ПОЯСНЕНИЯ
"Анализ переходных процессов с использованием преобразования Лапласа"

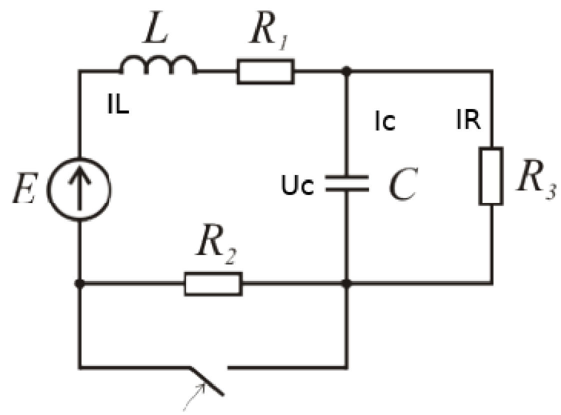

Рис. 1: Искомая схема

В начальный момент времени ключ разомкнут, рассчитываем токи и напряжения для первого переходного процесса (при нулевых начальных условиях).

Составляем уравнения по законам Кирхгофа:

$$i_L(t) = i_c(t) + i_R(t)$$

$$E = u_L(t) + i_L(t)R_1 + u_c(t) + i_L(t)R_2$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}, i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}, u_c(t) = i_R(t)R_3$$

Перейдем от оригиналов к изображениям по Лапласу:

$$I_L(S) = I_c(S) + I_R(S)$$

$$\frac{E}{S} = U_L(S) + I_L(S)R_1 + U_c(S) + I_L(S)R_2$$

$$U_L(S) = LSI_L(S), I_c(S) = CSU_c(S), U_c(S) = I_R(S)R_3$$

Выразим и найдем $I_L(S)$:

$$\frac{E}{S} = LSI_L(S) + I_L(S)R_1 + I_R(S)R_3 + I_L(S)R_2$$

$$U_c(S) = \frac{I_c(S)}{CS} = I_RR_3 \Rightarrow I_c(S) = CSR_3I_R(S)$$

$$I_L(S) = I_R(S) + CSR_3I_R(S) \Rightarrow I_R(S) = \frac{I_L(S)}{1 + CSR_3}$$

$$\frac{E}{S} = \left(LS + R_1 + R_2 + \frac{R_3}{1 + CR_3S}\right) \cdot I_L(S)$$

$$I_L(S) = \frac{E(1 + CR_3S)}{S(CLR_3S^2 + (L + CR_1R_3 + CR_2R_3)S + (R_1 + R_2 + R_3))}$$

Окончательно получаем:

$$I_L(S) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{(1 + CR_3S)}{S\left(\frac{CR_3L}{R_1+R_2+R_3} \cdot S^2 + \frac{(L+CR_1R_3+CR_2R_3)}{R_1+R_2+R_3} \cdot S + 1\right)}$$

$$I_L(S) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{1 + T_1S}{S(T_2S^2 + T_3S + 1)}$$

$$T_1 = CR_3, T_2 = \frac{CR_3L}{R_1 + R_2 + R_3}, T_3 = \frac{(L + CR_1R_3 + CR_2R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Выполним обратное преобразование по Лапласу:

$$L^{-1}(I_L(S)) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot L^{-1}\left(\frac{1 + T_1S}{S(T_2S^2 + T_3S + 1)}\right)$$

Для нахождения $L^{-1}\left(\frac{1+T_1S}{S(T_2S^2+T_3S+1)}\right)$ воспользуемся теоремой о разложении:

$$W(S) = \frac{P(S)}{SQ(S)} \Rightarrow L^{-1}(W(S)) = \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{P(s_k)}{s_k \cdot Q'(s_k)} \cdot e^{s_k \cdot t},$$

где n - порядок многочлена $Q(S)$, s_k - корни многочлена $Q(S)$.

