Динамические характеристики

Содержание

Классификация динамических характеристик

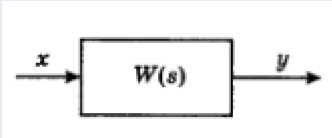
Для исследования систем автоматического регулирования часто используют прием анализа их свойств путем воздействия на систему каким-то типовым задающим или возмущающим воздействием. В качестве таких типовых воздействий в основном используют три типа:

- ступенчатое воздействие (функция Хевисайда);
- импульсное воздействие (функция Дирака);
- гармоническое воздействие.

В соответствиии с этим вводят в рассмотрение понятие динамической характеристики, которая определяет свойства звена или системы при изменении во времени входных и выходных величин. Классификация динамических характеристик представлена на рисунке.

Временные характеристики

Временные характеристики представляют собой реацию звена или системы на типовые воздействия при нулевых начальных условиях. Пусть задано звено (система) с передаточной функцией $W(s)$:



Переходная характеристика (функция) - это переходный процесс изменения выходной величины при единичном ступенчатом воздействии на входе при нулевых начальных условиях: $x(t) = u(t), y(t) = h(t)$.
Поскольку $L(u(t)) = \frac{1}{s}$, то

$$L(y(t)) = L(h(t)) = H(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Весовая (импульсная) характеристика (функция) - это переходный процесс изменения выходной величины при единичном импульсном входном воздействии и нулевых начальных условиях. Единичное импульсное воздействие определяется функцией Дирака

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq 0; \\ \infty, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Временные характеристики

Поскольку $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$, $L(\delta(t)) = sL(u(t)) = 1$, то

$$L(y(t)) = 1 \cdot W(s) = W(s)$$

Поэтому импульсная характеристика $w(t)$ определяется как:

$$y(t) = w(t) = \frac{h(t)}{d(t)}$$

Преобразование Лапласа от импульсной характеристики равно передаточной функции самой системы:

$$L(w(t)) = W(s)$$

Рассмотрим примеры их использования.

Пример 1

Найти передаточную функцию системы по известной импульсной характеристике: $w(t) = 2 \cdot t$

Решение: поскольку $L(w(t)) = W(s)$, то

$$W(s) = L(2 \cdot t) = 2L(t) = \frac{2}{s^2}$$

Задание 1

Найти передаточную функцию системы по известной импульсной характеристике:

- $w(t) = 10$
- $w(t) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
- $w(t) = 5t^2$

Пример 2

По известной передаточной функции найти переходную и импульсную характеристики:

$$W(s) = \frac{k_1}{s} + k_2$$

Решение:

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right) = L^{-1}\left(\frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s}\right) = k_1 \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + k_2 \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = k_1 \cdot t + k_2 \cdot u(t)$$

$$w(t) = L^{-1}(W(s)) = L^{-1}\left(\frac{k_1}{s} + k_2\right) = L^{-1}\left(\frac{k_1}{s}\right) + L^{-1}(k_2) =$$

$$w(t) = k_1 L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + k_2 L^{-1}(1) = k_1 u(t) + k_2 \delta(t)$$

С другой стороны,

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(k_1 \cdot t + k_2 \cdot u(t)) = k_1 u(t) + k_2 \delta(t)$$

Временные характеристики

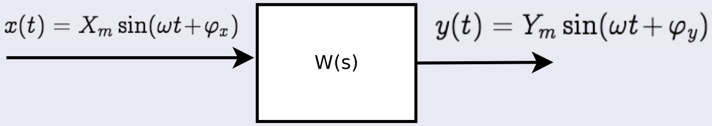
Задание 2

По известной передаточной функции найти переходную и импульсную характеристики:

- $W(s) = \frac{4}{s} + \frac{5}{2s+1} + 2(4s+1)$
- $W(s) = k_1 + k_2 s + \frac{k_3}{s}$

Частотные характеристики

Частотные характеристики строятся при воздействии на систему синусоидальным входным сигналом:



Для получения частотных характеристик в передаточной функции системы делают мнемоническую замену:

$$W(s) \to W(j\omega)$$

где $j = \sqrt{-1}$ - комплексная единица. Полученная таким образом характеристика $W(j\omega)$ и называется амплитудно-фазовой характеристикой.

При этом амплитудно-фазовую характеристику представляют в трех формах:

1. прямоугольная форма:
$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$
2. показательная форма:
$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$
3. тригонометрическая форма:
$$W(j\omega) = A(\omega)(\cos(\varphi(\omega)) + j\sin(\varphi(\omega)))$$

Отдельные составляющие в разных формах амплитудно-фазовой характеристики также представляют интерес.

Частотные характеристики

Если представить входные и выходные сигналы в комплексной форме: $\dot{X}(j\omega) = X_m e^{j(\omega \cdot t + \varphi_x)}, \dot{Y}(j\omega) = Y_m e^{j(\omega \cdot t + \varphi_y)}$, то

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}(j\omega)}{\dot{X}(j\omega)} = \frac{Y_m}{X_m} e^{j(\varphi_y - \varphi_x)}$$

Выделяют следующие составляющие амплитудно-фазовой характеристики, которые рассматривают как самостоятельные характеристики:

- Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) - это зависимость от частоты ω отношения амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала:

$$A(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)} = |W(j\omega)|$$

- Фазо-частотная характеристика(ФЧХ) - это зависимость разности (сдвига) фаз выходного и входного колебаний от частоты:

$$\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega)$$

- Вещественная частотная характеристика (ВЧХ):

$$P(\omega) = A(\omega)\cos(\varphi(\omega))$$

- Мнимая частотная характеристика (МЧХ):

$$Q(\omega) = A(\omega)\sin(\varphi(\omega))$$

Пример

Найти частотные характеристики апериодического звена:

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

Решение:

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k(Tj\omega-1)}{(Tj\omega+1)(Tj\omega-1)} = \frac{k(Tj\omega-1)}{-T^2\omega^2-1} = \frac{k}{T^2\omega^2+1} - j\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Вещественная частотная характеристика:

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2+1}$$

Мнимая частотная характеристика:

$$Q(\omega) = -\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Амплитудно-частотная характеристика:

