Seminar Analiză Matematică

Polinomul şi formula lui Taylor

Exerciţiul 1. Să se scrie polinomul Taylor de ordinul 3 în punctul $a = 1$ şi formula lui Taylor cu restul sub forma Lagrange pentru funcţia $f(x) = e^{-x^2}$.

Soluţie Polinomul lui Taylor de ordinul 3 al funcţiei f în punctul $a = 1$ este:

$$T_{3,f,1}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

Derivatele funcţiei sunt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2}; \\ f''(x) &= 2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}; \\ f'''(x) &= 4x\left(3-2x^2\right)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Avem

$$f(1) = \frac{1}{e},\ f'(1) = -\frac{2}{e},\ f''(1) = \frac{2}{e},\ f'''(1) = \frac{4}{e}$$

şi prin urmare

$$T_{3,f,1}(x) = \frac{1}{e}\left[1 - 2(x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3\right].$$

Restul polinomului Taylor sub forma Lagrange este

$$R_{3,f,1}(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4,$$

unde ξ este cuprins între x şi 1. Derivata de ordinul 4 a funcţiei este

$$f^{(4)}(x) = 4\left(3 - 12x^2 + 4x^4\right)e^{-x^2}.$$

Formula lui Taylor de ordinul 3 cu restul sub forma Lagrange este

$$f(x) = T_{3,f,1}(x) + R_{3,f,1}(x),$$

deci

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= \frac{1}{e}\left[1 - 2(x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3\right] \\ &\quad + \frac{3 - 12\xi^2 + 4\xi^4}{6e^{\xi^2}}(x-1)^4 \end{aligned}$$

■

Exercițiul 2. Să se scrie polinomul Taylor de ordinul 3 în punctul $a = 0$ şi formula lui Taylor cu restul sub forma Lagrange pentru funcţia $f(x) = \arctan x$.

Soluţie Polinomul lui Taylor de ordinul 3 al funcţiei f în punctul $a = 0$ este:

$$T_{3,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Derivatele funcţiei sunt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}; \\ f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \\ f'''(x) &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Avem

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -2$$

şi prin urmare

$$T_{3,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3}.$$

Restul polinomului Taylor sub forma lui Lagrange este

$$R_{3,f,0}(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

unde ξ este cuprins între x şi 0. Derivata de ordinul 4 a funcţiei este

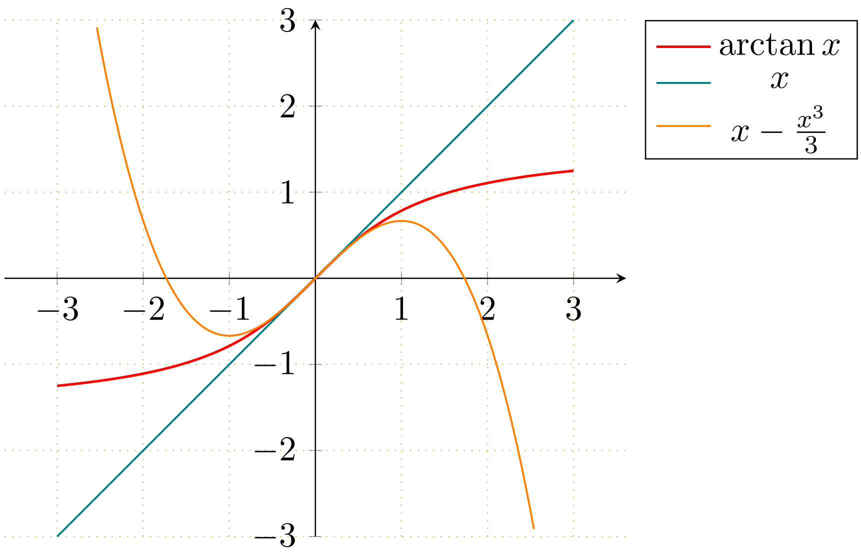
$$f^{(4)}(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

Formula lui Taylor de ordinul 3 cu restul sub forma Lagrange este

$$f(x) = T_{3,f,0}(x) + R_{3,f,0}(x)$$

deci

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{\xi(1-\xi^2)}{(1+\xi^2)^4} \cdot x^4$$



∎

Exerciţiul 3. Să se dezvolte funcţia $f(x) = 3x^3 + 25x^2 + 64x + 77$ după puterile binomului $x + 3$.

