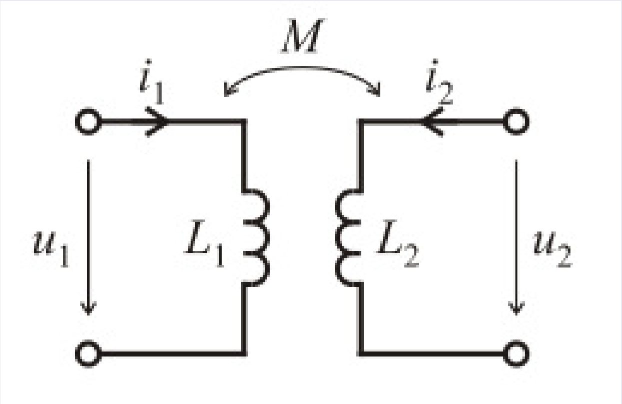
Индуктивно связанные электрические цепи

Содержание

В электротехнике и электронике широко используются устройства, которые содержат индуктивные катушки, связанные общими магнитными потоками. Примером такого устройства является трансформатор, который служит для преобразования уровней переменных напряжений и токов и для согласования сопротивлений отдельных участков цепи. Рассмотрим цепь, состоящую из двух индуктивных катушек, намотанных на общий сердечник.



Каждая из катушек пронизывается двумя магнитными потоками: потоком самоиндукции, вызванным собственным током, и потоком взаимоиндукции, вызванным током другой катушки.

Индуктивные связи в электрических цепях

В соответствии с принципом наложения потокосцепление первой катушки

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M \cdot i_2$$

Потокосцепление второй катушки

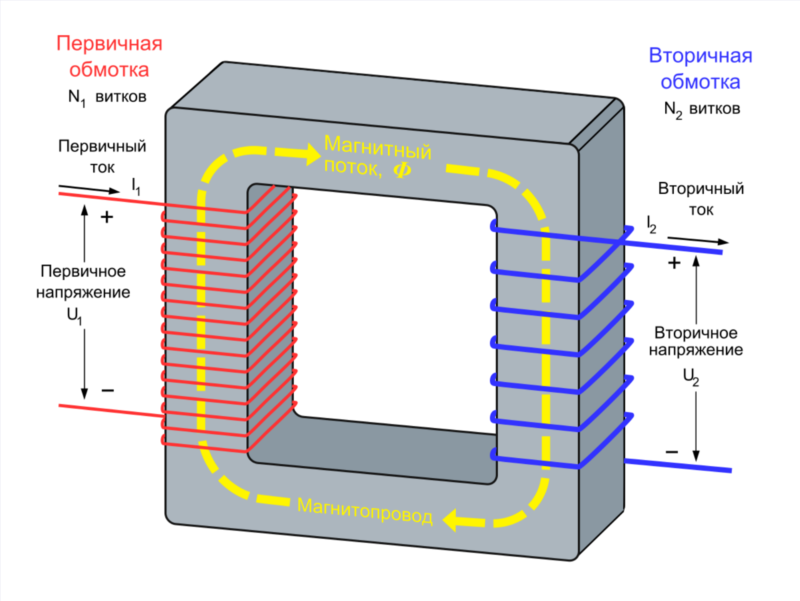
$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M \cdot i_1$$

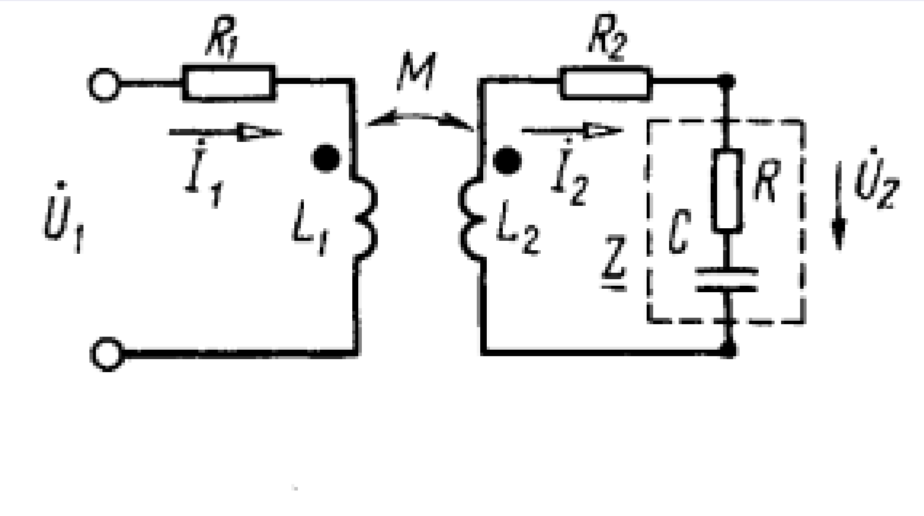
Значения взаимной индуктивности в выражениях одинаковы и не могут превышать среднего геометрического из значений L_1 и L_2:

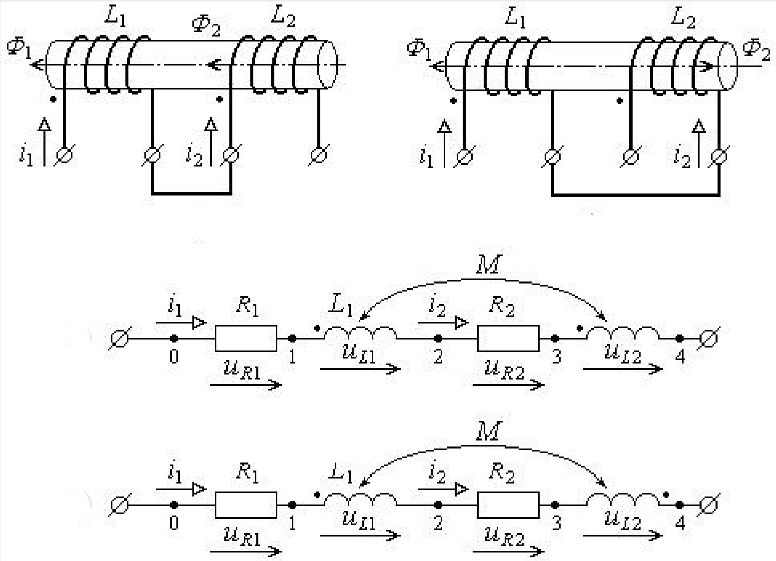
$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

Здесь k - это коэффициент связи, характеризующий магнитную связь между катушками. В пределе, когда магнитный поток одной катушки полностью пронизывает витки другой, $k = 1$. При отсутствии магнитной связи $k = 0$. Знаки при M зависят от взаимного направления магнитных потоков катушек. В свою очередь, направления магнитных потоков зависят как от направления токов в катушках, так и от их взаимного расположения. Если катушки включены таким образом, что потоки складываются, то такое включение называют согласным. Если магнитные потоки направлены навстречу друг другу, то катушки включены встречно. При согласном направлении токов в двух индуктивно связанных катушках зажимы этих катушек, относительно которых токи направлены одинаково, называют одноименными. Одноименные зажимы принято обозначать точками или звездочками.

Индуктивные связи в электрических цепях







Т-образная схема замещения

Определим напряжения на зажимах индуктивно связанных катушек.

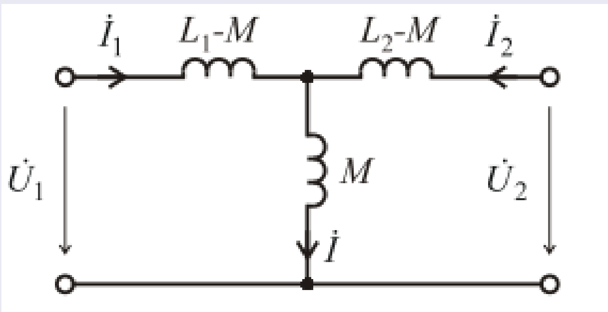
$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \pm M \cdot \frac{di_2}{dt}$$
$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \pm M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

При подаче на вход одной катушки синусоидального напряжения, возникают синусоидальные грамонические колебания в обоих контурах. Тогда можно записать полученные уравнения в комплексной форме:

$$\dot{U}_1 = jwL_1\dot{I}_1 \pm jwM\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = jwL_2\dot{I}_2 \pm jwM\dot{I}_1$$

