Операторный метод анализа электрических цепей

Содержание

Определение

Преобразованием Лапласа называется преобразование функции $x(t)$ в функцию $X(s)$ при помощи оператора:

$$L(x(t)) = X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

$x(t)$ *- оригинал функции;*
$X(s)$ *- изображение по Лапласу функции* $x(t)$*;*
s *- комплексная переменная* $s = \alpha + i\omega, i = \sqrt{-1}$

Таким образом, с помощью формулы (1) функцию времени $x(t)$ преобразуют в функцию комплексной переменной $X(s)$. Формула (1) определяет прямое преобразование Лапласа. Возможно и обратное, позволяющее по изображению найти оригинал:

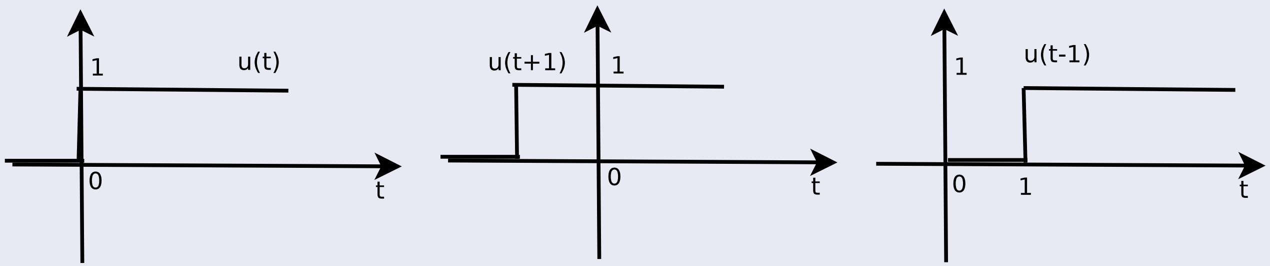
$$L^{-1}(X(s)) = x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} X(s)e^{st}ds \qquad (2)$$

где c - абсцисса сходимости функции $X(s)$.
Для большинства функций, всречающихся на практике, составлены таблицы соответствия между оригиналом и изображением.

Пример 1

Функция Хевисайда определяется следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1, & \text{если } t \geqslant 0. \end{cases}$$



Выполним прямое преобразование Лапласа:

$$L(u(t)) = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$$L(u(t-1) = \int_0^\infty u(t-1)e^{-st}dt = \int_1^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}|_1^\infty = -\frac{1}{s}e^{-s\infty} + \frac{1}{s}e^{-s} = \frac{1}{s}e^{-s}$$

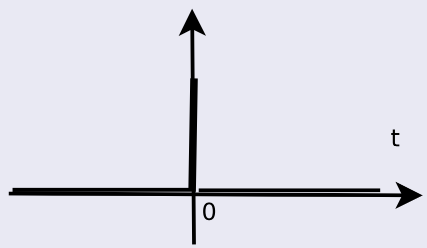
$$L(u(t-a)) = \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}|_a^\infty = -\frac{1}{s}e^{-s\infty} + \frac{1}{s}e^{-as} = \frac{1}{s}e^{-as}$$

Примеры прямого преобразования Лапласа

Пример 2

Функция Дирака (импульсная функция) определяется следующим образом:

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t) - u(t - \Delta t)}{\Delta t}$$



$$L(\delta(t)) = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^\infty \frac{u(t) - u(t - \Delta t)}{\Delta t} e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\int_0^\infty \frac{u(t)}{\Delta t} e^{-st} dt - \int_0^\infty \frac{u(t - \Delta t)}{\Delta t} e^{-st} dt \right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_0^\infty u(t) e^{-st} dt - \int_0^\infty u(t - \Delta t) e^{-st} dt \right) =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-\Delta t s}}{s} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\Delta t s}}{s \Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1 - e^{-\Delta t s})'}{(s \Delta t)'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s e^{-\Delta t s}}{s} = \lim_{\Delta t \to 0} e^{-\Delta t s} = 1$$

Итак, окончательно получаем:

$$L(\delta(t)) = 1$$

Пример 3

Пусть $x(t) = e^{-at}$, получаем:

$$X(s) = L(x(t)) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(a+s)} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

Таблица преобразования Лапласа

Оригинал	Изображение
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n, n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Широкое применение преобразования Лапласа обусловлено тем, что изображение некоторых функций оказывается проще их оригиналов и ряд операций, таких как интегрирование, дифференцирование над изображениями проще, чем соответствующие операции над оригиналами.

