Métodos Matemáticos

Profesor: Jorge Rivera
Ayudante: Emilio Guaman[1]

Ayudantía 5
Otoño 2021

1 Ecuaciones diferenciales y en diferencias

(a) Muestre que la función $\psi e^{-\alpha\beta^2 t}\sin(\beta x)$ es una solución de la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:
$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

(b) Solucione la ecuación en diferencias $y_t - a y_{t-1} = \alpha t + \beta$. Considere $y_0 = 0$.

(c) La sucesión de Fibonacci es $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$, con $x_0 = 0$ $x_1 = 1$. Suponiendo que $\frac{x_{t+1}}{x_t}$ converge, muestre que:
$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(d) Considere la siguiente ecuación diferencial:
$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+\delta)k(t)$$

Donde $f(k) = Ak^\alpha$ y $k(0) = k_0$ viene dado. $\dot{k}$ denota la derivada de k con respecto al tiempo. Resuelva la ecuación de modo de obtener una expresión explícita para la dinámica de k. **Ind:** Puede ser útil hacer el reemplazo $v = k^{1-\alpha}$.

2 Ecuaciones diferenciales y en diferencias no lineales

(a) Use el hecho $\frac{1}{x-\gamma x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{1-\gamma x}$, con γ constante, para encontrar $\int \frac{1}{x-\gamma x^2}dx$.

(b) Consideremos ahora la ecuación diferencial no lineal [**1**] $y'(t) = \alpha\, y(t) - \beta\, [y(t)]^2$, donde α, $\beta > 0$ son constantes. La condición inicial es $y(0) = y_0$. Observado que si $h(x) = \ln(f(x))$ entonces $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, y que
$$y'(t) = \alpha y(t) - \beta[y(t)]^2 \iff \frac{y'(t)}{y(t) - \frac{\beta}{\alpha}[y(t)]^2} = \alpha,$$
usando la parte (a) se pide resolver la ecuación diferencial [**1**]. Con esa solución encuentre $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Compruebe que ese límite se pudo haber obtenido usando [**1**]. Sin embargo, ¿por qué no sería completamente "correcto" haberlo obtenido sólo de la ecuación diferencial?

Cambiando de tema, el siguiente "modelo discreto" tiene aplicaciones en diversos problemas: dada una sucesión $K_n > 0$ y una constante $\nu > 1$, la ecuación en diferencias (no lineal) que nos interesa estudiar es [**2**] $x_{n+1} = \frac{\nu K_n x_n}{K_n + (\nu-1)x_n}$.

[1] eguaman@fen.uchile.cl

(c) Haciendo $\delta = \frac{\nu-1}{\nu}$, muestre que **[2]** es equivalente a **[3]** $(1-\delta)x_{n+1} = x_n - \frac{\delta\, x_{n+1}\, x_n}{K_n}$.

La ecuación en diferencias **[3]** no se puede resolver de manera "analítica". Sin embargo, podemos obtener una "solución aproximada" pasando a tiempo continuo. En lo que sigue $K(t) = K^*$.

(d) Ordene los términos en **[3]** y use la parte (b) para encontrar una "solución aproximada" de ella, en tiempo continuo. ¿Qué tan "buena" Ud. cree que será esa aproximación? Discuta.

P1)

(d) $\dot{k}(t) = s f(k(t)) - (n+\delta)k(t)$

$\boxed{\dot{k}(t) = k'(t) = \frac{dk(t)}{dt}}$ $f(k) = Ak^{\alpha}$

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k$$

Multpor $k^{-\alpha}$:

$$k^{-\alpha}\dot{k} = sA\underbrace{k^{-\alpha}k^{\alpha}}_{1} - (n+\delta)k^{1-\alpha}$$

$$k^{-\alpha}\dot{k} + (n+\delta)k^{1-\alpha} = sA$$

$$V = k^{1-\alpha} \Rightarrow \dot{V} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}$$

$$k^{-\alpha}\dot{k} = \frac{\dot{V}}{(1-\alpha)}$$

Reemplazo :

