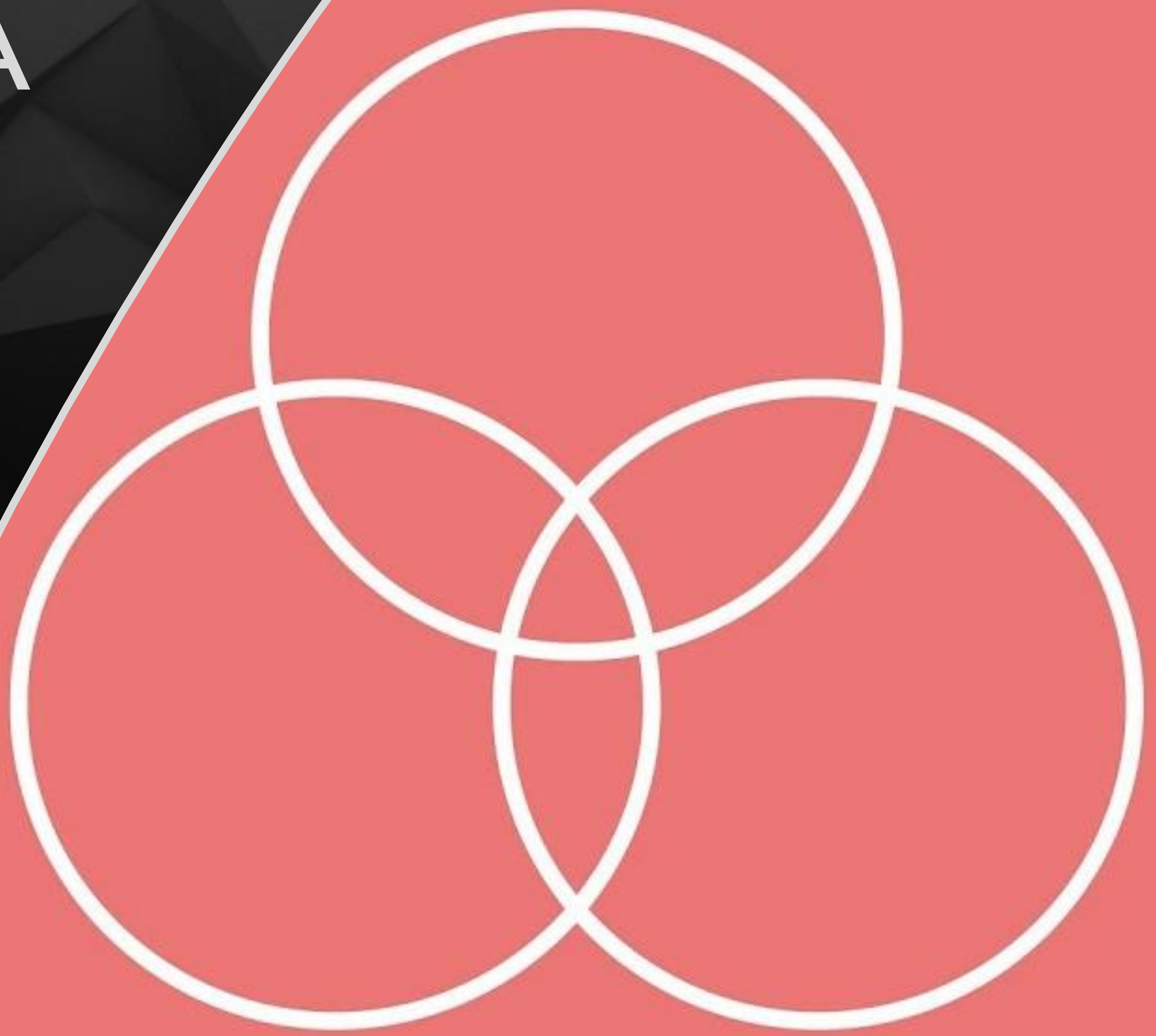
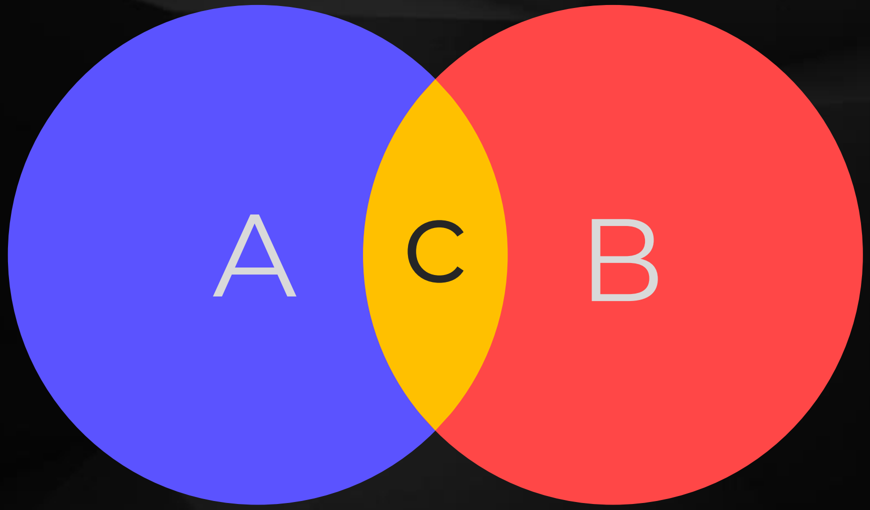
АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



