Передаточные функции, структурные схемы

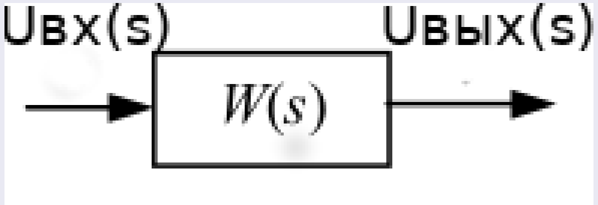
Содержание

Понятие передаточной функции

При анализе электрических цепей в условиях изменения токов или напряжений в конечном итоге мы получаем некоторое дифференциальное уравнение. С использованием преобразования Лапласа мы можем представить его в алгебраической форме. В этом случае интересующая нас выходная величина $U_{\text{вых}}(s)$ может быть выражена алгебраически через входную величину $U_{\text{вх}}(s)$:

$$U_{\text{вых}}(s) = W(s) \cdot U_{\text{вх}}(s)$$

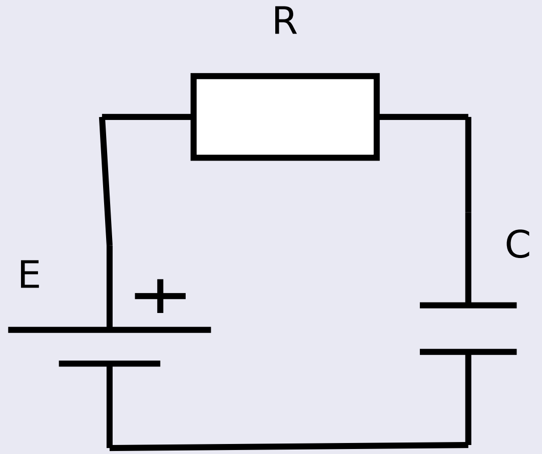
Этот факт принято обозначать в виде структурной схемы следующего вида:



Функцию $W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)}$, равную отношению входа к выходу после преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях, называют **передаточной функцией системы**. Передаточная функция не зависит от входа и выхода и характеризует структуру самой системы.

Рассмотрим получение передаточной функции на ряде примеров.

Пример 1



$$E = R \cdot i(t) + u_c(t), i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$E = RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

Выполняем преобразование Лапласа. У нас $U_{\text{вх}}(s) = \frac{E}{s}, U_{\text{вых}}(s) = U_c(s)$, тогда имеем:

$$U_{\text{вх}}(s) = RCsU_{\text{вых}}(s) + U_{\text{вых}}(s) \Rightarrow$$

$$U_{\text{вых}}(s) = W(s)U_{\text{вх}}(s) = \frac{U_{\text{вх}}(s)}{1 + RC \cdot s}$$

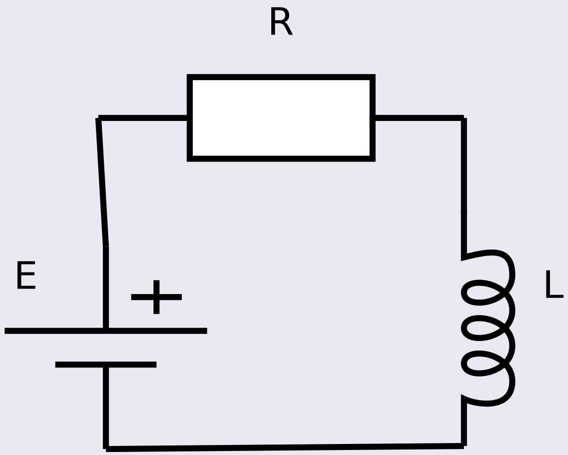
Таким образом, передаточная функция равна:

$$W(s) = \frac{1}{1 + RC \cdot s} = \frac{1}{1 + T \cdot s}$$

определяется только параметрами электрической цепи. Здесь $T = RC[c]$ - называют постоянной времени. Она определяет скорость переходного процесса.

Примеры на получение передаточной функции

Пример 2



$$E = Ri_L(t) + u_L(t), u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$E = Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$U_{\text{вх}}(s) = RI_{\text{вых}}(s) + LsI_{\text{вых}}(s),$$

$$I_{\text{вых}}(s) = I_L(s), U_{\text{вх}}(s) = \frac{E}{s}$$

$$W(s) = \frac{I_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{1}{1 + RLs} = \frac{1}{1 + Ts}$$

Таким образом, несмотря на различие схем (пример 1), фактически у них одинаковая передаточная функция, только она преобразует входную величину в выходную величину другой природы.

