Seminar Analiză Matematică

Dezvoltări în serie Taylor

Exerciţiul 1. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul originii următoarele funcţii:

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

   Soluţie Pentru a obţine dezvoltarea funcţiei în serie Taylor în jurul originii, vom folosi dezvoltarea
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ pentru } |x| < 1. \tag{1}$$
   Avem $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{1-(-x^3)}$. Înlocuind în (1) pe x cu $-x^3$, obţinem
$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}, \text{ pentru } \left|-x^3\right| < 1$$
   deci
$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}, \text{ pentru } |x| < 1.$$
   ■

2. $f(x) = \dfrac{x}{1+x-2x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}, 1\right\}$

   Soluţie Descompunem funcţia în fracţii simple
$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+2x}.$$
   Folosind dezvoltarea (1), obţinem
$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$$
   pentru $|x| < 1$ şi $|-2x| < 1$, deci $|x| < \dfrac{1}{2}$. Astfel, dezvoltarea funcţiei f în serie Taylor în jurul originii este
$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-2)^n\right)x^n, \text{ pentru } |x| < \frac{1}{2}.$$
   ■

3. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, \ |x| < 1$

Soluţie Derivata funcţiei este

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2},\ x \in (-1,1). \end{aligned}$$

Dezvoltarea în serie Taylor în jurul orginii a derivatei este

$$f'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n}, \text{ pentru } |u| < 1.$$

Prin integrare termen cu termen pe intervalul de capete 0 şi x, cu $x \in (-1,1)$, obţinem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x u^{2n} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ pentru } |x| < 1.$$

■

Aplicaţie: pentru $x = \dfrac{1}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$ obţinem

$$\ln\frac{k+1}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}.$$

- Pentru $k = 1$ obţinem

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}.$$

- Pentru $k = 2$ obţinem $\ln\frac{3}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\cdot 5^{2n+1}}$, de unde

$$\begin{aligned} \ln 3 &= \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\cdot 5^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}}\right). \end{aligned}$$

- $\ln 4 = 2\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}$.

- Pentru $k=4$ obţinem $\ln\frac{5}{4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)\cdot 9^{2n+1}}$, de unde

$$\begin{aligned}
\ln 5 &= \ln 4+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)\cdot 9^{2n+1}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{2}{3^{2n+1}}+\frac{1}{9^{2n+1}}\right).
\end{aligned}$$

4. $f(x)=\sin 3x - x\cos 7x,\ x\in\mathbb{R}$

Soluţie Vom folosi dezvoltările

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

şi

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Obţinem

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}-x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(7x)^{2n}}{(2n)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{7^{2n}}{(2n)!}\right)x^{2n+1},\ x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

■

5. $f(x)=\sin^2 2x,\ x\in\mathbb{R}$

Soluţie Avem

$$\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x = 1-2\sin^2 2x \Longrightarrow \sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}.$$

Folosim dezvoltarea (3) şi obţinem

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

■

6. $f(x) = \sinh x,\ x \in \mathbb{R}$

Soluţie Avem $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Vom folosi dezvoltarea

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Obţinem

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

7. $f(x) = 2^{x^2} du,\ x \in \mathbb{R}$

Soluţie Din (4) obţinem

$$f(x) = \left(e^{\ln 2}\right)^{x^2} = e^{(\ln 2)x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^{2n}.$$

■

8. $f(x) = \int\limits_0^x e^{-u^2} du,\ x \in \mathbb{R}$

Soluţie Din (4) obţinem $e^{-u^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{u^{2n}}{n!}$, de unde

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{n!} du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \int_0^x u^{2n} du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)},\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}},\ x \in (-1,1)$

Soluţie Vom folosi dezvoltarea

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,\ |x| < 1. \tag{5}$$

Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}(x^2)^n \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3^n n!}x^{2n},\ |x|<1. \end{aligned}$$

■

Aplicaţie: să se aproximeze $\frac{1}{\sqrt[3]{1,01}}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-8}.
Avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{1,01}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{1+(0,1)^2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3^n n!}(0,1)^{2n} \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots(3n)}\cdot\frac{1}{10^{2n}} \end{aligned}$$