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-\alpha)}\dot{V} + (n+\delta)V = sA$$

Sol homogénea: $\frac{1}{1-\alpha}\dot{v}^h + (n+\delta)v^h = 0$

candidato: $v^h = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \dot{v}^h = \lambda e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\lambda e^{\lambda t} + (n+\delta)e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\lambda + (n+\delta) = 0$

$\boxed{\lambda = -(1-\alpha)(n+\delta)}$

$\Rightarrow v^h = \underbrace{b}_{cte} \cdot e^{-(1-\alpha)(n+\delta)}$

Sol particular:

$\frac{1}{(1-\alpha)}\dot{v}^p + (n+\delta)v = sA$

$\dot{v}^p + (n+\delta)(1-\alpha)v = \underbrace{sA(1-\alpha)}_{cte}$

candidato: $v^p = \theta$

$\dot{v}^p = 0$

Reemplazo:

$(n+\delta)(1-\alpha)\theta = sA(1-\alpha)$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{sA}{n+\delta}}$

$\Rightarrow \boxed{v^p = \frac{sA}{n+\delta}}$

Sol. general: $v(t) = v^h(t) + v^p(t)$

$$V(t) = b\cdot e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{sA}{n+\delta}$$

Evalúo en $t=0$:

$$\underbrace{V(0)}_{[k_0]^{1-\alpha}} = b\cdot \underbrace{e^{0}}_{1} + \frac{sA}{n+\delta}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{n+\delta}}$$

$$\Rightarrow V(t) = k(t)^{1-\alpha} = \frac{sA}{n+\delta} + \left[k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{n+\delta}\right]e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}$$

$\Rightarrow$ Función de capital per cap.

Forma alternativa: Método del factor integrante

$$\dot{V}(t) + (n+\delta)(1-\alpha)V(t) = sA(1-\alpha)$$

Multiplico $e^{(n+\delta)(1-\alpha)t}$ e integro:

$$\int e^{(n+\delta)(1-\alpha)t}\left[\dot{V}(t) + (n+\delta)(1-\alpha)V(t)\right]dt$$

$$= sA(1-\alpha)\int e^{(n+\delta)(1-\alpha)t}\,dt$$

El truco es:

$$\frac{d\left[e^{(n+\delta)(1-\alpha)t} v(t)\right]}{dt} = e^{(n+\delta)(1-\alpha)t} \left[\dot{v}(t) + (n+\delta)(1-\alpha)v(t)\right]$$

Volviendo

$$\Rightarrow e^{(n+\delta)(1-\alpha)t} v(t) + \underbrace{b}_{cte} = sA(1-\alpha)\underbrace{\int e^{(1-\alpha)(n+\delta)t}\,dt}_{\frac{sA(1-\alpha)e^{(1-\alpha)(n+\delta)t}}{(1-\alpha)(n+\delta)} + \underbrace{c}_{cte}}$$

$$\Rightarrow e^{(n+\delta)(1-\alpha)t} v(t) = \underbrace{a}_{c-b}^{cte} + \frac{sA}{n+\delta} e^{(1-\alpha)(n+\delta)t}$$

Multiplico $e^{-(n+\delta)(1-\alpha)t}$
$\Rightarrow$

$$\boxed{v(t) = a e^{-(n+\delta)(1-\alpha)t} + \frac{sA}{n+\delta}}$$

Si impongo $v(0) = k_0^{1-\alpha}$
obtengo b.

$\Rightarrow$ Ver Apéndice Mat.
Barro-i-Sala-i-Martin.

