Passive og Aktive filtre

Charles Rutherford Ildstad

Norges Tekniske Naturvitenskapelige Universitet - Gløshaugen

Abstract

Nå som vi kan litt om Laplace-transformasjoner og transferfunksjonen skal vi ta for oss en av de vanligste bruksområdene for disse, nemlig filtre. Vi starter med å se på det intuitive og hvordan filtre fungerer, deretter skal vi se på noen vanlige passive filtre og til slutt se kort på aktive filtre.

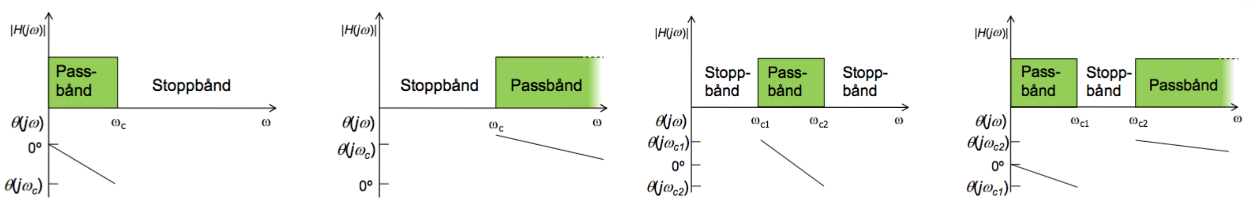
1. Introduksjon til frekvensselektive kretser

Filtre kan sees på som en generell 'black-box' mellom et inngangssignal og et utgangssignal, vanligvis spenninger. Det som gjør filtre spesielle er at de oppfører seg forskjellig avhengig av frekvensen til signalet. Derfor kalles filtre også ofte for frekvensselektive kretser. Den oppførselen vi tar for oss i dette faget er enten forsterkning eller demping av signalet som kommer igjennom.

Figur 1: Illustrasjon av filterkonseptet

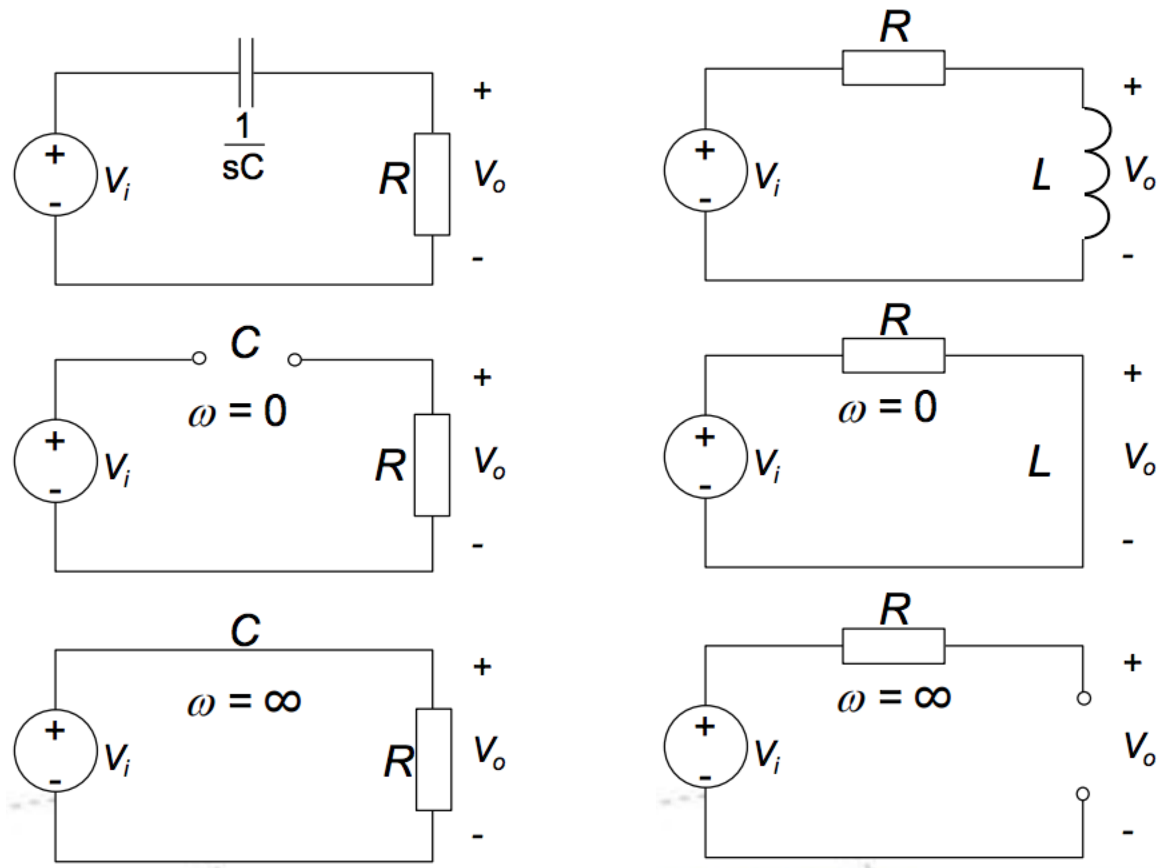
Merk at amplituden til signalet ganges med magnituden til filteret ($|H(j\omega)|$) og fasen på signalet forskyves med fasevinkelen til filteret ($\theta(j\omega)$) når signalet går igjennom filteret.