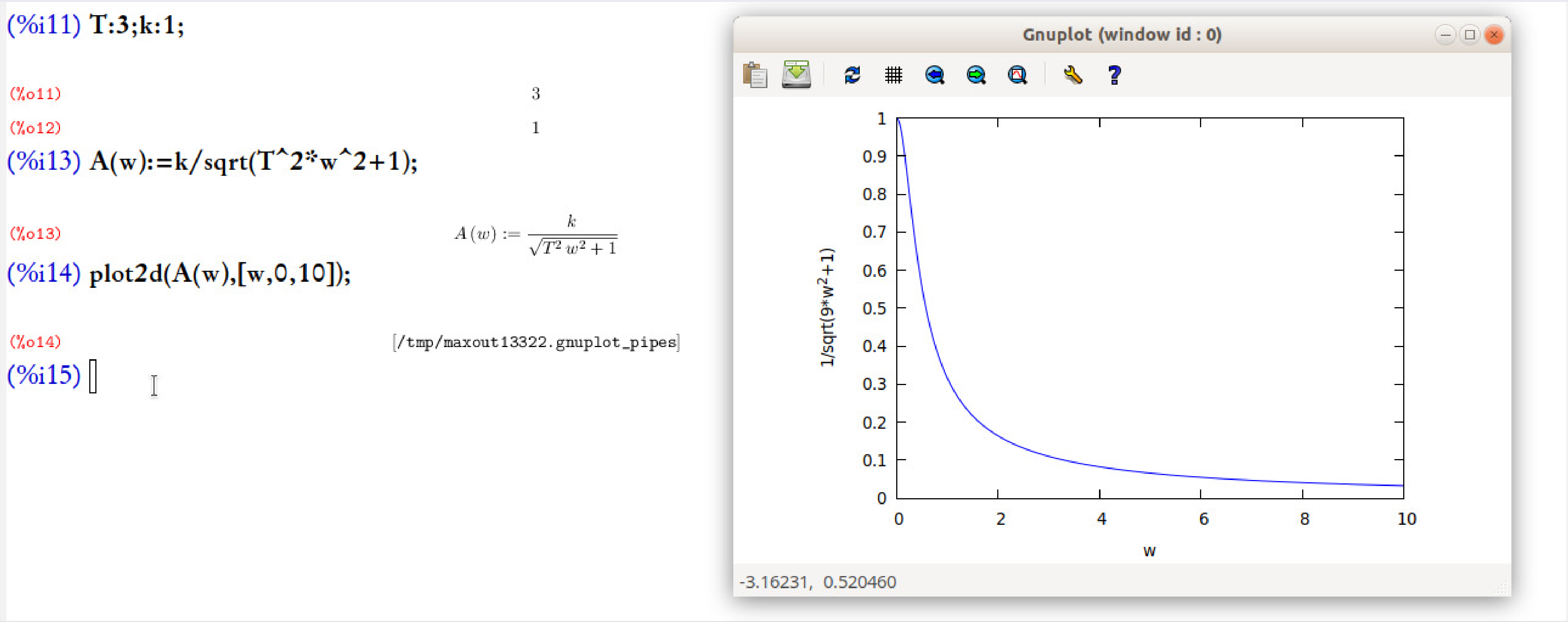
$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{k}{T^2\omega^2+1}\right)^2 + \left(-\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}\right)^2} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

Фазо-частотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}}{\frac{k}{T^2\omega^2+1}}\right) = \operatorname{arctg}(-T\omega) = -\operatorname{arctg}(T\omega)$$

Пример - построение АЧХ

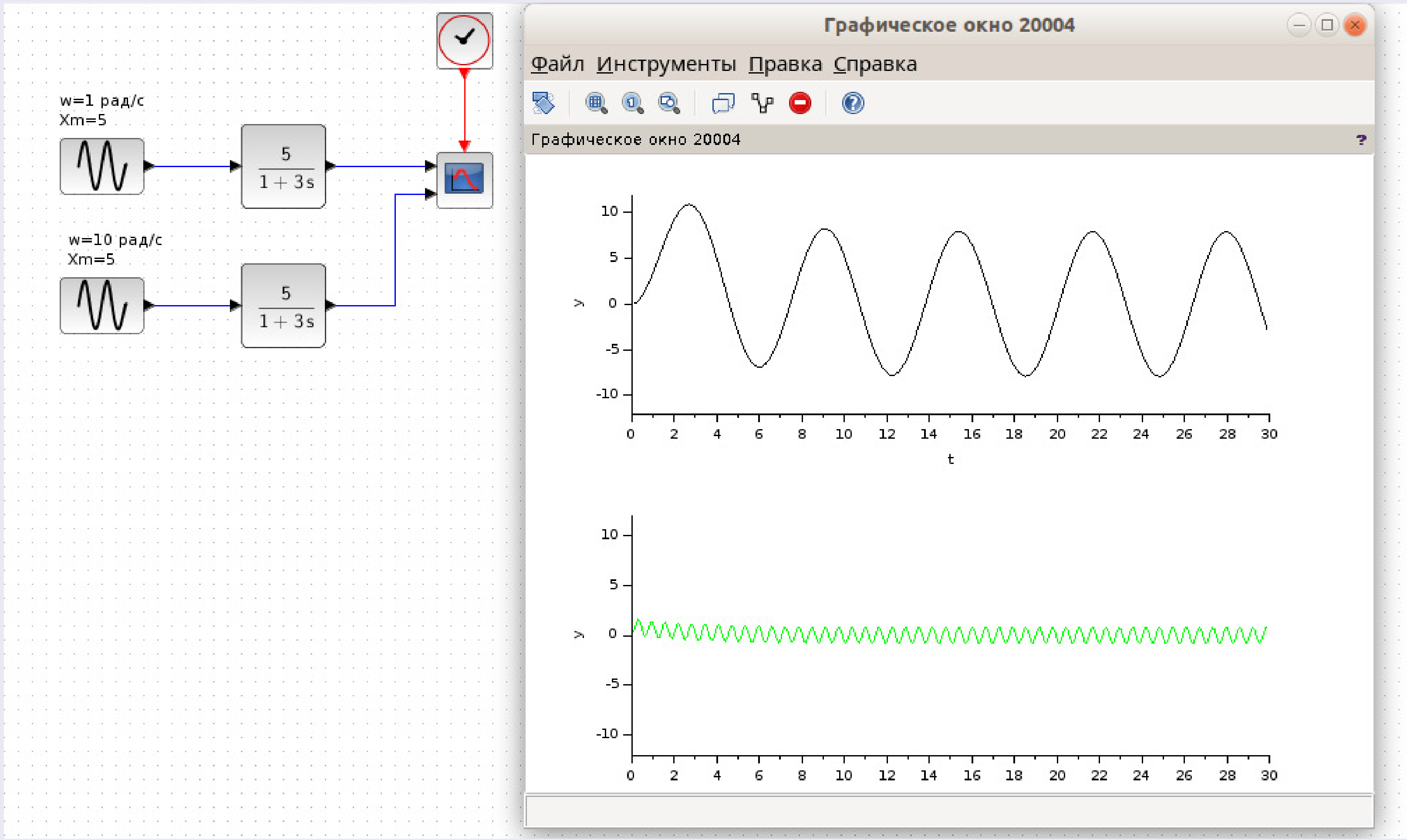
Построим график $A(\omega)$, задавшись $T = 3, k = 1$.



