Kapittel 1

Frekvensanalyse og Diagrammer

1.1 Logaritme- og desibelskala

Før vi begynner med frekvensanalysen må vi si noe om enheter og størrelser. Et viktig verktøy i reguleringsteknikk er logaritmiske størrelser, og særlig i frekvensanalyse er dette praktisk. Grunnen til dette er at man da kan få inn et bredere spekter av frekvenser i et diagram såvel som at multiplikasjon av faktorer kan sees som addisjon i et plot. I tillegg er ofte forsterkning gitt i desibel, slik som i et Bode-diagram.

Definisjonen på desibel er gitt ved:

$$x_{\text{dB}} = 20 \cdot \log(x) \tag{1.1}$$

der x er gitt lineært ("vanlig") og x i desibel. Det er denne sammenhengen man bruker når man skal finne et tall i desibel. Andre veien blir sammenhengen

$$x = 10^{\frac{1}{20}x} \tag{1.2}$$

Under følger en samling sammenhenger mellom tall gitt lineært og i desibel. Legg merke til at når x ganges med 10, øker x med 20.

$$x = 0 \Rightarrow x = 20 \cdot \log(0) = -\infty \tag{1.3a}$$
$$x = 0,1 \Rightarrow x = 20 \cdot \log(0,1) = -20 \tag{1.3b}$$
$$x = 1 \Rightarrow x = 20 \cdot \log(1) = 0 \tag{1.3c}$$
$$x = 10 \Rightarrow x = 20 \cdot \log(10) = 20 \tag{1.3d}$$
$$x = 50 \Rightarrow x = 20 \cdot \log(50) = 33,98 \tag{1.3e}$$
$$x = 100 \Rightarrow x = 20 \cdot \log(100) = 40 \tag{1.3f}$$

Når det brukes logaritmeskala i et diagram er frekvensken gitt per *dekade*. En dekade representerer en avstand langs den logaritmiske frekvensaksen tilsvarende en tidobling av frekvens. Det betyr at frekvensen ω går fra ω_0 til $10 \cdot \omega_0$ i en dekade. I et Bode-diagram sier man at grafen stiger eller faller med et antall desibel per dekade.

Til slutt kan det kan her bemerkes at en rett linje i et log- diagram skrives som(husk at en vanlig linje skrives som $y = ax + b$):

$$y = a \cdot log(x) + b \tag{1.4}$$

Gitt transferfunksjonen (1.5).

$$h(s) = \frac{1}{s} \tag{1.5}$$

Hva blir stigningstallet til $h(s)$ i et log- diagram?

Svar: Denne gir henholdsvis frekvensresponsen og forsterkingen

$$h(j\omega) = h(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega}, \qquad |h(j\omega)| = \left|\frac{1}{j\omega}\right| = \frac{1}{\omega} \tag{1.6}$$

For å finne ut hvor mye $|h(j\omega)|$ faller per dekade regner vi ut amplituden i :

$$|h(j\omega)| = |\frac{1}{j\omega}| = \frac{1}{\omega} \tag{1.7}$$

$$|h(j\omega)| = 20\log(|h(j\omega|) = 20\log(\frac{1}{\omega}) = -20\log(\omega) \tag{1.8}$$

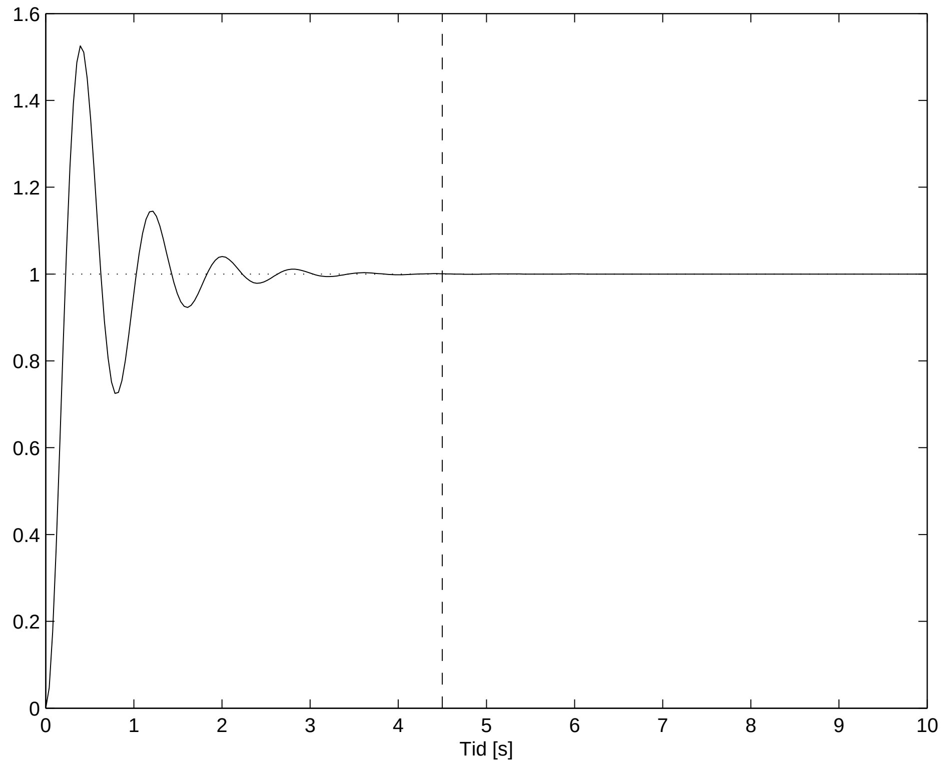
$|h(j\omega)|$ faller med 20 per dekade. Det betyr at forsterkningen faller med 20 desibel når frekvensen tidobles.

1.2 Frekvensrespons, Introduksjon

Når vi analyserer et system er vi ofte interessert i å finne frekvensresponsen. Før vi begynner å forklare analysen er viktig å merke seg at vi alltid snakker om den stasjonære responsen til et system når vi diskuterer frekvensrespons.

1.2.1 Stasjonær Respons

En forandring på inngangssignalet vil føre til midlertidige reaksjoner på utgangssignalet før systemet faller til ro. Når alle disse midlertidige reaksjonene (transientene) er over, sier vi at systemet er i en stasjonær tilstand. En kan ofte tenke på den stasjonære verdien som den konstante verdien som oppstår på utgangen "lang" tid etter at et sprangsignal har blitt påtrykt inngangen (se figur 1.1, der skillet mellom transient og stasjonær tilstand er stiplet inn). I det generelle tilfellet kan imidlertid en stasjonær tilstand være et periodisk signal på utgangen. For å finne den stasjonære verdien ser man altså på utgangen etter "lang" tid, og da er sluttverditeoremet nyttig å bruke.



Figur 1.1: Sprangrespons med antydning om skillet mellom transient og stasjonær tilstand.

1.2.2 Transient Respons

En transient tilstand er den tilstanden som et system befinner seg i før alle midlertidige reaksjoner på en forandring i inngangssignalet er over (se figur 1.1). En transient tilstand er varierende med tiden, og sier noe om de dynamiske egenskapene til systemet. Ofte kan det være mye arbeid å finne matematiske uttrykk for dette tidsforløpet, og simulering på datamaskin kan derfor være enkleste metode for å analysere transienter. Et system vil alltid ha visse fysiske begrensninger (for eksempel hvor langt en robotarm kan forflytte seg). Selv om et system ved stasjonær tilstand (etter lang tid) ikke går ut over disse begrensninger, kan de transiente (midlertidige) tilstandene ha svingt seg ut over grensene lenge før stasjonær tilstand oppnås. Dette kan være ødeleggende for systemet. Derfor er det også viktig å se på et systems transienter.

Frekvensresponsen er et veldig nyttig verktøy når man skal designe regulatorer (se kapittel **??**) og kan også hjelpe oss å finne ut om et system er stabilt (stabilitet behandles i kapittel **??**). Man analyserer gjerne forsterkningen og faseforskyvningen separat. Følgende beskrivelse forklarer forholdet mellom begrepene.

Forsterkningen til et system er styrkeforholdet mellom et inn- og et utgangssignal på systemet, altså hvor mye utgangssignalet blir forsterket i forhold til inngangssignalet.

