Seminar Analiză Matematică

Integrale improprii

Exerciţiul 1. Folosind definiţia, să se studieze natura următoarelor integrale:

1. $\int\limits_0^1 \ln \frac{1}{x} dx$

   Soluţie Funcţia $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ nu este definită în 0 şi $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \infty$, deci integrala este improprie în 0. Fie $\varepsilon \in (0,1)$. Avem

   $$I(\varepsilon) = \int\limits_\varepsilon^1 \ln \frac{1}{x} dx = -\int\limits_\varepsilon^1 x' \ln x dx = -x \ln x \Big|_\varepsilon^1 + \int\limits_\varepsilon^1 dx = \varepsilon \ln \varepsilon + 1 - \varepsilon.$$

   Deoarece

   $$\lim_{\varepsilon \searrow 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon + 1 - \varepsilon) = 1,$$

   rezultă că integrala este convergentă şi are valoarea 1. $\blacksquare$

2. $\int\limits_1^3 \frac{x}{x-3} dx$

   Soluţie Funcţia $f(x) = \frac{x}{x-3}$ nu este definită în 3 şi $\lim\limits_{x \nearrow 3} f(x) = -\infty$, deci integrala este improprie în 3. Fie $y \in (1,3)$. Avem

   $$\begin{aligned} I(y) &= \int\limits_1^y \frac{x}{x-3} dx = \int\limits_1^y \left(1 + \frac{3}{x-3}\right) dx \\ &= (x + 3 \ln |x-3|) \Big|_1^y = y - 1 + 3 \ln \frac{3-y}{2}. \end{aligned}$$

   Deoarece

   $$\lim_{y \nearrow 3} I(y) = \lim_{y \nearrow 3} \left(y - 1 + 3 \ln \frac{3-y}{2} \right) = -\infty,$$

   rezultă că integrala este divergentă. $\blacksquare$

3. $\int\limits_e^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$

Soluţie Fie $y > e$. Avem

$$I(y) = \int\limits_e^y \frac{1}{x \ln x} dx = \int\limits_e^y \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln \ln x \Big|_e^y = \ln \ln y.$$

Deoarece

$$\lim_{y \to \infty} I(y) = \lim_{y \to \infty} \ln \ln y = \infty,$$

rezultă că integrala este divergentă. ■

4. $\int\limits_0^\infty e^{-kx} dx,\ k > 0$

Soluţie Fie $y > 0$. Avem

$$I(y) = \int\limits_0^y e^{-kx} dx = \frac{e^{-kx}}{-k}\Big|_0^y = \frac{1 - e^{-ky}}{k}.$$

Deoarece

$$\lim_{y \to \infty} I(y) = \lim_{y \to \infty} \frac{1 - e^{-ky}}{k} = \frac{1}{k},$$

rezultă că integrala este convergentă şi are valoarea $\frac{1}{k}$. ■

5. $\int\limits_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx$

Soluţie Fie $y > 1$. Avem

$$\begin{aligned} I(y) &= \int\limits_1^y \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^y 2 \cdot \arctan x \cdot (\arctan x)' dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\arctan x)^2 \Big|_1^y = \frac{1}{2} \cdot (\arctan y)^2 - \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\lim_{y \to \infty} I(y) = \lim_{y \to \infty} \left(\frac{(\arctan y)^2}{2} - \frac{\pi^2}{32} \right) = \frac{3\pi^2}{32},$$

rezultă că integrala este convergentă şi are valoarea $\frac{3\pi^2}{32}$. ■

6. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx$

Soluţie Fie $y > 0$. Vom calcula $I(y) = \int\limits_0^y \frac{1}{x^3+1}dx$. Descompunerea funcţiei în fracţii simple este de forma

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Aducem în partea dreaptă la acelaşi numitor şi apoi eliminăm numitorul. Obţinem

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

sau

$$1 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui x şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

Acest sistem are soluţia $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$. Atunci

$$\begin{aligned}
I(y) &= \int\limits_0^y \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^y \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int\limits_0^y \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1)\Big|_0^y - \frac{1}{6}\int\limits_0^y \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{1}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln(y+1) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^y + \frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln(y+1) - \frac{1}{6}\ln\left(y^2-y+1\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^y \\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{(y+1)^2}{y^2-y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} I(y) &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(y+1)^2}{y^2-y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

rezultă că integrala este convergentă şi are valoarea $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. ■

Exerciţiul 2. Să se studieze natura următoarelor integrale:

1. $\int\limits_0^1 \sin^2 \frac{1}{x} dx$

   Soluţie Funcţia $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$ nu este definită în 0 şi nu există limita $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$, deci integrala este improprie în 0. Vom aplica criteriul de comparaţie cu inegalităţi. Avem

   $$0 \leq \sin^2 \frac{1}{x} \leq 1, \ (\forall) x \in (0, 1]$$

   şi cum integrala $\int\limits_0^1 dx$ este convergentă, rezultă că integrala $\int\limits_0^1 \sin^2 \frac{1}{x} dx$ este convergentă. ■