$$|utgangssignal| = |inngangssignal| \cdot |H(j\omega)| \ , \ \angle utgangssignal = \angle inngangssignal + \theta(j\omega_c)$$



Figur 2: Magnitudeplot for lavpass-, høypass-, båndpass- og båndstoppfilter respektivt

Enkle filtre fungerer ved at de utnytter kondensatorens(C) og spolens(L) oppførsel når $\omega \to \infty$, og når $\omega \to 0$:



(a) Oppførsel til kondensatoren ved $\omega = 0$ og $\omega = \infty$

(b) Oppførsel til spolen ved $\omega = 0$ og $\omega = \infty$

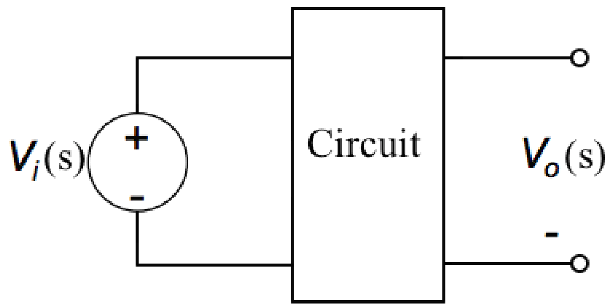
Figur 3: Passive komponenters oppførsel ved $\omega = 0$ og $\omega = \infty$

Legg merke til at $L \to$ kortslutning og $C \to$ brudd når $\omega = 0$, og at $C \to$ kortslutning og $L \to$ brudd når $\omega = \infty$.

14. Passive Filtre

14.1. Nøkkelbegrep

Passive filtre er filtre som kun tar i bruk passive komponenter (R, C, L) og dermed har forsterkning maksimalt lik 1. I den følgene analysen er det sentralt å ha kontroll på disse komponentenes Laplace-transformer og hvordan vi setter opp en tranferfunksjon.



Figur 4: Prinsipiell transferfunksjon

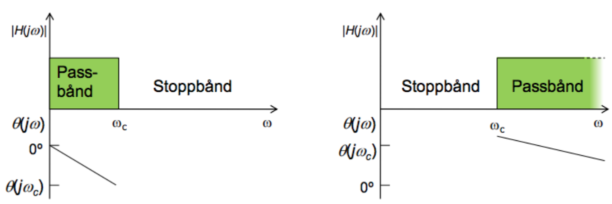
Fra figur 4 ser vi at tranferfunksjonen til passive filtre blir:

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$$

Filtre karakteriseres etter hvilke frekvenser som får passere igjennom og hvilke frekvenser som blir stoppet, og det eksisterer i alt 4 forskjellige typer filtre:
- Lavpass (Lavfrekvent signal får passere),
- Høypass (Høyfrekvent signal får passere),
- Båndpass (Frekvenser i et gitt område, eller bånd, får passere),
- Båndstopp (Frekvenser i et gitt område, eller bånd, blir stoppet).

Vi skiller mellom filtrene ved å se på deres *transferfunksjoner*.

Disse transferfunksjonene representeres i frekvensresponsplot, og når vi snakker om passive filtre bruker vi magnitudeplot og fasevinkelplot som vist under.



