Динамические характеристики

Содержание

Классификация динамических характеристик

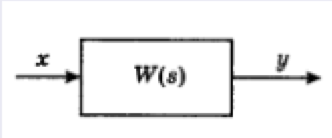
Для исследования систем автоматического регулирования часто используют прием анализа их свойств путем воздействия на систему каким-то типовым задающим или возмущающим воздействием. В качестве таких типовых воздействий в основном используют три типа:

- ступенчатое воздействие (функция Хевисайда);
- импульсное воздействие (функция Дирака);
- гармонинческое воздействие.

В соответствиии с этим вводят в рассмотрение понятие динамической характеристики, которая определяет свойства звена или системы при изменении во времени входных и выходных величин. Классификация динамических характеристик представлена на рисунке.

Временные характеристики

Временные характеристики представляют собой реацию звена или системы на типовые воздействия при нулевых начальных условиях. Пусть задано звено (система) с передаточной функцией $W(s)$:



Переходная характеристика (функция) - это переходный процесс изменения выходной величины при единичном ступенчатом воздействии на входе при нулевых начальных условиях: $x(t) = u(t), y(t) = h(t)$.
Поскольку $L(u(t)) = \frac{1}{s}$, то

$$L(y(t)) = L(h(t)) = H(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Весовая (импульсная) характеристика (функция) - это переходный процесс изменения выходной величины при единичном импульсном входном воздействии и нулевых условиях. Единичное импульсное воздействие определяется функцией Дирака

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq 0; \\ \infty, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Временные характеристики

Поскольку $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$, $L(\delta(t)) = sL(u(t)) = 1$, то

$$L(y(t)) = 1 \cdot W(s) = W(s)$$

Поэтому импульсная характеристика $w(t)$ определяется как:

$$y(t) = w(t) = \frac{h(t)}{d(t)}$$

Преобразование Лапласа от импульсной характеристики равно передаточной функции самой системы:

$$L(w(t)) = W(s)$$

Рассмотрим примеры их использования.

Пример 1

Найти передаточную функцию системы по известной импульсной характеристике:
$w(t) = 2 \cdot t$

Решение: поскольку $L(w(t)) = W(s)$, то

$$W(s) = L(2 \cdot t) = 2L(t) = \frac{2}{s^2}$$

Временные характеристики

Задание 1

Найти передаточную функцию системы по известной импульсной характеристике:

- $w(t) = 10$
- $w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
- $w(t) = 5t^2$

Пример 2

По известной передаточной функции найти переходную и импульсную характеристики:

$$W(s) = \frac{k_1}{s} + k_2$$

Решение:

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right) = L^{-1}\left(\frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s}\right) = k_1 \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + k_2 \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = k_1 \cdot t + k_2 \cdot u(t)$$

$$w(t) = L^{-1}(W(s)) = L^{-1}\left(\frac{k_1}{s} + k_2\right) = L^{-1}\left(\frac{k_1}{s}\right) + L^{-1}(k_2) =$$

$$w(t) = k_1 L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + k_2 L^{-1}(1) = k_1 u(t) + k_2 \delta(t)$$

С другой стороны,

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(k_1 \cdot t + k_2 \cdot u(t)\right) = k_1 u(t) + k_2 \delta(t)$$

Задание 2

По известной передаточной функции найти переходную и импульсную характеристики:

- $W(s) = \frac{4}{s} + \frac{5}{2s+1} + 2(4s+1)$
- $W(s) = k_1 + k_2 s + \frac{k_3}{s}$

Частотные характеристики

Частотные характеристики строятся при воздействии на систему синусоидальным входным сигналом:

Для получения частотных характеристик в передаточной функции системы делают мнемоническую замену:

$$W(s) \to W(j\omega)$$

где $j = \sqrt{-1}$ - комплексная единица. Полученная таким образом характеристика $W(j\omega)$ и называется **амплитудно-фазовой характеристикой**.

При этом амплитудно-фазовую характеристику представляют в трех формах:

1. прямоугольная форма:
$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$
2. показательная форма:
$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$
3. тригонометрическая форма:
$$W(j\omega) = A(\omega)(\cos(\varphi(\omega)) + j\sin(\varphi(\omega)))$$

Отдельные составляющие в разных формах амплитудно-фазовой характеристики также представляют интерес.

