

Цепи постоянного тока

- 1 Законы Кирхгофа
- 2 Расчет цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа
- 3 Расчет цепей постоянного тока на основе метода контурных токов

Первый закон Кирхгофа

В электротехнике в основе анализа и расчета электрических цепей (необязательно постоянного тока) лежат два фундаментальных закона Кирхгофа. Рассмотрим эти законы, предварительно введя ряд понятий.

Ветвь – участок цепи с двумя выводами. Ветвью может быть отдельный элемент либо группа элементов, соединенных последовательно или параллельно.

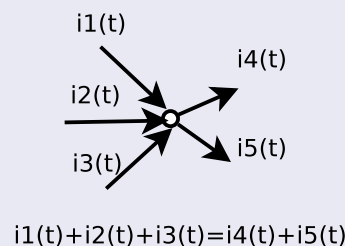
Узел – точка соединения двух или более ветвей. Место соединения двух ветвей удобно рассматривать в качестве узла при машинных расчетах. При ручных расчетах несколько элементов, соединенных последовательно или параллельно, удобно рассматривать как одну ветвь. Поэтому при ручных расчетах узлом считают соединение трех или более ветвей.

Контур – замкнутый путь, проходящий через ряд ветвей и узлов.

Первый закон Кирхгофа формулируется для узла электрической цепи:

алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле электрической цепи равна нулю: $\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$.

Часто используется и другая формулировка: сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из узла: $\sum i_{\text{ВХ}} = \sum i_{\text{ВЫХ}}$.



Направление электрического тока

Для активного сопротивления - приемника электрической энергии - мощность (скорость преобразования электрической энергии в теплоту) положительна в том и только в том случае, если и падение напряжения, и ток имеют одинаковые знаки, так как $p = ui$.

Поэтому при постоянных токах для сопротивлений (в общем случае для любых приемников) *положительное направление тока совпадает с положительным направлением напряжения: от плюса к минусу (от более высокого потенциала к более низкому)*.

В первом законе Кирхгофа токи, направленные от узла, записываются с положительным знаком. Токи, направленные к узлу, записываются со знаком минус. (В тоже время, нужно понимать, что это лишь удобное обозначение. Можно было бы принять и противоположное обозначение).

Второй закон Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа формулируется для замкнутого контура электрической цепи: *В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма мгновенных значений ЭДС равна алгебраической сумме мгновенных значений падений напряжения на всех пассивных элементах этого контура:*

$$\sum_{k=1}^m e_k(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t),$$

где m - число активных элементов; n - число пассивных элементов.

Если направление ЭДС или напряжение совпадает с направлением обхода контура, то они суммируются со знаком плюс, а если они противоположны, то суммирование имеет знак минус.

Для линейных электрических цепей постоянного тока, когда для любого k -го сопротивления справедлив закон Ома, второй закон Кирхгофа удобно записывать в виде:

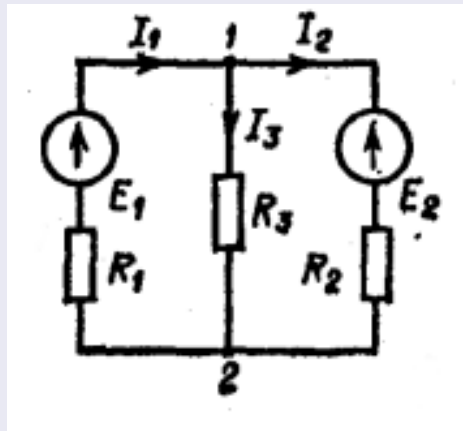
$$\sum_{k=1}^m E_k = \sum_{k=1}^n I_k \cdot R_k$$

Если ток направлен согласно с направлением обхода контура, слагаемое в правой части берется со знаком плюс, а если противоположно, то со знаком минус.

Примеры расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Любая задача анализа электрической цепи может быть решена на основе первого и второго законов Кирхгофа. Рассмотрим для демонстрации ряд примеров.

Пример 1. В предложенной схеме определить токи всех ветвей.



В данной схеме выделено два узла $n_y = 2$ и имеется три ветви $n_b = 3$. Составим уравнение по первому закону Кирхгофа для первого узла:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Можно также составить аналогичное уравнение и для второго узла:

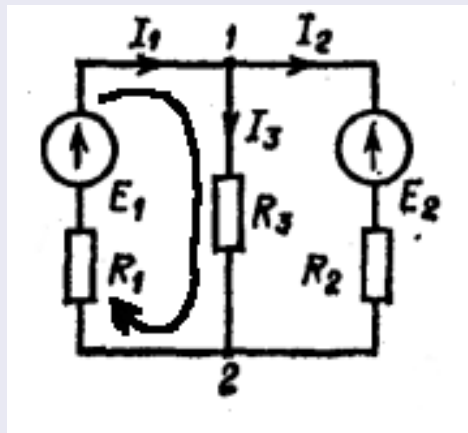
$$I_2 + I_3 = I_1,$$

но видно, что они ничем друг от друга не отличаются.

Пример 1 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Для составления уравнений по второму закону Кирхгофа в схеме нужно выделить замкнутые контура. В предложенной схеме всего можно выделить три таких контура. Направления обхода контуров выбирается произвольно.

