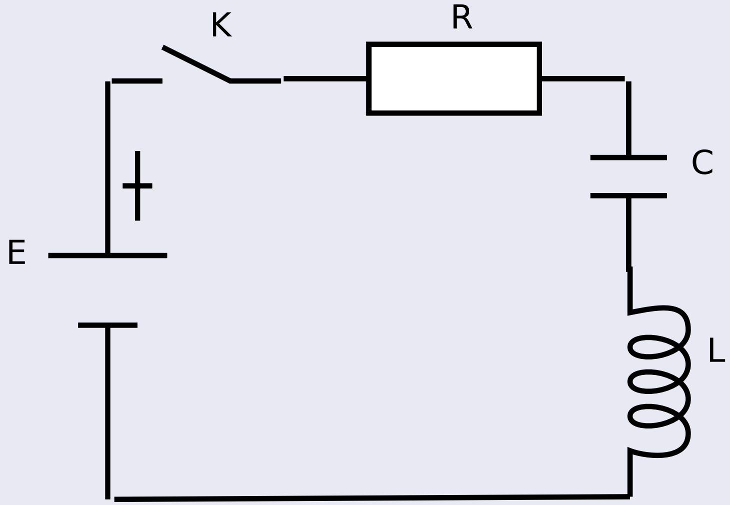
Переходные процессы в электрических цепях второго порядка

Содержание

Как мы выяснили, наличие в электрической цепи емкостного или индуктивного элемента не позволяет мгновенно меняться напряжению и току соответственно при выполнении различных коммутаций в схеме. Период времени, в течение которого эти величины плавно меняются под новые условия в схеме, характеризуется временем протекания переходного процесса.

Еще более сложное поведение наблюдается в схемах с одновременно включенными индуктивным и емкостным элементами. Рассмотрим ряд примеров расчета таких схем.

В первом примере индуктивный и емкостный элементы включены последовательно, вместе с ними также последовательно включен резистивный элемент. При этом начальные условия нулевые: $u_c(t=0)=0, i_L(t=0)=0, u_c'(t=0)=0, i_L'(t=0)=0$.



Последовательный контур индуктивного и емкостного элемента

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$E = i(t)R + u_c(t) + u_L(t), u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}, i(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

В полученных уравнениях мы исходим из того, что через резистор, катушку индуктивности и конденсатор протекает один и тот же ток $i(t)$.

Подставив полученные соотношения, имеем:

$$E = CR \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) + CL \cdot \frac{d^2u_c(t)}{dt^2}$$

Перепишем последнее уравнение в канонической форме:

$$CL \cdot \frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + CR \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E$$

Таким образом, получили дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка.

Рассмотрим кратко необходимые теоретические сведения из теории дифференциальных уравнений.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = 0$$

В этом случае составляется характеристическое уравнение:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Решаем квадратное уравнение, находим корни r_1, r_2. Общее решение составляем, анализируя случаи:

- $r_1, r_2, r_1 \neq r_2$ - действительные числа, $y(t) = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}$;
- $r_1, r_2, r_1 = r_2$ - действительные числа, $y(t) = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot t \cdot e^{r_1 t}$;
- $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ - комплексные числа, $y(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t))$

Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Метод неопределенных коэффициентов

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = f(t)$$

Приводим уравнение к виду:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(t)$$

Решение исходного дифференциального уравнения составляется в виде $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ - общее решение однородного дифференциального уравнения; y^* - частное решение дифференциального уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(t)$.

Чатное решение y^* находим исходя из вида фунции $f(t)$

- Если $f(t) = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot t + a_0$, то $y^* = \left(b_n \cdot t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot t + b_0\right) \cdot t^k$, k - число корней характеристического уравнения (х.у.), равных нулю;
- Если $f(t) = e^{\gamma \cdot t} \cdot \left(a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot t + a_0\right)$, то $y^* = \left(b_n \cdot t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot t + b_0\right) \cdot t^k \cdot e^{\gamma \cdot t}$, k - число корней х.у., равных γ
- Если $f(t) = a \cdot \cos(\alpha \cdot t) + b \cdot \sin(\alpha \cdot t)$, то $\bar{y}^* = t^k \cdot (A \cdot \cos(\alpha \cdot t) + B \cdot \sin(\alpha \cdot t))$, k - число корней х.у., равных $i\alpha$

Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Метод неопределенных коэффициентов

- Если $f(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos(\beta x) + P_m(x) \cdot \sin(\beta \cdot x))$, то $y^* = x^k \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot (Q_1(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + Q_2(x) \cdot \sin(\beta \cdot x))$, где $Q_1(x), Q_2(x)$ - многочлены степени $s = max(n, m)$, k - число корней х.у., равных $\alpha + i\beta$

Последовательный контур индуктивного и емкостного элемента

Итак, возвращаясь к нашему случаю, находим решение однородного дифференциального уравнения:

$$CL \cdot \frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + CR \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$$

$$CLr^2 + CRr + r = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-CR \pm \sqrt{(CR)^2 - 4CL}}{2CL} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

Таким образом, исходя из значения подкоренного выражения, возможны три различных случая для общего решения.

- если $R^2 > \frac{4L}{C} \Rightarrow R > \sqrt{\frac{4L}{C}}$, то получаем два действительных корня r_1, r_2, $\bar{u_c}(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$
- если $R > \sqrt{\frac{4L}{C}}$, то получаем один корень $r_1 = r_2, \bar{u_c}(t) = C_1e^{r_1t} + C_2te^{r_1t}$
- если $R < \sqrt{\frac{4L}{C}}$, то получаем комплексные корни $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$, $\bar{u_c}(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t))$

Однако мы имеем дело с неоднородным дифференциальным уравнением, правая часть которого равна константе E, значит по методу неопределенных коэффициентов частное решение $u_c^*(t) = a_0$ (корней характеристического уравнения, равных нулю, нет).

