

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA-MG

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE MATRIZES

- 1) (Esa 2023) Os Batalhões de Inteligência Militar desenvolvem formas para o envio de mensagens secretas, sendo uma delas os códigos matemáticos que seguem os passos abaixo:
- (a) O destinatário e o remetente possuem uma matriz chave C ;
 - (b) O destinatário recebe do remetente uma matriz P , tal que $MC = P$, onde M é a matriz da mensagem a ser codificada;
 - (c) Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto;
 - (d) Considera-se o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k , w e y ;
 - (e) O número zero corresponde ao ponto de exclamação;
 - (f) A mensagem é lida encontrando a matriz M , fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue:

$$m_{11} \ m_{12} \ m_{13} \ m_{21} \ m_{22} \ m_{23} \ m_{31} \ m_{32} \ m_{33}$$

Considere as matrizes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Com base nas informações descritas, qual alternativa apresenta a mensagem enviada por meio da matriz M ?

- a) Brasil!
 - b) Território!
 - c) Pantanal!
 - d) Montanha!
 - e) Guerreiro!
- 2) (Upf 2023) A criptografia é constituída por conjunto de técnicas para proteger, de forma segura, uma informação de modo que apenas o emissor e o receptor consigam comprehendê-la. É utilizada em comunicações digitais, como na troca de mensagens ou em pagamentos online. Uma das técnicas de se criptografar consiste em identificar cada letra do alfabeto com um determinado número e escrever a mensagem na forma de uma matriz. O remetente codifica essa matriz de mensagem usando uma matriz de codificação, enquanto o destinatário consegue ler a mensagem usando uma matriz de decodificação. Esse processo é validado em razão de que as matrizes de codificação e decodificação são inversas uma da outra.

Seja C a matriz de codificação e D a matriz de decodificação, tem-se que

$$D \cdot C = C \cdot D = I,$$

onde I é a matriz identidade. Suponha que o remetente codifica uma mensagem com a seguinte matriz de codificação:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

A matriz de decodificação D que o destinatário deverá usar para ler a mensagem será:

- a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

- 3) **(Puc-GO 2020)** A utilização de matrizes pode ser útil na Criptografia, ciência que estuda maneiras eficientes para troca de mensagens de modo mais seguro. Uma das formas de se criptografar uma mensagem de texto é estabelecer uma relação biunívoca entre as letras do alfabeto e os números naturais. Por exemplo, a = 1, b = 2 e, assim, sucessivamente. Em seguida, a mensagem é colocada numa matriz quadrada X e multiplicada por uma matriz invertível C , chamada matriz Chave, resultando em $X \cdot C = Y$, em que a matriz Y é a mensagem criptografada. Ao receber a mensagem criptografada Y , multiplica-se pela inversa de C : $(X \cdot C) \cdot C^{-1} = X \cdot (C \cdot C^{-1}) = X$, obtendo-se a mensagem original.

Supondo que tenha sido enviada a seguinte mensagem criptografada com base na relação biunívoca entre as letras do alfabeto e os números naturais, tal como no exemplo mencionado e que essa mensagem criptografada tenha sido enviada na forma da matriz

$$Y = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

e sabendo que a matriz de Chave é a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

assinale a alternativa correta que apresenta a mensagem transmitida, armazenada em forma de matriz, linha a linha:

- a) Fato.
- b) Dado.
- c) Casa.
- d) Faca.

- 4) (Fuvest 2019) A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo * corresponde a um espaço).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja **FUVEST**, e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

respectivamente. A matriz em que se escreve a mensagem é

$$M = \begin{pmatrix} F & U & V \\ E & S & T \end{pmatrix},$$

que, numericamente, corresponde a

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

Para fazer a codificação da mensagem, é feito o produto de matrizes

$$N = A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{pmatrix}.$$

O destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora com a matriz codificada recebida:

$$M = B \cdot N = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

a) Se a matriz codificadora é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e a mensagem a ser transmitida é **ESCOLA**, qual é a mensagem codificada que o destinatário recebe?

b) Se a matriz codificadora é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e o destinatário recebe a matriz codificada

$$N = \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix},$$

qual foi a mensagem enviada?

c) Nem toda matriz A é eficaz para enviar mensagens. Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix},$$

encontre 4 sequências de 4 letras de forma que as respectivas matrizes codificadas sejam sempre iguais a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) (Famerp 2019) A matriz quadrada

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

representa uma mensagem codificada. A mensagem decodificada é a matriz quadrada

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

tal que M^{-1} é a inversa da matriz M . Sendo assim, o valor de $x + y + z + w$ é:

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) 1/2
- e) -1/2

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Leia o texto para responder à(s) questão(ões) a seguir.

A tabela a seguir será usada para a transmissão de mensagens criptografadas em matrizes. A criptografia é feita ao se multiplicar a matriz pela matriz-mensagem gerando a matriz criptografada $M_C = C \cdot M$.

0	7	G	14	N	21	U
1	A	8	H	15	O	22
2	B	9	I	16	P	23
3	C	10	J	17	Q	24
4	D	11	K	18	R	25
5	E	12	L	19	S	26
6	F	13	M	20	T	27

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por exemplo, a matriz-mensagem

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 20 & 15 & 21 & 0 \\ 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 14 & 19 & 16 & 5 & 18 \end{pmatrix},$$

que significa ESTOU NO INSPER, depois de criptografada por C , vira a matriz

$$M_C = \begin{pmatrix} 33 & 67 & 59 & 46 & 5 & 18 \\ 28 & 48 & 39 & 31 & 5 & 18 \\ 70 & 111 & 78 & 62 & 10 & 36 \end{pmatrix}.$$

Ao receber M_C , o destinatário deve multiplicá-la pela matriz decodificadora D , da mesma ordem da matriz C , para recuperar a mensagem original.

