Capitolul 3 Serii de numere reale

3.1 Definiţie şi exemple

Definiţie 3.1

Fie $(a_n)_n$ *un şir de numere reale. O expresie de forma*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

se numeşte serie de numere reale şi se notează prin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Şirul $(S_n)_n$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, *se numeşte şirul sumelor parţiale.*

Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă dacă şirul sumelor parţiale* $(S_n)_n$ *este convergent; limita şirului* $(S_n)_n$ *se va numi suma seriei şi notăm* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

O serie care nu este convergentă se numeşte divergentă.

Prin natura unei serii înţelegem convergenţa sau divergenţa acesteia. ◇

Exemplul 3.1 Seria geometrică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $q \in (-1, 1)$ şi are suma $\dfrac{1}{1-q}$.

Dacă $|q| \geq 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă.

Soluţie Suma parţială de rang n este

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & , q \neq 1; \\ n+1 & , q = 1. \end{cases}$$

Şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ este convergent pentru $q \in (-1, 1)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, prin urmare seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $q \in (-1, 1)$, suma seriei fiind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Dacă $|q| \geq 1$, atunci şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ este divergent, prin urmare seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă. ◁

Exemplul 3.2 Seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ este o serie divergentă.

Remarcă Această serie se numeşte serie armonică deoarece

$$a_n = \frac{1}{n} = \frac{2}{2n} = \frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{2}{\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{a_{n+1}}}, \ (\forall) n \geq 2,$$

deci fiecare termen al seriei (mai puţin primul) este media armonică a vecinilor săi.

Soluţie Suma parţială de ordinul n este

$$S_n \ = \ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln n$$

Deoarece şirul cu termenul general $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ este convergent (limita sa este constanta lui Euler $c = 0,5772...$), rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ şi prin urmare seria armonică este divergentă. ◁

Exemplul 3.3 Seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă dacă $\alpha > 1$ şi divergentă dacă $\alpha \leq 1$.

Exemplul 3.4 Seria armonică alternată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ este o serie convergentă şi are suma $\ln 2$.

Exemplul 3.5 Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ este convergentă şi are suma e.

Remarcă Notaţia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ semnifică faptul că seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ au aceeaşi natură, adică sunt simultan convergente sau simultan divergente.

Propoziţie 3.1

1. *Natura unei serii nu se modifică dacă se elimină sau se adaugă un număr finit de termeni*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n,\ n_0 \in \mathbb{N}.$$
2. *Natura unei serii nu se modifică dacă se înmulţesc toţi termenii seriei cu o constantă $c \neq 0$*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} c a_n.$$
3. *Dacă seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sunt convergente având sumele a, respectiv b, atunci este convergentă şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ şi are suma $a + b$.*

◇

Exemplul 3.6 Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{6^n}$ este convergentă şi are suma $\frac{33}{14}$.

Soluţie Termenul general al seriei
$$\frac{2^n + (-1)^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$
şi cum seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$ sunt converegnte , rezultă că seria considerată converge; în plus, suma seriei este
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{6^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{6}} = \frac{3}{2} + \frac{6}{7} = \frac{33}{14}.\end{aligned}$$
◁

Exerciţiu 3.1 Să se determine sumele seriilor:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\sqrt{2})\,(n+\sqrt{2}+1)}$ **R:** $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ **R:** $\frac{1}{2}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$

R: $\frac{1}{4}$

4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{4n-3}{n(n-2)(n+3)}$

R: $\frac{199}{200}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$

R: 1

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{(n+1)!}$

R: $\frac{1}{2}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$

R: $\frac{1}{4}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{5^n}$

R: $\frac{5}{6}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 2^n - 6^{n-1} + 2 \cdot 3^{n+1}}{12^n}$

R: $\frac{103}{30}$

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

R: $-\ln 2$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$

R: $\ln 3$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$

R: $\frac{\pi}{4}$; folosim $\arctan \frac{a-b}{1+ab} = \arctan a - \arctan b,\ a, b > 0$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

R: $\ln 2$

3.2 Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

Propoziţie 3.2. Criteriul necesar de convergenţă

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ◇

Dem. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ fiind convergentă, înseamnă că şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, este convergent. Fie $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

Remarcă Reciproca nu este, în general, adevărată. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ dar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Remarcă Dacă şirul de numere reale $(a_n)_n$ nu are limita 0, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Exemplul 3.7 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este divergentă.