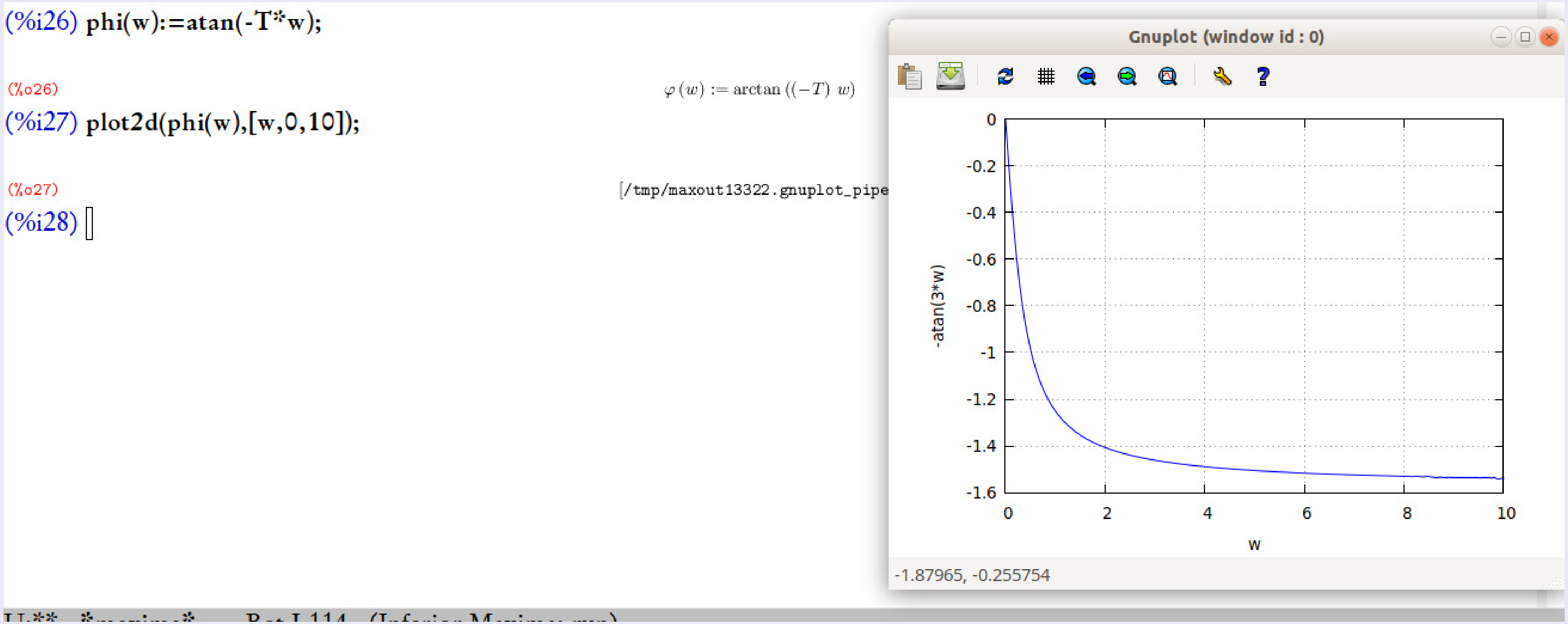
Из графика видно, что с увеличением частоты амплитуда выходного сигнала (при фиксированной амплитуде входного) быстро уменьшается. В этом смысле апериодическое звено является некоторым барьером - фильтром для высокочастотного сигнала.

Частотные характеристики

Пример - демонстрация уменьшения амплитуры

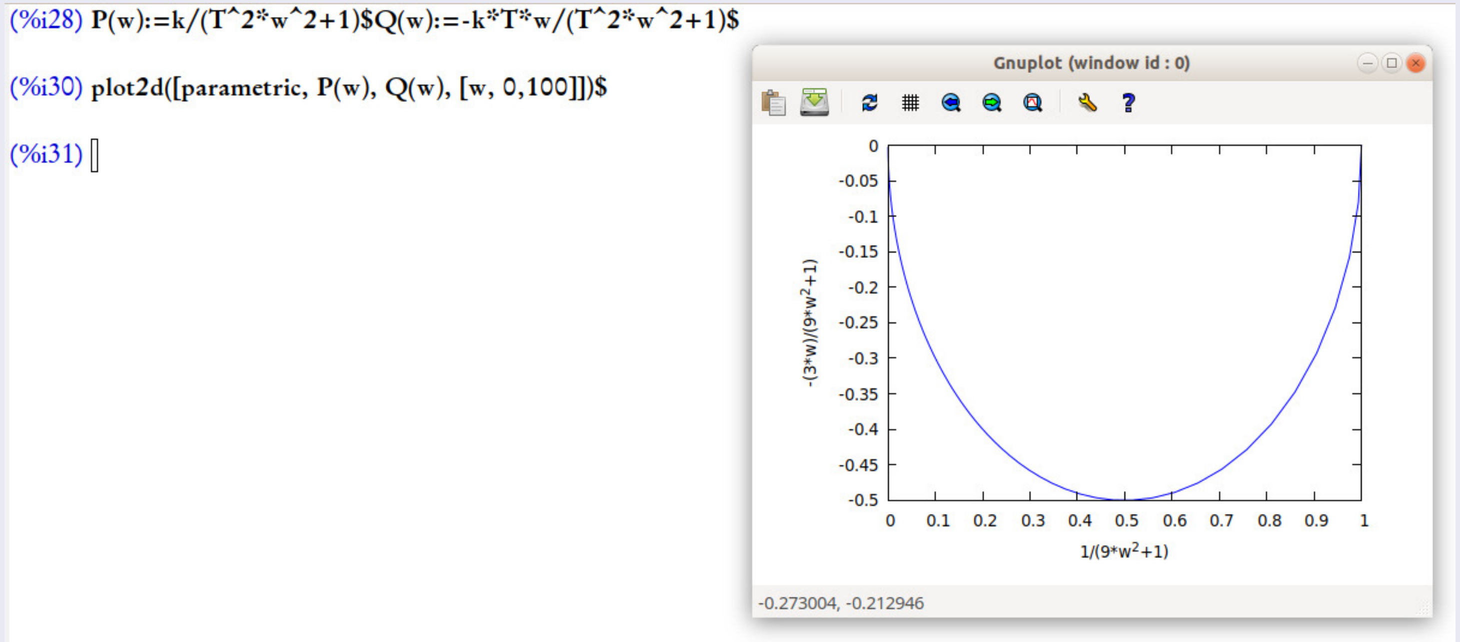


Пример - построение ФЧХ

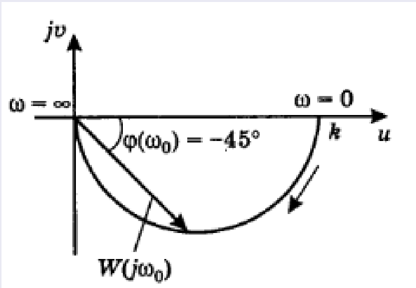


Из графика видно, что с увеличением частоты сдвиг по фазе между выходным и входным сигналами стремится к значению $-\frac{\pi}{2}$.

Пример - построение АФХ



АФХ инерционного звена расположена в четвертом квадранте и представляет собой полуокружность, построенную на отрезке $[0, k$ вещественной оси, как на своем диаметре. Середине АФХ соответствует $\omega_0 = \frac{1}{T}$



АФХ по передаточной функции

Задание 3

Задана передаточная функция $H(s) = \frac{3}{s+4}$, запишите АФХ в показательной и алгебраической форме.

АФХ по дифференциальному уравнению

Задание 4

Задано дифференциальное уравнение объекта управления $y^{''}(t) + 4y^{'}(t) + 4y(t) = 3x(t)$, запишите АФХ в показательной и алгебраической форме.

