Capitolul 2 Şiruri de numere reale

2.1 Şiruri cu limită, şiruri convergente

Definiţie 2.1. Şir de numere reale

O funcţie $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte şir de numere reale.

Convenim să notăm $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$; x_n se va numi termenul de rang n al şirului.

Notaţia uzuală pentru un şir de numere reale este $\{x_n\}_n$ sau $(x_n)_n$.

◇

Definiţie 2.2. Şir cu limită

Spunem că şirul $(x_n)_n$ are limita

1. *$x \in \mathbb{R}$ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dacă*
   $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N}, (\forall)n \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$;
2. *∞ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă*
   $(\forall)M > 0, (\exists)n_M \in \mathbb{N}, (\forall)n \in \mathbb{N} : n \geq n_M \Rightarrow x_n > M$;
3. *$-\infty$ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă*
   $(\forall)M > 0, (\exists)n_M \in \mathbb{N}, (\forall)n \in \mathbb{N} : n \geq n_M \Rightarrow x_n < -M$;

◇

Exemplul 2.1

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n+1} = 3$;

   Soluţie Fie $\varepsilon > 0$. Vom determina n_ε astfel încât $\left|\dfrac{3n}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Avem
   $$\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| = \frac{3}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{3}{\varepsilon} - 1.$$
   Alegem $n_\varepsilon = \left[\dfrac{3}{\varepsilon} - 1\right] + 1$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ avem
   $$\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| = \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{n_\varepsilon + 1} < \varepsilon.$$
   ◁

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+1} = \infty$.

   Soluţie Fie $M > 0$. Alegem $n_M = [M] + 2$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_M$ avem
   $$\frac{n^2}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1} > n - 1 \geq n_M - 1 = [M] + 1 > M.$$
   ◁

Propoziţie 2.1

Limita unui şir, dacă există, este unică.

◇

Dem. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale care are limitele l_1 şi l_2. Presupunem că $l_1 \neq l_2$.

Cazul $l_1,\ l_2 \in \mathbb{R}$: Deoarece $l_1 \neq l_2$, avem $|l_1 - l_2| > 0$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, rezultă că

$$(\exists)n_1 \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 :\ |x_n - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}.$$

Totodată $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_2$, de unde rezultă că

$$(\exists)n_2 \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 :\ |x_n - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}.$$

Dacă $n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_1, n_2\}$, avem

$$x_n < \frac{l_1 + l_2}{2} \text{ şi } x_n > \frac{l_1 + l_2}{2}$$

ceea ce este absurd.

Cazul $l_1 \in \mathbb{R},\ l_2 = \infty$: Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, rezultă că

$$(\exists)n_1 \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 :\ |x_n - l_1| < 1.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, rezultă că

$$(\exists)n_2 \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 :\ x_n > |l_1| + 1.$$

Dacă $n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_1, n_2\}$, avem

$$x_n < l_1 + 1 \text{ şi } x_n > |l_1| + 1 \geq l_1 + 1$$

ceea ce este absurd.

Cazul $l_1 \in \mathbb{R},\ l_2 = -\infty$: Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, rezultă că

$$(\exists)n_1 \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 :\ |x_n - l_1| < 1.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, rezultă că

$$(\exists)n_2 \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 :\ x_n < -|l_1| - 1.$$

Dacă $n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_1, n_2\}$, avem

$$x_n > l_1 - 1 \text{ şi } x_n < -|l_1| - 1 \leq l_1 - 1$$

ceea ce este absurd.

Cazul $l_1 = -\infty,\ l_2 = \infty$: Fie $M > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, rezultă că

$$(\exists)n_1 \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 :\ x_n < -M.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, rezultă că

$$(\exists)n_2 \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 :\ x_n > M.$$

Dacă $n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_1, n_2\}$, avem

$$x_n < -M \text{ şi } x_n > M$$

ceea ce este absurd.