Последовательный контур индуктивного и емкостного элемента

Найдем $u_c^*(t) = a_0$ по методу неопределенных коэффициентов:

$$CL \cdot \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + CR \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E$$

Имеем: $(u_c^*)'' = (u_c^*)' = 0$, подставляем их в уравнение выше, получаем $a_0 = E$.
Окончательно общее решение нужно записать с учетом рассмотренных трех случаев:

1. $R > \sqrt{\frac{4L}{C}}$, $u_c(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + E$
2. $R = \sqrt{\frac{4L}{C}}$, $u_c(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t} + E$
3. $R < \sqrt{\frac{4L}{C}}$, $u_c(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t)) + E$

Константы C_1, C_2 находим из начальных условий. Зададимся конкретными параметрами схемы, чтобы получилось три рассмотренных случая, варьируя значение сопротивления R.

Случай разных действительных корней

Пусть $E = 5$ В, $L = 1$ Гн, $C = 0.05$ Ф, тогда $\sqrt{\frac{4L}{C}} \approx 8.944$, поэтому выберим $R = 20$ Ом.

Тогда $r_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \approx -1.055$, $r_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \approx -18.94$

$$u_c(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + E = C_1 e^{-1.055t} + C_2 e^{-18.94t} + 5$$

Учтем начальные условия $u_c(t = 0) = 0, u_c'(t = 0) = 0$

$$0 = C_1 + C_2 + 5$$

$$-1.055 C_1 - 18.94 C_2 = 0$$

$$C_1 = -5.29, C_2 = 0.294$$

Окончательно получаем

$$u_c(t) = -5.29 e^{-1.055t} + 0.294 e^{-18.94t} + 5$$

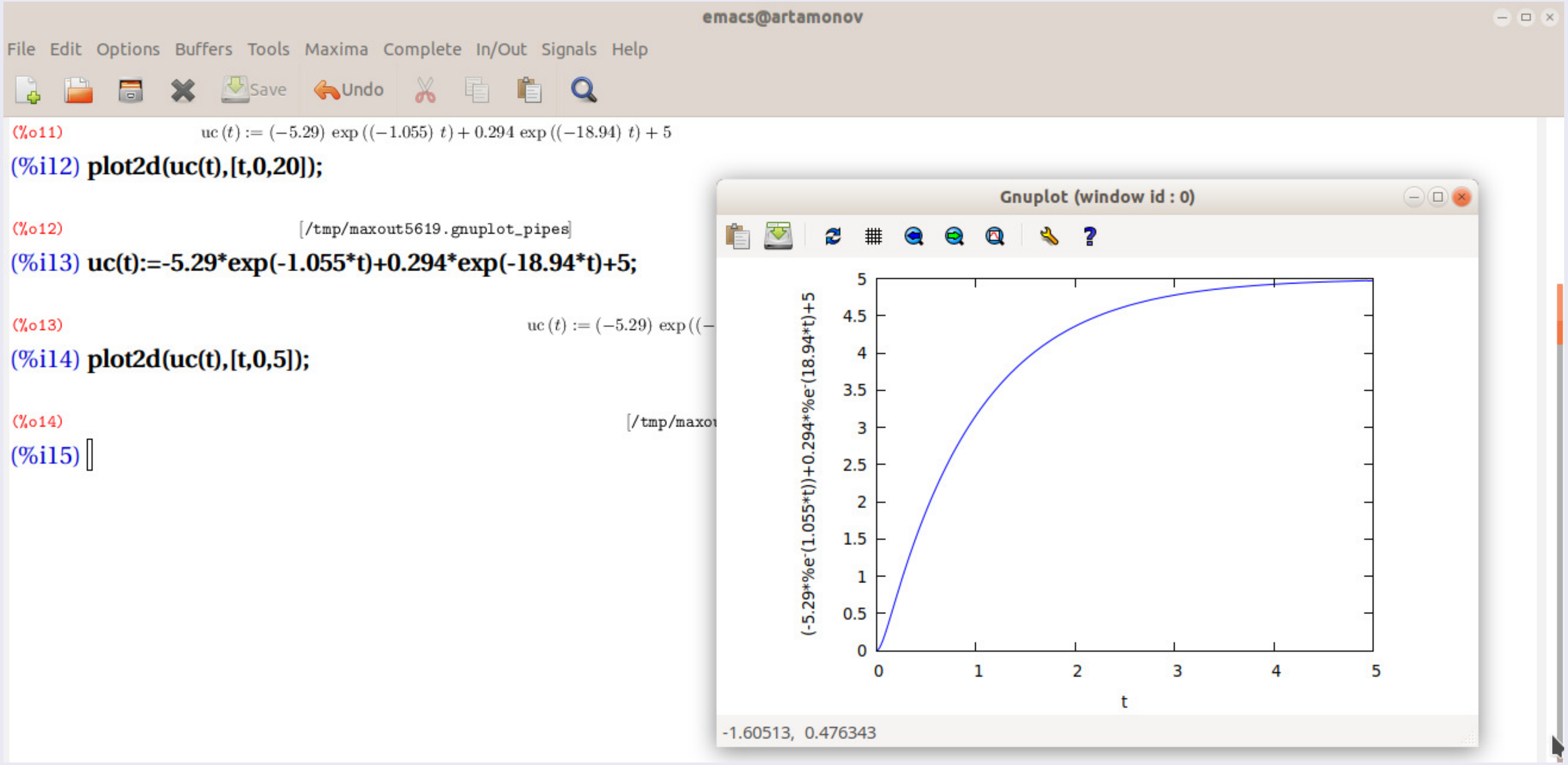
Также легко найти ток цепи:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = 0.05 \cdot \left(5.29 \cdot 1.055 e^{-1.055t} - 0.294 \cdot 18.94 e^{-18.94t}\right)$$