P2)

(a) $$\frac{1}{x-\gamma x^2} = \frac{1 + (1-\gamma x) - (1-\gamma x)}{x(1-\gamma x)}$$

$$= \frac{1-\gamma x}{x(1-\gamma x)} + \frac{1-1+\gamma x}{x(1-\gamma x)}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{\gamma x}{x(1-\gamma x)} = \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{1-\gamma x} \checkmark$$

Buscamos:

$$\int \frac{1}{x-\gamma x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\gamma}{1-\gamma x}\right) dx$$

$$= \underbrace{\int \frac{1}{x}\,dx}_{\ln(x)+k_1} + \int \frac{\gamma}{1-\gamma x}\,dx$$

k_1 cte

$$\int \frac{1}{x-\gamma x^2}\,dx = \ln(x) + k_1 + \int \frac{\gamma}{1-\gamma x}\,dx$$

Notar que si $\boxed{g(x) = 1-\gamma x}$

$g'(x) = -\gamma$

$$\Rightarrow \int \frac{\gamma}{1-\gamma x}\,dx = -\int \frac{-\gamma}{1-\gamma x}\,dx = -\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

Regla de la deriv. dividida por una función

si $F(x) = \ln(g(x))$

$$F'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow \int F'(x)\,dx = \ln(g(x)) + k_2$$

k_2 cte

Aplico esto:

$$\int \frac{\gamma}{1-\gamma x}\,dx = -\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = -\ln|g(x)| + k_2$$

$$= -\ln(1-\gamma x) + k_2$$

Volvimos:

$$\int \frac{1}{x-\gamma x^2}\,dx = \ln(x) - \ln(1-\gamma x) + \underbrace{k}_{k_1+k_2}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x-\gamma x^2}\,dx = \ln\left(\frac{x}{1-\gamma x}\right) + k}$$

(6)

Como $\frac{1}{x-\gamma x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{1-\gamma x}$

Si $x = y(t)$
$\gamma = \frac{B}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y(t) - \frac{B}{4}(y(t))^2} = \frac{1}{y(t)} + \frac{\frac{B}{4}}{1-\frac{B}{4}y(t)}$$

Mult por $y'(t)$:

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t) - \frac{B}{4}(y(t))^2} = \frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{\frac{B}{4}y'(t)}{1-\frac{B}{4}y(t)}$$

como la ec. dif a resolver es

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)-\frac{\beta}{\alpha}(y(t))^2} = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{\frac{\beta}{\alpha}y'(t)}{1-\frac{\beta}{\alpha}y(t)} = \alpha$$

Aplico integral:

$$\underbrace{\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt}_{} + \underbrace{\int \frac{\frac{\beta}{\alpha}y'(t)}{1-\frac{\beta}{\alpha}y(t)}}_{} = \alpha\int dt$$

Regla deriv. div. por función $\Rightarrow = \ln(y(t)) + c_1$

si $g(x) = 1-\frac{\beta}{\alpha}y(t) \Rightarrow g'(x) = -\frac{\beta}{\alpha}$

$$\int \frac{\frac{\beta}{\alpha}y'(t)}{1-\frac{\beta}{\alpha}y(t)} = -\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dt = -\ln(g(x)) + c_2$$

$$= -\ln\left(1-\frac{\beta}{\alpha}y(t)\right) + c_2$$

por tanto volviendo:

$$\ln(y(t)) - \ln\left(1-\frac{\beta}{\alpha}y(t)\right) + \underbrace{c}_{} = \alpha\underbrace{\int dt}_{\alpha t + \underbrace{c}_{cte}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y(t)}{1-\frac{\beta}{\alpha}y(t)}\right) = \alpha t + \underbrace{b}_{cte = k - c}$$

Aplico exponencial:

$$\frac{y(t)}{1-\frac{\beta}{\alpha}y(t)} = e^{\alpha t+b}$$

$$y(t) = e^{\alpha t+b}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}y(t)\right)$$

$$y(t) = e^{\alpha t+b} - e^{\alpha t+b}\frac{\beta}{\alpha}y(t)$$

$$\Rightarrow y(t)\left[1+\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha t+b}\right] = e^{\alpha t+b}$$

$$y(t) = \frac{e^{\alpha t+b}}{1+\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha t+b}}$$

