Seminar Analiză Matematică

Puncte de extrem local
Funcţii definite implicit
Extreme cu legături

1 Puncte de extrem local

Pentru determinarea punctelor de extrem local parcurgem:

Pas 1 Determinarea punctelor staţionare (critice) ale funcţiei, rezolvând sistemul

- în cazul funcţiilor de două variabile

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

- în cazul funcţiilor de trei variabile

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Pas 2 Testarea extremelor
Scriem matricea hessiană într-un punct staţionar P şi aplicăm Criteriul Sylvester.

- în cazul funcţiilor de două variabile matricea hessiană este

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix}$$

Notăm cu

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P),\ \Delta_2 = \det\left(H_f(P)\right)$$

Avem următoarele situaţii:

- dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, atunci P este punct de minim local;
- dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, atunci P este punct de maxim local;

– dacă $\Delta_2 < 0$, atunci P nu este punct de extrem local (este punct şa).

- în cazul funcţiilor de trei variabile matricea hessiană este

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) \end{pmatrix}$$

Notăm cu

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P),\ \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix},\ \Delta_3 = \det\left(H_f(P)\right)$$

Avem următoarele situaţii:

- dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, atunci P este punct de minim local;
- dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, atunci P este punct de maxim local.

Exerciţiul 1.1. Să se determine punctele de extrem local puntru următoarele funcţii:

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$

   Soluţie Determinăm punctele staţionare.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 - 4y + 4x = 0 \end{cases}$$

   Adunăm ecuaţiile şi obţinem $x^3 + y^3 = 0$, deci $y = -x$. Înlocuind într-una din ecuaţii avem $x(x^2 - 2) = 0$, de unde punctele staţionare

$$(0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

   Matricea hessiană este

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

   Pentru punctele staţionare $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ avem

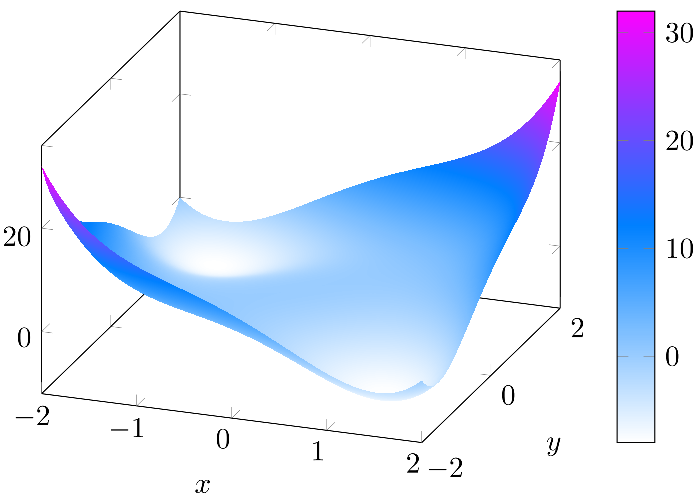
$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Deoarece $\Delta_1 > 0$ şi $\Delta_2 > 0$, rezultă că $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sunt puncte de minim local.
Pentru punctul staţionar $(0,0)$ avem

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \ \Delta_2 = 0$$

În acest caz nu putem decide cu criteriul Sylvester. Observăm că $f(x,x) = 2x^4 > 0 = f(0,0)$ pentru $x \neq 0$ şi $f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 < 0 = f(0,0)$ pentru $x \in (-2,0) \cup (0,2)$, ceea ce înseamnă că pe orice vecinătate a originii funcţia are atât valori mai mari cât şi valori mai mici decât în origine. Prin urmare originea nu este punct de extrem (este punct şa).

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$



$\blacksquare$

2. $f(x,y) = e^{2x+3y}\left(x^2+y^2\right)$

   Soluţie Calculăm derivatele parţiale

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x+3y}\left(x^2+y^2\right) + 2xe^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{2x+3y}\left(x^2+y^2\right) + 2ye^{2x+3y}$$

   Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + x = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

   şi obţinem punctele staţionare $(0,0)$ şi $\left(-\frac{4}{13}, -\frac{6}{13}\right)$.

Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 4e^{2x+3y}\left(x^2+y^2+x\right)+2(2x+1)e^{2x+3y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2e^{2x+3y}\left(3x^2+3y^2+2y+3x\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 3e^{2x+3y}\left(3x^2+3y^2+2y\right)+(6y+2)e^{2x+3y}
\end{aligned}$$

Matricea hessiană în punctul staţionar $(0,0)$ este:

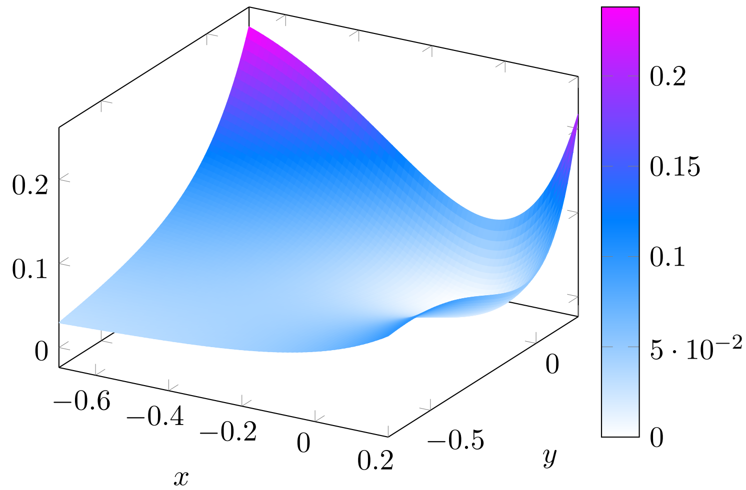
$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Deoarece $\Delta_1 = 2 > 0$ şi $\Delta_2 = 4 > 0$, rezultă că $(0,0)$ este un punct de minim local.
Matricea hessiană în punctul staţionar $\left(-\frac{4}{13}, -\frac{6}{13}\right)$ este:

$$H_f\left(-\frac{4}{13}, -\frac{6}{13}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{10}{13e^2} & -\dfrac{24}{13e^2} \\ -\dfrac{24}{13e^2} & -\dfrac{10}{13e^2} \end{pmatrix}$$

Deoarece $\Delta_2 < 0$, rezultă că $\left(-\frac{4}{13}, -\frac{6}{13}\right)$ nu este punct de extrem (este un punct şa).

$f(x,y)=e^{2x+3y}(x^2+y^2)$



■

3. $f(x,y)=\sin x \sin y \sin(x+y)$, $x,y \in (0,2\pi)$

Soluţie Determinăm punctele staţionare.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y\left[\cos x \sin(x+y)+\sin x\cos(x+y)\right]=0 \\ \sin x\left[\cos y \sin(x+y)+\sin y\cos(x+y)\right]=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sin y \sin(2x+y) = 0 \\ \sin x \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$$

Obţinem punctele staţionare

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), (\pi, \pi), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Matricea hessiană este

$$H_f = \begin{pmatrix} 2\sin y \cos(2x+y) & \sin 2(x+y) \\ \sin 2(x+y) & 2\sin x \cos(x+2y) \end{pmatrix}.$$

Avem

$$H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = H_f\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= H_f\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

şi cum $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, înseamnă că punctele sunt de maxim local.
Avem

$$H_f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = H_f\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = H_f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

