Métodos Matemáticos, 2022. Pauta Prueba 3

Profesor: Jorge Rivera
Profesor Ayudante: Alberto Belmar

*La prueba consta de tres problemas, y Ud. dispone de tres horas para responder. Si durante esas horas no alcanza a completar sus respuestas, **solo lo que dejó pendiente** puede enviarlo, como archivo pdf, al correo de Alberto. El plazo es hasta las 18hrs. del día de la prueba. Destaco que la evaluación de esos resultados considera una penalización.*

*Por último, en lo que sigue, cuando dice **explique** no implica resolver o encontrar lo pedido de manera explícita: es solo "explicar", de manera fundada y convincente...*

Problema 1

Dados los parámetros $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma \in \mathbb{R}_{++}$ y dada $m(t)$ una función conocida, considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \pi'(t) &= \alpha \cdot (p(t) - \pi(t)) && (1)\\ u'(t) &= -\gamma \cdot (m(t) - p(t)) && (2)\\ p(t) &= \beta_1 - \beta_2 u(t) + \beta_3 \pi(t). && (3) \end{aligned}$$

(a) Sobre la base de lo anterior, **explique** que existen constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y δ tal que

$$\pi''(t) + \varepsilon_1 \pi'(t) + \varepsilon_2 \pi(t) = \delta m(t).$$

(b) Respecto de lo anterior, suponga $m(t) = \beta^t$ (con β conocido) y que los parámetros del problema son tal que $\delta = 1$, $\varepsilon_1 = 2a$ y que $\varepsilon_2 = a^2$. Dado esto, si denotamos $\pi_s(t)$ como la **solución** de la ecuación diferencial de segundo orden anterior, encuentre las condiciones sobre a y β para que exista

$$\lim_{t \to \infty} \pi_s(t).$$

Respuesta. Para **(a)**, reemplazando (3) en (2) obtenemos una ecuación diferencial de la forma $u' = \alpha_1 u(t) + \alpha_2 \pi(t) + \alpha_3 m(t) + \alpha_4$, y reemplazando (3) en (1) obtenemos una ecuación diferencial de la forma $\pi' = \gamma_1 u(t) + \gamma_2 \pi(t) + \gamma_3 m(t) + \gamma_4$. Haciendo el reemplazo usual, eliminando u y u', se obtiene que

$$\pi''(t) + \varepsilon_1 \pi'(t) + \varepsilon_2 \pi(t) = \delta m(t) + \delta_2,$$

donde δ_2 es una constante que no se menciona en el enunciado (error menor, disculpas).

Para **(b)**, la solución homogénea viene de resolver la ecuación $\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 = 0$, por lo que $\lambda_1 = \lambda_2 = -a$. Con esto, la solución de la homogénea es $y_h(t) = c_1 e^{-at} + c_2 t e^{-at}$. La solución particular es la forma $y_p(t) = c_3 \beta^t$, por lo que la solución de la ecuación es de la forma

$$y_s(t) = c_1 e^{-at} + c_2 t e^{-at} + c_3 \beta^t.$$

Para que exista el límite, debe ocurrir que $a > 0$ y que $\beta \in [0, 1]$.

Problema 2

Dados $\delta > 0$ y $a \in]0,1]$ (es decir, $0 < a \leq 1$) consideremos la siguiente ecuación en diferencias (**no lineal**):

$$y_{n+1} \cdot y_n - \delta y_n = a^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(a) **Explique** por qué si $y_1 > 0$ entonces para todo $n \geq 2$ se tiene que $y_n \geq \delta$.

(b) Suponiendo que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, determine $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Considere alternativas según valores de "a".

Respuesta. Para **(a)**, notamos que

$$y_{n+1} = \frac{a^n}{y_n} + \delta.$$

Luego, si $y_1 > 0$ entonces $y_2 > \delta$. Como $y_2 > \delta$, entonces $y_2 > 0$, por lo que $y_3 > \delta$. Continuando con este esquema de análisis, se concluye directamente lo indicado. Para **(b)**, si $\lim_{n\to\infty} y_n = Y$, tomando límite en la ecuación se tiene que

$$Y^2 - \delta Y = \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 1 & si \quad a = 1 \\ 0 & si \quad 0 < a < 1. \end{cases}$$

Luego, cuando $a = 1$ se cumple que

$$Y^2 - \delta Y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{1,2} = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4}}{2}.$$

Partiendo de la base que $y_1 > 0$ (indicación durante desarrollo de la prueba), como $y_n > \delta$ ocurre que la **raíz positiva** es el resultado que se busca:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + 4}}{2}.$$

Cuando $0 < a < 1$, Y cumple que

$$Y^2 - \delta Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = \delta.$$

Como $y_n > \delta$, el límite buscado es $Y_2 = \delta$.

