Seminar Analiză Matematică

Şiruri de funcţii

Exerciţiul 1. Să se studieze convergenţa punctuală (simplă) şi convergenţa uniformă pentru următoarele şiruri de funcţii:

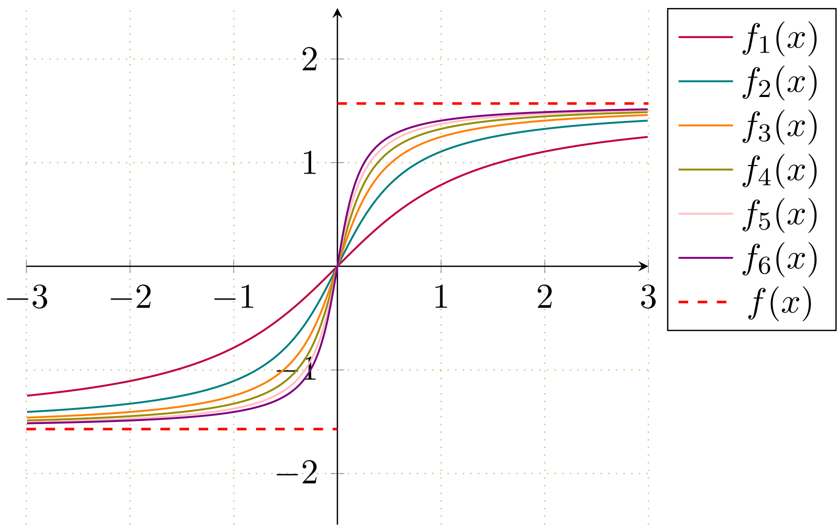
1. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan nx$, $n \in \mathbb{N}^*$

   Soluţie Pentru convergenţa punctuală, fixăm $x \in \mathbb{R}$ şi studiem convergenţa şirului numeric $(f_n(x))_n$. Avem următoarele situaţii:

   - dacă $x > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan nx = \frac{\pi}{2}$;
   - dacă $x = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan 0 = 0$;
   - dacă $x < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan nx = -\frac{\pi}{2}$.

   Astfel, şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge punctual (simplu) pe $\mathbb{R}$ către funcţia

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{, dacă } x > 0; \\ 0 & \text{, dacă } x = 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{, dacă } x < 0. \end{cases}$$



Dacă şirul de funcţii $(f_n)_n$ ar fi uniform convergent către funcţia f pe $\mathbb{R}$, cum f_n este continuă pe $\mathbb{R}$ $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$, din teorema de transfer a continuităţii, obţinem că f este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, ceea ce este absurd. Rămâne că şirul de funcţii $(f_n)_n$ nu converge uniform către funcţia f pe $\mathbb{R}$. ■

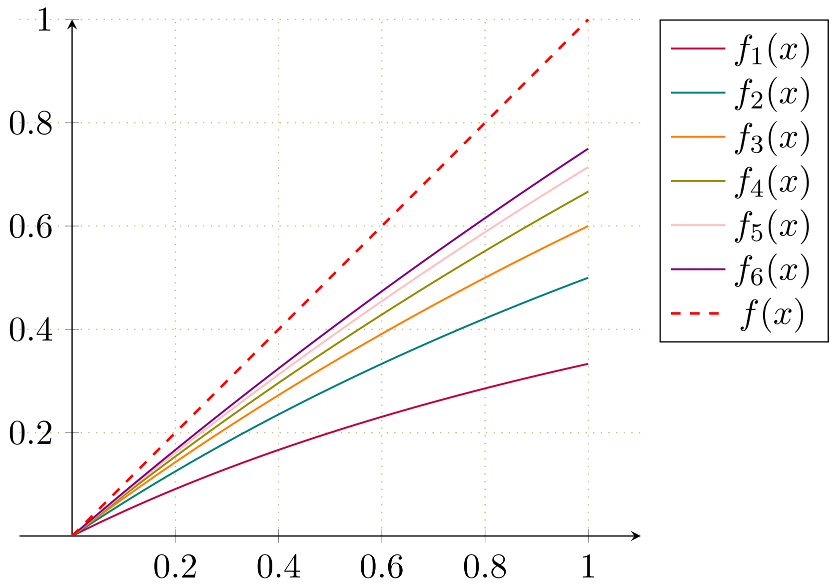
2. $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$