$$i(t) = 0.279 e^{-1.055t} - 0.279 e^{-18.94t}$$

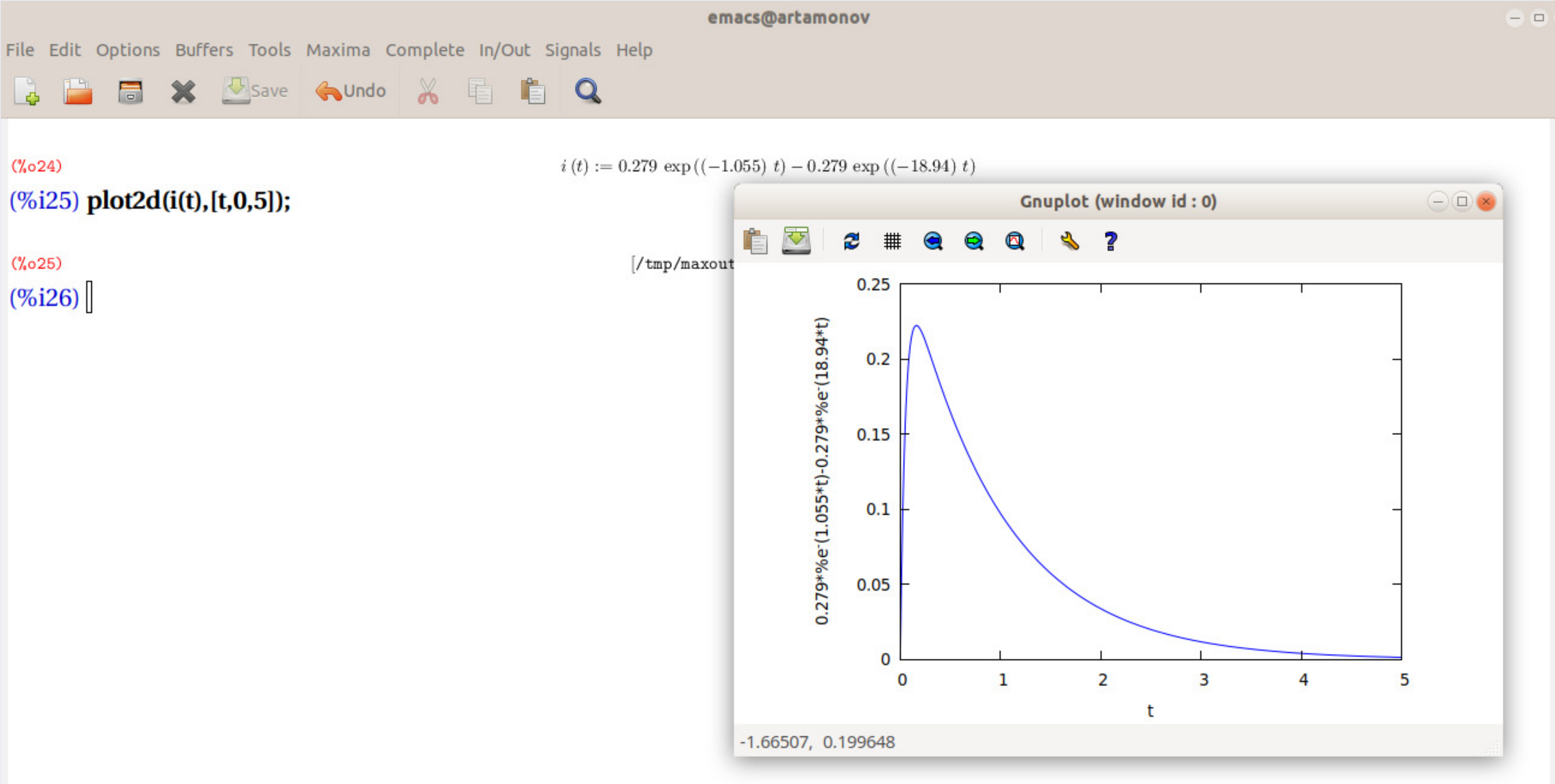
Случай разных действительных корней

График напряжения



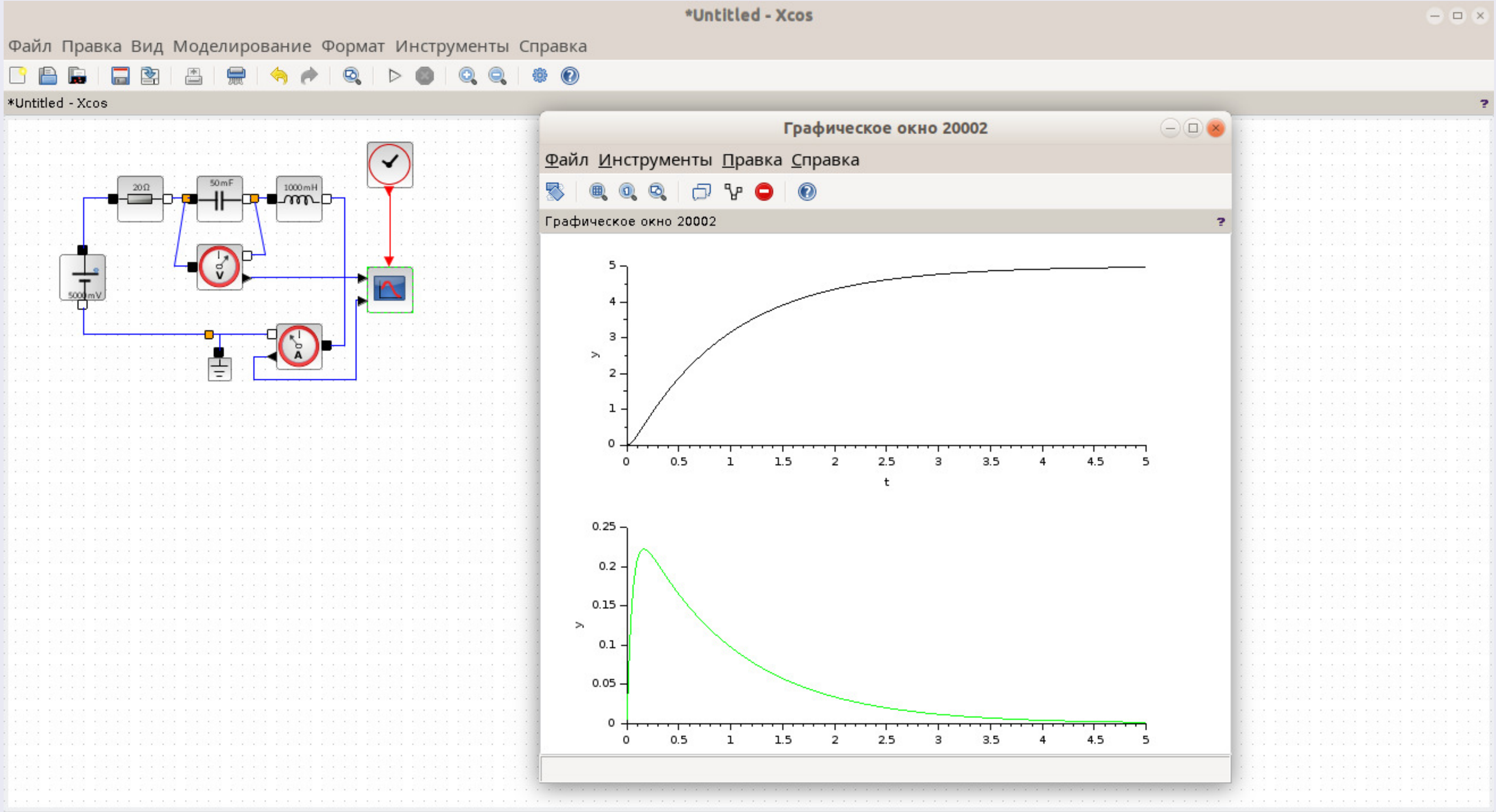
Случай разных действительных корней

График тока



Случай разных действительных корней

Результаты моделирования в scilab



Случай равных действительных корней

Эксперименты с изменением значения сопротивления R вплоть до значения $R = \sqrt{\frac{4L}{C}}$

Случай мнимых корней

Рассмотрим теперь ситуацию $R < \sqrt{\frac{4L}{C}}$. Например, возьмем $R = 2$ Ом.

Имеем: $r_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} = \alpha + \beta i \approx -1 + 4.36i, r_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} = \alpha - \beta i \approx -1 - 4.36i, \alpha = -1, \beta = 4.36$

Тогда решение запишется в виде:

$$u_c(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t)) + E$$

$$u_c(t) = e^{-t} \cdot (C_1 \cdot \cos(4.36 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(4.36 \cdot t)) + 5$$

Найдем C_1, C_2 из начальных условий: $u_c(t = 0) = 0, u_c'(t = 0) = 0$

Имеем:

$$0 = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos(4.36 \cdot 0) + C_2 \cdot \sin(4.36 \cdot 0)) + 5 = C_1 + 5 \Rightarrow C_1 = -5$$

$$u_c'(t) = -e^{-t} \cdot (C_1 \cdot \cos(4.36 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(4.36 \cdot t)) + e^{-t} \cdot (-4.36 C_1 \sin(4.36 \cdot t) + 4.36 C_2 \cos(4.36 \cdot t))$$

$$0 = -C_1 + 4.36 C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{4.36} = \frac{-5}{4.36} \approx -1.147$$

