Построение бикубической поверхности Безье по параметрическому описанию 16-ти опорных точек

Немного теории

В общем случае, отсек («часть») сплайновой поверхности описывается бикубическими выражениями вида

$$x(u,v) = \left(C_{X00} + C_{X01}u + C_{X02}u^2 + C_{X03}u^3\right)v^0 +$$
$$+\left(C_{X10} + C_{X11}u + C_{X12}u^2 + C_{X13}u^3\right)v^1 +$$
$$+\left(C_{X20} + C_{X21}u + C_{X22}u^2 + C_{X23}u^3\right)v^2 +$$
$$+\left(C_{X30} + C_{X31}u + C_{X32}u^2 + C_{X33}u^3\right)v^3 = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} C_{Xij}u^j v^i,$$

$u = 0,..,1$, $v = 0,..,1$,

где *u, v – параметры описания (аргументы сплайн-функции);*

$C_{X\,00}$ *,...,*$C_{X\,33}$ *– коэффициенты формы, определяющие геометрические* характеристики поверхности.

Аналогичный вид имеют выражения *y(u,v) и z(u,v), включающие наборы* коэффициентов C_{Y00}*,...,*C_{Y33} *и* $C_{Z\,00}$*,...,*$C_{Z\,33}$*, соответственно.*

// смысл верхних выражений

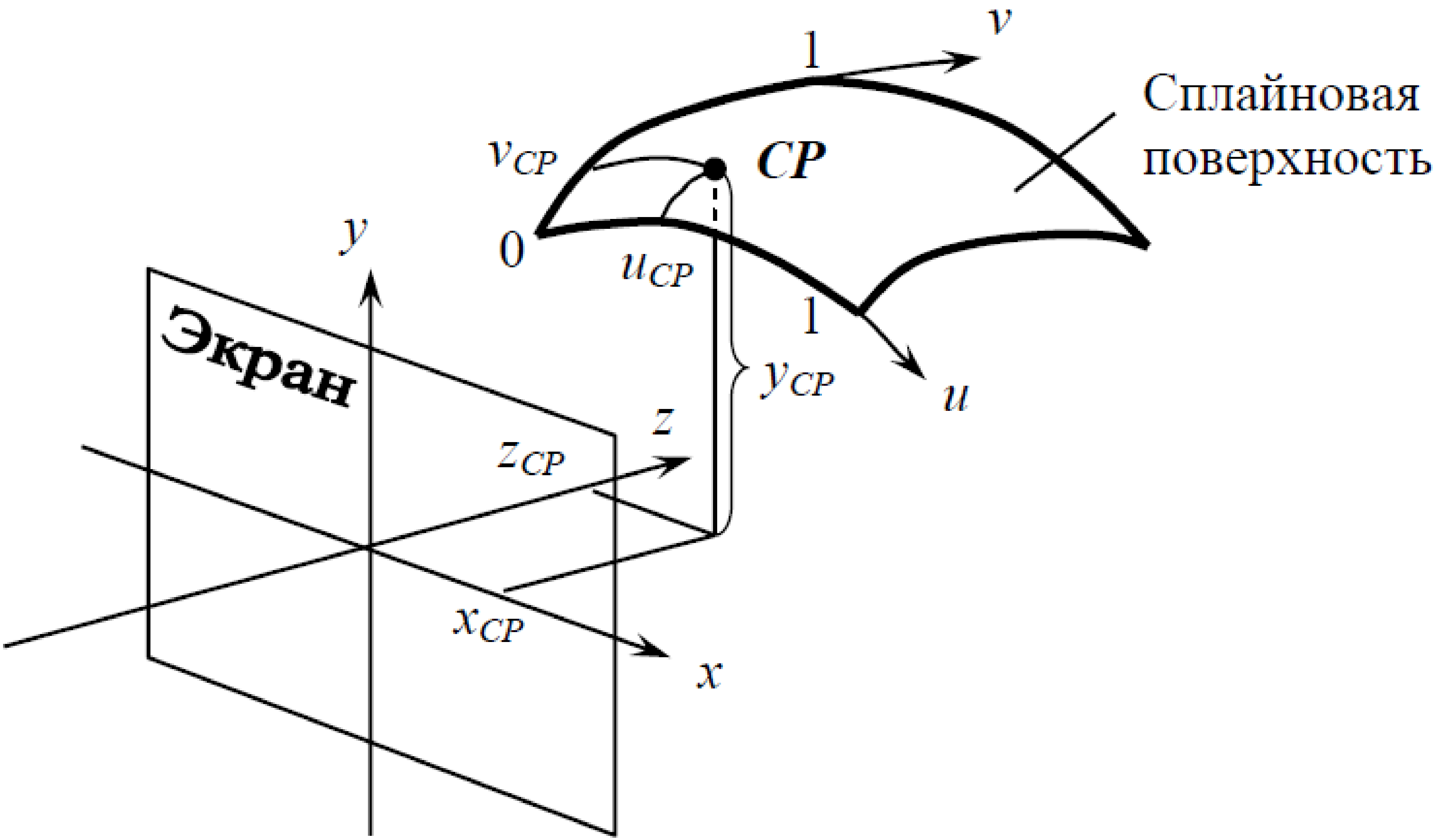
Аргументы *u,v представляют собой* координаты криволинейной координатной системы, расположенной на поверхности сплайна.

