

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA-MG

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EXERCÍCIO DE MATRIZES

1) (Esa 2023) Os Batalhões de Inteligência Militar desenvolvem formas para o envio de mensagens secretas, sendo uma delas os códigos matemáticos que seguem os passos abaixo:

- (a) O destinatário e o remetente possuem uma matriz chave C ;
- (b) O destinatário recebe do remetente uma matriz P , tal que $MC = P$, onde M é a matriz da mensagem a ser codificada;
- (c) Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto;
- (d) Considera-se o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k , w e y ;
- (e) O número zero corresponde ao ponto de exclamação;
- (f) A mensagem é lida encontrando a matriz M , fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue:

$$m_{11} \ m_{12} \ m_{13} \ m_{21} \ m_{22} \ m_{23} \ m_{31} \ m_{32} \ m_{33}$$

Considere as matrizes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Com base nas informações descritas, qual alternativa apresenta a mensagem enviada por meio da matriz M ?

- a) Brasil!
 - b) Território!
 - c) Pantanal!
 - d) Montanha!
 - e) Guerreiro!
- 2) (Upf 2023) A criptografia é constituída por conjunto de técnicas para proteger, de forma segura, uma informação de modo que apenas o emissor e o receptor consigam comprehendê-la. É utilizada em comunicações digitais, como na troca de mensagens ou em pagamentos online. Uma das técnicas de se criptografar consiste em identificar cada letra do alfabeto com um determinado número e escrever a mensagem na forma de uma matriz. O remetente codifica essa matriz de mensagem usando uma matriz de codificação, enquanto o destinatário consegue ler a mensagem usando uma matriz de decodificação. Esse processo é validado em razão de que as matrizes de codificação e decodificação são inversas uma da outra.

Seja C a matriz de codificação e D a matriz de decodificação, tem-se que

$$D \cdot C = C \cdot D = I,$$

onde I é a matriz identidade. Suponha que o remetente codifica uma mensagem com a seguinte matriz de codificação:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

A matriz de decodificação D que o destinatário deverá usar para ler a mensagem será:

- a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

- 3) **(Puc-GO 2020)** A utilização de matrizes pode ser útil na Criptografia, ciência que estuda maneiras eficientes para troca de mensagens de modo mais seguro. Uma das formas de se criptografar uma mensagem de texto é estabelecer uma relação biunívoca entre as letras do alfabeto e os números naturais. Por exemplo, a = 1, b = 2 e, assim, sucessivamente. Em seguida, a mensagem é colocada numa matriz quadrada X e multiplicada por uma matriz invertível C , chamada matriz Chave, resultando em $X \cdot C = Y$, em que a matriz Y é a mensagem criptografada. Ao receber a mensagem criptografada Y , multiplica-se pela inversa de C : $(X \cdot C) \cdot C^{-1} = X \cdot (C \cdot C^{-1}) = X$, obtendo-se a mensagem original.

Supondo que tenha sido enviada a seguinte mensagem criptografada com base na relação biunívoca entre as letras do alfabeto e os números naturais, tal como no exemplo mencionado e que essa mensagem criptografada tenha sido enviada na forma da matriz

$$Y = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

e sabendo que a matriz de Chave é a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

assinale a alternativa correta que apresenta a mensagem transmitida, armazenada em forma de matriz, linha a linha:

- a) Fato.
- b) Dado.
- c) Casa.
- d) Faca.

- 4) (Fuvest 2019) A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo * corresponde a um espaço).

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>U</i>	<i>V</i>	<i>W</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>	*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja **FUVEST**, e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$