Faseforskyvning eller fase er antall grader utgangssignalet er forsinket i forhold til inngangssignalet.

Frekvensrespons er forsterkning og faseforskyvning ved en gitt frekvens ω.

Frekvensresponsen vil variere med frekvensen, det er vanlig å fremstille denne variasjonen i frekvensrespons grafisk, som regel i et Bode-, Nichols- og Nyquist-diagram.

1.3 Finne frekvensresponsen til et system

Ulike systemer kan beskrives med transferfunksjoner, $h(s)$. Frekvensresponsen til $h(s)$ er gitt av amplitudeforholdet $|h(s)|_{s=j\omega}$ og fasevinkelen $\angle h(s)_{s=j\omega}$.

Amplitudeforholdet finner man ved å

1. Sette inn $s = j\omega$ i $h(s)$.
2. Finne lengden lengden av $h(j\omega)$
   (a) Kvadrere realdelen og imaginærdelen av hver faktor i $h(j\omega)$, og summere disse.
   (b) Ta roten av summen til den kvadrerte realdelen og imaginærdelen, vi har da funnet absoluttverdien av transferfunksjonen.

Fasevinkelen finner man ved å

1. Sette inn $s = j\omega$ i $h(s)$.

2. Ta $\arctan(h(j\omega))$.

Når man skal regne ut amplitudeforhold og fasevinkler er det et par enkle regler som kan gjøre ting mye lettere:

- $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $\angle \frac{z}{w} = \angle z - \angle w$
- $\angle z \cdot w = \angle z + \angle w$

Vi skal se på et eksempel der vi skal regne ut frekvensresponsen til systemet

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \tag{1.9}$$

der $T = 1$ er satt inn.

Svar: Punktvis blir absoluttverdien som følger

1. Setter inn $s = j\omega$ i $h(s)$

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = h(j\omega) \tag{1.10}$$

2. Finner lengden av hver faktor

   - Kvadrerer realdelen og imaginærdelen av hver faktor

$$(1)^2 + (1)^2 = 1^2 + 0^2 = 1 \tag{1.11a}$$

$$(j\omega)^2 + (j\omega^2) = 0^2 + \omega^2 = \omega^2 \tag{1.11b}$$

$$(j\omega+1)^2 + (j\omega+1)^2 = 1^2 + \omega^2 \tag{1.11c}$$

   - Tar roten av summen til den kvadrerte realdelen og imaginærdelen

$$|j\omega| = \sqrt{\omega^2} = \omega \tag{1.12a}$$

$$|(j\omega+1)| = \sqrt{1+\omega^2} \tag{1.12b}$$

Vi finner dermed amplituden ved å multiplisere faktorene slik de var i teller og nevner

$$|h(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} \tag{1.13}$$

Fasevinkelen blir som følger

1. Uttrykket for $h(j\omega)$ blir som for amplituden

$$h(j\omega) = h(s)_{s=j\omega} = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} \tag{1.14}$$

2. Regner ut vinkelen ved hjelp av forenklinger:

$$\begin{aligned}\angle h(j\omega) &= \angle\frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \angle 1 - \angle j\omega - \angle(j\omega+1)\\ &= \arctan(0/1) - \arctan(\omega/0) - \arctan(\omega/1)\\ &= 0 - 90 - \arctan(\omega) = \arctan(1/\omega) \end{aligned}\tag{1.15}$$

   Den siste likheten her er ikke viktig, men kommer av en arctan-identitet.

Vi skal nå se på et litt mer utfyllende eksempel;
Gitt transferfunksjonen:

$$h(s) = 50\frac{1+Ts}{s\left((\frac{s}{\omega_0})^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + 1\right)} \tag{1.16}$$

der $T = 0,1, \zeta = 0,2\ \omega_0 = 100$, finn frekvensresponsen.
Svar: Setter vi disse verdiene inn i (1.16) får vi

$$h(s) = 50\frac{(1+0,1s)}{s\left(\left(\frac{s}{100}\right)^2 + 2\cdot 0,2\frac{s}{100} + 1\right)} \tag{1.17}$$

1. Vi begynner med å sette $s = j\omega$ inn i transferfunksjonen.

$$h(j\omega) = 50\frac{(1+0.1j\omega)}{j\omega\left(\left(\frac{j\omega}{100}\right)^2 + 2\cdot 0,2\frac{j\omega}{100} + 1\right)} \tag{1.18}$$

2. Finner lengden av $h(j\omega)$:

   - Kvadrerer realdelen og imaginærdelen av hver faktor

$$(1+0,1j\omega)^2 + (1+0,1j\omega)^2 = 1 + (0,1\omega)^2 = 1 + 0,01\omega^2 \tag{1.19a}$$

$$(j\omega)^2 + (j\omega)^2 = 0^2 + \omega^2 = \omega^2 \tag{1.19b}$$

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{j\omega}{100}\right)^2 + 0,4\frac{j\omega}{100} + 1\right)^2 + \left(\left(\frac{j\omega}{100}\right)^2 + 0,4\frac{j\omega}{100} + 1\right)^2\\ &= \left(\frac{100^2 - \omega^2}{100^2}\right)^2 + \left(\frac{0,4\omega}{100}\right)^2\end{aligned} \tag{1.19c}$$

- Så tar vi roten av hver faktor

$$|1+0,1j\omega| = \sqrt{(1^2+0,01\omega^2)} \tag{1.20a}$$

$$|j\omega| = \sqrt{\omega^2} = \omega \tag{1.20b}$$

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{j\omega}{100}\right)^2 + 0,4\frac{j\omega}{100}+1\right| &= \left|\frac{-\omega^2+0,4\cdot 100j\omega+100^2}{100^2}\right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{100^2-\omega^2}{100^2}\right)^2+\left(\frac{0,4\omega^2}{100}\right)^2}\end{aligned} \tag{1.20c}$$

Vi har da kommet frem til absoluttverdien av transferfunksjonen (1.17) ved å gange sammen korresponderende faktorer i teller og nevner:

$$|h(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1+0,01\omega^2)}}{\omega\sqrt{\left(\frac{100^2-\omega^2}{100^2}\right)+\left(\frac{0,4\omega}{100}\right)^2}} \tag{1.21}$$

Fasen blir utledet som over, men for dette eksempelet blir det noe mer regning.

1. Uttrykket for $h(j\omega)$ blir som for amplituden (1.18):

$$h(j\omega) = \frac{50\,(1+0.1j\omega)}{j\omega(\left(\frac{j\omega}{100}\right)^2+2\cdot 0,2\frac{j\omega}{100}+1)} = \frac{50\,(1+0.1j\omega)}{j\omega(\left(\frac{100^2-\omega^2}{100^2}\right)+j\frac{0,4\omega}{100})} \tag{1.22}$$

2. Deler uttrykket opp i faktorer:

$$\begin{aligned}\angle h(j\omega) &= \angle 50 + \angle(1+0.1j\omega) - \angle j\omega - \angle(\left(\frac{100^2-\omega^2}{100^2}\right)+j\frac{0,4\omega}{100}) \\ &= \arctan(\frac{0}{50}) + \arctan(\frac{0.1\omega}{1}) - \arctan(\frac{\omega}{0}) - \arctan(\frac{\frac{0,4\omega}{100}}{\left(\frac{100^2-\omega^2}{100^2}\right)}) \\ &= 0 + arctan(0.1\omega) - 90 - \arctan(\frac{0,4\omega}{\left(\frac{100^2-\omega^2}{100}\right)}) \\ &= -90 + arctan(0.1\omega) - \arctan(\frac{40\omega}{(100^2-\omega^2)})\end{aligned} \tag{1.23}$$

Fasevinkelen som en funksjon av ω er da (1.23).

Vi kan før vi går videre bemerke oss to ting; en konstant vil ikke påvirke fasen, og en faktor på s vil gi et faseskift på 90°, enten positivt når den står i teller(derivator), eller negativt når den står i nevner(integrator).

Frekvensresponsen varierer med frekvensen ω, så det finnes altså en verdi for amplituden og en verdi for fasen ved enhver frekvens, som sier oss hvor mye forsterkning og faseforskyving av inngangen systemet gir ved denne eksakte frekvensen. Ved plotting kan frekvensresponsen for alle frekvenser studeres samtidig.