Типовые звенья

Рассмотренные примеры приводят к выводу, что можно провести некоторую классификацию передаточных функций и выделить некоторые типовые звенья, которые наиболее часто встречаются.
Рассмотрим такую классификацию.
Выделяют, так называемые элементарные звенья, все остальные можно получить из элементарных путем их соединения. Существуют три элементарных звена:

- безынерционное звено
- интегрирующее звено
- дифференцирующее звено

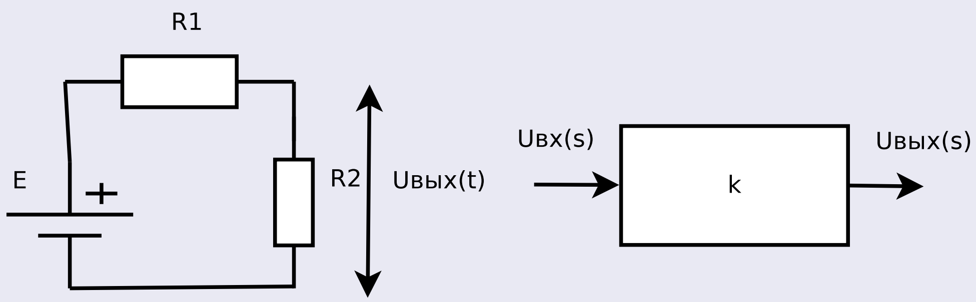
Рассмотрим их более подробно.

Безынерционное (пропорциональное) звено

Передаточная функция безынерционного звена не зависит от s и имеет постоянное значение:

$$W(s) = k = const$$

Число k называют коэффициентом передачи. Выходная величина безынерционного звена пропорциональна входной в любой момент времени. Примером безынерционного звена является делитель напряжения, представленный на рисунке.



$$E = U_{R_1} + U_{\text{вых}}, U_{R_1} = \frac{ER_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_{\text{вых}} = E \cdot \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_{\text{вых}}(s) = U_{\text{вх}}(s) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, U_{\text{вх}}(s) = \frac{E}{s}, W(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = const$$

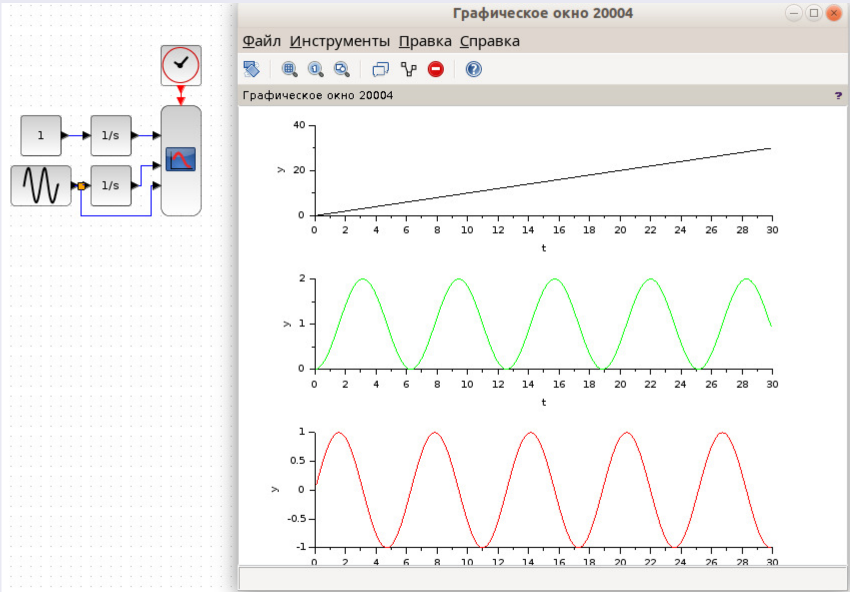
Элементарные звенья

Интегрирующее, дифференцирующее звенья

Интегрирующее звено - это такое звено, выходная величина которого пропорционально интегралу от входной величины:

$$\frac{du_{\text{вых}}(t)}{dt} = ku_{\text{вх}}(t) \Rightarrow u_{\text{вых}}(t) = k\int_0^t u_{\text{вх}}(t)dt$$

$$sU_{\text{вых}}(s) = kU_{\text{вх}}(s) \Rightarrow W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{k}{s}$$



$$\int_0^t \sin t dt = -cos(t)|_0^t = 1 - \cos(t)$$

На практике в качестве интегрирующего звена можно рассматривать напряжение на конденсаторе относительно тока через него:

Интегрирующее, дифференцирующее звенья

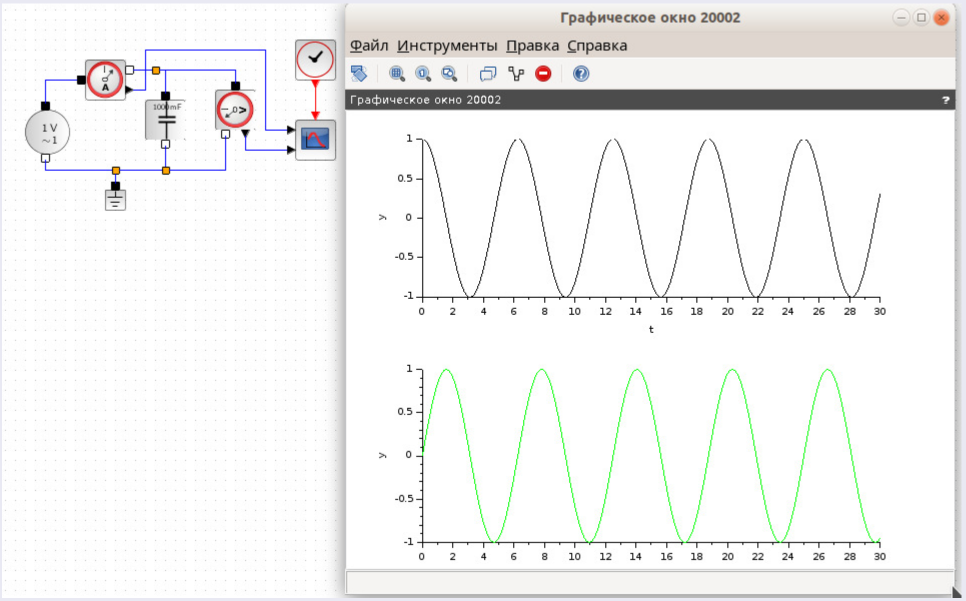
На практике в качестве интегрирующего звена можно рассматривать напряжение на конденсаторе относительно тока через него:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t)dt$$

или ток в катушке индуктивности относительно напряжения на ней:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t)dt$$

Однако эти элементы не выполняют чистого интегрирования, т.к. известно, что напряжение на конденсаторе не превышает напряжение источника питания.



Дифференцирующее звенья

Дифференцирующее звено - это такое звено, выходная величина которого пропорциональна производной от входной величины:

$$u_{\text{вых}}(t) = k\frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}$$

$$U_{\text{вых}}(s) = ksU_{\text{вх}}(s) \Rightarrow W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = k \cdot s$$

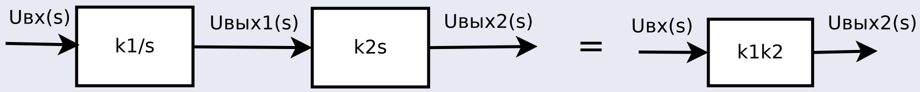
Заметим, что если $u_{\text{вх}}(t) = u(t)$ - функция Хевисайда, то $U_{\text{вых}}(s) = ks/s = k \Rightarrow u_{\text{вых}}(t) = k\delta(t)$. Дельта-функция не может быть создана реальными устройствами, так как для этого требуется бесконечная мощность. Поэтому дифференцирующее звено в идеальном виде не реализуемо (в scilab нет возможности выполнить просто умножение входного сигнала на s). Как видно, с точностью до постоянного множителя передаточные функции интегрирующего и дифференцирующего звеньев обратны друг другу.

Соединения элементарных звеньев

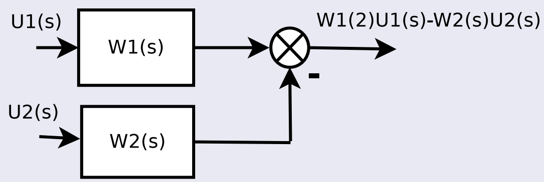
Ясно, что если я вначале проинтегрирую величину, а потом ее продифференцирую, то искомая величина не изменится:

$$U_{\text{вых}_1}(s)=\frac{k_1}{s}\cdot U_{\text{вх}}(s),U_{\text{вых}_2}(s)=k_2\cdot s\cdot U_{\text{вых}_1}(s)=k_1k_2U_{\text{вх}}(s)\Rightarrow W(s)=\frac{U_{\text{вых}_2}(s)}{U_{\text{вх}}(s)}=k_1k_2$$

Таким образом, последовательное соединение дифференцирующего и интегрирующего звеньев дает безынерционное звено.



Значит, если задаться целью минимизации количества элементарных звеньев, то все остальные звенья можно получить путем соединения только двух элементарных - дифференцирующего и интегрирующего. Кроме последовательного соединения звеньев, возможно также параллельное соединение, которое обозначается следующим образом:



Как видно из рисунка, параллельное соединение эквивалентно суммированию выходов с передаточных функций. Однако в сумме каждый выход помечается знаком $\pm$. (По умолчанию выход считается положительным и не помечается).

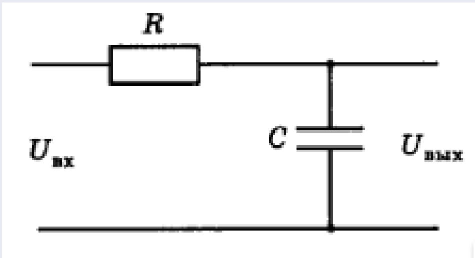
Инерционное звено

Путем последовательного и параллельного соединения, можно получить все остальные звенья. Рассмотрим ряд типовых звеньев.

