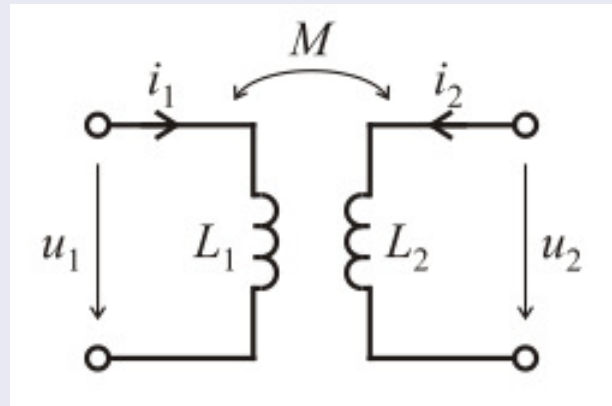


# Индуктивно связанные электрические цепи

- 1 Индуктивные связи в электрических цепях
- 2 Уравнения и схема замещения трансформатора
- 3 Преобразования звезда - треугольник

# Индуктивные связи в электрических цепях

В электротехнике и электронике широко используются устройства, которые содержат индуктивные катушки, связанные общими магнитными потоками. Примером такого устройства является трансформатор, который служит для преобразования уровней переменных напряжений и токов и для согласования сопротивлений отдельных участков цепи. Рассмотрим цепь, состоящую из двух индуктивных катушек, намотанных на общий сердечник.



Каждая из катушек пронизывается двумя магнитными потоками: потоком самоиндукции, вызванным собственным током, и потоком взаимной индукции, вызванным током другой катушки.

# Индуктивные связи в электрических цепях

В соответствии с принципом наложения потокосцепление первой катушки

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M \cdot i_2$$

Потокосцепление второй катушки

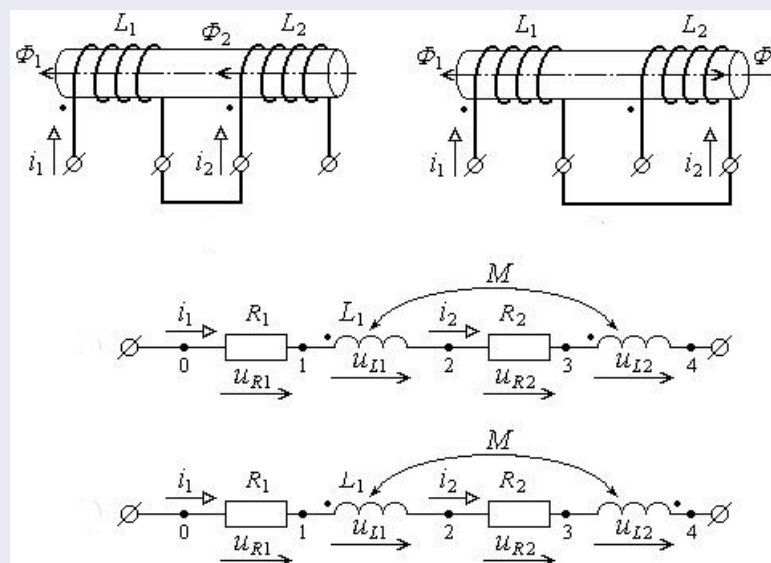
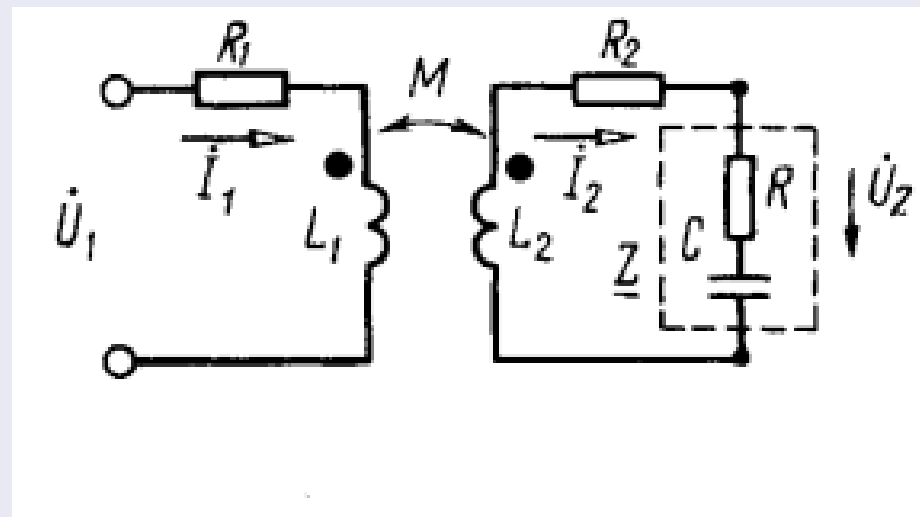
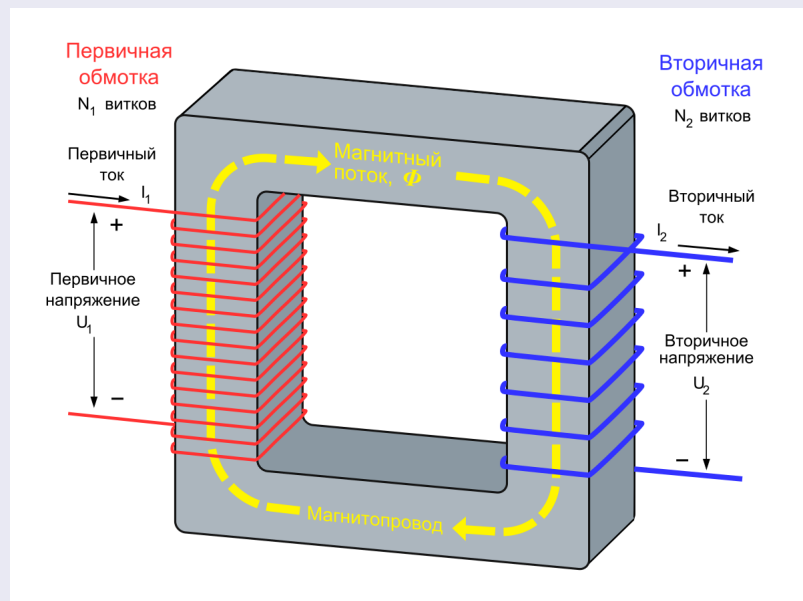
$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M \cdot i_1$$

