Seminar Analiză Matematică

Integrale duble

1 Integrale duble pe dreptunghi (interval bidimensional)

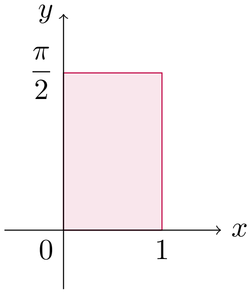
Dacă $D = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă pe D, atunci

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Exerciţiul 1. Să se calculeze integrala

$$I = \iint\limits_D x^3 \cos\left(x^2 y\right) dxdy,\ D = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Soluţie



Avem $(D) : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos\left(x^2 y\right) dy \right) dx = \int\limits_0^1 x \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos\left(x^2 y\right) dy \right) dx \\ &= \int\limits_0^1 x \left(\sin\left(x^2 y\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) dx = \int\limits_0^1 x \sin\left(x^2 \frac{\pi}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^1 \left(\frac{\pi x^2}{2}\right)' \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

■

2 Integrale duble pe domenii simple în raport cu o axă

Calculul integralei duble pe un domeniu simplu în raport cu axa Oy
Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b,\, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\right\},\ [a, b] \subset \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in C[a, b],$$

atunci

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Calculul integralei duble pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox
Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d,\, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\right\},\ [c, d] \subset \mathbb{R},\ \gamma, \delta \in C[c, d],$$

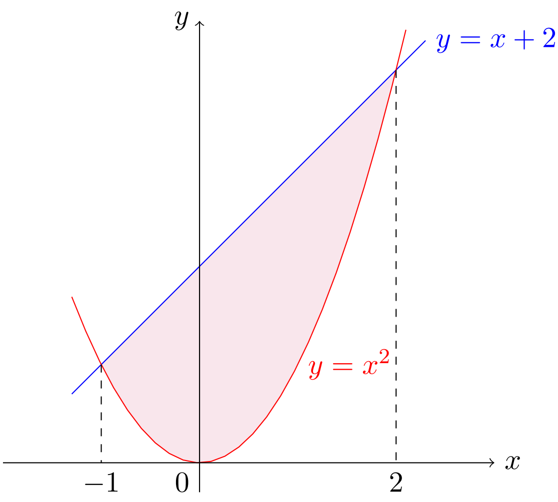
atunci

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

Exerciţiul 2. Să se calculeze următoarele integrale

1. $I = \iint\limits_D xydxdy$, D fiind limitat de $y = x^2$ şi $y = x + 2$

   Soluţie Domeniul D este cuprins între parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = x + 2$. Determinăm punctele în care se intersectează parabola cu dreapta rezolvând sistemul $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$. Obţinem puntele $(-1, 1)$ şi $(2, 4)$. Din reprezentarea grafică, se observă că D este un domeniu simplu în raport cu ambele axe.



Vom scrie domeniul ca domeniu simplu în raport cu axa Oy. Proiecţia domeniului pe axa Ox este intervalul $[-1, 2]$, deci $-1 \leq x \leq 2$. Domeniul este mărginit inferior de parabola $y = x^2$ iar superior de dreapta $y = x + 2$, prin urmare $x^2 \leq y \leq x + 2$. Aşadar

$$(D) : \begin{cases} -1 \leq & x & \leq 2 \\ x^2 \leq & y & \leq x + 2 \end{cases}$$

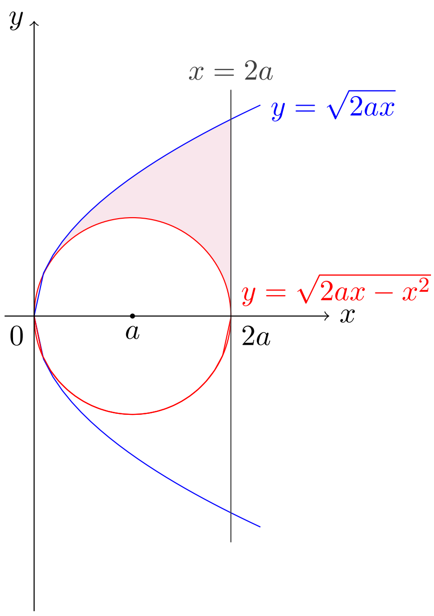
Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2}^{x+2} xy dy \right) dx = \int_{-1}^{2} x \left(\int_{x^2}^{x+2} y dy \right) dx = \int_{-1}^{2} x \left(\left. \frac{y^2}{2} \right|_{x^2}^{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} x \left(x^2 + 4x + 4 - x^4 \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2 - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_{-1}^{2} = \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

■

2. $I = \iint\limits_D y dx dy$, $(D) : \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2ax \\ y^2 \leq 2ax \\ x \leq 2a \\ y \geq 0 \end{cases}$, $a > 0$

Soluţie Domeniul este porţiunea cuprinsă între cercul $x^2 + y^2 = 2ax$, parabola $y^2 = 2ax$ şi dreapta $x = 2a$, aflată în semiplanul $y \geq 0$. Din reprezentarea grafică, se observă că D este un domeniu simplu în raport cu axa Oy (nu este un domeniu simplu în raport cu axa Ox).