1.4 Knekkfrekvens

I asympotiske Bode-diagrammer kaller man gjerne kryssningspunktet mellom to asympoter (rette linjer) et knekkpunkt, siden man kan se på det som at en rett linje knekker og bytter retning. Frekvensen der denne knekken inntreffer kalles knekkfrekvensen og symboliseres ofte med ω_k.

En måte å tenke på dette med asymptoter og knekk er at man ser hvilket ledd som dominerer i hver enkelt faktor. For å forklare dette kan vi gå tilbake til noe vi sa tidligere; *en fordel med logaritmeskalaen er at multiplikasjon av faktorer kan sees som addisjon i et plot*. La oss se litt nøyere på dette:

Vi tar utgangspunkt i transferfunksjonen fra tidligere (1.9). Hvordan blir forsterkningsforløpet og hva blir knekkfrekvensen? **Svar**:

$$h(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} \tag{1.24}$$

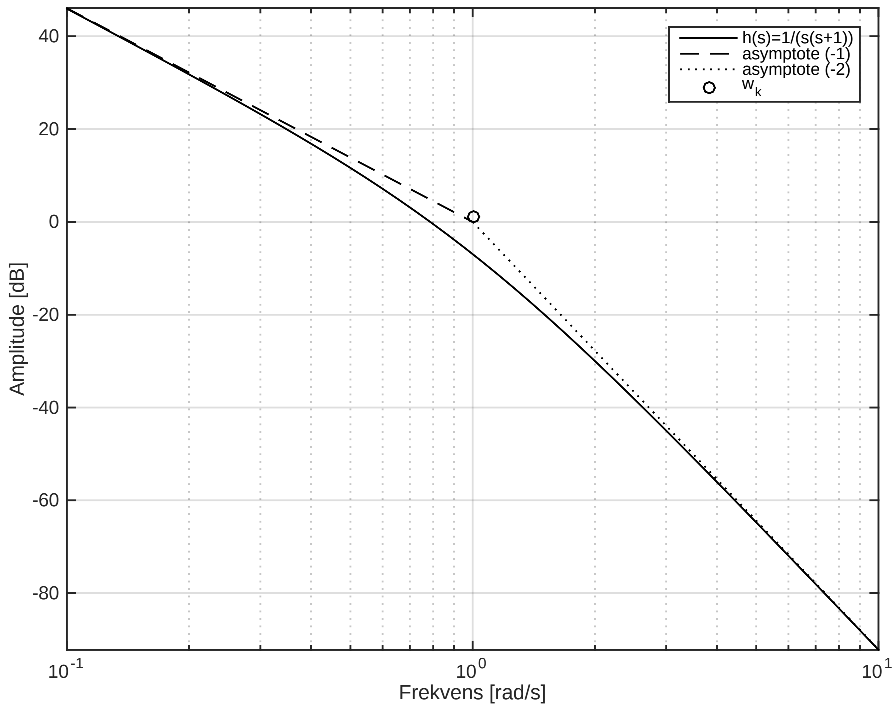
$$|h(j\omega)| = 20\ \log(|h(j\omega)|) = 20\ \log(\frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}) \tag{1.25}$$

$$= -20\ \log(\omega) - 20\ \log(\sqrt{1+\omega^2}) \tag{1.26}$$

Ser vi på det første leddet vil dette bidra med en gradient på -20 per dekade. Ser vi på det andre leddet vil dette ha forskjellig påvirkning avhengig av frekvens;

- Ved lave frekvenser er $\omega \ll 1 \Rightarrow -20\ \log(\sqrt{1+\omega^2}) \approx -20\ \log(1) = 0$ som betyr at til venstre for $\omega = 1$ har dette leddet liten til ingen effekt,
- Ved høye frekvenser er $\omega \gg 1 \Rightarrow -20\ \log(\sqrt{1+\omega^2}) \approx -20\ \log(\omega)$ som betyr at til høyre for $\omega = 1$ vil linjen knekkenedover og ha en gradient på -40 per dekade.

Vi tegner så opp en asymptote for hvert tilfelle som i tillegg møtes i punktet $\omega = 1$. I grensetilfellet der $\omega \approx 1$ avviker funksjonen fra asymptotene, men generelt ligger den faktiske funksjonen nært asymptotene. Et tips for å tegne enda mer nøyaktige diagram er at for førsteordens faktorer ligger den eksakte forsterkningen omtrent 3 under eller over den horisontale asymptoten. Hvis asymptoten knekker nedover, ligger forsterkningen 3 under asymptoten, hvis asymptoten knekker oppover ligger forsterkningen 3 over. Se figur 1.2 for nøyaktig plot med asymptoter.



Figur 1.2: Amplitudediagram-diagram med knekkfrekvens ω_k og asymptoter markert.

Hva er knekkfrekvensen til systemet $h(s) = \frac{1}{1+Ts}$?
Svar: Først finner vi frekvensresponsen

$$h(j\omega) = h(s)|_{s=j\omega} = \left.\frac{1}{1+Ts}\right|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+Tj\omega} \tag{1.27}$$

Vi legger merke til at knekkfrekvensen forekommer der amplituden til fatoren er $\sqrt{2}$ og kan dermed sette opp:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(T\omega_k)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1.28}$$

Vi ser at knekkfrekvensen må bli

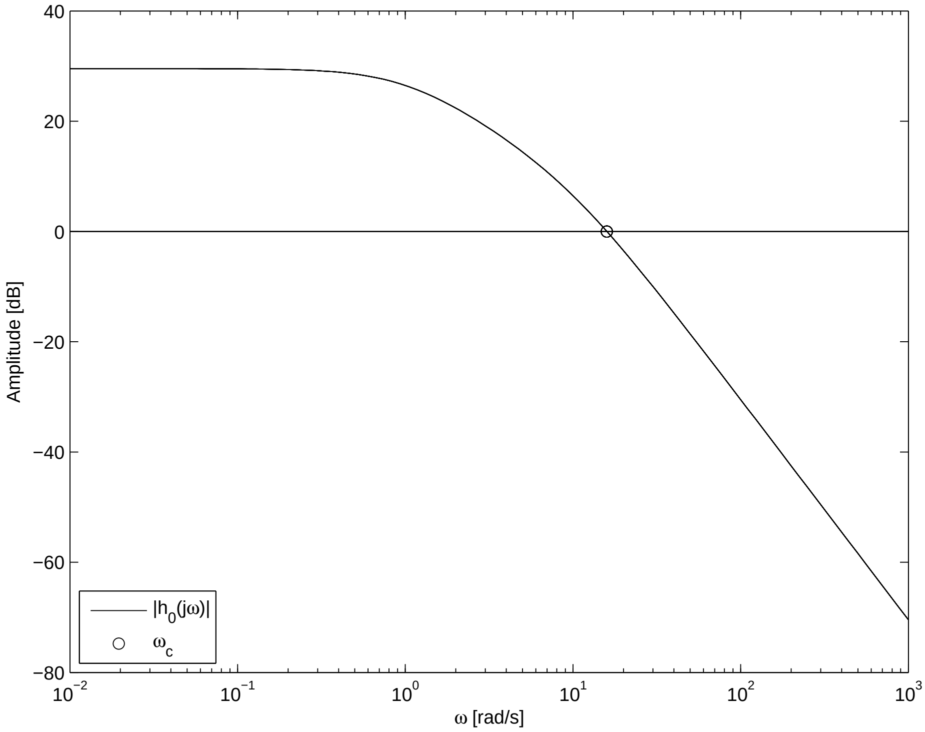
$$\omega_k = \frac{1}{T} \tag{1.29}$$

Det er verdt å merke seg at knekkfrekvensen $\omega_k = \frac{1}{T}$ gjelder generelt for førsteordensordens faktorer skrevet på standardformen $\frac{1}{1+Ts}$ (se del 1.6).