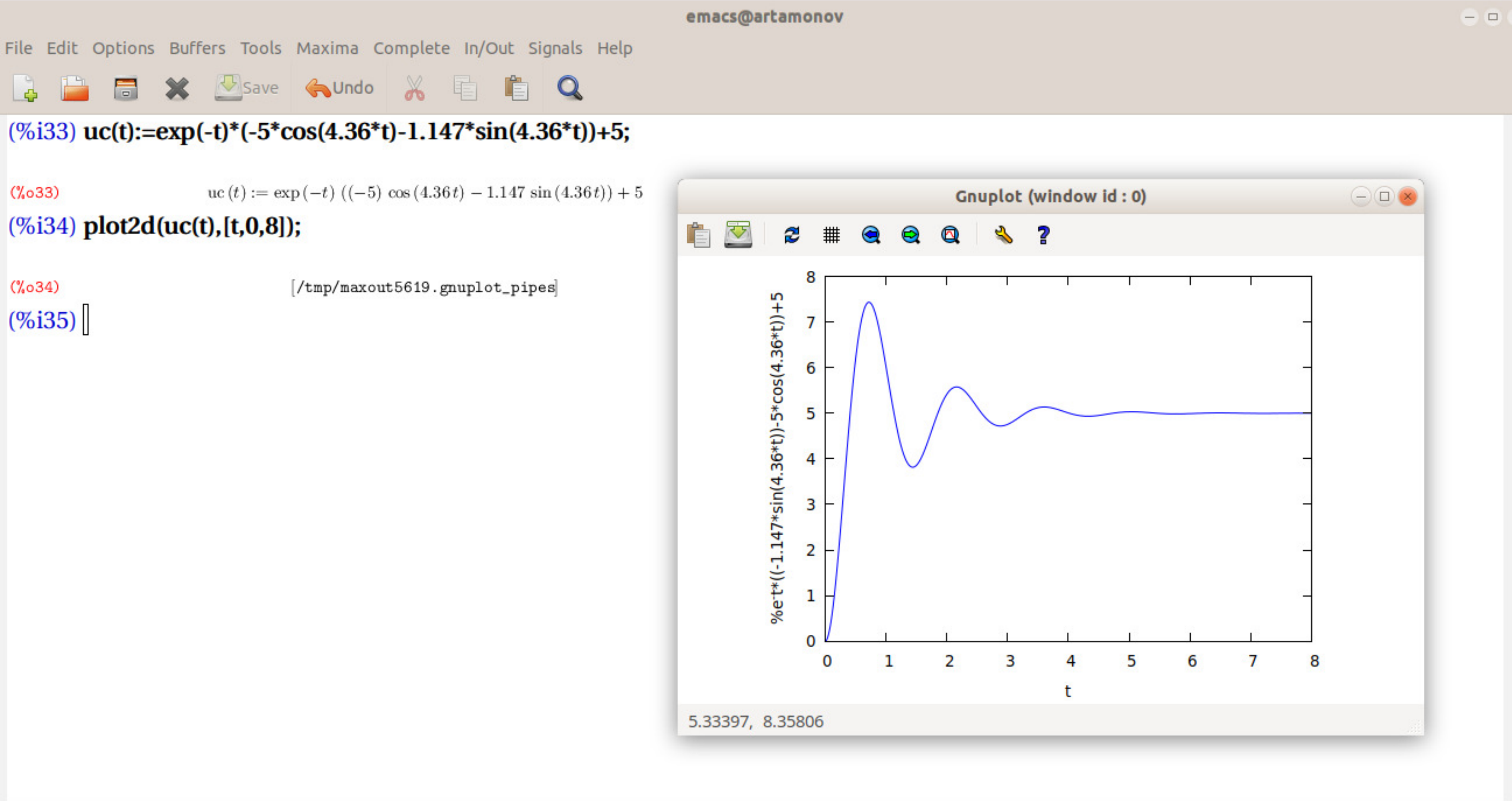
Окончательно решение записываем в виде:

$$u_c(t) = e^{-t} \cdot (-5 \cdot \cos(4.36 \cdot t) - 1.147 \cdot \sin(4.36 \cdot t)) + 5$$

Построим график функции $u_c(t)$ в maxima.

Случай мнимых корней

График напряжения



Случай мнимых корней

Также выразим ток цепи:

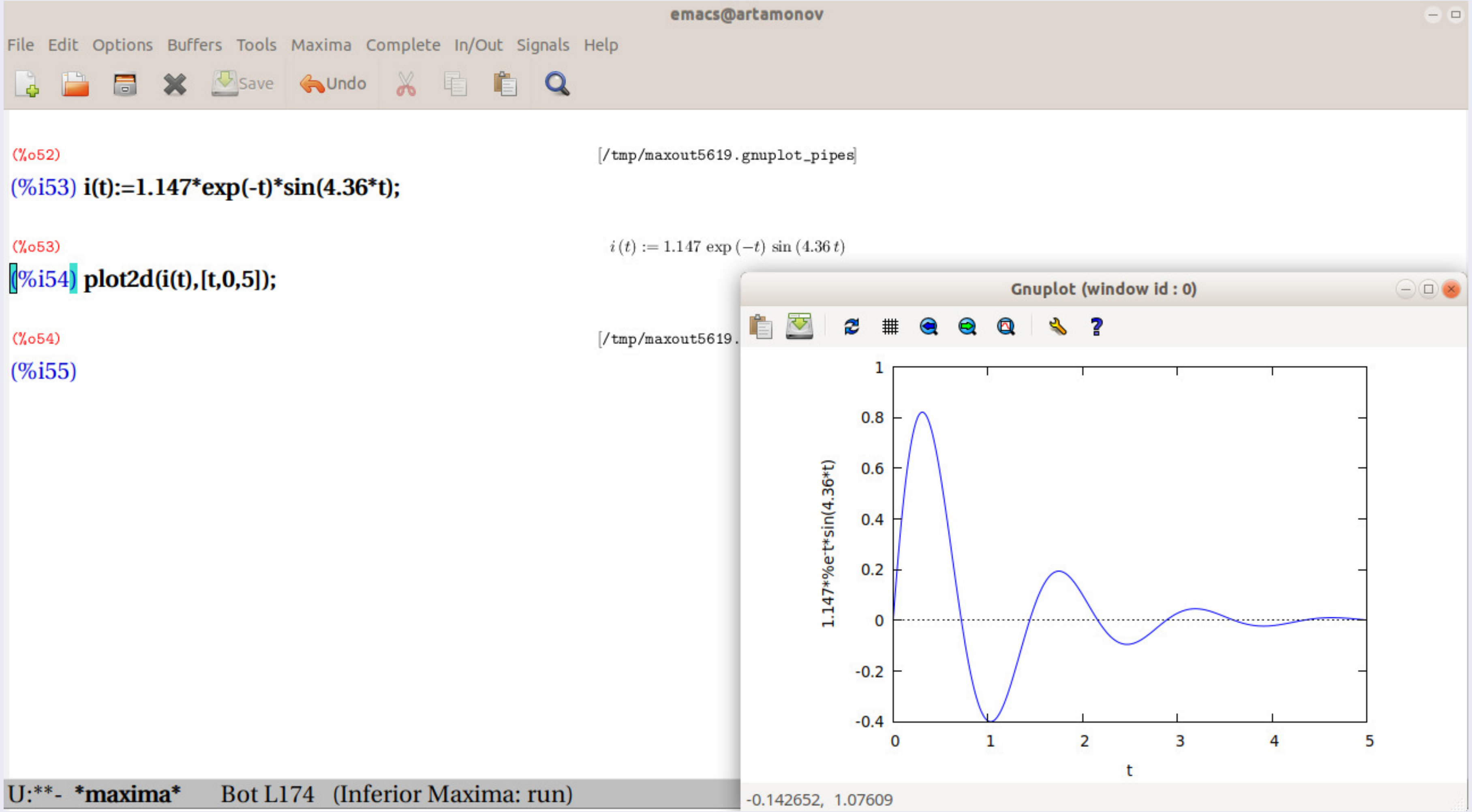
$$i(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = 0.05 \cdot \left(e^{-t} \cdot (-5 \cdot \cos(4.36 \cdot t) - 1.147 \cdot \sin(4.36 \cdot t)) + 5\right)'$$

