Seminar Analiză Matematică

Integrale curbilinii

1 Integrale curbilinii de prima speţă

Dacă Γ este o curbă netedă cu parametrizarea $(\Gamma):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a,b]$ şi $f : D \subset \mathbb{R}^2$ este o funcţie continuă, cu $\{\Gamma\} \subset D$, atunci

$$\int_\Gamma f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

Exerciţiul 1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de prima speţă:

1. $I = \int_\Gamma ye^{-x}dl$, $(\Gamma):\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right) \\ y = 2\arctan t - t + 1 \end{cases}, t \in [0,1]$

   Soluţie Avem $x'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $y'(t) = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ şi

   $$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = 1.$$

   Atunci

   $$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2\arctan t - t + 1)e^{-\ln\left(1+t^2\right)}dt = \int_0^1 (2\arctan t - t + 1)\frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \int_0^1 2\arctan t(\arctan t)'dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= (\arctan t)^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^1 + \arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}+1\right) - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

   ■

2. $I = \int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}dl$, suportul curbei (Γ) fiind cercul $x^2+y^2 = 2x$

   Soluţie Cercul $x^2+y^2 = 2x \Longleftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$ este cu centrul în $(1,0)$ şi raza 1. O parametrizare a curbei este $(\Gamma):\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi]$. Avem $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$ şi $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$.

Atunci

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos t)^2 + \sin^2 t}dt = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t}dt = \sqrt{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos t}dt \\
&= 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos t}dt = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}dt = \int\limits_0^{\pi} \cos\frac{t}{2}dt \\
&= 8\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.
\end{aligned}$$

■

3. $I = \int\limits_{\Gamma} xydl$, suportul curbei (Γ) fiind porţiunea din elipsa $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, aflată în primul cadran.

Soluţie O parametrizare a curbei este $(\Gamma) : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right].$

Avem $x'(t) = -2\sin t$, $y'(t) = \cos t$ şi $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4\sin^2 t + \cos^2 t$.

Atunci

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)'\sqrt{3\sin^2 t + 1}dt \\
&= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sin^2 t + 1\right)^{\frac{1}{2}} (3\sin^2 t + 1)'dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(3\sin^2 t + 1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{14}{9}.
\end{aligned}$$

■

4. $I = \int\limits_{\Gamma} \dfrac{1}{x^3}dl$, suportul curbei (Γ) fiind $y = \ln x$ cu $x \in [1, 2]$.

Soluţie O parametrizare a curbei este $(\Gamma) : \begin{cases} x = t \\ y = \ln t \end{cases}, \ t \in [1, 2].$

Avem $x'(t) = 1$, $y'(t) = \dfrac{1}{t}$ şi $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1 + \dfrac{1}{t^2}$.

Atunci

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_1^2 \frac{1}{t^3}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}dt = -\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)'dt \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}}{8} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{16\sqrt{2} - 5\sqrt{5}}{24}.
\end{aligned}$$

■

Dacă Γ este o curbă netedă cu parametrizarea $(\Gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$ şi $f : D \subset \mathbb{R}^3$ este o funcţie continuă, cu $\{\Gamma\} \subset D$, atunci

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\, dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

Exerciţiul 2. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de prima speţă:

1. $I = \int_\Gamma \dfrac{\ln z}{x^2 + y^2} dl$, $(\Gamma) : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}$, $t \in [0, 1]$

   Soluţie Avem $x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$, $y'(t) = e^t(\sin t + \cos t)$, $z'(t) = e^t$ şi

   $$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = 3e^{2t}.$$

   Atunci

   $$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\ln e^t}{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t}\sqrt{3e^{2t}}dt = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{t}{e^{2t}}e^t dt \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 te^{-t}dt = \sqrt{3}\int_0^1 t(-e^{-t})'dt = -\sqrt{3}te^{-t}\Big|_0^1 + \sqrt{3}\int_0^1 e^{-t}dt \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{e} + \sqrt{3}(-e^{-t})\Big|_0^1 = -\frac{2\sqrt{3}}{e} + \sqrt{3} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{2}{e}\right). \end{aligned}$$

   ■

2. $I = \int_\Gamma \sqrt{2y^2 + z^2}dl$, suportul curbei (Γ) fiind intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ cu planul $x - y = 0$.