Evalúo en $t=0$ $(y(0)=y_0)$:

$$y_0 = \frac{e^{\alpha\cdot 0+b}}{1+\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha\cdot 0+b}} = \frac{e^{b}}{1+\frac{\beta}{\alpha}e^{b}}$$

$$\Rightarrow y_0\left(1+\frac{\beta}{\alpha}e^{b}\right) = e^{b}$$

$$y_0 + \frac{\beta}{\alpha}e^{b}y_0 = e^{b}$$

$$y_0 = e^{b}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}y_0\right)$$

$$e^{b} = \frac{y_0}{1-\frac{\beta}{\alpha}y_0}$$

Aplico ln:

$$\boxed{b^* = \ln\left(\frac{y_0}{1-\frac{\beta}{\alpha}y_0}\right)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{e^{\alpha t+b^*}}{1+\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha t+b^*}} = \frac{e^{\alpha t+\ln\left(\frac{y_0}{1-\frac{\beta}{\alpha}y_0}\right)}}{1+\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha t+\ln\left(\frac{y_0}{1-\frac{\beta}{\alpha}y_0}\right)}}$$

El límite:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{\alpha t+b^*}}{1+\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha t+b^*}}$$

L'hopital:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\alpha e^{\alpha t+b^*}}{\alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha t+b^*}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

(pues $\alpha,\beta>0$)

Ahora, obtenemos lim con [1]:

$$y'(t) = \alpha y(t) - \beta(y(t))^2$$

"Paso 0" → Chequear que la solución de la ec. dif converge cuando $t\to\infty$

sin resolver, no podemos!

si SUPONEMOS que si converge, es equivale:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0}$$

$$y'(t) = \alpha y(t) + \beta (y(t))^2$$

Aplico lim cuando $t\to\infty$:

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} y'(t)}_{0} = \alpha \lim_{t\to\infty} y(t) - \beta \lim_{t\to\infty} (y(t))^2$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\beta}{\alpha} \underbrace{\lim_{t\to\infty} (y(t))^2}_{\lim y(t) \cdot \lim y(t)}$$

Se cumple si:

- (i) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

$$\boxed{\text{(ii)} \ \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\alpha}{\beta}} \quad \checkmark$$

pues si ocurre (ii), reemp:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\cancel{\beta}}{\cancel{\alpha}} \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \checkmark$$

(c) Tomo (2): $x_{n+1} = \frac{v k_n x_n}{k_n + (v-1)x_n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{v k_n}\right)}{\left(\frac{1}{v k_n}\right)}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\frac{1}{v} + \frac{(v-1)}{v}\frac{x_n}{k_n}}$$

Como $\delta = \frac{v-1}{v} \Rightarrow 1-\delta = 1 - \frac{(v-1)}{v} = \frac{v-v+1}{v}$

$$1-\delta = \frac{1}{v}$$

Reemp:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{(1-\delta) + \delta \frac{x_n}{k_n}}$$

$$\to x_{n+1}\left[(1-\delta) + \frac{\delta x_n}{k_n}\right] = x_n$$

$$(1-\delta)x_{n+1} + \frac{\delta x_n x_{n+1}}{k_n} = x_n$$

$$\boxed{(1-\delta)x_{n+1} = x_n - \frac{\delta x_n x_{n+1}}{k_n}} \quad [3]$$

(d) Tomo (3): $(1-\delta)x_{n+1} = x_n - \frac{\delta x_n x_{n+1}}{k_n}$

$$\frac{\delta x_n x_{n+1}}{k_n} = x_n - (1-\delta)x_{n+1}$$

$$\frac{\delta x_n x_{n+1}}{k_n} - \delta x_{n+1} = x_n - x_{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$x_{n+1} - x_n = \delta x_{n+1} - \frac{\delta x_n x_{n+1}}{k_n}$$

Recordemos:

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Estamos con una sucesión $n \in \mathbb{N}$