$$i(t) = -0.05e^{-t} \cdot (-5 \cdot \cos(4.36 \cdot t) - 1.147 \cdot \sin(4.36 \cdot t)) +$$
$$+0.05e^{-t}(5 \cdot 4.36 \cdot \sin(4.36 \cdot t) - 1.147 \cdot 4.36 \cdot \cos(4.36 \cdot t))$$
$$i(t) = 1.147e^{-t}\sin(4.36t)$$

Построим график функции $i(t)$ в maxima.

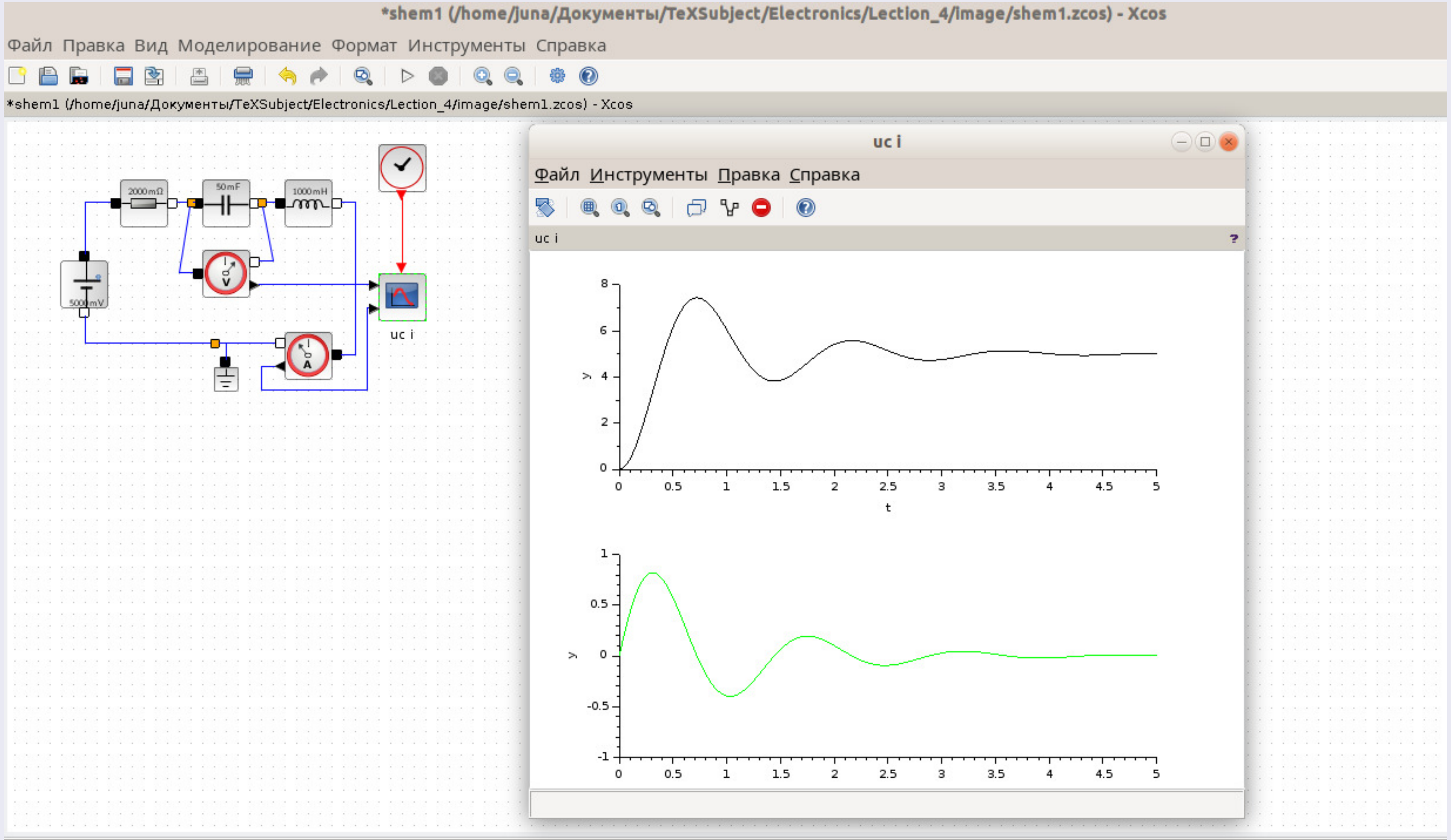
Случай мнимых корней

График тока



Случай мнимых корней

Результаты моделирования в scilab



Специальный случай мнимых корней $R = 0$

В данном случае получаем чисто мнимые корни характеристического уравнения: $r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$, при $R = 0, r_{1,2} = \pm\frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} i$