   Soluţie Intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ cu planul $x - y = 0$ este un cerc. Pentru a parametriza curba, trecem la coordonatele sferice $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$ şi $z = \rho\cos\varphi$, având $\rho = 2$ (raza sferei), $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ $(x = y)$ şi $\varphi \in [0, 2\pi]$. Astfel obţinem o parametrizare a curbei $(\Gamma) : \begin{cases} x = \sqrt{2}\sin\varphi \\ y = \sqrt{2}\sin\varphi \\ z = 2\cos\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

   Avem $x'(\varphi) = \sqrt{2}\cos\varphi$, $y'(\varphi) = \sqrt{2}\cos\varphi$, $z'(\varphi) = -2\sin\varphi$ şi $(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 + (z'(\varphi))^2 = 4$.

Atunci

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi} \cdot 2d\varphi = 4\int_0^{2\pi} d\varphi = 8\pi.$$

■

2 Integrale curbilinii de speţa a doua

Dacă Γ este o curbă netedă cu parametrizarea $(\Gamma) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$ şi $P, Q : U \subset \mathbb{R}^2$ sunt funcţii continue, U fiind o mulţime deschisă ce conţine suportul curbei Γ, atunci

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\right] dt$$

Exerciţiul 3. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa a doua:

1. $I = \int_\Gamma (1+y)dx + xdy$, $(\Gamma) : \begin{cases} x = \sqrt{t+1} \\ y = t \end{cases}, t \in [0,1]$

   Soluţie Avem

$$I = \int_0^1 \left[(1+t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t+1}} + \sqrt{t+1}\right] dt = \int_0^1 \frac{3}{2}\cdot\sqrt{t+1}dt$$
$$= (t+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - 1.$$

■

2. $I = \int_\Gamma \frac{dx + 2dy}{x+y+1}$, suportul curbei (Γ) fiind porţiunea din elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ aflată în primul cadran, parcursă în sens trigonometric.

   Soluţie O parametrizare a curbei este $(\Gamma) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

   Avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t + 4\cos t}{\cos t + 2\sin t + 1}dt \underset{\tan\frac{t}{2}=u}{=} \int_0^1 \frac{-2u^2 - u + 2}{2u+1}\cdot\frac{2}{u^2+1}du$$
$$= \frac{16}{5}\int_0^1 \frac{1}{2u+1}du - \frac{18}{5}\int_0^1 \frac{u}{u^2+1}du + \frac{4}{5}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du$$
$$= \frac{8}{5}\ln(2u+1)\Big|_0^1 - \frac{9}{5}\ln\left(u^2+1\right)\Big|_0^1 + \frac{4}{5}\arctan u\Big|_0^1 = \frac{8}{5}\ln 3 - \frac{9}{5}\ln 2 + \frac{\pi}{5}.$$

■

3. $I = \int\limits_{\Gamma}(x^2+2xy)dy$, suportul curbei (Γ) fiind porţiunea din elipsa $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ aflată în primul cadran, parcursă în sens trigonometric.

Soluţie O parametrizare a curbei este $(\Gamma):\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t\end{cases}$, $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

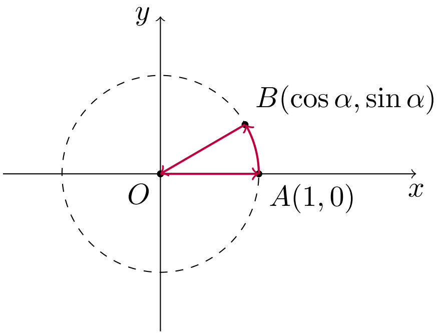
Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2 t+12\sin t\cos t\right)\cdot 3\cos t dt \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(\sin t)'dt - 36\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(\cos t)'dt \\ &= 12\int_0^1 (1-u^2)du - 12\cos^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 20. \end{aligned}$$