В ней каждая точка поверхности задается парой числовых значений.

Для отображения поверхности координаты ее точек с помощью верхней зависимости переводятся в декартову систему координат, в которой расположена экранная плоскость.

Соответствие координат текущей точки *СР сплайновой поверхности в* двух упомянутых координатных системах показано на следующем рисунке

Связь между декартовыми и параметрическими координатами



Коэффициенты многочленов отыскиваются при наложении ограничений на форму отсека поверхности. В зависимости от выбора ограничений поверхность получает ту или иную форму описания.

Например, ограничениями для поверхности Кунса (частный случай – поверхность Эрмита, поверхность Фергюсона) являются условия ее прохождения через заданные угловые точки, а также соответствие заданным значениям частных производных (то есть наклонов) в угловых точках поверхности и смешанных частных производных (то есть кручений) в этих точках

Использование таких ограничений является геометрически понятным, но сложно реализуемым.

В компьютерных системах геометрического моделирования в качестве ограничений обычно используется повторение сплайном формы некоторой многогранной опорной поверхности (характеристического многогранника), заданной шестнадцатью опорными точками.

Поверхность должна проходить вблизи опорных точек или через некоторые из них, и изменение их координат должно приводить к изменению формы поверхности.

Поэтому описание отсека поверхности представляют не в указанной выше форме , а выражая коэффициенты многочленов через координаты опорных точек:

$$x(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} f_i(v) f_j(u) P_{X\,i\,j},$$

$$y(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} f_i(v) f_j(u) P_{Y\,i\,j},$$

$$z(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} f_i(v) f_j(u) P_{Z\,i\,j}, \quad u=0..1, v=0..1,$$

где P_X , P_Y , P_Z – массивы x, y и z-координат опорных точек;
f_i (u), f_j (v) – функциональные коэффициенты, имеющие свой вид для каждой разновидности сплайн-функций.

Значения функций f_i (u), f_j(v) выступают как весовые коэффициенты координат опорных точек, поэтому эти функции называют весовыми или смешивающими.

Один из способов задания сплайновой поверхности в компьютерной графике в матричной форме выглядит следующим образом:

$$x(u,v) = U \cdot M \cdot P_X \cdot M^T \cdot V^T \ ,$$

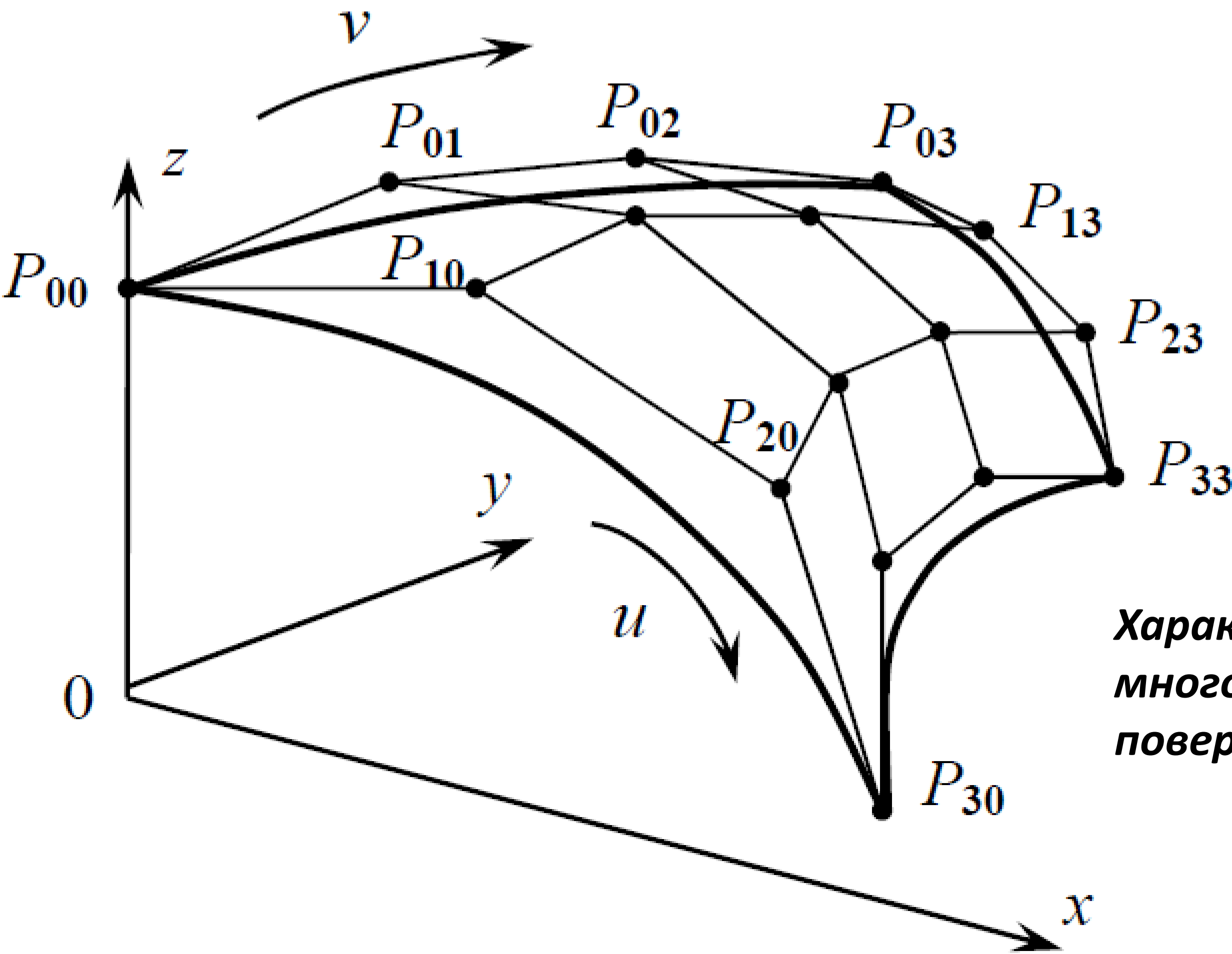
$$y(u,v) = U \cdot M \cdot P_Y \cdot M^T \cdot V^T \ ,$$

$$z(u,v) = U \cdot M \cdot P_Z \cdot M^T \cdot V^T \ ,$$

где *U, V – векторы степеней параметров u и v:*

$$U = \left| u^3 \ u^2 \ u \ 1 \right|, \qquad V = \left| v^3 \ v^2 \ v \ 1 \right| ;$$

P_X , P_Y , P_Z – геометрические матрицы, содержащие координаты x, y и z опорных точек, например, для нумерации опорных точек, принятой на рисунке ниже:



$$P_X = \begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix};$$

Характеристический многогранник бикубической поверхности Безье

М – базисная матрица поверхности, которая содержит числовые коэффициенты, определяющие своеобразие поверхности.

Поверхность размещена в своей локальной декартовой системе координат.

Индексы обозначений опорных точек привязаны к параметрам u, v (P_{uv}) и нарастают в направлении нарастания этих параметров (они показаны на рисунке стрелками).

Предполагается, что поверхность сплайна развертывается по линиям v=const, то есть сначала вычисляются текущие точки, лежащие на линии v=0, затем – на линии v=Δv, далее – на линии v=2Δv и так далее, где Δv – шаг по параметру v.

Угловые точки используются для привязки примитива к моделируемой поверхности, а промежуточные – для «изгибания» отсека в различных направлениях.

Для поверхности Безье функциональные коэффициенты определяются выражениями

$$f_i(u) = C_m^i u^i (1-u)^{m-i}, \qquad f_j(v) = C_n^j v^j (1-v)^{n-j},$$

Где C_m^i, C_n^j – биномиальные коэффициенты

Базисная матрица для поверхности Безье выглядит следующим образом:

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Моделирование сплайна Безье по его параметрическому описанию

Исходными данными для моделирования являются координаты шестнадцати опорных точек (см. рисунок выше) и геометрическая (базисная) матрица Безье

Точка	P_{00}	P_{10}	P_{20}	P_{30}	P_{01}	P_{11}	P_{21}	P_{31}	P_{02}	P_{12}	P_{22}	P_{32}	P_{03}	P_{13}	P_{23}	P_{33}
x_{uv}	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
y_{uv}	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
z_{uv}	0	1	-1	0.5	2	1.5	0	0.5	2	1.8	1.5	1.8	1.5	2	1.5	1.5