АФХ по импульсной характеристике

Задание 5

Задана импульсная характеристика $w(t) = e^{-t}$, запишите АФХ в показательной и алгебраической форме.

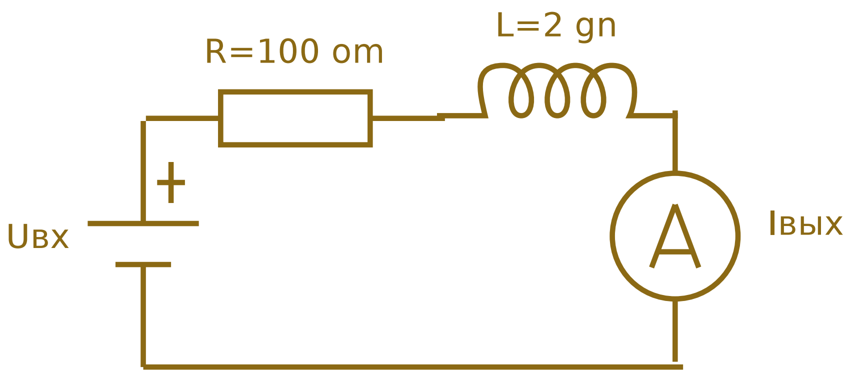
Соединение звеньев

Задание 6

Заданы передаточные функции звеньев: $H_1(s) = k$, $H_2(s) = \frac{4}{Ts}$. Записать частотные характеристики последовательного и параллельного соединений.

Задание 7

По физической моделе электрической цепи составить дифференциальное уравнение, перейти от него к передаточной функции, найти переходную функцию, импульсную характеристику, а также частотные характеристики: АФХ, АЧХ, ФЧХ. Смоделировать работу в среде scilab, построить полученные АФХ, АЧХ, ФЧХ.



Логарифмические частотные характеристики

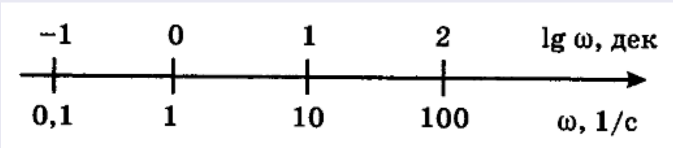
Логарифмические частотные характеристики часто позволяют упростить построение и расчеты частотных характеристик.

Чаще всего используют два вида:

- логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ);
- логарифмические фазо-частотные хаоактеристики (ЛФЧХ).

По оси абсцисс ЛАЧХ, ЛФЧХ используется логарифмический масштаб частоты - от частоты $\omega = 1$ рад/с влево и вправо откладываются отрезки, пропорциональные $\lg \omega$. Единицей измерения при этом является декада, которая по физическому смыслу соответствует диапазону частот, крайние значения которого отличаются в 10 раз: $\lg 10\omega - \lg \omega = \lg\left(\frac{10\omega}{\omega}\right) = \lg 10 = 1$ декада.

Около точек можно указывать значения ω и $\lg \omega$, как показано на рисунке:

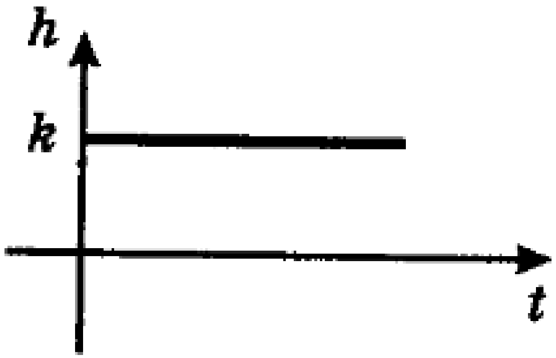


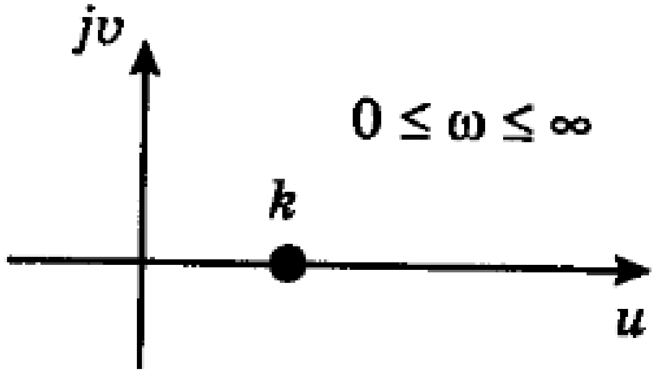
При построении ЛАЧХ по оси ординат используют также логарифмический масштаб и откладывают значение в децибеллах (дБ): $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$.

При построении ЛФЧХ по оси ординат используется обычный натуральный масштаб, т.е. откладываются отрезки, пропорциональные сдвигу фаз в угловых градусах или радианах.

Пропорциональное звено

$$h(t) = k \cdot 1(t)$$
$$A(\omega) = k = \text{const}$$
$$\varphi(\omega) = 0$$





Интегрирующее звено

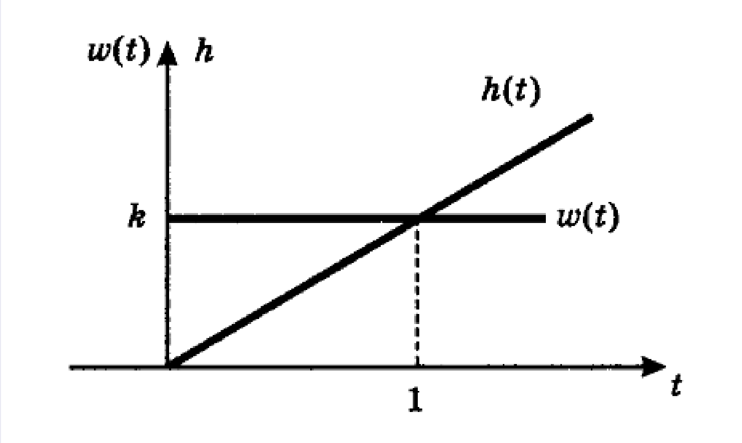
$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{s}$$

При нулевых начальных условиях имеем:

$$H(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{k}{s^2} \Rightarrow h(t) = L^{-1}\left(\frac{k}{s^2}\right) = kt$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k$$

На рисунке представлены графики переходной и импульсной характеристик:



Интегрирующее звено

Получим амплитудно-фазовую характеристику:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j\frac{k}{\omega} = \frac{k}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Отсюда АЧХ:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}$$

ФЧХ не зависит от частоты:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = 20\lg\left(\frac{k}{\omega}\right) = 20\lg k - 20\lg\omega$$

Дифференцирующее звено

$$W(w) = ks \Rightarrow h(t) = L^{-1}\left(\frac{ks}{s}\right) = kL^{-1}(1) = k\delta(t)$$

$$w(t) = k\delta'(t)$$

Поскольку функция Дирака не может быть создана реальными устройствами, т.к. для этого требуется бесконечная мощность, дифференцирующее звенов в идеальном виде физически нереализуемо. АФХ:

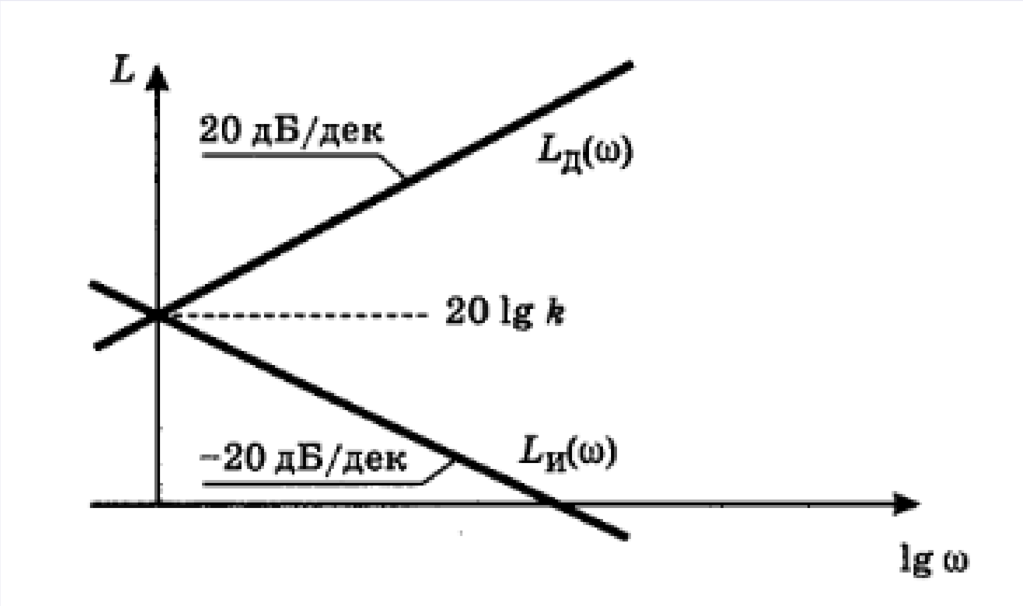
$$W(j\omega) = jk\omega = k\omega e^{j\frac{\pi}{2}}, A(\omega) = k\omega, \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} = const$$

ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\omega$$

Интегрирующее, дифференцирующее звенья

Передаточные функции дифференцирующего и интегрирующего звеньев обратны друг другу, поэтому их свойства и вид частотных характеристик противоположны. Логарифмические характеристики представляют собой прямые с наклоном +20 дБ/дек для дифференцирующего и −20 дБ/дек для интегрирующего звена. Внешний вид их ЛАЧХ показан на рисунке:



Инерционное звено

Характеристики инерционного звена были получены ранее:

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

$$h(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$w(t) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}, L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

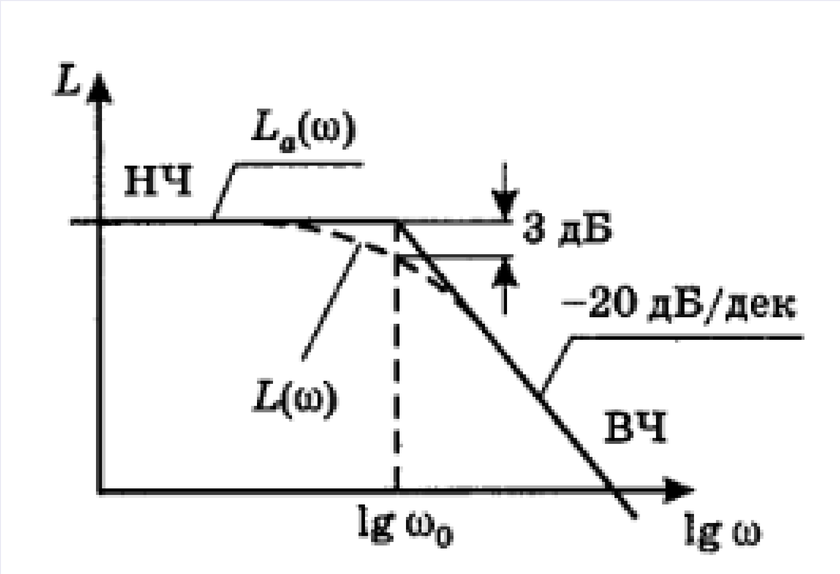
$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(T\omega)$$

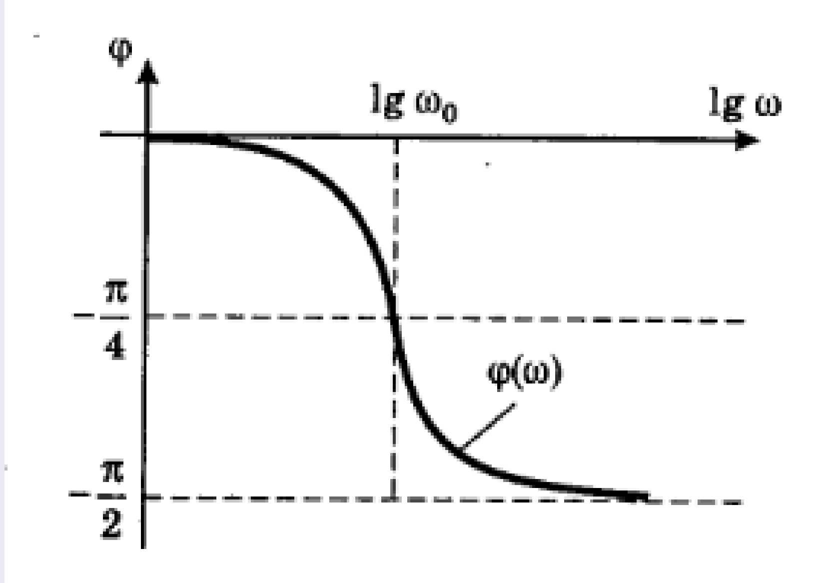
Для практических расчетов можно пользоваться приближенной ЛАЧХ, которая состоит их низкочастотных и высокочастотных асимптот:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20\lg k, & \omega T \le 1 \\ 20\lg k - 20\lg\omega T, & \omega T \ge 1 \end{cases}$$

Точке сопряжения асимптот соответствует частота $\omega_0 = \frac{1}{T}$

Инерционное звено - построение ЛАЧХ, ЛФЧХ





Инерционное звено - построение ЛАЧХ, ЛФЧХ

```
(%i18) k:3$T:0.5$

(%i20) L(w):=20*log(k)/log(10)-20*log(sqrt(1+w^2*T^2))/log(10);
```

(%o20) $L(w) := \frac{20 \log k}{\log 10} - \frac{20 \log \sqrt{1 + w^2 T^2}}{\log 10}$