6) (Insper 2018) A matriz decodificadora D será

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 4 \\ 11 & 11 & 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

7) (Insper 2018) Modificando-se ligeiramente a matriz C o envio da mensagem **EU ESTUDEI NO INSPER** torna-se possível no sistema descrito. Uma matriz C que funcione para a transmissão dessa mensagem tem que ser, necessariamente,

a) quadrada e igual à sua transposta.

b) de ordem 4×7 e inversível

c) de ordem 4×4 e inversível.

d) de ordem 7×7 e inversível.

e) quadrada com determinante negativo

8) (Fgv 2017) Uma matriz A de ordem 2 transmite uma palavra de 4 letras em que cada elemento da matriz representa uma letra do alfabeto.

A fim de dificultar a leitura da palavra, por se tratar de informação secreta, a matriz é multiplicada pela matriz $A \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ obtendo-se a matriz codificada $B.A$.

Sabendo que a matriz $B \cdot A$ é igual a $\begin{pmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{pmatrix}$, podemos afirmar que a soma dos elementos da matriz é:

- a) 46
 - b) 48
 - c) 49
 - d) 47
 - e) 50
- 9) . (Ueg 2016) Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes A e B , ambas de ordem 2×2 onde cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é, $a = 1, b = 2, c = 3, \dots, z = 26$. Por exemplo, se a resolução de $A \cdot B$ for igual a $\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 18 & -18 \end{pmatrix}$ logo a mensagem recebida é **amor**. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi **flor** e a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ então a matriz A é:
- a) $\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$
 - b) $\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$
 - c) $\begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$
 - d) $\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$
- 10) (Uel 2013) Atualmente, com a comunicação eletrônica, muitas atividades dependem do sigilo na troca de mensagens, principalmente as que envolvem transações financeiras. Os sistemas de envio e recepção de mensagens codificadas chamam-se Criptografia. Uma forma de codificar mensagens é trocar letras por números, como indicado na tabela-código a seguir.

	1	2	3	4	5
1	Z	Y	X	V	U
2	T	S	R	Q	P
3	O	N	M	L	K
4	J	I	H	G	F
5	E	D	C	B	A

Nessa tabela-código, uma letra é identificada pelo número formado pela linha e pela coluna, nessa ordem. Assim, o número 32 corresponde à letra *N*.

A mensagem final *M* é dada por

$$A + B = M,$$

onde B é uma matriz fixa (secreta) e A é a matriz enviada ao receptor legal. Cada linha da matriz M corresponde a uma palavra, sendo o 0 a ausência de letras ou espaço entre palavras.

José tuitava durante o horário de trabalho quando recebeu uma mensagem do seu chefe, que continha uma matriz A . De posse da matriz B e da tabela-código, ele decodificou a mensagem.

O que a chefia informou a José?

Dados:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 26 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 31 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 18 & 22 & -20 & 17 & 0 \\ 44 & -13 & 8 & 30 & 12 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Sorria você esta sendo advertido.
- b) Sorria você esta sendo filmado.
- c) Sorria você esta sendo gravado.
- d) Sorria você esta sendo improdutivo.
- e) Sorria você esta sendo observado.

- 11) **(UFF 2011)** A transmissão de mensagens codificadas em tempos de conflitos militares é crucial. Um dos métodos de criptografia mais antigos consiste em permutar os símbolos das mensagens. Se os símbolos são números, uma permutação pode ser efetuada usando-se multiplicações por matrizes de permutação, que são matrizes quadradas que satisfazem as seguintes condições:

- cada coluna possui um único elemento igual a 1 (um) e todos os demais elementos são iguais a zero;
- cada linha possui um único elemento igual a 1 (um) e todos os demais elementos são iguais a zero.

Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

permute os elementos da matriz coluna

$$Q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

transformando-a na matriz

$$P = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}, \quad \text{pois } P = M \cdot Q.$$

Pode-se afirmar que a matriz que permuta

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

transformando-a em

$$\begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix},$$

é

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12) (Uel 2006) Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

- 1) Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C ;
- 2) O destinatário recebe do remetente uma matriz P , tal que $MC = P$, onde M é a matriz mensagem a ser decodificada;
- 3) Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: $1 = a, 2 = b, 3 = c, \dots, 23 = z$;
- 4) Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k, w e y;
- 5) O número zero corresponde ao ponto de exclamação;
- 6) A mensagem é lida encontrando a matriz M , fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz, conforme segue:

$$m_{11} \ m_{12} \ m_{13} \ m_{21} \ m_{22} \ m_{23} \ m_{31} \ m_{32} \ m_{33}$$

Considere as matrizes:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, assinale a alternativa que apresenta a mensagem que foi enviada por meio da matriz M .

- a) Boasorte!
- b) Boaprova!
- c) Boatarde!
- d) Ajudeme!
- e) Socorro!

13) (Uff 2005) Um dispositivo eletrônico, usado em segurança, modifica a senha escolhida por um usuário, de acordo com o procedimento descrito a seguir.

A senha escolhida $S_1S_2S_3S_4$ deve conter quatro dígitos, representados por S_1 , S_2 , S_3 e S_4 . Esses dígitos são, então, transformados nos dígitos M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}$$

em que P é a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se a senha de um usuário, já modificada, é 0110, isto é, $M_1 = 0$, $M_2 = 1$, $M_3 = 1$ e $M_4 = 0$, pode-se afirmar que a senha escolhida pelo usuário foi:

- a) 0011
- b) 0101
- c) 1001
- d) 1010
- e) 1100