

Перечень заданий к экзамену по дисциплине
"Дискретная математика"

1. Из семи различных гвоздик и пяти различных тюльпанов надо составить букет, состоящий из трех гвоздик и двух тюльпанов. Сколькими способами это можно сделать?
2. Сколькими способами можно составить колонну из десяти автобусов и трех легковых автомобилей, считая, что все автобусы и автомобили одинаковых марок?
3. Из семи бегунов и трех прыгунов нужно составить команду из 5 человек, в которую должен входить хотя бы один прыгун. Сколькими способами это можно сделать?
4. В подразделении 30 солдат и три офицера. Сколькими способами можно выделить патруль, состоящий из трех солдат и одного офицера?
5. Сколькими способами можно выбрать четыре делегата на профсоюзную конференцию, если в группе 20 человек?
6. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 8 мужчин и 8 женщин, чтобы никаких двое мужчин и никакие две женщины не сидели рядом?
7. Из семи мужчин и четырех женщин надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?
8. Сколько всего делителей у числа 105?
9. Найти все натуральные n , удовлетворяющие условию:

$$\binom{2n}{7} > \binom{2n}{5}$$

10. Найти все натуральные n , удовлетворяющие условию:

$$\frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{4}} = \frac{6}{5}$$

11. Доказать, что число $11^{10} - 1$ делится на 100.

12. Докажите, что $7^{2n} - 1$ при любом натуральном n делится на 48.
13. Докажите, что $10^n + 18n - 28$ при любом натуральном n делится на 27.
14. Докажите, что $2n^3 + 3n^2 + 7n$ при любом натуральном n делится на 6.
15. Докажите, что при любом натуральном n справедливо равенство:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

16. Докажите, что при любом натуральном n справедливо равенство:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

17. Найти коэффициент при x^{19} в разложении производящей функции

$$f(x) = \frac{x^4}{1 - x^5}$$

18. Найти коэффициент при x^{12} в разложении производящей функции

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(1 - x)^4}$$

19. Сколько существует способов выбора 10 шаров из 20 красных, 20 белых и 20 синих шаров, если следует выбрать четное количество красных и четное количество синих шаров?

20. Используя производящие функции, решите рекуррентное соотношение:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^n, a_0 = 1$$

21. Решите рекуррентное соотношение:

$$a_n = 2a_{n-1} - 3, a_0 = 4$$

22. Решите рекуррентное соотношение:

$$a_n = a_{n-1} + n, a_0 = 1$$

23. Пусть $F(n) = 2^{2^n} + 1, n \geq 0$, докажите, что:

$$F(n+1) = F(0)F(1) \dots F(n) + 2$$

24. Найти наибольший общий делитель чисел 289, 377.

25. Найти наибольший общий делитель чисел 621, 437.

26. Решить сравнение

$$13x \equiv 10 \pmod{15}$$

27. Решить сравнение

$$12x \equiv 8 \pmod{24}$$

28. Решить сравнение

$$16x \equiv 7 \pmod{26}$$

29. Доказать, что уравнение $3x^2 + 2 = y^2$ неразрешимо в целых числах.

30. Доказать, что если целое число n не делится на 7, то либо $n^3 - 1$, либо $n^3 + 1$ делится на 7.

31. Доказать, что число $\frac{n!}{2^n}$ нецелое.

32. Определите, при каких n дробь $\frac{3n+7}{7n+2}$ несократима.

33. Определите, при каких n дробь $\frac{2n+5}{13n+7}$ несократима.

34. Определите, при каких n дробь $\frac{11n+3}{17n+8}$ сократима.

35. С использованием алгоритма RSA передать сообщение 666777888999 от абонента А абоненту В.

36. С использованием алгоритма RSA передать сообщение 111222333444555666 от абонента А абоненту В.

37. С использованием алгоритма без передачи ключей передать сообщение 1234554321 от абонента А абоненту В.

38. С использованием алгоритма без передачи ключей передать сообщение 777888999 от абонента А абоненту В.

39. Найти x :

$$x \equiv 6745 \cdot (100101^{5432} + 999^{131313})^{7874} + 4431 \pmod{17}$$

40. Найти x :

$$x \equiv (6432^{86432} - 8642^{8532}) \cdot (7532^{4322} + 8764^{98654}) + 864 \pmod{17}$$

41. Найти x :

$$x \equiv 67 \cdot (65432^{8888} + 222^{333})^{753} + 44 \pmod{23}$$

42. Найти x :

$$x \equiv 11 \cdot (222^{3333} + 4444^{5555})^{66666} + 7777777 \pmod{13}$$

43. Разложите перестановку в произведение циклов и транспозиций, определите ее четность:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

44. Разложите перестановку в произведение циклов и транспозиций, определите ее четность:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 2 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

45. Разложите перестановку в произведение циклов и транспозиций, определите ее четность:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

46. Найти x :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

47. Найти x :

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

48. На множестве натуральных чисел задана абстрактная операция

$$n_1 \circ n_2 = 2n_1 + n_2$$

Определить, является ли алгебра $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ группоидом, полугруппой, моноидом, группой, абелевой группой.

49. На множестве чисел вида $a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{R}$ определена операция умножения:

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = a_3 + b_3\sqrt{3}, a_3 = a_1a_2 + 3b_1b_2, b_3 = a_1b_2 + a_2b_1$$

Определить, является ли алгебра $\langle \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{R}\}, \circ \rangle$ группоидом, полугруппой, моноидом, группой, абелевой группой.

50. Построить группу самосовмещений ромба на плоскости и в пространстве.

51. Доказать соотношение:

$$(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$$

52. Доказать соотношение:

$$(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$$

53. Дано

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, P_1 \subseteq A \times B, P_2 \subseteq B^2$$

$$P_1 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle a, 4 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle c, 4 \rangle\}$$

$$P_2 = \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

Найти $(P_1 \circ P_2)^{-1}$. Является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

54. Какие множества являются равномощными: множество точек отрезка, множество натуральных чисел, множество точек на прямой, множество действительных чисел, множество простых чисел, множество видимых звезд на небе, множество рациональных чисел.

55. Сколько положительных чисел от 20 до 1000 делятся ровно на одно из чисел 7, 11 или 13.