Soluţie Pentru convergenţa punctuală, fixăm $x \in [0,1]$ şi studiem convergenţa şirului numeric $(f_n(x))_n$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x} = x$$

şi cum x a fost ales arbitrar, rezultă că şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge punctual (simplu) pe $[0,1]$ către funcţia

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x.$$



Convergenţa uniformă a şirului de funcţii f_n pe $[0,1]$ este echivalentă cu

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Notăm

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{x(1+x)}{1+n+x}.$$

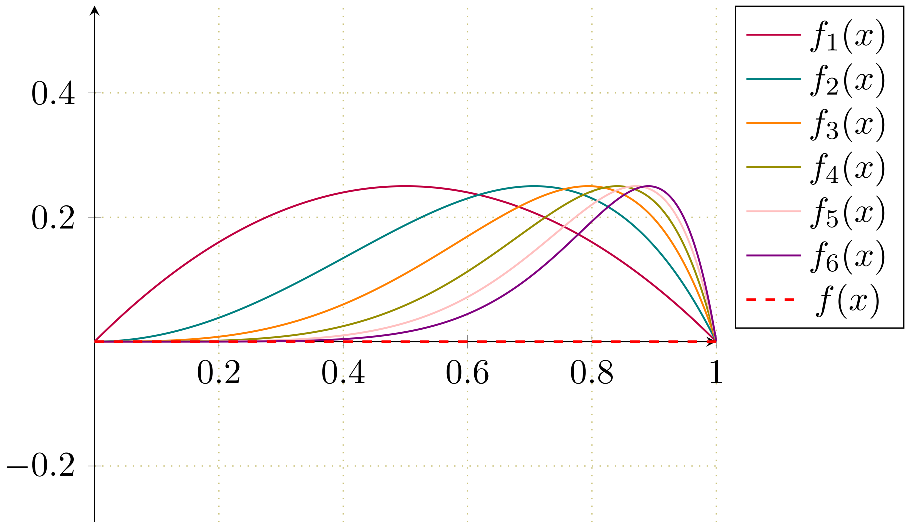
Deoarece $g_n'(x) = \frac{1+n+2x+2nx+x^2}{(1+n+x)^2} > 0$, $(\forall)x \in [0,1]$, rezultă că funcţia g_n este strict crescătoare pe $[0,1]$ şi atunci

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n(1) = \frac{2}{2+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

prin urmare $f_n \xrightarrow{c.u.} f_{|_{[0,1]}}$. ■

3. $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$

Soluţie Studiem convergenţa punctuală. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $(\forall)x \in [0,1]$, rezultă că $f_n \xrightarrow{\text{c. p.}} f_{|_{[0,1]}}$, unde $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$.



Studiem acum convergenţa uniformă. Avem

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n(1-x^n).$$

Studiem variaţia funcţiei pe $[0,1]$. $f_n'(x) = nx^{n-1}(1-2x^n)$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

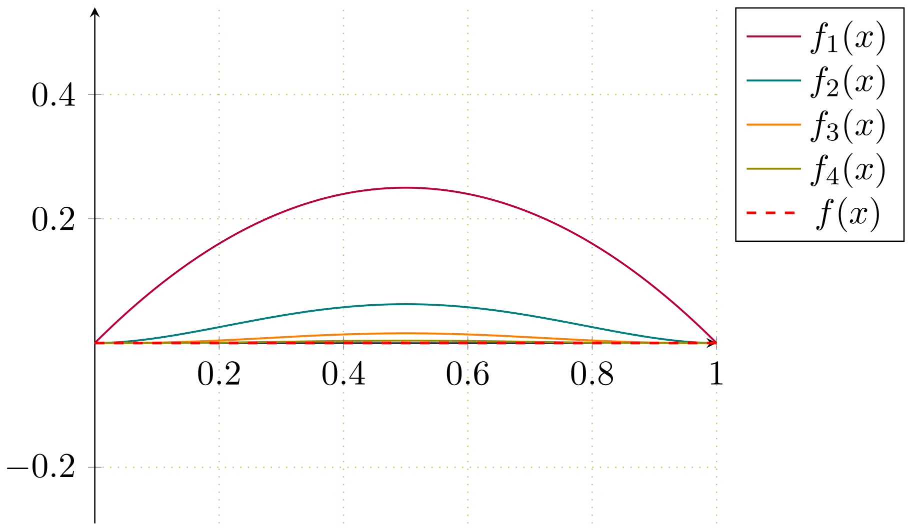
Atunci

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = \frac{1}{4} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0,$$

prin urmare şirul de funcţii $(f_n)_n$ nu converge uniform către funcţia f pe $[0,1]$. ■

4. $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$

Soluţie Studiem convergenţa punctuală. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $(\forall)x \in [0,1]$, rezultă că $f_n \xrightarrow{\text{c. p.}} f_{|_{[0,1]}}$, unde $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$.