Rămâne deci că $l_1 = l_2$. $\square$

Definiţie 2.3. Şir convergent

Un şir care are limită un număr real se va numi şir convergent; altfel şirul se numeşte divergent. ◇

Propoziţie 2.2

Dacă $(x_n)_n$ *şi* $(y_n)_n$ *sunt două şiruri care au limită şi* $x_n \leq y_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. ◇

Remarcă Dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt două şiruri care au limită şi $x_n < y_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (inegalitatea limitelor nu este neapărat strictă).
De exemplu, pentru şirurile $x_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $y_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ avem $x_n < y_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Propoziţie 2.3

Dacă $(x_n)_n$ *şi* $(y_n)_n$ *sunt două şiruri care au limită şi operaţiile cu limite au sens, atunci*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^{y_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

◇

Remarcă Expresii nedeterminate

1. Dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt două şiruri cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, atunci spunem că expresia $x_n - y_n$ prezintă o nedeterminare de forma $\infty - \infty$.
2. Dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt două şiruri cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, atunci spunem că expresia $x_n \cdot y_n$ prezintă o nedeterminare de forma $0 \cdot \infty$.
3. Dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt două şiruri cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$, atunci spunem că expresia $\dfrac{x_n}{y_n}$ prezintă o nedeterminare de forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.
4. Dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt două şiruri cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, atunci spunem că expresia $\dfrac{x_n}{y_n}$ prezintă o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$.
5. Dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt două şiruri cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, atunci spunem că expresia ${x_n}^{y_n}$ prezintă o nedeterminare de forma ∞^0.
6. Dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt două şiruri cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, atunci spunem că expresia ${x_n}^{y_n}$ prezintă o nedeterminare de forma 1^∞.
7. Dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt două şiruri cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, atunci spunem că expresia ${x_n}^{y_n}$ prezintă o nedeterminare de forma 0^0.

Exerciţiu 2.1 Să se calculeze următoarele limite:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{\sqrt{n^3+1}}$

R: 0

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sin n}{n+\cos n}$

R: 1

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+4+\cdots+2n}{n+2}-n\right)$

R: -1

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-3)!n^2}{(n-1)!+(n-2)!}$

R: 1

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$

R: 0

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

R: $\dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)$

R: $-\dfrac{1}{4}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n^2-7n+1}\right)$

R: $\dfrac{7}{2}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+3n+2}\right)$

R: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2+5n-2}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)$

R: 2

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$

R: $-\dfrac{1}{6}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

R: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+7^{-n}}{3^{-n}+7^n}$

R: 0

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^n+7^n}{5^n+7^n}$

R: 1

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}$

R: 1

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7}{10}+\dfrac{29}{100}+\cdots+\dfrac{2^n+5^n}{10^n}\right)$

R: $\dfrac{5}{3}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3^2]{3}\cdots\sqrt[3^n]{3}\right)$

R: $\sqrt{3}$

2.2 Şiruri mărginite, şiruri monotone

Definiţie 2.4. Şir mărginit

Un şir de numere reale $(x_n)_n$ *se numeşte*

1. *mărginit inferior dacă* $(\exists)\alpha\in\mathbb{R},\ (\forall)n\in\mathbb{N}:\ \alpha\le x_n$;
2. *mărginit superior dacă* $(\exists)\beta\in\mathbb{R},\ (\forall)n\in\mathbb{N}:\ x_n\le\beta$;
3. *mărginit dacă este mărginit inferior şi superior*

$\iff (\exists)\alpha,\ \beta\in\mathbb{R},\ (\forall)n\in\mathbb{N}:\ \alpha\le x_n\le\beta$;

$\iff (\exists)M>0,\ (\forall)n\in\mathbb{N}:\ |x_n|\le M$;

Un şir care nu este mărginit se va numi nemărginit. ◇

Propoziţie 2.4

Orice şir convergent este mărginit. ◇

Dem. Fie $(x_n)_n$ un şir convergent, cu limita x. Atunci

$$(\exists)n_1 \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 : |x_n - x| < 1.$$

Notăm cu

$$\alpha = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}, x-1\} \text{ dacă } n_1 \geq 1, \text{ altfel } \alpha = x - 1$$

şi

$$\beta = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}, x+1\} \text{ dacă } n_1 \geq 1, \text{ altfel } \beta = x + 1.$$

Avem $\alpha \leq x_n \leq \beta$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$, deci şirul $(x_n)_n$ este mărginit. □

Remarcă Reciproca nu este, în general, adevărată.