Proiecţia domeniului pe axa Ox este intervalul $[0, 2a]$. Pentru a determina curba care mărgineşte inferior domeniul, explicităm y din ecuaţia cercului: $y^2 = 2ax - x^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{2ax - x^2}$ şi cum $y \geq 0$, avem $y = \sqrt{2ax - x^2}$ (semicercul superior). Pentru a determina curba care mărgineşte superior domeniul, explicităm y din ecuaţia parabolei $y^2 = 2ax$, adică $y = \pm\sqrt{2ax}$, ţinem seama că $y \geq 0$ şi obţinem $y = \sqrt{2ax}$. Aşadar

$$(D) : \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 2a \\ \sqrt{2ax - x^2} \leq & y & \leq \sqrt{2ax} \end{cases}$$

Avem

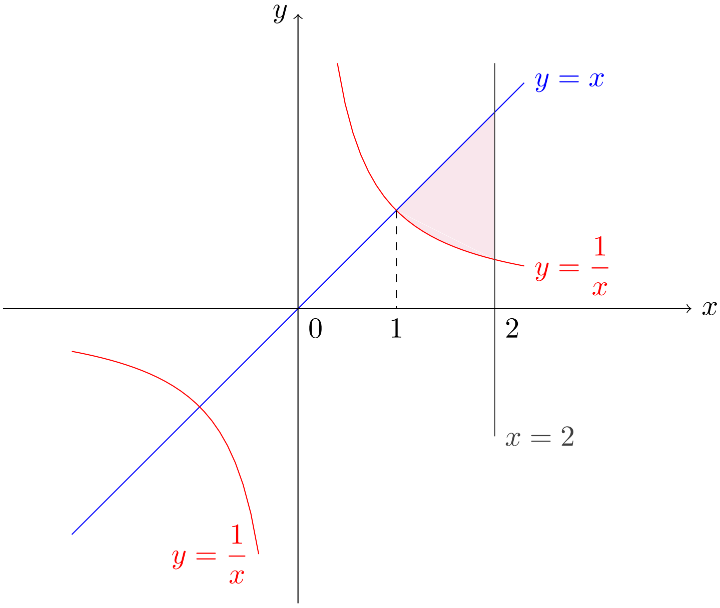
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} y dy \right) dx = \int_0^{2a} \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2a} x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2a} = \frac{4a^3}{3}. \end{aligned}$$

■

3. $I = \iint\limits_D \frac{1}{xy} dxdy$, D mărginit de $y = x$, $xy = 1$ şi $x = 2$

Soluţie Domeniul D este cuprins între dreapta $y = x$, hiperbola echilateră $xy = 1$ şi dreapta $x = 2$. Determinăm punctele în care se intersectează hiperbola cu prima bisectoare rezolvând sistemul $\begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases}$.

Obţinem puntele $(-1,-1)$ şi $(1,1)$. Din reprezentarea grafică, se observă că D este un domeniu simplu în raport cu ambele axe.



Vom scrie domeniul ca domeniu simplu în raport cu axa Oy.
Proiecţia domeniului pe axa Ox este intervalul $[1,2]$. Domeniul este mărginit inferior de hiperbolă $(y = \frac{1}{x})$ şi superior de prima bisectoare $(y = x)$. Aşadar

$$(D): \begin{cases} 1 \leq & x & \leq 2 \\ \frac{1}{x} \leq & y & \leq x \end{cases}$$

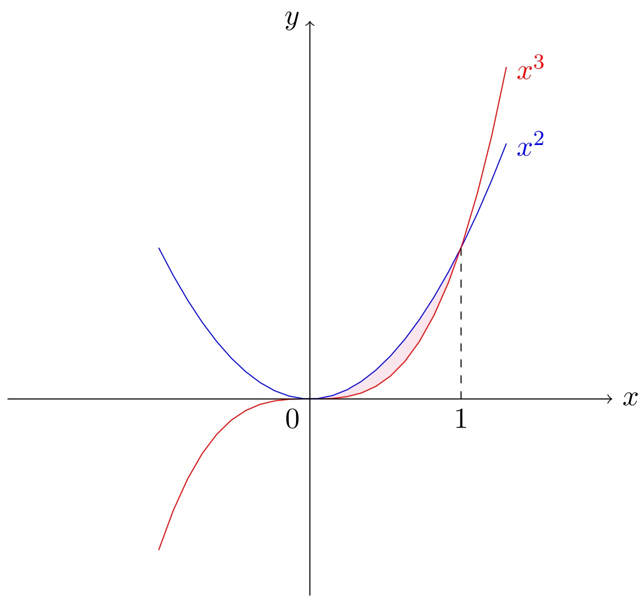
Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{xy} dy \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \left(\ln y \Big|_{\frac{1}{x}}^{x} \right) dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot 2 \ln x dx = \int_1^2 2 \ln x \left(\ln x \right)' dx = \left(\ln x \right)^2 \Big|_1^2 = \left(\ln 2 \right)^2 . \end{aligned}$$

■

4. $I = \iint\limits_D \sqrt{xy} dxdy$, D fiind limitat de $y = x^3$ şi $y = x^2$

Soluţie Determinăm punctele în care se intersectează curbele care mărginesc domeniul rezolvând sistemul $\begin{cases} y = x^3 \\ y = x^2 \end{cases}$. Obţinem puntele $(0,0)$ şi $(1,1)$. Din reprezentarea grafică, se observă că D este un domeniu simplu în raport cu ambele axe.