Инерционное звено в общем случае задается дифференциальным уравнением вида:

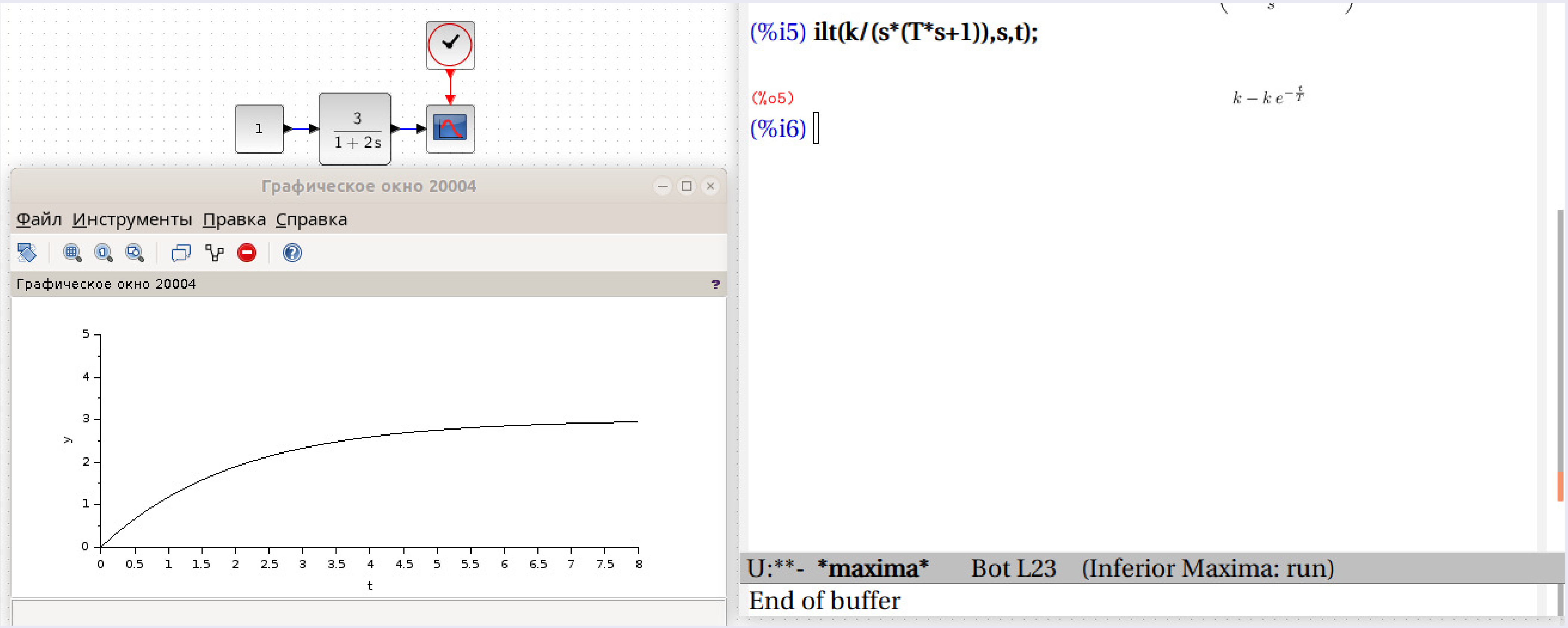
$$T\frac{dy}{dt} + y = kx \Rightarrow W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

Такую передаточную функцию мы уже получали, например, для схемы:



Выясним свойства инерционного звена:

Инерционное звено



Форсирующее звено

Данное звено обладает свойством ускорять (форсировать) переходные процессы за счет компенсации инерционности ее звеньев. Его дифференциальное уравнение имеет вид:

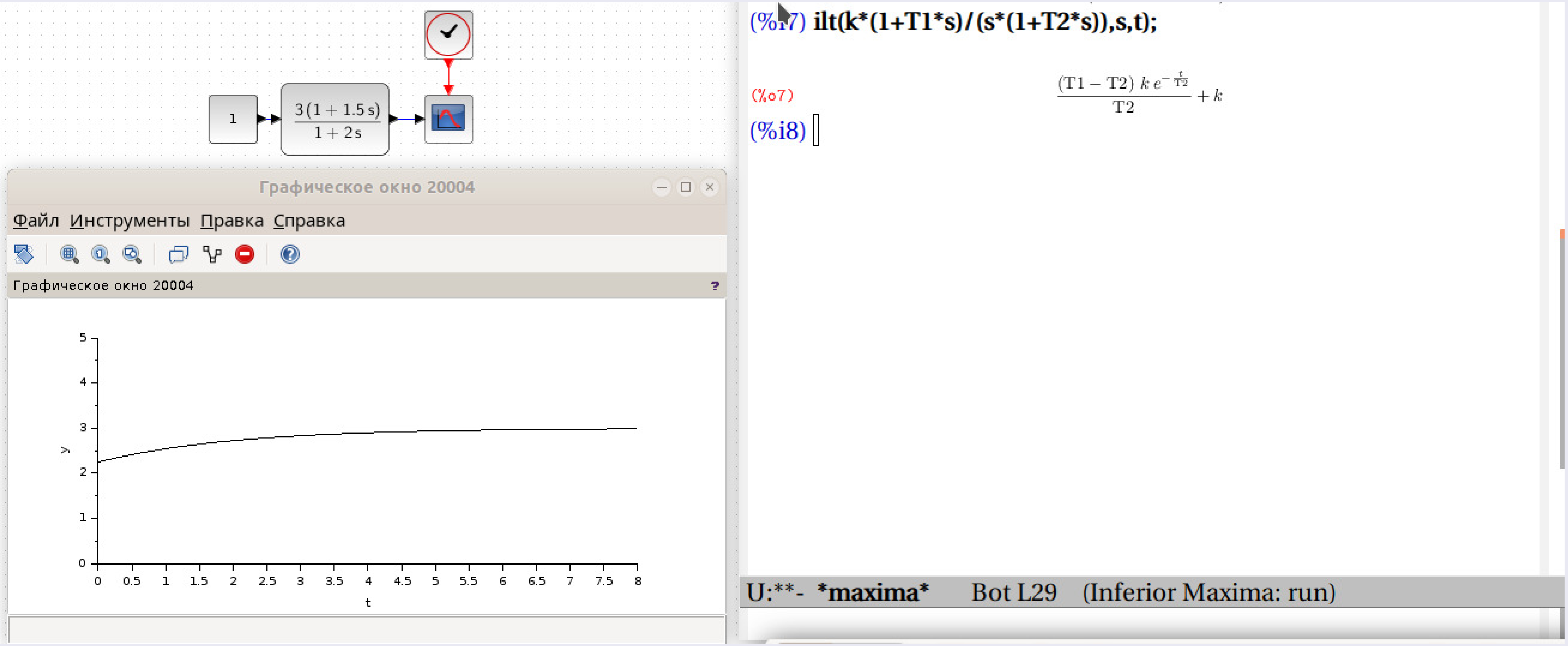
$$y = k\left(T \cdot \frac{dx}{dt} + x\right)$$

Выполним преобразование Лапласа:

$$Y(s) = kTsX(s) + kX(s) \Rightarrow W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k(Ts + 1)$$

Таким образом, передаточная функция обратна передаточной функции инерционного звена, что позволяет при последовательном включении компенсировать инерционность звеньев всей системы.
Рассмотрим свойства форсирующего звена.

Использование форсирующего звена



Инерционно-дифференцирующее звено

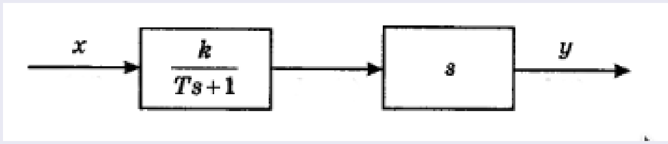
Данное звено задается следующим дифференциальным уравнением:

$$T \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot \frac{dx}{dt}$$

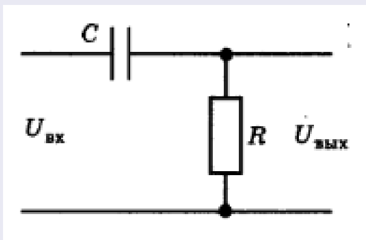
Выполнив преобразование Лапласа, получим:

$$TsY(s) + Y(s) = ksX(s) \Rightarrow W(s) = \frac{ks}{1 + Ts}$$

Данное звено можно представить в виде последовательного соединения инерционного и дифференцирующего звеньев.



Дифференциальное уравнение для инерционно-дифференцирующего звена получается для следующей схемы:



Инерционно-дифференцирующее звено

Для схемы предыдущего слайда имеем:

$$u_{\text{вх}}(t) = u_c(t) + i(t)R, i = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