Значения взаимной индуктивности в выражениях одинаковы и не могут превышать среднего геометрического из значений  $L_1$  и  $L_2$ :

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

Здесь  $k$  - это коэффициент связи, характеризующий магнитную связь между катушками. В пределе, когда магнитный поток одной катушки полностью пронизывает витки другой,  $k = 1$ . При отсутствии магнитной связи  $k = 0$ . Знаки при  $M$  зависят от взаимного направления магнитных потоков катушек. В свою очередь, направления магнитных потоков зависят как от направления токов в катушках, так и от их взаимного расположения. Если катушки включены таким образом, что потоки складываются, то такое включение называют согласным. Если магнитные потоки направлены навстречу друг другу, то катушки включены встречно. При согласном направлении токов в двух индуктивно связанных катушках зажимы этих катушек, относительно которых токи направлены одинаково, называют одноименными. Одноименные зажимы принято обозначать точками или звездочками.

# Индуктивные связи в электрических цепях



# Т-образная схема замещения

Определим напряжения на зажимах индуктивно связанных катушек.

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \pm M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \pm M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

При подаче на вход одной катушки синусоидального напряжения, возникают синусоидальные гармонические колебания в обоих контурах. Тогда можно записать полученные уравнения в комплексной форме:

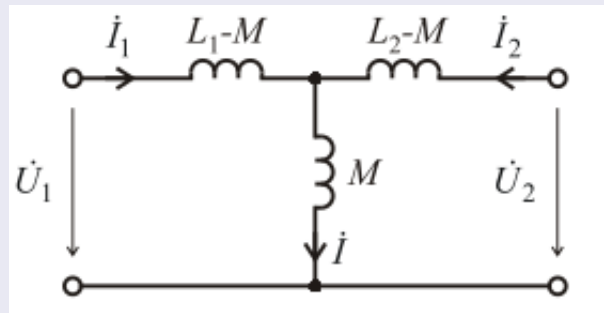
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1$$