Vom scrie domeniul ca domeniu simplu în raport cu axa Oy.
Proiecţia domeniului pe axa Ox este intervalul $[0, 1]$. Domeniul este mărginit inferior de parabola cubică ($y = x^3$) şi superior de parabolă ($y = x^2$). Aşadar

$$(D) : \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 1 \\ x^3 \leq & y & \leq x^2 \end{cases}$$

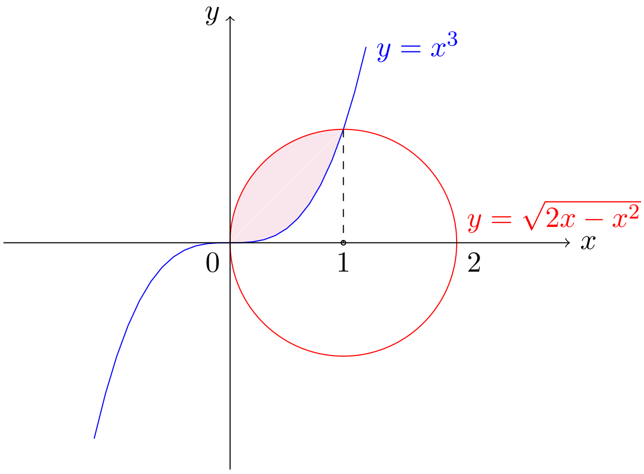
Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{xy} dy \right) dx = \int_0^1 \sqrt{x} \left(\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{y} dy \right) dx = \int_0^1 \sqrt{x} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_{x^3}^{x^2} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{x} \left(x^3 - x^{\frac{9}{2}} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \left(x^{\frac{7}{2}} - x^5 \right) dx = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{6} x^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

■

5. $I = \iint\limits_D xydxdy$, $(D) : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ y \geq x^3 \end{cases}$

Soluţie Domeniul D este cuprins între cercul $x^2 + y^2 = 2x$ şi parabola cubică $y = x^3$. Determinăm punctele în care se intersectează curbele $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ y = x^3 \end{cases}$. Obţinem puntele $(0, 0)$ şi $(1, 1)$. Din reprezentarea grafică, se observă că D este un domeniu simplu în raport cu ambele axe.



Vom scrie domeniul ca domeniu simplu în raport cu axa Oy.
Proiecţia domeniului pe axa Ox este intervalul $[0, 1]$. Domeniul este mărginit inferior de parabola cubică $(y = x^3)$ şi superior de semicercul superior $(y = \sqrt{2x - x^2})$. Aşadar

$$(D) : \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 1 \\ x^3 \leq & y & \leq \sqrt{2x - x^2} \end{cases}$$

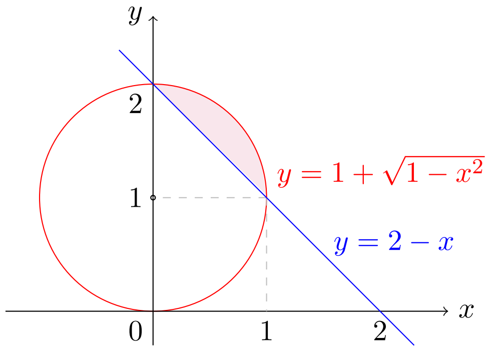
Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{2x-x^2}} xy dy \right) dx = \int_0^1 \left(x \frac{y^2}{2} \Big|_{x^3}^{\sqrt{2x-x^2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(2x^2 - x^3 - x^7\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^8}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{48}. \end{aligned}$$

■

6. $I = \iint\limits_D xydxdy$, $(D) : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2y \\ x + y \geq 2 \end{cases}$

Soluţie Domeniul D este cuprins între cercul $x^2 + y^2 = 2y$ şi dreapta $x + y = 2$. Determinăm punctele în care se intersectează curbele $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x + y = 2 \end{cases}$. Obţinem puntele $(0, 2)$ şi $(1, 1)$. Din reprezentarea grafică, se observă că D este un domeniu simplu în raport cu ambele axe.