Figur 5: Magnitude- og fasevinkelplot

Legg merke til at fasen viker vekk fra null jo nærmere knekkfrekvensen(ω_c) vi kommer. For filtre som ikke er ideelle, som de vist over, kan det være litt vanskeligere å vurdere akkurat hvor kuttfrekvensen går, derfor definerer vi det med hensyn på effekten som:

$$P(j\omega_c) = \frac{1}{2} P_{max}$$

For å slippe å regne i effekt kan vi bruke at $P \propto H^2$ og dermed uttrykke knekkfrekvensen med hensyn på H_{max}:

$$H(j\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max}$$

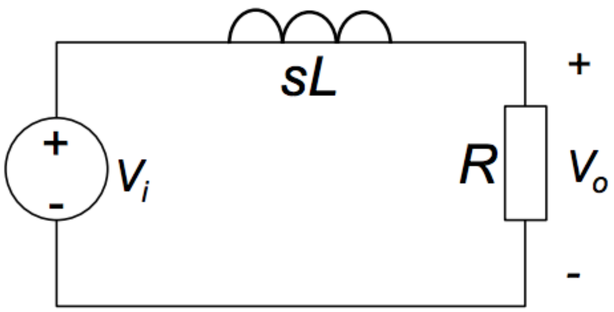
Vi bruker **alltid** dette forholdet for å finne ω_c og antar at for passive filtre er $|H_{max}| = 1$.

14.2. Lavpassfiltre

Et lavpassfilter er en hvilken som helst krets der transferfunksjonen kan skrives som:

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

Eks. (LR-Lavpassfilter):



Figur 6: Enkelt LR-lavpassfilter

Strømbevaring brukes til å finne transferfunksjonen:

$$\frac{V_i}{sL + R} = \frac{V_0}{R} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{V_0}{V_i}(s) = \frac{R}{sL + R} = \frac{R/L}{s + R/L}$$

Ved å betrakte transferfunksjonen kan det leses ut at $\omega_c = R/L$, eller den kan regnes ut:

- Før vi begynner på utregningen kan det være greit å ta en rask gjennomgang av vinkel og lengde på komplekse tall($z = Re(z) + j \cdot Im(z)$):

$$z = \frac{w}{v} = \frac{Re(w) + j \cdot Im(w)}{Re(v) + j \cdot Im(v)}$$

$$|z| = \frac{|w|}{|v|} = \frac{\sqrt{(Re(v)^2 + (Im(v)^2}}{\sqrt{(Re(w)^2 + (Im(w)^2}} \tag{1}$$

$$\angle z = \angle v - \angle w = \arctan\left(\frac{Im(v)}{Re(v)}\right) - \arctan\left(\frac{Im(w)}{Re(w)}\right) \tag{2}$$

1. Først starter vi med å sette inn $j\omega_c = s$ i utrykket for H. [1]

$$H(j\omega_c) = \frac{R/L}{j\omega_c + R/L}$$

2. Vi tar så lengden til det komplekse tallet som i likning (1):

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}H_{max} \Rightarrow \frac{\sqrt{(R/L)^2}}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|1| \Rightarrow 2(R/L)^2 = \omega_c^2 + (R/L)^2$$

   Det gjenstår nå bare enkel regning for å vise at $\omega_c = R/L$

3. Vi kan også finne $\angle H(j\omega) = \theta(j\omega)$ ved hjelp av likning (2):

$$\theta(j\omega) = \arctan\left(\frac{0}{R/L}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{R/L}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

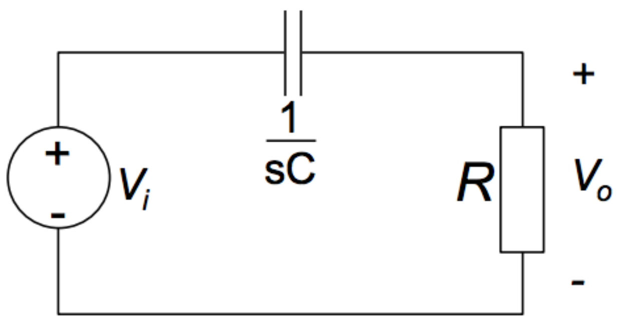
   Som vi ser viker θ lenger vekk fra 0 jo nærmere ω_c vi kommer.

