Экзамен по дисциплине "Дискретная математика"

Билет 1.

1. Множества и классы. Антиномии (парадоксы). Антиномия всемогущества, парадокс «деревенский парикмахер». Антиномия Рассела. Пустое множество. Универсум. Мощность (кардинальное число, порядок) множества. Булеан.

2. Из семи различных гвоздик и пяти различных тюльпанов надо составить букет, состоящий из трех гвоздик и двух тюльпанов. Сколькими способами это можно сделать?

3. Докажите, что $7^{2n} - 1$ при любом натуральном n делится на 48.

Билет 2.

1. Бесконечные множества. Раномощные бесконечные множества, теорема Кантора-Бернштейна. Счетные, несчетные множества. Континуум гипотеза.

2. Используя производящие функции, решите рекуррентное соотношение:
$$a_n = 2a_{n-1} + 3^n, a_0 = 1$$

3. Сколько положительных чисел от 20 до 1000 делятся ровно на одно из чисел 7, 11 или 13.

Билет 3.

1. Отношение. Кортеж. Бинарное отношение. Отношение принадлежности. Отношение включения. Подмножество, надмножество, собственное подмножество. Операции над множествами: объединение (дизъюнкция, сумма), пересечение (конъюнкция, произведение), разность, симметрическая разность, дополнение.

2. Дано
$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, P_1 \subseteq A \times B, P_2 \subseteq B^2$$
$$P_1 = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 4\rangle\}$$
$$P_2 = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$$
Найти $(P_1 \circ P_2)^{-1}$. Является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

3. Найти x:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Билет 4.

1. Рефлексивное, симметричное, антисимметричное, транзитивное отношения. Отношение предпорядка, порядка, толерантности, эквивалентности.

2. Доказать, что число $\frac{n!}{2^n}$ нецелое.

3. На множестве чисел вида $a+b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{R}$ определена операция умножения:

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = a_3 + b_3\sqrt{3}, a_3 = a_1a_2 + 3b_1b_2, b_3 = a_1b_2 + a_2b_1$$

   Определить, является ли алгебра $\langle\{a+b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{R}\}, \circ\rangle$ группоидом, полугруппой, моноидом, группой, абелевой группой.

Билет 5.

1. Элементы комбинаторики – сочетания, размещения, перестановки без повторения, с повторениями. Метод включений и исключений. Метод математической индукции.

2. Доказать соотношение:

$$(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$$

3. Найти x:

$$x \equiv 6745 \cdot (100101^{5432} + 999^{131313})^{7874} + 4431 \mod 17$$

Билет 6.

1. Решение однородных и неоднородных линейных рекуррентных соотношений.

2. Из семи бегунов и трех прыгунов нужно составить команду из 5 человек, в которую должен входить хотя бы один прыгун. Сколькими способами это можно сделать?

3. Найти x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Билет 7.

1. Производящие функции и их использование в задачах комбинаторики, решении рекуррентных соотношений.

2. Определите, при каких n дробь $\frac{2n+5}{13n+7}$ несократима.

3. Доказать, что если целое число n не делится на 7, то либо n^3-1, либо n^3+1 делится на 7.

Билет 8.

1. Элементы теории чисел: целые числа, понятия частного, делителя, остатка, доказательство единственности остатка.

2. Решите рекуррентное соотношение:

$$a_n = 2a_{n-1} - 3, a_0 = 4$$

3. Найти наибольший общий делитель чисел 621, 437.

Билет 9.

1. Элементы теории чисел: наибольший общий делитель (НОД), алгоритм нахождения НОД, взаимнопростые числа, наименьшее общее кратное. Понятие простого числа, доказательство бесконечности простых чисел. Основная теорема арифметики.

2. Решить сравнение
$$12x \equiv 8 \mod 24$$

3. С использованием алгоритма без передачи ключей передать сообщение 777888999 от абонента A абоненту B.

Билет 10.

1. Теория сравнений: определение, основные теоремы.

