Métodos Matemáticos

Profesor: Jorge Rivera
Ayudante: Emilio Guaman[1]

Ayudantía 6
Otoño 2021

1 Control Óptimo I

En el instante $t = 0$ un individuo recibe una herencia $a(0) = a_0$ en una cuenta de ahorro. El individuo no puede trabajar, por lo que solo puede consumir retirando dinero de la cuenta de ahorro. Los activos del individuo en el instante t vienen dados por $a(t)$. La función de utilidad en cada instante es $u[c(t)] = \ln[c(t)]$ y el individuo descuenta el futuro a una tasa ρ. Asuma que la cuenta de ahorro tiene una tasa de interés constante e igual a r y que el individuo tiene horizonte infinito (busca maximizar su utilidad a lo largo de toda su vida).

(a) Plantee el problema de optimización que resuelve el agente.

(b) Encuentre las condiciones de optimalidad y encuentre la ecuación diferencial de $c(t)$.

(c) Utilizando las restricciones del problema, encuentre una expresión para $c(t)$ y para $a(t)$, ambos en función de a_0.

2 Control Óptimo II

Un monopolio **regulado** produce cierto bien de consumo, cuyo precio en $t \in [0, T]$ es $p(t)$. La demanda (consumo) de un agente representativo en ese instante cumple que ($\delta > 0$ un parámetro dado):

$$\Rightarrow \quad c'(t) = c(t) - \frac{1}{\delta}p(t)$$

Desde el punto de vista de un regulador, el **beneficio social** es la suma del beneficio de la empresa (ingreso menos costos), más el beneficio del agente representativo. Supongamos que el beneficio del agente es la suma de la utilidad en el consumo (que suponemos cuadrática) menos una función de los precios (que también suponemos cuadrática). Supongamos también que la firma tiene costos cuadráticos. Así, luego de sumar el beneficio de la firma y del agente, el **beneficio social** tiene la forma ($\alpha > 0$ constante):

ingreso firma — neto de sumar la ut. indiv y restar costos firma.

$$\Rightarrow \quad \pi(t) = p(t)c(t) - \frac{\alpha}{2}[c(t)]^2 - \frac{1}{2}[p(t)]^2$$

desutilidad precios

Dada $r \in]0, 1[$ la tasa de descuento, el problema del regulador es fijar la trayectoria de los precios del monopolio de modo que se maximice el beneficio social en el periodo $[0, T]$.

(a) Ignorando las condiciones iniciales, plantee el problema del regulador.

(b) Plantee las condiciones de optimalidad del problema anterior, y encuentre el sistema de ecuaciones diferenciales que relaciona el consumo y los precios óptimos.

[1] eguaman@fen.uchile.cl

(c) Suponiendo que $\delta = 1$ y que $\alpha = 1$, muestre que la ecuación diferencial que define del precio óptimo es:

$$\Rightarrow \quad p''(t) - rp'(t) = 0$$

Finalmente, suponga que $\delta = 1$ y que el consumo inicial ($t = 0$) es c_0. Si el regulador fija un precio constante $\bar{p}$ en todo periodo:

(d) Muestre que la trayectoria de consumo es:

$$\Rightarrow \quad c^*(t) = (c_0 - \bar{p})e^t + \bar{p}$$

Explique además cómo evaluaría el beneficio social que se obtiene de imponer el precio constante ya indicado.

P1)

(a)

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln(c(t))\, dt$$

Utilidad de toda la vida (trayendo todo a V. presente).

$$\text{s.a.} \quad \Rightarrow \dot{a}(t) = ra(t) - c(t) \quad (1)$$

$$a(0) = a_0 \quad (2)$$

$$a(t) \geq 0 \quad (3)$$

(1) Cambio en activos = interés del período ($ra(t)$) $- c(t)$

(2) Cond inicial

(3) $a(t) \geq 0 \Rightarrow$ Individuo no se puede endeudar ya que no genera ingreso

Variable control: $c(t) \rightarrow$ consumo

Variable de estado: $a(t) \rightarrow$ activos

Endógena $\rightarrow$ $\dot{a}(t) = r a(t) - c(t)$

Ej: var. estado exógena $\rightarrow$ sería un ingreso exógeno.

(b) Hamiltoniano (en valor presente)

$$H = e^{-\rho t} \ln(c(t)) + \lambda(t)\left[r a(t) - c(t)\right]$$

$\lambda(t) \rightarrow$ coestado

(precio "sombra"
$\Rightarrow$ cómo afecta un cambio marg. en activos a la utilidad (en v.p) instantánea

Conds de optimalidad

1) $\dfrac{\partial H}{\partial c} = 0 \Rightarrow \dfrac{e^{-\rho t}}{c} = \lambda \quad (1*)$

2) $\dfrac{\partial H}{\partial a} = -\dot{\lambda} \Rightarrow r\lambda = -\dot{\lambda} \quad (2*)$

3) $\dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{a} \Rightarrow ra - c = \dot{a}$

Cond. transversalidad: $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \lambda(t)\, a(t) = 0$

Horizonte infinito

¿Interpretación? Valor activo es 0 al final de la vida.