В нашем случае $P(S) = 1 + T_1S; Q(S) = T_2S^2 + T_3S + 1$, тогда корни знаменателя находятся из квадратного уравнения:

$$T_2S^2 + T_3S + 1 = 0$$

$$s_1 = \frac{-T_3 - \sqrt{T_3^2 - 4 \cdot T_2}}{2 \cdot T_2}$$

$$s_2 = \frac{-T_3 + \sqrt{T_3^2 - 4 \cdot T_2}}{2 \cdot T_2}$$

$$Q'(S) = 2T_2S + T_3$$

Окончательно получаем:

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \left(1 + \frac{1 + T_1s_1}{s_1 \cdot (2T_2s_1 + T_3)} \cdot e^{s_1t} + \frac{1 + T_1s_2}{s_2 \cdot (2T_2s_2 + T_3)} \cdot e^{s_2t}\right)$$

Рассчитаем $U_c(S)$:

$$U_c(S) = I_R(S)R_3 = \frac{I_L(S)R_3}{1+CR_3 s}$$

$$U_c(S) = \frac{R_3}{1+CR_3S} \cdot \frac{E}{R_1+R_2+R_3} \cdot \frac{(1+CR_3S)}{S\left(\frac{CR_3L}{R_1+R_2+R_3} \cdot S^2 + \frac{(L+CR_1R_3+CR_2R_3)}{R_1+R_2+R_3} \cdot S + 1\right)}$$

$$U_c(S) = \frac{ER_3}{R_1+R_2+R_3} \cdot \frac{1}{S\left(\frac{CR_3L}{R_1+R_2+R_3} \cdot S^2 + \frac{(L+CR_1R_3+CR_2R_3)}{R_1+R_2+R_3} \cdot S + 1\right)}$$

$$U_c(S) = \frac{ER_3}{R_1+R_2+R_3} \cdot \frac{1}{S(T_2S^2+T_3S+1)}$$

$$u_c(t) = \frac{ER_3}{R_1+R_2+R_3} \cdot \left(1 + \frac{1}{s_1 \cdot (2T_2s_1+T_3)} \cdot e^{s_1t} + \frac{1}{s_2 \cdot (2T_2s_2+T_3)} \cdot e^{s_2t}\right)$$

Зададимся конкретными значениями:

$$E = 10 \text{ В}, L = 0.1 \text{ Гн}, R1 = 10 \text{ Ом}, R2 = 30 \text{ Ом}, R3 = 5 \text{ Ом}, C = 0.01 \text{ Ф}$$

Выполним расчеты в maxima и проведем моделирование в scilab.

```
(%i1) E:10$L:0.1$R1:10$R2:30$R3:5$C:0.01$

(%i7) T1:C*R3$T2:C*R3*L/(R1+R2+R3)$T3:(L+C*R1*R3+C*R2*R3)/(R1+R2+R3)$

(%i10) s1:(-T3-sqrt(T3^2-4*T2))/(2*T2);s2:(-T3+sqrt(T3^2-4*T2))/(2*T2);

(%o10)                    -397.3499399519519
(%o11)                    -22.65006004804806
(%i12) iL(t):=E/(R1+R2+R3)*(1+(1+T1*s1)/(s1*(2*T2*s1+T3))*exp(s1*t)+(1+T1*s2)/(s2*(2*T2*s2+T3))*exp(s2*t))$

(%i13) uc(t):=E*R3/(R1+R2+R3)*(1+1/(s1*(2*T2*s1+T3))*exp(s1*t)+1/(s2*(2*T2*s2+T3))*exp(s2*t))$

(%i14) plot2d(iL(t),[t,0,0.2]);

(%o14)                              [/tmp/maxout10597.gnuplot_pipes]
(%i15) plot2d(uc(t),[t,0,0.2]);

(%o15)                              [/tmp/maxout10597.gnuplot_pipes]
(%i16)
```

Рис. 2: Расчеты в maxima

Рассчитаем параметры второго переходного процесса в соответствии с новой схемой. Для этого достаточно в законах Кирхгофа взять $R_2 = 0$. Тогда получаем:

$$i_L(t) = i_c(t) + i_R(t)$$
$$E = u_L(t) + i_L(t)R_1 + u_c(t)$$
$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}, i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}, u_c(t) = i_R(t)R_3$$