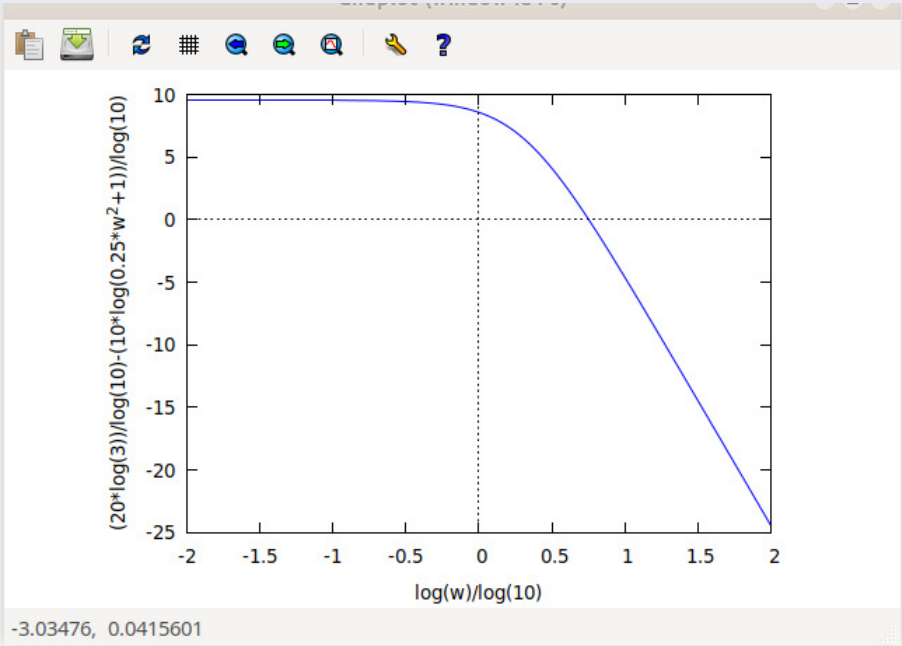
```
(%i21) x(w):=log(w)/log(10);
```

(%o21) $x(w) := \frac{\log w}{\log 10}$

```
(%i22) plot2d([parametric, x(w),L(w),[w,0.01,100]]);
```

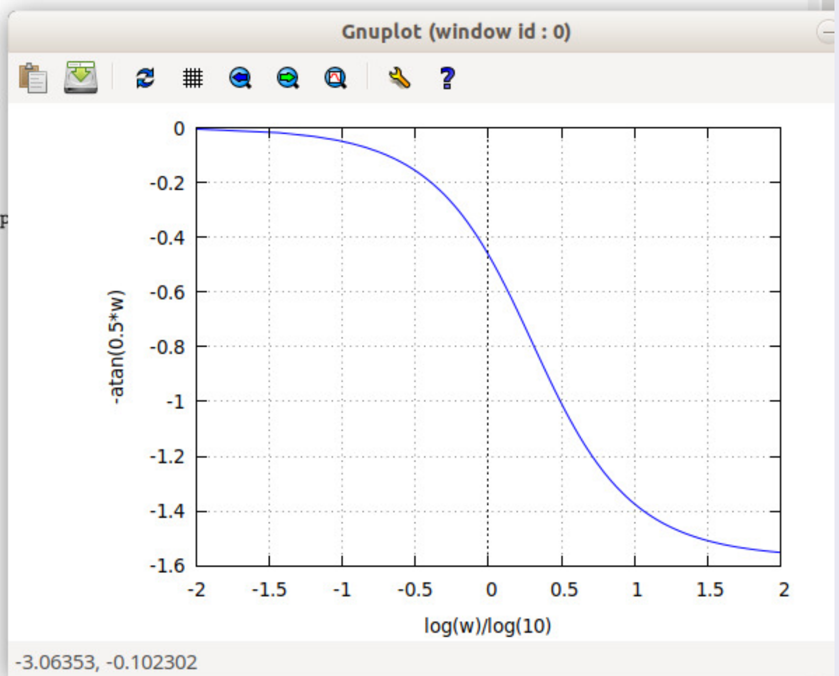
(%o22) [/tmp/maxout3001.gnuplot_pipes]

```
(%i23)
```



Инерционное звено - построение ЛАЧХ, ЛФЧХ

```
(%i23) fi(w):=-atan(w*T);
(%o23)                                    fi(w) := -arctan(w T)
(%i24) plot2d([parametric, x(w),fi(w),[w,0.01,100]]);
(%o24)                                    [/tmp/maxout3001.gnuplot_p
(%i25)
```



Форсирующее звено

$$W(s) = k(Ts + 1)$$
$$h(t) = k(T\delta(t) + u(t))$$

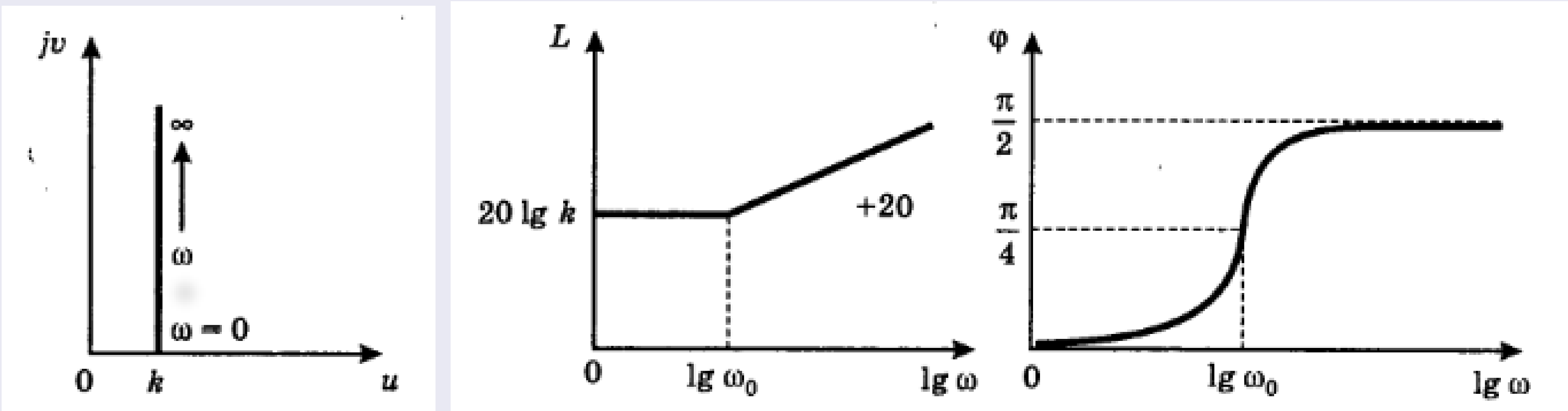
В идеальном виде звено нереализуемо по той же причине, что и дифференцирующее.

$$W(j\omega) = k(j\omega T + 1)$$
$$A(\omega) = k\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega T$$
$$L(w) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Можно использовать асимптотическую ЛАЧХ:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k, & \omega \leq 1/T \\ 20 \lg k + 20 \lg \omega T, & \omega \geq 1/T \end{cases}$$