Свойства преобразования Лапласа

При использовании преобразования Лапласа необходимо знать и применять его свойства, некоторые из них формулируются следующим образом.

Теорема

Теорема линейности. Для любых постоянных A, B:

$$L(Ax_1(t) + Bx_2(t)) = AX_1(s) + BX_2(s)$$

где $X_1(s) = L(x_1(t)), X_2(s) = L(x_2(t))$

Теорема

Теорема подобия. Умножение аргумента оригинала на любое постоянное положительное число α приводит к делению аргумента изображения $X(s)$ на то же число α:

$$L(x(\alpha t)) = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Теорема

Теорема затухания. Умножение оригинала на функцию e^{at} , где a - любое действительное, комплексное число, влечет за собой смещение независимой переменной s:

$$L\left(e^{at}x(t)\right) = X(s - a)$$

Теорема

Теорема запаздывания.

$$L(x(t-\tau)) = e^{-s\tau}X(s)$$

Теорема

Теорема дифференцирования оригинала.

$$L(x'(t)) = sX(s) - x(0)$$

т.е. дифференцирование оригинала сводится к умножению его изображения на s и вычитанию x(0).

Данную теорему можно применить необходимое число раз:

$$L(x''(t)) = s(sX(s) - x(0)) - x'(0) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

$$L(x''(t)) = s(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) - x''(0) = s^3X(s) - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0)$$

и т.д.

Заметим, что если $x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n)}(0) = 0$, $L(x^{(n)}(t)) = s^nX(s)$

Теорема

Теорема об интегрировании оригинала. Интегрирование оригинала в пределах от 0 до t приводит к делению изображения на s:

$$L(\int_0^t x(t)dt) = \frac{X(s)}{s}$$

Примеры использования свойств преобразования Лапласа

Пример 1

Пусть $x(t) = \sin(10t)$, вычислить $L(x(t))$
Известно, что $L(\sin(t)) = \frac{1}{1+s^2}$
По теореме подобия получаем:

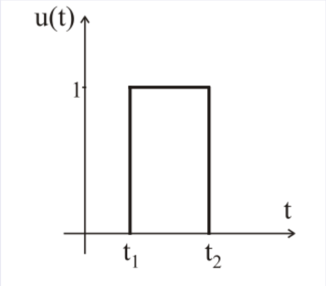
$$L(\sin(\alpha t)) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$$

В нашем случае $\alpha = 10$, поэтому получаем:

$$L(\sin(10t)) = \frac{10}{100 + s^2}$$

Пример 2

Определить изображение прямоугольного импульса единичной амплитуды, действующего на интервале времени $t_2 - t_1$



Прямоугольный импульс можно представить как разность функций Хевисайда: $u(t-t_1) - u(t-t_2)$ Тогда требуется найти:

$$L(u(t-t_1) - u(t-t_2))$$

По теореме линейности:

$$L(u(t-t_1) - u(t-t_2)) = L(u(t-t_1)) - L(u(t-t_2))$$

По теореме запаздывания имеем:

$$L(u(t-t_1)) - L(u(t-t_2)) = \frac{e^{-t_1 s}}{s} - \frac{e^{-t_2 s}}{s}$$

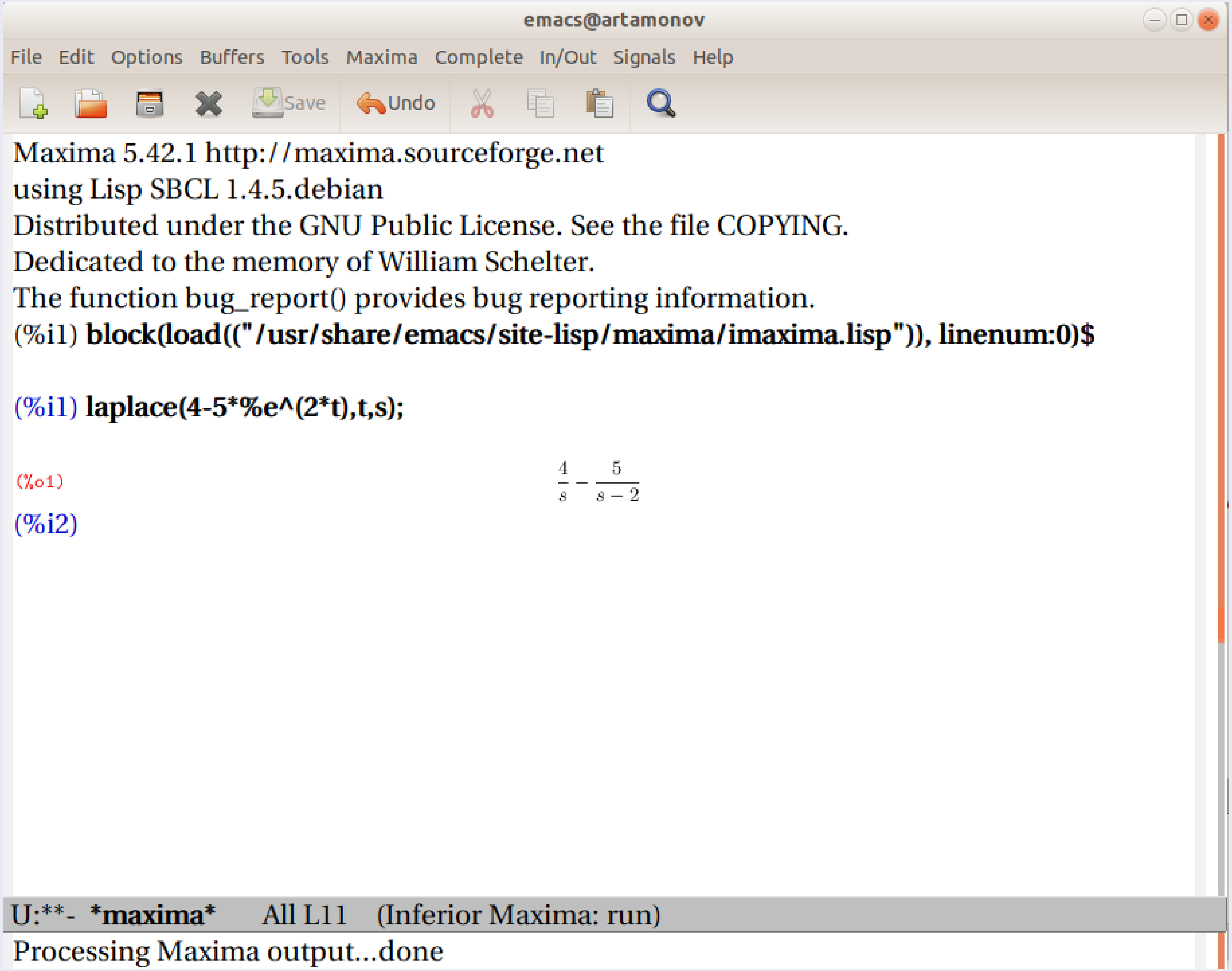
Примеры использования свойств преобразования Лапласа

Пример 3

Определить изображение для функции $x(t) = 4 - 5e^{2t}$.

