Seminar Analiză Matematică

Serii de funcţii; serii de puteri

Exerciţiul 1. Să se studieze convergenţa punctuală şi convergenţa uniformă pentru următoarele serii de funcţii, pe mulţimile indicate:

1. $x - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+nx)(1+(n-1)x)}$, $x \in [0, \infty)$;

   Soluţie Notăm $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_0(x) = x$ şi

$$f_n(x) = -\frac{x^2}{(1+nx)(1+(n-1)x)},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

   Suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}^*$ a seriei este funcţia $S_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{(1+kx)(1+(k-1)x)} \\ &= x + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x}{1+kx} - \frac{x}{1+(k-1)x} \right] = \frac{x}{1+nx}. \end{aligned}$$

   Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx} = 0,\ (\forall) x \in [0, \infty),$$

   rezultă că seria de funcţii considerată converge punctual pe $[0, \infty)$ către funcţia $S : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $S(x) = 0$.
   Şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ este uniform convergent pe $[0, \infty)$ deoarece

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,\infty)} |S_n(x) - S(x)| &= \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+nx} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

   prin urmare seria de funcţii este uniform convergentă pe $[0, \infty)$. ■

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{nx}{1+n^2x^2} - \dfrac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right]$, $x \in \mathbb{R}$;

   Soluţie Notăm $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}.$$

Suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}^*$ a seriei este funcţia $S_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{kx}{1+k^2x^2} - \frac{(k-1)x}{1+(k-1)^2x^2} \right] \\ &= \frac{nx}{1+n^2x^2}. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0, \ (\forall) x \in \mathbb{R},$$

rezultă că seria de funcţii converge punctual pe $\mathbb{R}$ către funcţia identic nulă.
Şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ nu este uniform convergent pe $\mathbb{R}$ deoarece

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{n\,|x|}{1+n^2x^2} \geq \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1+n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

prin urmare seria de funcţii nu este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. ■

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \right] \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$;
Soluţie Notăm $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right] \frac{\sin nx}{n}.$$

Ţinem seama de inegalităţile

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

şi obţinem

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right] \frac{|\sin nx|}{n} \\ &< \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right] \frac{1}{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} < \frac{e}{n^2}, \ (\forall) x \in \mathbb{R}, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e}{n^2}$ este convergentă şi din criteriul lui Weierstrass obţinem că seria de funcţii este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. ■

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2}{1+n^3x^4}$, $x \in \mathbb{R}$;

Soluţie Notăm $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^n\dfrac{x^2}{1+n^3x^4}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{1+n^3x^4} \leq \frac{x^2}{2\sqrt{n^3x^4}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\ (\forall)x \in \mathbb{R},\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă, din criteriul lui Weierstrass obţinem că seria de funcţii este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. ■

Exerciţiul 2. Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de funcţii şi să se demonstreze convergenţa uniformă pe domeniile indicate:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+x}}$, $D = [a,\infty)$, $a > 1$

Soluţie Fixăm $x \in \mathbb{R}$ şi studiem natura seriei numerice

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+x}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^x}.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^x}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in (0,\infty),$$

conform criteriului 3 de comparaţie, seria are aceeaşi natură ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$, deci este convergentă dacă $x > 1$ şi divergentă dacă $x \leq 1$. Prin urmare, mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii este $(1,\infty)$.

Deoarece

$$\left|\frac{(n+1)^n}{n^{n+x}}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^x} < e \cdot \frac{1}{n^a},\ (\forall)x \geq a,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$$

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^a}$ este convergentă ($a > 1$), din criteriul lui Weierstrass obţinem că seria de funcţii este uniform convergentă pe $[a,\infty)$. ■

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{x}{3^n}$, $D = [-a,a]$, $a > 0$

Soluţie Fixăm $x \in \mathbb{R}$. Deoarece

$$\left|2^n\sin\frac{x}{3^n}\right| = 2^n\left|\sin\frac{x}{3^n}\right| \leq 2^n \cdot \left|\frac{x}{3^n}\right| = |x| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ este convergentă, din criteriului 1 de comparaţie rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ este absolut convergentă, deci convergentă.
Prin urmare, mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii este $\mathbb{R}$.
Cum

$$\left|2^n \sin \frac{x}{3^n}\right| \leq |x| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq |a| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \ (\forall) x \in [-a, a], \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ este convergentă, din criteriul lui Weierstrass obţinem că seria de funcţii este uniform convergentă pe $[-a, a]$. ■