При выбранных параметрах цепи получаем $r_{1,2} = \pm 4.472i$ Тогда

$$u_c(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t)) + E$$

при $R = 0, u_c(t) = C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t) + E$

$$u_c(t) = C_1 \cdot \cos(4.472 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(4.472 \cdot t) + 5$$

Найдем константы C_1, C_2 из начальных условий $u_c(0) = 0 = C_1 \cdot \cos(4.472 \cdot 0) + C_2 \cdot \sin(4.472 \cdot 0) + 5 \Rightarrow C_1 = -5$

$$u_c'(0) = 0 = -4.472 C_1 \sin(4.472 \cdot 0) + 4.472 C_2 \cos(4.472 \cdot 0) \Rightarrow C_2 = 0$$

Окончательно получаем:

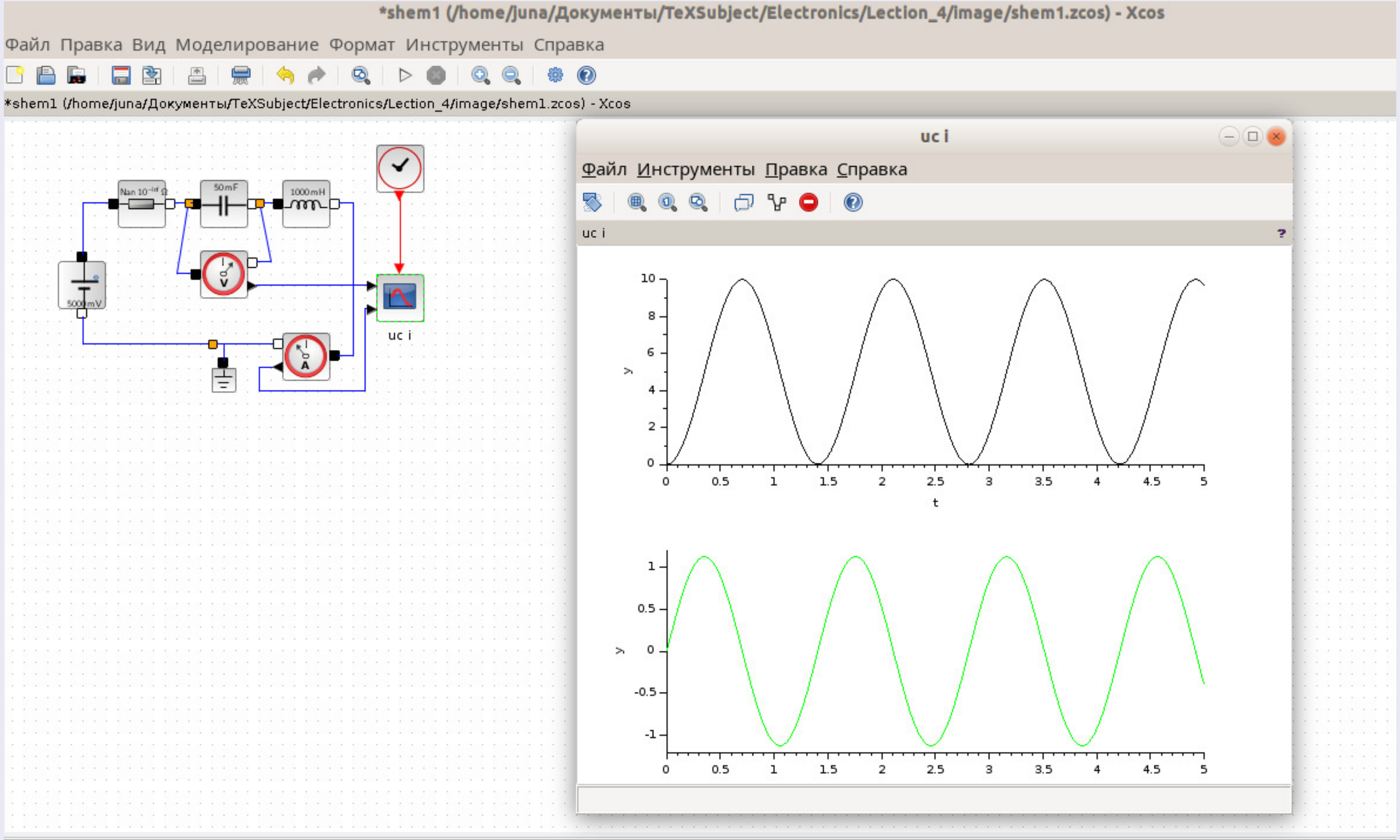
$$u_c(t) = 5 - 5 \cdot \cos(4.472 \cdot t)$$

$$i(t) = 1.118 \cdot \sin(4.472t)$$

Как видно из полученных решений, в цепи возникают незатухающие колебания, причем максимальные скачки напряжения достигают 10 В.