Первый контур:

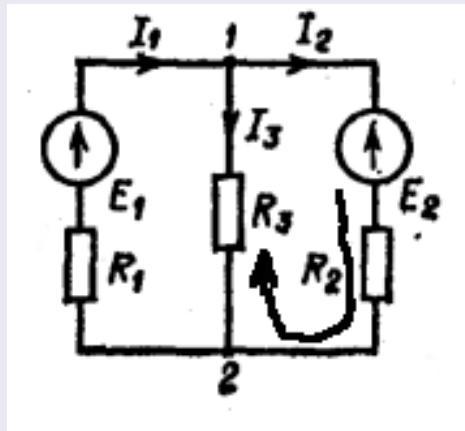


Уравнение по второму закону Кирхгофа для этого контура:

$$E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3$$

Пример 1 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Второй контур:



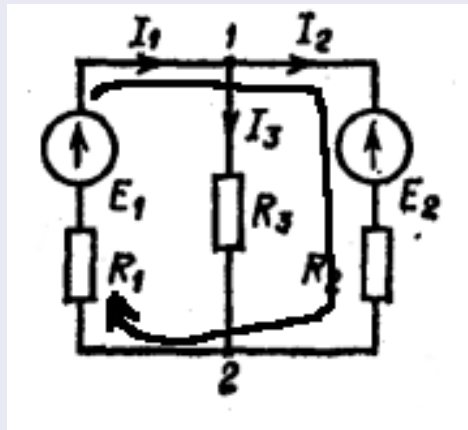
Уравнение по второму закону Кирхгофа для этого контура:

$$-E_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3$$

Следует обратить внимание на знаки: поскольку направление источника напряжения E_2 противоположно выбранному направлению, то он берется со знаком минус. Аналогично, ток I_3 направлен противоположно выбранному направлению, он тоже берется со знаком минус.

Пример 1 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Третий контур:



Уравнение по второму закону Кирхгофа для этого контура:

$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2$$

Пример 1 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Давайте внимательно посмотрим на полученные уравнения:
по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$I_2 + I_3 = I_1 \quad (2)$$

по второму закону Кирхгофа:

$$E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad (3)$$

$$-E_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 \quad (4)$$

$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 \quad (5)$$

Видно, что из (1) получается (2). Если сложить левые и правые части (3) и (4), то получим (5). Таким образом, полученные уравнения не являются независимыми, и возникает вопрос, сколько уравнений следует оставить, чтобы найти все токи.

В нашем случае три неизвестных тока требуют три независимых уравнения. Поэтому от первого закона Кирхгофа возьмем, например, уравнение (1), а от второго закона Кирхгофа возьмем уравнения (3), (4).

Пример 1 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Окончательно, следует решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \\ (-E_2) = I_2 R_2 - I_3 R_3 \end{cases}$$

Приведя ее к каноническому виду, получим:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + 0 \cdot I_2 + R_3 I_3 = E_1 \\ 0 \cdot I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = -E_2 \end{cases}$$

Последнюю можно решить многими способами, например, методом Крамера:

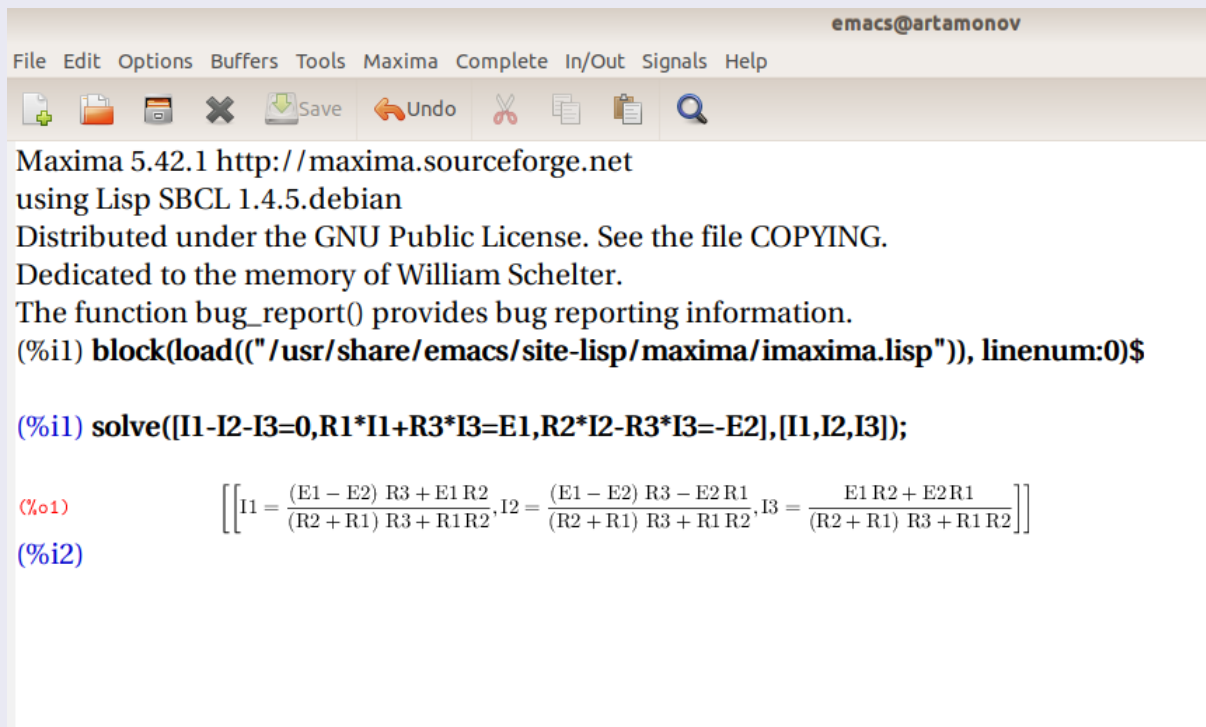
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -R_1 R_2 - R_2 R_3 - R_1 R_3$$

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E_1 & 0 & R_3 \\ -E_2 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix}, \Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E_1 & R_3 \\ 0 & -E_2 & -R_3 \end{vmatrix}, \Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & 0 & E_1 \\ 0 & R_2 & -E_2 \end{vmatrix}$$

Пример 1 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta}, I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta}, I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta}$$
$$I_1 = \frac{-E_1 R_2 + E_2 R_3 - E_1 R_3}{-R_1 R_2 - R_2 R_3 - R_1 R_3}, I_2 = \frac{-E_1 R_3 + E_2 R_1 + E_2 R_3}{-R_1 R_2 - R_2 R_3 - R_1 R_3}, I_3 = \frac{-E_1 R_2 - E_2 R_1}{-R_1 R_2 - R_2 R_3 - R_1 R_3}$$