Soluţie Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este divergentă. ◁

Exerciţiu 3.2 Să se arate că următoarele serii sunt divergente:

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

Teoremă 3.1. Criteriul general Cauchy

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă*

$$(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon,\ (\forall)p \in \mathbb{N}^* \ |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dem. Notăm cu $(S_n)_n$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, şirul sumelor parţiale. Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ serie convergentă} \iff (S_n)_n \text{ şir convergent} \iff (S_n)_n \text{ şir fundamental}$$
$$\iff (\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon,\ (\forall)p \in \mathbb{N}^* : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$
$$\iff (\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon,\ (\forall)p \in \mathbb{N}^* : |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

□

Exemplul 3.8 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(na)}{2^n}$, $a \in \mathbb{R}$ este convergentă.

Soluţie Notăm cu $a_n = \dfrac{\sin(na)}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $\varepsilon > 0$. Alegem $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned}
|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| &= \left|\frac{\sin(n+1)a}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)a}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)a}{2^{n+p}}\right| \\
&\leq \frac{|\sin(n+1)a|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)a|}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{|\sin(n+p)a|}{2^{n+p}} \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Conform criteriului general Cauchy, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. ◁

Propoziţie 3.3. Criteriul de convergenţă absolută

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *este convergentă, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă.*

Dem. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ este convergentă, conform criteriului general Cauchy, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon,\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon,\ (\forall)p \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon,\ (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon,\ (\forall)p \in \mathbb{N}^*$$

ceea ce, conform criteriului general Cauchy, înseamnă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă. □

Remarcă Reciproca nu este, în general, adevărată. De exemplu, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ este convergentă dar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ este divergentă.

Definiţie 3.2. Serie absolut convergentă

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *este convergentă, atunci spunem că seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este absolut convergentă. O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numeşte semiconvergentă.* ◇

Teoremă 3.2. Criteriul Dirichlet

Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ *două şiruri de numere reale. Dacă*

(i) *şirul* $(a_n)_n$ *este descrescător cu limita* 0,

(ii) *şirul* $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right)_n$ *este mărginit,*

atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *este convergentă.* ◇

Dem. Vom arăta convergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ folosind criteriul general Cauchy.

Notăm cu $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$. Şirul $(B_n)_n$ este mărginit, deci există $M > 0$ astfel încât $|B_n| \leq M$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, rezultă că există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n = |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ (şirul $(a_n)_n$ fiind cu termeni pozitivi). Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| \\
&= |a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \cdots + a_{n+p}(B_{n+p} - B_{n+p-1})| \\
&= | - a_{n+1}B_n + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + B_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots \\
&\cdots + B_{n+p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}B_{n+p}| \\
&\leq a_{n+1}\left|B_n\right| + \left|B_{n+1}\right|(a_{n+1} - a_{n+2}) + \left|B_{n+2}\right|(a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots \\
&\cdots + \left|B_{n+p-1}\right|(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}\left|B_{n+p}\right| \\
&\leq M\left(a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \cdots + a_{n+p-1} - a_{n+p} + a_{n+p}\right) \\
&= 2Ma_{n+1} < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Exemplul 3.9 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

este convergentă.

Soluţie Şirul cu termenul general $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este descrescător şi are limita 0.