2. Найти x:

$$x \equiv 11 \cdot (222^{3333} + 4444^{55555})^{666666} + 7777777 \mod 13$$

3. Разложите перестановку в произведение циклов и транспозиций, определите ее четность:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Билет 11.

1. Малая теорема Ферма и ее доказательство. Функция Эйлера, ее свойства. Обобщение малой теоремы Ферма - теорема Эйлера-Ферма.

2. Найти коэффициент при x^{12} в разложении производящей функции

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(1-x)^4}$$

3. Построить группу самосовмещений ромба на плоскости и в пространстве.

Билет 12.

1. Методы решения сравнений $ax \equiv b$, основные теоремы о нахождении корней сравнения первого порядка.

2. Доказать соотношение:

$$(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$$

3. Доказать, что если целое число n не делится на 7, то либо $n^3 - 1$, либо $n^3 + 1$ делится на 7.

Билет 13.

1. Алгоритм шифрования без передачи ключей.

2. Решить сравнение
$$13x \equiv 10 \mod 15$$

3. Докажите, что при любом натуральном n справедливо равенство:
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Билет 14.

1. Алгоритм шифрования RSA.

2. В подразделении 30 солдат и три офицера. Сколькими способами можно выделить патруть, состоящий из трех солдат и одного офицера?

3. Докажите, что $2n^3 + 3n^2 + 7n$ при любом натуральном n делится на 6.

Билет 15.

1. Бинарная операция и ее основное множество. Алгебра, сигнатура алгебры, тип алгебры. Модель. Способы задания бинарной операции. Таблица Кэли. Группоид. Полугруппа. Моноид. Группа. Абелева группа. Группа симметрий фигуры. Симметрическая группа (группа подстановок). Подгруппа данной группы. Порядок группы. Теорема Лагранжа.

2. Доказать соотношение:

$$(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$$

3. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию:

$$\frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{4}} = \frac{6}{5}$$

Билет 16.

1. Инволюция (обращение), дополнение, произведение (композиция) отношений. Способы задания отношений. Декартово произведение множеств. Отображение (соответствие). Пустое отображение, полное отображение. Область определения, прообраз (Dom) отображения. Область значений, образ (Im) отображения. Всюду определенные и сюръективные отображения. Образ (im) и прообраз (coim) элемента. Отображение как частично определенная многозначная функция.

2. Определите, при каких n дробь $\frac{11n+3}{17n+8}$ сократима.

3. Найти x:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Билет 17.

1. Множества и классы. Антиномии (парадоксы). Антиномия всемогущества, парадокс «деревенский парикмахер». Антиномия Рассела. Пустое множество. Универсум. Мощность (кардинальное число, порядок) множества. Булеан.

2. Докажите, что при любом натуральном n справедливо равенство:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

3. Сколько всего делителей у числа 105?

Билет 18.

1. Бесконечные множества. Раномощные бесконечные множества, теорема Кантора-Бернштейна. Счетные, несчетные множества. Континуум гипотеза.

2. Сколькими способами можно составить колонну из десяти автобусов и трех легковых автомобилей, считая, что все автобусы и автомобили одинаковых марок?

3. Разложите перестановку в произведение циклов и транспозиций, определите ее четность:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Билет 19.

1. Отношение. Кортеж. Бинарное отношение. Отношение принадлежности. Отношение включения. Подмножество, надмножество, собственное подмножество. Операции над множествами: объединение (дизъюнкция, сумма), пересечение (конъюнкция, произведение), разность, симметрическая разность, дополнение.

2. Какие множества являются равномощными: множество точек отрезка, множество натуральных чисел, множество точек на прямой, множество действительных чисел, множество простых чисел, множество видимых звезд на небе, множество рациональных чисел.

3. Построить группу самосовмещений ромба на плоскости и в пространстве.

Билет 20.

1. Рефлексивное, симметричное, антисимметричное, транзитивное отношения. Отношение предпорядка, порядка, толерантности, эквивалентности.

2. С использованием алгоритма RSA передать сообщение 111222333444555666 от абонента A абоненту B.