Exerciţiul 3. Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri sau serii reductibile la serii de puteri:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{n+1}\right)^n x^n$

   Soluţie Notăm $c_n = \left(\frac{3n-1}{n+1}\right)^n$. Raza de convergenţa este:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3}.$$

   Conform teoremei Abel, seria este

   - convergentă pentru $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
   - divergentă pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

   Dacă $x = -\frac{1}{3}$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{3n+3}\right)^n$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-4}{3n+3}\right)^{\frac{3n+3}{-4}}\right]^{\frac{-4n}{3n+3}} = \frac{1}{e\sqrt[3]{e}},$$

   rezultă că nu este îndeplinit criteriul necesar de convergenţă (termenul general nu tinde la 0), prin urmare seria este divergentă.
   Dacă $x = \frac{1}{3}$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+3}\right)^n$, deci este divergentă (termenul general nu tinde la 0).
   În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei de puteri este $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
   ■

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n} x^n$

Soluţie Notăm $c_n = \frac{1}{n \cdot 5^n}$. Raza de convergenţa este:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 5^{n+1}}{n \cdot 5^n} = 5$$

Conform teoremei Abel, seria este

- convergentă pentru $x \in (-5, 5)$
- divergentă pentru $x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

Dacă $x = -5$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. Deoarece $\frac{1}{n} \searrow 0$, din criteriul Leibniz rezultă că seria este convergentă.
Dacă $x = 5$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, deci este divergentă.
În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei de puteri este $[-5, 5)$.
$\blacksquare$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n\sqrt{2n+1}}{n^3+1}(x+1)^n$

Soluţie Notăm $c_n = (-1)^n \frac{2^n\sqrt{2n+1}}{n^3+1}$. Raza de convergenţa este:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{2n+1}}{n^3+1} \cdot \frac{(n+1)^3+1}{2^{n+1}\sqrt{2n+3}} = \frac{1}{2}$$

Conform teoremei Abel, seria este

- convergentă pentru $x+1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- divergentă pentru $x+1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

Dacă $x+1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^3+1}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n+1}}{n^3+1}}{\frac{\sqrt{n}}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^3+1} \cdot \frac{n^3}{\sqrt{n}} = \sqrt{2} \in (0, \infty),$$

din criteriul criteriul 3 de comparaţie rezultă că seria are aceeaşi natură ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, deci este convergentă.

Dacă $x+1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{2n+1}}{n^3+1}$. Din cazul precedent rezultă că seria este absolut convergentă, prin urmare este convergentă.
În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei de puteri este $\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]$.
■

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin^n x}{n}$

Soluţie Notăm $y=\sin x$ şi $c_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$. Determinăm mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}c_n y^n$. Raza de convergenţa este:

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=1
\end{aligned}$$

Conform teoremei Abel, seria este

- convergentă pentru $y\in(-1,1)$
- divergentă pentru $y\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Dacă $y=-1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$.
Din criteriul Stolz avem

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Studiem monotonia şirului c_n.

$$\begin{aligned}
c_{n+1}-c_n &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+1}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}\\
&= \left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n(n+1)}\right)-\frac{1}{n(n+1)^2}<0,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,
\end{aligned}$$

deci şirul este strict descrescător. Fiind verificate condiţiile din criteriul lui Leibniz, rezultă că seria este convergentă.

Dacă $y = 1$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}$. Deoarece

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n},\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, din criteriul 1 de comparaţie rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ este divergentă.

În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n y^n$ este $[-1, 1)$.

Revenim la notaţia $y = \sin x$. Seria este convergentă dacă şi numai dacă

$$y \in [-1, 1) \Longleftrightarrow \sin x \in [-1, 1) \Longleftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Astfel, mulţimea de convergenţă a seriei este $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$. ■

Exerciţiul 4. Să se determine raza de convergenţă şi suma seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Soluţie Raza de convergenţă este $R = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Notăm suma seriei

$$f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Prin derivare obţinem

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}.$$

Atunci $f(x) = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) + C$. Pentru $x = 0$, obţinem $C = 0$. Prin urmare $f(x) = \ln(x+1)$.

Remarcăm faptul că mulţimea de convergenţă a seriei considerate este $(-1, 1]$ şi suma seriei pentru $x = 1$ este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \ln(x+1) = \ln 2.$$

■