При согласном включении катушек данные уравнения можно переписать в форме:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = j\omega(L_1 - M) \dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

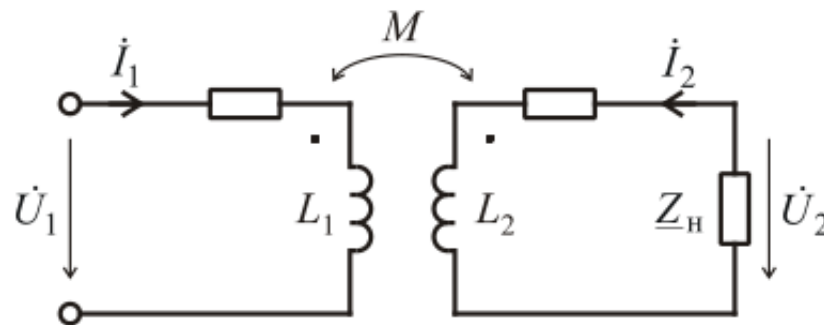
$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = j\omega(L_2 - M) \dot{I}_2 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$



# Трансформатор

При подключении первичной обмотки к напряжению  $u_1$  в ней возникает ток  $i_1$ , создающий в сердечнике переменный магнитный поток. В результате в обмотках трансформатора индуцируются ЭДС: в первичной обмотке – ЭДС самоиндукции, а во вторичной – ЭДС взаимной индукции, которая вызывает в нагрузке ток  $i_2$ . Если число витков первичной обмотки  $n_1$  меньше числа витков вторичной обмотки  $n_2$ , трансформатор является повышающим. Если  $n_1 > n_2$ , трансформатор является понижающим.

На рисунке изображена схема двухобмоточного трансформатора. Резисторы учитывают потери в первичной и вторичной катушках,  $Z_H$  – комплексное сопротивление нагрузки.



# Схема замещения трансформатора

Для выбранных направлений напряжений и токов на рисунке предыдущего слайда уравнения трансформатора имеют вид:

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \cdot \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

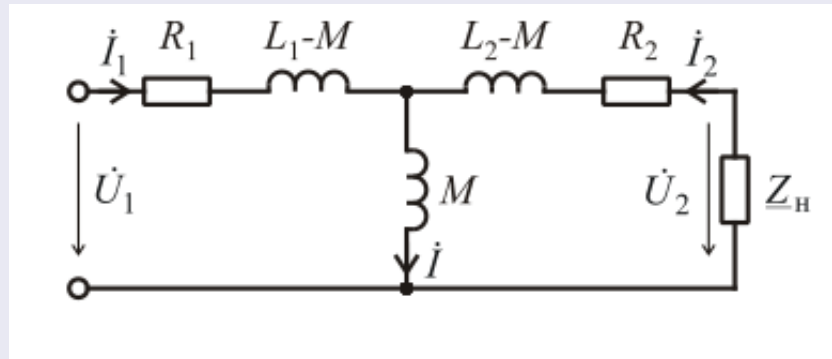
$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \cdot \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M) \dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M) \dot{I}_2 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

Последним уравнениям соответствует двухконтурная схема без индуктивных связей:



Поперечную ветвь называют ветвью намагничивания, а ток  $\dot{I}$  – током намагничивания.



# Уравнения трансформатора

Определим входное сопротивление трансформатора, нагруженного на комплексное сопротивление  $Z_{\text{н}}$ . Для схемы трансформатора справедливы уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \cdot \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ 0 &= (\dot{Z}_{\text{н}} + R_2 + j\omega L_2) \cdot \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1\end{aligned}$$

Ток вторичной обмотки:

$$\dot{I}_2 = -\frac{j\omega M}{\dot{Z}_{\text{н}} + R_2 + j\omega L_2} \cdot \dot{I}_1$$

Тогда входное напряжение:

$$\dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \left( R_1 + j\omega L_1 + \frac{(j\omega M)^2}{\dot{Z}_{\text{н}} + R_2 + j\omega L_2} \right) \dot{I}_1$$