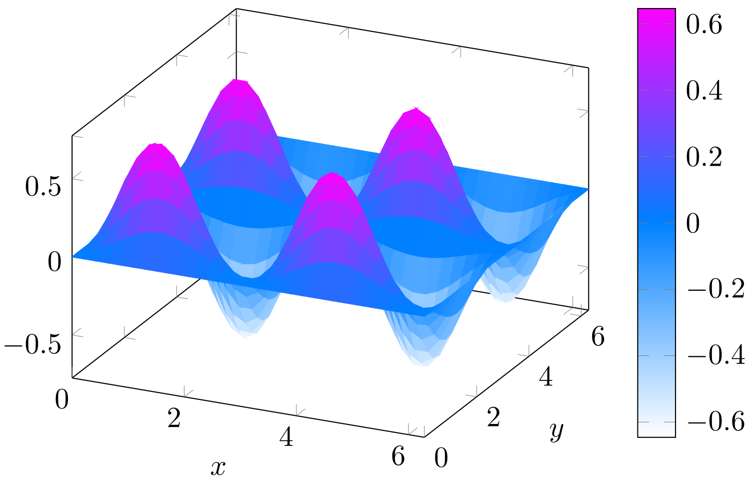
$$= H_f\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

şi cum $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, înseamnă că punctele sunt de minim local.
Pentru punctul staţionar (π, π) nu putem decide cu criteriul Sylvester deoarece

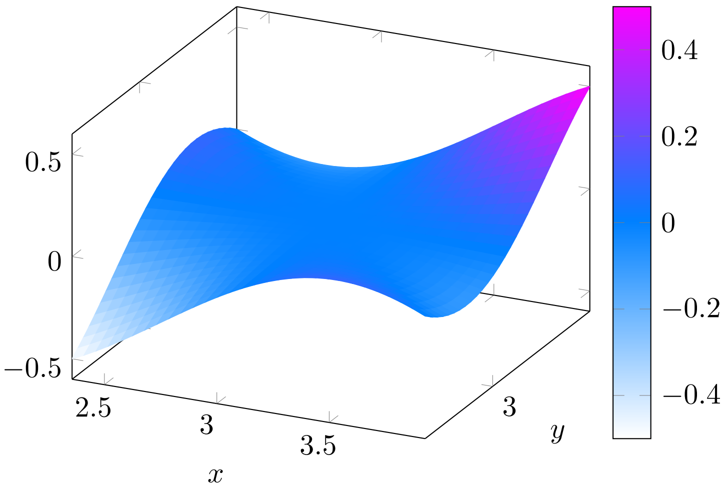
$$H_f(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observăm că $f(x, x) = \sin^2 x \sin 2x < 0 = f(\pi, \pi)$ pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $f(x, x) = \sin^2 x \sin 2x > 0 = f(\pi, \pi)$ pentru $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, prin urmare punctul (π, π) nu este punct de extrem (este un punct şa).

$f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$



Graficul funcţiei pe o vecinătate a punctului (π, π).



■

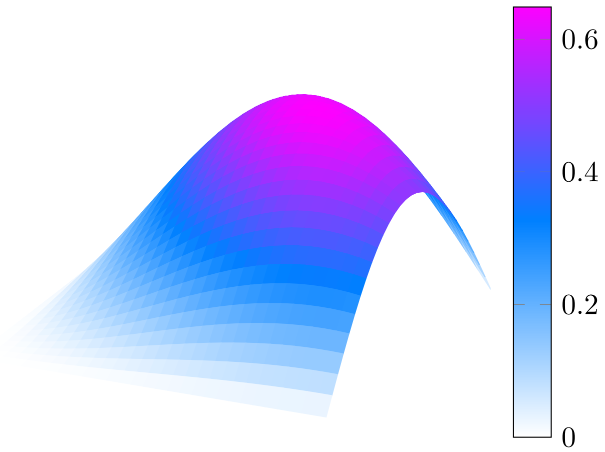
Aplicaţie Ne propunem să determinăm triunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază R.
Notăm cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului şi cu α, β, γ măsurile unghiurilor (în radiani) care se opun acestora.
Aria triunghiului este $S = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$.
Din teorema sinusurilor $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, obţinem

$$S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Cum $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, rezultă că $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta)$. Pentru că R este fixat, problema revine la determinarea punctului de maxim pentru restricţia funcţiei studiată anterior

$$f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y),$$

la submulţimea $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x > 0, \, y > 0, \, x + y < \pi\right\}$.