Comentario: Hamiltoniano corriente

$$H = \ln(c) + \mu\,(ra - c)$$

precio sombra

$$\text{donde } \lambda(t) = e^{-\rho t}\mu(t)$$

1) control: $\dfrac{\partial H}{\partial c} = 0 \Rightarrow \dfrac{e^{-\rho t}}{c} = \underbrace{\lambda}_{e^{-\rho t}\mu}$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \mu$$

2) Estado: $\dfrac{\partial H}{\partial a} = -\dot{\lambda} \Rightarrow r\lambda = -\dot{\lambda}$

$$r e^{-\rho t}\mu = -\left(e^{-\rho t}\dot{\mu} - \rho e^{-\rho t}\mu\right)$$

$$\Rightarrow r\mu = -(\dot{\mu} - \rho\mu)$$

Tomo (1*) y derivo c/r al tiempo:

$$\frac{-\rho e^{-\rho t} c - e^{-\rho t}\dot{c}}{c^2} = \dot{\lambda}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{e^{-\rho t}}{c}}_{\text{por (1*)} \Rightarrow \lambda}\left(\frac{-\rho c - \dot{c}}{c}\right) = \underbrace{\dot{\lambda}}_{\text{por (2*)}: = -r\lambda}$$

$$\lambda\left(\frac{-\rho c-\dot{c}}{c}\right)=-r\lambda$$

$$\Rightarrow -\rho-\frac{\dot{c}}{c}=-r$$

Tasa crec. consumo $\Rightarrow \frac{dc}{dc}=r-\rho$

$$\dot{c}(t)=c(t)(r-\rho)$$

$\Rightarrow$ Ec. diferencial para el consumo

Esta misma ecuación se puede obtener si aplico ln a (1*) y luego derivo c/r al tiempo.

Tomo $\frac{e^{-\rho t}}{c}=\lambda$ / Aplico ln

$$\ln\left(\frac{e^{-\rho t}}{c}\right)=\ln(\lambda)$$

$$-\rho t-\ln(c)=\ln(\lambda)$$

Derivo c/r a tiempo:

$$-\rho-\frac{\dot{c}}{c}=\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

como por (2*): $\dot{\lambda}=-r\lambda$

$$\Rightarrow -\rho-\frac{\dot{c}}{c}=\frac{-r\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = r - \rho$$ //

CCI

Resuelvo $\dot{c}(t) = c(t)(r-\rho)$

$$\underbrace{\dot{c}(t)}_{\sim} - \underbrace{(r-\rho)c(t)}_{\sim} = \underbrace{0}_{\sim}$$ sol homog = sol general

Solución es tipo: $c(t) = e^{\lambda t}$

$$\dot{c}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

Reemplazo:

$$\lambda e^{\lambda t} - (r-\rho) e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = r - \rho}$$

Solución: $c(t) = \underbrace{b}_{\text{Cte}} e^{(r-\rho)t}$

Cond inicial: $c(0) = c_0$

Evalúo en $t=0$:

$$c_0 = b \underbrace{e^0}_{1} \Rightarrow \boxed{b = c_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{c(t) = c_0 e^{(r-\rho)t}}$$

Reemplazo $c(t)$ en $\dot{a}(t) = r a(t) - c(t)$

$$\dot{a}(t) - r a(t) = -c_0 \underbrace{e^{(r-\rho)t}}_{\sim}$$

Sol homogénea: $\dot{a}^h - r a^h = 0$

Candidato: $a^h = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \dot{a}^h = \lambda e^{\lambda t}$

$$\lambda e^{\lambda t} - r e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = r}$$

$\boxed{\text{Sol. homog}} \rightarrow a^h = \underbrace{\phi_h}_{\text{ctte}} e^{rt}$

Sol. particular: $\boxed{\dot{a}^p - r a^p = -c_0 e^{(r-p)t}}$ exponencial

Postulo: $a^p = \underbrace{\phi_p}_{\text{ctte}} e^{\gamma t}$

$\Rightarrow \dot{a}^p = \gamma \phi_p e^{\gamma t}$

Reemplazo en la ecuación:

$$\gamma \phi_p e^{\gamma t} - r \phi_p e^{\gamma t} = -c_0 e^{(r-p)t}$$

$$\Rightarrow \phi_p(\gamma - r) e^{\gamma t} = -c_0 e^{(r-p)t}$$

(i) $\gamma = r - p$

(ii) $\phi_p(\gamma - r) = -c_0$

$\phi_p(r - p - r) = -c_0$

$\Rightarrow -p\phi_p = -c_0$

$\Rightarrow \boxed{\phi_p = \frac{c_0}{p}}$

Por tanto: $\boxed{a^P(t) = \frac{c_0}{\rho} e^{(r-\rho)t}}$

Sol general: $a(t) = a^h(t) + a^P(t)$

$$\Rightarrow a(t) = \phi_h e^{rt} + \frac{c_0}{\rho} e^{(r-\rho)t}$$

Impongo $a(0) = a_0$ y evalúo en $t=0$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \phi_h \cdot \underbrace{e^0}_{1} + \frac{c_0}{\rho} \cdot \underbrace{e^{(r-\rho)\cdot 0}}_{1}$$

$$a_0 = \phi_h + \frac{c_0}{\rho} \Rightarrow \boxed{\phi_h = a_0 - \frac{c_0}{\rho}}$$

$$\Rightarrow a(t) = \left[a_0 - \frac{c_0}{\rho}\right] e^{rt} + \frac{c_0}{\rho} e^{(r-\rho)t}$$

$$\Rightarrow \boxed{c(t) = c_0 e^{(r-\rho)t}}$$

Transversalidad: $\lim_{t \to \infty} \lambda(t) a(t) = 0$

como $\lambda(t) = \frac{e^{-\rho t}}{c(t)} = \frac{e^{-\rho t}}{c_0 e^{(r-\rho)t}} = \frac{1}{c_0 e^{rt}}$

Por ende:

$$\lambda(t) a(t) = \frac{1}{c_0 e^{rt}} \left[\left(a_0 - \frac{c_0}{\rho}\right) e^{rt} + \frac{c_0}{\rho} e^{(r-\rho)t} \right]$$

$$= \frac{a_0}{c_0} - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{a_0 e^{rt}} \cdot \frac{c_0}{\rho} e^{(r-\rho)t}$$

$$\lambda(t)\, a(t) = \frac{a_0}{c_0} - \frac{1}{\rho} + \frac{e^{-\rho t}}{\rho}$$

<u>Límite a ambos lados</u>:

$$\underbrace{\lim \lambda(t)\, a(t)}_{0} = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{a_0}{c_0} - \frac{1}{\rho} + \frac{e^{-\rho t}}{\rho} \right)$$

$$= \frac{a_0}{c_0} - \frac{1}{\rho} + \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-\rho t}}{\rho}}_{\frac{e^{-\infty}}{\rho} = 0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{a_0}{c_0} - \frac{1}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{a_0}{c_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_0 = \rho a_0}$$

<u>Reemplazo en a(t)</u>:

$$a(t) = \underbrace{\Big[a_0 - \frac{\overbrace{\rho a_0}^{c_0}}{\rho} \Big] e^{rt}} + \frac{\overbrace{\rho a_0}^{c_0}}{\rho} e^{(r-\rho)t}$$

$$\underbrace{[a_0 - a_0]\, e^{rt}}_{0}$$

$$\boxed{a(t) = a_0 e^{(r-\rho)t}}$$

$$c(t) = c_0 e^{(r-\rho)t} \Rightarrow \boxed{c(t) = \rho a_0 e^{(r-\rho)t}}$$

P2)

(a) $\max_{p(t)} \int_0^{T} e^{-rt} \left(p(t)c(t) - \frac{\alpha}{2}[c(t)]^2 - \frac{1}{2}(p(t))^2 \right) dt$ → horiz. finito

s.t. $c'(t) = c(t) - \frac{1}{\delta} p(t)$

control → $p(t)$

Estado → $c(t)$
(Endógeno)

(b) Hamiltoniano (en valor presente):

$$\mathcal{H} = e^{-rt}\left[pc - \frac{\alpha}{2}c^2 - \frac{1}{2}p^2\right] + \lambda \left[\underbrace{c - \frac{1}{\delta}p}_{c'}\right]$$

λ → co-estado

Las conds. de opt:

1) $\frac{\partial H}{\partial p} = 0 \iff e^{-rt}\left[c - \frac{2}{2}p\right] - \frac{\lambda}{\delta} = 0$

$$\boxed{e^{-rt}[c - p] = \frac{\lambda}{\delta} \quad (1)}$$

2) $\frac{\partial H}{\partial c} = -\lambda'$ ⇐ deriv. del tiempo

$\iff e^{-rt}\left[p - \frac{2\alpha}{2}c\right] + \lambda = -\lambda'$

$$\Rightarrow e^{-rt}[p-\alpha c]+\lambda=-\lambda' \quad (2)$$

De (1): $\Rightarrow \lambda = \delta e^{-rt}[c-p] \quad (*)$

Derivo c/r a t: $\boxed{\lambda' = \delta\left[e^{-rt}[c'-p'] - re^{-rt}[c-p]\right] \quad (**)}$