Vom scrie domeniul ca domeniu simplu în raport cu axa Oy.
Proiecţia domeniului pe axa Ox este intervalul $[0, 1]$. Domeniul este mărginit inferior de dreaptă ($y = 2 - x$) şi superior de semicercul superior ($y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$). Aşadar

$$(D): \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 1 \\ 2 - x \leq & y & \leq 1 + \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

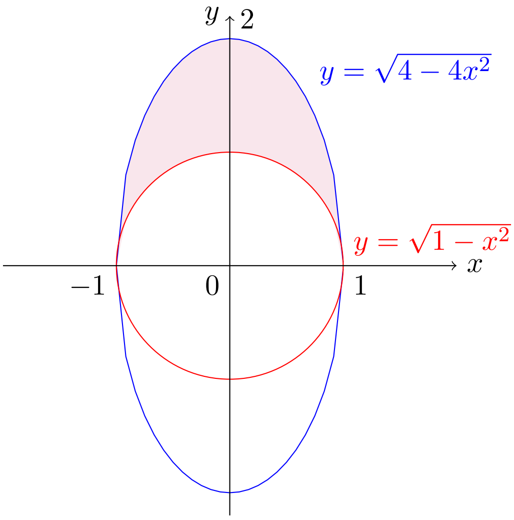
Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} xy dy \right) dx = \int_0^1 \left(x \frac{y^2}{2} \Big|_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(2\sqrt{1 - x^2} - 2 + 4x - 2x^2 \right) dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{1 - x^2} - x + 2x^2 - x^3 \right) dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

■

7. $I = \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$, $(D): \begin{cases} 4x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Soluţie Domeniul D este cuprins între elipsa $4x^2 + y^2 = 4$ şi cercul $x^2 + y^2 = 1$. Din reprezentarea grafică, se observă că D este un domeniu simplu în raport cu axa Oy (nu este un domeniu simplu în raport cu axa Ox).



Proiecţia domeniului pe axa Ox este intervalul $[-1,1]$. Domeniul este mărginit inferior de cerc ($y=\sqrt{1-x^2}$) şi superior de elipsă ($y=\sqrt{4-4x^2}$). Aşadar

$$(D):\begin{cases} -1\leq & x & \leq 1\\ \sqrt{1-x^2}\leq & y & \leq \sqrt{4-4x^2}\end{cases}$$

Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-4x^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-4x^2}}\right)dx\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-3x^2}-1\right)dx = 2\int_0^1\sqrt{4-3x^2}dx-2 = 2\sqrt{3}\int_0^1\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}dx-2\\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}+\frac{2}{3}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\Big|_0^1-2=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}-1 \end{aligned}$$

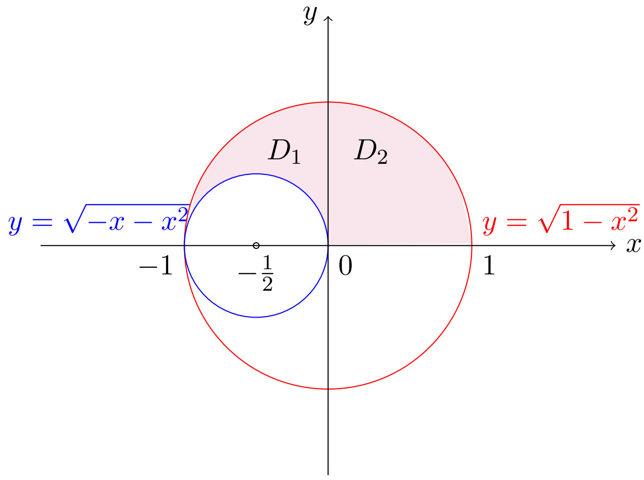
Observaţie:

$$\begin{aligned} \int\sqrt{a^2-x^2}dx &= \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\\ &= a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+\int x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'dx\\ &= a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx \end{aligned}$$

de unde $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$ ■

8. $I=\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, $(D):\begin{cases} x^2+y^2\le 1\\ x^2+y^2+x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$

Soluţie Domeniul D este porţiunea cuprinsă între cercurile $x^2+y^2=1$ şi $x^2+y^2+x=0$, aflată în semiplanul $y\ge 0$. Din reprezentarea grafică, se observă că D este un domeniu simplu în raport cu axa Oy (nu este însă un domeniu simplu în raport cu axa Ox). Pentru că domeniul este mărginit inferior de un semicerc şi un segment, vom scrie domeniul ca reuniunea domeniilor simple în raport cu axa Oy, D_1 şi D_2, D_1 fiind partea din domeniu aflată în al doilea cadran iar D_2 partea din domeniu aflată în primul cadran. Apoi vom folosi proprietatea de aditivitate la domeniu.