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Моделирование сплайна Безье по его параметрическому описанию

Координаты текущих точек сплайна Безье обозначим

xx, yy, zz

Они вычисляются по параметрическим выражениям

$$xx = U \cdot M \cdot X \cdot M^{\mathrm{T}} \cdot V^{\mathrm{T}},$$

$$yy = U \cdot M \cdot Y \cdot M^{\mathrm{T}} \cdot V^{\mathrm{T}},$$

$$zz = U \cdot M \cdot Z \cdot M^{\mathrm{T}} \cdot V^{\mathrm{T}}.$$

Координаты опорных точек представляются в форме матриц

$$X := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad Y := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad Z := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1.5 \\ 1 & 1.5 & 1.8 & 2 \\ -1 & 0 & 1.5 & 1.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1.8 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Моделирование сплайна Безье по его параметрическому описанию

Для графических построений координаты текущих точек должны сохраняться в матрицах xx,yy,zz.

Их строки и столбцы обозначим номерами nu,nv, лежащими в диапазоне (0,10).

Им в соответствие поставим шаги по аргументам u,v параметрического описания сплайна.

Таких шагов будет 10 по каждому аргументу, а величина каждого шага составит 0.1.

Моделирование сплайна Безье
по его параметрическому описанию

Транспонирование геометрической матрицы Безье

$$MT := M^{T}$$

Задание сетки шагов по аргументам параметрической системы координат (ранжированные переменные).

$$nu := 0 .. 10 \qquad nv := 0 .. 10$$

Получение абсолютных значений аргументов

$$u_{nu} := 0.1 \cdot nu \qquad v_{nv} := 0.1 \cdot nv$$

Моделирование сплайна Безье по его параметрическому описанию

Для вычисления текущих точек необходимы матрицы-строки **U** и **V**, содержащие степени параметров.

Для каждого сочетания параметров **u** и **v** они принимают различные значения.

Чтобы облегчить графические построения, эти наборы значений для всех сочетаний **u** и **v** запоминаются.

В результате возникают двумерные матрицы.

Ниже для этих матриц вычисляются четыре элемента каждой строки.

Моделирование сплайна Безье
по его параметрическому описанию

$U_{nu,0} := (u_{nu})^3$ $\quad U_{nu,1} := (u_{nu})^2$ $\quad U_{nu,2} := (u_{nu})$ $\quad U_{nu,3} := 1$

$V_{nv,0} := (v_{nv})^3$ $\quad V_{nv,1} := (v_{nv})^2$ $\quad V_{nv,2} := (v_{nv})$ $\quad V_{nv,3} := 1$