Форсирующее звено



Инерционно-дифференцирующее звено

$$W(s) = \frac{ks}{Ts+1}$$

Переходную функцию можно получить дифферренцированием переходной функции инерционного звена:

$$h(t) = \frac{dh_{\text{инерц}}(t)}{dt} = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Логарифмические характеристики можно построить по соответствующим характеристикам инерционного и дифференцирующего звеньев:

$$L(\omega) = L_{\text{инерц}}(\omega) + L_{\text{диф}}(\omega), \varphi(\omega) = \varphi_{\text{инерц}}(\omega) + \varphi_{\text{диф}}(\omega)$$

$$W(j\omega) = \frac{j\omega k}{j\omega T + 1} = \frac{j\omega k \cdot (j\omega T - 1)}{(j\omega T + 1) \cdot (j\omega T - 1)} = \frac{\omega^2 kT}{1 + \omega^2 T^2} + j\frac{\omega k}{1 + \omega^2 T^2}$$

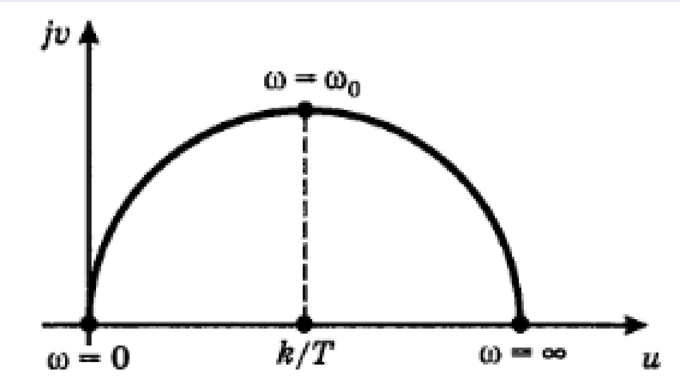
$$A(\omega) = \frac{\omega k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega T}\right)$$

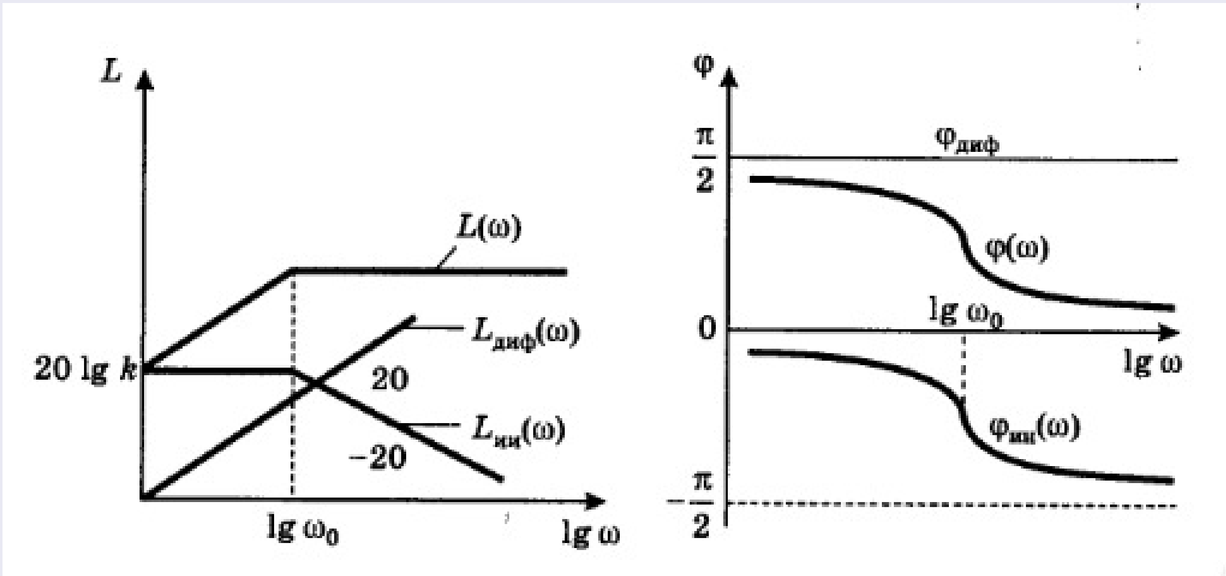
$$L(\omega) = 20 \lg \omega k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Анализ частотных характеристик показывает, что данное звено на низких частотах приближается к идеальному дифференцирующему, а на высоких - к безынерционному.

Построение динамических характеристик типовых звеньев

Инерционно-дифференцирующее звено





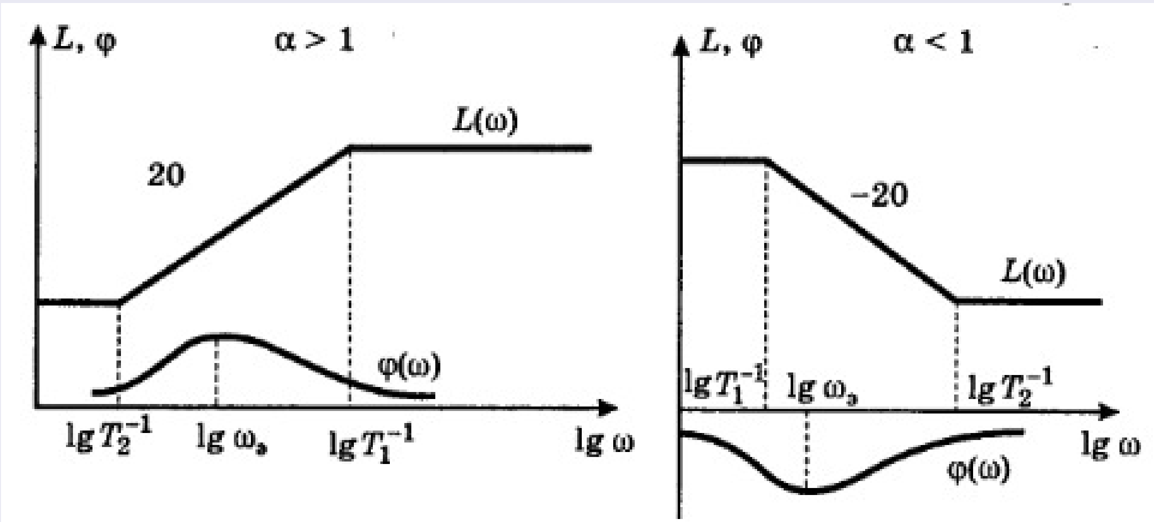
Инерционно-форсирующее звено

$$W(s) = k\frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}$$

Свойства зависят от отношения $\alpha = \frac{T_2}{T_1}$, если $\alpha > 1$ - преобладают форсирующие свойства, при $\alpha < 1$ - инерционные свойства. Звено можно представить последовательным соединением инерционного и форсирующего звена. Из чего легко найти ЛАЧХ и ФЧХ:

$$L(\omega) = L_{\text{инерц}}(\omega) + L_{\text{форс}}(\omega), \varphi(\omega) = \varphi_{\text{инерц}}(\omega) + \varphi_{\text{форс}}(\omega)$$

ЛФЧХ имеет экстремум на частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$



Звено второго порядка

В общем случае эти звенья описываются дифференциальным уравнением второго порядка вида:

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy}{dt} + y = k\left(T_1^2\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi_1 T_1\frac{dx}{dt} + x\right)$$

Наиболее часто встречается инерционное звено второго порядка, у которого $\xi_1 = 0, T_1 = 0$. Тогда его дифференциальное уравнение имеет вид:

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy}{dt} + y = kx$$

Передаточная функция такого звена:

$$W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

Здесь параметр ξ - называют степенью затухания.