При согласном включении катушек данные уравнения можно переписать в форме:

$$\dot{U}_1 = jwL_1\dot{I}_1 + jwM\dot{I}_2 = jw(L_1 - M)\dot{I}_1 + jwM(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$
$$\dot{U}_2 = jwL_2\dot{I}_2 + jwM\dot{I}_1 = jw(L_2 - M)\dot{I}_2 + jwM(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$



Трансформатор

При подключении первичной обмотки к напряжению u_1 в ней возникает ток i_1 , создающий в сердечнике переменный магнитный поток. В результате в обмотках трансформатора индуцируются ЭДС: в первичной обмотке – ЭДС самоиндукции, а во вторичной – ЭДС взаимной индукции, которая вызывает в нагрузке ток i_2. Если число витков первичной обмотки n_1 меньше числа витков вторичной обмотки n_2, трансформатор является повышающим. Если $n_1 > n_2$, трансформатор является понижающим.

На рисунке изображена схема двухобмоточного трансформатора. Резисторы учитывают потери в первичной и вторичной катушках, $Z_н$ – комплексное сопротивление нагрузки.

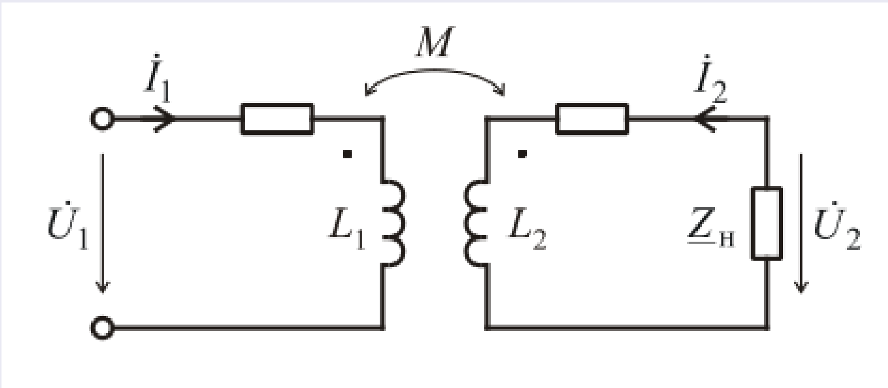


Схема замещения трансформатора

Для выбранных направлений напряжений и токов на рисунке предыдущего слайда уравнения трансформатора имеют вид:

$$\dot{U}_1 = R_1\dot{I}_1 + jwL_1 \cdot \dot{I}_1 + jwM\dot{I}_2$$

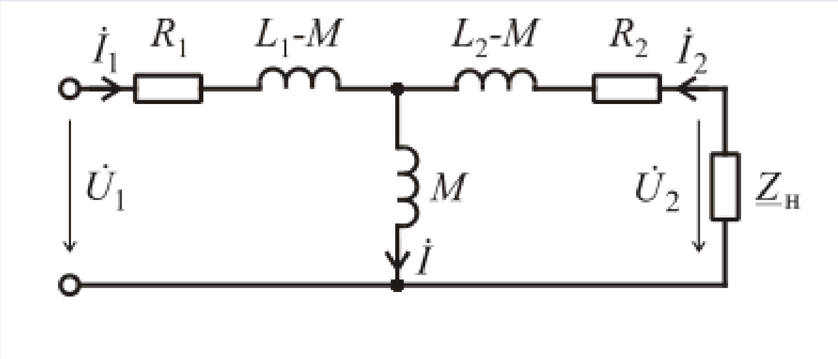
$$\dot{U}_2 = R_2\dot{I}_2 + jwL_2 \cdot \dot{I}_2 + jwM\dot{I}_1$$

Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\dot{U}_1 = R_1\dot{I}_1 + jw(L_1 - M)\dot{I}_1 + jwM(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

$$\dot{U}_2 = R_2\dot{I}_2 + jw(L_2 - M)\dot{I}_2 + jwM(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

Последним уравнениям соответствует двухконтурная схема без индук- тивных связей:



Поперечную ветвь называют ветвью намагничивания, а ток $\dot{I}$ – током намагничивания.

