &= \alpha t + \beta \\ (b - \alpha b)t + (b + d - \alpha d) &= \alpha t + \beta \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

(i) $b - \alpha b = \alpha \implies b = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

(ii) $b + d - \alpha d = \beta \implies \frac{\alpha}{1-\alpha} + (1-\alpha)d = \beta \implies \alpha + (1-\alpha)^2 d = \beta(1-\alpha) \implies d = \frac{\beta(1-\alpha)-\alpha}{(1-\alpha)^2}$

Por lo tanto, la solución particular sería:

$$y_t^p = bt + d = \frac{\alpha}{1-\alpha}t + \frac{\beta(1-\alpha)-\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

Juntando la solución homogénea y particular,

$$y_t = c_1\alpha^t + \frac{\alpha}{1-\alpha}t + \frac{\beta(1-\alpha)-\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

Lo único que faltaría es determinar c_1. Para hacerlo, se ocupa la condición inicial $y_0 = 0$. Se evalúa esto en $t = 0$:

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1\alpha^0 + \frac{\alpha}{1-\alpha}0 + \frac{\beta(1-\alpha)-\alpha}{(1-\alpha)^2} \\ 0 &= c_1 + \frac{\beta(1-\alpha)-\alpha}{(1-\alpha)^2} \\ c_1 &= -\frac{(\beta(1-\alpha)-\alpha)}{(1-\alpha)^2} \end{aligned}$$

(c) La sucesión de Fibonacci es $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$, con $x_0 = 0$ $x_1 = 1$. Suponiendo que $\frac{x_{t+1}}{x_t}$ converge, muestre que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Respuesta: Resolvemos primero la ecuación del enunciado:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= x_{t+1} + x_t \\ x_{t+2} - x_{t+1} - x_t &= 0 \end{aligned}$$

Candidato a solución es $x_t = \lambda^t$. Reemplazando:

$$\begin{aligned} \lambda^{t+2} - \lambda^{t+1} - \lambda^t &= 0 \\ \lambda^t(\lambda^2 - \lambda - 1) &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$x_t = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

Ahora, se ocupa la condición inicial $x_0 = 0$ (evaluando en $t = 0$),

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ 0 &= c_1 + c_2 \\ c_1 &= -c_2 \end{aligned}$$

Ocupando la condición $x_1 = 1$ y evaluando en $t = 1$,

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ 1 &= c_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - c_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1 &= c_1\sqrt{5} \\ c_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \implies c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Resultando:

$$x_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

Ahora bien, suponiendo que $\frac{x_{t+1}}{x_t}$ converge, llamamos λ al límite, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \lambda$$

Como $\frac{x_{t+1}}{x_t}$ converge, entonces $\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{x_{t-1}}$. Recordando esto, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{x_t + x_{t-1}}{x_t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{x_{t-1}}{x_t}\right) \\
&= 1 + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{x_t/x_{t-1}} \\
&= 1 + \frac{1}{\lim_{t\to\infty}(x_t/x_{t-1})} \\
&= 1 + \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Luego, si multiplicamos la última expresión por λ, llegamos a:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= \lambda + 1 \\
\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Ahora bien, ¿por qué no sirve $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$?

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{x_t + x_{t-1}}{x_t} = 1 + \frac{x_{t-1}}{x_t}$$

notar que $1 + \frac{x_{t-1}}{x_t} > 1$, mientras que $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < 1$. Por lo que $\lambda = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Osea que nos queda:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Control óptimo

Parte 1

(a) Suponga que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ es una matriz definida negativa. Dado $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$, considere el siguiente problema de control óptimo:

$$\max_{u(t)} \int_0^T \frac{1}{2} Z(t)^{\mathbf{t}} A Z(t) dt \qquad s.a. \quad x'(t) = x(t) - \beta u(t) \quad + \quad C.I.$$

Dadas condiciones iniciales, **explique** por qué este problema se puede resolver completamente, es decir, es posible encontrar el estado y control óptimo (no los encuentre, solo explique por qué es posible encontrarlos).