Перейдем от оригиналов к изображениям по Лапласу:

$$I_L(S) = I_c(S) + I_R(S)$$
$$\frac{E}{s} = U_L(S) + I_L(S)R_1 + U_c(S)$$
$$U_L(S) = L(S \cdot I_L(S) - i_L(0))$$
$$I_c(S) = C(S \cdot U_c(S) - u_c(0))$$
$$U_c(S) = I_R(S)R_3$$

Выполняем преобразования:

$$\frac{E}{s} = L(S \cdot I_L(S) - i_L(0)) + I_L(S)R_1 + U_c(S)$$
$$I_R(S) = I_L(S) - I_c(S)$$
$$U_c(S) = I_R(S)R_3 = \left(I_L(S) - C\left(S \cdot U_c(S) - u_c(0)\right)\right)R_3$$
$$U_c(S) = \frac{I_L(S)R_3 + CR_3u_c(0)}{1 + CR_3S}$$

Получаем:

$$\frac{E}{s} = L(S \cdot I_L(S) - i_L(0)) + I_L(S)R_1 + \frac{I_L(S)R_3 + CR_3u_c(0)}{1 + CR_3S}$$
$$\frac{E}{s} + i_L(0)L - \frac{CR_3u_c(0)}{1 + CR_3S} = (LS + R_1 + \frac{R_3}{1 + CR_3S})I_L(S)$$
$$I_L(S) = \frac{\frac{E}{s} + i_L(0)L - \frac{CR_3u_c(0)}{1+CR_3S}}{LS + R_1 + \frac{R_3}{1+CR_3S}}$$

Выполним дальнейшие преобразования:

$$I_L(S) = \frac{\frac{E}{s} + i_L(0)L - \frac{CR_3u_c(0)}{1+CR_3S}}{\frac{LS+LCR_3S^2+R_1+CR_1R_3S+R_3}{1+CR_3S}}$$

$$I_L(S) = \frac{\frac{E}{s}(1 + CR_3S) + i_L(0)L(1 + CR_3S) - CR_3u_c(0)}{LCR_3S^2 + (L + CR_1R_3)S + R_1 + R_3}$$

$$I_L(S) = \frac{S\left(\frac{E}{s}(1 + CR_3S) + i_L(0)L(1 + CR_3S) - CR_3u_c(0)\right)}{S(LCR_3S^2 + (L + CR_1R_3)S + R_1 + R_3)}$$

$$I_L(S) = \frac{S^2 i_L(0)LCR_3 + S(ECR_3 + i_L(0)L - CR_3u_c(0)) + E}{S(LCR_3S^2 + (L + CR_1R_3)S + R_1 + R_3)}$$

Напряжение на конденсаторе:

$$U_c(S) = \frac{\frac{S^2 i_L(0)LCR_3 + S(ECR_3 + i_L(0)L - CR_3u_c(0)) + E}{S(LCR_3S^2 + (L + CR_1R_3)S + R_1 + R_3)} R_3 + CR_3u_c(0)}{1 + CR_3S}$$

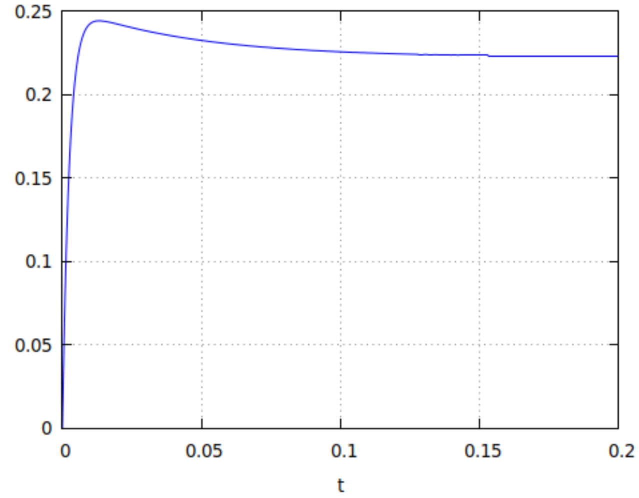

Рис. 3: График тока $i_L(t)$ (первый переходный процесс)