14.3. Høypassfiltre

Et høypassfilter er en hvilken som helst krets der transferfunksjonen kan skrives som:

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

Eks. (CR-Høypassfilter):



Figur 7: Enkelt CR-høypassfilter

[1] Dette tilsvarer Fourier-transformasjonen av kretsen og tillater frekvensanalyse

Strømbevaring brukes til å finne transferfunksjonen:

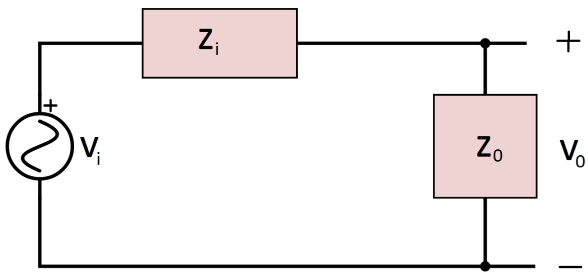
$$\frac{V_i}{\frac{1}{sC}+R} = \frac{V_0}{R} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{V_0}{V_i}(s) = \frac{R}{\frac{1}{sC}+R} = \frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$

Transferfunksjonen kan igjen betraktes og vi leser ut at $\omega_c = 1/RC$, eller vi kan regne den ut som vist med lavpassfilteret over.

$\theta(j\omega)$ finner vi igjen med likning (2):

$$\theta(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{0}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\frac{1}{RC}}\right) = 90^\circ - \arctan(\omega RC)$$

Hvis man nå generaliserer de enkle filtrene vi har sett på kan vi prøve å formulere et generelt utrykk for $H(s)$:



Figur 8: Basismodell; Passive filtre

Nok en gang brukes strømbevaring for å finne transferfunksjonen:

$$\frac{V_i}{Z_i+Z_0} = \frac{V_0}{Z_0} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{V_0}{V_i}(s) = \frac{Z_0}{Z_0+Zi}$$

Observasjonen som nå gjøres er at hvis man bytter plass på Z_0 og Z_i i et høypassfilter får man et lavpassfilter, og vice-versa. Dette kan man overbevise seg selv om hvis man ser på de to eksemplene over, men bytter plass på komponentene.

Før vi fortsetter er det viktig å være klar over en annen egenskap ved ω_c, og det er dens forhold tidskonstanten, τ:

$$\tau = 1/\omega_c$$

Dette er svært viktig siden τ beskriver kretsens tidsrespons, og er gyldig for både lav- og høypassfiltre.

14.4. Båndpassfiltre

For båndstopp- og båndpassfiltre brukes begrepene båndbredde og midtfrekvens.

Området der båndpass- eller båndstoppfilteret er effektivt kalles båndbredden (β) og er definert som området mellom knekkfrekvensene. Den geometriske middelverdien i båndbredden kaller vi midtfrekvensen(ω_0):

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} \qquad\qquad \omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}} \tag{3}$$

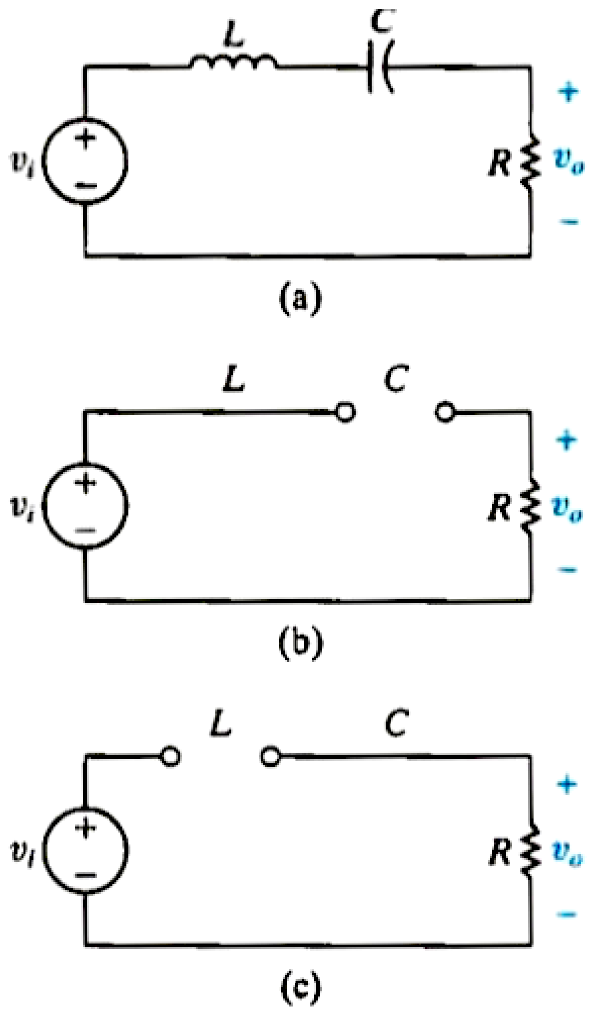
Der ω_{c1} og ω_{c2} kan finnes på samme måte som før. I tillegg brukes det en kvalitetsfaktor(Q) for å beskrive forholdet mellom disse to:

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta}$$

Et båndpassfilter er en hvilken som helst krets der transferfunksjonen kan skrives som:

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$

Eks. (LCR-Båndpassfilter):



Figur 9: RCL-krets; (a) - kretsoppbygning for alle frekvenser, (b) $\omega \to 0$, (c) $\omega \to \infty$ [2]

[2]Det bør her være tydelig hvorfor denne kretsen er et båndpassfilter

Strømbevaring brukes til å finne transferfunksjonen:

$$\frac{V_i}{sL + \frac{1}{sC} + R} = \frac{V_0}{R} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{V_0}{V_i}(s) = \frac{R}{sL + R + (1/sC)} = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

ω_0 og β kan igjen leses enkelt ut av transferfunksjonen, men de kan også finnes ved beregning. Først regner vi ut ω_{c1} og ω_{c2} med likning (2):

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{[\omega_c(R/L)]^2}}{\sqrt{[(1/LC) - \omega_c^2]^2 + [\omega_c(R/L)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|1|$$

$$\Rightarrow \quad 2[\omega_c(R/C)]^2 = [(1/LC) - \omega_c^2]^2 + [\omega_c(R/L)]^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_c(R/C) = (1/LC) - \omega_c^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{c1/2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} \pm \frac{R}{2L}$$

Settes disse så inn i formlene i (3) finner man samme ω_0 og β som man kunne lese ut.

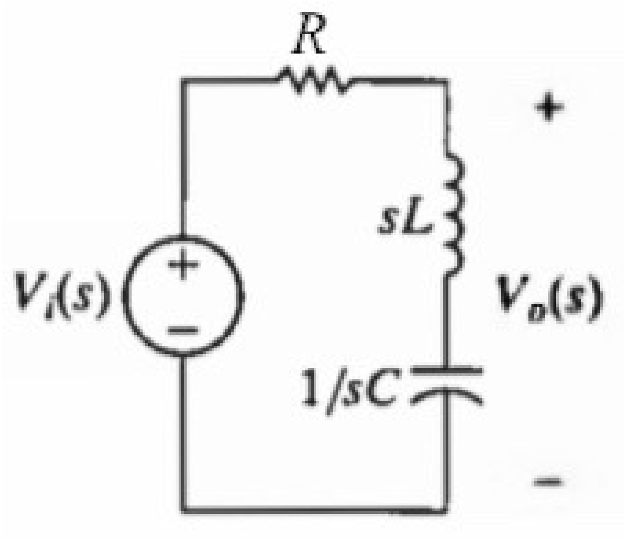
14.5. Båndstopp Filtre

Et båndstoppfilter er en hvilken som helst krets der transferfunksjonen kan skrives som:

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$

På samme måte som nevnt i 5.2.3 kan vi få motsatt egenskaper ved å bytte om plass på komponentene, og eksempelvis få et båndstoppfilter fra eksemplet i 5.2.4.

Eks. (RLC-Båndstoppfilter):



Figur 10: Enkelt RLC-Båndstoppfilter

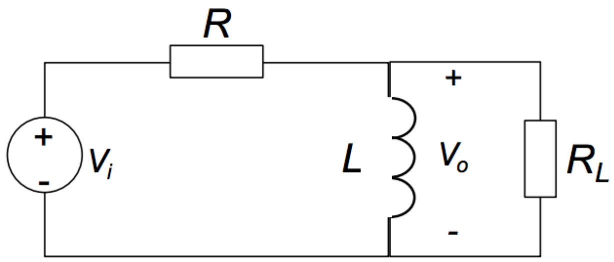
Strømbevaring brukes til å finne transferfunksjonen:

$$\frac{V_i}{sL+\frac{1}{sC}+R} = \frac{V_0}{sL+\frac{1}{sC}} \;\Rightarrow\; H(s) = \frac{V_0}{V_i}(s) = \frac{sL+(1/sC)}{sL+R+(1/sC)} = \frac{s^2+(1/LC)}{s^2+(R/L)s+(1/LC)}$$

ω_0 og β kan igjen leses enkelt ut av transferfunksjonen, eller de kan beregnes som for båndpassfilteret.