Notăm cu $b_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi cu $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Avem $b_{4k+1} = -1$, $b_{4k+2} = -1$, $b_{4k+3} = 1$ şi $b_{4k+4} = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $B_{4k+1} = -1$, $B_{4k+2} = -2$, $B_{4k+3} = -1$ şi $B_{4k+4} = 0$, $k \in \mathbb{N}$, prin urmare $-2 \leq B_n \leq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, adică şirul $(B_n)_n$ este mărginit.

Conform criteriului Dirichlet, seria este convergentă. ◁

Exerciţiu 3.3 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \sin n^2}{\sqrt{n}}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \cos n^2}{n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right) \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \tan \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

Corolar 3.1. Criteriul Leibniz

Dacă şirul $(a_n)_n$ este descrescător cu limita 0, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ este convergentă. ◇

Exemplul 3.10 Seria

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

este convergentă.

Soluţie Notăm cu $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \underset{C-S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

şi

$$a_{n+1}-a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \ln n}{n(n+1)} < 0,\ (\forall) n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

Conform criteriului Leibniz, seria $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ converge, deci seria considerată converge. ◁

Remarcă Condiţia de monotonie din criteriul lui Leibniz este esenţială, după cum se poate vedea din următorul exemplu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}.$$

Este clar că şirul cu termenul general $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ are limita 0 însă acesta nu este descrescător. Dacă presupunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$ converge, cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2}{n}$ converge, obţinem că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n} + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\right)$$

este convergentă, ceea ce este absurd. Rămâne deci că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$ diverge.

Exerciţiu 3.4 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \dfrac{1}{n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

Teoremă 3.3. Criteriul Abel

Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ *două şiruri de numere reale. Dacă*

(i) *seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă,*

(ii) $(b_n)_n$ *este un şir monoton şi mărginit,*

atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *este convergentă.*

◇

Dem. $(b_n)_n$ fiind un şir monoton şi mărginit, este convergent; notăm cu b limita şirului. Dacă şirul $(b_n)_n$ este crescător, atunci şirul $(b - b_n)_n$ este un şir descrescător cu limita 0. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ fiind convergentă, rezultă că şirul sumelor parţiale este mărginit. Conform criteriului Dirichlet, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(b-b_n)$ este convergentă şi cum seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b a_n$ este de asemenea convergentă, obţinem convergenţa seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b a_n - a_n(b - b_n))\,.$$

Asemănător se discută cazul în care şirul $(b_n)_n$ este descrescător. □

Exemplul 3.11 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

este convergentă.

Soluţie Notăm cu $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ şi $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Deoarece şirul $\left(\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right)_n$ este descrescător cu limita 0, din criteriul Leibniz avem convergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Şirul $(b_n)_n$ este un şir crescător şi mărginit. Conform criteriului Abel, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ este convergentă. ◁

3.3 Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

Remarcă Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ are termeni pozitivi ($a_n \geq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$), atunci şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ este crescător şi prin urmare

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge } \iff (S_n)_n \text{ este mărginit.}$$

3.3.1 Criterii de comparaţie

Teoremă 3.4. Criteriul I de comparaţie

Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ *două şiruri de numere reale astfel încât*

$$0 \leq a_n \leq b_n,\ (\forall) n \geq n_0\ (n_0 \in \mathbb{N} \textit{ fixat}).$$

Au loc următoarele implicaţii:

1. *dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge, atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge;*
2. *dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge, atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *diverge.*

◇

Dem. Notăm cu $A_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ şi $B_n = \sum_{k=n_0}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Din ipoteză avem $A_n \leq B_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

1. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, atunci seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge, prin urmare şirul $(B_n)_{n \geq n_0}$ este mărginit superior. Deoarece $A_n \leq B_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, rezultă că şirul $(A_n)_{n \geq n_0}$ este mărginit superior. Atunci seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, prin urmare seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

2. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, atunci seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge, prin urmare $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$. Deoarece $A_n \leq B_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$. Atunci seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge, prin urmare seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

□

Exemplul 3.12 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}$ este convergentă.