Si impongo $h \approx 1$ y quito el límite:

$$x'(t) \approx \frac{x(t+1) - x(t)}{1} \approx x_{n+1} - x_n$$

Aproximaciones

$$x'(t) \approx x_{n+1} - x_n$$
$$x(t) \approx x_n$$
$$k_n = k(t) = k^*$$

Supuestos: $x'(t) = x'(t+1)$ y $x(t)x(t+1) \approx [x(t+1)]^2$

$\Rightarrow x(t) = x(t+1)$

Tenía $x_{n+1} - x_n = \delta x_{n+1} - \frac{\delta x_n x_{n+1}}{k_n}$

Lo aproximo por:

$$x'(t+1) = \delta x(t+1) - \delta \frac{[x(t+1)]^2}{k^*}$$

Retomo un período:

$$\Rightarrow x'(t) = \delta x(t) - \delta \frac{(x(t))^2}{K^*}$$

En punto (b): $y'(t) = \alpha y(t) - \beta (y(t))^2$

Si defino $\beta \equiv \dfrac{\delta}{K^*}$ y $\alpha \equiv \delta$

$$\Rightarrow x'(t) = \alpha x(t) - \beta (x(t))^2$$

ya vimos en (b) que la solución es de la forma:

$$y(t) = \frac{e^{\alpha t + b^*}}{1 + \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t + b^*}}$$

Acá $y(t) = x(t)$, $\alpha = \delta$, $\beta = \dfrac{\delta}{K^*} = \dfrac{\alpha}{K^*}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{e^{\delta t + c^*}}{1 + \frac{1}{K^*} e^{\delta t + c^*}}}$$

con c^* una cte que se determina con la cond. inicial.

La sol aproximada:

$$\Rightarrow x_n = \frac{e^{\delta n + c^*}}{1 + \frac{1}{K^*} e^{\delta n + c^*}}$$

¿Qué tan buena es?

Si $\underline{n \text{ es "grande"}}$ y si la solución

converge $\Rightarrow$ $x_n \simeq x_{n+1}$ $\Rightarrow$ $x_{n+1} - x_n \simeq 0$
$\Leftarrow$

(¡Esto usamos!)

Ahí la aprox es buena

Si n pequeño $\Rightarrow$ no aproxima bien.

No hay criterio para saber

que es n "grande".

Partes que faltaron

P1 (d) Tomamos $T(x,t) = \psi e^{-\alpha\beta^2 t} \sin(\beta x)$

y verificamos que cumple la ecuación

Derivo c/r a t:

$$\Rightarrow \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\alpha\beta^2 \psi e^{-\alpha\beta^2 t} \sin(\beta x)$$

Derivo c/r a x:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \psi e^{-\alpha\beta^2 t} \cos(\beta x)\, \beta$$

Recordar:

$$(\sin(z))' = \cos(z)$$
$$(\cos(z))' = -\sin(z)$$

Portanto, segunda derivada c/r a x:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \psi e^{-\alpha\beta^2 t}(-\sin(\beta x))\beta^2$$

$$= -\beta^2 \psi e^{-\alpha\beta^2 t}\sin(\beta x)$$

Si Multiplico por α:

$$\alpha\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = -\alpha\beta^2 \psi e^{-\alpha\beta^2 t}\sin(\beta x)$$

$$= \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad ✓$$

cumple la ecuación $\Rightarrow$ es solución.

P1 (b))

$$y_t - a y_{t-1} = \alpha t + \beta$$

Solución homogénea: $y_t^h - a y_{t-1}^h = 0$

Equivale a: $y_{t+1}^h - a y_t^h = 0$

Candidato solución: $y_t^h = \lambda^t$

Reemplazo:

$\Rightarrow \quad \lambda^{t+1} - a\lambda^t = 0$

$$\lambda^t(\lambda - a) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = a}$$

Sol. homogénea es: $y_t^h = \underset{\text{Cte}}{\underbrace{k}}\, a^t$

(recordar que si a^t es solución a

la homogénea $\Rightarrow$ cualquier comb. lineal también lo es!