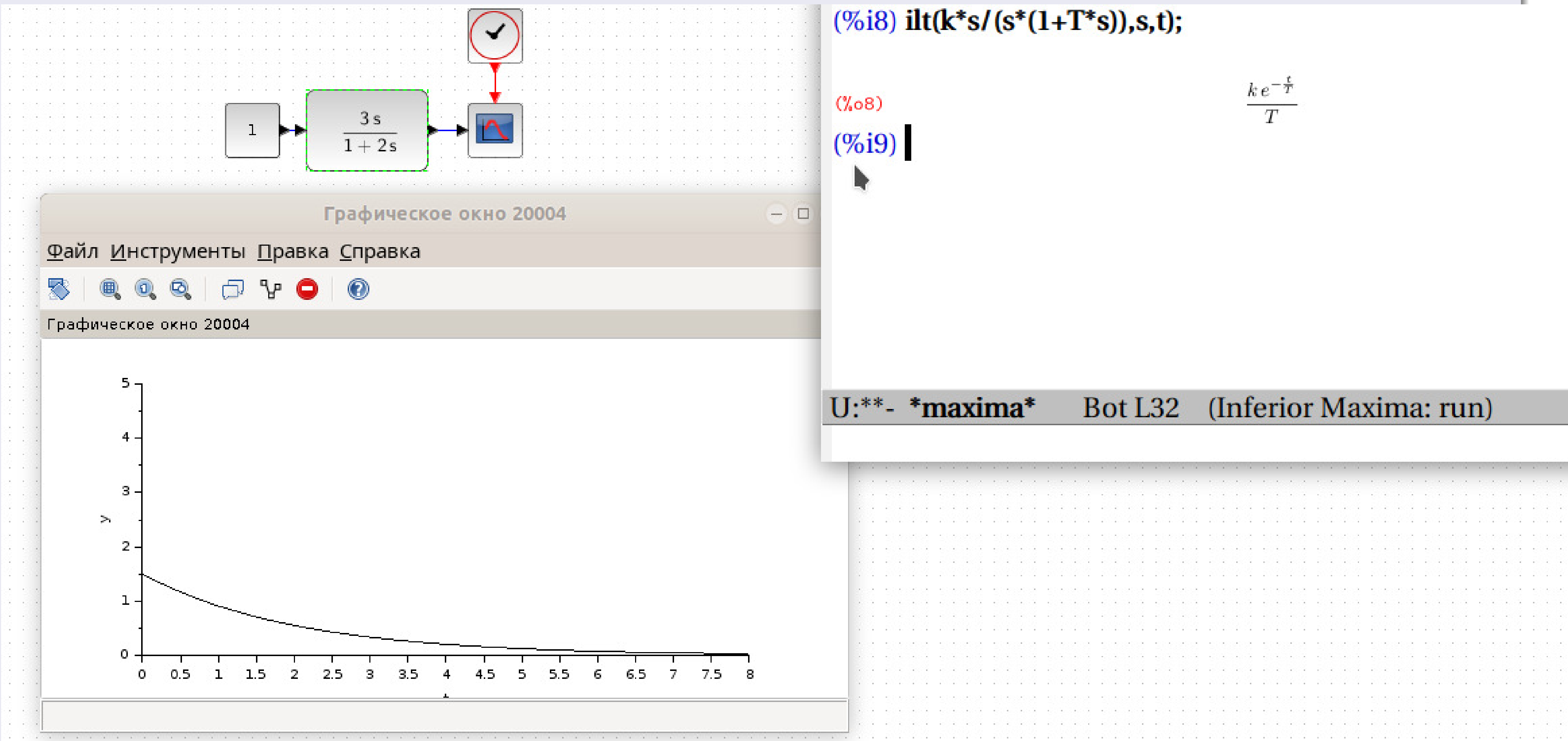
$$u_{\text{вх}}(t) = u_c(t) + RC\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$U_c(s) = \frac{U_{\text{вх}}(s)}{1 + RCs}$$

$$U_{\text{вых}}(s) = RI(s) = \frac{RCsU_{\text{вх}}(s)}{1 + RCs} \Rightarrow W(s) = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

Рассмотрим работу инерционно-дифференцирующего звена.

Инерционно-дифференцирующее звено



Инерционно-форсирующее звено

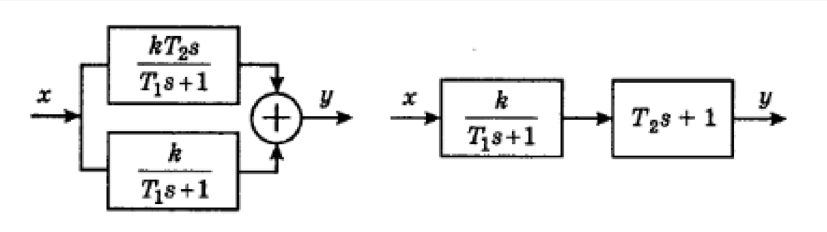
Математически описывется наиболее общим уравнением первого порядка:

$$T_1\frac{dy}{dt} + y = k\left(T_2\frac{dx}{dt} + x\right)$$

Выполним преобразование Лапласа, получим передаточную функцию:

$$T_1 sY(s) + Y(s) = kT_2 sX(s) + kX(s) \Rightarrow W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k\cdot\frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}$$