Am obţinut punctul de maxim $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, prin urmare măsurile unghiurilor triunghiului de arie maximă sunt $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, ceea ce înseamnă că triunghiul este echilateral. În plus, maximul funcţiei este

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \text{ deci } S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

4. $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\arctan\frac{y}{x}$, $x > 0$

Soluţie Rezolvăm sistemul

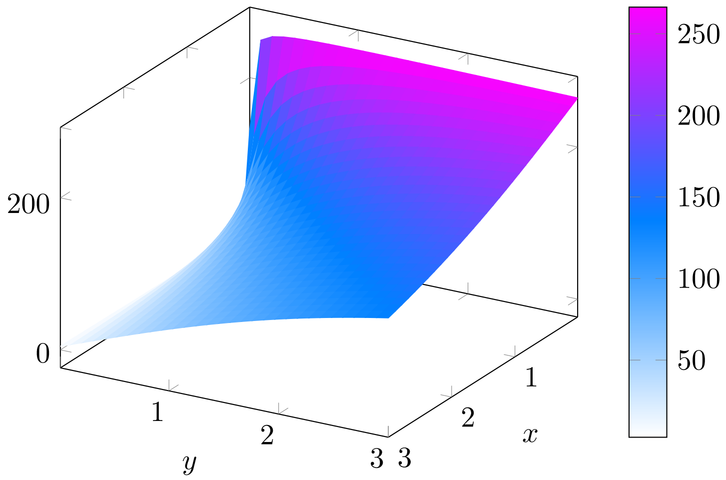
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + \dfrac{x-3y}{x^2+y^2} = 0 \\ -2 + \dfrac{3x+y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + x - 3y = 0 \\ -2x^2 - 2y^2 + 3x + y = 0 \end{cases}$$

şi obţinem punctul staţionar $(1,1)$. Matricea hessiană în acest punct este:

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

şi cum $\Delta_2 < 0$, înseamnă că punctul $(1,1)$ este punct şa. Prin urmare funcţia nu are puncte de extrem local.

$$f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\arctan\frac{y}{x}$$



■

5. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{16}$, $x, y, z > 0$

Soluţie Determinăm punctele staţionare

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} = 0 \\ -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{16} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = xz \\ z^2 = 16y \end{cases}$$

Înlocuim $y = x^2$ în a doua ecuaţie şi obţinem $z = x^3$. Din ultima ecuaţie găsim $x = 2$. Avem un singur punct staţionar şi anume punctul $(2,4,8)$.
Matricea hessiană în acest punct este:

$$H_f(2,4,8) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{64} \\ 0 & -\frac{1}{64} & \frac{1}{64} \end{pmatrix}$$

Cum $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, rezultă că $(2,4,8)$ este punct de minim local. ■

6. $f(x,y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y$

R: $(2,1)$ punct de maxim

7. $f(x,y) = (x+1)(y+1)(x+y)$

R: $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ puncte şa; $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ punct de minim

8. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

R: $(1,2)\,,(-1,-2)$ puncte şa; $(2,1)$ punct de minim, $(-2,-1)$ punct de maxim

9. $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2$

   R: $(0,0)$ punct de maxim; $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ puncte de minim, $\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ puncte şa

10. $f(x,y)=x^3y^2(a-x-y)$, $D=(0,\infty)\times(0,\infty)$, $a>0$

    R: $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{3}\right)$ punct de maxim

11. $f(x,y)=\frac{a(x+y)-1}{x^2+y^2}$, $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\,,\ a>0$

    R: $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$ punct de maxim

12. $f(x,y)=\frac{1+x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

    R: $(1,1)$ punct de maxim

13. $f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right),\ D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