Soluţie Avem

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n(n+1)} < e \cdot \frac{1}{n(n+1)}, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n(n+1)}$ este convergentă deoarece

$$S_n = e \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = e \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = e\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e.$$

Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}$ este convergentă. ◁

Exemplul 3.13 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ este divergentă.

Soluţie Deoarece

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} > e \cdot \frac{1}{n}, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ este divergentă. ◁

Exerciţiu 3.5 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+7}$

R: convergentă

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{n^2-7}$

R: divergentă

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n+7}}$

R: convergentă

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

R: convergentă

5. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

R: divergentă

6. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

R: convergentă

7. $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$

R: convergentă

8. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$

R: divergentă

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

R: convergentă

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $a > 0$

R: convergentă pentru $a < 1$; divergentă pentru $a \geq 1$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}$

R: divergentă

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$

R: convergentă

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

R: convergentă pentru $\alpha > 2$; divergentă pentru $\alpha \leq 2$; folosim inegalitatea $\frac{k-1}{k} < \frac{k}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right)$

R: convergentă

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$, $p > 1$

R: convergentă

Teoremă 3.5. Criteriul II de comparaţie

Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ două şiruri de numere reale cu $a_n, b_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ şi astfel încât

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \ (\forall) n \geq n_0 \ (n_0 \in \mathbb{N} \text{ fixat}).$$

Au loc următoarele implicaţii:

1. *Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.*
2. *Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.*

◇

Dem. Pentru $n \geq n_0$ avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n} \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \Longrightarrow a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n.$$

Aplicăm primul criteriu de comparaţie şi ţinem seama de faptul că $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. □

Exemplul 3.14 Seria

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(2 - \sqrt{e}\right)\left(2 - \sqrt[3]{e}\right) \cdots \left(2 - \sqrt[n]{e}\right)$$

este divergentă.

Soluţie Notăm cu $\alpha_n = \left(2 - \sqrt{e}\right)\left(2 - \sqrt[3]{e}\right) \cdots \left(2 - \sqrt[n]{e}\right)$, $n \geq 2$. Avem

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 2 - \sqrt[n+1]{e} > 2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

şi cum seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ este divergentă, rezultă că seria $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n$ este divergentă, prin urmare seria considerată este divergentă. ◁

Exerciţiu 3.6 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n \cdot n!}{n^n}$

   R: divergentă

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{e^n \cdot n!}$

   R: divergentă

Teoremă 3.6. Criteriul III de comparaţie

Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ două şiruri de numere reale cu $a_n, b_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

1. *Dacă $L \in (0,\infty)$, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.*
2. *Dacă $L = 0$ şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.*
3. *Dacă $L = \infty$ şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.*

◇

Dem.

1. Dacă $L \in (0,\infty)$, atunci există un rang $n_L \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_L$ avem

$$\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3L}{2} \Longleftrightarrow \frac{L}{2} \cdot b_n \leq a_n \leq \frac{3L}{2} \cdot b_n.$$

Se aplică acum primul criteriu de comparaţie.

2. Dacă $L = 0$, atunci există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ avem

$$\frac{a_n}{b_n} \leq 1 \Longleftrightarrow a_n \leq b_n.$$

Se aplică acum primul criteriu de comparaţie.

3. Dacă $L = \infty$, atunci există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ avem

$$\frac{a_n}{b_n} \geq 1 \Longleftrightarrow b_n \leq a_n.$$

Se aplică acum primul criteriu de comparaţie.

□

Exemplul 3.15 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{\pi}{n}$ este divergentă.