Exemplul 2.2 Şirul $(\sin n)_n$ este mărginit dar nu este convergent.

Într-adevăr, şirul este mărginit deoarece $|\sin n| \leq 1$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$.

Presupunem că şirul este convergent; notăm cu $x = \lim\limits_{n\to\infty} \sin n$. Avem

$$\begin{aligned} \sin(n+1) &= \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1, \\ \cos(n+1) &= \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1. \end{aligned}$$

Din prima relaţie rezultă că şirul $(\cos n)_n$ converge; notăm cu $y = \lim\limits_{n\to\infty} \cos n$. Trecând la limită cele două relaţii obţinem

$$\begin{cases} x = x\cos 1 + y \sin 1 \\ y = y \cos 1 - x \sin 1 \end{cases}$$

de unde $(x^2 + y^2)(1 - \cos 1) = 0$, deci $x^2 + y^2 = 0$. Pe de altă parte din $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$, prin trecere la limită, obţinem $x^2 + y^2 = 1$. Am ajuns astfel la o contradicţie.

Rămâne deci că şirul $(\sin n)_n$ este divergent.

Definiţie 2.5. Şir monoton

Un şir de numere reale $(x_n)_n$ se numeşte

1. *crescător (strict crescător)* $\Longleftrightarrow (\forall)n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$ *(respectiv $x_n < x_{n+1}$);*
2. *descrescător (strict descrescător)*$\Longleftrightarrow (\forall)n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \leq x_n$ *(respectiv $x_{n+1} < x_n$);*
3. *(strict) monoton dacă este (strict) crescător sau (strict) descrescător.* ◇

Teoremă 2.1

Orice şir monoton are limită. Orice şir monoton şi mărginit este convergent. ◇

Dem. Fie $(x_n)_n$ un şir crescător.

Cazul 1: şirul $(x_n)_n$ nu este mărginit superior. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Fie $M > 0$. Cum $(x_n)_n$ nu este mărginit superior, rezultă că $(\exists) n_M \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{n_M} > M$. Şirul fiind crescător, obţinem $x_n \geq x_{n_M} > M$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_M$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Cazul 2: şirul $(x_n)_n$ este mărginit superior. Mulţimea $X = \{x_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ este majorată. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$, $s = \sup X$.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $s = \sup X$, rezultă că $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $s - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$. Şirul fiind crescător, obţinem $s - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq s$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, prin urmare $|x_n - s| = s - x_n < \varepsilon$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$.

Dacă $(x_n)_n$ este un şir descrescător, se arată că, în cazul în care şirul nu este mărginit inferior avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ iar în cazul mărginirii inferioare avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf X$. □

Remarcă Un şir cu limită nu este neapărat monoton.

De exemplu, şirul cu termenul general $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ este un şir convergent la 0, fără a fi un şir monoton.

Exemplul 2.3 Şirul definit prin

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right),\ n \in \mathbb{N}$$

este convergent.

Soluţie Diferenţa a doi termeni consecutivi este

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) - x_n = \frac{3 - x_n^2}{2x_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Avem $x_1 = 2 > \sqrt{3}$, $x_2 = \frac{7}{4} > \sqrt{3}$. Presupunem că $x_n > \sqrt{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$x_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(x_n - 2\sqrt{3} + \frac{3}{x_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x_n - \sqrt{3}\right)^2}{x_n} > 0.$$

Astfel că $x_n > \sqrt{3}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă atunci că $x_{n+1} < x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Şirul $(x_n)_n$ fiind descrescător (începând cu al doilea termen) şi mărginit inferior, este convergent. Fie l limita şirului. Trecem la limită în relaţia de recurenţă şi obţinem

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{l}\right) \Longrightarrow l = \sqrt{3}.$$

◁

Exemplul 2.4 Fie şirurile $(a_n)_n$, $(e_n)_n$ definite prin:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},\ n \geq 1.$$

Vom arăta că cele două şiruri sunt convergente şi au aceeaşi limită.