    R: $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$ puncte şa; $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ puncte de minim; $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ puncte de maxim

14. $f(x,y)=(2x-3y^2)e^{-x^2}$

    R: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ punct de maxim; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ punct şa

15. $f(x,y)=x\ln\left(2x^2+3y^2\right),\ D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

    R: $\left(\frac{1}{e\sqrt{2}},0\right)$ punct de minim; $\left(-\frac{1}{e\sqrt{2}},0\right)$ punct de maxim; $\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ puncte şa

16. $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)\,,\ (x,y)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

    R: $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ punct de maxim

17. $f(x,y,z)=x^2+(x-1)^2+(x+1)^2+y^2+(y-2)^2+(y+2)^2+z^2+(z-3)^2+(z+3)^2$

R: $(0,0,0)$ punct de minim

18. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

R: $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$ punct de minim

19. $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$

R: $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ punct de minim

2 Funcţii definite implicit

Exerciţiul 2.1. Să se arate că următoarea ecuaţie defineşte funcţia implicită $y = y(x)$ pe o vecinătate a punctului 1, satisfăcând condiţia $y(1) = 1$. Să se calculeze apoi $y'(1)$ şi $y''(1)$.

1. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4x^2y$;

   Soluţie Considerăm funcţia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 4x^2y$. Derivatele parţiale

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) - 8xy,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) - 4x^2$$

   sunt funcţii continue pe $\mathbb{R}^2$. Avem $F(1,1) = 0$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 4 \neq 0$. In aceste condiţii, se poate defini funcţia implicită $y = y(x)$ pe o vecinătate a punctului 1. In plus, funcţia $y = y(x)$ este derivabilă (chiar de orice ordin) pe această vecinatate şi avem

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{4x(x^2 + y^2) - 8xy}{4y(x^2 + y^2) - 4x^2} = \frac{x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 - y(x^2 + y^2)}.$$

   În particular, $y'(1) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1)} = 0.$

   Derivata funcţiei implicite $y = y(x)$ se poate determina şi astfel: derivăm ecuaţia, ţinând seama că y este funcţie de x. Obţinem

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 8xy + 4x^2y'$$

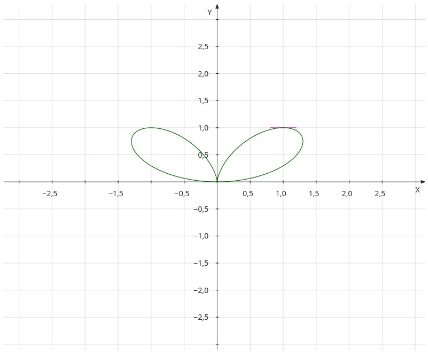
   de unde

$$y' = \frac{4x(x^2 + y^2) - 8xy}{4x^2 - 4y(x^2 + y^2)} = \frac{x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 - y(x^2 + y^2)}.$$

Calculăm acum derivata a doua, derivând funcţia $y' = \dfrac{x(x^2+y^2-2y)}{x^2-y(x^2+y^2)}$, ţinănd seama că y este funcţie de x:

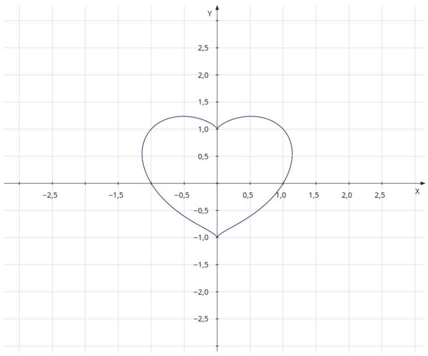
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{3x^2+y^2+2xyy'-2y-2xy'}{x^2-y(x^2+y^2)} \\ &\quad - \frac{x(x^2+y^2-2y)[2x-y'(x^2+y^2)-y(2x+2yy')]}{[x^2-y(x^2+y^2)]^2}. \end{aligned}$$

Pentru a calcula $y''(1)$, înlocuim în expresia derivatei a doua x cu 1, $y = y(1)$ cu 1 şi $y' = y'(1)$ cu 0. Obţinem $y''(1) = -2$.
Observăm că punctul $x = 1$ este punct de maxim pentru funcţia implicită $y = y(x)$ care verifică $y(1) = 1$.