Soluţie Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \pi = \pi \in (0,\infty),$$

rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{\pi}{n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, deci este divergentă. ◁

Exerciţiu 3.7 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

   R: divergentă

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + a}$, $a > -2$

   R: convergentă

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^n + n}$, $a > -1$

   R: convergentă pentru $a > 1$; divergentă pentru $a \in (-1, 1]$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\left(1 + a + a^2 + \cdots + a^n\right)}$, $a > 0$

R: convergentă pentru $a \geq 1$; divergentă pentru $a \in (0,1)$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\ln n}$

R: divergentă

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^{\alpha} \dfrac{a}{n}$, $a \in (0, \pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

R: convergentă pentru $\alpha > 1$; divergentă pentru $\alpha \leq 1$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(an+b)^{\alpha}}$, $a > 0$, $b > -a$, $\alpha \in \mathbb{R}$

R: convergentă pentru $\alpha > 1$; divergentă pentru $\alpha \leq 1$

8. $\sum\limits_{n=2} \left(\sqrt[n]{p} - 1 \right)$, $p > 1$

R: divergentă

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} \sin \dfrac{\pi}{n}$

R: convergentă pentru $p > 0$; divergentă pentru $p \leq 0$

10. $\sum\limits_{n=2} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)^p \ln \dfrac{n+1}{n-1}$

R: convergentă pentru $p > 0$; divergentă pentru $p \leq 0$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$, $a > 0$

R: convergentă pentru $a < \dfrac{1}{e}$; divergentă pentru $a \geq \dfrac{1}{e}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

R: divergentă

Teoremă 3.7. Criteriul de condensare Cauchy

Dacă $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$, *atunci*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

◇

Dem. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi considerăm $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Notăm cu $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ şi $T_k = 2^0 a_{2^0} + 2^1 a_{2^1} + \cdots + 2^k a_{2^k}$. Avem

$$\begin{aligned} S_n &\leq S_{2^{k+1}-1} \\ &= a_0 + a_{2^0} + (a_{2^1} + a_3) + (a_{2^2} + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \\ &\quad \cdots + \left(a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}\right) \\ &\leq a_0 + a_{2^0} + 2a_{2^1} + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= a_0 + T_k \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} S_n &\geq S_{2^k} \\ &= a_0 + a_{2^0} + a_{2^1} + (a_3 + a_{2^2}) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_{2^3}) + \cdots \\ &\quad \cdots + \left(a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}\right) \\ &\geq a_0 + a_{2^0} + a_{2^1} + 2a_{2^2} + 2^2 a_{2^3} + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} T_k \end{aligned}$$

deci
$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}T_k \le S_n < a_0 + T_k.$$

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge, atunci $(T_k)_k$ este un şir mărginit, ceea ce implică mărginirea şirului $(S_n)_n$ şi prin urmare convergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Analog se discută restul implicaţiilor. $\square$

Exemplul 3.16 Seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \le 1$.

Soluţie Dacă $\alpha \le 0$, atunci seria diverge deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ne 0$.

Dacă $\alpha > 0$, atunci şirul de numere pozitive $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ este descrescător şi prin urmare
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n,$$
deci seria converge dacă $\alpha > 1$ şi diverge dacă $0 < \alpha \le 1$. $\triangleleft$

Exemplul 3.17 Seria
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$
este divergentă.

Soluţie Avem
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \sim \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$
deci seria este divergentă. $\triangleleft$

Exerciţiu 3.8 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $p \in \mathbb{R}$
   R: convergentă pentru $p > 1$; divergentă pentru $p \le 1$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\ln n}$
   R: divergentă

3.3.2 Criterii directe

Teoremă 3.8. Criteriul rădăcinii Cauchy

Fie $(a_n)_n$, $a_n \ge 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Au loc:

1. *dacă $L < 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă;*
2. *dacă $L > 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă.*

$\diamond$

Remarcă Dacă $L = 1$, criteriul este ineficient. De exemplu, pentru seria divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ şi pentru seria convergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ avem de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Dem.

1. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, rezultă că există un rang $n_L \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_L$ avem

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2} \iff a_n \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^n.$$

Deoarece $\frac{L+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$ converge şi atunci, conform criteriului I de comparaţie, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă.