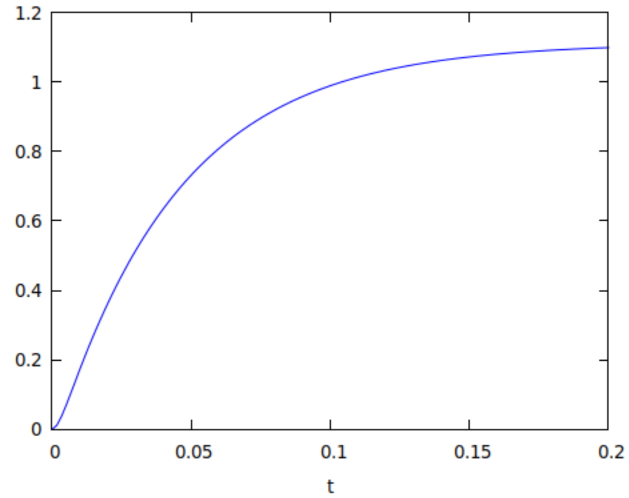

Рис. 4: График напряжения $u_c(t)$(первый переходный процесс)

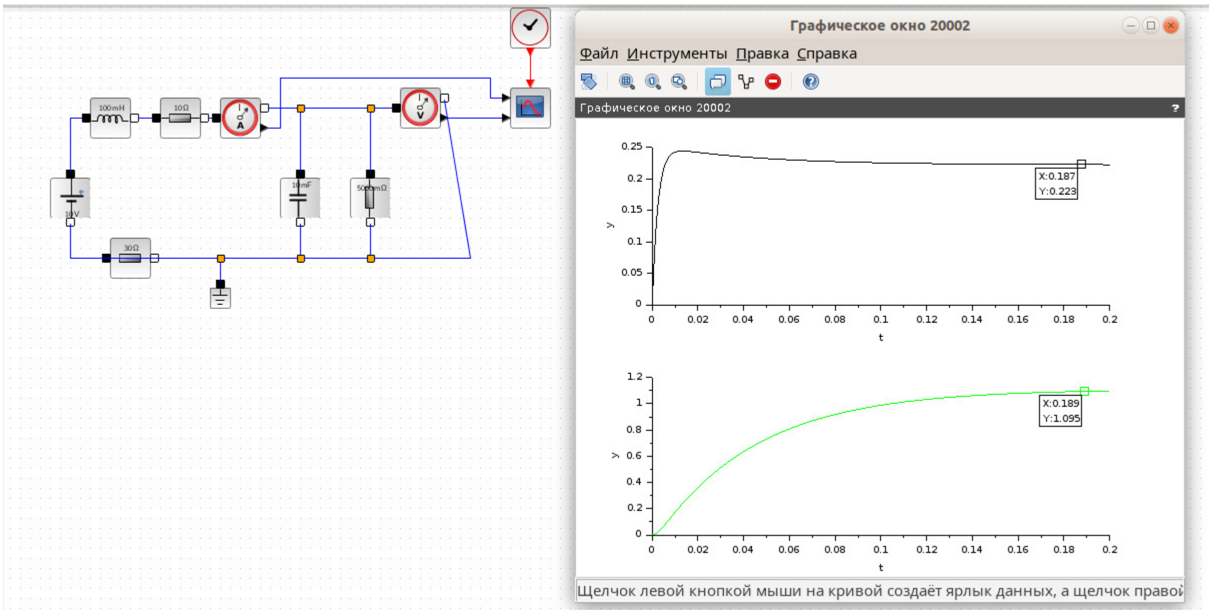

Рис. 5: Результаты моделирования в scilab (первый переходный процесс)

```
(%i23) i0:0.222$u0:1.111$
(%i25) ilt((s^2*i0*L*C*R3+s*(E*C*R3+i0*L-C*R3*u0)+E)/(s*(L*C*R3*s^2+(L+C*R1*R3)*s+R1+R3)),s,t);
rat: replaced 0.46665 by 9333/20000 = 0.46665
rat: replaced 0.00111 by 111/100000 = 0.00111
rat: replaced 0.6 by 3/5 = 0.6
rat: replaced 0.005 by 1/200 = 0.005
```