Частотные характеристики

Если представить входные и выходные сигналы в комплексной форме: $\dot{X}(j\omega) = X_m e^{j(\omega\cdot t+\varphi_x)}, \dot{Y}(j\omega) = Y_m e^{j(\omega\cdot t+\varphi_y)}$, то

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}(j\omega)}{\dot{X}(j\omega)} = \frac{Y_m}{X_m} e^{j(\varphi_y-\varphi_x)}$$

Выделяют следующие составляющие амплитудно-фазовой характеристики, которые рассматривают как самостоятельные характеристики:

- **Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)** - это зависимость от частоты ω отношения амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала:

$$A(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)} = |W(j\omega)|$$

- **Фазо-частотная характеристика(ФЧХ)** - это зависимость разности (сдвига) фаз выходного и входного колебаний от частоты:

$$\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega)$$

- **Вещественная частотная характеристика (ВЧХ):**

$$P(\omega) = A(\omega)\cos(\varphi(\omega))$$

- **Мнимая частотная характеристика (МЧХ):**

$$Q(\omega) = A(\omega)\sin(\varphi(\omega))$$

Частотные характеристики

Пример

Найти частотные характеристики апериодического звена:

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

Решение:

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k(Tj\omega-1)}{(Tj\omega+1)(Tj\omega-1)} = \frac{k(Tj\omega-1)}{-T^2\omega^2-1} = \frac{1}{T^2\omega^2+1} - j\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Вещественная частотная характеристика:

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2+1}$$

Мнимая частотная характеристика:

$$Q(\omega) = -\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Амплитудно-частотная характеристика:

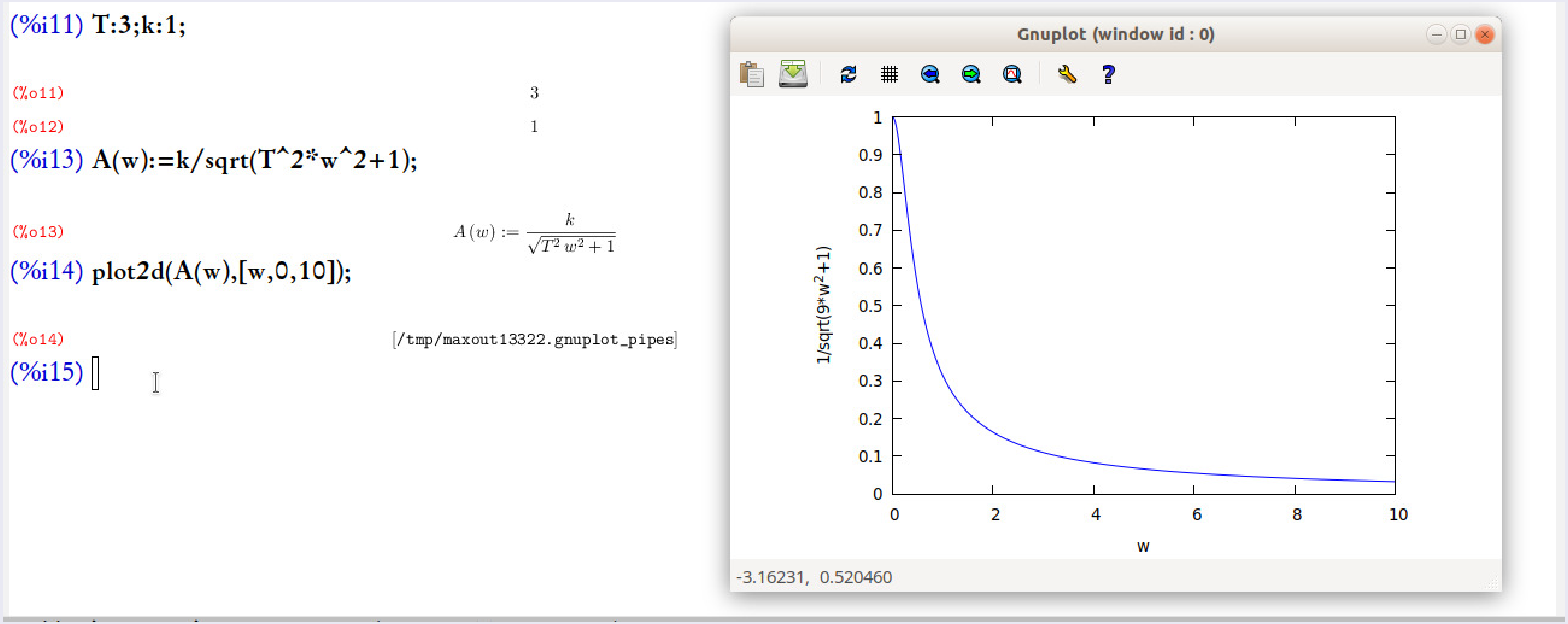
$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{k}{T^2\omega^2+1}\right)^2 + \left(-\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}\right)^2} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