2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$, rezultă că există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, deci $a_n \geq 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, prin urmare şirul $(a_n)_n$ nu poate avea limita 0, de unde divergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

□

Exemplul 3.18 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ a > 0$$

este convergentă pentru $a < 1$ şi divergentă pentru $a \geq 1$.

Soluţie Notăm cu $a_n = a^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a.$$

Din criteriul rădăcinii avem că seria converge dacă $0 < a < 1$ şi diverge dacă $a > 1$. Dacă $a = 1$, atunci $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e \neq 0$, rezultă că seria diverge. ◁

Exerciţiu 3.9 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

   R: convergentă

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

   R: convergentă

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^n$, $a > 0$

   R: convergentă pentru $0 < a < 1$; divergentă pentru $a \geq 1$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n^n}$, $a > 0$

   R: convergentă

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha}$, $a > 0$

   R: convergentă pentru $0 < a < 1$ sau $a = 1, \alpha > 1$; divergentă pentru $a > 1$ sau $a = 1, \alpha \leq 1$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot n^{n+5}}{(3n+7)^n}$

   R: convergentă

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n$

   R: convergentă

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n n^n}{\sqrt{(16n^2+5n+1)^{n+1}}}$

   R: convergentă

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

   R: convergentă

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, $a > 0$

    R: convergentă pentru $0 < a < \frac{1}{e}$, divergentă pentru $a \geq \frac{1}{e}$

Teoremă 3.9. Criteriul raportului D'Alembert

Fie $(a_n)_n$, $a_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Au loc:*

1. *Dacă* $L < 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă;*
2. *Dacă* $L > 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

◇

Remarcă Dacă $L = 1$, criteriul este ineficient.

Dem.

1. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, rezultă că există un rang $n_L \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_L$ avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{L+1}{2} \Longleftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\left(\frac{L+1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{L+1}{2}\right)^{n}}.$$

Deoarece $\frac{L+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$ converge şi atunci, conform criteriului II de comparaţie, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă.

2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$, rezultă că există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, deci $a_{n+1} \geq a_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, prin urmare şirul $(a_n)_n$ nu poate avea limita 0, de unde divergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

□

Exemplul 3.19 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n},\ a > 0$$

este convergentă pentru $a < e$ şi divergentă pentru $a \geq e$.

Soluţie Notăm cu $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a n^n}{(n+1)^n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}.$$

Din criteriul raportului avem că seria converge pentru $0 < a < e$ şi diverge pentru $a > e$. Dacă $a = e$, atunci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \Longrightarrow a_{n+1} > a_n,\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*,$$

prin urmare şirul $(a_n)_n$ nu poate avea limita 0, de unde divergenţa seriei. ◁

Exerciţiu 3.10 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{3^n + 4^n}$, $p \in \mathbb{R}$

   R: convergentă

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$

   R: convergentă

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

   R: convergentă

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

   R: convergentă

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

R: convergentă

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

R: divergentă

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$

R: convergentă dacă $a \in (0, e)$; divergentă dacă $a \geq e$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

R: convergentă

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$, $a > 0$

R: divergentă

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}$, $a > 0$

R: convergentă dacă $a > 1$; divergentă dacă $a \in (0, 1]$

Teoremă 3.10. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $(a_n)_n$, $a_n > 0$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\exists) \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$. Au loc:

1. *Dacă $L > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă;*
2. *Dacă $L < 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă.*

◇

Remarcă Dacă $L = 1$, criteriul este ineficient.

Dem.

1. Deoarece $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L > 1$, rezultă că există un rang $n_L \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_L$ avem

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \frac{L+1}{2} \iff na_n - (n+1)a_{n+1} \geq \frac{L-1}{2}a_{n+1}$$
$$\iff a_{n+1} \leq \frac{2}{L-1}\left[na_n - (n+1)a_{n+1}\right].$$

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_L + 1$ avem

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_L} + a_{n_L+1} + \cdots + a_n \\ &\leq S_{n_L} + \frac{2}{L-1}\left[n_L a_{n_L} - (n_L+1)a_{n_L+1}\right] + \cdots + \frac{2}{L-1}\left[(n-1)a_{n-1} - na_n\right] \\ &= S_{n_L} + \frac{2}{L-1}\left[n_L a_{n_L} - na_n\right] < S_{n_L} + \frac{2n_L a_{n_L}}{L-1} \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că şirul $(S_n)_n$ este mărginit, prin urmare seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă.

