Relații

October 6, 2020

Fie A și B mulțimi nevide.

Definition

Numim **relație binară** de la A la B un triplet $R = (A, B, G_R)$, unde G_R este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Denumiri:
A=domeniul relației
B=codomeniul relației
G_R=graficul relației

Dacă $A = B$, relația R se numește relație binară pe A. De multe ori se identifică relația cu graficul ei, atunci când domeniul și codomeniul se subînțeleg.

Example

$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1)\}$ este o relație de la $A = \{a, b, c, d\}$ la $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Relația de egalitate pe mulțimea numerelor naturale **N**, a numerelor întregi **Z**, raționale **Q**, reale **R**.
b) Relația de divizibilitate: $R = (\mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{G_R})$, definită prin $G_R = \{(a, ka)/a \in \mathbf{Z}^*, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\}$.
c) Relația de asociere în divizibilitate pe **Z**

$$G_\sim = \{(a, a), (a, -a) | a \in \mathbf{Z}^*\}.$$

d) Relația de incluziune pe $P(A)$: $G_\subseteq = \{(B, A) | B \subseteq A\}$.
e) Relația de congruență modulo n pe **Z**:

$$G_R = \{(x, x + nk) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} | \mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\}$$

f) Relația totală pe mulțimea A, $G_R = A \times A$.
g) Relația $G_R = \{(a, a) | a \in A\}$, numită diagonala mulțimii A.

Date fiind două relații binare $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq C \times D$, prin compunerea $S \circ R$ înțelegem o nouă relație, de la A la D definită prin

$$S \circ R = \{(a, d) | (\exists) x \in B \cap C, (a, x) \in R, (x, d) \in S\}.$$

Desigur această relație poate fi și mulțimea vidă, dacă B și C sunt disjuncte. Dată fiind relația R de la A la B, relația inversă este R^{-1} de la B la A definită prin:

$$R^{-1} = \{(x, y) \in B \times A | (y, x) \in A \times B\}.$$

Example

Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{2, 3, 4, 5\}$ și relațiile $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$:
$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 4)\}$,
$S = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 5)\}$

$$R \circ S = \{(x, y) \in B \times B | (\exists) z \in C \cap A, (x, z) \in S, (z, y) \in R\} =$$

$$= \{(1, 3), (1, 1), (3, 4), (2, 4)\}$$

$$S \circ R = \{(x, y) \in A \times C | (\exists) z \in B, (x, z) \in R, (z, y) \in S\} =$$

$$= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (2, 2)\}.$$

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (4, 3)\} \subseteq B \times A.$$

Fie $x, y \in A$ și $R \subset A \times A$. Daca $(x, y) \in R$ spunem că x este în relația R cu y și mai scriem xRy.
O relație binară $R \subset A \times A$ se numește:
a) *reflexivă* dacă xRx, $(\forall) x \in A$;
b) *simetrică* dacă xRy implică yRx;
c) *tranzitivă* dacă xRy și yRz implică xRz;
d) *antisimetrică* dacă xRy și yRx implică $x = y$.

Definition

O relație reflexivă, tranzitivă și simetrică se numește **relație de echivalență**.
O relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică se numește **relație de ordine**.

Relațiile de echivalență se notează de obicei cu $\approx$, $\equiv$, iar cele de ordine $\leq$.

Example

Relația de egalitate pe orice mulțime este relație de echivalență.
Relațiile de divizibilitate în **N**, de incluziune pe $P(A)$ sunt relații de ordine.
Relația de "'mai mic sau egal"' pe o mulțimile de numere: **N**, **Z**, **Q**, **R**, este o relație de ordine.
Relația de divizibilitate pe **Z** nu este o relație de ordine deoarece nu este antisimetrică, dar relația de asociere în divizibilitate este relație de echivlență pe **Z**.

Pe mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se dau relațiile $R_i \subset A \times A$, $i = \overline{1, 6}$:
Analizați ce proprietăți are fiecare.