(%o25) $$e^{-60\,t}\left(\frac{4001\,\sinh\left(10\,\sqrt{6}\,t\right)}{1000\,\sqrt{6}}-\frac{667\,\cosh\left(10\,\sqrt{6}\,t\right)}{1500}\right)+\frac{2}{3}$$

```
(%i26) ilt((((s^2*i0*L*C*R3+s*(E*C*R3+i0*L-C*R3*u0)+E)/(s*(L*C*R3*s^2+(L+C*R1*R3)*s+R1+R3)))*R3+C*R3*u0)/(1+C*R3*s),s,t);
rat: replaced 0.05 by 1/20 = 0.05
rat: replaced 0.05555 by 1111/20000 = 0.05555
rat: replaced 0.46665 by 9333/20000 = 0.46665
rat: replaced 0.00111 by 111/100000 = 0.00111
rat: replaced 0.6 by 3/5 = 0.6
rat: replaced 0.005 by 1/200 = 0.005
```

(%o26) $$e^{-60\,t}\left(-\frac{1667\,\sinh\left(10\,\sqrt{6}\,t\right)}{125\,\sqrt{6}}-\frac{6667\,\cosh\left(10\,\sqrt{6}\,t\right)}{3000}\right)+\frac{10}{3}$$

(%i27)

Рис. 6: Расчеты для второго переходного процесса

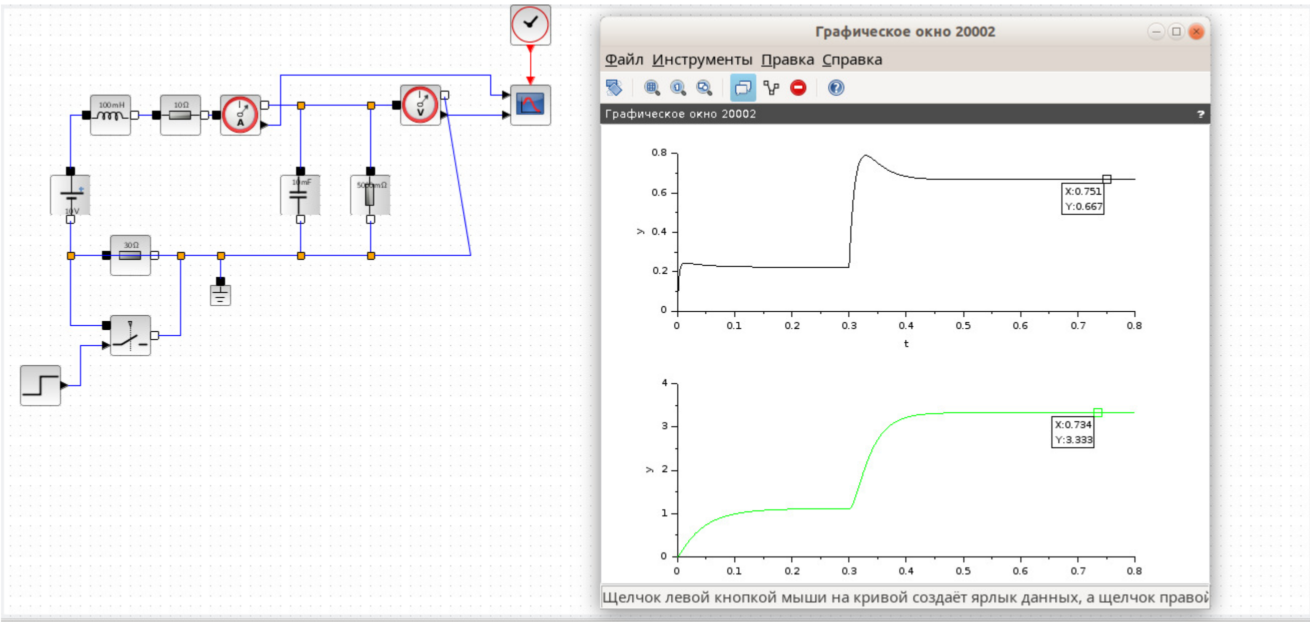

Рис. 7: Моделирование для второго переходного процесса