1.5 Kryssfrekvens og båndbredde

Kryssfrekvens er frekvensen der grafen i forsterkingsdelen av Bode-diagrammer krysser x-aksen (frekvensaksen). Ved dette krysningspunktet er forsterkingen 1, eller 0, se figur 1.3. Kryssfrekvensen kalles gjerne ω_c (fra crossover frequency) og vi kan da sette opp sammenhengen

$$|h(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow 20\ \log(1) = 0 \tag{1.30}$$



Figur 1.3: Bode-diagram med kryssfrekvensen ω_c markert.

Båndbredde har flere definisjoner. I dette faget defineres båndbredde som det frekvensområdet der $|h_0(j\omega)| > 1 = 0$, altså der forsterkningen er større enn 0 desibel. Når forsterkningen er større enn 1 blir signalet forsterket, mens når forsterkingen er mindre enn 1 blir signalet dempet. Vi kan dermed se på båndbredde som frekvensområdet der tilbakekoblingen er effektiv; innenfor båndbredden klarer systemet å følge inngangsfrekvensen og da er systemet raskt nok, utenfor båndbredden blir inngangsfrekvensen så høy at systemet ikke klarer å følge med og systemet er da for tregt.

1.6 Standardform

Å sette en transferfunksjon $h(s)$ på standardform vil si å skrive den om slik at faktorene kommer på en hensiktsmessig form. Når man skal tegne Bode- og Nichols-diagram faktoriseres $h(s)$ i faktorene $(1+Ts)$, $(\frac{s^2}{\omega_0^2}+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+1)$, s og en konstant K. Alle disse faktorene kan ha orden høyere enn 1, altså vil transferfunksjonen

$$h(s) = K\frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}{s^2\left(\frac{s^2}{\omega_0^2}+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+1\right)^3} \tag{1.31}$$

være på standardform.

Standardform brukes hovedsaklig ved tegning av Bode- og Nichols-diagram, og gjør det lettere å se poler, nullpunkter, tidskonstanter, knekkfrekvenser og stigningstall. Vi viser hvordan man går over til standardform først ved et enkelt eksempel. Skriv transferfunksjonen

$$h(s) = 10\frac{s+10}{s+2} \tag{1.32}$$

på standardform.

Svar: I nevner må vi trekke ut 2 for å få formen $1+Ts$, tilsvarende må vi trekke ut 10 fra telleren. Vi kan da skrive (1.32) som

$$h(s) = 10\frac{10(\frac{1}{10}s+1)}{2(\frac{1}{2}s+1)} \tag{1.33}$$

Det eneste som nå gjenstår er å trekke sammen alle konstantene. Den endelige formen blir

$$h(s) = 50\frac{0,1s+1}{0,5s+1} \tag{1.34}$$

som altså er på standardform. Dette var et relativt enkelt eksempel. For å ytterlig tydeliggjøre fremgangsmåten tar vi med ett eksempel til, dette litt vanskeligere. Skriv transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{s^2+5s+4}{s^3-s} \tag{1.35}$$

på standardform.

Svar: Vi tar først for oss telleren, og konstaterer at den er et polynom av andre orden. Ved å løse dette som en andregradsligning gir løsningene $s_1 = -4,\ s_2 = -1$. Vi kan da skrive telleren som

$$s^2+5s+4 = (s-s_1)(s-s_2) = (s+4)(s+1)$$

Nevneren er et tredjegradspolynom, men heldigvis kan vi trekke ut en s, altså $s^3 - s = s(s^2 - 1)$. Vi må igjen løse en andregradsligning, denne gangen $s^2 - 1$, og finner nå løsningene $s_1 = -1,\ s_2 = 1$. Vi kan dermed skrive nevneren som

$$s^3 - s = s(s+1)(s-1)$$

Totalt blir da transferfunksjonen (1.35) omskrevet til

$$h(s) = \frac{(s+4)(s+1)}{s(s+1)(s-1)} \tag{1.36}$$

Vi ser at vi kan forkorte teller og nevner, og dersom vi trekker ut et konstantledd fåes følgende:

$$h(s) = 4\frac{(\frac{1}{4}s+1)}{s(s-1)} \tag{1.37}$$

som er på standardform.

1.7 Hvordan tegne Bode-diagram

Når man tegner Bode-diagram på frihånd er det vanlig å gjøre forenklinger og tegne asymptoter i stedet for den eksakte kurven. For å lage eksakte Bode-diagrammer brukes vanligvis et dataprogram, for eksempel MATLAB, men det er også mulig å tegne eksakte Bode-diagrammer for hånd ved hjelp av korreksjonsark. Korreksjonsark brukes sjelden, og kan studeres i appendiks D i balchen ved interesse.

Vi har nevnt litt om hvordan vi tegner asymptoter i del 1.4, men for å bedre forklare fremgangsmåten for å tegne Bode-diagrammer begynner vi med oppsummeringen, nemlig tabell 1.1 der de vanligste faktorenes innvirkning vises. Det er viktig å merke seg at vi bruker en ny notasjon for gradienten i amplitudediagrammet. Vi kaller -20 per dekade for (-1) , -40 per dekade for (-2) osv. Tabellen kan ved første øyekast virke noe uoversiktelig, men den er veldig grei å ha for hånden når man har en transferfunksjon man skal tegne Bode-diagram for. Vær oppmerksom på at virkningen på $|h_0(j\omega)|$ og $\angle h_0(j\omega)$ dobles dersom en faktor er kvadrert, tredobles dersom en faktor er opphøyd i tredje og så videre. Altså vil $\frac{1}{(1+Ts)^2}$ endre gradienten med (-2) og fasen med $-180°$. Hvis det er uklart hvordan vi kommer fram til disse verdiene refereres det til 1.4 for en kort forklaring rundt knekkfrekvenser.

Vi forklarer her fremgangsmåten for tegning av Bode-diagram mest mulig generelt, men for å ha noe å relatere beskrivelsen til, bruker vi transferfunksjonen

$$h_0(s) = 100\frac{(1+0,1s)}{s(1+\frac{0,4}{100}s+\frac{s^2}{10000})} \tag{1.38}$$

Tabell 1.1: Hvordan de vanligste faktorene kommer inn i et Bode-diagram

Faktor	$\lvert h_0(j\omega)\rvert$	$\angle h_0(j\omega)$	Frekvens
s	$(+1)$	$+90°$	ved $\omega = 0$
$\frac{1}{s}$	(-1)	$-90°$	ved $\omega = 0$
$(1 + Ts)$	$(+1)$	$+90°$	ved $\omega = \frac{1}{T}$
$(1 - Ts)$	$(+1)$	$-90°$	ved $\omega = \frac{1}{T}$
$\frac{1}{1+Ts}$	(-1)	$-90°$	ved $\omega = \frac{1}{T}$
$(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + (\frac{s}{\omega_0})^2)$	$(+2)$	$+180°$	ved $\omega = \omega_0$
$\frac{1}{1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+(\frac{s}{\omega_0})^2}$	(-2)	$-180°$	ved $\omega = \omega_0$

Transferfunksjonen (1.38) er på standardform, dette forklares nærmere i del 1.6. Dersom man skal tegne Bode-diagram til en transferfunksjon som ikke er på standardform må man først ordne opp i dette. Figurene 1.4 og 1.5 viser de ferdige diagrammene for henholdsvis amplitude og fase, ta en titt på disse mens du leser om fremgangsmåten.