Специальный случай мнимых корней $R = 0$

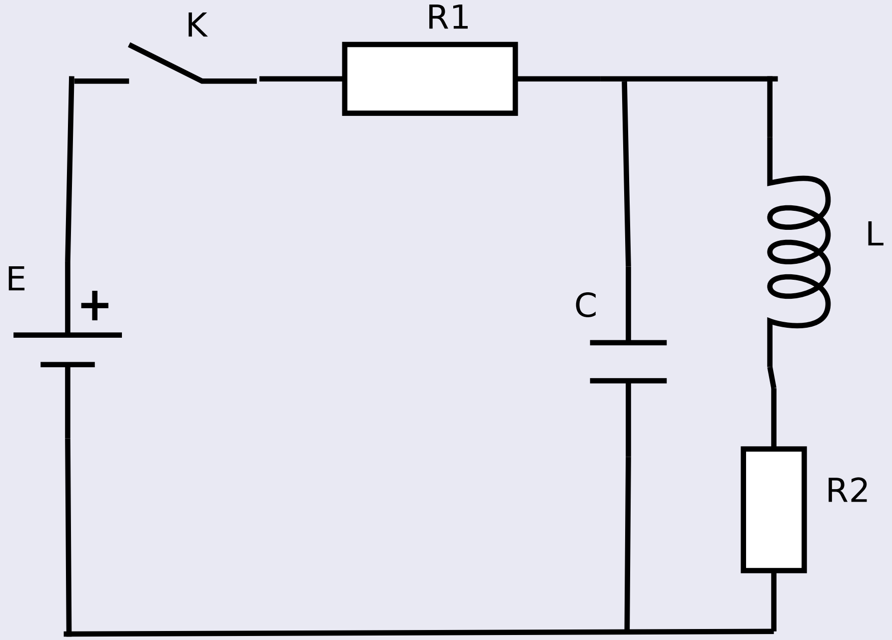
Результаты моделирования в scilab



На практике такой режим не может возникнуть в чистом виде, поскольку сопротивление проводов не равно нулю.

Параллельный контур индуктивного и емкостного элемента

Рассмотрим теперь случай параллельного соединения индуктивного и емкостного элементов.



Следует обратить внимание на желательное наличие резистора R_2, т.к. в стационарных условиях катушка индуктивности эквивалентна короткому замыканию, а значим конденсатор в схеме был бы закорочен на себя, что не совсем корректно.

Параллельный контур индуктивного и емкостного элемента

Составим необходимые уравнения:

$$i(t) = i_c(t) + i_L(t)$$

$$E = i(t)R_1 + u_c(t)$$

$$i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}, u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$u_c(t) = u_L(t) + i_L(t)R_2 = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t)R_2$$

$$i_c(t) = CL \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + CR_2 \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i(t) = CL \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + CR_2 \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t)$$

$$E = R_1 CL \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + CR_1R_2 \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + R_1 i_L(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t)R_2$$

$$E = R_1 CL \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + (CR_1R_2 + L) \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_L(t)$$

Параллельный контур индуктивного и емкостного элемента

Последнее уравнение также является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$R_1CL \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + (CR_1R_2 + L) \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_L(t) = E$$

Его характеристическим уравнением является:

$$R_1CLr^2 + (CR_1R_2 + L)r + (R_1 + R_2) = 0$$

Корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = \frac{-(CR_1R_2 + L) \pm \sqrt{(CR_1R_2 + L)^2 - 4R_1LC(R_1 + R_2)}}{2R_1LC}$$

Условиями выделения трех случаев являются:

$CR_1R_2 + L > 2\sqrt{R_1LC(R_1 + R_2)}$ -действительные корни;

$CR_1R_2 + L = 2\sqrt{R_1LC(R_1 + R_2)}$ - один действительный корень;

$CR_1R_2 + L < 2\sqrt{R_1LC(R_1 + R_2)}$ - мнимые корни.

Параллельный контур индуктивного и емкостного элемента

Последние условия можно разрешить в maxima относительно R_1:
$R_1 > \frac{CLR_2+2L\sqrt{CL}}{C^2R_2^2-4CL}$ -действительные корни;
$R_1 = \frac{CLR_2+2L\sqrt{CL}}{C^2R_2^2-4CL}$ - один действительный корень;
$R_1 < \frac{CLR_2+2L\sqrt{CL}}{C^2R_2^2-4CL}$ - мнимые корни.
Частное решение можно найти по форме правой части полученного уравнения:

$$R_1CL \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + (CR_1R_2 + L) \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_L(t) = E$$

Значит $i^*(t) = a_0 = const$, тогда $(i^*(t))' = (i^*(t))'' = 0 \Rightarrow R_1CL \cdot 0 + (CR_1R_2 + L) \cdot 0 + (R_1 + R_2)i_L^*(t) = E \Rightarrow i_L^*(t) = \frac{E}{R_1+R_2}$ Окончательно получаем:

$$R_1 > \frac{CLR_2 + 2L\sqrt{CL}}{C^2R_2^2 - 4CL}, i_L(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$R_1 = \frac{CLR_2 + 2L\sqrt{CL}}{C^2R_2^2 - 4CL}, i_L(t) = C_1e^{r_1t} + C_2te^{r_1t} + \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$R_1 < \frac{CLR_2 + 2L\sqrt{CL}}{C^2R_2^2 - 4CL}, i_L(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t)) + \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Параллельный контур индуктивного и емкостного элемента

Задание

Выполнить расчет параметров параллельного контура при $R_1 = 0$.