■

2. $(x^2+y^2-1)^3 = x^2y^3$;



3. $\left(x^2+y^2\right)^3 - 3\left(x^2+y^2\right) - 2 = 0.$

Exerciţiul 2.2. Să se calculeze $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ pentru funcţia implicită $z = z(x,y)$ definită de ecuaţia $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$.

Soluţie Înlocuim în ecuaţie x cu 1 şi y cu 0 şi obţinem $1 + z(1,0)\cos 1 = 1$, de unde $z(1,0) = 0$.

Derivăm ecuaţia în raport cu variabila x, ţinând seama că $z = z(x, y)$ şi obţinem

$$\cos y - y \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \cos x - z \sin x = 0,$$

de unde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}.$$

Derivăm acum ecuaţia în raport cu variabila y, ţinând seama că $z = z(x, y)$ şi obţinem

$$-x \sin y + \cos z - y \sin z \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \cos x = 0,$$

de unde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}.$$

Avem $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = -\frac{1}{\cos 1}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = -\frac{1}{\cos 1}$. ■

Exerciţiul 2.3. Să se arate că funcţia implicită $z = z(x, y)$, definită de ecuaţia $(y + z) \sin z - y(x + z) = 0$, satisface ecuaţia:

$$z \cdot \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Soluţie Derivăm ecuaţia în raport cu variabila x, apoi în raport cu variabila y şi obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial x} \sin z + (y + z) \cos z \frac{\partial z}{\partial x} - y \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) \sin z + (y + z) \cos z \frac{\partial z}{\partial y} - (x + z) - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

de unde

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{y}{\sin z + (y + z) \cos z - y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x + z - \sin z}{\sin z + (y + z) \cos z - y} \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} z \cdot \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{yz \sin z - y^2(x + z - \sin z)}{\sin z + (y + z) \cos z - y} \\ &= \frac{y\left(z \sin z - y(x + z - \sin z)\right)}{\sin z + (y + z) \cos z - y} \\ &= \frac{y\left((z + y) \sin z - y(x + z)\right)}{\sin z + (y + z) \cos z - y} \\ &= \frac{y \cdot 0}{\sin z + (y + z) \cos z - y} = 0 \end{aligned}$$

deci ecuaţia este verificată. ■

Exercițiul 2.4. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea în punctul$(2,0)$ pentru funcţia implicită $z=z(x,y)$, definită de ecuaţia

$$2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0,$$

satisfăcând condiţia $z(2,0)=1$.

Soluţie Derivăm ecuaţia în raport cu variabila x, apoi în raport cu variabila y, ţinând seama că $z=z(x,y)$ şi obţinem

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{8z-4x}{2z-8x-1},\ \frac{\partial z}{\partial x}(2,0)=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-4y}{2z-8x-1},\ \frac{\partial z}{\partial y}(2,0)=0.\end{aligned}$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{8z-4x}{2z-8x-1}\right)'_x\\ &= \frac{\left(8\frac{\partial z}{\partial x}-4\right)(2z-8x-1)-(8z-4x)\left(2\frac{\partial z}{\partial x}-8\right)}{(2z-8x-1)^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{-4y}{2z-8x-1}\right)'_x\\ &= \frac{4y\left(2\frac{\partial z}{\partial x}-8\right)}{(2z-8x-1)^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{-4y}{2z-8x-1}\right)'_y\\ &= \frac{-4\frac{\partial z}{\partial y}(2z-8x-1)-4y\cdot 2\frac{\partial z}{\partial y}}{(2z-8x-1)^2}\end{aligned}$$