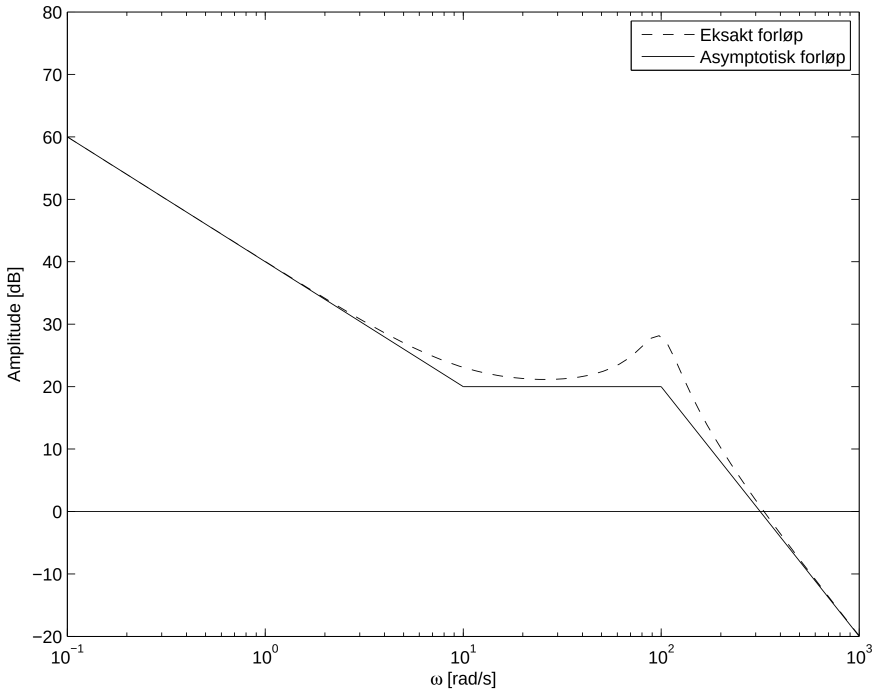
Deretter må de forskjellige knekkfrekvensene identifiseres. Ledd på formen $(1 + Ts)$ gir knekkfrekvens $\omega = \frac{1}{T}$ mens ledd på formen $(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + (\frac{s}{\omega_0})^2)$ gir knekkfrekvens $\omega = \omega_0$; dette uavhengig av om leddene står i teller eller nevner. Transferfunksjonen (1.38) har $\omega_0 = \sqrt{10000} = 100$ og $\omega_1 = \frac{1}{0{,}1} = 10$. Disse skal vi ta for oss i stigende rekkefølge, altså ω_1 før ω_0. Vi kan nå begynne å tegne Bode-diagrammet og tar først for oss amplitudedelen.

1.7.1 Amplitude

Hovedregelen man alltid følger er at man starter til venstre i diagrammet og jobber seg mot høyre. Den delen som krever mest arbeid er å starte Bode-diagrammet og gjøres ved å se på faktorer som er rent reelle(forsterkning), eller rent imaginære(ren derivasjon eller ren integrasjon). Det er nå to mulige tilfeller;

- Det enkleste tilfellet er når transferfunksjonen ikke inneholder noen rene integrasjoner/derivasjoner. Man regner da om forsterkningen K til desibel, $K = 20 \cdot \log(K)$, og stipler denne inn i den venstre delen av Bode-diagrammet.

- Dersom transferfunksjonen inneholder rene integrasjoner blir det litt mer komplisert, men ikke vanskelig når man har gjort det noen ganger. Poenget er å kun ta for seg den delen av transferfunksjonen som inneholder integrasjonene og forsterkningen K. Denne transferfunksjonen



Figur 1.4: Forsterkningsdel av Bode-diagram med asymptoter.

kan vi for eksempel kalle $h_0^*(s)$. I vårt tilfelle får vi

$$h_0^*(s) = 100\frac{1}{s} \tag{1.39}$$

Vi skal nå finne kryssfrekvensen til $h_0^*(s)$, denne kan vi kalle ω_c^* (se del 1.5 for mer om kryssfrekvens). Vi skal altså løse ligningen

$$|h_0^*(j\omega_c^*)| = 1 \tag{1.40}$$

Gjør vi dette for transferfunksjonen (1.39) får vi

$$\left|100\frac{1}{j\omega_c^*}\right| = \frac{100}{\omega_c^*} = 1 \Rightarrow \omega_c^* = 100 \tag{1.41}$$

Frekvensen ω_c^* markerer vi nå av på frekvensaksen og ser deretter på hva slags stigningstall vi skal ha *bakover* mot lavere frekvenser. Én integrasjon gir (-1) / -20 per dekade, to integrasjoner gir (-2) / -40 per dekade og så videre. Vår transferfunksjon (1.38) har én integrasjon, vi teller oss derfor én dekade bakover (til $\omega = 10$) og 20 oppover. Dette punktet markerer vi og stipler deretter en linje fra ω_c^* på 0-linjen gjennom dette punktet og helt bakover til amlitudeaksen. Denne linjen har nå stigningstall (-1).

Uavhenging av om transferfunksjonen har integrasjoner eller ikke, skal det nå være en stiplet linje til venstre i diagrammet. Man finner nå den laveste knekkfrekvensen, markerer av denne på frekvensaksen og gjør den stiplede linjen heltrukken helt frem til denne knekkfrekvensen. For transferfunksjonen (1.38) fant vi ut at laveste knekkfrekvens var $\omega_1 = 10$. Vi gjør derfor den stiplede linjen med stigningstall (-1) heltrukken fra amplitudeaksen og frem til $\omega = \omega_1 = 10$.

Siden knekkfrekvensen ω_1 kommer fra $(0.1s + 1)$ (et nullpunkt i venstre halv plan) skal amplituden knekke oppover med $(+1)$, dette kan vi se i tabell 1.1. Siden vi hadde stigningstall (-1) får vi stigningstall 0, altså en vannrett strek. Neste knekkfrekvens er $\omega_0 = 100$, og asymptoten skal dermed være vannrett fra $\omega_1 = 10$ til $\omega_0 = 100$.

Knekkfrekvensen ω_0 kommer fra $\frac{1}{1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+(\frac{s}{\omega_0})^2}$ (et resonansledd i nevner), dermed skal vi ifølge tabell 1.1 knekke nedover med stigningstall (-2). Vi må da lage en asympote med stigningstall (-2), siden stigningstallet frem hit var 0. Det gjør vi ved å trekke en linje fra asymptoten i $\omega_0 = 100$ til punktet én dekade mot høyre (til $\omega = 1000$) og 40 nedover. Siden vi ikke har flere knekkfrekvenser lar vi denne linjen få gå helt til kanten av diagrammet.

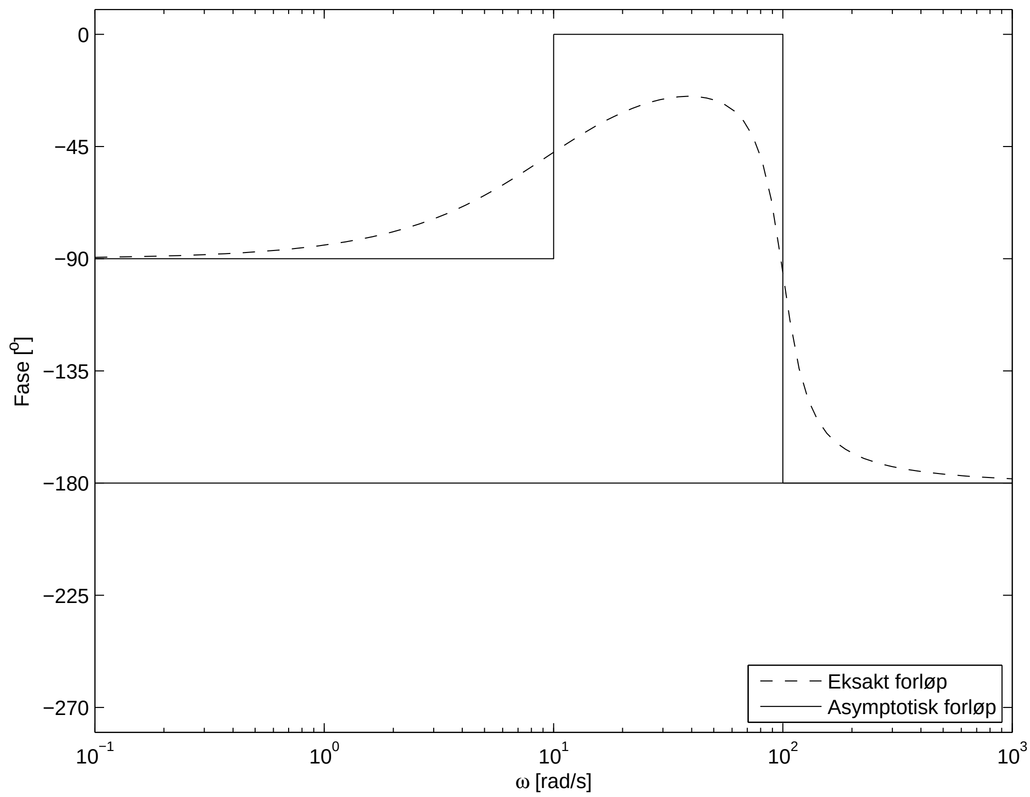
Vi er nå ferdig med amplitudedelen (se figur 1.4) av Bode-diagrammet og tar fatt på fasedelen. Hovedforskjellen nå er at alle asymptotene er vannrette og vi får "sprang i fase", vanligvis på $\pm 90°$ eller $\pm 180°$.