Soluţie Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{3,f,-3}(x) \\ &= f(-3) + \frac{f'(-3)}{1!}(x+3) + \frac{f''(-3)}{2!}(x+3)^2 + \frac{f'''(-3)}{3!}(x+3)^3. \end{aligned}$$

Derivatele funcţiei sunt

$$f'(x) = 9x^2 + 50x + 64,\ f''(x) = 18x + 50,\ f'''(x) = 18$$

şi

$$f(-3) = 29,\ f'(-3) = -5,\ f''(-3) = -4,\ f'''(-3) = 18.$$

Obţinem

$$f(x) = 29 - 5(x+3) - 2(x+3)^2 + 3(x+3)^3.$$

∎

Exerciţiul 4. Să se aproximeze $\sqrt[3]{e}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-3}.

Soluţie Considerăm funcţia $f(x) = e^x$. Scriem formula lui Taylor de ordinul n în punctul 0 cu restul sub forma lui Lagrange:

$$f(x) = T_{n,f,0}(x) + R_{n,f,0}(x).$$

Avem $f^{(k)}(x) = e^x$, $(\forall)k \in \mathbb{N}$. Obţinem

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

unde ξ este cuprins între x şi 0. Avem

$$\sqrt[3]{e} = 1 + \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot 3^n} + \frac{e^\xi}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}},\ \xi \in \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Eroarea absolută în aproximarea

$$\sqrt[3]{e} \cong 1 + \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot 3^n}$$

este

$$\begin{aligned} E &= \left| \sqrt[3]{e} - \left(1 + \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot 3^n}\right) \right| \\ &= \frac{e^\xi}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Rămâne să determinăm $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $E < 10^{-3}$. Avem

$$E = \frac{e^\xi}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}} < \frac{e}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)! \cdot 3^n} < 10^{-3},\ (\forall) n \geq 4.$$

Pentru $n = 4$ obţinem

$$\sqrt[3]{e} \cong 1 + \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 3^2} + \frac{1}{3! \cdot 3^3} + \frac{1}{4! \cdot 3^4} = 1,395576\ldots.$$

■

Exerciţiul 5. Să se aproximeze $\ln \frac{6}{7}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-3}

Soluţie

Considerăm funcţia $f(x) = \ln(1+x)$. Scriem formula lui Taylor de ordinul n în punctul 0 cu restul sub forma lui Lagrange:

$$f(x) = T_{n,f,0}(x) + R_{n,f,0}(x).$$

Avem $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$, $f^{(3)} = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$. Prin metoda inducţiei complete se arată că

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k},\ (\forall) k \in \mathbb{N}^*.$$

Obţinem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1},$$

unde ξ este cuprins între x şi 0. Avem

$$\begin{aligned} \ln \frac{6}{7} &= \ln\left(1 + \frac{-1}{7}\right) \\ &= -\frac{1}{7} - \frac{1}{2 \cdot 7^2} - \cdots - \frac{1}{n \cdot 7^n} - \frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1} \cdot 7^{n+1}},\ \xi \in \left(-\frac{1}{7}, 0\right). \end{aligned}$$

Eroarea absolută în aproximarea

$$\ln\frac{6}{7} \cong -\frac{1}{7} - \frac{1}{2\cdot 7^2} - \cdots - \frac{1}{n\cdot 7^n}$$

este

$$E = \left| -\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}\cdot 7^{n+1}} \right| = \frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}\cdot 7^{n+1}}.$$

Rămâne să determinăm $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $E < 10^{-3}$. Avem

$$E < \frac{1}{(n+1)\left(1-\frac{1}{7}\right)^{n+1}\cdot 7^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)\cdot 6^{n+1}} < 10^{-3},\ (\forall)n \geq 3.$$

Pentru $n = 3$ obţinem

$$\ln\frac{6}{7} \cong -\frac{1}{7} - \frac{1}{2\cdot 7^2} - \frac{1}{3\cdot 7^3} = -0,154033\ldots.$$

■

Exerciţiul 6. Să se determine numărul natural n astfel încât polinomul lui Taylor de ordinul n al funcţiei $f(x) = \sqrt{1+x}$ în punctul 0 să difere de $f(x)$, pe intervalul $[0,1]$, cu mai puţin de $\frac{1}{16}$.

Soluţie Avem de determinat $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f(x) - T_{n,f,0}(x)| < \frac{1}{16},\ (\forall)x \in [0,1].$$

Din formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange avem

$$f(x) - T_{n,f,0}(x) = R_{n,f,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

unde ξ este cuprins între 0 şi x. Avem

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1},\ f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-2}.$$