Problema 3

Dados $\beta \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b$, considere el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \int_a^b [\ln(x(t)) + \beta \ln(u(t))]\, dt \\ &x'(t) = x(t) \cdot (1 - u(t)) \\ &x(a) = x_b,\ x(b) = x_b. \end{aligned}$$

(a) **Primero**, plantee las condiciones de optimalidad de este problema. **Segundo**, a partir de esas condiciones se pide lo siguiente:

(a1) muestre que $(\lambda(t) \cdot x(t))' = -1$;

(a2) usando lo anterior concluya que

$$u(t) = \frac{\beta}{c_1 - t},$$

donde $c_1 \in \mathbb{R}$ es una constante.

(b) Usando el resultado de la parte (a2) y la restricción del problema, muestre que

$$x(t) = c_2 \cdot e^t \cdot (c_1 - t)^\beta,$$

donde c_2 es una segunda constante. Aunque no se pide, note que para obtener las constantes c_1 y c_2 uno debe aplicar las condiciones iniciales. ***Indicación:*** *recuerde que si* $g(x) = \ln(h(x))$ *entonces* $g'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$.

Por último, extendemos lo anterior introduciendo tasa de descuento. Así, dado $r > 0$ consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \int_a^b e^{-rt} \left[\ln(x(t)) + \beta \ln(u(t))\right] dt \\ &x'(t) = x(t) \cdot (1 - u(t)) \\ &x(a) = x_b,\ x(b) = x_b. \end{aligned}$$

(c) Usando las condiciones de optimalidad muestre que el control óptimo es dado por la función logística

$$u = \frac{r\,\beta\, e^{-rt}}{rc_3 + e^{-rt}},$$

donde c_3 es una constante. A partir de esto, **explique** cómo obtendría $x(t)$.

Respuesta. Omitiendo la variable t, para **(a)** tenemos que

$$H = \ln(x) + \beta \ln(u) + \lambda \cdot (x \cdot (1 - u)),$$

por lo que las condiciones de optimalidad son

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{u} - \lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\beta}{\lambda x} && (4) \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -\lambda' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \lambda(1-u) = -\lambda' && (5) \\ x' &= x \cdot (1 - u). && (6) \end{aligned}$$

De (5) tenemos que

$$1 + \lambda x(1-u) = -\lambda' x \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda x(1-u) + \lambda' x = -1.$$

Por (6) tenemos que $x' = x \cdot (1 - u)$, por lo que usado en lo anterior implica que (c_1 es una constante)

$$\lambda x' + \lambda' x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda x)' = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda x = c_1 - t \quad \stackrel{en\ (4)}{\Longrightarrow} \quad u = \frac{\beta}{\lambda x} = \frac{\beta}{c_1 - t}.$$

Para **(b)**, lo anterior en (6) implica que

$$x' = x \cdot \left(1 - \frac{\beta}{c_1 - t}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{x} = \left(1 - \frac{\beta}{c_1 - t}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad (\ln(x))' = \left(1 - \frac{\beta}{c_1 - t}\right).$$

Integrando se obtiene

$$\ln(x) = t + \beta \ln(c_1 - t) + c_2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^t \cdot (c_1 - t)^\beta \cdot e^{c_2}.$$

Para **(c)**, respecto del problema

$$\begin{aligned} &\max \int_a^b e^{-rt} \left[\ln(x(t)) + \beta \ln(u(t))\right] dt \\ &x'(t) = x(t) \cdot (1 - u(t)) \\ &x(a) = x_b,\ x(b) = x_b. \end{aligned}$$

tenemos que

$$H = e^{-rt} \left[\ln(x) + \beta \ln(u)\right] + \lambda \cdot (x \cdot (1 - u)),$$

por lo que las condiciones de optimalidad de ese problema son

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-rt}\beta}{u} - \lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{e^{-rt}\beta}{\lambda x} \tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda' \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-rt}}{x} + \lambda(1 - u) = -\lambda' \tag{8}$$

$$x' = x \cdot (1 - u). \tag{9}$$

De (8) tenemos que

$$e^{-rt} + \lambda x(1 - u) = -\lambda' x \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda x(1 - u) + \lambda' x = -e^{-rt}.$$

Por (9) tenemos que $x' = x \cdot (1 - u)$, por lo que usado en lo anterior implica que (c_1 es una constante)

$$\lambda x' + \lambda' x = -e^{-rt} \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda x)' = -e^{-rt} \quad \Rightarrow \quad \lambda x = c_1 + \frac{1}{r} e^{-rt} \quad \overset{\text{en (7)}}{\Longrightarrow} \quad u = \frac{\beta\, e^{-rt}}{\lambda x} = \frac{\beta\, e^{-rt}}{c_1 + \frac{1}{r} e^{-rt}},$$

es decir

$$u = \frac{r\,\beta\, e^{-rt}}{r c_1 + e^{-rt}}.$$

Lo anterior en (9) implica que

$$x' = x \cdot \left(1 - \frac{r\,\beta\, e^{-rt}}{r c_1 + e^{-rt}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{x} = \left(1 - \frac{r\,\beta\, e^{-rt}}{r c_1 + e^{-rt}}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad (\ln(x))' = \left(1 - \frac{r\,\beta\, e^{-rt}}{r c_1 + e^{-rt}}\right),$$

a partir de lo cual uno puede obtener x.