- $(a_n)_{n\leq 1}$ este strict crescător:

Avem

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^n\frac{1}{n^n}\\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{n^{n-1}}\\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots\\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots\\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Este clar că $a_n < a_{n+1},\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(a_n)_{n\leq 1}$ este strict crescător.

- $(e_n)_{n\leq 1}$ este strict crescător - evident.
- $2 \leq a_n \leq e_n < 3,\ (\forall)n \geq 1$

  Şirul $(a_n)_n$ fiind crescător, rezultă că $a_n \geq a_1 = 2,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$. Avem apoi

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots\\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e_n,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
e_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Astfel, şirurile $(a_n)_n$ şi $(e_n)_n$ sunt strict crescătoare şi mărginite, deci convergente. Notăm cu $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pentru $p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned}
a_{n+p} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\left(1-\frac{2}{n+p}\right) + \cdots\\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\left(1-\frac{2}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+p}\right) + \cdots\\
&\quad \cdots + \frac{1}{(n+p)!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\left(1-\frac{2}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{n+p-1}{n+p}\right)\\
&> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\left(1-\frac{2}{n+p}\right) + \cdots\\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\left(1-\frac{2}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+p}\right)
\end{aligned}$$

de unde

$$e = \lim_{p\to\infty} a_{n+p} \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e_n,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $a_n \leq e_n \leq e$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$.

Exemplul 2.5

Dacă $(x_n)_n$ este un şir de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. Putem presupune că $x_n \geq 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Notăm cu $y_n = [x_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Avem

$$y_n \leq x_n < y_n + 1,\ (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece şirul $\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)_m$ este crescător cu limita e, putem alege $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \varepsilon,\ (\forall) m \in \mathbb{N},\ m \geq m_\varepsilon.$$

Şirul $(y_n)_n$ este un şir de numere naturale cu limita ∞, prin urmare există un rang n_ε astfel încât $y_n \geq m_\varepsilon$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Atunci

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} < \varepsilon,\ (\forall) n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$. Dar cum

$$\left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{y_n} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n+1}$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{y_n} = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n+1}$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Exerciţiu 2.2 Să se calculeze următoarele limite:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-8n+5}{n^2+n+1}\right)^{\frac{(n+1)^2}{n}}$ **R:** e^{-9}
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}-1}\right)^{\sqrt{n}}$ **R:** e^3
3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\ln(n^2+1)-\ln(n^2+2)\right]$ **R:** 0
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n$ **R:** e^π; e
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{2n^2}$ **R:** $e^{-\pi^2}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-e^{\frac{1}{n}}\right)^n$ **R:** $\frac{1}{e}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $a, b > 0$ **R:** $\sqrt{ab}$

Exemplul 2.6 Şirul cu termenul general

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\ n \in \mathbb{N}^*$$

este monoton şi mărginit, deci convergent. Limita şirului este $c = 0,5772\ldots$ constanta lui Euler.

Generalizare

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln k)^p}{k} - \frac{(\ln n)^{p+1}}{p+1},\ p \in \mathbb{N}.$$

2.3 Subşiruri, puncte limită

Definiţie 2.6. Subşir

Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale şi $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ o funcţie strict crescătoare. Şirul $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ se numeşte subşir al şirului $(x_n)_n$. ◇

Exemplul 2.7

1. Pentru $\varphi(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, obţinem subşirul termenilor de rang par $x_0,\ x_2,\ x_4,\ \ldots$;
2. Pentru $\varphi(n) = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, obţinem subşirul termenilor de rang impar $x_1,\ x_3,\ x_5,\ \ldots$;

Definiţie 2.7. Punct limită

Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale. Elementul $p \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte punct limită al şirului $(x_n)_n$ dacă există un subşir al şirului $(x_n)_n$ care are limita p. ◇

Exemplul 2.8

1. şirul $\left([(-1)^n + 1] \cdot \sqrt{n}\right)_n$ are punctele limită 0 şi ∞;
2. şirul $\left(\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \cdot \cos \dfrac{n\pi}{2}\right)_n$ are punctele limită -1, 0 şi 1.