Транспонирование матрицы аргумента **v**

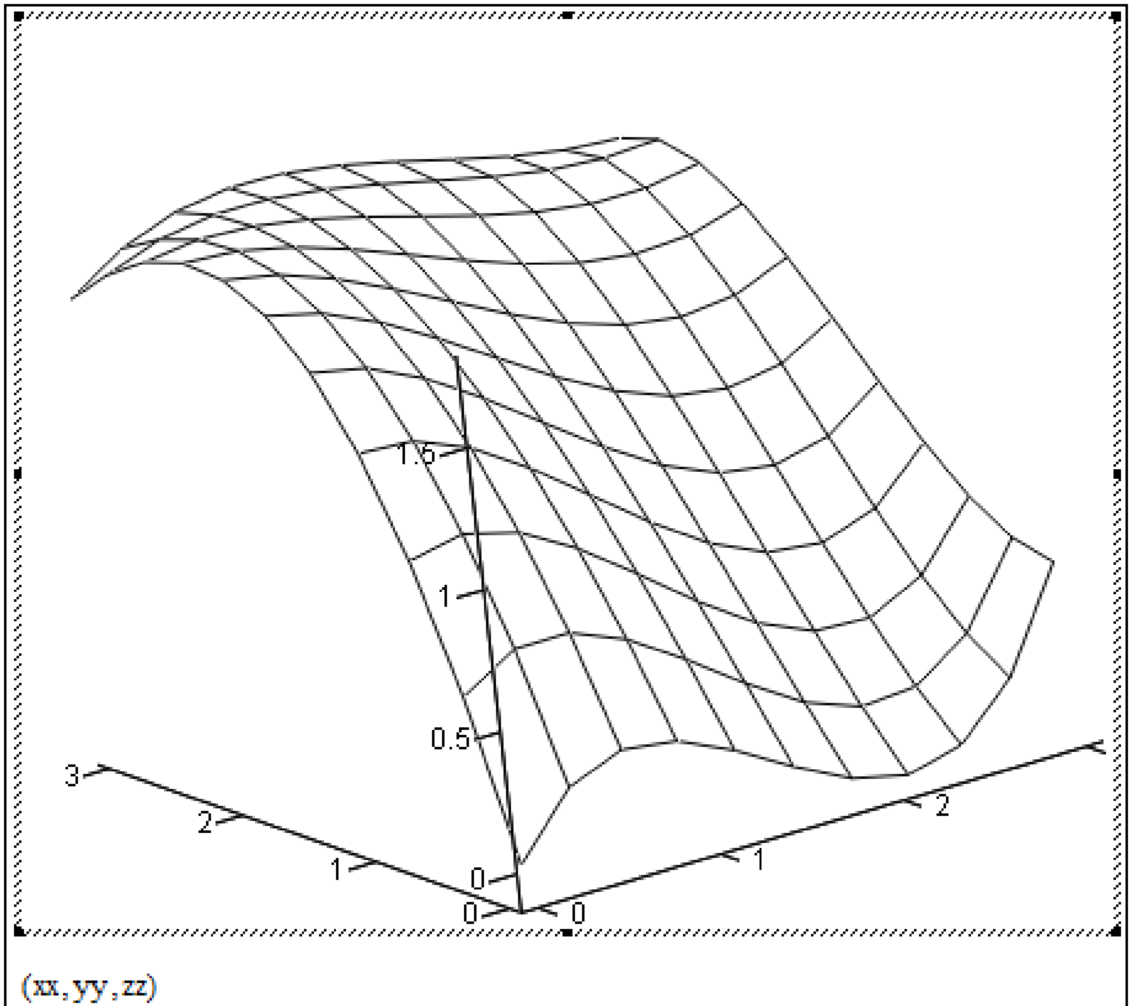
$VT := V^T$

Вычисление координат текущих точек в матричной форме

$xx := U \cdot M \cdot X \cdot MT \cdot VT$ $\quad yy := U \cdot M \cdot Y \cdot MT \cdot VT$ $\quad zz := U \cdot M \cdot Z \cdot MT \cdot VT$

Моделирование сплайна Безье по его параметрическому описанию

$xx := U \cdot M \cdot X \cdot MT \cdot VT$ $\quad$ $yy := U \cdot M \cdot Y \cdot MT \cdot VT$ $\quad$ $zz := U \cdot M \cdot Z \cdot MT \cdot VT$



NURBS

Широкими изобразительными возможностями обладают рациональные бикубические сплайны.

В компьютерной графике обычно применяют рациональные В-сплайны на неравномерной сетке (**Non-Uniform Rational BSplines– NURBS**).

В их описание входят числовые параметры формы (весовые коэффициенты), позволяющие управлять формой поверхности без изменения координат опорных точек.

Описание рациональной бикубической сплайновой поверхности имеет следующий вид

$$x(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} w_{ij} f_i(u) f_j(v) P_{Xij}}{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} w_{ij} f_i(u) f_j(v)} ,$$

где $w_{i\,j}$ – весовые коэффициенты, в общем случае свои для каждой опорной точки.

Координаты *y(u,v) и z(u,v) описываются аналогично (с использованием* наборов координат *P_Y и P_Z).*

Описание координаты текущей точки рационального сплайна в матричной форме может выглядеть следующим образом:

$$x(u,v) = \frac{U \cdot M \cdot WX \cdot M^T \cdot V^T}{U \cdot M \cdot W \cdot M^T \cdot V^T},$$

$$WX = \begin{vmatrix} (w_{00} \cdot x_{00}) & (w_{01} \cdot x_{01}) & (w_{02} \cdot x_{02}) & (w_{03} \cdot x_{03}) \\ (w_{10} \cdot x_{10}) & (w_{11} \cdot x_{11}) & (w_{12} \cdot x_{12}) & (w_{13} \cdot x_{13}) \\ (w_{20} \cdot x_{20}) & (w_{21} \cdot x_{21}) & (w_{22} \cdot x_{22}) & (w_{23} \cdot x_{23}) \\ (w_{30} \cdot x_{30}) & (w_{31} \cdot x_{31}) & (w_{32} \cdot x_{32}) & (w_{33} \cdot x_{33}) \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{30} & w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{vmatrix},$$

WX – матрица координат опорных точек с соответствующими коэффициентами формы;

W – матрица коэффициентов формы сплайна.