Capitolul 1 Mulţimea numerelor reale

Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Notaţie $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ◁

Principiul inducţiei complete (principiul recurenţei)

Fie $P(n)$ o proprietate care se referă la numărul natural nenul n. Dacă

1. $P(1)$ este adevărată,
2. $P(n)$ adevărată $\Longrightarrow P(n+1)$ adevărată, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$,

atunci $P(n)$ este adevărată, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Mulţimea numerelor intregi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | \, p,\, q \in \mathbb{Z},\, q \neq 0 \right\}$.

Remarcă Nu există un număr raţional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Într-adevăr, dacă presupunem că există $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, unde p şi q nu au factori comuni, astfel încât $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, rezultă că $p^2 = 2q^2$ de unde

$$2 | p^2 \Longrightarrow 2 | p \Longrightarrow 4 | p^2 = 2q^2 \Longrightarrow 2 | q^2 \Longrightarrow 2 | q$$

deci 2 este factor comun pentru p şi q ceea ce este absurd.

Mulţimea numerelor reale, notată prin $\mathbb{R}$, este o extensie a mulţimii numerelor raţionale. Pe mulţimea numerelor reale avem definite două operaţii algebrice (adunarea "$+$" şi înmulţirea "$\cdot$" ce extind operaţiile din $\mathbb{Q}$) şi o relaţie de ordine $\leq$ pentru care se verifică următoarele axiome.

Axiomele adunării şi înmulţirii

1. $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R} : \ (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitatea adunării);
2. $(\forall) x, y \in \mathbb{R} : \ x + y = y + x$ (comutativitatea adunării);
3. $(\exists) 0 \in \mathbb{R},\ (\forall) x \in \mathbb{R} : \ x + 0 = x$ (numărul 0 este element neutru pentru adunare);
4. $(\forall) x \in \mathbb{R},\ (\exists) y \in \mathbb{R} : \ x + y = 0$; y se notează prin $-x$ (orice număr real are un opus);
5. $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R} : \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (asociativitatea înmulţirii);
6. $(\forall) x, y \in \mathbb{R} : \ x \cdot y = y \cdot x$ (comutativitatea înmulţirii);
7. $(\exists) 1 \in \mathbb{R}\, (1 \neq 0),\ (\forall) x \in \mathbb{R} : \ x \cdot 1 = x$ (numărul 1 este element neutru pentru înmulţire);
8. $(\forall) x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ (\exists) u \in \mathbb{R} : \ x \cdot u = 1$; u se notează prin x^{-1} sau $\frac{1}{x}$ (orice număr real nenul are un invers);
9. $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R} : \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (înmulţirea este distributivă faţă de adunare);

Axiomele de ordine

1. $(\forall) x \in \mathbb{R} : \ x \leq x$ (relaţia $\leq$ este reflexivă);
2. $(\forall) x, y \in \mathbb{R} : \ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (relaţia $\leq$ este antisimetrică);
3. $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R} : \ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (relaţia $\leq$ este tranzitivă);
4. $(\forall) x, y \in \mathbb{R} : \ x \leq y \vee y \leq x$ (relaţia $\leq$ este totală);
5. $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (compatibilitatea relaţiei $\leq$ cu adunarea);

6. $(\forall)x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ (compatibilitatea relaţiei $\leq$ cu înmulţirea).

Remarcă Notaţii:

$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$;

$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$;

$x > y \Leftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y$.

Axioma marginii superioare

Definiţie 1.1

O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte majorată sau mărginită superior dacă

$$(\exists)x \in \mathbb{R},\ (\forall)a \in A :\ a \leq x;$$

x se va numi majorant al mulţimii A.

Definiţie 1.2

O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte minorată sau mărginită inferior dacă

$$(\exists)y \in \mathbb{R},\ (\forall)a \in A :\ y \leq a;$$

y se va numi minorant al mulţimii A.

Definiţie 1.3

Fie $A \subset \mathbb{R}$.

Dacă $x \in A$ este un majorant al mulţimii A, atunci spunem că mulţimea A are un cel mai mare element şi anume pe x; notăm $x = \max A$ (x maximul mulţimii A).

Dacă $y \in A$ este un minorant al mulţimii A, atunci spunem că mulţimea A are un cel mai mic element şi anume pe y; notăm $y = \min A$ (y minimul mulţimii A).

Definiţie 1.4

Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Dacă mulţimea A este majorată, atunci cel mai mic dintre majoranţi se numeşte marginea superioară sau supremumul mulţimii A şi se notează prin $\sup A$.

Dacă mulţimea A este minorată, atunci cel mai mare dintre minoranţi se numeşte marginea inferioară sau infimumul mulţimii A şi se notează prin $\inf A$.