2. $\int\limits_1^\infty \sin^2 \frac{1}{x} dx$

   Soluţie

   Metoda 1 Vom aplica criteriul de comparaţie cu inegalităţi. Avem

   $$0 < \sin^2 \frac{1}{x} < \left(\frac{1}{x}\right)^2, \ (\forall) x \in [1, \infty)$$

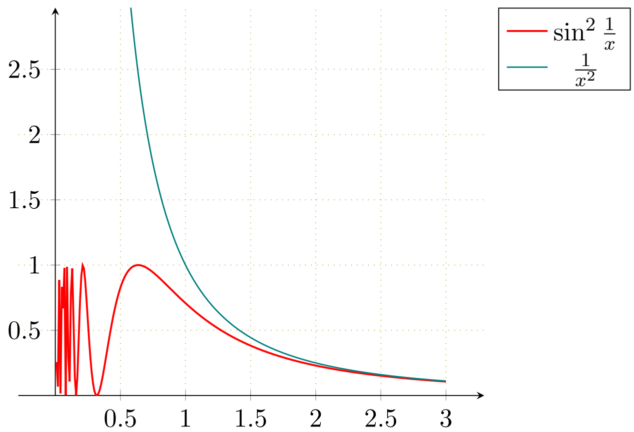
   şi cum integrala $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ este convergentă, rezultă că integrala $\int\limits_1^\infty \sin^2 \frac{1}{x} dx$ este convergentă.

   Metoda 2 Vom aplica criteriul de comparaţie cu limită. Avem

   $$\lim_{x \to \infty} x^\alpha \sin^2 \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} x^{\alpha - 2} \left(\frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2 = 1, \text{ pentru } \alpha = 2,$$

   prin urmare integrala este convergentă.

■



3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}$

Soluţie Funcţia $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ nu este definită în $\dfrac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$, deci integrala este improprie în $\dfrac{\pi}{2}$. Vom aplica criteriul de comparaţie cu limită. Avem

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\alpha} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\alpha} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1, \text{ pentru } \alpha = 1,$$

prin urmare integrala este divergentă. ■

4. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Soluţie Avem

$$0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}, \; (\forall) x \in [1, \infty)$$

şi cum integrala $\int\limits_1^{\infty} e^{-x} dx$ este convergentă, rezultă că integrala $\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ este convergentă, prin urmare integrala $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ este convergentă. ■

5. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

Soluţie Avem

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \to \infty} x^{\alpha - 1} \frac{\arctan x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\pi}{2}, \text{ pentru } \alpha = 1,$$

prin urmare integrala este divergentă. ■

6. $\int\limits_0^{3} \frac{1}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx$

Soluţie Funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + \sqrt[3]{x}}$ nu este definită în 0 şi $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \infty$, deci integrala este improprie în 0. Vom aplica criteriul de comparaţie cu limită (funcţia este pozitivă pe $(0, 3]$). Avem

$$\lim_{x \searrow 0} x^{\alpha} \frac{1}{x^3 + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \searrow 0} x^{\alpha - \frac{1}{3}} \frac{1}{x^{\frac{8}{3}} + 1} = 1, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{3},$$

prin urmare integrala este convergentă. ■

7. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x - \ln x} dx$

Soluţie Cu notaţiile $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \dfrac{1}{x - \ln x}$, integrantul este $f(x)g(x)$. Pentru funcţia $f(x)$ avem

$$\left|\int_1^A f(x)dx\right| = \left|-\cos x\Big|_1^A\right| = |\cos 1 - \cos A| \leq 2,\ (\forall)A > 1.$$

Funcţia $g(x)$ este descrescătoare şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Atunci, conform criteriului Dirichlet, integrala $\int\limits_1^\infty \dfrac{\sin x}{x - \ln x}dx$ este convergentă. ■

Exerciţiul 3. Să se arate că următoarele integrale sunt convergente şi să se calculeze valorile acestora:

1. $\int\limits_2^\infty \dfrac{1}{x^2 + x - 2}dx$

   Soluţie Avem

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,\ \text{pentru } \alpha = 2,$$

   prin urmare integrala este convergentă.
   Calculăm valoarea integralei

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2 + x - 2}dx = \int_2^\infty \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx = \frac{1}{3}\int_2^\infty \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Big|_2^\infty = \frac{1}{3}\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x-1}{x+2} - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{2\ln 2}{3}.$$

   ■

2. $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{x\sqrt{1 + x^5 + x^{10}}}dx$

   Soluţie Avem

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{1}{x\sqrt{1 + x^5 + x^{10}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-6} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x^5} + 1}} = 1,\ \text{pentru } \alpha = 6,$$

   prin urmare integrala este convergentă.