На практике выполнять данные преобразования вручную нет необходимости. Целесообразно использовать автоматизированные системы символьных преобразований. Одной из таких систем является система [Maxima](#).



```
emacs@artamonov
File Edit Options Buffers Tools Maxima Complete In/Out Signals Help
Maxima 5.42.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp SBCL 1.4.5.debian
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) block(load("/usr/share/emacs/site-lisp/maxima/imaxima.lisp")), linewidth:0)$

(%i2) solve([I1-I2-I3=0,R1*I1+R3*I3=E1,R2*I2-R3*I3=-E2],[I1,I2,I3]);

(%o1) [[I1 = (E1 - E2) R3 + E1 R2 / (R2 + R1) R3 + R1 R2, I2 = (E1 - E2) R3 - E2 R1 / (R2 + R1) R3 + R1 R2, I3 = E1 R2 + E2 R1 / (R2 + R1) R3 + R1 R2]]
(%i2)
```

Пример 1 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Отметим, что чаще всего будет требоваться получить численное значение токов при заданных числовых параметрах. В этом случае можно использовать ту же Maxima, но можно использовать и Scilab.

Зададимся численными значениями параметров схемы и посмотрим, как будут выглядеть расчеты с использованием этих двух сред:

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, R_2 = 20 \text{ Ом}, R_3 = 30 \text{ Ом}, E_1 = 5 \text{ В}, E_2 = 3 \text{ В}$$

```
emacs@artamonov
File Edit Options Buffers Tools Maxima Complete In/Out Signals Help
+ Save Undo Cut Copy Paste Find
Maxima 5.42.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp SBCL 1.4.5.debian
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) block(load("/usr/share/emacs/site-lisp/maxima/imaxima.lisp")), linenum:0)$

(%i1) R1:10$ R2:20$ R3:30$ E1:5$ E2:3$

(%i6) solve([I1-I2-I3=0,R1*I1+R3*I3=E1,R2*I2-R3*I3=-E2],[I1,I2,I3]);

(%o6)

$$\left[ \left[ I_1 = \frac{8}{55}, I_2 = \frac{3}{110}, I_3 = \frac{13}{110} \right] \right]$$


(%i7) float(%);

(%o7)

$$[[I_1 = 0.14545454545454545, I_2 = 0.02727272727272727, I_3 = 0.1181818181818182]]$$

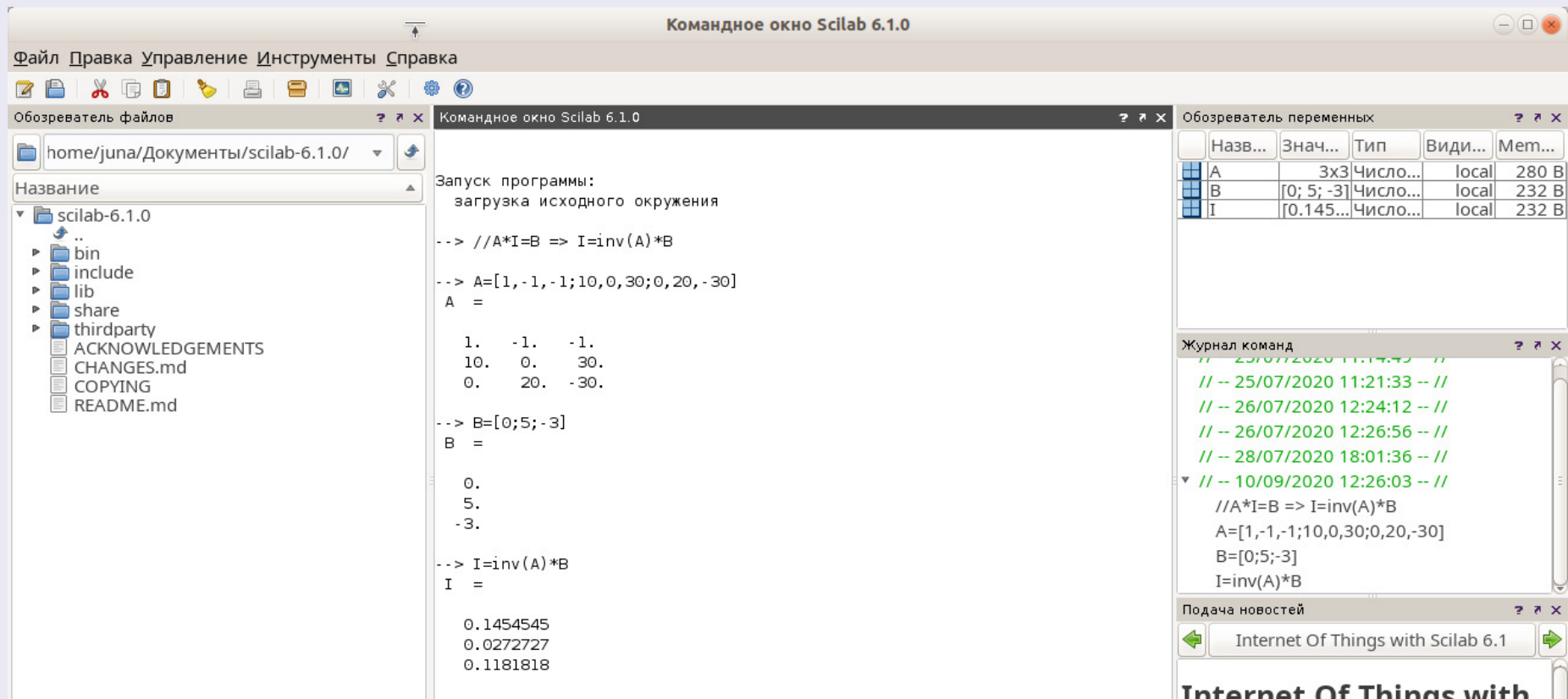

(%i8)
```

Пример 1 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Для использования Scilab перепишем полученные уравнения в численной форме:

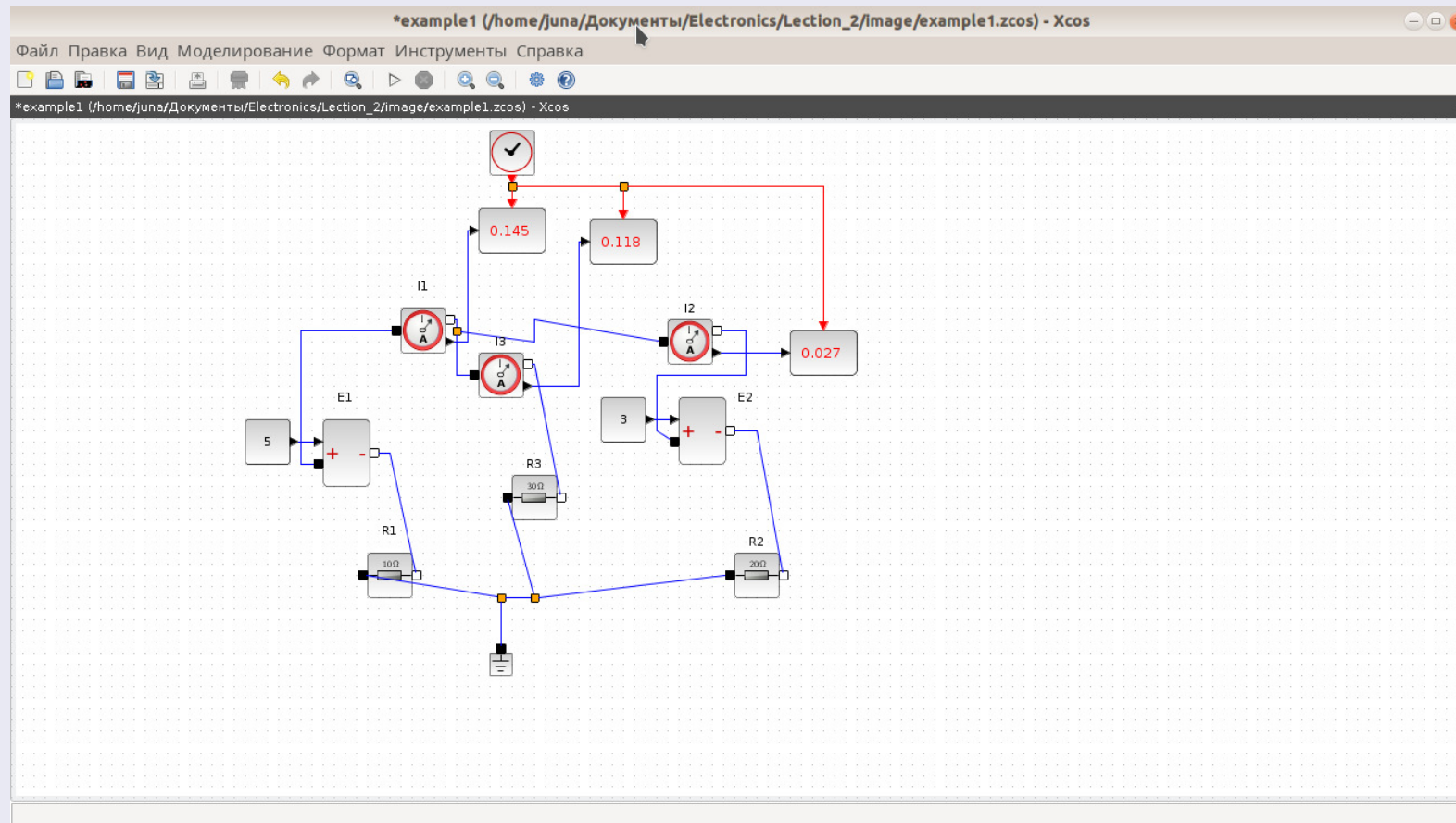
$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 10 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 30 \cdot I_3 = 5 \\ 0 \cdot I_1 + 20 \cdot I_2 - 30 \cdot I_3 = -3 \end{cases}$$

Тогда имеем:



Пример 1 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

В Scilab можно также смоделировать работу данной схемы в симуляторе xcos.



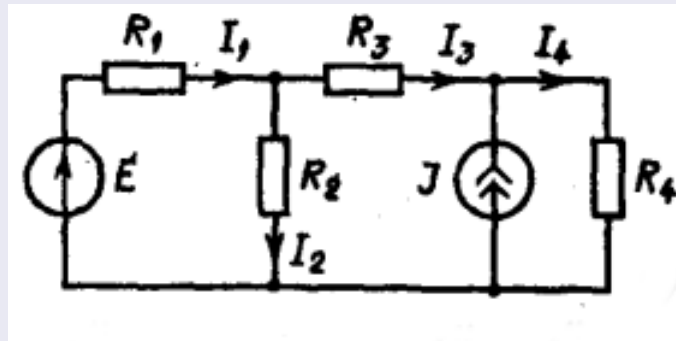
Как видно из рисунка, результаты моделирования совпадают с теоретическими расчетами.

Количество уравнений при расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Как видно из рассмотренного примера, количества уравнений, которые можно составить по законам Кирхгофа избыточно для нахождения всех необходимых неизвестных. Можно задаться вопросом, как определить это количество для общего случая. Будем считать неизвестными - токи в ветвях электрической схемы. Их всегда ровно столько, сколько количество ветвей $n_{\text{в}}$. Тогда количество неизвестных, а значит и количество необходимых уравнений равно количеству ветвей $n_{\text{в}}$. Каждая ветвь связывает собой два узла, для одного из которых ток этой ветви является входящим (отрицательным), а для другого узла этот же ток является выходящим (положительным). Поэтому, если составить уравнения по первому закону Кирхгофа для всех узлов $n_{\text{у}}$ схемы, то каждый ток войдет в эти уравнения дважды с разными знаками. Значит сумма всех таких уравнений приведет к тождеству $0 = 0$. Чтобы убрать эту тавтологию, достаточно убрать одно уравнение. Таким образом, для нахождения токов всех ветвей схемы по первому закону Кирхгофа необходимо составить $n_{\text{у}} - 1$ уравнений. Составив таким образом $n_{\text{у}} - 1$ уравнений по первому закону Кирхгофа, остается составить еще $n_{\text{в}} - (n_{\text{у}} - 1) = n_{\text{в}} - n_{\text{у}} + 1$ уравнений по второму закону Кирхгофа.

