Métodos Matemáticos, 2021. Prueba 3

Profesor: Jorge Rivera
Profesor Ayudante: Emilio Guamán

1 Ecuaciones diferenciales (y en diferencia...)

Queremos resolver la ecuación diferencial $t^2y''(t) + (t^2+t)y'(t) - y(t) = 0$, es decir, una donde los coeficientes no son constantes. Para eso, **suponemos** que la solución es de la forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n,$$

donde $A_0, A_1, \cdots$ son ciertas constantes que **se deben determinar**. Esa es una **solución por medio de series** (de polinomios en este caso).

(a) Primero, muestre que

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nA_n t^{n-1} \quad \textit{y que} \quad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\,A_n\,t^{n-2},$$

y con eso concluya que:

$$\begin{aligned} t^2y''(t) + (t^2+t)y'(t) - y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-1)A_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nA_n t^{n+1} \\ &= -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,\left[(n+1)\,A_n + A_{n-1}\right]\,t^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Respuesta: Dado

$$y(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3 + \dots$$

Es directo que:

$$y'(t) = A_1 + 2A_2t + 3A_3t^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nA_n t^{n-1}$$

$$y''(t) = 2A_2 + 3\cdot 2A_3t + 4\cdot 3A_4t^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2}$$

Por tanto:

$$t^2y''(t) + (t^2+t)y'(t) - y(t) = t^2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} + (t^2+t)\sum_{n=0}^{\infty} nA_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)A_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nA_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} nA_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2A_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} nA_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nA_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} nA_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 A_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n A_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2-1) A_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n A_n t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n-1) A_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n A_n t^{n+1}$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} n A_n t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) A_{n-1} t^n$:

$$= -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n-1) A_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) A_{n-1} t^n$$

$$= -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left[(n+1) A_n + A_{n-1}\right] t^n$$

(b) Usando la identidad en (1) explique por qué si $y(t)$ es solución de la ecuación diferencial, entonces:

- $A_0 = 0$,
- A_1 es arbitrario,
- Para todo $n \geq 2$ se tiene que $A_n = -\frac{A_{n-1}}{n+1}$. Así, **dado** A_1, infiera una expresión general para A_n. **Ind.** *Determine A_2, A_3, A_4, A_5 e infiera una expresión general de A_n, verificando que la misma efectivamente resuelve la recurrencia.*

  Respuesta: Usando la parte anterior, la ecuación diferencial a resolver es equivalente a

$$-A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left[(n+1) A_n + A_{n-1}\right] t^n = 0$$

$$-A_0 + 0 \cdot [2A_1 + A_0]t + [3A_2 + A_1]t^2 + 2 \cdot [4A_3 + A_2]t^3 + 3 \cdot [5A_4 + A_3]t^4 + \cdots = 0$$

$$-A_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)[(n+1)A_n + A_{n-1}]t^n = 0$$

De esto último, es directo que para que el lado izquierdo se iguale a 0, se requiere $A_0 = 0$. Además, notemos que para cualquier $n \geq 2$, los términos de la forma $(n-1)[(n+1)A_n + A_{n-1}]t^n$ quedan acompañados por un t elevado a una potencia cada vez más grande. Por ende, la única posibilidad para esta sumatoria se haga 0 es que todos los términos que la componen sean 0. Esto es, requerimos:

$$(n-1)[(n+1)A_n + A_{n-1}]t^n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

Esto es equivalente a:

$$A_n = -\frac{A_{n-1}}{(n+1)}, \quad \forall n \geq 2$$

Notando que dado un A_1 cualquiera, se determina con esta expresión cualquier A_n, $n \geq 2$, tenemos las 3 condiciones expuestas en el enunciado.

Siguiendo la indicación del enunciado, usando esta fórmula se puede deducir que:

$$A_2 = -\frac{A_1}{3} = -\frac{2A_1}{3!}, \quad A_3 = \frac{A_1}{4 \cdot 3} = \frac{2A_1}{4!}, \quad A_4 = -\frac{A_1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = -\frac{2A_1}{5!}, \quad A_5 = \frac{A_1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2A_1}{6!}$$