Prin metoda inducţiei complete se arată că

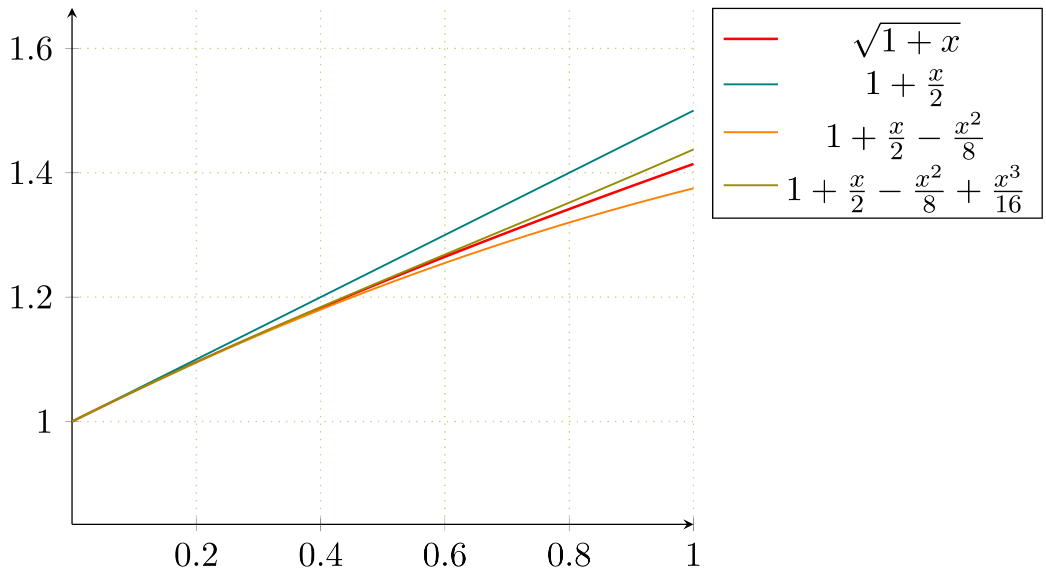
$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n},\ (\forall)n \geq 2. \end{aligned}$$

Atunci, pentru $x \in [0,1]$ avem

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_{n,f,0}(x)| &= |R_{n,f,0}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \\
&= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}(1+\xi)^{\frac{1}{2}-n-1}x^{n+1} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{\frac{1}{2}+n}} \\
&< \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)}.
\end{aligned}$$

Şirul cu termenul general $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este strict descrescător deoarece $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2n+1}{2n+4} < 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $x_n \leq x_2 = \dfrac{1}{16}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi prin urmare, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, avem

$$|f(x) - T_{n,f,0}(x)| < \frac{1}{16},\ (\forall) x \in [0,1].$$



■

Exerciţiul 7. Să se arate că:

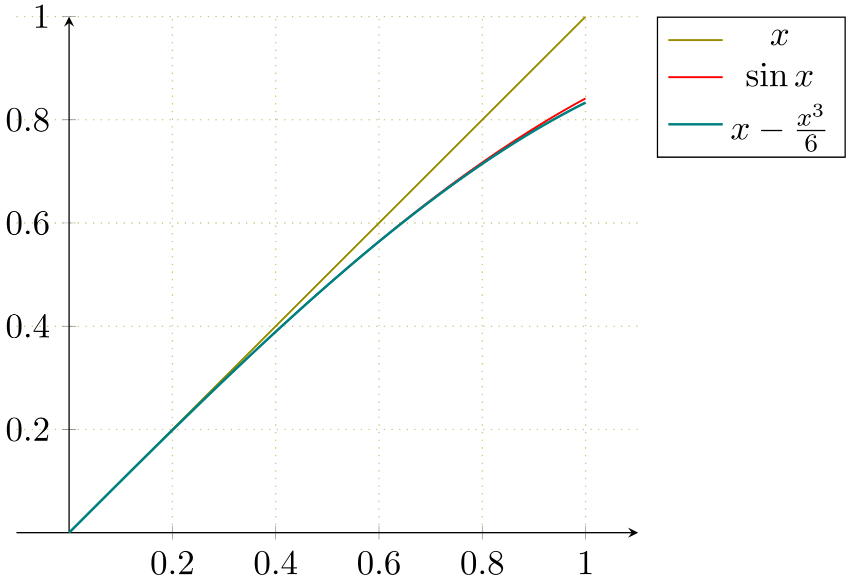
$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x,\ (\forall) x \in (0,1).$$

Soluţie Considerăm funcţia $f(x) = \sin x$. Pentru $x \in (0, 1)$ avem

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{1,f,0}(x) + R_{1,f,0}(x) \\ &= \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\sin \xi}{2!}x^2 \\ &= x - \frac{\sin \xi}{2!}x^2 < x, \ \text{ unde } \xi \in (0, x) \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{3,f,0}(x) + R_{3,f,0}(x) \\ &= \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin \eta}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin \eta}{4!}x^4 \\ &> x - \frac{x^3}{6}, \ \text{ unde } \eta \in (0, x) \end{aligned}$$



■