2. Dacă $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L < 1$, rezultă că există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, deci $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ şi cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, din criteriul II de comparaţie rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă.

□

Exemplul 3.20 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)},\ a>0$$

este convergentă pentru $a>2$ şi divergentă pentru $0<a\le 2$.

Soluţie Notăm cu $a_n = \dfrac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a+n} = 1,$$

deci criteriul raportului nu poate decide natura seriei.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n}{n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(a-1)}{n+1} = a-1.$$

Din criteriul Raabe-Duhamel avem că seria converge pentru $a>2$ şi diverge pentru $0<a<2$.

Dacă $a=2$, atunci

$$a_n = \frac{n!}{2\cdot 3\cdots(n+1)} = \frac{1}{n+1},\ n\in\mathbb{N}^*,$$

prin urmare seria este divergentă în acest caz. ◁

Exerciţiu 3.11 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+7(n-1)]!!}{[3+7(n-1)]!!}$

   R: divergentă

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{\left(2+\sqrt{1}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)\cdots\left(2+\sqrt{n}\right)}$

   R: convergentă

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}},\ a>0$

   R: convergentă pentru $0<a<\frac{1}{e}$; divergentă pentru $a\ge\frac{1}{e}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!},\ a>0$

   R: divergentă

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(a+1)\cdots(a+n)}\right]^2\cdot(2n+1),\ a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

   R: convergentă pentru $a>0$; divergentă pentru $a<0$, $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+c)\cdots[a+(n-1)c]}{b(b+c)\cdots[b+(n-1)c]},\ a,b,c>0$

   R: convergentă dacă $b>a+c$; divergentă dacă $0<b\le a+c$

Teoremă 3.11. Criteriul Bertrand

Fie $(a_n)_n$, $a_n>0$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$ astfel încât $(\exists)\ \lim\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]=L$. Au loc:

1. *Dacă $L>1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ este convergentă;*
2. *Dacă $L<1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ este divergentă.*

◇

Remarcă Dacă $L=1$, criteriul este ineficient.

Dem.

1. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] = L > 1$, rezultă că există un rang $n_L^1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_L^1$ avem

$$\ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] \geq \frac{L+1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow n\ln n\, a_n - (n+1)\ln n\, a_{n+1} \geq \frac{L+1}{2} a_{n+1}$$
$$\Longleftrightarrow n\ln n\, a_n - (n+1)\ln (n+1)\, a_{n+1} \geq \left[\frac{L+1}{2} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] a_{n+1}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{L+1}{2} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] = \frac{L-1}{2}$, rezultă că există un rang $n_L^2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{L+1}{2} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \frac{L-1}{4}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_L^2$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_L = \max\left\{n_L^1, n_L^2\right\}$ avem

$$a_{n+1} \leq \frac{4}{L-1}\left[n\ln n\, a_n - (n+1)\ln(n+1)\, a_{n+1}\right].$$

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_L + 1$ avem

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_L} + a_{n_L+1} + \cdots + a_n \\ &\leq S_{n_L} + \frac{2}{L-1}\left[n_L \ln n_L\, a_{n_L} - n\ln n\, a_n\right] \\ &< S_{n_L} + \frac{2 n_L \ln n_L\, a_{n_L}}{L-1} \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că şirul $(S_n)_n$ este mărginit, prin urmare seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă.

2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] = L < 1$, rezultă că există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] \leq 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, de unde

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}},\ (\forall) n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_1, 2\}$$

şi cum seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ este divergentă, din criteriul II de comparaţie rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă.

