Seminar Analiză Matematică

Diferenţiabilitate; derivarea parţială a funcţiilor compuse

1 Diferenţiabilitate

Exerciţiul 1. Să se arate că funcţia

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{y}{x} & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie Funcţia f este diferenţiabilă pe $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\, x\neq 0\}$ întrucât este de clasă C^1 pe această mulţime (funcţia are derivate parţiale continue pe această mulţime). Mai mult, diferenţiala funcţiei în punctul (a,b) cu $a\neq 0$ este

$$df(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy.$$

Rămâne să arătăm că funcţia este diferenţiabilă în punctele de forma $(0,b)$, $b\in\mathbb{R}$. Se verifică imediat că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b)=0$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b)=0$. Deoarece

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)}\frac{f(x,y)-f(0,b)-\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b)(x-0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b)(y-b)\right]}{\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,b)}\frac{x^2\sin\dfrac{y}{x}}{\sqrt{x^2+(y-b)^2}}=0$$

rezultă că f este diferenţiabilă în $(0,b)$ şi

$$df(0,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(0,b)dy,\ \text{deci } df(0,b)=0.$$

Aşadar funcţia f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

Remarcă: funcţia nu este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$. Într-adevăr, derivata parţială în raport cu y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases} x\cos\dfrac{y}{x} & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$ dar derivata parţială în raport cu x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{y}{x} - y \cos \dfrac{y}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în punctele de forma $(0, b)$ cu $b \neq 0$. Justificăm afirmaţia prin faptul că pentru şirul $\left(\dfrac{b}{2n\pi}, b\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{b}{2n\pi}, b\right) = -b \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -b \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, b).$$

■

Exerciţiul 2. Să se arate că funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ dar nu este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

Exerciţiul 3. Să se scrie diferenţiala în punctul $(1, 1, 1)$ pentru funcţia

$$f(x, y, z) = \ln \left(x^y y^z z^x\right),\ x, y, z > 0$$

Soluţie Observăm că

$$f(x, y, z) = y \ln x + z \ln y + x \ln z$$

Derivatele parţiale ale funcţiei sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + \ln z,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z}{y} + \ln x,\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x}{z} + \ln y$$

Diferenţiala funcţiei în punctul $(1, 1, 1)$ este

$$df(1, 1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)dz$$

adică $df(1, 1, 1) = dx + dy + dz$ ■

Exerciţiul 4. Să se arate că următoarele funcţii sunt continue în origine, admit derivate parţiale în origine dar nu sunt diferenţiabile în acest punct

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

   Soluţie Funcţia este continuă în origine deoarece

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Avem
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0 \text{ şi } \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$
prin urmare funcţia admite derivate parţiale în origine şi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$
Presupunem că funcţia este diferenţiabilă în origine. Atunci există o funcţie $\omega:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\omega(x,y)=0$ astfel încât
$$f(x,y)=f(0,0)+df(0,0)(x,y)+\omega(x,y)\left\|(x,y)\right\|$$
ceea ce înseamnă
$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\omega(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$
adică
$$\sqrt{|xy|}=\omega(x,y)\sqrt{x^2+y^2}.$$
De aici avem că $\omega(x,y)=\sqrt{\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}}$, $(x,y)\neq(0,0)$. Deoarece
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\omega(x,y)=\lim_{x\to 0}\omega(x,mx)=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2\,|m|}{x^2\,(1+m^2)}}=\sqrt{\frac{|m|}{1+m^2}}$$
rezultă că funcţia ω nu are limită în origine. Am ajuns la o contradicţie. Rămâne că funcţia f nu este diferenţiabilă în origine. ■

2. $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

3. $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2-xy+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Exerciţiul 5. Înlocuind creşterea unei funcţii prin diferenţiala sa, să se calculeze cu aproximaţie

1. $1,02^{1,97}$

   Soluţie Considerăm funcţia $f(x,y)=x^y$, $y>0$. Vom aproxima
$$f(1,02;1,97)-f(1,2)\approx df(1,2)\left(1,02-1;1,97-2\right).$$
   Avem
$$df(1,2)\left(1,02-1;1,97-2\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot 0,02-\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot 0,03=2\cdot 0,02=0,04$$
   prin urmare $f(1,02;1,97)\approx f(1,2)+0,04=1,04$. ■

2. $\sqrt{1,02^3+1,97^3}$

2 Derivarea parţială a funcţiilor compuse

Exerciţiul 6. Să se calculeze dervatele parţiale de ordinul al doilea pentru următoarele funcţii, unde φ este o funcţie de clasă C^2:

1. $f(x,y) = \varphi\left(y + e^{-x^2}\right)$

   Soluţie Notăm cu $u = y + e^{-x^2}$ şi avem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -2xe^{-x^2}\varphi'\left(y + e^{-x^2}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'\left(y + e^{-x^2}\right)
\end{aligned}
$$

   Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2e^{-x^2}\left[\left(2x^2 - 1\right)\varphi'(u) + 2x^2e^{-x^2}\varphi''(u)\right] \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -2xe^{-x^2}\varphi''\left(y + e^{-x^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \varphi''\left(y + e^{-x^2}\right)
\end{aligned}
$$

   ■

2. $f(x,y) = \varphi\left(xy, \frac{x}{y}, x + y^2\right)$

   Soluţie

   Notăm cu $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, $w = x + y^2$ şi, după regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot 2y
\end{aligned}
$$

Vom calcula doar o derivată parţială de ordinul doi, de exemplu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\cdot 2y\right)'_x \\
&= \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w \partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right] x + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\
&\quad - \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w \partial v}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right]\frac{x}{y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{1}{y^2} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right] 2y
\end{aligned}$$

Obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= xy\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} + (x+2y^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w} \\
&\quad + \left(2 - \frac{x}{y^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{1}{y^2}
\end{aligned}$$

■

3. $f(x,y) = \varphi\left(x+y, x^2+y^2\right)$
4. $f(x,y) = \varphi\left(e^{x^2+y}, x+y^2\right)$
5. $f(x,y) = \varphi\left(x\sin y, x\cos y\right)$
6. $f(x,y,z) = \varphi\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right)$

Exerciţiul 7. Să se arate că funcţia

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

verifică ecuaţia cu derivate parţiale

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = f(x,y,z) + \frac{xy}{z}$$

unde φ este o funcţie de clasă $\mathbf{C}^1$.

Soluţie Notăm cu $u = \frac{y}{x}$ şi $v = \frac{z}{x}$. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}\ln x + \frac{y}{z} + \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Cum $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{z}{x^2}$, obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}\ln x + \frac{y}{z} + \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - \frac{y}{x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{z}{x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

Analog

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{z}\ln x+x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{x}{z}\ln x+\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2}\ln x+x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{xy}{z^2}\ln x+\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

Atunci

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{xy}{z}\ln x+\frac{xy}{z}+x\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$$

adică

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=f(x,y,z)+\frac{xy}{z}$$

■

Exerciţiul 8. Să se arate că funcţia $f(x,y)=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\psi\left(\frac{x}{y}\right)$, $x,y>0$, $\varphi,\psi\in\mathcal{C}^2(0,\infty)$, verifică ecuaţia $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Soluţie Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\varphi'(xy)(xy)'_x+(\sqrt{xy})'_x\psi\left(\frac{x}{y}\right)+\sqrt{xy}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)'_x\\&=y\varphi'(xy)+\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\psi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}&=\varphi'(xy)(xy)'_y+(\sqrt{xy})'_y\psi\left(\frac{x}{y}\right)+\sqrt{xy}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)'_y\\&=x\varphi'(xy)+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\psi\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea simple

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=y\varphi''(xy)(xy)'_x+\left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right)'_x\psi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)'_x\\&\quad+\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)'_x\psi'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\psi''\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)'_x\\&=y^2\varphi''(xy)-\frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}}\psi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2\sqrt{xy}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\\&\quad+\frac{1}{2\sqrt{xy}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\psi''\left(\frac{x}{y}\right)\\&=y^2\varphi''(xy)-\frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}}\psi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{\sqrt{xy}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\psi''\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x\varphi''(xy)(xy)'_y + \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right)'_y \psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)'_y \\
&\quad -\left(\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\right)'_y \psi'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\psi''\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)'_y \\
&= x^2\varphi''(xy) - \frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}}\psi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x\sqrt{x}}{2y^2\sqrt{y}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right) \\
&\quad + \frac{3x\sqrt{x}}{2y^2\sqrt{y}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2\sqrt{x}}{y^3\sqrt{y}}\psi''\left(\frac{x}{y}\right) \\
&= x^2\varphi''(xy) - \frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}}\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x\sqrt{x}}{y^2\sqrt{y}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2\sqrt{x}}{y^3\sqrt{y}}\psi''\left(\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}
$$

Avem

$$
\begin{aligned}
& x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&= x^2y^2\varphi''(xy) - \frac{\sqrt{xy}}{4}\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\psi''\left(\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= x^2y^2\varphi''(xy) - \frac{\sqrt{xy}}{4}\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\psi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\psi''\left(\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}
$$

prin urmare $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, adică funcţia f verifică ecuaţia dată. ■

Exerciţiul 9. Să se arate că funcţia $f(x,y) = \varphi(x+\psi(y))$, $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2$, verifică ecuaţia $\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Soluţie Avem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \varphi'(x+\psi(y)) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \varphi'(x+\psi(y))\,\psi'(y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \varphi''(x+\psi(y))\,\psi'(y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \varphi''(x+\psi(y))
\end{aligned}
$$

de unde

$$
\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \varphi'(x+\psi(y))\,\varphi''(x+\psi(y))\,\psi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.
$$

■