Имеем:

$$L(4 - 5e^{2t}) = L(4u(t) - 5e^{2t}u(t)) = \frac{4}{s} - 5L(e^{2t}u(t)) = \frac{4}{s} - \frac{5}{s-2} = \frac{-8-s}{s(s-2)}$$


emacs@artamonov
File Edit Options Buffers Tools Maxima Complete In/Out Signals Help
Save
Undo
Maxima 5.42.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp SBCL 1.4.5.debian
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) block(load(("/usr/share/emacs/site-lisp/maxima/imaxima.lisp")), linenum:0)$
(%i1) laplace(4-5*%e^(2*t),t,s);
(%o1) $\frac{4}{s}-\frac{5}{s-2}$
(%i2)
U:**- *maxima* All L11 (Inferior Maxima: run)
Processing Maxima output...done

Пример 1

Если $X(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$ есть дробно-рациональная функция, причем степень числителя меньше степени знаменателя, то эту дробь разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы от каждой простой дроби.

Пусть дано $X(s)=\frac{1}{s^2+4s-5}$, требуется найти $x(t)=L^{-1}(X(s))$

Имеем:

$$\frac{1}{s^2+4s-5}=\frac{1}{(s+5)(s-1)}=\frac{A}{s+5}+\frac{B}{s-1}=\frac{A(s-1)+B(s+5)}{(s+5)(s-1)}$$

$$A+B=0,5B-A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{6},B=\frac{1}{6}$$

$$L^{-1}\left(\frac{-1/6}{s+5}+\frac{1/6}{s-1}\right)=-\frac{1}{6}e^{-5t}+\frac{1}{6}e^{t}$$

Пример 2

Пусть дано $X(s) = \frac{s}{s^2-2s+5}$, требуется найти $x(t) = L^{-1}(X(s))$

Имеем:

$$\frac{s}{s^2-2s+5} = \frac{(s-1)+1}{(s-1)^2+4} = \frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s-1)^2+4}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right) = e^t \cos 2t$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{2}{(s-1)^2+4}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^t \sin 2t$$

Окончательно имеем:

$$x(t) = L^{-1}(X(s)) = e^t \cos 2t + \frac{1}{2} \cdot e^t \sin 2t$$

Нахождение обратного преобразования Лапласа

Теорема о разложении

$$W(s) = \frac{P(s)}{sQ(s)} \Rightarrow L^{-1}(W(s)) = \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P(s_k)}{s_k \cdot Q'(s_k)} \cdot e^{s_k \cdot t},$$

где $n-1$ - порядок многочлена $Q(s)$, s_k - корни многочлена $Q(s)$.
Пример использования: пусть $X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s-5)}$
Имеем: $P(s) = s+1, Q(s) = s^2+4s-5, Q'(s) = 2s+4, Q(s) = 0 \Rightarrow s_1 = -5, s_2 = 1$