1.7.2 Faseforskyvning

I fasedelen av Bode-diagrammet har ikke konstanten K noen innvirkning. Vi kan dermed starte med å se etter rene derivasjoner s og rene integrasjoner $1/s$. Fra tabell 1.1 har vi at disse fører til at fasen starter i henholdsvis $+90°$ eller $-90°$. Hadde vi hatt flere rene derivasjoner eller integrasjoner måtte vi lagt sammen virkningen, altså ville en trippel derivasjon s^3 ført til at fasen startet i $3 \cdot 90° = 270°$. Hvis en transferfunksjon hverken har rene derivasjoner eller integrasjoner starter fasen i 0°. I (1.38) har vi én ren integrasjon ($1/s$, fasen må da starte i $-90°$.

Fasens startverdi varer helt frem til første (laveste) knekkfrekvens. I vårt eksempel har vi funnet at første knekkfrekvens er $\omega_1 = 10$ og at denne kommer fra faktoren $(1+0,1s)$. Dette er et nullpunkt i venstre halvplan, noe som gjør at leddet oppfører seg "normalt", det vil si at nullpunktet hever både forsterkning og fase. I tråd med dette ser vi i tabell 1.1 at fasen vil heves med 90° ved $\omega = \omega_1 = 10$. Fasen lå frem til nå i $-90°$ og vil altså gjøre et sprang opp til 0° ved denne knekkfrekvensen.

Neste sprang vil inntreffe ved neste knekkfrekvens. Denne er i vårt eksempel $\omega_1 \approx 100$ og kommer fra faktoren $1/(1 + \frac{0.4s}{100} + \frac{s^2}{10000})$, som kalles en resonansfaktor i nevner. Denne oppfører seg også "normalt", det vil si likt som en pol i venstre halvplan, bare med dobbel virkning. Altså vil en resonansfaktor i nevner endre forsterkningen med (-2) og fasen med $-180°$, dette kan vi også se i tabell 1.1. Etter siste knekkfrekvens ble fasen trukket opp til 0°, og dermed vil den gjøre et sprang ned til $-180°$ ved $\omega = \omega_1 \approx 100$. Det ferdige diagrammet er vist i figur 1.5



Figur 1.5: Fasedel av Bode-diagram med asymptoter.

1.8 Tegne inn avviksforholdet $|N(j\omega)|$—N(jw)— og følgeforholdet $|M(j\omega)|$—M(jw)— i et Bode-diagram

Når man skal tegne følge- og avviksforhold i et Bode-diagram tegner man som regel bare asymptotene, og man gjør det oftest etter at $h_0(j\omega)$ er tegnet inn. Som vi skal se finnes det noen relativt greie forenklinger som gjør at vi kan tegne $|N(j\omega)|$ og $|M(j\omega)|$ ganske raskt.

Fra del **??** vet vi at avviksforholdet er definert som

$$N(j\omega) = \frac{1}{1 + h_0(j\omega)} \tag{1.42}$$

Når $|N(j\omega)|$ skal tegnes forenkles utrykket for henholdsvis stor forsterking og stor dempning som

$$\begin{aligned} |h_0(j\omega)| >> 1 &\Rightarrow |1 + h_0(j\omega)| \approx |h_0(j\omega)| \\ &\Rightarrow |N(j\omega)| \approx \frac{1}{|h_0(j\omega)|} \end{aligned} \tag{1.43a}$$

$$\begin{aligned} |h_0(j\omega)| << 1 &\Rightarrow |1 + h_0(j\omega)| \approx 1 \\ &\Rightarrow |N(j\omega)| \approx 1 \end{aligned} \tag{1.43b}$$

Det at vi kan gjøre tilnærmingen $|N(j\omega)| \approx \frac{1}{|h_0(j\omega)|}$ virker kanskje ikke som en forenkling ved første øyekast. Men siden vi skal tegne i desibel, som er en logaritmisk skala (se del 1.1) og husker at vi for logaritmer har at

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = \log 1 - \log x = 0 - \log x = -\log x$$

viser det seg at vi kan tegne $|N(j\omega)|$ som $-|h_0(j\omega)|$. Enkelt sagt vil det si å speile $|h_0(j\omega)|$ om 0-linjen. Selv om tilnærmingen blir dårligere når vi nærmer oss 0-linjen, regnes den for god nok helt opp til kryssfrekvensen ω_c. For frekvenser større enn ω_c har vi fra ligning (1.43b) at $|N(j\omega)|$ tegnes som 0, siden $\log 1 = 0$.

Fra del **??** har vi at følgeforholdet er definert som

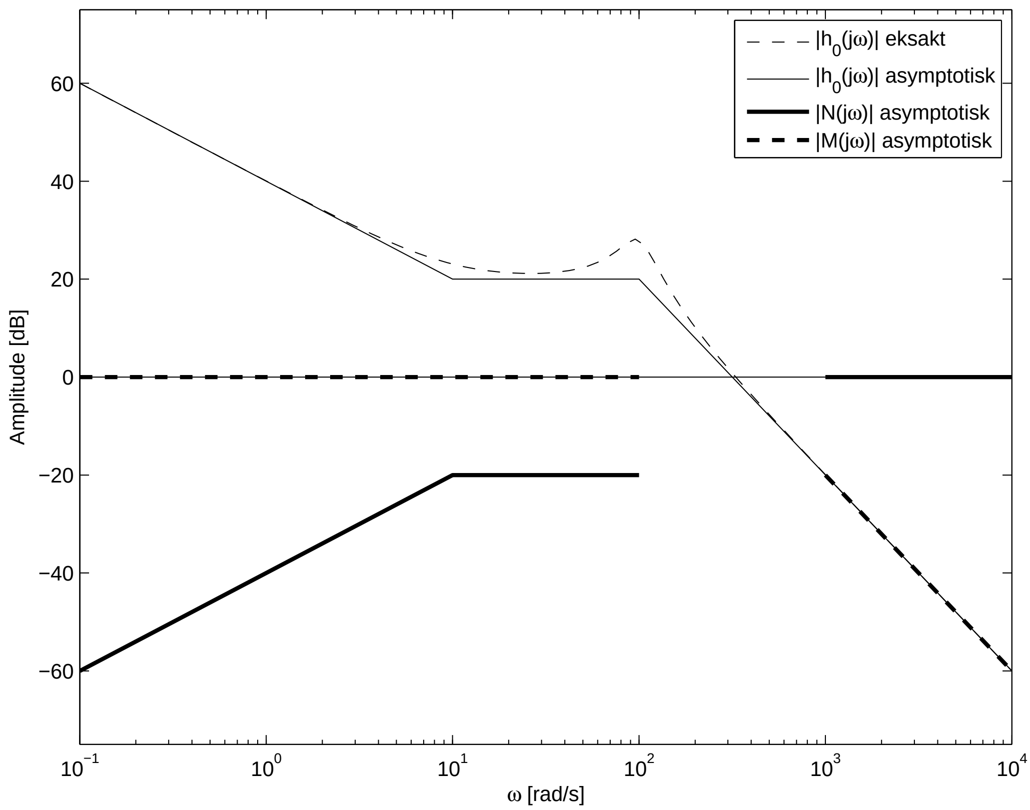
$$M(j\omega) = \frac{h_0(j\omega)}{1 + h_0(j\omega)} \tag{1.44}$$

gitt enhetstilbakekobling (se del **??**). Akkurat som med avviksforholdet gjør vi her forenklinger for stor forsterking og stor dempning. For følgeforholdet blir forenklingene henholdsvis

$$
\begin{aligned}
|h_0(j\omega)| >> 1 &\Rightarrow |1 + h_0(j\omega)| \approx |h_0(j\omega)| \\
&\Rightarrow |M(j\omega)| \approx \left| \frac{h_0(j\omega)}{h_0(j\omega)} \right| = 1
\end{aligned} \tag{1.45a}
$$

$$
\begin{aligned}
|h_0(j\omega)| << 1 &\Rightarrow |1 + h_0(j\omega)| \approx 1 \\
&\Rightarrow |M(j\omega)| \approx |h_0(j\omega)|
\end{aligned} \tag{1.45b}
$$

Altså vil vi for stor forsterkning (også her regnet som opp til kryssfrekvensen ω_c) tegne følgeforholdet som $|M(j\omega)| = 0$. For frekvenser større enn ω_c, altså der $h_0(j\omega)$ dempes, regner vi $|M(j\omega)|$ og $|h_0(j\omega)|$ som like og tegner følgeforholdet oppå $h_0(j\omega)$. Figur 1.6 viser de asymptotiske forløpene for $|N(j\omega)|$ og $|M(j\omega)|$, samt $|h_0(j\omega)|$ for transferfunksjonen (1.38).