Уравнения трансформатора

Определим входное сопротивление трансформатора, нагруженного на комплексное сопротивление $Z_{н}$. Для схемы трансформатора справедливы уравнения:

$$\dot{U}_1 = R_1\dot{I}_1 + jwL_1 \cdot \dot{I}_1 + jwM\dot{I}_2$$

$$0 = (\dot{Z}_{н} + R_2 + jwL_2) \cdot \dot{I}_2 + jwM\dot{I}_1$$

Ток вторичной обмотки:

$$\dot{I}_2 = -\frac{jwM}{\dot{Z}_{н} + R_2 + jwL_2} \cdot \dot{I}_1$$

Тогда входное напряжение:

$$\dot{U}_1 = (R_1 + jwL_1) \cdot \dot{I}_1 + jwM\dot{I}_2 = \left(R_1 + jwL_1 + \frac{(wM)^2}{\dot{Z}_{н} + R_2 + jwL_2}\right)\dot{I}_1$$

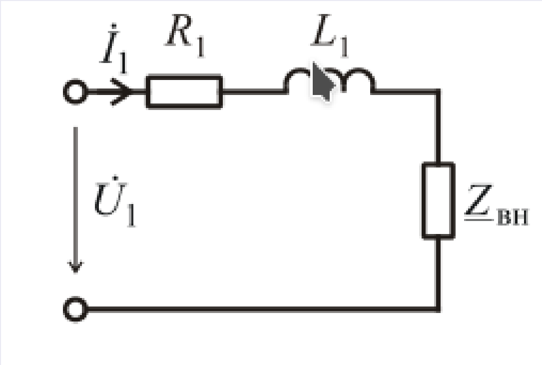
Входное сопротивление трансформатора:

$$\dot{Z}_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + jwL_1 + \frac{(wM)^2}{\dot{Z}_{н} + R_2 + jwL_2}$$

Величину $\dot{Z}_{вн} = \frac{(wM)^2}{\dot{Z}_{н}+R_2+jwL_2}$ называют *вносимым сопротивлением.* Она представляет собой комплексное сопротивление, вносимое из вторичной цепи в первичную.

Одноконтурная схема замещения

Уравнениям предыдущего слайда соответствует так называемая одноконтурная схема замещения:

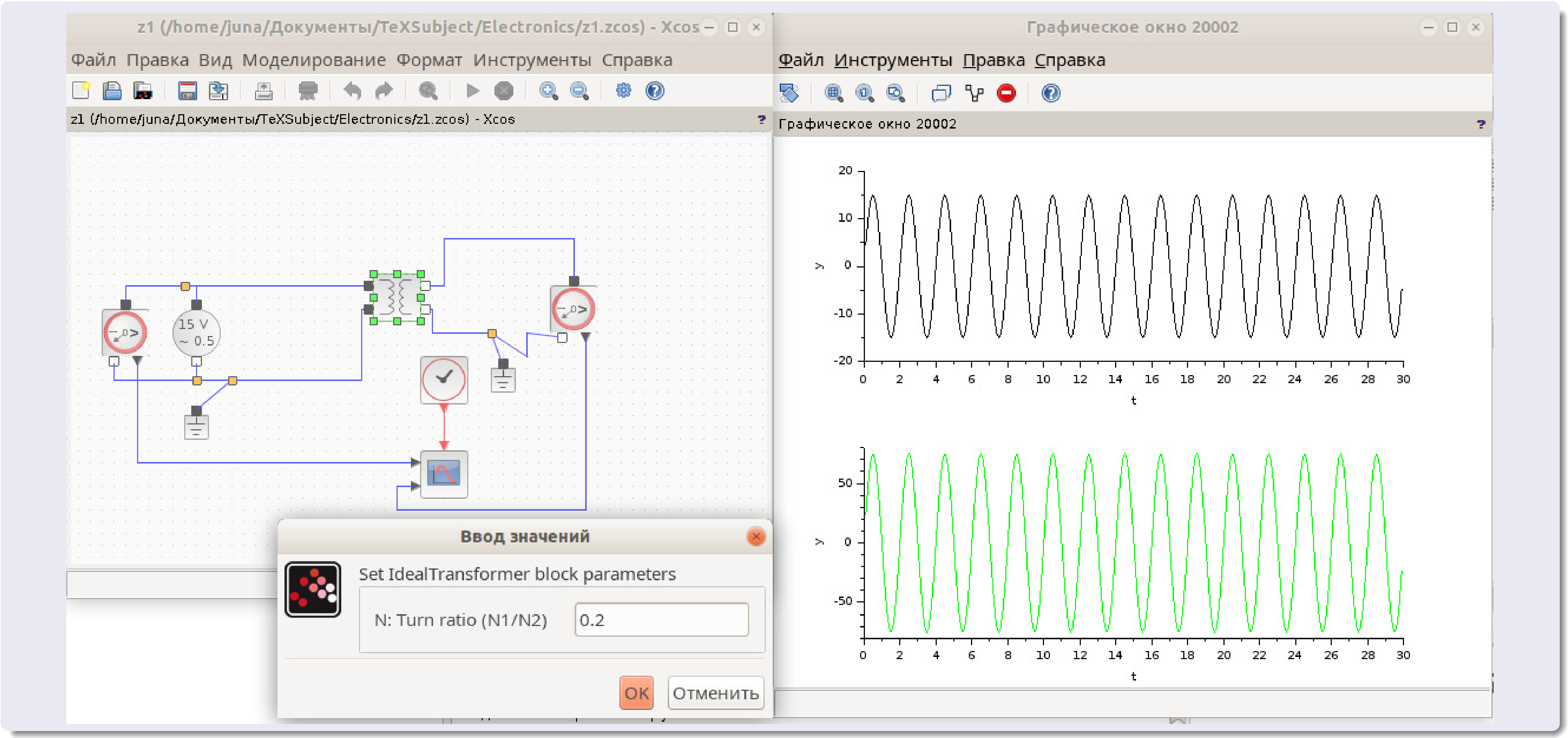


В режиме холостого хода, когда вторичная обмотка разомкнута, ток первичной обмотки:

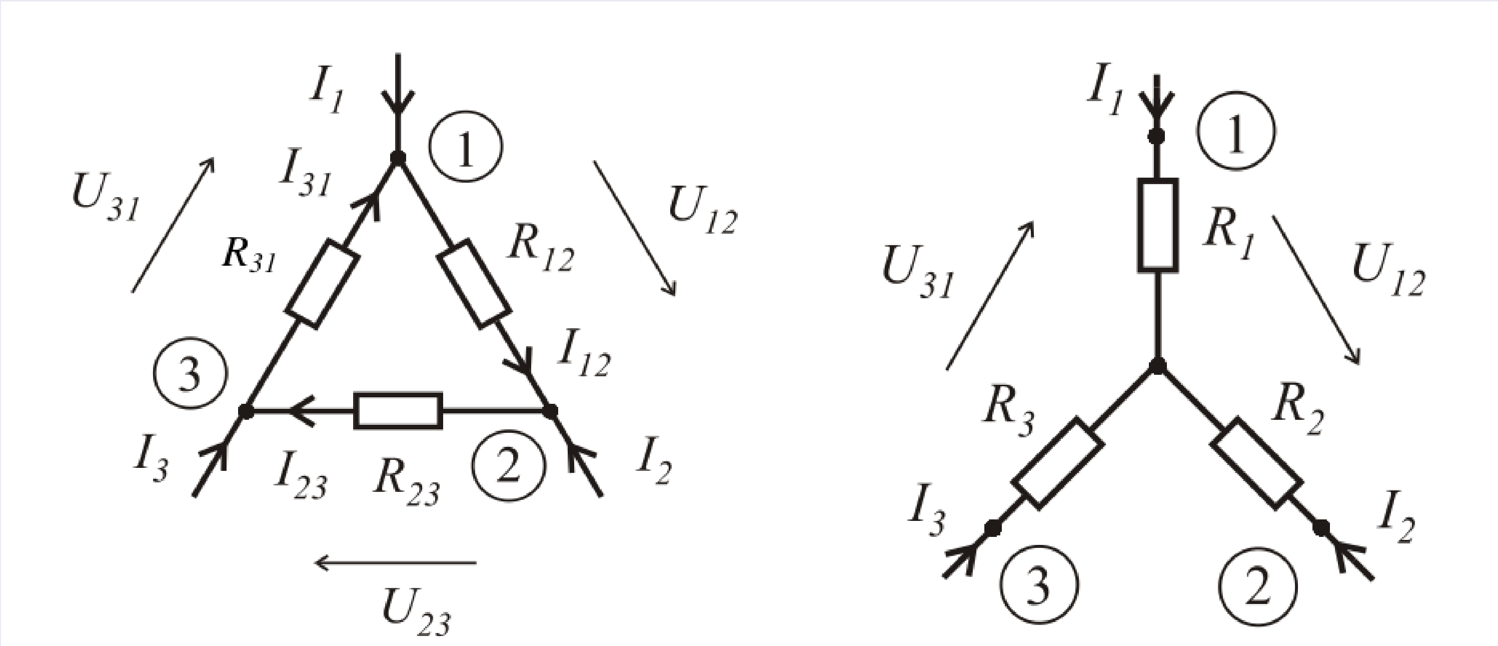
$$\dot{I}_{1\text{xx}} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + jwL_1}$$