Til slutt er det verdt å merke seg at et filter kan være belastet og dermed ikke-ideelt. Dette betyr at det eksisterer en motstand som ikke er uendelig mellom polene våre. For å ta høyde for dette må det legges til et proporsjonalitetsledd i transferfunksjonene våre. Dette leddet vil per definisjon alltid være mindre enn 1 for passive filtre.

Eks. (Belastet Høypassfilter):



Figur 11: RL-høypassfilter med lastspenning over spolen

Først finner man den ekvivalente reaktansen mellom polene:

$$Z_0 = sL||R \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{sL}+\frac{1}{R_L} \quad\Rightarrow\quad Z_0 = \frac{R_L sL}{sL+R_L}$$

Strømbevaring brukes til å finne transferfunksjonen:

$$\frac{V_i}{R+\frac{R_L sL}{sL+R_L}} = \frac{V_0}{\frac{R_L sL}{sL+R_L}} \Rightarrow H(s) = \frac{V_0}{V_i}(s) = \frac{\frac{R_L sL}{sL+R_L}}{R+\frac{R_L sL}{sL+R_L}} = \frac{R_L sL}{R_L R + RsL + R_L sL}$$

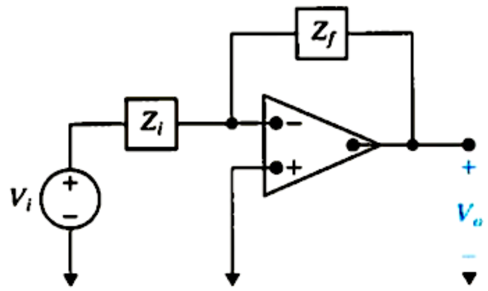
$$= \frac{R_L sL}{R_L R + s(R+R_L)L} = \frac{\frac{R_L sL}{(R_L+R)L}}{\frac{R_L R}{(R+R_L)L}+s} = \frac{\left(\frac{R_L}{R+R_L}\right)s}{s+\left(\frac{R_L}{R+R_L}\right)\frac{R}{L}} = K\cdot\frac{s}{s+\omega_c}$$

der $K = \frac{R_L}{R_L+R}$ og $\omega_c = \frac{KR}{L}$

Legg også merke til at $K \leq 1$ og går mot 1 når $R_L \to \infty$

15. Aktive Filtre

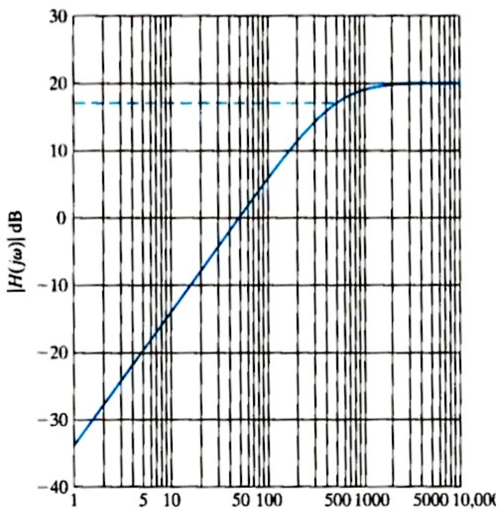
I aktive filtre tar man høyde for at spoler kan være dyre og utsatte for magnetiske forstyrrelser og benytter da Op-Amper som en erstatning som også tilføyer muligheten for forsterkning. Merk at i aktive filtre brukes det inverterende Op-Ampkretser og det er veldig viktig å ha kontroll på hvordan vi kommer fram til tranferfunksjoner for disse.



Figur 12: Basismodell; Aktive filtre

$$V_0 = \frac{-Z_f}{Z_i} \cdot V_i \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{V_0}{V_i}(s) = \frac{-Z_f}{Z_i}$$

Det brukes i tillegg et annerledes frekvensresponsplot for aktive filtre. Disse kalles Bode-plot og viser magnituden i dB(A_{dB}) mot ω i et semilogaritmisk diagram.