Figur 1.6: Asymptotiske forløp for $|N(j\omega)|$ og $|M(j\omega)|$.

1.9 Tidsforsinkelse $e^{-\tau s}$exp(-Ts) i Bode-diagram

Dersom vi tar Laplace-transform av en tidsforsinkelse får vi

$$\{f(t-\tau)u(t-\tau)\} = e^{-\tau s}F(s) \tag{1.46}$$

Ut fra (1.46) ser vi at tidsskift i tidsdomenet medfører multiplisering med $e^{-\tau s}$ i s-domenet.

For å finne amplituden og fasen til en tidsforsinkelse tar vi utgangspunkt i ligningen

$$e^{-j\tau\omega} = \cos(\tau\omega) - j\sin(\tau\omega) \tag{1.47}$$

Amplituden til en tidsforsinkelse finner vi til å være $|e^{-\tau j\omega}| = |\cos(\tau\omega) - j\sin(\tau\omega)| = \sqrt{\cos^2(\tau\omega) + \sin^2(\tau\omega)} = 1 = 0$. Altså har en tidsforsinkelse ingen innvirkning på amplitudekurven. Dersom man sammenligner amplitude-plot i figur 1.7 med og uten tidsforsinkelse ser man at de er identiske.

Bruker vi ligning (1.47) finner vi at fasen til en tidsforsinkelse vil bli

$$\angle e^{-j\tau\omega} = -\omega\tau = -\omega\tau \cdot \frac{180°}{\pi} \tag{1.48}$$

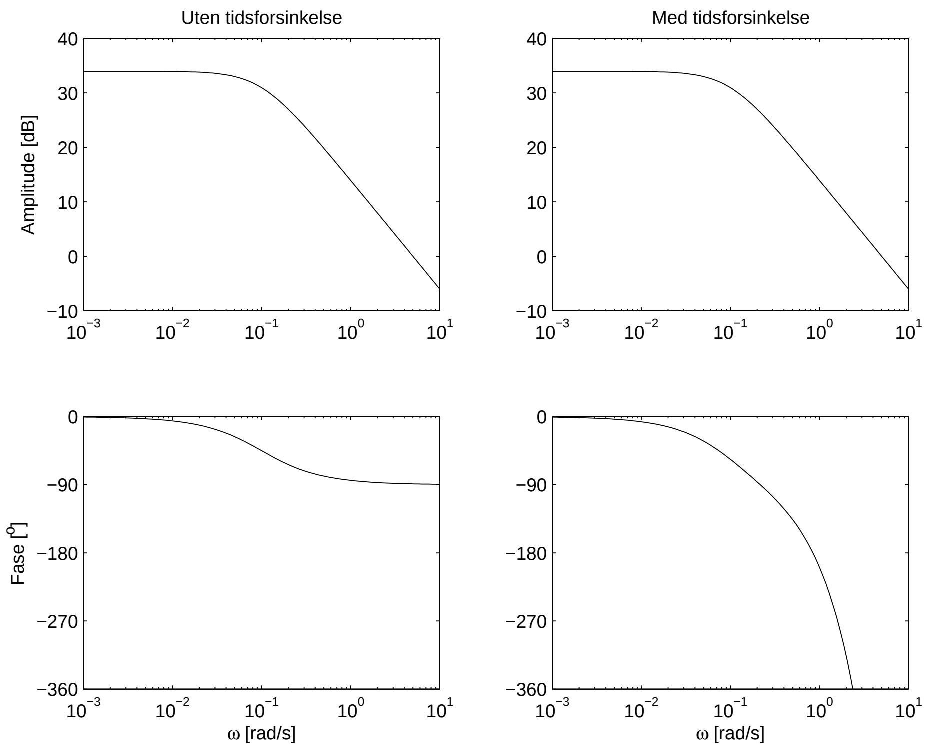
Ut fra dette kan vi se at en tidsforsinkelse gir et stort negativt fasebidrag når frekvensen ω øker og/eller ved stor tidsforsinkelse τ. Det er verdt å merke seg at fasen til en tidsforsinkelse minker lineært med ω, men siden Bode-diagrammet har logaritmisk frekvensakse vil fasen til en tidsforsinkelse se ut som en eksponensialfunksjon.

1.10 Nichols-diagram

Et Nichols-diagram kan brukes for å finne sammenhengen mellom forsterkning, fase, følgeforholdet $M(j\omega)$, avviksforholdet $N(j\omega)$ og sløyfetransferfunksjonen $h_0(j\omega)$. For eksempel er det mulig å finne $M(j\omega)$ og $N(j\omega)$ når $h_0(j\omega)$ er tegnet inn.

x-aksen i et Nichols-diagram angir fase i grader og y-aksen angir forsterkning i desibel. I diagrammet er det tegnet inn en rekke deformerte sirkler og krumme linjer som kalles isokurver. Sirklene markerer konstante forsteknings-verdier av $M(j\omega)$ eller $N(j\omega)$ avhengig av type Nichols-diagram[1]. Tilsvarende markerer de krumme linjene konstante faseverdier. Dersom man plotter $h_0(j\omega)$ får man en kurve som blir kalt stedkurven eller Nichols-kurven og blir dannet av et sett med punkter som gir amplitude og fase til $h_0(j\omega)$ ved

[1]Dette er tysk mot amerikansk standard. MATLAB f.eks. tegner kurver for $M(j\omega)$.



Figur 1.7: Transferfunksjonen $h_0(j\omega) = \frac{5}{s+0{,}1}$ uten og med ($\tau = 2$) tidsforsinkelse.

ulike frekvenser. Denne kurven blir vanligvis angitt med en retning, og kan brukes til å si noe om systemets stabilitet og marginer(se kapittel **??**). Frekvenser blir ofte markert ved siden av kurven siden disse ikke kan leses ut fra diagrammet direkte. Ved å lese av verdien til de krumme linjene og sirklene for en gitt ω kan man lese av hvordan $M(j\omega)$ eller $N(j\omega)$ varierer langs stedkurven. Dette er vist i figur 1.8.

Merk at det varierer om skjemaet er tegnet opp med koter for $N(j\omega)$, eller $M(j\omega)$. Skulle det være tegnet opp på motsatt form av den vi ønsker kan vi bruke at $N(j\omega) + M(j\omega) = 1$, for å få ønsket verdi.

