Seminar Analiză Matematică

Limite; continuitate; derivate parţiale

1 Limite

Exerciţiul 1. Să se calculeze următoarele limite

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$

   Soluţie Avem
   $$\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|\cdot|y|^3}{x^2+y^2} \le \frac{|x|\cdot|y|^3}{y^2} = |x|\cdot|y|\,.$$
   Cum $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x|\cdot|y|) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} = 0.$ ■

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$

   Soluţie Deoarece
   $$\left|\sin\left(x^3+y^3\right)\right| \le \left|x^3+y^3\right| \le |x|^3+|y|^3$$
   avem
   $$\left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \le |x|+|y|\,.$$
   Cum $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} = 0.$
   ■

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} \dfrac{\sin\left(xy^3\right)}{x}$

   Soluţie Ştiind că
   $$\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$
   avem
   $$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{\sin\left(xy^3\right)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{\sin\left(xy^3\right)}{xy^3}\cdot y^3 = 1\cdot(-1)^3 = -1.$$
   ■

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{y}$

Soluţie Avem

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{y} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy}{y\left(\sqrt{1+xy}+1\right)} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x}{\sqrt{1+xy}+1} = 1$$

■

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2+y^2\right)^{\dfrac{1}{|x|+|y|}}$

Soluţie Ştiind că $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\dfrac{1}{u}} = e$, rescriem limita astfel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left(1+x^2+y^2\right)^{\dfrac{1}{x^2+y^2}}\right)^{\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}}.$$

Deoarece

$$0 < \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \le |x|+|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

avem că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$$

şi prin urmare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2+y^2\right)^{\dfrac{1}{|x|+|y|}} = e^0 = 1.$$

■

6. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

Soluţie Din inegalitatea mediilor avem

$$x^2+y^2+z^2 \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

ceea ce pentru $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ implică

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \frac{|xyz|}{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{|xyz|}.$$

Inegalitatea

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \frac{1}{3}\sqrt[3]{|xyz|}$$

rămâne adevărată $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Cum $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sqrt[3]{|xyz|} = 0$, rezultă că

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

■

2 Continuitate

Exercițiul 2. Să se studieze continuitatea următoarelor funcții

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Soluție Funcția este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ fiind o compunere de funcții elementare. Rămâne să studiem continuitatea în origine.
   Deoarece

   $$\left| \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|\sin(xy)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}} = |y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

   avem că

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$$

   ceea ce demonstrează continuitatea funcției în origine.
   Prin urmare funcția este continuă pe $\mathbb{R}^2$. ■

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & , x \neq 0 \\ y & , x = 0 \end{cases}$

   Soluție Funcția f este continuă pe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x \neq 0\}$. Studiem continuitatea în punctele $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$. Avem

   $$\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = 1 \cdot b = b = f(0,b),$$

   deci funcția este continuă în $(0,b)$.
   Prin urmare funcția este continuă pe $\mathbb{R}^2$. ■

3. $f(x,y) = \begin{cases} (xy^3-1)\sin\dfrac{1}{xy^3-1} & , xy^3-1 \neq 0 \\ 0 & , xy^3-1 = 0 \end{cases}$

Soluţie Funcţia f este continuă pe $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\, xy^3-1\neq 0\}$. Studiem continuitatea în punctele (a,b) cu $ab^3-1=0$. Deoarece

$$\left|(xy^3-1)\sin\frac{1}{xy^3-1}\right| \leq \left|xy^3-1\right| \underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow} \left|ab^3-1\right| = 0$$

de unde

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} (xy^3-1)\sin\frac{1}{xy^3-1} = 0 = f(a,b),$$

deci funcţia este continuă în (a,b).
Prin urmare funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^2$. ■

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^4y^2+(x-y)^4} & ,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Soluţie Se poate arăta că funcţia nu are limită în origine. Este însă suficient să calculăm limita de-a lungul primei bisectoare

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

pentru a arăta că funcţia f nu este continuă în origine.
Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. ■

5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-2x^2-y^2)}{2x^2+y^2} & ,\ (x,y)\in D\setminus\{(0,0)\} \\ -1 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

unde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\, 1-2x^2-y^2>0\}$.