Figur 13: Bode-plot for et høypassfilter

Merk at:

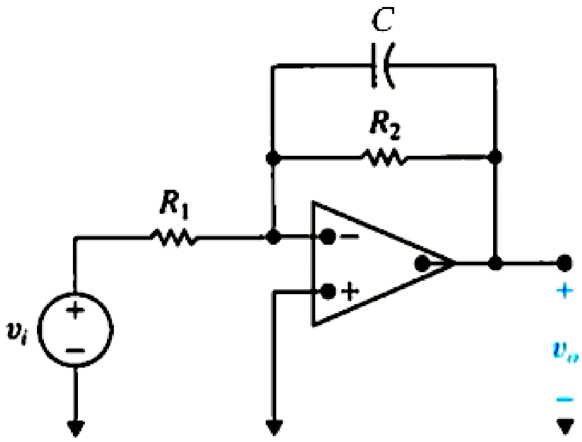
$$A_{dB} = 20\log\left(|H(j\omega)|\right), \quad 1_{dB} = 20\log(0), \quad 0_{dB} = 20\log(-\infty)$$

15.1. Lavpass- og Høypassfiltre

Lavpassfiltre og Høypassfiltre er fortsatt definert utifra sine transferfunksjoner, men siden det nå kan eksistere en forsterkning pga. Op-Ampen må det legges til et forsterkningsledd, som kan være større enn 1. I tillegg må det taes med negativt fortegn fordi det er inverterende Op-Ampkrets:

$$H(s)_{lavpass} = -K \cdot \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \quad \Rightarrow \quad H(s)_{høypass} = -K \cdot \frac{s}{s+\omega_c}$$

Eks. (Aktivt Lavpassfilter):



Figur 14: Aktivt lavpassfilter

$$H(s) = \frac{-Z_f}{Z_i} = \frac{-R_2||\left(\frac{1}{sC}\right)}{R_1} = -\frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2}+sC}}{R_1}$$

$$= -\frac{\frac{R_2}{1+R_2sC}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1+R_2sC} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{(1/R_2C)}{(1/R_2C)+s}$$

Det er nå bare å lese ut $\omega_c = (1/R_2C)$ og $K = \frac{R_2}{R_1}$. Skulle vi regnet det ut uten å bare lese av kunne vi gjort det på akkurat samme måte som for passive filtre, men vi måtte ha funnet ut hva K var først og så sett på uttrykket uten denne K'en.

15.2. Skalering

Et praktisk verktøy når man skal lage filtre med **oppgitte** parametre som f.eks. ω_c, ω_0, β, er skalering.

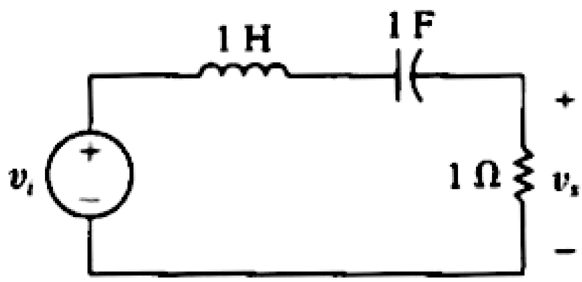
Måten skalering fungerer er at man bruker enhetsstørrelser på komponentene og så justerer de for å passe de oppgitte spesifikasjoner etterpå. Skalering er enkelt forklart bare et sett med konstanter vi bestemmer til slutt og så ganger med de enhetsstørrelsene vi begynte med. Vi skalerer både etter frekvens og magnitude; men siden en motstand ikke har noe bidrag til frekvensforløpet, vil denne ikke trenge frekvensskalering.

Der reaktansen er proporsjonal med komponentverdien magnitudeskaleres det med k_m, mens der den er invers proporsjonal ganger vi med $1/k_m$. Når vi frekvensskalerer ganger vi ganske enkelt alltid med $1/k_f$:

$$R' = k_m R, \qquad L' = \frac{k_m}{k_f} L, \qquad C' = \frac{1}{k_m k_f} C \tag{4}$$

Eks. (Skalering av passivt båndpassfilter):

"Lag et LCR-filter med $\omega_0 = 500$ Hz og $R = 200\Omega$."



Figur 15: Båndpassfilter med enhetskomponenter

R' er oppgitt og det gjenstår dermed bare å finne C' og L'.
Først finner vi k_f og k_m:

$$k_f = \frac{\omega_0'}{\omega_0} = \frac{2\pi(500)}{1} = 3141.6, \qquad k_m = \frac{R'}{R} = 200$$

Så brukes likningene i (4) for å finne C' og L'.