Calculăm valoarea integralei

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}dx &= -\frac{1}{5}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^{10}}+\frac{1}{x^5}+1}}\left(\frac{1}{x^5}\right)' dx \\
&= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}dt = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dt \\
&= \frac{1}{5}\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

■

3. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

Soluţie Funcţia $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ nu este definită în 0 şi $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \infty$, prin urmare integrala este improprie şi în 0. Integrala $\int\limits_{(0,\infty)} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă sunt convergente următoarele integrale: $\int\limits_{(0,c]} f(x)dx$ şi $\int\limits_{[c,\infty)} f(x)dx$, unde $c \in (0,\infty)$. Deoarece

$$\lim_{x\searrow 0} x^\alpha \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{x\searrow 0} x^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x} = 1, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{2},$$

rezultă că integrala $\int\limits_{(0,c]} f(x)dx$ este convergentă. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-\frac{3}{2}}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1, \text{ pentru } \alpha = \frac{3}{2},$$

rezultă că integrala $\int\limits_{[c,\infty)} f(x)dx$ este convergentă. Prin urmare integrala considerată este convergentă.
Calculăm valoarea integralei

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx &= 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x}(\sqrt{x})'dx \\
&= 2\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt = 2\arctan x\Big|_0^\infty = \pi.
\end{aligned}$$

■

4. $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$

Soluţie Avem

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-\frac{3}{2}}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2} = 1, \text{ pentru } \alpha = \frac{3}{2},$$

prin urmare integrala este convergentă.
Pentru a calcula valoarea integralei, facem schimbarea de variabilă $\sqrt{x} = t$ şi obţinem

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = 2\int_1^{\infty} \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

Cum

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{\infty} t'\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{t}{1+t^2}\Big|_1^{\infty} + 2\int_1^{\infty} \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2} + 2\int_1^{\infty} \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt = -\frac{1}{2} + 2\int_1^{\infty} \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

rezultă că

$$2\int_1^{\infty} \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+t^2}dt + \frac{1}{2} = \arctan t\Big|_1^{\infty} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

■

5. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(2-x)}}dx$

Soluţie Funcţia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(2-x)}}$ nu este definită în punctele -1 şi 2 iar $\lim_{x\searrow -1} f(x) = \infty$ şi $\lim_{x\nearrow 2} f(x) = \infty$. Prin urmare integrala este improprie în ambele capete ale intervalului. Integrala $\int_{(-1,2)} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă sunt convergente următoarele integrale: $\int_{(-1,c]} f(x)dx$ şi $\int_{[c,2)} f(x)dx$, unde $c \in (-1,2)$. Deoarece

$$\lim_{x\searrow -1}(x+1)^{\alpha}f(x) = \lim_{x\searrow -1}(x+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{2}$$

rezultă că integrala $\int_{(-1,c]} f(x)dx$ este convergentă. Deoarece

$$\lim_{x\nearrow 2}(2-x)^{\alpha}f(x) = \lim_{x\nearrow 2}(2-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{2},$$

rezultă că integrala $\int\limits_{[c,2)} f(x)dx$ este convergentă. Prin urmare integrala considerată este convergentă.
Pentru a calcula valoarea integralei, facem schimbarea de variabilă $\sqrt{(x+1)(2-x)} = t(2-x)$, deci $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$. Avem

$$x = \frac{2t^2-1}{t^2+1},\ dx = \frac{6t}{(t^2+1)^2}dt,$$

$$x \searrow -1 \Longrightarrow t \searrow 0,\ x \nearrow 2 \Longrightarrow t \to \infty.$$

Obţinem

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(2-x)}} &= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{t\frac{3}{t^2+1}} \cdot \frac{6t}{(t^2+1)^2}dt \\ &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t\Big|_0^\infty = \pi.\end{aligned}$$

■

Exerciţiul 4. Să se calculeze integrala $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{1}{5-3\sin x}dx$.

Soluţie Vom face schimbarea de variabilă $\tan\dfrac{x}{2} = t$. Avem

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\sin x}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5-3\sin x}dx = \int_{(-\pi,\pi)} \frac{1}{5-3\sin x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{5-3\frac{2t}{t^2+1}} \cdot \frac{2}{t^2+1}dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{5t^2-6t+5}dt \\ &= \frac{2}{5}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2-\frac{6}{5}t+1}dt = \frac{2}{5}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(t-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}dt \\ &= \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}\arctan\frac{5t-3}{4}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

■

Exerciţiul 5. Să se aducă următoarele integrale la o integrală de tip Euler şi să se calculeze valorile acestora:

1. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(2-x)}}dx$

Soluţie Facem schimbarea de variabilă $t = \frac{x+1}{3}$. Avem

$$x \searrow -1 \Longrightarrow t \searrow 0 \text{ şi } x \nearrow 2 \Longrightarrow t \nearrow 1$$

$$x = 3t-1,\ dx = 3dt,\ (x+1)(2-x) = 9t(1-t)$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(2-x)}}dx &= \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{9t(1-t)}}3dt = \int\limits_{0}^{1} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.\end{aligned}$$

■

2. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$

Soluţie Avem

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{1+x}dx = B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

■

3. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^4)^2}dx$

Soluţie Facem schimbarea de variabilă $x^4 = t$ şi obţinem:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^4)^2}dx = \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}.\end{aligned}$$

■

4. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$

Soluţie Facem schimbarea de variabilă $x^2 = t$ şi obţinem:

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

■