Studiem acum convergenţa uniformă. Avem

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n(1-x)^n.$$

Studiem variaţia funcţiei pe $[0,1]$. $f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4^n}$	$\searrow$	0

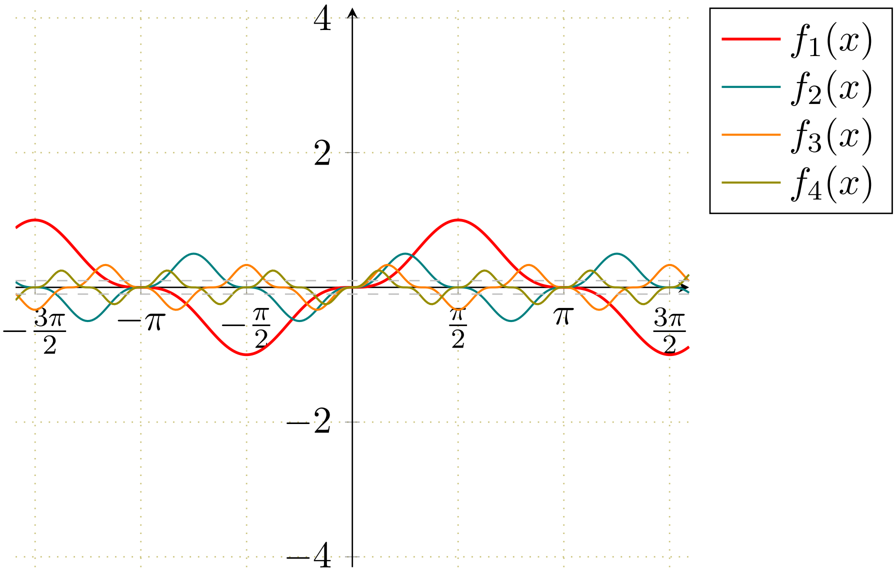
Atunci

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = \frac{1}{4^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

prin urmare şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge uniform către funcţia f pe $[0,1]$. ■

5. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin^3 nx}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

   Soluţie Studiem convergenţa punctuală. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f_n \overset{\text{c. p.}}{\longrightarrow} f_{|\mathbb{R}}$, unde $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.



Studiem acum convergenţa uniformă. Avem

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\left|\sin^3 nx\right|}{n} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

prin urmare şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge uniform către funcţia f pe $\mathbb{R}$.

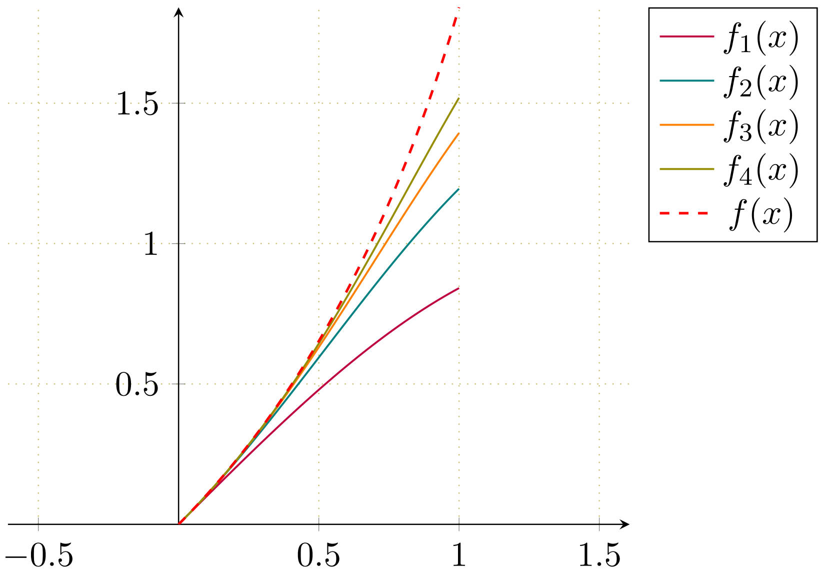
■

Exerciţiul 2. Să se arate că şirul de funcţii

$$f_n : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \cdots + \frac{1}{n}\sin^n x,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, este uniform convergent pe $[0, a]$ şi să se determine limita acestuia.