1 Введение

Как известно, в любой аксиоматической теории сначала выбирают основные понятия. Основным понятием теории множеств является понятие самого множества. Множество образуется путем отбора определенных объектов и полностью ими определяется.



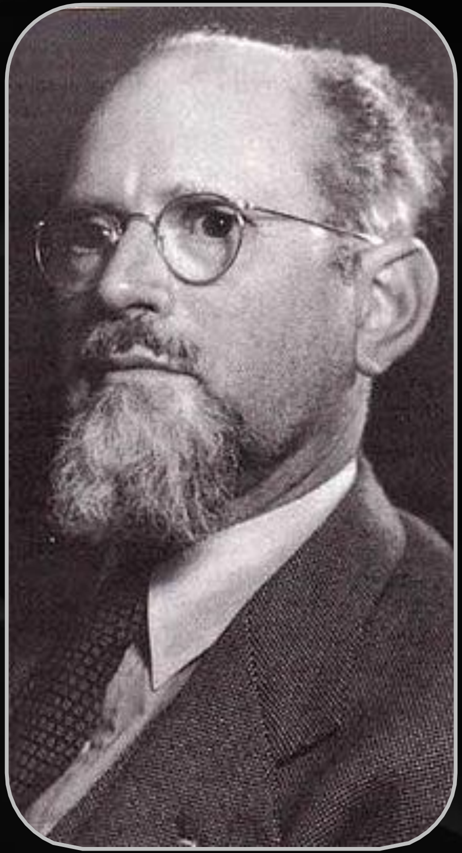
Можно конкретизировать первичное понятие элемента множества и наложить на него некоторые ограничения, которые позволят избежать парадоксов. Также парадоксов можно избежать, если ввести совокупности объектов двух сортов, одну из них называть классами, другую – множествами, причем класс может являться множеством только в том случаи он сам является элементом других классов.

1 Введение

Кроме того, следует считать, что множества строятся по шагам (в логическом, а не во временном смысле). Когда же множество еще строится путем выбора его элементов, то оно не готово как объект и его нельзя использовать в качестве элемента, например, самого себя.

Целесообразно ограничиться рассмотрением только тех множеств, существование которых может быть доказано на основе некоторой системы аксиом. Такая система предложена Э. Цермело в 1908 году, затем она была несколько расширена А. Френкелем и носит название системы аксиом Цермело-Френкеля (ZF).