Remarcă Un şir nemărginit superior (inferior) are punct limită elementul ∞ (respectiv $-\infty$).

Propoziţie 2.5. Cesàro

Orice şir mărginit are cel puţin un punct limită din $\mathbb{R}$. ◇

Definiţie 2.8

Cel mai mare (mic) punct limită al şirului $(x_n)_n$ se numeşte limita superioară (inferioară) a şirului $(x_n)_n$ şi se notează prin

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \ (\textit{respectiv}\ \liminf_{n\to\infty} x_n).$$

◇

Remarcă Limita superioară şi limita inferioară există pentru orice şir $(x_n)_n$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf\left\{\sup\left\{x_k | k \geq n\right\} : n \in \mathbb{N}\right\} \ (\text{convenţie } \inf\{\infty\} = \infty)$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup\left\{\inf\left\{x_k | k \geq n\right\} : n \in \mathbb{N}\right\} \ (\text{convenţie } \sup\{-\infty\} = -\infty)$$

Exerciţiu 2.3 Determinaţi punctele limită, limita superioară şi limita inferioară pentru următoarele şiruri:

1. $x_n = \cos \dfrac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$

   R: punctele limită: $-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1$

2. $x_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

   R: punctele limită: $0,\ 2$

3. $x_n = \left(1 + \dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

   R: punctele limită: $e,\ \dfrac{1}{e}$

4. $x_n = n^{(-1)^n - 1} + \sin \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

   R: punctele limită: $-1,\ 1$

5. $x_n = n^{(-1)^n - 1} + \sin^2 \dfrac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$

R: punctele limită: $\frac{1}{2}$, 2

6. $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \dfrac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

R: punctele limită: $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$

7. $x_n = n^{2(-1)^n - 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

R: punctele limită: 0, $+\infty$

8. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \left[\dfrac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos\dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

R: punctele limită: $-\frac{e}{2}$, $\frac{3}{2}e - 1$, $\frac{3}{2}e + 1$

9. $x_n = \left(1+\dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n \cdot \left[\dfrac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos\dfrac{n\pi}{2}$

R: $-\frac{1}{2e}$, $\frac{3}{2}e - 1$, $\frac{3}{2}e + 1$

Propoziţie 2.6

Un şir de numere reale $(x_n)_n$ are limită dacă şi numai dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$. ◇

2.4 Şiruri fundamentale

Definiţie 2.9

Un şir de numere reale $(x_n)_n$ se numeşte şir fundamental sau şir Cauchy dacă

$$(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N}, (\forall)n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

sau echivalent

$$(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N}, (\forall)n \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon, (\forall)p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$ ◇

Teoremă 2.2

Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este fundamental. ◇

Exemplul 2.9 Şirul definit prin $x_n = \dfrac{\sin 1!}{1^2} + \dfrac{\sin 2!}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n!}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ este un şir convergent, fiind şir fundamental.

Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$, alegem $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ şi atunci pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)!}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)!}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+p)!}{(n+p)^2}\right| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Exerciţiu 2.4 Să se studieze, utilizând criteriul general al lui Cauchy, convergenţa şirurilor:

1. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$;

2. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$;
3. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{2^k}$, $n \geq 1$.

2.5 Criterii pentru determinarea limitei

Lemă 2.1. Criteriul majorării

Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale şi $x \in \mathbb{R}$. Dacă există un şir $(\alpha_n)_n$ astfel încât

1. $|x_n - x| \leq \alpha_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

◇

Exemplul 2.10

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos 1!}{n^2+1} + \frac{\cos 2!}{n^2+2} + \cdots + \frac{\cos n!}{n^2+n} \right) = 0.$$