Reemplazo (*) y (**) en (2):

$$e^{-rt}[p-\alpha c]+\delta e^{-rt}(c-p) = -\delta\left[e^{-rt}[c'-p'] - re^{-rt}[c-p]\right]$$

Mult por e^{rt}:

$$p-\alpha c+\delta(c-p) = -\delta[c'-p'] + \delta r(c-p)$$

$$p-\alpha c+\delta c-\delta p = -\delta[c'-p'] + \delta rc - \delta rp$$

$$\Rightarrow p-\alpha c+\delta c-\delta p-\delta rc+\delta rp = -\delta(c'-p')$$

$$p(1-\delta+\delta r)+c(\delta-\delta r-\alpha) = -\delta(c'-p')$$

Restricción: $c' = c - \frac{1}{\delta} p$

Reemplazo:

$$p(1-\delta+\delta r) + c(\delta-\delta r-\alpha) = -\delta\left[c - \frac{1}{\delta}p - p'\right]$$

$$= -\delta c + p + \delta p'$$

$$p(1-\delta+\delta r) - p + c(\delta-\delta r-\alpha) + \delta c = \delta p'$$

$$\delta(r-1)p + c(-\alpha+2\delta-\delta r) = \delta p'$$

$$\Rightarrow \boxed{p' = \left(\frac{-\alpha+2\delta-\delta r}{\delta}\right)c + (r-1)p}$$

↳ Ec. dif. para p en función de c

Junto a: $c' = c - \frac{1}{\delta} p$

$\Rightarrow$ Ambos definen la solución

(c)

$$p' = \left(\frac{-\alpha+2\delta-\delta r}{\delta}\right)c + (r-1)p$$

Reemp. $\alpha = \delta = 1$:

$$p' = \left(\frac{-1+2\cdot 1 - r}{1}\right)c + (r-1)p$$

$$p' = (1-r)c + (r-1)p$$

$$\boxed{p' = (1-r)(c-p)}$$

Derivo c/r a t:

$$p'' = (1-r)\,[c' - p']$$

como $c' = c - \frac{1}{\cancel{\ell}_{=1}} p \Rightarrow \boxed{c' = c - p}$

Como $p' = (1-r)(c-p)$

$$p' = (1-r)c - (1-r)p$$

$$\boxed{c = \frac{p'}{1-r} + p}$$

Esto último lo reemp en $c' = c - p$:

$$c' = \frac{p'}{1-r} + p - p$$

$$\boxed{c' = \frac{p'}{1-r}}$$

Esto lo vuelvo a reemp en $p'' = (1-r)(c' - p')$

$$\Rightarrow p'' = (1-r)\left[\frac{p'}{1-r} - p'\right]$$

$$p'' = (1-r)\left(\frac{p' - (1-r)p'}{(1-r)}\right)$$

$$= \cancel{(1-r)}\left(\frac{\cancel{p'} - \cancel{p'} + rp'}{\cancel{(1-r)}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{p'' = t p'}$$

$$\Rightarrow \boxed{p'' - t p' = 0} \checkmark$$

(d) Tomo $c' = c - \underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{=1} \underbrace{p}_{\bar{p}} \Rightarrow \boxed{c' = c - \bar{p}}$

Tengo la ec. dif para $\Rightarrow c'(t) - c(t) = -\bar{p}$

Sol. homogénea: $(c')^h - c^h = 0$

postulo: $c^h = e^{\lambda t}$

$(c')^h = \lambda e^{\lambda t}$

Reemplazando:

$\lambda e^{\lambda t} - e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

Sol. homog: $c^h = \underbrace{b}_{cte} e^t$

Particular: $(c')^p - c^p = -\bar{p}$

postulo: $c^p = \gamma$

$(c^p)' = 0$

Reemplazo:

$-\gamma = -\bar{p} \Rightarrow \boxed{\gamma = \bar{p}}$

$\Rightarrow \boxed{c^p = \bar{p}}$

Sol general: $c(t) = c^h(t) + c^p(t)$

$$c(t) = be^{t} + \bar{p}$$

Impongo $c(0) = c_0$ y evalúo en $t=0$

$$\Rightarrow c_0 = be^{0} + \bar{p}$$

$$\boxed{b = c_0 - \bar{p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{c^*(t) = (c_0 - \bar{p})e^{t} + \bar{p}}$$

¿cómo evaluar el beneficio? ⇒ reemplazar c^* en la función objetivo (con $p(t) = \bar{p}$)

$$\Rightarrow \int_0^T e^{-rt}\left(\bar{p}\,c^*(t) - \frac{\alpha}{2}(c^*(t))^2 - \frac{1}{2}\frac{\bar{p}^2}{2}\right)dt$$

Podría resolver y obtener un número.