Пример 2 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Рассмотрим еще примеры расчета цепей на основе законов Кирхгофа, используя полученные результаты.



Для исходных данных: $E = 6 \text{ В}$, $I = 1 \text{ А}$, $R_1 = 9 \text{ Ом}$, $R_2 = 4.5 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_4 = 6 \text{ Ом}$ рассчитать все токи ветвей: I_1, I_2, I_3, I_4 .

Решение. В данной схеме $n_{\text{в}} = 5$, $n_{\text{у}} = 3$ (заметим, что два узла внизу схемы - это в действительности одно соединение, а значит один узел). Составим два уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

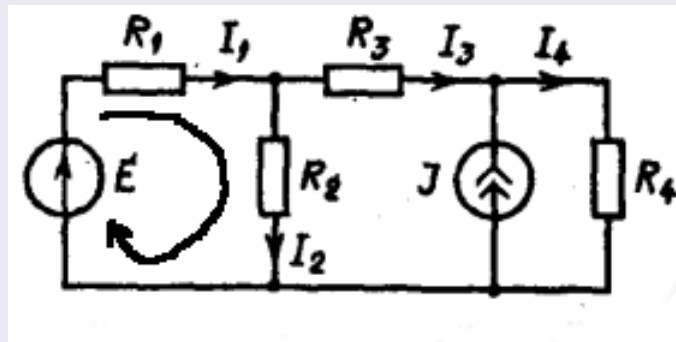
$$I_3 + I = I_4$$

Значит по второму закону Кирхгофа необходимо составить еще $n_{\text{в}} - n_{\text{у}} + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$ уравнения.

Пример 2 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

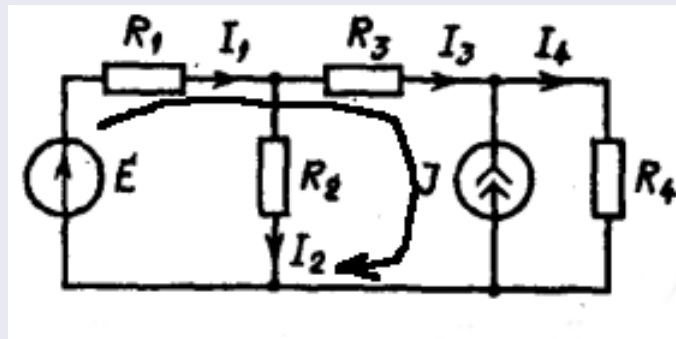
Для составления уравнений по второму закону Кирхгофа выберем три произвольных контура.

Первый контур.



$$E = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

Второй контур.

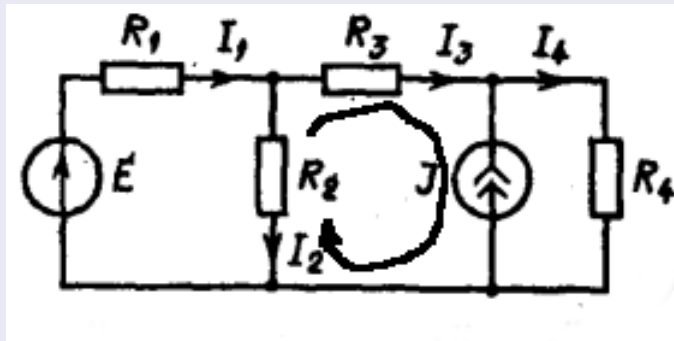


$$E = R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_I$$

Пример 2 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Во втором контуре через U_I обозначено напряжение на источнике тока. Поскольку направление источника тока противоположно выбранному направлению обхода, U_I в уравнение входит со знаком минус.

Обратив внимание на произвольный характер выбора контуров. Например, в качестве альтернативы можно было бы выбрать следующий второй контур: Альтернативный второй контур.

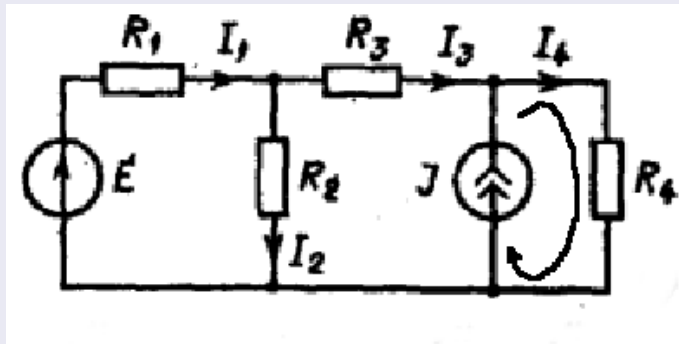


$$0 = R_3 I_3 - U_I - R_2 I_2$$

Однако важно отметить, что данный контур не может быть выбран как третий независимый. Действительно, если из полученного уравнения $E = R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_I$ вычесть уравнение $E = R_1 I_1 + R_2 I_2$, то как раз получим $0 = R_3 I_3 - U_I - R_2 I_2$.

Пример 2 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Поэтому в качестве третьего контура выберем:



$$U_I + R_4 I_4 = 0$$

Приведем полученные уравнения к канонической форме:

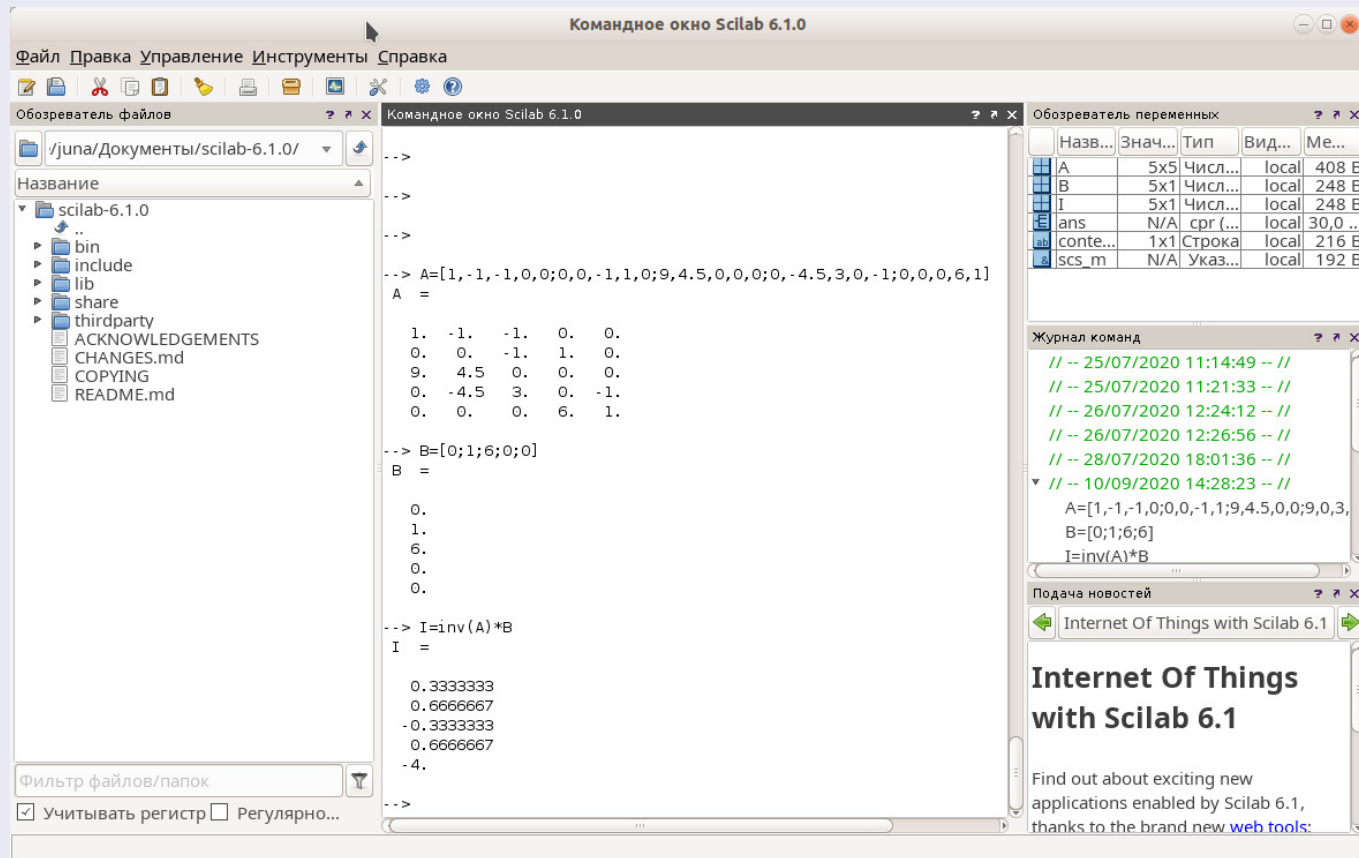
$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot U_I = 0 \\ 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - I_3 + I_4 + 0 \cdot U_I = I \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot U_I = E \\ 0 \cdot I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + 0 \cdot I_4 - U_I = 0 \\ 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 + U_I = 0 \end{cases}$$

Пример 2 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Подставим числовые значения и проведем расчет в среде Scilab:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot U_I = 0 \\ 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - I_3 + I_4 + 0 \cdot U_I = 1 \\ 9I_1 + 4.5I_2 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot U_I = 6 \\ 0 \cdot I_1 - 4.5I_2 + 3I_3 + 0 \cdot I_4 - U_I = 0 \\ 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 6 \cdot I_4 + U_I = 0 \end{cases}$$

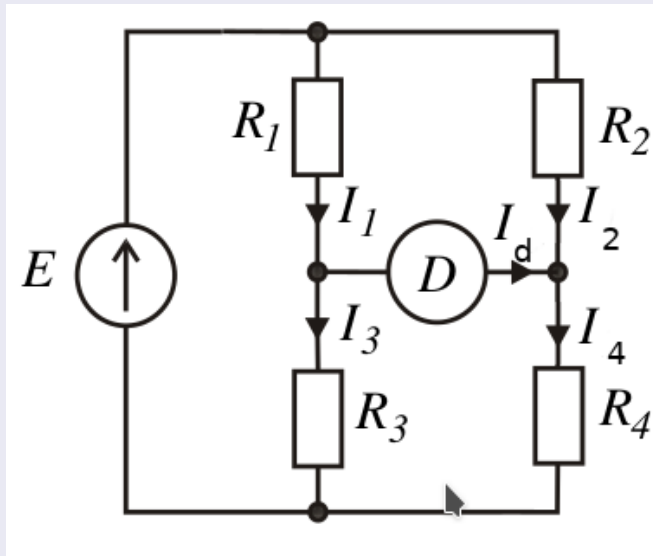
Пример 2 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа



Обратите внимание, последнее значение -4 - это напряжение на источнике тока. Ток I_4 можно выразить по закону Ома $U_I = I_4 R_4 \Rightarrow I_4 = \frac{U_I}{R_4} = \frac{-4}{6} = -0.67 A$. Отрицательное значение говорит о несовпадении выбранного направления тока с действительным направлением в схеме.

Пример 3 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Рассмотрим еще один важный с точки зрения приложений пример - мостовая схема.



Выяснить условия, при которых индикатор D (внутреннее сопротивление близко к нулю) показывает ток $I_D = 0A$.