Axioma marginii superioare

Orice mulţime nevidă majorată $A \subset \mathbb{R}$ admite supremum.

Propoziţie 1.1. Caracterizarea supremumului şi infimumului

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi mărginită (majorată şi minorată). Atunci

1. $$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall)a \in A : a \leq s \\ (\forall)\varepsilon > 0, (\exists)a_\varepsilon \in A : s - \varepsilon < a_\varepsilon \end{cases}$$

2. $i = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall) a \in A : i \leq a \\ (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) b_\varepsilon \in A : b_\varepsilon < i + \varepsilon \end{cases}$

◇

Definiţie 1.5

Un număr real care nu este număr raţional se numeşte iraţional.

Un număr real care este soluţie a unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi intregi ($a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$) se numeşte număr algebric.

Un număr real care nu este algebric se numeşte transcendent.

◇

Exemplul 1.1 $\sqrt{2}$ este un număr algebric iraţional; numerele e şi π sunt transcendente.

Proprietatea de densitate a mulţimii $\mathbb{Q}$ şi a mulţimii $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$: Între oricare două numere reale distincte există cel puţin un număr raţional si cel puţin un număr iraţional.

Proprietatea lui Arhimede:

$$(\forall) x > 0,\ (\forall) y \in \mathbb{R}, (\exists) n \in \mathbb{N} : nx > y;$$

în particular, pentru $x = 1$ avem: $(\forall) y \in \mathbb{R}, (\exists) n \in \mathbb{N} : n > y$.

Partea întreagă

$$(\forall) x \in \mathbb{R}, (\exists!) k \in \mathbb{Z} : k \leq x < k + 1.$$

k se notează cu $[x]$ şi se numeşte partea întreagă a numărului real x.

Exemplul 1.2 $[2, 1] = 2$, $[\pi] = 3$, $[-1, 23] = -2$.

Definiţie 1.6. Modulul unui număr real

Pentru $x \in \mathbb{R}$ definim $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0; \\ -x & , x < 0. \end{cases}$

◇

Proprietăţi:

(i) $|x| = \max \{x, -x\}$;

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(iv) $|xy| = |x| \cdot |y|$;

(v) $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$, unde $c > 0$.

Definiţie 1.7. Puteri cu exponent real

Pentru $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, definim

$$x^0 = 1 (x \neq 0) \text{ şi } x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ ori}} (n \geq 1).$$

Pentru $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, definim

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x > 0$, *definim*

$$\sqrt[n]{x} = \sup\{a | a > 0 \wedge a^n < x\} \text{ şi } \sqrt[n]{0} = 0.$$

Dacă n *este impar,* $x < 0$, *definim* $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$.

Pentru $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x > 0$, *definim*

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$, *definim*

$$x^\alpha = \sup\{x^q | q \in \mathbb{Q} \wedge q < \alpha\}$$

în cazul $x > 1$, $1^\alpha = 1$ *şi*

$$x^\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$$

pentru $0 < x < 1$.

◇

Modelul geometric a mulţimii $\mathbb{R}$ este o dreaptă numită axa reală.

Mulţimea numerelor reale extinsă

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ unde $-\infty$ şi ∞ verifică

$-\infty < \infty; -\infty < x < \infty, (\forall)x \in \mathbb{R};$

$-\infty + x = -\infty; \infty + x = \infty; -\infty + (-\infty) = -\infty; \infty + \infty = \infty;$

$(-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty & , x > 0 \\ \infty & , x < 0 \end{cases}; \infty \cdot x = \begin{cases} \infty & , x > 0 \\ -\infty & , x < 0 \end{cases};$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty \cdot \infty = \infty; (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty;$

$\infty^\infty = \infty; \infty^x = \begin{cases} \infty & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}; x^\infty = \begin{cases} \infty & , x > 1 \\ 0 & , 0 < x < 1 \end{cases};$

Operaţii fără sens: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, ∞^0, 1^∞, 0^0.

De exemplu, dacă presupunem că $(\exists)a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\infty - \infty = a$, atunci $a + 1 = \infty - \infty + 1 = \infty - \infty = a$ ceea ce este absurd.

Definiţie 1.8. Intervale

O mulţime $I \subset \mathbb{R}$ *se numeşte interval dacă*

$$(\forall)a, b \in I, (\forall)c \in \mathbb{R} : a < c < b \Rightarrow c \in I.$$

◇

Exemple:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}; (a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\};$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}; [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\};$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}; (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\};$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}; [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\};$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty); [a, a] = \{a\}; (a, a) = \emptyset.$