$(D_1):\begin{cases} -1\le x\le 0\\ \sqrt{-x-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\end{cases}$, $(D_2):\begin{cases} 0\le x\le 1\\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\end{cases}$

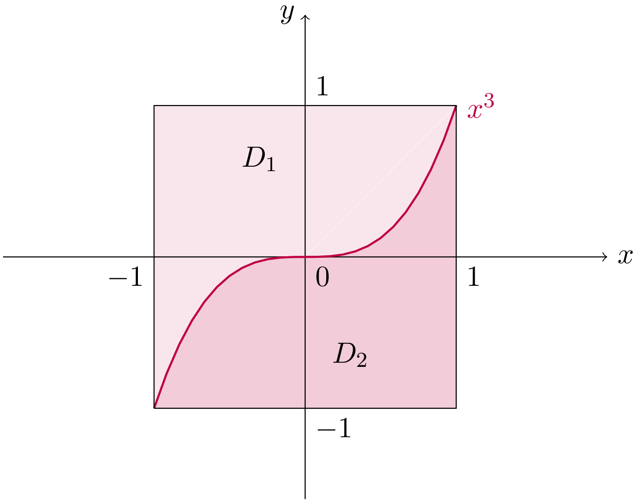
Avem

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D x^2y\,dxdy=\iint\limits_{D_1} x^2y\,dxdy+\iint\limits_{D_2} x^2y\,dxdy\\ &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{\sqrt{-x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dy\right)dx+\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dy\right)dx\\ &= \int_{-1}^{0}\left(x^2\frac{y^2}{2}\Big|_{\sqrt{-x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx+\int_0^1\left(x^2\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(x^2+x^3\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{13}{120}. \end{aligned}$$

■

9. $I = \iint\limits_D x^2\sqrt{|y-x^3|}dxdy$, $D = [-1,1]\times[-1,1]$

Soluţie Vom scrie domeniul D ca reuniunea domeniilor D_1 şi D_2, D_1 fiind partea din domeniu aflată deasupra parabolei cubice iar D_2 partea din domeniu aflată sub parabola cubică. Apoi vom folosi proprietatea de aditivitate la domeniu.



Proiecţia pe axa Ox atât a domeniul D_1 cât şi a domeniului D_2 este intervalul $[-1,1]$. Domeniul D_1 este mărginit inferior de parabola cubică şi superior de dreapta $y=1$. Domeniul D_2 este mărginit inferior de dreapta $y=-1$ şi superior de parabola cubică. Astfel

$$(D_1):\left\{\begin{array}{rcl} -1\le & x & \le 1\\ x^3\le & y & \le 1\end{array}\right.,\ (D_2):\left\{\begin{array}{rcl} -1\le & x & \le 1\\ -1\le & y & \le x^3\end{array}\right.$$

Avem

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_1} x^2\sqrt{y-x^3}dxdy + \iint\limits_{D_2} x^2\sqrt{x^3-y}dxdy\\
&= \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{x^3}^{1} x^2\sqrt{y-x^3}dy\right)dx + \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{x^3} x^2\sqrt{x^3-y}dy\right)dx\\
&= \int\limits_{-1}^{1}\left(x^2\frac{2}{3}(y-x^3)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^3}^{1}\right)dx + \int\limits_{-1}^{1}\left(x^2\left(-\frac{2}{3}\right)(x^3-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{x^3}\right)dx\\
&= \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} x^2(1-x^3)^{\frac{3}{2}}dx + \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} x^2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}dx\\
&= -\frac{4}{45}(1-x^3)^{\frac{5}{2}}\Big|_{-1}^{1} + \frac{4}{45}(x^3+1)^{\frac{5}{2}}\Big|_{-1}^{1} = \frac{32\sqrt{2}}{45}.
\end{aligned}$$

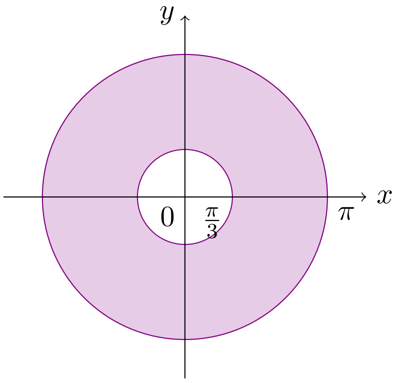
■

3 Schimbări de variabile în integrala dublă

Exerciţiul 3. Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I = \iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, $(D): \frac{\pi^2}{9} \leq x^2+y^2 \leq \pi^2$

   Soluţie



Trecem la coordonate polare.

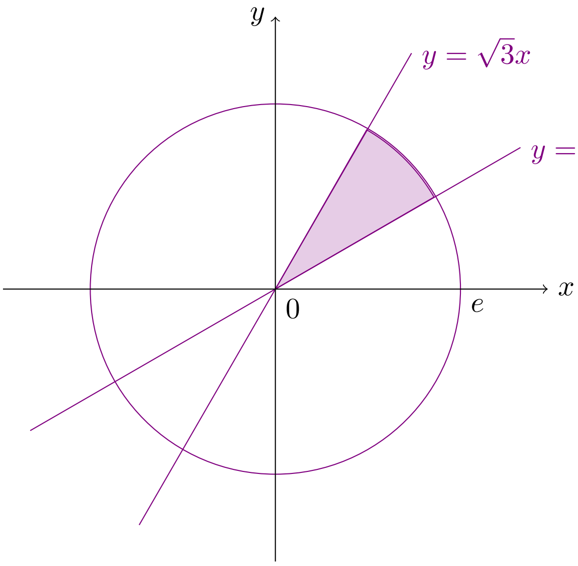
Din $\frac{\pi^2}{9} \leq x^2+y^2 \leq \pi^2$, obţinem $\frac{\pi^2}{9} \leq \rho^2 \leq \pi^2$, deci $\frac{\pi}{3} \leq \rho \leq \pi$ (deoarece $\rho \geq 0$). Prin urmare $(D'): \begin{cases} \frac{\pi}{3} \leq \rho \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Avem