■

4. $\int\limits_{\Gamma} x\dfrac{x+y}{x-y}dx - y\dfrac{x+y}{x-y}dy$, suportul curbei Γ fiind conturul sectorului circular de rază 1 şi deschidere $\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

Soluţie



Notăm cu $\omega = x\dfrac{x+y}{x-y}dx - y\dfrac{x+y}{x-y}dy$. Avem

$$I = \int_{OA}\omega+\int_{AB}\omega+\int_{BO}\omega = \int_{OA}\omega+\int_{AB}\omega-\int_{OB}\omega$$

Parametrizăm curbele

$$(OA):\begin{cases} x=t \\ y=0\end{cases}, t\in[0,1],\ (AB):\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t\end{cases}, t\in[0,\alpha],$$

$$(OB):\begin{cases}x=t\\ y=\tan\alpha\cdot t\end{cases},\ t\in[0,\cos\alpha]$$

$$\int\limits_{OA}\omega=\int\limits_{OA}x\frac{x+y}{x-y}dx-y\frac{x+y}{x-y}dy=\int\limits_0^1 tdt=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{AB}\omega &= \int\limits_{AB}x\frac{x+y}{x-y}dx-y\frac{x+y}{x-y}dy=-\int\limits_0^\alpha 2\sin t\cos t\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}dt\\ &= -\int\limits_0^\alpha \sin 2t\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{(\cos t-\sin t)^2}dt=-\int\limits_0^\alpha \sin 2t\frac{\cos 2t}{1-\sin 2t}dt\\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha \frac{\sin 2t}{1-\sin 2t}(\sin 2t)'dt=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sin 2\alpha}\frac{u}{1-u}du\\ &= \frac{1}{2}\left[u+\ln|u-1|\right]\Big|_0^{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2}\left[\sin 2\alpha+\ln(1-\sin 2\alpha)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{OB}\omega &= \int\limits_{OB}x\frac{x+y}{x-y}dx-y\frac{x+y}{x-y}dy=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}(1-\tan^2\alpha)\int\limits_0^{\cos\alpha}tdt\\ &= (1+\tan\alpha)^2\frac{\cos^2\alpha}{2}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{2}=\frac{1+\sin 2\alpha}{2}\end{aligned}$$

Prin urmare

$$I=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\sin 2\alpha+\ln(1-\sin 2\alpha)\right]-\frac{1+\sin 2\alpha}{2}=\ln\sqrt{1-\sin 2\alpha}.$$

■

Dacă Γ este o curbă netedă cu parametrizarea $(\Gamma):\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$, $t\in[a,b]$ şi $P,Q,R:U\subset\mathbb{R}^3$ sunt funcţii continue, U fiind o mulţime deschisă ce conţine suportul curbei Γ, atunci

$$\int\limits_\Gamma P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$
$$=\int\limits_a^b\left[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\right]dt$$

Exerciţiul 4. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa a doua:

1. $I = \int\limits_{\Gamma} xdx + xydy + xyzdz$, $(\Gamma): \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}, \ t \in [0,1]$

Soluţie Avem

$$I = \int_0^1 \left(e^{2t} - e^{-t} + 2t\right) dt = \left(\frac{e^{2t}}{2} + e^{-t} + t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2} + \frac{1}{e}.$$

■

2. $\int\limits_{\Gamma} xdx + ydy + zdz$, $(\Gamma): \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ z = ct; \end{cases}, \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Soluţie Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a\cos t(-a\sin t) + b\sin t \cdot b\cos t + ct \cdot c\right] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{b^2 - a^2}{2}\sin 2t + c^2 t\right] dt = \left[\frac{b^2 - a^2}{2}\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right) + c^2\frac{t^2}{2}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{c^2\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

■