Respuesta: Desarrollando, tenemos $Z(t)^{\mathbf{t}} A Z(t) = a[x(t)]^2 + 2bu(t)x(t) + c[u(t)]^2$. El problema a resolver es por ende:

$$\max_{u(t)} \int_0^T \frac{1}{2} \left[a[x(t)]^2 + 2bu(t)x(t) + c[u(t)]^2\right] dt \qquad s.a. \quad x'(t) = x(t) - \beta u(t) \quad + \quad C.I.$$

Sea $F(t, x(t), u(t)) \equiv \frac{1}{2} \left[a[x(t)]^2 + 2bu(t)x(t) + c[u(t)]^2\right]$ y $f(t, x(t), u(t)) \equiv x(t) - \beta u(t)$. Como f es lineal, para que el problema se pueda resolver de forma completa, debemos chequear que F sea cóncava en x, u. Para ello, podemos notar que el Hessiano de F es:

$$\mathcal{H}_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} \\ \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \\ b & c \end{bmatrix} = A$$

Como A es definida negativa, $\mathcal{H}_F$ es definida negativa. Esto es, F es cóncava (estricta) y el problema puede resolverse completamente. Alternativamente, se podía mostrar cualquiera de las otras condiciones presentadas en la proposición 7.2.2 del apunte.

Parte 2

Suponga que $x(t)$ es el **inventario** de cierto producto que hay en el instante t, con $t \in [0, T]$, y que $y(t)$ es el nivel de **producción** del mismo. El nivel de **venta** de ese producto en cada instante es $V(t)$, que suponemos es una **función conocida**.

(b) Explique por qué la condición $x'(t) = y(t) - V(t)$ es un "modelo razonable" para explicar la dinámica del inventario. ¿Cómo la extendería?

Respuesta: Lo primero es directo de la definición, pues implica que en cada momento del tiempo, el cambio en el inventario del producto está dado por la diferencia entre las unidades producidas y las vendidas. La extensión propuesta debe ser económicamente intuitiva y debe modelarse explícitamente. Por ejemplo, incorporar el hecho que el inventario puede depreciarse a una tasa constante δ implicaría restar δx en la condición anterior.

Suponga ahora que $D(x(t))$ es el **costo** de mantener el inventario $x(t)$, y que el costo de producción es $C(y(t))$. El problema de la firma es decidir el nivel de producción óptimo de modo de minimizar el costo según las componentes mencionadas. Si la tasa de descuento es $r \in]0,1[$, la función de costo total es

$$\int_0^T e^{-rt}\,[D(x(t)) + C(y(t))]\,dt.$$

(c) Dadas "ciertas condiciones iniciales", bajo la dinámica en la parte (b), plantee el problema de la firma y determine las correspondientes condiciones de optimalidad.

Respuesta: El problema a resolver es

$$\min_{y(t)} \int_0^T e^{-rt}\,[D(x(t)) + C(y(t))]\,dt$$

$$\text{s.a.} \quad x'(t) = y(t) - V(t)$$

$$\text{C.I.}$$

Donde el control es $y(t)$, el estado $x(t)$ y el co-estado $\lambda(t)$. El Hamiltoniano viene dado por:

$$H = e^{-rt}\,[D(x(t)) + C(y(t))] + \lambda(t)[y(t) - V(t)]$$

Las condiciones de optimalidad son (se omite el argumento t por simplicidad de la notación):

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow e^{-rt}C'(y) = -\lambda \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda' \Longleftrightarrow e^{-rt}D'(x) = -\lambda' \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x' \Longleftrightarrow x' = y - V \quad (3)$$

(d) Aplique las condiciones que obtuvo cuando

$$r = 0, \quad D(x) = \frac{h}{2}(x - \widehat{x})^2 \quad y \quad C(y) = \frac{c}{2}(y - \widehat{y})^2,$$

donde $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ son valores de referencia conocidos, y $h > 0$ $c > 0$ son parámetros. Para este caso, usando las condiciones de optimalidad que ya obtuvo, muestre que:

$$x''(t) - \frac{h}{c}\,x(t) = -\frac{h}{c}\widehat{x} - V'(t).$$

Respuesta: Tenemos

$$D'(x) = h(x - \widehat{x}), \quad C'(y) = c(y - \widehat{y})$$

Por ende, reemplazando y usando que $r = 0$, las condiciones (1) y (2) nos quedan como:

$$c(y - \widehat{y}) = -\lambda \quad (4)$$

$$h(x - \widehat{x}) = -\lambda' \quad (5)$$

Derivando (4) con respecto a t:

$$cy' = -\lambda' \quad (6)$$

Combinando esto con (5):

$$h(x - \widehat{x}) = cy' \quad (7)$$

Derivando (3) con respecto a t:

$$x'' = y' - V' \Longleftrightarrow y' = x'' + V' \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (7):

$$h(x - \widehat{x}) = c(x'' + V')$$

Reordenando, se obtiene lo pedido:

$$x'' - \frac{h}{c}x = -\frac{h}{c}\widehat{x} - V'$$