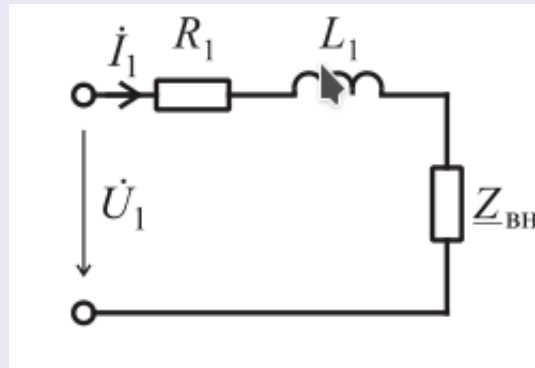
Входное сопротивление трансформатора:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(j\omega M)^2}{\dot{Z}_{\text{н}} + R_2 + j\omega L_2}$$

Величину  $\dot{Z}_{\text{вн}} = \frac{(j\omega M)^2}{\dot{Z}_{\text{н}} + R_2 + j\omega L_2}$  называют *вносимым сопротивлением*. Она представляет собой комплексное сопротивление, вносимое из вторичной цепи в первичную.

# Одноконтурная схема замещения

Уравнениям предыдущего слайда соответствует так называемая одноконтурная схема замещения:

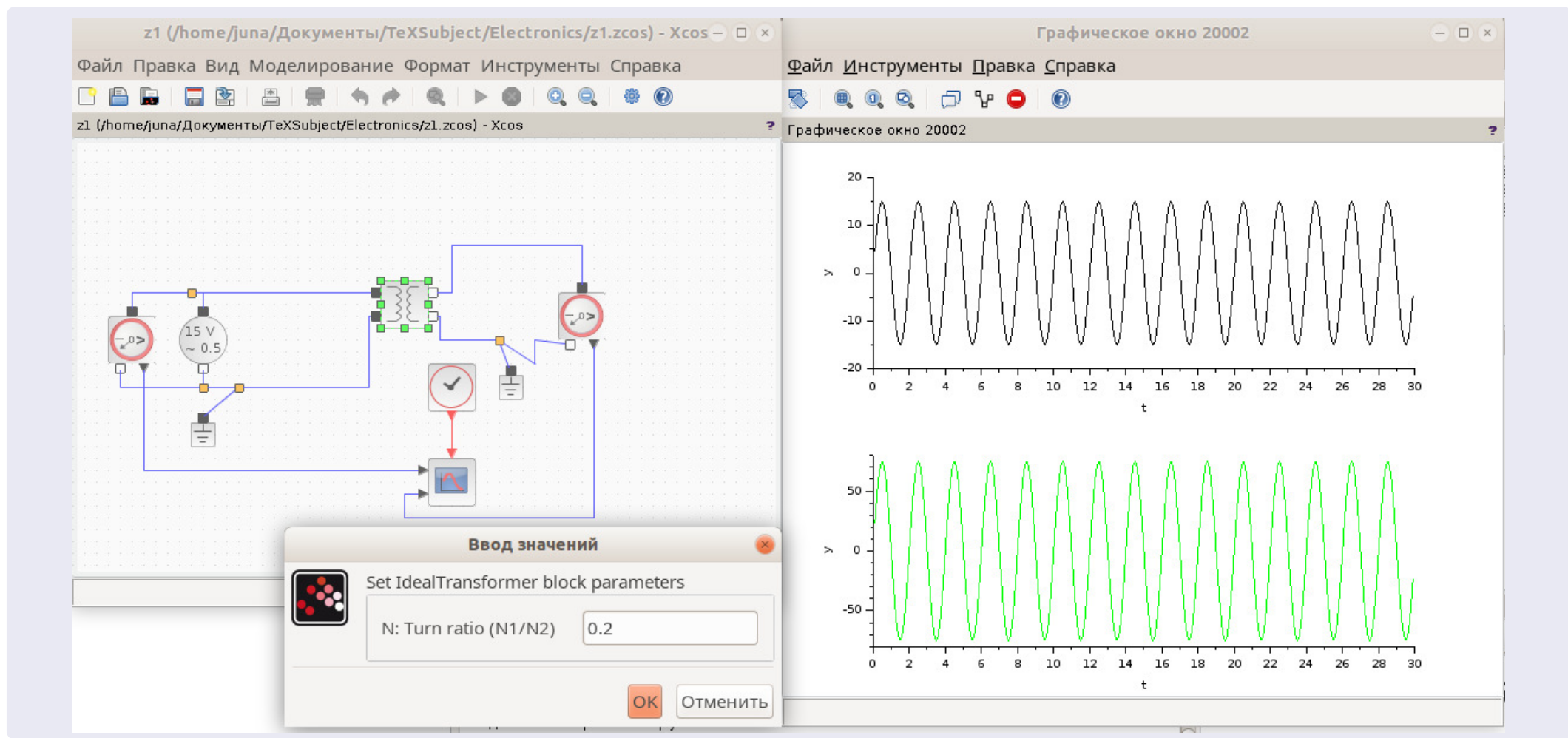


В режиме холостого хода, когда вторичная обмотка разомкнута, ток первичной обмотки:

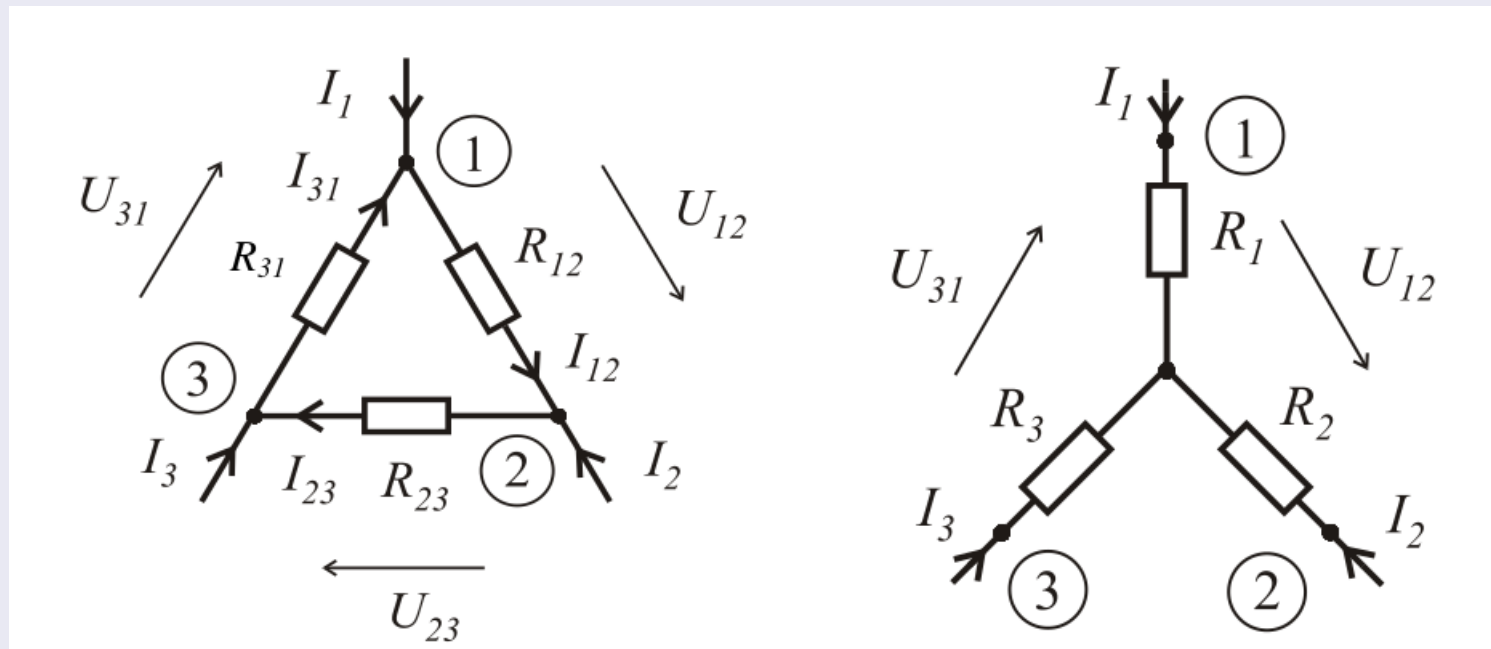
$$\dot{I}_{1\text{хх}} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1}$$

Увеличение активной составляющей входного сопротивления при замыкании вторичного контура объясняется увеличением активной мощности, потребляемой трансформатором.