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\
&= \iint\limits_{D'} \frac{\sin\sqrt{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}}{\sqrt{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}} \cdot \rho\, d\rho d\theta \\
&= \iint\limits_{D'} \frac{\sin\sqrt{\rho^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}}{\sqrt{\rho^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}} \cdot \rho\, d\rho d\theta = \iint\limits_{D'} \frac{\sin\sqrt{\rho^2}}{\sqrt{\rho^2}} \cdot \rho\, d\rho d\theta \\
&= \iint\limits_{D'} \sin\rho\, d\rho d\theta = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \sin\rho d\theta\right) d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\rho \cdot 2\pi\, d\rho \\
&= 2\pi(-cos\rho)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 2\pi\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3\pi.
\end{aligned}
$$

■

2. $I = \iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right) dxdy$, $(D): \begin{cases} x^2+y^2 \le e^2 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

Soluţie



Trecem la coordonate polare.

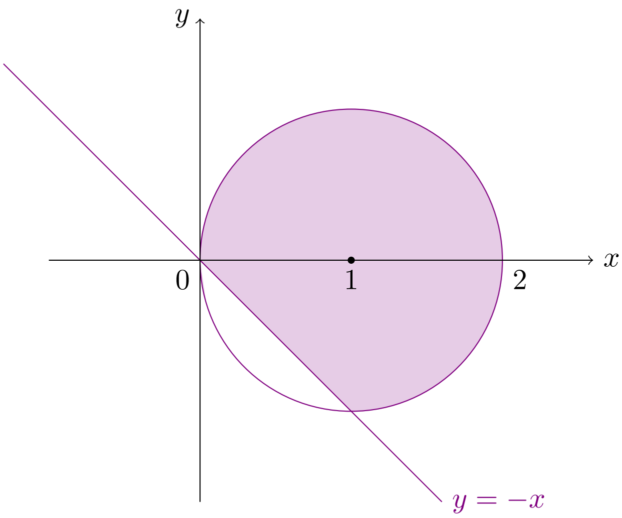
Din $x^2+y^2 \le e^2$, obţinem $0 \le \rho \le e$, iar din $\dfrac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x$ obţinem $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$. Prin urmare $(D'): \begin{cases} 0 \le \rho \le e \\ \dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$. Avem

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right) dxdy = \iint\limits_{D'} \ln\left(1+\rho^2\right)\cdot \rho \, d\rho d\theta \\
&= \int_0^e \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1+\rho^2\right)\cdot\rho\, d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{6}\int_0^e \rho \ln\left(1+\rho^2\right)\, d\rho \\
&= \frac{\pi}{12}\int_0^e (1+\rho^2)' \ln\left(1+\rho^2\right)\, d\rho \\
&= \frac{\pi}{12}(1+\rho^2)\ln\left(1+\rho^2\right)\Big|_0^e - \frac{\pi}{12}\int_0^e 2\rho\, d\rho \\
&= \frac{\pi}{12}\left[(1+e^2)\ln\left(1+e^2\right) - e^2\right].
\end{aligned}$$

■

3. $I = \iint\limits_D y dxdy$, $(D): \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ y \geq -x \end{cases}$

Soluţie



Trecem la coordonate polare $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, $\rho \geq 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

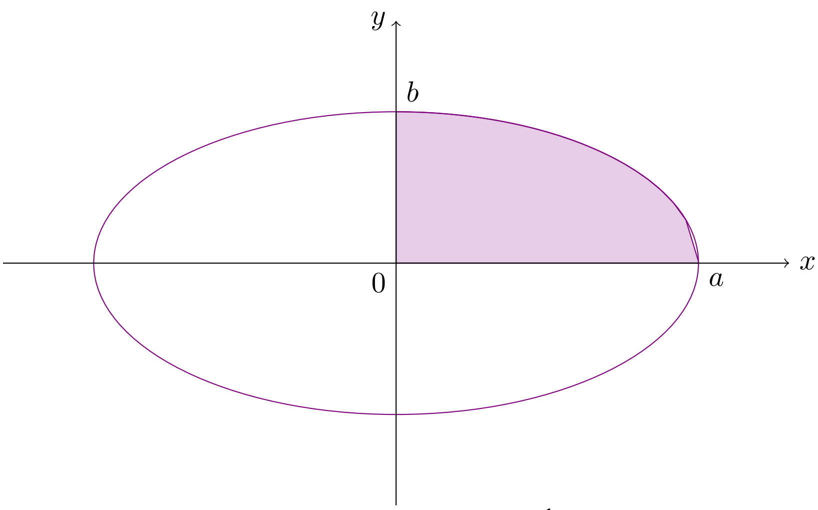
Din $x^2 + y^2 \leq 2x$, obţinem $\rho^2 \leq 2\rho\cos\theta \implies \rho \leq 2\cos\theta$. Deoarece $\cos\theta \geq 0$, rezultă până acum că $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Din $y \geq -x$ obţinem $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Prin urmare $(D'): \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \end{cases}$. Avem