Soluţie Notăm cu $x_n = \frac{\cos 1!}{n^2+1} + \frac{\cos 2!}{n^2+2} + \cdots + \frac{\cos n!}{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\begin{aligned} |x_n - 0| &= \left| \frac{\cos 1!}{n^2+1} + \frac{\cos 2!}{n^2+2} + \cdots + \frac{\cos n!}{n^2+n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} \end{aligned}$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ◁

Exerciţiu 2.5 Să se calculeze următoarele limite:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ **R:** 0
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos^3 n}{n}$ **R:** 0
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ **R:** 0
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1! \sin 2! + \cdots + \sin n!}{n^2}$ **R:** 0

Lemă 2.2. Criteriul cleştelui

Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale. Dacă există două şiruri $(\alpha_n)_n$ şi $(\beta_n)_n$ astfel încât

1. $\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = l$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

◇

Exemplul 2.11

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

Soluţie Notăm cu $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. ◁

Exerciţiu 2.6 Să se calculeze următoarele limite:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \right)$

   R: 0

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \right)$

   R: 1

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

   R: 0

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}$

   R: 0

Lemă 2.3. Criteriul raportului

Fie $(x_n)_n$*:* $x_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. *Presupunem că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$. *Atunci*

1. $l < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
2. $l > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

◇

Exemplul 2.12

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)} = 0.$$

Soluţie Notăm cu $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

◁

Exerciţiu 2.7 Să se calculeze următoarele limite:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

   R: 0

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

   R: 0

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$

   R: 0

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n^n}{n!}$, $a > 0$

   R: 0 pentru $a < \frac{1}{e}$; $+\infty$ $a > \frac{1}{e}$

Lemă 2.4. Criteriul Cesàro-Stolz

Dacă două şiruri de numere reale $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$ *verifică*

1. $b_n < b_{n+1}$, $(\forall) n \geq n_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$,
2. *există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *şi este egală cu* l.

◇

Exemplul 2.13

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=2(\sqrt{2}-1).$$

Soluţie Notăm cu $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}$ şi $b_n=\sqrt{n}$. Este clar că şirul $(b_n)_n$ este un şir strict crescător şi nemărginit. Deoarece

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &= 2(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=2(\sqrt{2}-1)$. ◁

Corolar 2.1. Cauchy

$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$, *în ipoteza că ultima limită există.* ◇

Exemplul 2.14

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a+b}{c+d}+\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}+\cdots+\frac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}\right)=\frac{a}{c},\ c\neq 0.$$

Soluţie $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a+b}{c+d}+\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}+\cdots+\frac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}=\frac{a}{c}$. ◁

Exerciţiu 2.8 Dacă şirul $(x_n)_n$ converge, având limita x, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot x_1+(n-1)\cdot x_2+\cdots+1\cdot x_n}{n^2}=\frac{x}{2}.$$

Exerciţiu 2.9 Fie $(x_n)_n$ un şir astfel încât $(\exists)\ \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=l$. Atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=l$.

Exerciţiu 2.10 Fie $(x_n)_n, x_n>0,\ n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\infty$. Atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}=0$.

Exerciţiu 2.11 Fie $(x_n)_n, x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{x_1+\cdots+x_n},\ n\in\mathbb{N}$. Arătaţi că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{1}{2}$.

Exerciţiu 2.12 Să se calculeze următoarele limite:

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}, p\in\mathbb{N}^*$

   R: $\frac{1}{p+1}$

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}, p\in(0,\infty)$

   R: $\frac{1}{p+1}$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

   R: 2

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_1+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)$, unde $(a_n)_n$ este un şir convergent cu limita a

   R: $2a$

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

   R: $2(\sqrt{2}-1)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

R: 0

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha\in(0,1)$

R: $\frac{1}{1-\alpha}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

R: 1

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)$, unde $(a_n)_n$ este un şir convergent cu limita a

R: a

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$

R: $\frac{1}{2}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\ln n}\left(\frac{1}{2\ln 2}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}\right)$

R: 1

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln\sqrt{2}+\ln\sqrt[3]{3}+\cdots+\ln\sqrt[n]{n}\right)$

R: 0

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{n^2}$

R: 0

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}$, $a>1$

R: 0

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right]$, $p\in\mathbb{N}^*$

R: $\frac{1}{2}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot k!}{(n+1)!-1}$