# Моделирование работы трансформатора в Scilab



# Преобразования звезда - треугольник



При расчетах разветвленных цепей часто возникает задача преобразования треугольника ветвей в эквивалентную звезду. Эквивалентность треугольника и звезды понимается в том смысле, что при одинаковых напряжениях между одноименными зажимами токи, входящие в одноименные зажимы, одинаковы. Найдем формулы, позволяющие выполнить такое преобразование.

# Преобразования звезда - треугольник

Справедливы следующие уравнения:

$$I_{12} - I_{31} = I_1, I_{23} - I_{12} = I_2, I_{31} - I_{23} = I_3$$

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0$$

Тогда имеем:

$$I_{31} = I_{12} - I_1, I_{23} = I_2 + I_{12}$$

$$R_{12}I_{12} + R_{23}(I_2 + I_{12}) + R_{31}(I_{12} - I_1) = 0$$

Из последнего получем:

$$I_{12} = \frac{R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_1 - \frac{R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_2$$

Напряжение:

$$U_{12} = R_{12}I_{12} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_2$$

Аналогичным образом, решая относительно  $I_{23}$  получим:

$$U_{23} = R_{23}I_{23} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_2 - \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_3$$

Данным уравнения соответствует эквивалентная схема, в которой резисторы соединены звездой.

# Преобразования звезда - треугольник

Окончательно получаем:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Итак, *сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений сторон треугольника.*

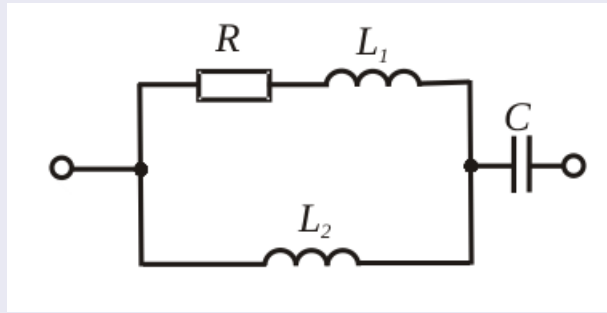
Можно выполнить и обратное преобразование, заменив звезду ветвей эквивалентным треугольником. Сопротивления резисторов, образующих стороны треугольника, определяются через проводимости равенствами:

$$G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, G_{23} = \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3}, G_{31} = \frac{G_3G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Следовательно, проводимость стороны треугольника равна произведению проводимостей прилегающих лучей звезды, деленному на сумму проводимостей лучей звезды.

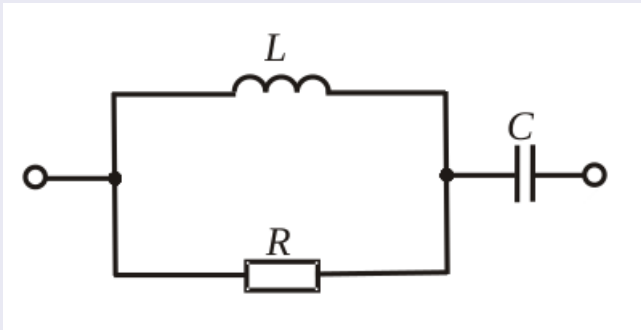
## Задание 1

Вычислить комплексное сопротивление  $Z_{\Sigma}$ , если  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_1} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_2} = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 4 \text{ Ом}$ . Построить векторную диаграмму.



## Задание 2

Цепь, показанная на рисунке, находится в режиме резонанса. Вычислить  $X_C$ , если  $R = 60 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 40 \text{ Ом}$ .





## Задание 3

Записать закон изменения напряжения  $u(t)$ , если  $R = 40 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 40 \text{ Ом}$ ,  $u_L(t) = 240 \sin(\omega t + 120^\circ)$