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D y\, dxdy = \iint\limits_{D'} \rho\sin\theta \cdot \rho\, d\rho d\theta \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left(\int\limits_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho \right) d\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{2\cos\theta} \right) d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^3\theta d\theta = \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{\cos^4\theta}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

4. $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$, $(D): \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, $a, b > 0$.

Soluţie



Trecem la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$, $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Din $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$, obţinem $0 \leq \rho \leq 1$. Din x, $y \geq 0$ obţinem $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

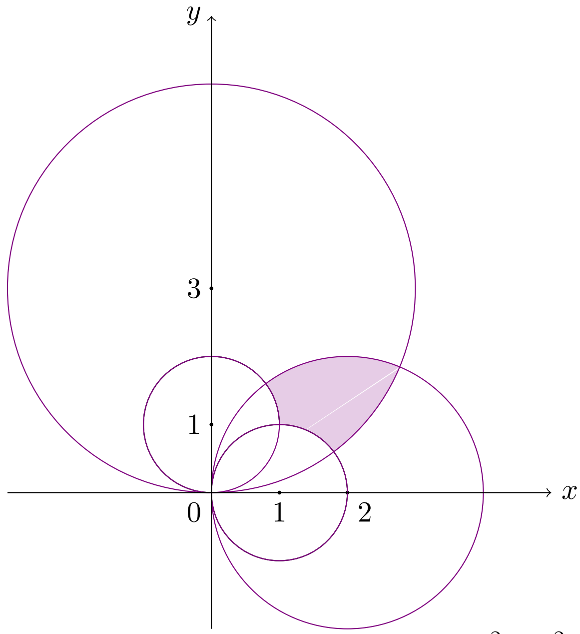
Prin urmare $(D') : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Avem

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy \\
&= \iint\limits_{D'} \left(a^2\rho^2\cos^2\theta + b^2\rho^2\sin^2\theta\right) \cdot ab\rho\, d\rho d\theta \\
&= ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^3 d\rho\right) d\theta \\
&= \frac{ab}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{ab}{4}\left[\frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{b^2}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] \\
&= \frac{ab}{4}\left(\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{b^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi ab(a^2+b^2)}{16}.
\end{aligned}$$

■

5. $I = \iint\limits_D \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$, $(D) : \begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \\ 2y \leq x^2 + y^2 \leq 6y \end{cases}$

Soluţie



Facem schimbarea de variabile $\begin{cases} u = \dfrac{x^2+y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2+y^2}{y} \end{cases}$. Obţinem $(D') : \begin{cases} 2 \le u \le 4 \\ 2 \le v \le 6 \end{cases}$.

Exprimăm x şi y în funcţie de u şi v. Din $x^2+y^2 = ux = vy$, obţinem $y = x\dfrac{u}{v}$ pe care îl înlocuim în prima relaţie şi avem $xu = x^2 + x^2\dfrac{u^2}{v^2}$,

de unde $x = \dfrac{uv^2}{u^2+v^2}$. Astfel $\begin{cases} x = \dfrac{uv^2}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{u^2v}{u^2+v^2} \end{cases}$. Calculăm Jacobianul

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^2\dfrac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} & \dfrac{2u^3v}{(u^2+v^2)^2} \\ \dfrac{2uv^3}{(u^2+v^2)^2} & u^2\dfrac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{u^2v^2}{(u^2+v^2)^2},$$

deci $|J| = \dfrac{u^2v^2}{(u^2+v^2)^2}$.

Observaţie

Jacobianul poate fi calculat şi în felul următor:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & 1 - \dfrac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} - 2$$

observvăm că $\dfrac{u}{v} = \dfrac{y}{x}$ şi avem

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = -\frac{1}{\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2} = -\frac{1}{\dfrac{v^2}{u^2} + \dfrac{u^2}{v^2} + 2} = -\frac{u^2v^2}{(u^2+v^2)^2}.$$

Dacă nu am exprimat x şi y în funcţie de u şi v, atunci putem exprima funcţia de integrat în noile variabile observând că

$$\left(\frac{1}{u}\right)^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

şi atunci

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \left(\left(\frac{1}{u}\right)^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2\right)^2 = \frac{(u^2+v^2)^2}{u^4v^4}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{(u^2+v^2)^2}{u^4v^4} \cdot \frac{u^2v^2}{(u^2+v^2)^2} dudv = \iint\limits_{D'} \frac{1}{u^2v^2} dudv \\ &= \int_2^4 \frac{1}{u^2} \left(\int_2^6 \frac{1}{v^2} dv \right) du = \int_2^4 \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{v}\Big|_2^6 \right) du = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_2^4 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