Sol. particular: $\quad y_t^p - a y_{t-1}^p = \alpha t + \beta$

Como acá $f(t) = \alpha t + \beta$

candidato solución: $\boxed{\gamma_2 t + \gamma_1 = y_t^p}$

Reemplazo:

$$\gamma_2 t + \gamma_1 - a[\gamma_2(t-1) + \gamma_1] = \alpha t + \beta$$

$$\gamma_2 t + \gamma_1 - a\gamma_2 t + a\gamma_2 - a\gamma_1 = \alpha t + \beta$$

$$\Rightarrow \quad (1-a)\gamma_2 t + (1-a)\gamma_1 + a\gamma_2 = \alpha t + \beta$$

Igualo coeficientes:

(i) $(1-a)\gamma_2 = \alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_2 = \frac{\alpha}{1-a}}$$

(ii) $(1-a)\gamma_1 + a\gamma_2 = \beta$

$$(1-a)\gamma_1 + a\left[\frac{\alpha}{1-a}\right] = \beta$$

$$(1-a)\gamma_1 = \beta - \frac{a\alpha}{1-a}$$

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{\beta - \frac{a\alpha}{1-a}}{1-a}}$$

Por tanto: $y_t^p = \gamma_1 + \gamma_2 t$

$$\boxed{y_t^p = \frac{\beta - \frac{a\alpha}{1-a}}{1-a} + \frac{\alpha}{1-a} t}$$

Solución general: $y_t = y_t^h + y_t^p$

$$y_t = k a^t + \frac{\beta - \frac{a\alpha}{1-a}}{1-a} + \frac{\alpha}{1-a} t$$

Para determinar $k \to$ uso que $y_0 = 0$.

Evalúo en $t=0$:

$$\underbrace{y_0}_{0} = k \underbrace{a^0}_{1} + \frac{\beta - \frac{a\alpha}{1-a}}{1-a} + \underbrace{\frac{\alpha}{1-a} \cdot 0}_{0}$$

$$0 = k + \frac{\beta - \frac{a\alpha}{1-a}}{1-a}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = -\frac{\left(\beta - \frac{a\alpha}{1-a}\right)}{1-a}}$$

Por tanto, la solución es:

$$\boxed{y_t = -\frac{\left(\beta - \frac{a\alpha}{1-a}\right)}{1-a} a^t + \frac{\beta - \frac{a\alpha}{1-a}}{1-a} + \frac{\alpha}{1-a} t}$$

(c) No decía resolver la ec. en el enunciado (faltó eso, es un typo). pero la resolvamos:

$$x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$$

$$\Rightarrow x_{t+2} - x_{t+1} - x_t = 0 \Rightarrow$$ Notar que (sol homog = sol general acá)

Candidato solución: $x_t = \lambda^t$

Reemp: $$\lambda^{t+2} - \lambda^{t+1} - \lambda^t = 0$$

$$\lambda^t(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

Ec. característica: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, tenemos:

$$x_t = \underbrace{k_1}_{\text{cte}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

Condiciones iniciales:

$x_0 = 0$, evalúo en $t=0$: $\underset{0}{x_0} = k_1 + k_2$

$\Rightarrow \boxed{k_2 = -k_1}$

$x_1 = 1$, evalúo en $t=1$: $\underset{1}{x_1} = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$1 = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - k_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\boxed{k_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Nos queda:

$$\boxed{x_t = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t}$$

Sabemos que $\frac{x_{t+1}}{x_t}$ converge (existe el límite)

Esto lo estamos suponiendo (que converge), en estricto rigor habría que probarlo, pero lo tomamos como dado acá.

Llamamos λ al límite: $\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \lambda$

Como $\frac{x_{t+1}}{x_t}$ converge $\Rightarrow$ $\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{x_{t-1}}$

por def. de la sucesión

Ahora:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{x_t + x_{t-1}}{x_t}$$

$$\Rightarrow \lambda = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{x_{t-1}}{x_t} \right)$$

$$\lambda = 1 + \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{x_t}{x_{t-1}}} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 + \frac{1}{\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{x_{t-1}}}_{=\lambda}}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Y vimos que $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ✓

$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ✗

¿Por qué no sirve λ_2?

Porque $\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{x_t + x_{t-1}}{x_t} = 1 + \frac{x_{t-1}}{x_t} > 1$

y $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < 1$

$\Rightarrow$ por tanto : $\lambda = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

y entonces $\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \lambda = \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\text{número áureo}}$