Увеличение активной составляющей входного сопротивления при за- мыкании вторичного контура объясняется увеличением активной мощности, потребляемой трансформатором.

Моделирование работы трансформатора в Scilab



Преобразования звезда - треугольник



При расчетах разветвленных цепей часто возникает задача преобразования треугольника ветвей в эквивалентную звезду. Эквивалентность треугольника и звезды понимается в том смысле, что при одинаковых напряжениях между одноименными зажимами токи, входящие в одноименные зажимы, одинаковы. Найдем формулы, позволяющие выполнить такое преобразование.

Преобразования звезда - треугольник

Справедливы следующие уравнения:

$$I_{12} - I_{31} = I_1, I_{23} - I_{12} = I_2, I_{31} - I_{23} = I_3$$

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0$$

Тогда имеем:

$$I_{31} = I_{12} - I_1, I_{23} = I_2 + I_{12}$$

$$R_{12}I_{12} + R_{23}(I_2 + I_{12}) + R_{31}(I_{12} - I_1) = 0$$

Из последнего получем:

$$I_{12} = \frac{R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_1 - \frac{R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2$$

Напряжение:

$$U_{12} = R_{12}I_{12} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2$$

Аналогичным образом, решая относительно I_{23} получим:

$$U_{23} = R_{23}I_{23} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2 - \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_3$$

Данным уравнения соответствует эквивалентная схема, в которой резисторы соединены звездой.

Преобразования звезда - треугольник

Окончательно получаем:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

Итак, *сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений сторон треугольника.*

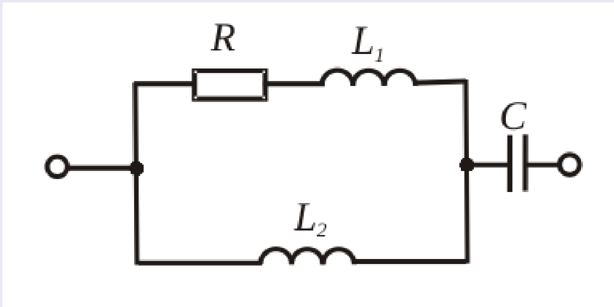
Можно выполнить и обратное преобразование, заменив звезду ветвей эквивалентным треугольником. Сопротивления резисторов, образующих стороны треугольника, определяются через проводимости равенствами:

$$G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_3}, G_{23} = \frac{G_2G_3}{G_1+G_2+G_3}, G_{31} = \frac{G_3G_1}{G_1+G_2+G_3}$$

Следовательно, проводимость стороны треугольника равна произведению проводимостей прилегающих лучей звезды, деленному на сумму проводимостей лучей звезды.

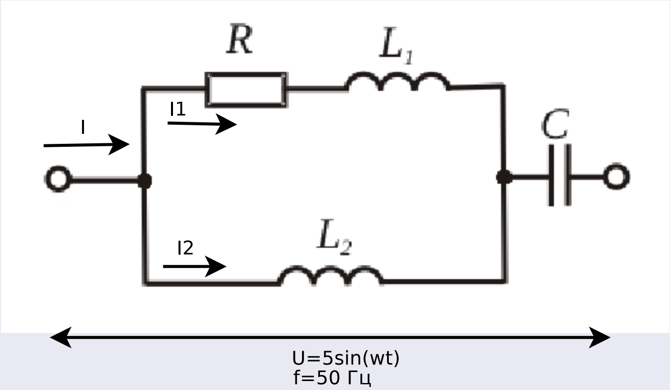
Задание 1

Вычислить комплексное сопротивление $Z_э$, если $R = 10$ Ом, $X_{L_1} = 8$ Ом, $X_{L_2} = 2$ Ом, $X_C = 4$ Ом, $U = 5\sin(\omega t)$. Построить векторную диаграмму.