De lo que sigue que la expresión general para A_n buscada es:

$$A_n = (-1)^{n-1}\frac{2A_1}{(n+1)!}, \quad \forall n \geq 2$$

(c) A partir de todo lo anterior, muestre que

$$y(t) = A_1\left(t - \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{3\cdot 4} - \frac{t^4}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{t^5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdots\right) = \frac{2A_1}{t}\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \cdots\right),$$

con lo cual concluya que

$$y(t) = 2A_1\frac{e^{-t}+t-1}{t}.$$

Respuesta: Se tiene

$$y(t) = \underbrace{A_0}_{0} + A_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} A_n t^n = A_1 t + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2A_1}{(n+1)!}t^n$$

$$= A_1\left[t + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{(n+1)!}t^n\right]$$

$$= A_1\left[t - \frac{2t^2}{3!} + \frac{2t^3}{4!} - \frac{2t^4}{5!} + \frac{2t^5}{6!} + \dots\right] = A_1\left[t - \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4\cdot 3} - \frac{t^4}{5\cdot 4\cdot 3} + \frac{t^5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} + \dots\right]$$

$$= \frac{2A_1}{t}\left[\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \dots\right]$$

Finalmente, podemos notar que el término entre paréntesis es equivalente a tomar una expansión de Taylor de orden infinito para la función $f(t) = e^{-t} + t - 1$ en torno a 0. La fórmula general es:

$$f(t) \approx f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(t)^n$$

Donde $f^{(n)}$ es la derivada de orden n de la función. Aplicando esto a $f(t) = e^{-t} + t - 1$:

$$e^{-t} + t - 1 \approx \underbrace{e^0}_{1} - 1 + [1 - \underbrace{e^0}_{1}]t + \frac{e^0 t^2}{2!} - \frac{e^0 t^3}{3!} + \frac{e^0 t^4}{4!} - \frac{e^0 t^5}{5!} + \cdots = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \dots$$

Por lo tanto, reemplazando:

$$y(t) = 2A_1\frac{e^{-t}+t-1}{t}$$

(d) **Explique** una estrategia que utilizaría para resolver la ecuación diferencial $t^2y''(t)+(t^2+t)y'(t)-y(t) = f(t)$, donde $f(t)$ es una función conocida. Fundamente su respuesta, e indique pros y contras de la estrategia que ha propuesto.

Respuesta: Lo importante en esta pregunta es que la estrategia propuesta esté explicada con claridad y el suficiente detalle para no dejar dudas sobre por qué permitiría resolver la ecuación diferencial propuesta, e indicar los pros y contras. Nótese que en las partes anteriores ya se esbozó una forma de obtener la solución homogénea para este problema. Para la solución particular, el candidato propuesto dependerá de la forma que tenga la función $f(t)$. Por ejemplo, si es un polinomio, se puede postular una solución de ese tipo, proceder de manera análoga a lo hecho en los ítems anteriores, con la diferencia en que en lugar de igualar a 0, cada uno de los coeficientes de los términos del polinomio de la izquierda se iguala a su coeficiente respectivo en la parte derecha. Otro enfoque sería ver si se puede hacer alguna transformación o reemplazo para pasar a una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes variables y utilizar el método del factor integrante. Claramente, obtener soluciones cerradas requiere imponer alguna condición inicial.

2 Control óptimo

2.1 Parte 1

(a) Suponga que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ es una matriz definida negativa. Dado $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$, considere el siguiente problema de control óptimo:

$$\max_{u(t)} \int_0^T \frac{1}{2} Z(t)^{\mathbf{t}} A Z(t) dt \qquad s.a. \quad x'(t) = x(t) - \beta u(t) \quad + \quad C.I.$$

Dadas condiciones iniciales, **explique** por qué este problema se puede resolver completamente, es decir, es posible encontrar el estado y control óptimo (no los encuentre, solo explique por qué es posible encontrarlos).

Respuesta: Desarrollando, tenemos $Z(t)^{\mathbf{t}} A Z(t) = a[x(t)]^2 + 2bu(t)x(t) + c[u(t)]^2$. El problema a resolver es por ende:

$$\max_{u(t)} \int_0^T \frac{1}{2} \left[a[x(t)]^2 + 2bu(t)x(t) + c[u(t)]^2\right] dt \qquad s.a. \quad x'(t) = x(t) - \beta u(t) \quad + \quad C.I.$$

Sea $F(t, x(t), u(t)) \equiv \frac{1}{2} \left[a[x(t)]^2 + 2bu(t)x(t) + c[u(t)]^2\right]$ y $f(t, x(t), u(t)) \equiv x(t) - \beta u(t)$. Como f es lineal, para que el problema se pueda resolver de forma completa, debemos chequear que F sea cóncava en x, u. Para ello, podemos notar que el Hessiano de F es:

$$\mathcal{H}_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} \\ \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \\ b & c \end{bmatrix} = A$$

Como A es definida negativa, $\mathcal{H}_F$ es definida negativa. Esto es, F es cóncava (estricta) y el problema puede resolverse completamente. Alternativamente, se podía mostrar cualquiera de las otras condiciones presentadas en la proposición 7.2.2 del apunte.