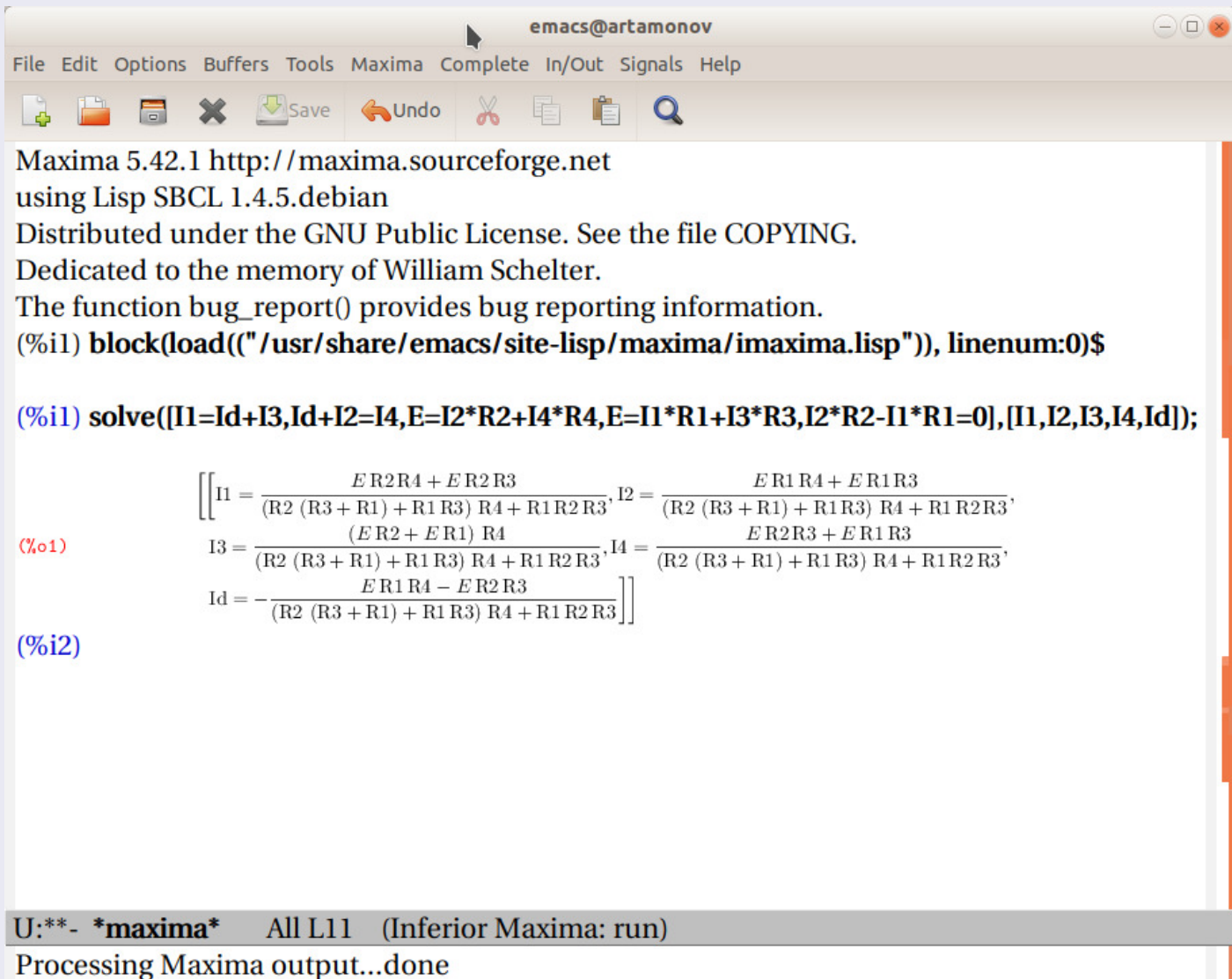
Пример 3 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 = I_d + I_3 \\ I_4 = I_d + I_2 \\ E = I_2 R_2 + I_4 R_4 \\ E = I_1 R_1 + I_3 R_3 \\ 0 = I_2 R_2 - I_1 R_1 \end{cases}$$

Для нахождения символьного результата очень удобно использовать среду Maxima.

Пример 3 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа



```
emacs@artamonov
File Edit Options Buffers Tools Maxima Complete In/Out Signals Help
Save Undo
Maxima 5.42.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp SBCL 1.4.5.debian
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) block(load("/usr/share/emacs/site-lisp/maxima/imaxima.lisp")), linenum:0)$

(%i1) solve([I1=Id+I3,Id+I2=I4,E=I2*R2+I4*R4,E=I1*R1+I3*R3,I2*R2-I1*R1=0],[I1,I2,I3,I4,Id]);

(%o1)

$$\left[ \begin{aligned} I_1 &= \frac{E R_2 R_4 + E R_2 R_3}{(R_2 (R_3 + R_1) + R_1 R_3) R_4 + R_1 R_2 R_3}, I_2 = \frac{E R_1 R_4 + E R_1 R_3}{(R_2 (R_3 + R_1) + R_1 R_3) R_4 + R_1 R_2 R_3}, \\ I_3 &= \frac{(E R_2 + E R_1) R_4}{(R_2 (R_3 + R_1) + R_1 R_3) R_4 + R_1 R_2 R_3}, I_4 = \frac{E R_2 R_3 + E R_1 R_3}{(R_2 (R_3 + R_1) + R_1 R_3) R_4 + R_1 R_2 R_3}, \\ I_d &= -\frac{E R_1 R_4 - E R_2 R_3}{(R_2 (R_3 + R_1) + R_1 R_3) R_4 + R_1 R_2 R_3} \end{aligned} \right]$$


(%i2)

U:**- *maxima* All L11 (Inferior Maxima: run)
Processing Maxima output...done
```

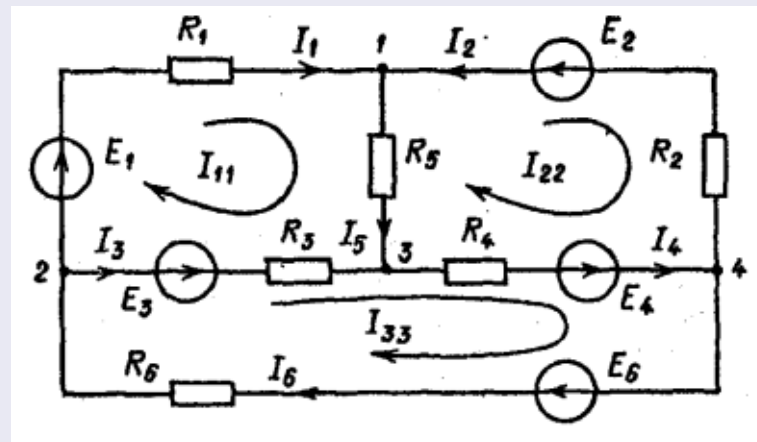
Пример 3 расчета цепей постоянного тока на основе законов Кирхгофа