Фазо-частотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}}{\frac{k}{T^2\omega^2+1}}\right) = \operatorname{arctg}(-T\omega) = -\operatorname{arctg}(T\omega)$$

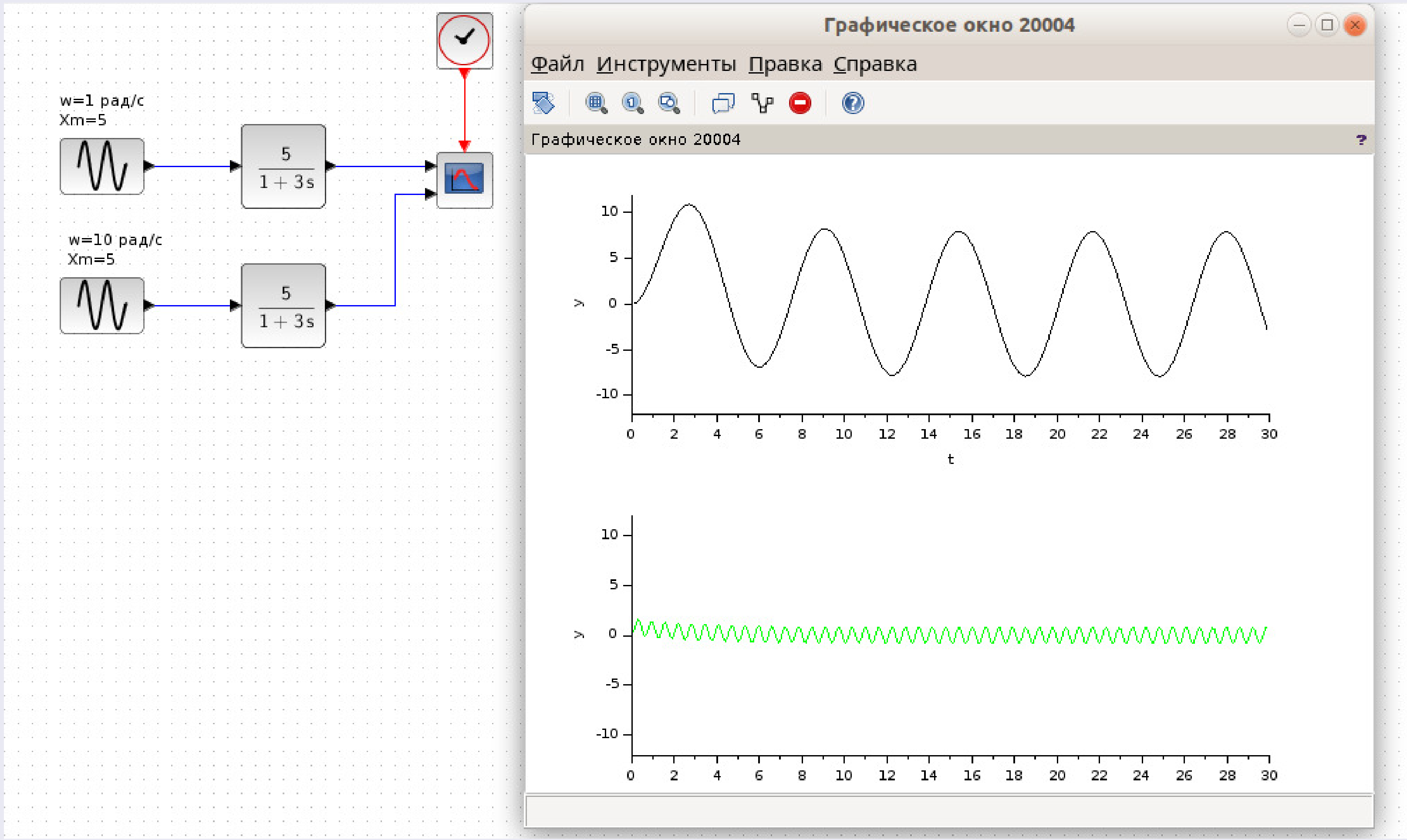
Пример - построение АЧХ

Построим график $A(\omega)$, задавшись $T = 3, k = 1$.