Obţinem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2,0)=\frac{4}{15},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2,0)=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

■

Exercițiul 2.5. Să se calculeze derivatele funcţiilor implicite $y=y(x)$, $z=z(x)$, definite de sistemul

$$\begin{cases}xyz=a\\ x+y+z=b\end{cases},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Soluţie Derivăm ecuaţiile sistemului, ţinând seama că y şi z sunt funcţii de x. Obţinem

$$\begin{cases} yz + xy'z + xyz' = 0 \\ 1 + y' + z' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xzy' + xyz' = -yz \\ y' + z' = -1 \end{cases}$$

de unde

$$y' = \frac{y(x-z)}{x(z-y)} \text{ şi } z' = \frac{z(y-x)}{x(z-y)}.$$

■

Exerciţiul 2.6. Să se determine diferenţialele funcţiilor implicite $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, definite de sistemul

$$\begin{cases} x + y + u + v = a \\ x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = b. \end{cases}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Soluţie

Metoda 1 Derivăm ecuaţiile sistemului în raport cu variabila x, ţinând seama că $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ şi determinăm derivatele parţiale în raport cu x ale funcţiilor u şi v. Derivăm apoi ecuaţiile sistemului în raport cu variabila x şi determinăm derivatele parţiale în raport cu y ale funcţiilor u şi v. În final, scriem diferenţialele.

Metoda 2 Diferenţiem ecuaţiile sistemului şi obţinem

$$\begin{cases} dx + dy + du + dv = 0 \\ 3x^2dx + 3y^2dy + 3u^2du + 3v^2dv = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} du + dv = -dx - dy \\ 3u^2du + 3v^2dv = -3x^2dx - 3y^2dy \end{cases}$$

de unde

$$du = \frac{x^2 - v^2}{v^2 - u^2}dx + \frac{y^2 - v^2}{v^2 - u^2}dy \text{ şi } dv = \frac{u^2 - x^2}{v^2 - u^2}dx + \frac{u^2 - y^2}{v^2 - u^2}dy.$$

■

3 Extreme cu legături

Exerciţiul 3.1. Să se arate că

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, \; (\forall)n \in \mathbb{N}^*, \; (\forall)x, y \geq 0.$$

Soluţie Dacă $x = 0$ sau $y = 0$, inegalitatea este evidentă. Dacă $n = 1$, avem egalitate. Rămâne să arătăm inegalitatea pentru $x, y > 0$ şi $n \geq 2$.

Dacă notăm $\dfrac{x+y}{2} = a$, avem de arătat că $\dfrac{x^n+y^n}{2} \geq a^n$. Considerăm problema de extrem condiţionat

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^n+y^n}{2} \\ x+y = 2a \end{cases}$$

Scriem funcţia lui Lagrange

$$L(x,y) = \frac{x^n+y^n}{2} + \lambda(x+y-2a).$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ x+y = 2a \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{n}{2}x^{n-1} + \lambda = 0 \\ \frac{n}{2}y^{n-1} + \lambda = 0 \\ x+y = 2a \end{cases}$$

şi obţinem punctul staţionar (a,a). Pentru matricea hessiană

$$H_L(a,a) = \begin{pmatrix} \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & 0 \\ 0 & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \end{pmatrix} \text{ avem } \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,$$

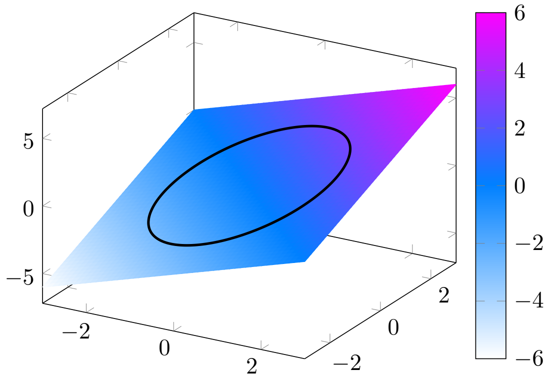
ceea ce înseamnă că punctul (a,a) este un punct de minim pentru funcţia lui Lagrange, prin urmare minim condiţionat pentru f. Atunci

$$\frac{x^n+y^n}{2} \geq \frac{a^n+a^n}{2} = a^n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