Решение

Введем обозначения



$$\dot{Z}_1 = R + jX_{L_1} = 10 + 8j = |\dot{Z}_1| e^{j\varphi_{\dot{Z}_1}} = 12.81 e^{j38.66^\circ},$$

$$|\dot{Z}_1| = \sqrt{10^2 + 8^2} \approx 12.81, \varphi_{\dot{Z}_1} = atan\left(\frac{8}{10}\right) \approx 0.6747 \text{ рад}, \frac{0.6747 \cdot 180}{\pi} \approx 38.66^\circ$$

$$\dot{Z}_2 = jX_{L_2} = 2j = 2e^{j\frac{\pi}{2}} = 2e^{j90^\circ}$$

$$\dot{Z}_3 = -jX_c = -4j = 4e^{-j\frac{\pi}{2}} = 4e^{-j90^\circ}$$

$$\dot{Z}_{\text{общ}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} + \dot{Z}_3 = \frac{12.81 e^{j38.66^\circ} \cdot 2e^{j90^\circ}}{10 + 8j + 2j} + (-4j) = \frac{25.62 e^{j128.66^\circ}}{10 + 10j} - 4j$$

$$\dot{Z}_{\text{общ}} = \frac{25.62 e^{j128.66^\circ}}{14.14 e^{j45^\circ}} - 4j = 1.81 e^{j83.66^\circ} - 4j = 0.2 + 1.8j - 4j = 0.2 - 2.2j = 2.21 e^{-j84.8^\circ}$$

$$1.81 e^{j83.66^\circ} = \alpha + j\beta, \alpha = 1.81 \cos(83.66^\circ) \approx 0.2, \beta = 1.81 \cdot \sin(83.66^\circ) \approx 1.8$$

Задание 1

Решение

$$U = 5\sin(\omega t), \dot{U} = 5e^{j0} = 5 + 0j$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_{\text{общ}}} = \frac{5e^{j0}}{2.21e^{-j84.8^\circ}} \approx 2.26e^{j84.8^\circ} \approx 0.2 + 2.25j$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2, \dot{U} = \dot{U}_{L_2} + \dot{U}_c$$

$$\dot{U}_c = \dot{I} \cdot \dot{Z}_3 = 2.26e^{j84.8^\circ} \cdot 4e^{-j90^\circ} = 9.04e^{-j5.2^\circ} \approx 9 - 0.82j$$