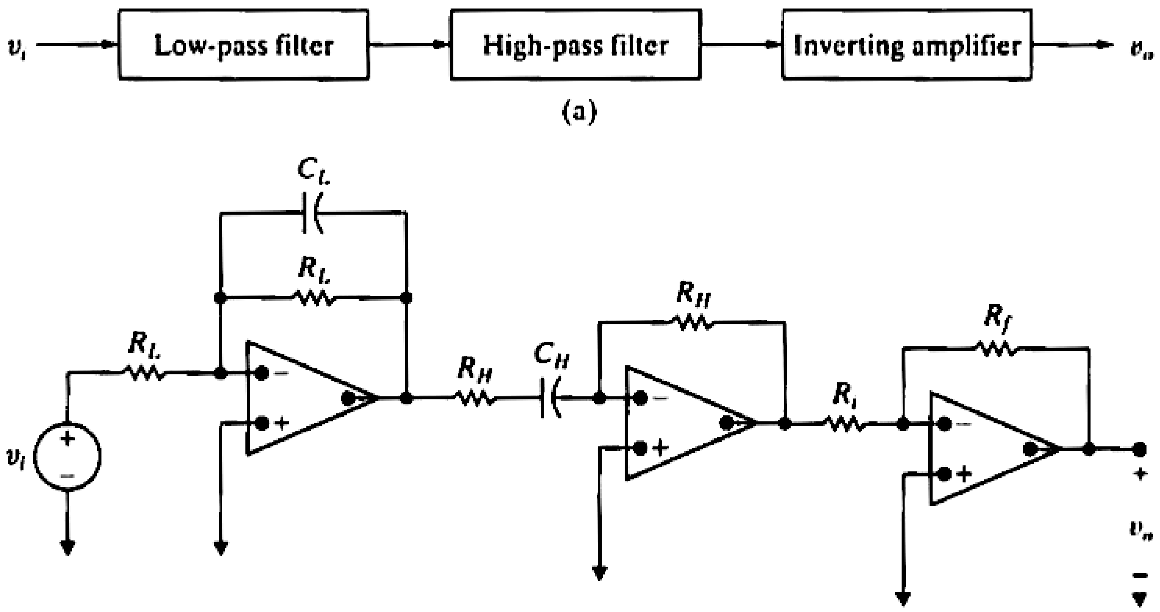
$$\Rightarrow \quad C' = \frac{1}{200 \cdot 3141.6} \cdot 1 = 1.59\,\mu F, \qquad L' = \frac{200}{3141.6} \cdot 1 = 63.66\,mH$$

15.3. Båndpass- og båndstoppfiltre

Når man skal lage et båndpass-, eller båndstoppfilter kobles lavpass, høypass og forsterkning i serie eller i parallell. Derfor introduserer vi blokker for å representere disse enklere.

Transferfunksjonen til blokker i serie ganger vi sammen og blokker i parallell plusser vi sammen for å få den resulterende transferfunksjonen.

Eks. (Aktivt Båndpassfilter):



Figur 16: (a) - Blokkdiagram; kaskadekoblet båndpassfilter
(b) Kretsdiagram; kaskadekoblet, aktivt båndpassfilter

$$H(s) = \frac{V_0}{V_i} = \left(\frac{-\omega_{c2}}{s+\omega_{c2}}\right)\left(\frac{-s}{s+\omega_{c1}}\right)\left(\frac{-R_f}{R_i}\right) = \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2+(\omega_{c1}+\omega_{c2})s+\omega_{c2}\omega_{c1}}$$

ω_{c2} er den generelle knekkfrekvensen til lavpassfilteret og ω_{c1} er den generelle knekkfrekvensen til høypassfilteret. Videre er K = forsterkningen = $\frac{R_f}{R_i}$.

Vi vil kun ta for oss bredbåndsfilter som vil si at $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$:

$$\Rightarrow \quad (\omega_{c1}+\omega_{c2}) \simeq \omega_{c2} \qquad \Rightarrow \qquad H(s) = \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2+\omega_{c2}s+\omega_{c2}\omega_{c1}}$$

Her ser vi at transferfunksjonen har den ønskede formen og at $\beta \simeq \omega_{c2}$.
Vi kunne brukt akkurat den samme argumentasjonen for et parallellkoblet båndstoppfilter.

15.4. Avsluttende Tips

Helt avslutningsvis kan fremgangsmåten for bestemmelse av type filter begrenses til 4 punkter:

- Finn transferfunksjonen ved hjelp av strømbevaring,
- Få nevner i transferfunksjonen på ønsket form (isoler s av høyeste orden),
- Bestem om det er påvirkning fra last, eller om det er forsterkning og evt. se bort ifra denne i transferfunksjonen,
- Bestem ω_c, β, ω_0 og/eller Q.