2.2 Parte 2

Suponga que $x(t)$ es el **inventario** de cierto producto que hay en el instante t, con $t \in [0, T]$, y que $y(t)$ es el nivel de **producción** del mismo. El nivel de **venta** de ese producto en cada instante es $V(t)$, que suponemos es una **función conocida**.

(b) Explique por qué la condición $x'(t) = y(t) - V(t)$ es un "modelo razonable" para explicar la dinámica del inventario. ¿Cómo la extendería?

Respuesta: Lo primero es directo de la definición, pues implica que en cada momento del tiempo, el cambio en el inventario del producto está dado por la diferencia entre las unidades producidas y las vendidas. La extensión propuesta debe ser económicamente intuitiva y debe modelarse explícitamente. Por ejemplo, incorporar el hecho que el inventario puede depreciarse a una tasa constante δ implicaría restar δx en la condición anterior.

Suponga ahora que $D(x(t))$ es el **costo** de mantener el inventario $x(t)$, y que el costo de producción es $C(y(t))$. El problema de la firma es decidir el nivel de producción óptimo de modo de minimizar el costo según las componentes mencionadas. Si la tasa de descuento es $r \in]0,1[$, la función de costo total es

$$\int_0^T e^{-rt} \, [D(x(t)) + C(y(t))] \, dt.$$

(c) Dadas "ciertas condiciones iniciales", bajo la dinámica en la parte (b), plantee el problema de la firma y determine las correspondientes condiciones de optimalidad.

Respuesta: El problema a resolver es

$$\min_{y(t)} \quad \int_0^T e^{-rt} \, [D(x(t)) + C(y(t))] \, dt$$

$$\text{s.a.} \quad x'(t) = y(t) - V(t)$$

$$\text{C.I.}$$

Donde el control es $y(t)$, el estado $x(t)$ y el co-estado $\lambda(t)$. El Hamiltoniano viene dado por:

$$H = e^{-rt} \, [D(x(t)) + C(y(t))] + \lambda(t)[y(t) - V(t)]$$

Las condiciones de optimalidad son (se omite el argumento t por simplicidad de la notación):

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow e^{-rt} C'(y) = -\lambda \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda' \Longleftrightarrow e^{-rt} D'(x) = -\lambda' \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x' \Longleftrightarrow x' = y - V \quad (3)$$

(d) Aplique las condiciones que obtuvo cuando

$$r = 0, \quad D(x) = \frac{h}{2}(x - \widehat{x})^2 \quad y \quad C(y) = \frac{c}{2}(y - \widehat{y})^2,$$

donde $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ son valores de referencia conocidos, y $h > 0$ $c > 0$ son parámetros. Para este caso, usando las condiciones de optimalidad que ya obtuvo, muestre que:

$$x''(t) - \frac{h}{c}\,x(t) = -\frac{h}{c}\widehat{x} - V'(t).$$

Respuesta: Tenemos

$$D'(x) = h(x - \widehat{x}), \quad C'(y) = c(y - \widehat{y})$$

Por ende, reemplazando y usando que $r = 0$, las condiciones (1) y (2) nos quedan como:

$$c(y - \widehat{y}) = -\lambda \quad (4)$$

$$h(x - \widehat{x}) = -\lambda' \quad (5)$$

Derivando (4) con respecto a t:

$$cy' = -\lambda' \quad (6)$$

Combinando esto con (5):

$$h(x - \widehat{x}) = cy' \quad (7)$$

Derivando (3) con respecto a t:

$$x'' = y' - V' \Longleftrightarrow y' = x'' + V' \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (7):

$$h(x - \widehat{x}) = c(x'' + V')$$

Reordenando, se obtiene lo pedido:

$$x'' - \frac{h}{c}x = -\frac{h}{c}\widehat{x} - V'$$