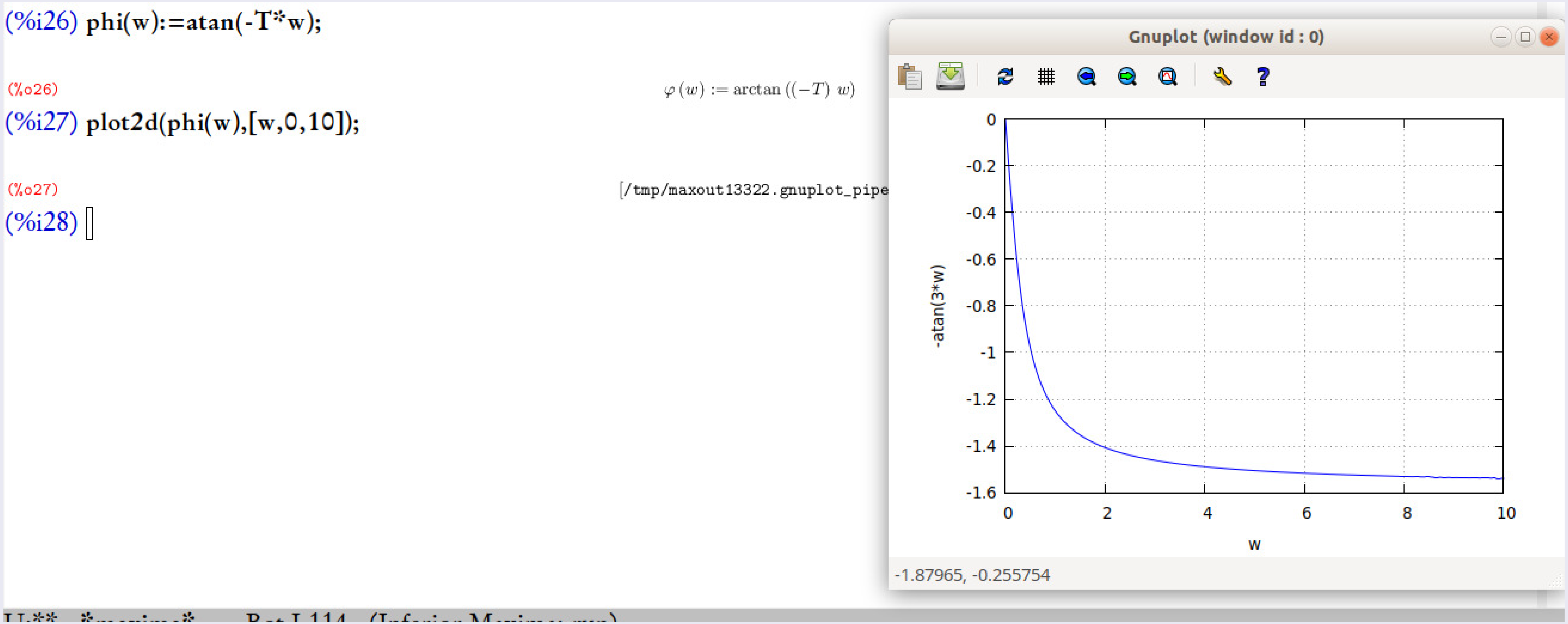


Из графика видно, что с увеличением частоты амплитуда выходного сигнала (при фиксированной амплитуде входного) быстро уменьшается. В этом смысле апериодическое звено является некоторым барьером - фильтром для высокочастотного сигнала.