Soluţie Funcţia f este continuă pe $D\setminus\{(0,0)\}$. Studiem continuitatea în origine. În baza faptului că $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1-u)}{u} = -1$ avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1-(2x^2+y^2))}{2x^2+y^2} = -1 = f(0,0)$$

ceea ce înseamnă că funcţia este continuă în origine.
Prin urmare funcţia este continuă pe D. ■

6. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-xy+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Soluţie Din faptul că

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

rezultă că funcţia nu este continuă în origine.
Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. ■

7. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y}}{x^2+y^2} & , x \neq 0,\ y \neq 0 \\ \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0,\ y = 0 \\ \sin\frac{1}{y} & , x = 0,\ y \neq 0 \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluţie Funcţia este continuă în orice punct (x,y) cu $x \neq 0$ şi $y \neq 0$. Deoarece $\lim\limits_{u\to 0} u^2 \sin\dfrac{1}{u} = 0$, rezultă că

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = \sin\frac{1}{a} = f(a,0),\ a \neq 0$$

şi

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = \sin\frac{1}{b} = f(0,b),\ b \neq 0$$

deci funcţia este continuă în punctele de forma $(a,0)$ cu $a \neq 0$ şi $(0,b)$ cu $b \neq 0$.
Deoarece pentru şirul $\{(a_n,b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, unde $a_n = b_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n,b_n) = (0,0)$ avem

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n,b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1 \neq f(0,0),$$

înseamnă că funcţia nu este continuă în origine.
Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ■

Exerciţiul 3. Să se arate că următoarele funcţii sunt continue parţial în origine dar nu sunt continue global în acest punct:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluţie Pentru funcţiile parţiale $f(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ şi $f(0,y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$ avem

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0),\ \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$$

ceea ce demonstrează că funcţia este continuă parţial în origine.
Deoarece

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

rezultă că funcţia nu este continuă (global) în origine. ■

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie Pentru funcţiile parţiale $f(x,0)=0$, $x\in\mathbb{R}$ şi $f(0,y)=0$, $y\in\mathbb{R}$ avem

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0=f(0,0),\ \lim_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0)$$

ceea ce demonstrează că funcţia este continuă parţial în origine. Deoarece

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(y^3,y)=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

rezultă că funcţia nu este continuă (global) în origine. ■

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+\ln\left(1+x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Soluţie Pentru funcţiile parţiale

$$f(x,0)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} & ,\ x\neq 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases} \text{ şi } f(0,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+y^2\right)}{y^2} & ,\ y\neq 0\\ 1 & ,\ y=0\end{cases}$$

avem

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=1=f(0,0),\ \lim_{y\to 0} f(0,y)=1=f(0,0)$$

ceea ce demonstrează că funcţia este continuă parţial în origine. Deoarece

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(x,x)=\frac{3}{2}\neq 1=f(0,0)$$

rezultă că funcţia nu este continuă (global) în origine. ■

(d) $f(x,y)=\begin{cases}\left|\dfrac{x}{y}\right| e^{-\left|\frac{x}{y}\right|} & ,\ y\neq 0\\ 0 & ,\ y=0\end{cases}$

Soluţie Pentru funcţiile parţiale $f(x,0)=0$, $x\in\mathbb{R}$ şi $f(0,y)=0$, $y\in\mathbb{R}$ avem

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0=f(0,0),\ \lim_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0)$$

ceea ce demonstrează că funcţia este continuă parţial în origine. Deoarece

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(x,x) = \frac{1}{e} \neq 0 = f(0,0)$$

rezultă că funcţia nu este continuă (global) în origine. ■

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + \sin\left(x^3 + y^5\right)}{x^2 + y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluţie Pentru funcţiile parţiale

$$f(x,0) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^3}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \text{ şi } f(0,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y^5}{y^4} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

avem

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0), \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$$

ceea ce demonstrează că funcţia este continuă parţial în origine. Deoarece

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

rezultă că funcţia nu este continuă (global) în origine. ■

3 Derivabilitate parţială

Exerciţiul 4. Folosind definiţia, să se calculeze derivatele parţiale în punctul indicat pentru următoarele funcţii:

1. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$, $(-2,2)$

   Soluţie Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(-2,2) &= \lim_{x\to -2} \frac{f(x,2) - f(-2,2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{2x^2} - 2}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{2x^2 - 8}{(x+2)\left(\sqrt[3]{4x^4} + 2\sqrt[3]{2x^2} + 4\right)} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{2(x-2)}{\sqrt[3]{4x^4} + 2\sqrt[3]{2x^2} + 4} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(-2,2) &= \lim_{y\to 2}\frac{f(-2,y)-f(-2,2)}{y-2} = \lim_{y\to 2}\frac{\sqrt[3]{4y}-2}{y-2}\\
&= \lim_{y\to 2}\frac{4y-8}{(y-2)\left(\sqrt[3]{16y^2}+2\sqrt[3]{4y}+4\right)}\\
&= \lim_{y\to 2}\frac{4}{\sqrt[3]{16y^2}+2\sqrt[3]{4y}+4} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

■

2. $f(x,y)=\ln(1+x+y^2)$, $(1,0)$
3. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, $(1,2)$

Exerciţiul 5. Să se arate că următoarele funcţii admit derivate parţiale în origine dar nu sunt continue global în acest punct:

1. $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}} & , x\neq 0 \text{ şi } y\neq 0\\ 0 & , x=0 \text{ sau } y=0\end{cases}$

   Soluţie Avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0 \text{ şi } \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

   prin urmare funcţia admite derivate parţiale în origine şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

   Din faptul că

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\frac{1}{e^2}\neq 0=f(0,0)$$

   rezultă că funcţia nu este continuă în origine. ■

   Remarcă Derivabilitatea parţială într-un punct implică doar continuitatea parţială în acel punct nu şi continuitatea globală.

2. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2y^2+(x-y)^4} & , (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$

3. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\sin y}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Exerciţiul 6. Să se arate că următoarele funcţii sunt continue în origine dar nu admit derivate parţiale în acest punct:

1. $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Soluţie Din

$$|f(x,y)| = \left|(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |x+y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

   avem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, deci funcţia este continuă în origine.
   Limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{|x|}$$

   nu există deoarece pentru şirul $x_n = \dfrac{1}{n\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ avem $\sin\dfrac{1}{|x_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ în timp ce pentru şirul $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ avem $\sin\dfrac{1}{|x'_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Asta înseamnă că funcţia nu admite derivată parţială în raport cu x în origine. Similar se arată că funcţia nu admite derivată parţială în raport cu y în origine. ■

2. $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exerciţiul 7. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi derivatele parţiale în punctele indicate pentru următoarele funcţii:

1. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\arctan\dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$; $(-1,1)$

   Soluţie Pentru a calcula derivata parţială a funcţiei în raport cu variabila x, considerăm y fixat (ca o constantă). Obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \left(x^2+y^2\right)'_x \arctan\frac{x}{y} + \left(x^2+y^2\right)\left(\arctan\frac{x}{y}\right)'_x \\
&= 2x\arctan\frac{x}{y} + \left(x^2+y^2\right)\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x \\
&= 2x\arctan\frac{x}{y} + \left(x^2+y^2\right)\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y} \\
&= 2x\arctan\frac{x}{y} + y
\end{aligned}$$

Pentru a calcula derivata parţială a funcţiei în raport cu variabila y, considerăm x fixat. Avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \left(x^2+y^2\right)'_y \arctan\frac{x}{y} + \left(x^2+y^2\right)\left(\arctan\frac{x}{y}\right)'_y \\
&= 2y\arctan\frac{x}{y} + \left(x^2+y^2\right)\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y \\
&= 2y\arctan\frac{x}{y} + \left(x^2+y^2\right)\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) \\
&= 2y\arctan\frac{x}{y} - x
\end{aligned}$$

Derivatele parţiale în punctul indicat sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{\pi}{2}+1 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -\frac{\pi}{2}+1.$$

■

2. $f(x,y,z) = x^{y^z}$, $x>0$, $y>0$; $(e^2,e,1)$

Soluţie Avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= y^z\cdot x^{y^z-1} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^{y^z}\cdot\ln x\cdot\left(y^z\right)'_y = x^{y^z}\cdot\ln x\cdot zy^{z-1} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= x^{y^z}\cdot\ln x\cdot\left(y^z\right)'_z = x^{y^z}\cdot\ln x\cdot y^z\cdot\ln y
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(e^2,e,1) = e^{2e-1},\ \frac{\partial f}{\partial y}(e^2,e,1) = 2e^{2e},\ \frac{\partial f}{\partial z}(e^2,e,1) = 2e^{2e+1}.$$

■

3. $f(x,y) = e^{\frac{1}{x}}\ln\frac{y}{x}$, $x,y>0$; $\left(\frac{1}{2},1\right)$

4. $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$; $\left(1,0,\frac{\pi}{4}\right)$

5. $f(x,y,z) = \ln\left(x^y\cdot y^z\cdot z^x\right)$, $x,y,z>0$; $\left(1,\frac{1}{e},e^2\right)$

6. $f(x,y,z) = \ln\frac{x^{x+1}\cdot(y+1)^{y+2}}{(z+2)^{z+3}}$, $x>0, y>-1, z>-2$; $(e,e-1,e-2)$

7. $f(x,y,z) = x^y+y^z+z^x$, $x,y,z>0$; $(1,2,e)$

8. $f(x,y,z) = \dfrac{2x-y+z}{x^2+y^2+z^2}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$; $(1,-2,-1)$

9. $f(x,y,z) = x^y\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^y$, $x>0$, $z>0$; $(1,1,1)$

Exerciţiul 8. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul al doilea pentru următoarele funcţii:

1. $f(x,y) = x^2e^{xy^2}+y$

   Soluţie Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{xy^2}+x^2e^{xy^2}y^2 = (2x+x^2y^2)e^{xy^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2e^{xy^2}2xy+1 = 2x^3ye^{xy^2}+1 \end{aligned}$$

   Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left((2x+x^2y^2)e^{xy^2}\right)'_x \\ &= (2x+x^2y^2)'_x e^{xy^2} + (2x+x^2y^2)\left(e^{xy^2}\right)'_x \\ &= (2+2xy^2)e^{xy^2} + (2x+x^2y^2)e^{xy^2}y^2 \\ &= (2+4xy^2+x^2y^4)e^{xy^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left((2x+x^2y^2)e^{xy^2}\right)'_y \\ &= (2x+x^2y^2)'_y e^{xy^2} + (2x+x^2y^2)\left(e^{xy^2}\right)'_y \\ &= 2x^2ye^{xy^2} + (2x+x^2y^2)e^{xy^2}2xy \\ &= 2x^2y(3+xy^2)e^{xy^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2x^3ye^{xy^2}+1\right)'_x \\ &= 6x^2ye^{xy^2} + 2x^3ye^{xy^2}y^2 \\ &= 2x^2y(3+xy^2)e^{xy^2} \end{aligned}$$

   Observăm că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Acest fapt nu este întâmplător ci rezultă din Teorema Schwarz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2x^3ye^{xy^2}+1\right)'_y \\ &= 2x^3\left[e^{xy^2}+ye^{xy^2}2xy\right] \\ &= 2x^3(1+2xy^2)e^{xy^2} \end{aligned}$$

■

2. $f(x,y,z) = e^y \ln \frac{z}{x} = e^y (\ln z - \ln x),\ x,z > 0$

   Soluţie Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{e^y}{x} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^y \ln \frac{z}{x} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{e^y}{z}
\end{aligned}$$

   Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea simple

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{e^y}{x^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = e^y \ln \frac{z}{x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -\frac{e^y}{z^2}
\end{aligned}$$

   Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea mixte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{e^y}{x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{e^y}{z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}
\end{aligned}$$

   ■

3. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$

5. $f(x,y,z) = \arctan \dfrac{x}{yz}$

6. $f(x,y,z) = \ln\left(x + y^2 + z^3\right)$

7. $f(x,y,z) = \arcsin \sqrt{\dfrac{x-y}{z}}$

Exerciţiul 9. Să se calculeze $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ pentru $f(x,y) = x \ln(xy)$.

Soluţie Conform definiţiei

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right).$$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y},$$

prin urmare $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \left(\frac{1}{y}\right)'_x = 0.$ ■

Exerciţiul 10. Să se calculeze $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$, $n, m \in N^*$ pentru $f(x,y) = \ln(2x+y)$.

Soluţie Avem

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right).$$

Cum

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2x+y} = (2x+y)^{-1} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-1)(2x+y)^{-2} \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(-1)(-2)(2x+y)^{-3}
\end{aligned}$$

se arată inductiv că

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2x+y)^n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Apoi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right) &= \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2x+y)^n}\right)'_x = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(2x+y)^{-n-1}\cdot 2 \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(-n-1)(2x+y)^{-n-2}\cdot 2^2
\end{aligned}$$

Inductiv, se arată că

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(-1)^m 2^m n(n+1)\cdots(n+m-1)}{(2x+y)^{n+m}}.$$

Astfel că

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{(-1)^{n+m-1}(n+m-1)!2^m}{(2x+y)^{n+m}}.$$

■

Exerciţiul 11. Să se arate că funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admite derivate parţiale de ordinul 2 mixte în origine dar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Soluţie Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi. Dacă $(x,y) \neq (0,0)$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

În origine avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.$$

Aşadar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\dfrac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\dfrac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul 2 mixte în origine. Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1
\end{aligned}$$

astfel că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. ■

Exerciţiul 12. Considerăm funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right) & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

Să se arate că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu sunt continue în $(0,0)$ dar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Soluţie Dacă $y \neq 0$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\left(\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right)'_x = y^2\left(\ln\left(y^2+x^2\right)\right)'_x = y^2 \cdot \frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Într-un punct $(a,0)$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,0)-f(a,0)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{0}{x-a} = 0.$$

Aşadar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

Dacă $y \neq 0$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) + y^2\left(\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right)'_y = 2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2y}{x^2+y^2}.$$

Într-un punct $(a,0)$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} y\ln\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right) = 0.$$

Aşadar

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2 y}{x^2+y^2} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

Dacă $y \neq 0$ avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Într-un punct $(a,0)$ avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,0) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,0)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{0}{x-a} = 0. \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,0) \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{2ay}{a^2+y^2} = 0. \end{aligned}$$

Avem aşadar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \begin{cases} \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^4}{(2x^2)^2} = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

rezultă că derivatele parţiale de ordinul doi mixte nu sunt continue în origine.

Observaţie: continuitatea derivatelor parţiale din Teorema Schwarz nu este o condiţie necesară pentru egalitatea acestora. ■