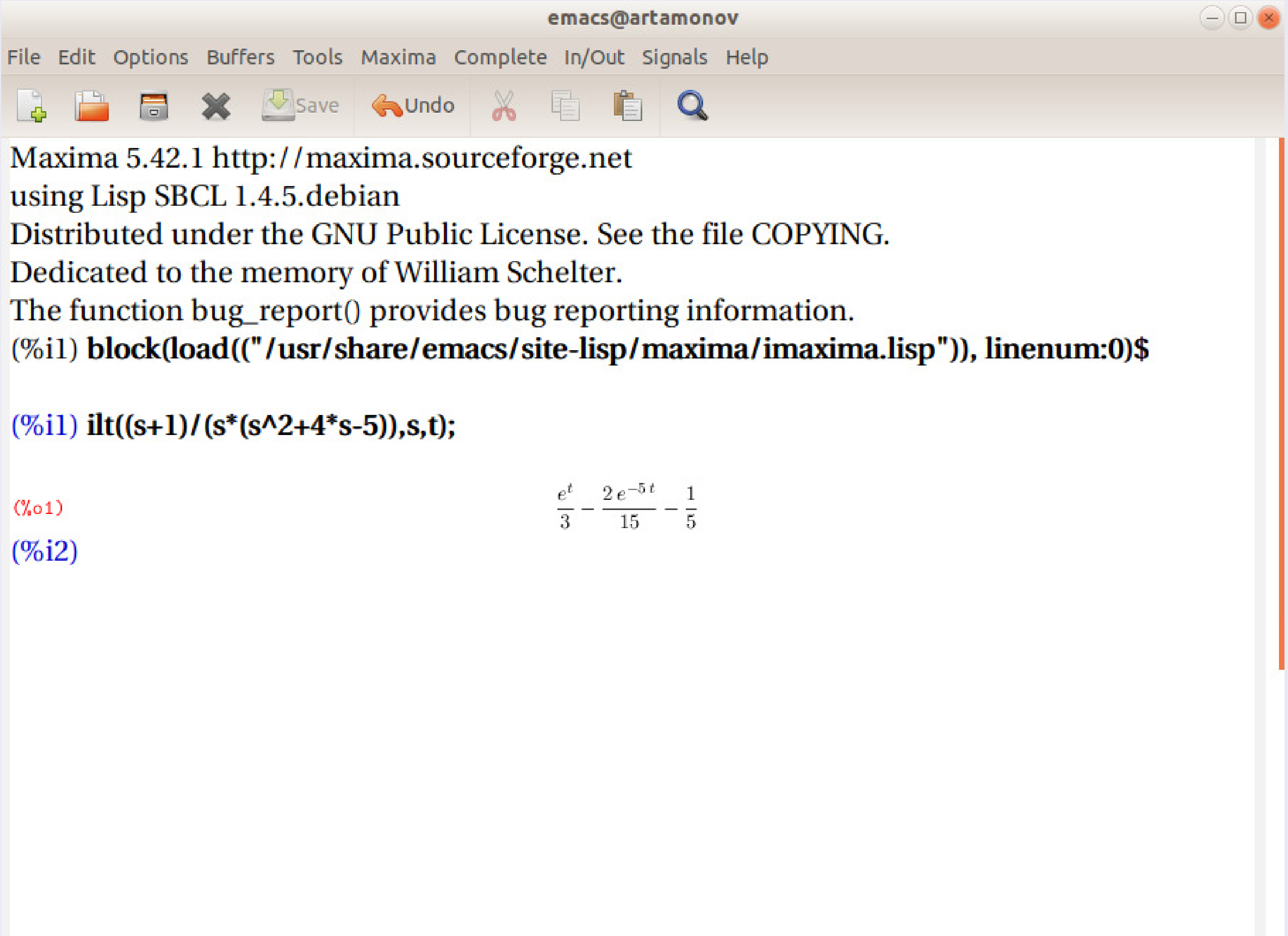
$$\frac{P(0)}{Q(0)} = \frac{1}{-5}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{P(s_k)}{s_k \cdot Q'(s_k)} \cdot e^{s_k \cdot t} = \frac{-5+1}{-5(2(-5)+4)} e^{-5t} + \frac{1+1}{1(2+4)} e^{1t}$$

Окончательно получаем:

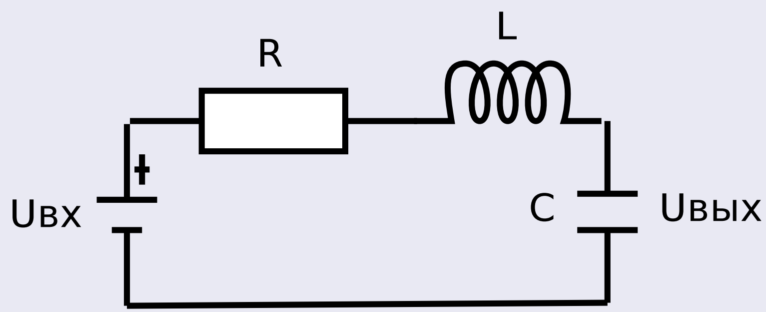
$$L^{-1}\left(\frac{s+1}{s(s^2+4s-5)}\right) = -\frac{1}{5} - \frac{2}{15} e^{-5t} + \frac{1}{3} e^{t}$$

Использование maxima для обратного преобразования Лапласа



Использование преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений

Преобразование Лапласа широко используется для анализа электрических цепей. Можно записать систему интегро-дифференциальных уравнений, а затем, переходя к изображениям, получить систему алгебраических уравнений. Решая эти уравнения, получим изображение реакции цепи.
Рассмотрим пример.