1.11 Hvordan tegne Nichols-diagram

For å tegne stedkurven til $h_0(j\omega)$ i et Nichols-diagram kan man gå fram på følgende måte

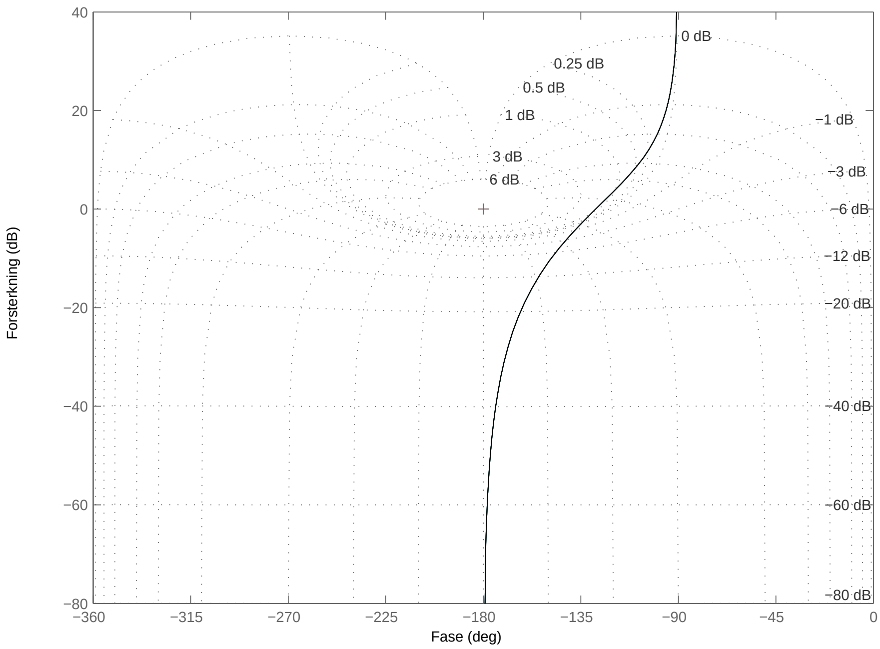
1. Lag en tabell med sammenhørende verdier av frekvens, amplitude og fase for $h_0(j\omega)$ for en del frekvenser innenfor det området du er inter-

essert i å studere. Hvis du allerede har et Bode-diagram tilgjengelig, kan du lese forsterkningen og fasen ut fra dette for de ulike frekvensene. Noter ned flest verdier i frekvensområder der amplituden og fasen varierer mye.

2. Marker av punktene fra tabellen inn i diagrammet. Plasser punktene ut fra amplitudeaksen og faseaksen.

3. Marker eventuelt av frekvensen til hvert punkt. Dette kan være nyttig ved senere analyse siden det ikke er mulig å lese ut frekvensen fra et Nichols-diagram.

4. Trekk stedkurven mellom punktene.



Figur 1.8: Nichols-diagram for $h(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ med koter for $M(j\omega)$.

Merk at ved en endring av forsterkning vil dette simpelthen skifte kurven opp eller ned. Dette kan sees ved å plotte punktene først med gammel og så med ny forsterkning.

1.12 Nyquist-diagram

Et Nyquist-diagram brukes først og fremst for å kunne bestemme om et system er stabilt eller ikke i sammenheng med Nyquists stabilitetskriterium (se del **??**).

I Nyquist-diagrammet plottes $(h_0(j\omega))$ langs x-aksen og $(h_0(j\omega))$ langs y-aksen. På denne måten gir hver frekvens ω et punkt på Nyquist-kurven når ω går fra $-\infty$ til $+\infty$. For en strengt proper transferfunksjon, altså en transferfunksjon der graden til teller er lavere enn graden til nevner, vil Nyquist-kurven starte på den reelle akse, og bevege seg inn mot origo når ω går mot $\pm\infty$. $|h_0(j\omega)|$ kan leses av som lengden på vektoren fra origo til et punkt på kurven. $\angle|h_0(j\omega)|$ kan leses av som vinkelen mellom den reelle aksen og vektoren $|h(j\omega)|$. Se figur 1.9 for et Nyquistdiagram tegnet for transferfunksjonen (1.49)

1.13 Hvordan tegne et Nyquist-diagram

Den beste måten å tegne et Nyquist-diagram på er å sette transferfunksjonen på formen $h_0(j\omega) = (h_0(j\omega)) + j(h_0(j\omega))$, og deretter lage en tabell med verdier på varierende ω. Disse sammenhørende verdiene plottes med realverdiene langs x-aksen og tilsvarende imaginærverdier langs y-aksen. Vi ønsker å beregne real- og imaginærdel til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{50}{(s+1)(s+4)} = \frac{50}{s^2+5s+4} \tag{1.49}$$

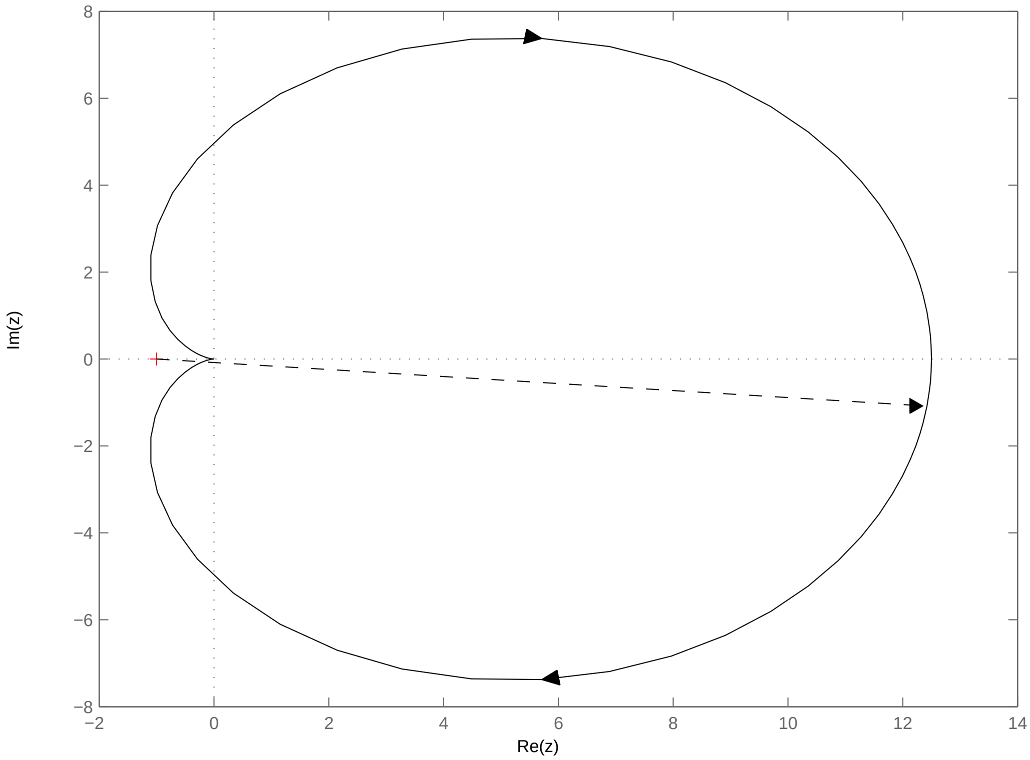
for så å tegne Nyquist-diagrammet. Først deler vi transferfunksjonen opp i real- og imaginærdel ved å gange oppe og nede med nevnerens komplekskonjugerte.

$$\begin{aligned} h(j\omega) &= \frac{50}{4-\omega^2+5j\omega} \cdot \frac{4-\omega^2-5j\omega}{4-\omega^2-5j\omega} \\ &= \frac{200-50\omega^2}{\omega^4+17\omega^2+16} - j\frac{250\omega}{\omega^4+17\omega^2+16} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Vi regner deretter ut en del punkter, slik at vi kan trekke en linje mellom disse og dermed tegne Nyquist-kurven. Disse verdiene er vist i tabell 1.2, Nyquist-diagrammet er vist i figur 1.9.

Tabell 1.2: Noen verdier for real- og imaginærdelen til (1.50).

ω	$(h(j\omega))$	$(h(j\omega))$
-100	-0,005	0,02
-50	-0,02	0,10
-40	-0,03	0,15
-30	-0,05	0,27
-20	-0,12	0,60
-10	-0,41	2,13
-5	-0,98	5,86
-3	-2,84	9,0
-2	0	10,0
-1	4,69	7,35
0	12,5	0
1	4,69	-7,35
2	0	-10,0
3	-2,84	-9,0
5	-0,98	-5,86
10	-0,41	-2,13
20	-0,12	-0,60
30	-0,05	0,27
40	-0,03	-0,15
50	-0,02	-0,10
100	-0,005	-0,02



Figur 1.9: Nyquist-diagram for transferfunksjonen (1.49), vektoren $1+h_0(j\omega)$ tegnet inn.