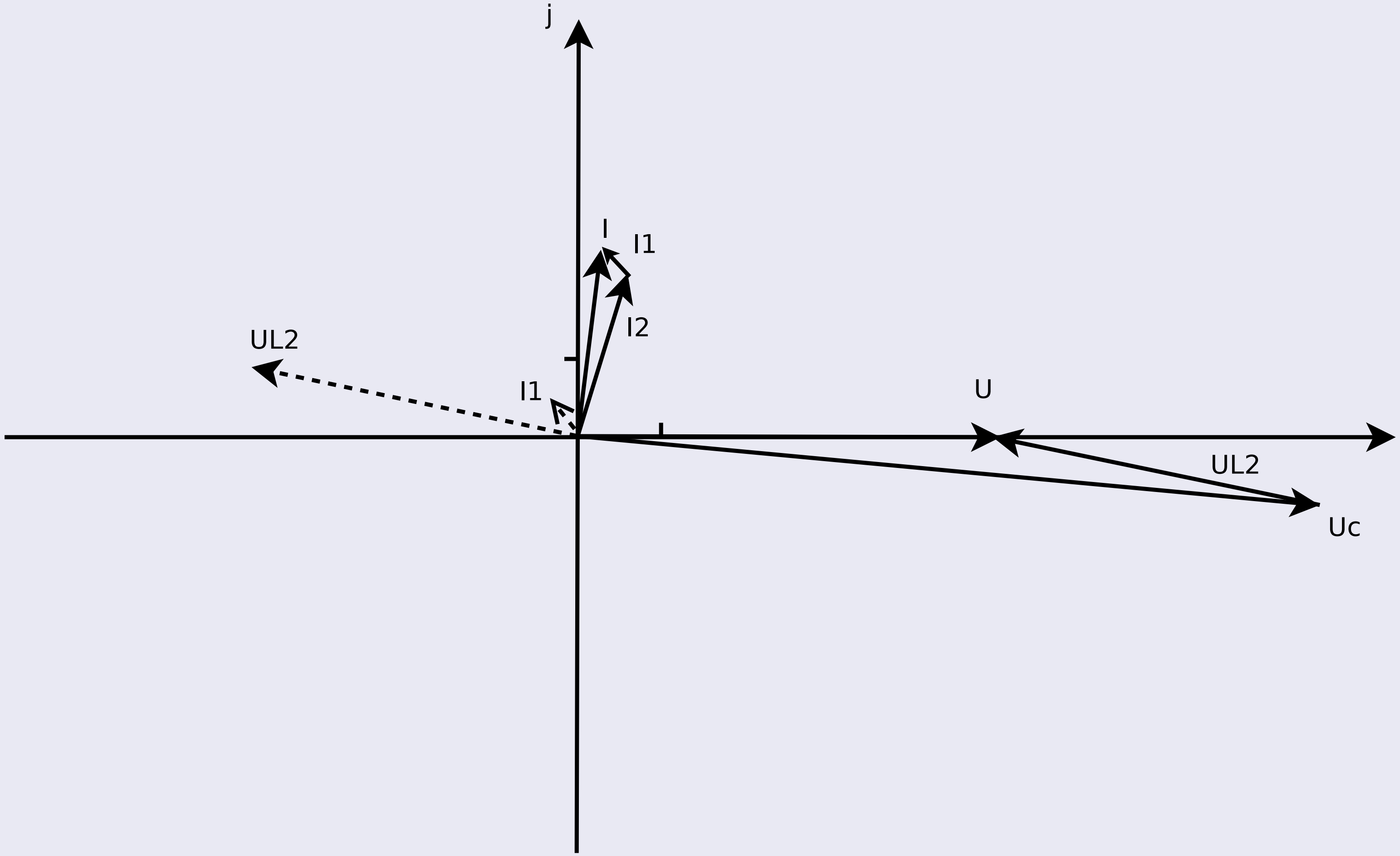
$$\dot{U}_{L_2} = \dot{U} - \dot{U}_c = 5 + 0j - (9 - 0.82j) = -4 + 0.82j = 4.08e^{j168.45^\circ}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{L_2}}{\dot{Z}_1} = \frac{4.08e^{j168.45^\circ}}{12.81e^{j38.66^\circ}} = 0.318e^{j129.79} \approx -0.2 + 0.244j$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{L_2}}{\dot{Z}_2} = \frac{4.08e^{j168.45^\circ}}{2e^{j90^\circ}} \approx 2.04e^{j78.45^\circ} \approx 0.41 + 2j$$

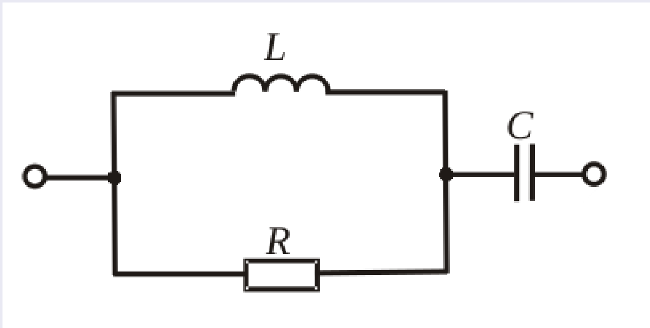
Задание 1

Решение - построение векторной диаграммы



Задание 2

Цепь, показанная на рисунке, находится в режиме резонанса. Вычислить X_C , если $R = 60$ Ом, $X_L = 40$ Ом.



Задание 3

Записать закон изменения напряжения $u(t)$, если $R = 40$ Ом, $X_L = 40$ Ом, $u_L(t) = 240\sin(\omega t + 120^\circ)$