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3), (1,3), (3,4), (1,4)\}$,
$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$,
$R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (4,3), (3,4)\}$,
$R_4 = \{(1,1), (2,2), (4,4), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$,
$R_5 =$
$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,1), (4,3), (3,4), (1,4), (4,1)\}$,
$R_6 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$,

Fie $\approx$ o relație de echivalență pe mulțimea A. Pentru orice $a \in A$, notăm $\widehat{a}$ mulțimea

$$\widehat{a} = \{x \in A / x \approx a\},$$

și o numim *clasa de echivalență a elementului a*. De remarcat faptul că $a \approx x$ este echivalent cu $\widehat{a} = \widehat{x}$. Întradevăr, dacă $a \approx x$, atunci orice element $y \in \widehat{a}$ va verifica și $y \approx x$ din tranzitivitatea și simetria relației $\approx$.

Mulțimea tuturor claselor de echivalență se numește *mulțimea cât* și se notează $A/_{\approx}$.

Example

Relația de congruență modulo $n \in \mathbf{N}$ se poate defini astfel: Fie $x, y \in \mathbf{Z}$. Prin definiție,

$$x \equiv y(mod n) \Leftrightarrow n \,|\, (x - y)$$

Este o relație de echivalență, clasele de echivalență se numesc clase de resturi modulo n. Mullțimea cât se notează $\mathbf{Z}_n$. Folosind teorema împărțirii cu rest în $\mathbf{Z}$ se arată că $\mathbf{Z}_n$ are n elemente, $\mathbf{Z}_n = \{\widehat{0}, \widehat{1}, ..., \widehat{n-1}\}$.

Definition

Fie A o mulțime nevidă. Numim **partiție** a mulțimii A o familie de submulțimi nevide și disjuncte ale lui A, a căror reunuiune este A, adică o submulțime $\{M_i\}_{i\in I}$ a mulțimii părților lui A, $P(A)$, astfel încât:

- $M_i \neq \Phi, (\forall) i \in I,$
- $Mi \cap M_j = \Phi, (\forall) i \neq j, i, j \in I,$
- $A = \cup_{i\in I} M_i.$

Theorem

O relație de echivalență pe o mulțime determină o partiție a acesteia și reciproc.

1. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ și $R \subset A \times A$, $S \subset A \times B$ relațiile date prin
$R = \{(1, 2), (1, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$,
$S = \{(1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5), (4, 2)\}$. Scrieți relațiile R^{-1}, S^{-1}, $R \circ R$, $R \circ S$, $S \circ R$, $S \circ S$.

2. Scrieți toate parțițiile mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$. Demonstrați că o mulțime cu 5 elemente admite 52 de partiții.

3. O relație pe A se numește circulară dacă $(\forall) x, y, z \in A$ astfel încât xRy și yRz atunci zRx. Demonstrați că o relație reflexivă și circulară este o relație de echivalență.

4. Să se arate că dacă $R, S \subseteq A \times A$ sunt relații de echivalență, atunci $R \circ S$ și $S \circ R$ sunt relații de echivalență dacă și numai dacă $R \circ S = S \circ R$.

5. Demonstrați că relațiile binare $R_1, R_2, R_3, R4$ definite pe mulțimea numerelor complexe prin

$$zR_1w \Leftrightarrow Re(z) = Re(w),$$

$$zR_2w \Leftrightarrow Im(z) = Im(w),$$

$$zR_3w \Leftrightarrow arg(z) = arg(w) sau z = w = 0,$$

$$zR_4w \Leftrightarrow |z| = |w|,$$

sunt relații de echivalență pe mulțimea numerelor complexe, unde am notat prin $Re(z)$, $Im(z)$, $arg(z)$, $|z|$ partea reală, partea imaginară, argumentul, respectiv modulul numărului complex z. Reprezentați grafic clasa de echivalență a elementului $1 + i$ în raport cu fiecare relație.