R: 1

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)-n\ln n}{n}$

R: -1

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{\ln n^n}$

R: 1

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n^m}$, $m\in\mathbb{N}$

R: $\infty(n=1);0(n\geq 2)$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$

R: 0

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2^2\sqrt{2}+\cdots+n^2\sqrt[n]{n}}{n^2(n+1)}$

R: $\frac{1}{3}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(p+k)!}{k!}\right]$, $p\in\mathbb{N}$

R: $\frac{1}{p+1}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\ln(a+(n-1)r)}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a+(k-1)r}\right]$, $r>0$

R: $\frac{1}{r}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{n^{k+1}}\sum\limits_{i=1}^{n}i^k\right)$, $m\in\mathbb{N}$

R: $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+1}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[ke^{\frac{1}{k}}\right]}{n^2}$, $[a]$fiind partea întregă a numărului a

R: $\frac{1}{2}$

Lemă 2.5. Criteriul Rizzoli

Dacă două şiruri de numere reale $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$ *verifică*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0,$
2. *şirul* $(b_n)_n$ *este strict monoton,*
3. *există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}},$

atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ *şi este egală cu* l.

◇

Exemplul 2.15

$$\lim_{n\to\infty} n(c_n - c) = \frac{1}{2},$$

unde $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\ n \in \mathbb{N}^*$ iar $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ constanta lui Euler.

Lemă 2.6. Criteriul Cauchy-d'Alembert

Dacă pentru şirul $(a_n)_n$*, cu* $a_n > 0$*, există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*, atunci există şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *şi avem*

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}.$

◇

Exemplul 2.16

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n!} = 1.$$

Soluţie Notăm cu $a_n = \ln n!$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln (n+1)!}{\ln n!} \underset{C-S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1,$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$ ◁

Corolar 2.2

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$*, în ipoteza că ultima limită există.*

◇

Exemplul 2.17

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdots \sin\frac{\pi}{n+1}} = 0.$$

Soluţie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\dfrac{\pi}{2} \cdot \sin\dfrac{\pi}{3} \cdots \sin\dfrac{\pi}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{n+1} = 0.$ ◁

Exerciţiu 2.13 Să se calculeze următoarele limite:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}.$

   R: 1

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_{nk}^n},\ k \in \mathbb{N}.$

   R: $\dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^3\, 3^n}{(3n)!}}$

   R: $\dfrac{1}{9}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{2\dfrac{n(n+1)}{2}}}$

R: 0

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!8^n}}$

R: $\dfrac{1}{2^5}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n}{\sqrt[n]{(2n)!}}$

R: 0

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

R: $\dfrac{1}{e}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{n+1}}$

R: 1

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}}{n}$, unde $u_{n+1} = u_n + r$, $u_1 > 0$, $r > 0$.

R: $\dfrac{r}{e}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}}{\dfrac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}}$, unde $u_{n+1} = u_n + r$, $u_1 > 0$, $r > 0$.

R: $\dfrac{2}{e}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n+1]{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n+1}}}{\sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}}$, unde $u_{n+1} = u_n + r$, $u_1 > 0$, $r > 0$.

R: 1

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)}$, unde $P(X) = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \dots + a_1 X + 1$

Prin particularizare obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

R: 1

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n!}$

R: 1

14. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sqrt[n]{\sin\dfrac{\pi}{2} \cdot \sin\dfrac{\pi}{3} \cdot \dots \cdot \sin\dfrac{\pi}{n}}$

R: πe

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{\ln n}$

R: 0

16. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{u_n}{n(n-1)}}$ dacă $(u_n)_n$ este definit prin

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 0 \\ u_{n+1} - 2a_n + u_{n-1} = n \end{cases}$$

R: 1

17. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sqrt[n]{\dfrac{b(n+a)}{n!}}$, $b \in (0, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$

R: e

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}$

R: $\dfrac{1}{4}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{k+(n-k)}{n}\right)}$

R: $\dfrac{4}{e}$