Пример - демонстрация уменьшения амплитуры



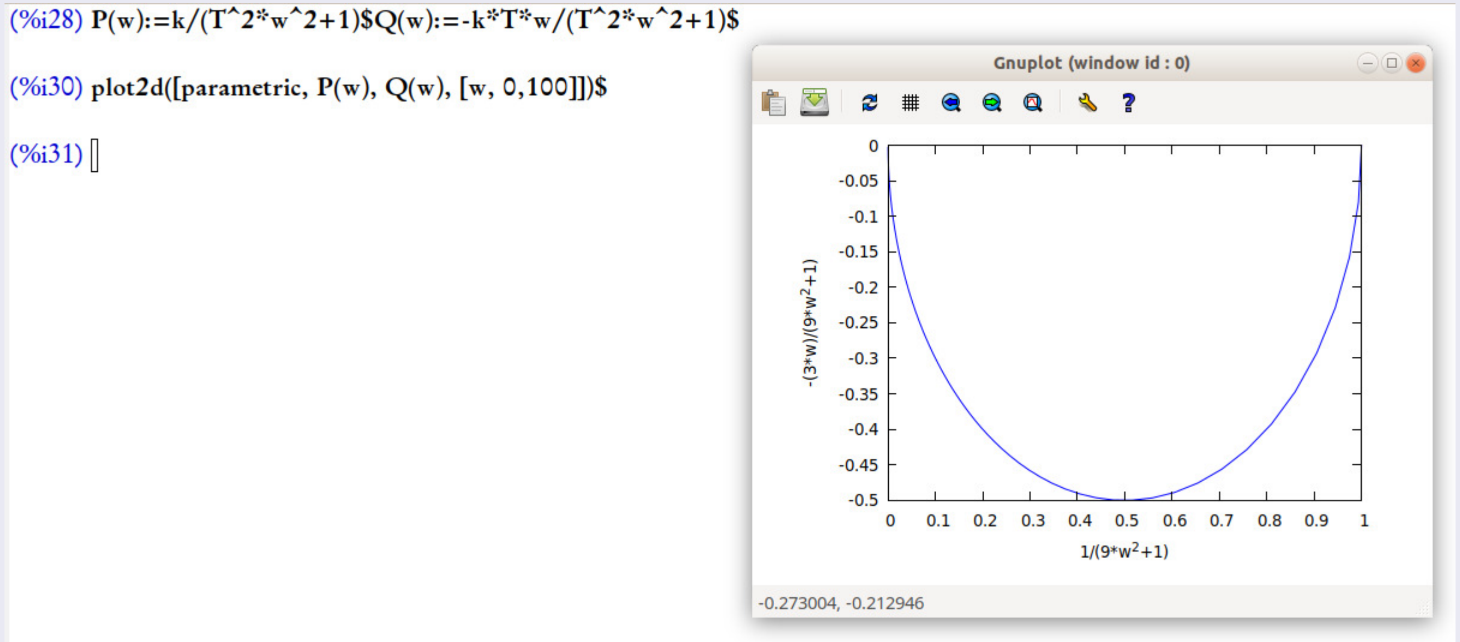
Пример - построение ФЧХ



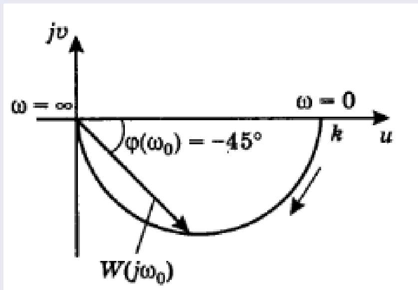
Из графика видно, что с увеличением частоты сдвиг по фазе между выходным и входным сигналами стремится к значению $-\frac{\pi}{2}$.

Частотные характеристики

Пример - построение АФХ



АФХ инерционного звена расположена в четвертом квадранте и представляет собой полуокружность, построенную на отрезке $[0, k$ вещественной оси, как на своем диаметре. Середине АФХ соответствует $\omega_0 = \frac{1}{T}$



Задание 3

Задана передаточная функция $H(s) = \frac{3}{s+4}$, запишите АФХ в показательной и алгебраической форме.

АФХ по дифференциальному уравнению

Задание 4

Задано дифференциальное уравнение объекта управления $y^{''}(t) + 4y^{'}(t) + 4y(t) = 3x(t)$, запишите АФХ в показательной и алгебраической форме.

АФХ по импульсной характеристике

Задание 5

Задана импульсная характеристика $w(t) = e^{-t}$, запишите АФХ в показательной и алгебраической форме.

Задание 6

Заданы передаточные функции звеньев: $H_1(s) = k$, $H_2(s) = \frac{4}{Ts}$. Записать частотные характеристики последовательного и параллельного соединений.

Задание 7

По физической моделе электрической цепи составить дифференциальное уравнение, перейти от него к передаточной функции, найти переходную функцию, импульсную характеристику, а также частотные характеристики: АФХ, АЧХ, ФЧХ. Смоделировать работу в среде scilab, построить полученные АФХ, АЧХ, ФЧХ.