Из полученного результата видно, что необходимым условием $I_d = 0$ является соотношение $R_1 R_4 - R_2 R_3 = 0$. Это условие и называется условием равновесия моста. Данная схема носит название моста Уитстона и используется для измерения сопротивлений. Если R_4 - неизвестное сопротивление, а R_1, R_2, R_3 - регулировочные сопротивления, то для определения R_4 необходимо регулировать R_1, R_2, R_3 до тех пор, пока ток через индикатор D не станет равен нулю. Тогда неизвестное сопротивление определяется из соотношения:

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

Метод контурных токов

При расчете сложной электрической цепи с использованием законов Кирхгофа решения получаются громозкими из-за большого числа уравнений. Это количество можно сократить, если ввести в рассмотрение так называемые контурные токи, обтекающие выбранные независимые контуры. Рассмотрим этот метод на примере следующего рисунка.



Контурный ток является одинаковым для всех ветвей рассматриваемого контура. Чтобы отличать контурные токи от токов ветвей, часто их индексация проводится двойными цифрами, как показано на рисунке. Из рисунка имеем следующие соотношения между контурными токами и токами ветвей:

$$I_1 = I_{11}, I_2 = -I_{22}, I_6 = I_{33}$$

Токи внутренних ветвей, относящиеся к двум смежным контурам, находим как алгебраическую сумму контурных токов, протекающих по этим ветвям:

$$I_5 = I_{11} - I_{22}, I_3 = I_{33} - I_{11}, I_4 = I_{33} - I_{22}.$$

Теперь остается вместо шести величин найти три величины - контурные токи I_{11}, I_{22}, I_{33} . Для этого вводится ряд дополнительных понятий.

Контурной ЭДС называют алгебраическую сумму всех ЭДС данного контура:

$$E_{11} = E_1 - E_3, E_{22} = -E_2 - E_4, E_{33} = E_3 + E_4 + E_6$$

Сумма сопротивлений ветвей, образующих контур, называется собственным сопротивлением контура. Собственные сопротивления контуров также обозначаются двойными одинаковыми индексами:

$$R_{11} = R_1 + R_3 + R_5, R_{22} = R_2 + R_4 + R_5, R_{33} = R_3 + R_4 + R_6$$

Сопротивление ветви, принадлежащей двум смежным контурам, называют общим сопротивлением контуров. Их обозначают двойными индексами по номерам смежных контуров. В нашем примере сопротивление R_5 расположено на границе первого и второго контуров $R_{12} = R_{21} = R_5$.

Используя введенные понятия, составляется система контурных уравнений. Каждое контурное уравнение составляется по правилу: контурная ЭДС равна сумме падений напряжения на собственных и общих сопротивлениях контуров при протекании контурных токов. Используя это правило, составим три уравнения в нашей задаче:

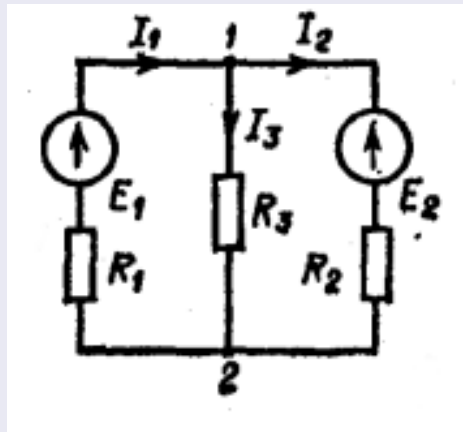
$$E_{11} = R_{11}I_{11} - R_{12}I_{22} - R_{13}I_{33}$$

$$E_{22} = -R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} - R_{23}I_{33}$$

$$E_{33} = -R_{31}I_{11} - R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33}$$

Пример использования метода контурных токов

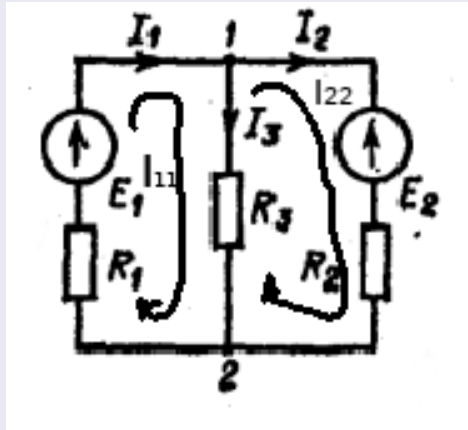
Рассмотрим задачу из примера 1:



$$R_1 = 10 \text{ Ом}, R_2 = 20 \text{ Ом}, R_3 = 30 \text{ Ом}, E_1 = 5 \text{ В}, E_2 = 3 \text{ В}$$

Пример использования метода контурных токов

На следующем рисунке введены контурные токи



Имеем:

$$E_{11} = E_1 = 5, E_{22} = -E_2 = -3$$

$$R_{11} = R_1 + R_3 = 40, R_{22} = R_2 + R_3 = 50, R_{12} = R_{21} = R_3 = 30$$

$$I_1 = I_{11}, I_2 = I_{22}, I_3 = I_{11} - I_{22}$$

Составим систему уравнений по методу контурных токов:

$$E_{11} = R_{11}I_{11} - R_{12}I_{22}$$

$$E_{22} = -R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22}$$

Подставляя численные значения, имеем: $5 = 40I_{11} - 30I_{22}$, $-3 = -30I_{11} + 50I_{22}$.
Теперь уже легко найти $I_{11} = I_1 = \frac{8}{55} \approx 0.145$, $I_{22} = I_2 = \frac{3}{110} \approx 0.027$, $I_3 = \frac{8}{55} - \frac{3}{110} = \frac{13}{110} \approx 0.118$