Э. Цермело



А. Френкель

1 Введение

Аксиомы ZF
включают в себя несколько групп

- Высказывания о существовании множеств.
- Высказывания о равенстве множеств.
- Высказывания об образовании множеств из уже имеющихся множеств.
- Высказывания об упорядоченности образованных множеств.

2 СИСТЕМА АКСИОМ ЦЕРМЕЛО-ФРЕНКЕЛЯ (ZF)

Аксиома объемности (экстенсиональности)

Всякое множество полностью определяется своими элементами. Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов.

Аксиома объединения (суммы)

Объединение всех элементов любого множества A есть множество.

Аксиома подстановки (замены)

Для каждого множества A и функции f, определенной на A, существует множество, содержащее в точности объекты f(x).

$$\forall f(x),\ A,\ x \in A\ \exists B = \left\{ {}^{y}\!/_{x \in A \,\wedge\, y = f(x)} \right\}.$$

2 СИСТЕМА АКСИОМ ЦЕРМЕЛО-ФРЕНКЕЛЯ (ZF)

Аксиома регулярности (фундирования)

Множество А называется фундированным, если оно имеет минимальный элемент. Любое непустое множество имеет минимальный элемент.

$$\forall a \in A : a \cap A = \emptyset$$

Аксиома бесконечности

Она гарантирует существование бесконечного множества – множества натуральных чисел.

Аксиома выделения

Для любого множества А, состоящего из элементов а и свойства F существует множество В, состоящее их элементов множества А, для которых F(a) истинно.

$$\forall A, a \in A, F \ \exists B : B = \left\{{}^{a}/_{a \in A \wedge F(a) = 1}\right\}$$

2 СИСТЕМА АКСИОМ ЦЕРМЕЛО-ФРЕНКЕЛЯ (ZF)

Иногда вместо аксиомы выделения в систему аксиом включают две аксиомы:

- Аксиома существования пустого множества
- Аксиома существования пары «если и, то»:
  если ∃ A и ∃ B, то ∃{A,B}

Для того, чтобы система аксиом была полной, к ней добавляют еще одну из двух аксиом:

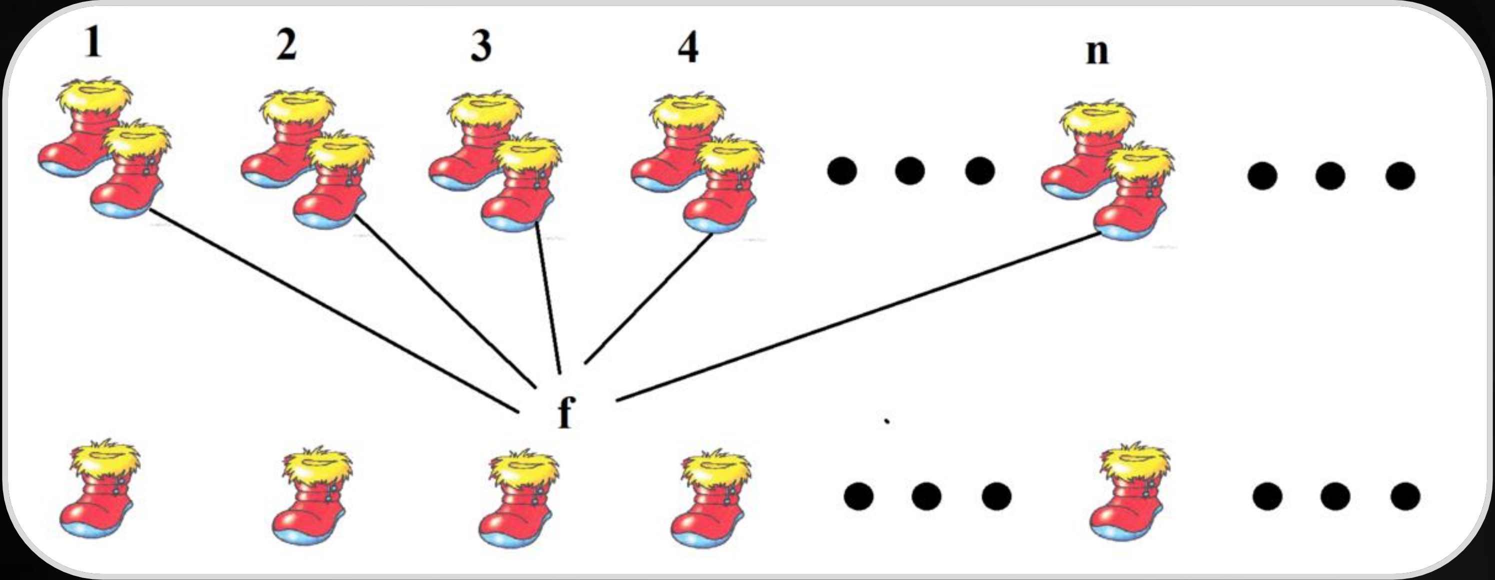
- Аксиома выбора (AC)
- Аксиома детерминированности (AD)