3. Найти x:

$$x \equiv 67 \cdot (65432^{8888} + 222^{333})^{753} + 44 \mod 23$$

Билет 21.

1. Элементы комбинаторики – сочетания, размещения, перестановки без повторения, с повторениями. Метод включений и исключений. Метод математической индукции.

2. Доказать, что уравнение $3x^2 + 2 = y^2$ неразрешимо в целых числах.

3. Дано
$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, P_1 \subseteq A \times B, P_2 \subseteq B^2$$
$$P_1 = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 4\rangle\}$$
$$P_2 = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$$
Найти $(P_1 \circ P_2)^{-1}$. Является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

Билет 22.

1. Решение однородных и неоднородных линейных рекуррентных соотношений.

2. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию:

$$\binom{2n}{7} > \binom{2n}{5}$$

3. Определите, при каких n дробь $\frac{2n+5}{13n+7}$ несократима.

Билет 23.

1. Производящие функции и их использование в задачах комбинаторики, решении рекуррентных соотношений.

2. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 8 мужчин и 8 женщин, чтобы никаких двое мужчин и никакие две женщины не сидели рядом?

3. Решите рекуррентное соотношение:

$$a_n = a_{n-1} + n, a_0 = 1$$

Билет 24.

1. Элементы теории чисел: целые числа, понятия частного, делителя, остатка, доказательство единственности остатка.

2. Решить сравнение
$$13x \equiv 10 \mod 15$$

3. На множестве чисел вида $a+b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{R}$ определена операция умножения:
$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = a_3 + b_3\sqrt{3}, a_3 = a_1a_2 + 3b_1b_2, b_3 = a_1b_2 + a_2b_1$$
   Определить, является ли алгебра $\langle\{a+b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{R}\}, \circ\rangle$ группоидом, полугруппой, моноидом, группой, абелевой группой.

Билет 25.

1. Элементы теории чисел: наибольший общий делитель (НОД), алгоритм нахождения НОД, взаимнопростые числа, наименьшее общее кратное. Понятие простого числа, доказательство бесконечности простых чисел. Основная теорема арифметики.

2. Какие множества являются равномощными: множество точек отрезка, множество натуральных чисел, множество точек на прямой, множество действительных чисел, множество простых чисел, множество видимых звезд на небе, множество рациональных чисел.

3. Из семи бегунов и трех прыгунов нужно составить команду из 5 человек, в которую должен входить хотя бы один прыгун. Сколькими способами это можно сделать?

Билет 26.

1. Теория сравнений: определение, основные теоремы.
2. Докажите, что $2n^3 + 3n^2 + 7n$ при любом натуральном n делится на 6.
3. Найти коэффициент при x^{19} в разложении производящей функции

$$f(x) = \frac{x^4}{1 - x^5}$$

Билет 27.

1. Малая теорема Ферма и ее доказательство. Функция Эйлера, ее свойства. Обобщение малой теоремы Ферма - теорема Эйлера-Ферма.

2. Сколько существует способов выбора 10 шаров из 20 красных, 20 белых и 20 синих шаров, если следует выбрать четное количество красных и четное количество синих шаров?

3. Решите рекуррентное соотношение:

$$a_n = a_{n-1} + n, a_0 = 1$$

Билет 28.

1. Методы решения сравнений $ax \equiv b$, основные теоремы о нахождении корней сравнения первого порядка.

2. Доказать, что число $\frac{n!}{2^n}$ нецелое.

3. Доказать соотношение:

$$(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$$

Билет 29.

1. Алгоритм шифрования без передачи ключей.

2. Разложите перестановку в произведение циклов и транспозиций, определите ее четность:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 2 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. С использованием алгоритма без перердачи ключей передать сообщение 1234554321 от абонента A абоненту B.

Билет 30.

1. Алгоритм шифрования RSA.

2. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию:

$$\frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{4}} = \frac{6}{5}$$

3. Построить группу самосовмещений ромба на плоскости и в пространстве.