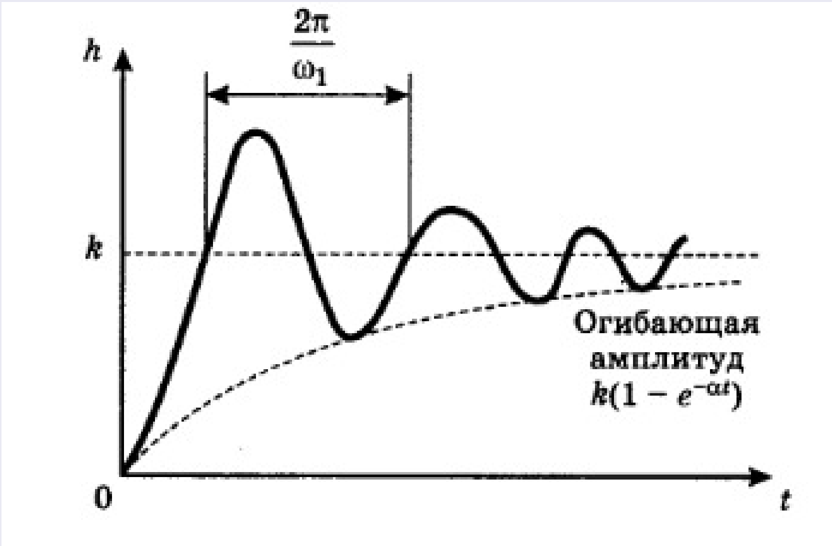
В зависимости от параметра ξ выделяют три разновидности таких звеньев.

Звено второго порядка - первый вид

Если $0 < \xi < 1$, то у характеристического уравнения $T^2s^2+2\xi Ts+1=0$ получаются комплексные корни: $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_1, \alpha = \frac{\xi}{T} > 0, \omega_1 = \frac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2}$ - частота собственных затухающих колебаний. Переходная функция:

$$h(t) = k\left(1 + Ce^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_1 t + \Psi)\right)$$

где C, Ψ - находим при нулевых начальных условиях $h(0) = h'(0) = 0$

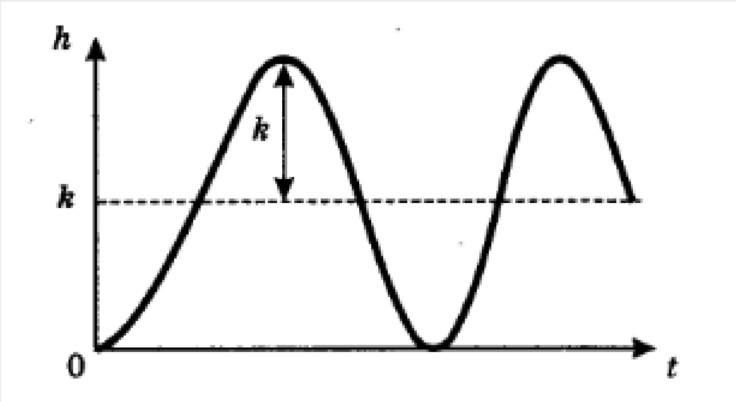


Звено второго порядка - второй вид

Если $xi = 0$, то у характеристического уравнения $T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 = 0$ получаются мнимые сопряженные корни: $s_{1,2} = \pm j\omega_0, \omega_0 = \frac{1}{T}$ - частота собственных незатухающих колебаний. Переходная функция:

$$h(t) = k\left(1 - \cos\omega_0 t\right)$$

Такое звено еще называют консервативным, поскольку оно сохраняет постоянство амплитуды колебаний

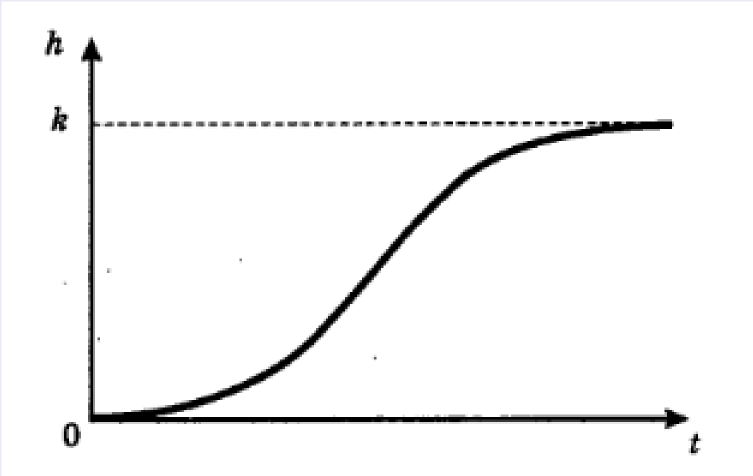


Звено второго порядка - третий вид

Если $\xi \geq 1$, то у характеристического уравнения $T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 = 0$ получаются вещественные корни: $s_1 = \alpha_1, s_2 = \alpha_2$. Переходная функция:

$$h(t) = k + C_1e^{-\alpha_1 t} + C_2e^{-\alpha_2 t}$$

Такое звено еще называют апериодическим из-за непериодического характера переходного процесса.

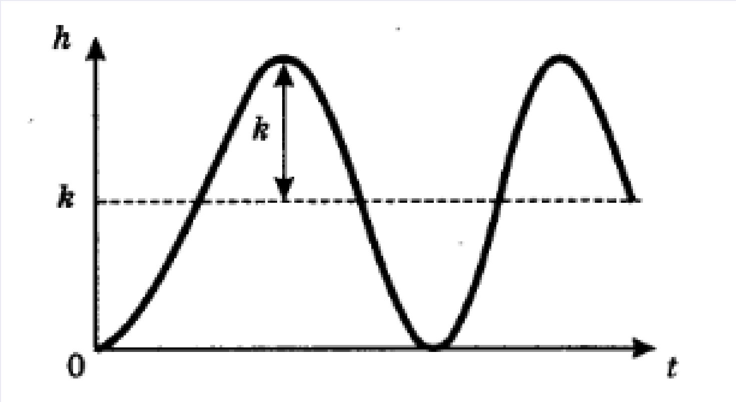


Звено второго порядка - второй вид

Если $xi = 0$, то у характеристического уравнения $T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 = 0$ получаются мнимые сопряженные корни: $s_{1,2} = \pm j\omega_0, \omega_0 = \frac{1}{T}$ - частота собственных незатухающих колебаний. Переходная функция:

$$h(t) = k\left(1 - \cos\omega_0 t\right)$$

Такое звено еще называют консервативным, поскольку оно сохраняет постоянство амплитуды колебаний



Построение динамических характеристик типовых звеньев

Задание

Построить АФХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ инерционного звена второго порядка.