Soluţie



Avem $f_n(0) = 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, prin urmare şirul numeric $(f_n(0))_n$ este convergent.

Funcţiile f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sunt derivabile pe $[0, a]$ şi

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \cos x + \sin x \cos x + \cdot + \sin^{n-1} x \cos x \\ &= \cos x \cdot \frac{1 - \sin^n x}{1 - \sin x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\cos x}{1 - \sin x}, \ (\forall) x \in [0, a], \end{aligned}$$

prin urmare $f_n' \xrightarrow{\text{c. p.}} g_{|[0,a]}$, unde $g(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$, $x \in [0, a]$.
Studiem convergenţa uniformă a şirului derivatelor. Avem

$$\left| f_n'(x) - g(x) \right| = \frac{\cos x \cdot \sin^n x}{1 - \sin x} \le \frac{\sin^n a}{1 - \sin a}, \ (\forall) x \in [0, a].$$

Atunci

$$\sup_{x\in[0,a]} \left| f_n'(x) - g(x) \right| = \sup_{x\in[0,a]} \frac{\cos x \cdot \sin^n x}{1 - \sin x} \le \frac{\sin^n a}{1 - \sin a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

prin urmare şirul de funcţii $(f_n')_n$ converge uniform către funcţia g pe $[0, a]$. Conform teoremei de transfer a derivabilităţii, şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge uniform pe $[0, a]$ către o funcţie derivabilă f şi avem $f' = g$. Atunci

$$\begin{aligned} f(x) &= \int g(x) dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx \\ &= -\int \frac{(1 - \sin x)'}{1 - \sin x} dx = -\ln(1 - \sin x) + C. \end{aligned}$$

Pentru $x = 0$ avem $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ şi $f(0) = C$, deci $C = 0$.

În concluzie, şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge uniform pe $[0, a]$ către funcţia $f(x) = -\ln(1 - \sin x)$, $x \in [0, a]$. ■

Exerciţiul 3. Considerăm şirul de funcţii

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

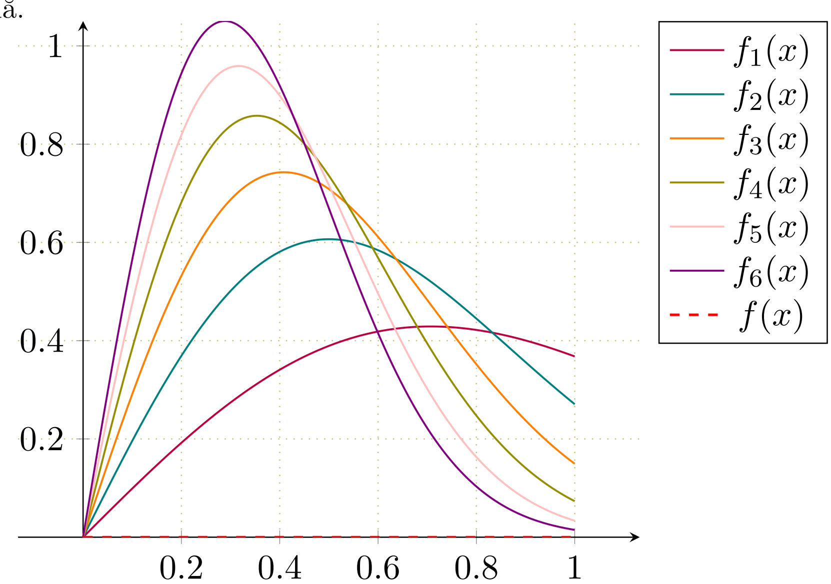
Soluţie Avem

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2e^n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

şi

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Remarcăm că nu avem egalitate între $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$ şi $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$ deoarece şirul de funcţii $(f_n)_n$ nu este uniform convergent pe $[0,1]$ către funcţia identic nulă.



■