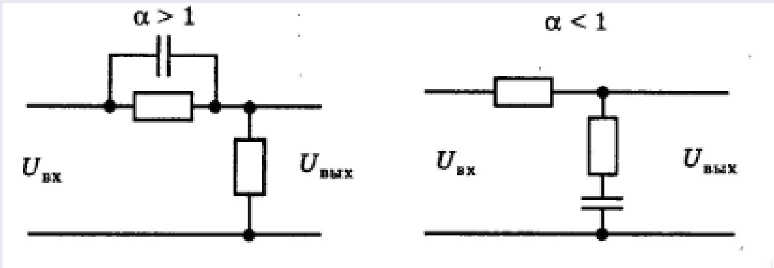
Данное звено можно представить как параллельное соединение инерционного и инерционно-дифференцирующего звеньев, а также в виде последовательного соединения инерционного и форсирующего звеньев:



Свойства звена зависят от соотношения $\alpha = \frac{T_2}{T_1}$. При $\alpha > 1$ преобладают форсирующие свойства, при $\alpha < 1$ - инерционные свойства.

Инерционно-форсирующее звено

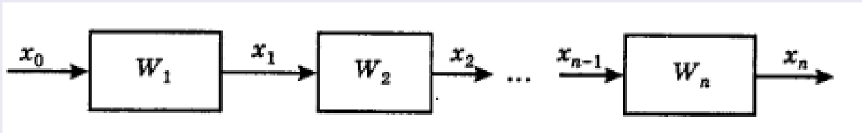
Инерционно-форсирующие звенья можно представить в виде следующих схем:



Использование инерционно-форсирующего звена как раз было показано на слайде 15.

Соединяя различные звенья последовательно или параллельно можно получать различные структурные схемы, описывающие разные классы дифференциальных уравнений. Использование структурных схем делает этот процесс более наглядным. Существует три основных типа соединения звеньев. Рассмотрим их более подробно.

Последовательное соединение - выходная величина предыдущего звена равна входной величине последующего звена:



Найдем передаточную функцию всей сисемы: $W(s) = \frac{X_n(s)}{X_1(s)}$. Имеем:

$$X_1(s) = W_1 X_0(s)$$

$$X_2(s) = W_2 X_1(s)$$

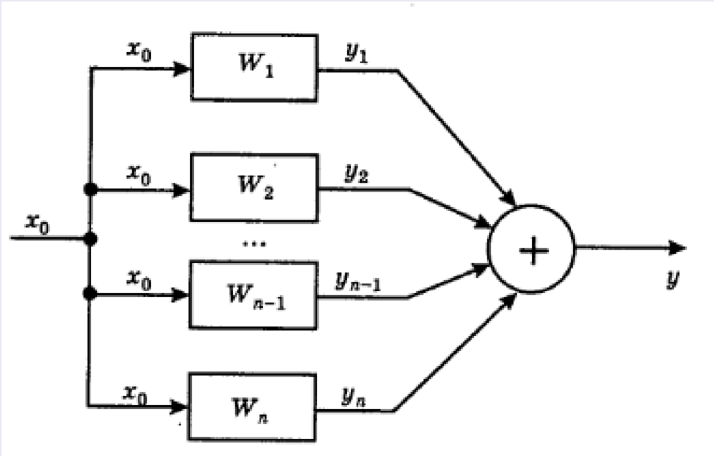
$$\dots$$

$$X_n(s) = W_n X_{n-1}(s)$$

Подставляя одно в другое, получаем:

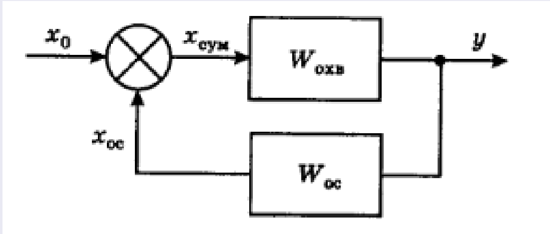
$$X_n(s) = W_1 W_2 \cdot \ldots \cdot W_n \cdot X_0(s) \Rightarrow W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i$$

Параллельное соединение - входная величина одинакова для всех звеньев, а выходные величины алгебраически суммируются:



$$Y(s) = W_1 X_0(s) + W_2 X_0(s) + \ldots + W_n X_0(s) = \left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) X_0(s) \Rightarrow W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Встречно-параллельное соединение - такое соединение звеньев, в котором имеется звено обратной связи и звено, охваченное этой обратной связью, а также сумматор:



Обратная связь при $x_{ос}$ может быть как положительная, так и отрицательная. Получим общую передаточную функцию.