3 АКСИОМА ВЫБОРА

Функция выбора: для элементов x множества X задано множество A_x. В каждом из них выбирают элемент y. Тогда получим функцию f такую, что:

$$f(x) = y = A_x$$

Аксиома выбора гласит, что для всякого семейства непустых множеств существует функция выбора.



Например, пусть имеется бесконечное число пар ботинок. Функция, выбирающая из каждой пары только левый ботинок и сопоставляющая его этой же паре, называется функцией выбора.

3 АКСИОМА ВЫБОРА

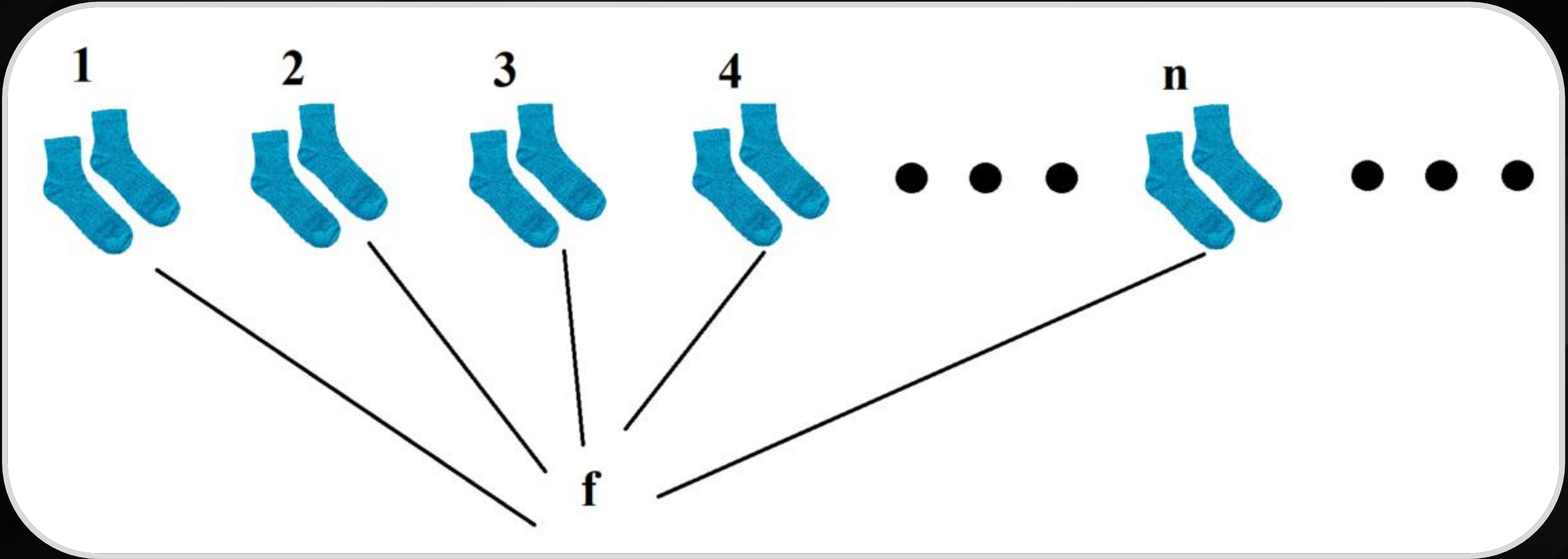
Интересно, что, если бы мы оперировали только конечными множествами, в аксиоме выбора не было бы необходимости. Но бесконечные множества применяются в математике повсеместно, а для них в общем виде аксиома выбора не выводится и должна постулироваться.