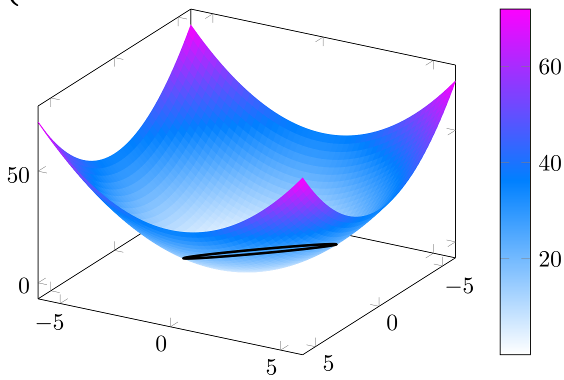
■

Exerciţiul 3.2. Să se determine punctele de extrem condiţionat pentru următoarele funcţii:

1. $\begin{cases} f(x,y) = 2x+y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$



2. $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 9 \end{cases}$



3. $\begin{cases} f(x,y,z) = x + 2y - 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$

Soluţie Considerăm funcţia lui Lagrange

$$L(x,y,z) = x + 2y - 2z + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 16\right)$$

Punctele staţionare ale funcţiei L sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ -2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{\lambda} \\ z = \dfrac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

de unde punctele staţionare

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right) \text{ pentru } \lambda = -\frac{3}{8}$$

şi

$$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) \text{ pentru } \lambda = \frac{3}{8}$$

Matricea Hessiană a funcţiei L este

$$H_L = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Pentru punctul staţionar $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ avem

$$H_L\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -\frac{3}{4} < 0$, $\Delta_2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 > 0$, $\Delta_3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 < 0$, deci $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ este punct de maxim pentru L şi prin urmare este un punct de maxim condiţionat pentru f.
Pentru punctul staţionar $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ avem

$$H_L\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = \frac{3}{4} > 0$, $\Delta_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 > 0$, $\Delta_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 > 0$, deci $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ este punct de minim pentru L şi prin urmare este un punct de minim condiţionat pentru f. ■

4. $\begin{cases} f(x,y,z) = xy^2z^3 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

5. $\begin{cases} f(x,y,z) = x + y + z \\ x - y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

Soluţie Funcţia lui Lagrange este

$$L(x,y,z) = x + y + z + \lambda(x - y + z - 2) + \mu\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right)$$

Determinăm punctele staţionare ale funcţiei L:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + \lambda + 2\mu x = 0 \\ 1 - \lambda + 2\mu y = 0 \\ 1 + \lambda + 2\mu z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Obţinem punctele staţionare

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), \ \lambda = \frac{1}{3}, \ \mu = -\frac{1}{2}$$

şi

$$(0, -2, 0)\,,\ \lambda = -1,\ \mu = \frac{1}{2}$$

Matricea Hessiană a funcţiei L este

$$H_L = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}$$

Pentru punctul staţionar $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ avem

$$H_L\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -1 < 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, $\Delta_3 = -1 < 0$, deci $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ este punct de maxim pentru L şi prin urmare este un punct de maxim condiţionat pentru f.
Pentru punctul staţionar $(0, -2, 0)$ avem

$$H_L\,(0, -2, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, $\Delta_3 = 1 > 0$, deci $(0, -2, 0)$ este punct de minim pentru L şi prin urmare este un punct de minim condiţionat pentru f. ■

6. $\begin{cases} f(x, y, z) = xyz \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$