Исходные соотношения:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}, i(t) = C \cdot \frac{du_{\text{вых}}(t)}{dt}$$

$$u_{\text{вх}}(t) = R \cdot i(t) + u_L(t) + u_{\text{вых}}(t)$$

$$u_{\text{вх}}(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_{\text{вых}}(t)}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + u_{\text{вых}}(t)$$

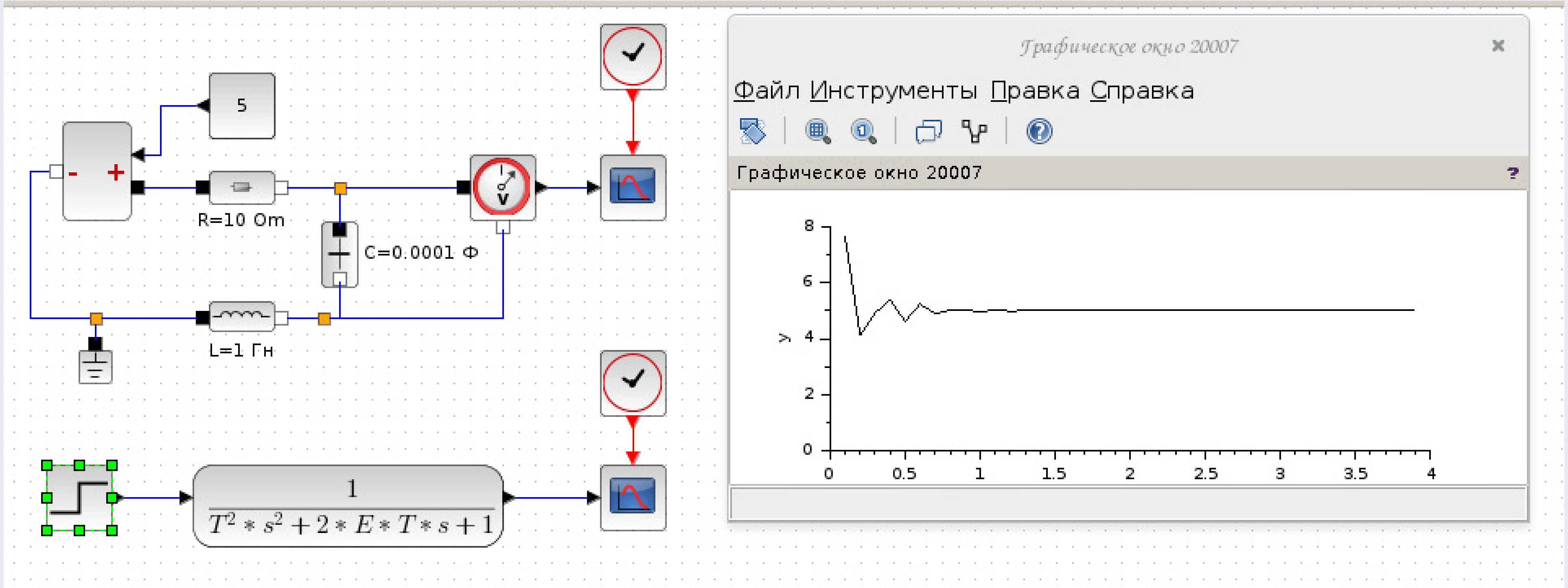
Переход к изображению по Лапласу

$$U_{\text{вх}}(s) = R \cdot C \cdot s \cdot U_{\text{вых}}(s) + L \cdot C \cdot s^2 U_{\text{вых}}(s) + U_{\text{вых}}(s)$$

$$U_{\text{вых}}(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \cdot U_{\text{вх}}(s)$$

$$U_{\text{вых}}(s) = \frac{1}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1} \cdot U_{\text{вх}}(s)$$

$$T = \sqrt{LC}, \xi = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$


5
R=10 Om
C=0.0001 Ф
L=1 Гн
$\frac{1}{T^2*s^2+2*E*T*s+1}$
Графическое окно 20007
Файл Инструменты Правка Справка
Графическое окно 20007
y
0
2
4
6
8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4