Рассмотрим еще один пример, схожий с предыдущим. У нас имеются множества из пар носков, где каждый из носков левый. Наша задача – определить функцию выбора, если все элементы неразличимы. Как это сделать?

3 АКСИОМА ВЫБОРА

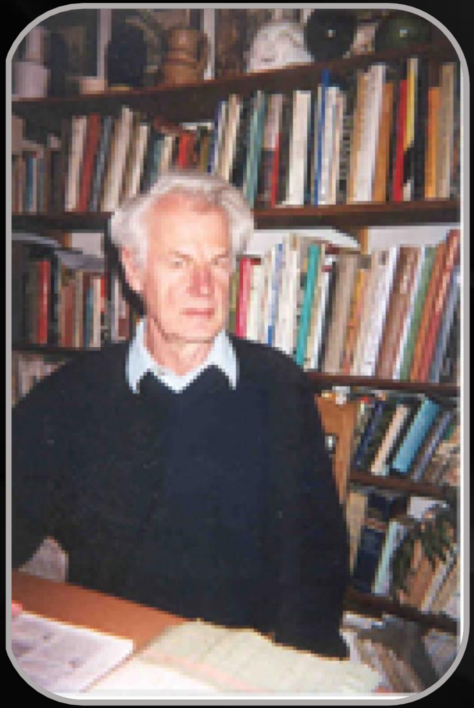
Вот здесь и приходит на помощь аксиома выбора, а точнее эквивалентная ей теорема Цермело, которая утверждает, что любое множество можно сделать "вполне упорядоченным", т.е. таким, что в любом его подмножестве есть минимальный элемент.

Проще всего пронумеровать носки в каждой паре номерами 1 и 2, а функцию выбора определить, как выборку только "нечетных носков". Но, сама возможность такой нумерации выводится только из аксиомы выбора, другого варианта, к сожалению, нет.



Нужно отметить, несмотря на то, что без помощи аксиомы выбора многие утверждения не удалось бы доказать, её использование, зачастую, приводит к самым разным парадоксам.

4 АКСИОМА ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ



Ян Мычельский

Гуго Штейнгауз

Аксиому детерминированности предложили в 1962 году польские математики Ян Мычельский и Гуго Штейнгауз в качестве замены для аксиомы выбора (введённой в 1904 году).

Аксиому детерминированности проще всего определить в терминах не теории множеств, а теории игр.

4 АКСИОМА ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

Рассмотрим множество А бесконечных последовательностей натуральных чисел, определяющих следующую бесконечную игру G_A для двух игроков. Игрок I пишет натуральное число n_0, затем игрок II пишет натуральное число n_1 и так далее по очереди. Если получающаяся в результате игры последовательность $n_0, n_1, \ldots, n_k$ принадлежит множеству А, то выигрывает игрок I, в противном случае игрок II.

Игра G_A называется детерминированной, если либо игрок I, либо игрок II имеют выигрывающую стратегию.

Множество А и соответствующая игра G_A называются детерминированными, если у одного из игроков существует выигрывающая стратегия.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Аксиома детерминированности создана с целью получить более привлекательные следствия, чем те, что дает аксиома выбора.
- Аксиома выбора имеет ряд следствий, являющихся в определенной степени нежелательными, или приводят к «парадоксальным» примерам множеств
- AD в отличие от AC не дает ясной картины бесконечных мощностей и почти не используется в топологии.
- Многие следствия конкурирующих аксиом в теории множеств и топологии противоположны друг другу.