■

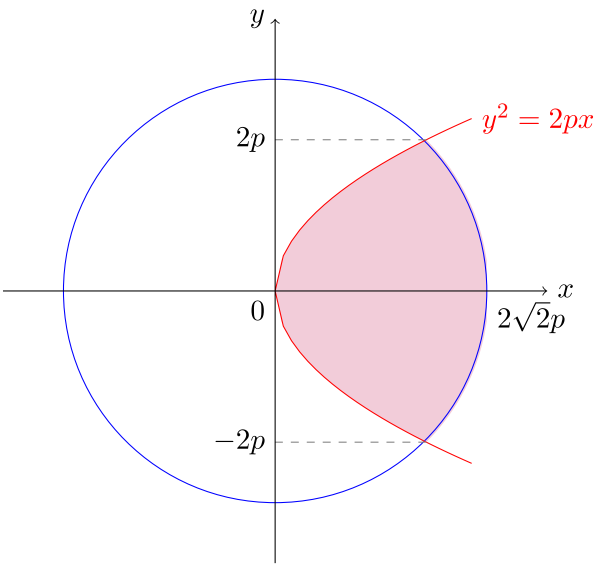
4 Calculul ariei unui domeniu

$Aria(D) = \iint\limits_D dxdy$

Exerciţiul 4. Să se calculeze ariile următoarelor domenii:

1. $(D): \begin{cases} y^2 \leq 2px \\ x^2 + y^2 \leq 8p^2 \end{cases}, \ p > 0.$

   Soluţie



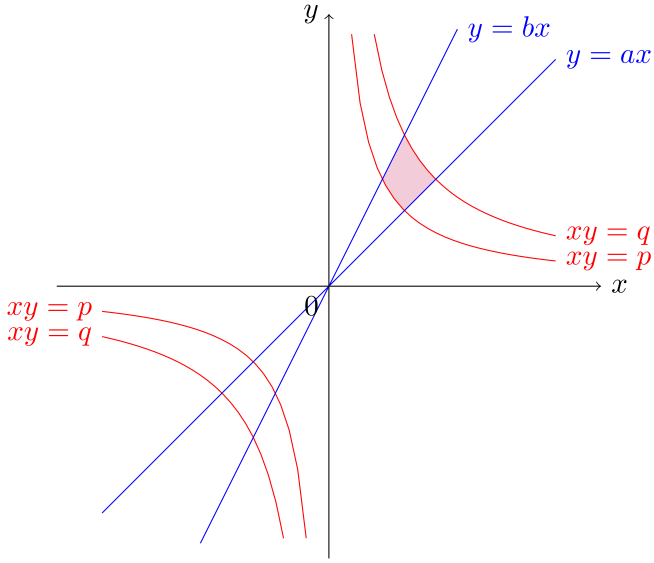
Avem $(D): \begin{cases} -2p \leq y \leq 2p \\ \dfrac{1}{2p} y^2 \leq x \leq \sqrt{8p^2 - y^2} \end{cases}$ şi

$$\begin{aligned}
Aria(D) &= \int\limits_{-2p}^{2p} \left(\int\limits_{\frac{1}{2p}y^2}^{\sqrt{8p^2-y^2}} dx \right) dy = \int\limits_{-2p}^{2p} \left(\sqrt{8p^2 - y^2} - \frac{1}{2p} y^2 \right) dy \\
&= 2 \int\limits_{0}^{2p} \left(\sqrt{8p^2 - y^2} - \frac{1}{2p} y^2 \right) dy \\
&= 2 \left(\frac{8p^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{8p^2}} + \frac{y}{2} \sqrt{8p^2 - y^2} - \frac{1}{2p} \cdot \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{2p} \\
&= 2 \left(\frac{8p^2}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2p}{2} \sqrt{4p^2} - \frac{1}{2p} \cdot \frac{8p^3}{3} \right) \\
&= 2p^2 \left(\pi + \frac{2}{3} \right).
\end{aligned}$$

■

2. $(D):\begin{cases} p\le xy\le q \\ ax\le y\le bx \end{cases}$, $0<p<q$, $0<a<b$.

Soluţie



Facem schimbarea de variabile $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$. Obţinem $(D'):\begin{cases} p\le u\le q \\ a\le v\le b \end{cases}$.

Exprimăm x şi y în funcţie de u şi v: $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$. Calculăm Jacobianul

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v},$$

deci $|J| = \dfrac{1}{2v}$. Atunci

$$\begin{aligned} Aria(D) &= \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D'} |J|\,dudv = \iint\limits_{D'} \frac{1}{2v}dudv \\ &= \int\limits_{p}^{q}\left(\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{2v}dv\right)du = \int\limits_{p}^{q}\frac{1}{2}\left(\ln v\Big|_{a}^{b}\right)du = \frac{1}{2}(q-p)\ln\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$