□

Exemplul 3.21 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)n!}x^n,\ a, b, c, x > 0$$

este convergentă dacă $x \in (0,1)$ sau dacă $x = 1$ şi $c > a + b$. Altfel seria este divergentă.

Soluţie

Notăm cu $a_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)n!}x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}x = x.$$

Din criteriul raportului, seria converge dacă $x \in (0,1)$ şi diverge dacă $x > 1$. Dacă $x = 1$

criteriul raportului nu poate decide natura seriei. Avem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(c+n)(n+1)}{(a+n)(b+n)}-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(c+1-a-b)+n(c-ab)}{(a+n)(b+n)}\\ &= c+1-a-b.\end{aligned}$$

Din criteriul Raabe-Duhamel avem că seria converge pentru $c > a+b$ şi diverge pentru $c < a+b$. Dacă $c = a+b$, atunci

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] &= \lim_{n\to\infty} \ln n\left[\frac{n^2+n(a+b-ab)}{(a+n)(b+n)}-1\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\cdot\frac{-abn(n+1)}{(a+n)(b+n)}=0\end{aligned}$$

prin urmare, din criteriul Bertrand rezultă că seria este divergentă în acest caz. ◁

Exerciţiu 3.12 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 5\cdots(4n-3)}{3\cdot 7\cdots(4n-1)}\right)^2$

   R: divergentă

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!n^q}$, $p>0$

   R: convergentă dacă $p<q$; divergentă dacă $p\geq q$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\frac{1}{n^q}$

   R: convergentă dacă $p > 2(1-q)$; divergentă dacă $p \leq 2(1-q)$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$

   R: convergentă dacă $\alpha(q-p) > 1$; divergentă dacă $\alpha(q-p)\leq 1$

Teoremă 3.12. Criteriul logaritmic

Fie $(a_n)_n$, $a_n>0$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $(\exists)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=L$. *Au loc:*

1. *Dacă* $L>1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *este convergentă;*
2. *Dacă* $L<1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *este divergentă.*

◇

Remarcă Dacă $L=1$, criteriul este ineficient.

Dem.

1. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=L>1$, rezultă că există un rang $n_L\in\mathbb{N}$ astfel încât $(\forall)n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_L$ avem

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geq\frac{L+1}{2}\iff a_n\leq\frac{1}{n^{\frac{L+1}{2}}}.$$

Deoarece $\frac{L+1}{2}>1$, rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{L+1}{2}}}$ converge şi atunci, conform criteriului I de comparaţie, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ este convergentă.

2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=L<1$, rezultă că există un rang $n_1\in\mathbb{N}$ astfel încât $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leq 1$, $(\forall)n\in$

$\mathbb{N}$, $n \geq n_1$, deci $a_n \geq \frac{1}{n}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ şi cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, conform criteriului I de comparaţie seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă.

□

Exemplul 3.22 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, \; a > 0$$

este convergentă pentru $0 < a < \frac{1}{e}$ şi divergentă pentru $a \geq \frac{1}{e}$.

Soluţie Notăm cu $a_n = a^{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a^{\ln n}}}{\ln n} = -\ln a.$$

Conform criteriului logaritmic, seria converge dacă $-\ln a > 1 \iff 0 < a < \frac{1}{e}$ şi diverge $-\ln a < 1 \iff a > \frac{1}{e}$. Dacă $a = \frac{1}{e}$, atunci $a_n = \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$, deci seria diverge în acest caz. ◁

Exerciţiu 3.13 Să se stabilească natura următoarelor serii:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$, $a > 0$

   R: convergentă dacă $0 < a < \frac{1}{e}$; divergentă dacă $a \geq \frac{1}{e}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\sqrt{n}}$

   R: convergentă

3. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}$

   R: convergentă dacă $c = 0$ şi $-\frac{a}{d} > 1$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n^{\alpha}}$

   R: divergentă