Numărul de aproximat este suma unei serii alternate care verifică ipoteza criteriului Leibniz, adică o serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ cu $u_n \searrow 0$. În acest caz, dacă aproximăm suma seriei cu suma parţială $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$, atunci eroarea absolută este mai mică decât u_{n+1}. Avem

$$\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots(3n)}\cdot\frac{1}{10^{2n}} < 10^{-8},\ (\forall)n\geq 4,$$

prin urmare

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{1,01}} &\cong 1+\sum_{n=1}^{3}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots(3n)}\cdot\frac{1}{10^{2n}} \\ &= 1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^2}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\cdot\frac{1}{10^4}-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\cdot\frac{1}{10^6} \\ &= 0,996688716 \end{aligned}$$

10. $f(x) = \arcsin x$, $x\in(-1,1)$

Soluţie Vom dezvolta $f'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ folosind dezvoltarea

$$(1+u)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n,\ |u|<1. \tag{6}$$

Avem

$$\begin{aligned} f'(u) &= (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-u^2)^n \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}(-1)^n u^{2n} \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}u^{2n},\ |u|<1. \end{aligned}$$

Prin integrare termen cu termen pe intervalul de capete 0 şi x, cu $x\in(-1,1)$, obţinem

$$f(x) = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1.$$

■

Aplicaţie: pentru $x=\dfrac{1}{2}$ obţinem

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$$

de unde

$$\pi=3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{3}{(2n+1)\cdot 2^{2n}}.$$

Această serie poate fi folosită pentru aproximarea lui π, fiind rapid convergentă. De exemplu

$$\begin{aligned} \pi &\cong 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{3}{5\cdot 2^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{3}{7\cdot 2^6} \\ &= 3+\frac{1}{2^3}+\frac{9}{5\cdot 2^7}+\frac{15}{7\cdot 2^{10}}=3,14115... \end{aligned}$$

Exerciţiul 2. Să se aproximeze, cu o eroare mai mică decât 10^{-3}, următoarele integrale:

1. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

   Soluţie Avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2}dx &= \int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}, \end{aligned}$$

Avem $\frac{1}{n!(2n+1)} < 10^{-3}$, $(\forall)n \geq 5$, prin urmare vom aproxima integrala cu suma parţială

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \cong 1 - \frac{1}{1!\cdot 3} + \frac{1}{2!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \frac{1}{4!\cdot 9} = 0,7474\ldots.$$

■

2. $\int_0^1 \sin x^2 dx$

Soluţie Avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin x^2 dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{4n+2}dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)},\end{aligned}$$

Avem $\frac{1}{(2n+1)!(4n+3)} < 10^{-3}$, $(\forall)n \geq 2$, prin urmare vom aproxima integrala cu suma parţială

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \cong \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 7} = 0,3095\ldots.$$

■

3. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$

Soluţie Avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx &= \int_0^1 \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)},\end{aligned}$$

Avem $\dfrac{1}{(2n+1)!(2n+1)} < 10^{-3}$, $(\forall)n \geq 3$, prin urmare vom aproxima integrala cu suma parţială

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \cong 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} = 0,9461\ldots.$$

■

4. $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} dx$

Soluţie Dezvoltăm în serie Taylor în jurul originii funcţia $\ln(1+x)$, $x > -1$. Avem

$$(\ln(1+u))' = \frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, \text{ pentru } |u| < 1,$$

de unde, prin integrare termen cu termen pe intervalul de capete 0 şi x, cu $x \in (-1,1)$, obţinem

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ pentru } |x| < 1.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \int\limits_0^{\frac{1}{3}} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}, \end{aligned}$$

Avem $\dfrac{1}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} < 10^{-3}$, $(\forall)n \geq 4$, prin urmare vom aproxima integrala cu suma parţială

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \cong \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 3^3} - \frac{1}{4^2 \cdot 3^4} = 0,3088\ldots.$$

■