$$Y(s) = W_{охв}X_{сум}(s)$$

$$X_{сум}(s) = X_0(s) \pm X_{ос}(s)$$

$$X_{ос}(s) = W_{ос}Y(s) \Rightarrow X_{сум}(s) = X_0(s) \pm W_{ос}Y(s)$$

$$Y(s) = W_{охв}X_{сум}(s) = W_{охв}\left(X_0(s) \pm W_{ос}Y(s)\right)$$

$$Y(s) \mp W_{охв} \cdot W_{ос}Y(s) = W_{охв} \cdot X_0(s)$$

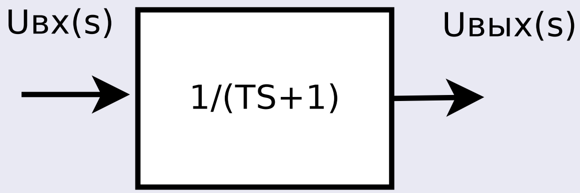
$$Y(s) = \frac{W_{охв}}{1 \mp W_{охв} \cdot W_{ос}} \cdot X_0(s) \Rightarrow W = \frac{W_{охв}}{1 \mp W_{охв} \cdot W_{ос}}$$

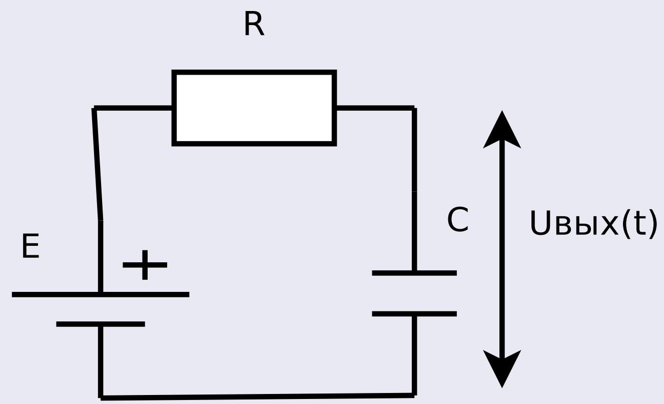
Задание 1

Используя соединение элементарных звеньев, получить инерционное звено.

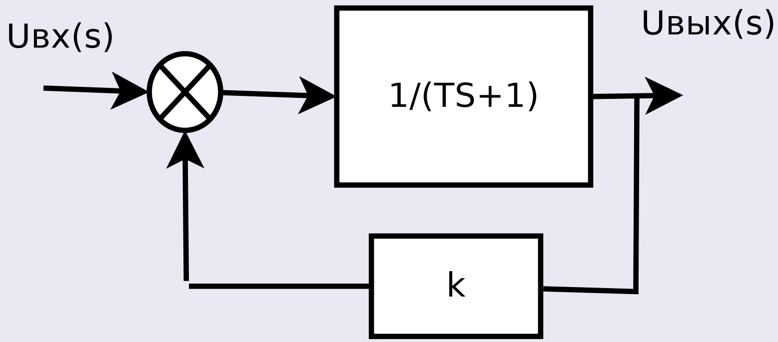
Обратная связь

Выясним смысл обратной связи. Для этого рассмотрим инерционное звено:



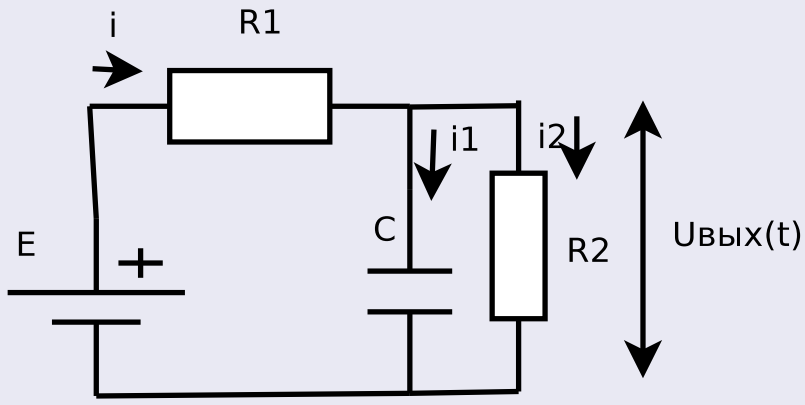


Рассмотрим структурную схему:



$$W = \frac{\frac{1}{Ts+1}}{1+\frac{k}{Ts+1}} = \frac{1}{Ts+1+k}$$

Рассмотрим теперь схему:



$$E = R_1(i_1(t) + i_2(t)) + u_c(t)$$

$$u_c(t) = i_2(t)R_2, i_1(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$E = R_1\left(C\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{R_2}\right) + u_c(t)$$

$$U_{\text{вх}}(s) = R_1CsU_c(s) + \frac{R_1}{R_2}U_c(s) + U_c(s)$$

$$U_c(s) = \frac{U_{\text{вх}}(s)}{R_1Cs + 1 + \frac{R_1}{R_2}} \Rightarrow k = \frac{R_1}{R_2}$$

Задание: собрать схему, выяснить как меняется ее работа при изменении параметра R_2