Переходные процессы в электрических цепях

Содержание

Емкостный элемент

До сих пор мы рассматривали только резистивные цепи. Поскольку в резистивных цепях связь между напряжением и током описывается в виде линейной зависимости, то для нахождения токов ветвей электрических цепей приходилось решать систему линейных алгебраических уравнений. Однако существуют элементы, для которых связь между напряжением и током описывается дифференциальным соотношением. Для расчета параметров таких электрических цепей приходится решать дифференциальные уравнения.

Одним из таких элементов является **емкостный элемент**, поведение которого определяется зависимостью между напряжением u_c и зарядом Q. Для линейного емкостного элемента эта зависимость линейна: $u_c = \frac{1}{C}Q$, где C - некоторое постоянное значение. Известно, что соотношение между током и зарядом имеет вид:

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Тогда получаем:

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_c}{dt} \Leftrightarrow u_c = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t)dt + u_c(0)$$

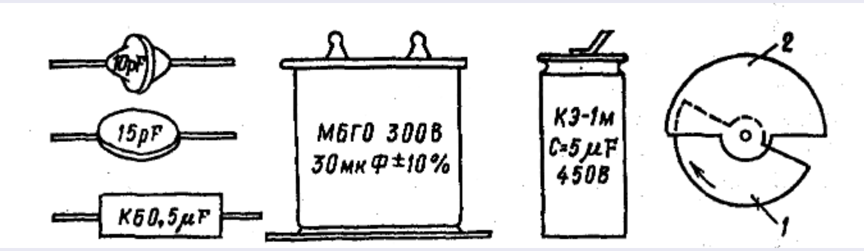
Последние уравнения являются основными соотношениями между напряжением и током для емкостного элемента.

Емкостный элемент

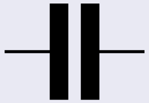
Технически емкостные элементы изготавливают в промышленности в виде специальных устройств, называемых конденсаторами. Конденсатор представляет собой две заряженные пластины, пространство между которыми заполнено диэлектриком, причем вне пространства диэлектрика электрическое поле практически отсутствует. Основная характеристика конденсатора - его емкость, которая определяется величиной C - равна отношению заряда конденсатора к напряжению на его пластинах.

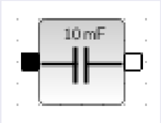
Емкость измеряется в Фарадах: [1Ф]=[1 Кл]/[1 В].

На рисунке показан внешний вид промышленных конденсаторов.



На схемах, а также в scilab конденсаторы обозначаются следующим образом:





Если напряжение постоянно, то ток идеального конденсатора равен нулю. Иными словами, емкостный элемент представляет разрыв цепи при постоянном напряжении на его зажимах.

Емкостный элемент

В электрических цепях происходит преобразование электромагнитной энергии на активных сопротивлениях в тепло. В тоже время емкостный элемент запасает электрическую энергию:

$$W_э = \frac{1}{2} C u_c^2$$

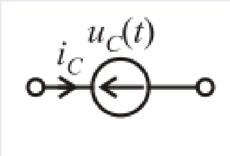
где C - емкость элемента, u_c - напряжение на обкладках конденсатора.
Скорость изменения электрической энергии определяет можность:

$$p_э(t) = C u_c \cdot \frac{du_c}{dt}$$

Мощность равна нулю, если напряжение постоянно, а любое изменение энергии электрического поля всегда связано с изменением напряжения.

$$p_э(t) = u_с(t) i(t) = C u_c \cdot \frac{du_c}{dt} \Rightarrow i(t) = C \frac{du_c}{dt}$$

Это совпадает с полученными ранее соотношениями. Напряжение емкостного элемента при $C = const$ не может изменяться скачком, т. е. в момент времени t имеем $u_c(t_-) = u_c(t_+)$. Таким образом, в момент t емкостный элемент эквивалентен источнику напряжения:



Индуктивный элемент

Индуктивный элемент запасает энергию магнитного поля: $w_м = \frac{Li^2}{2}$, где L - некоторая постоянная величина (индуктивность). Мощность магнитного поля - это скорость изменения энергии магнитного поля:

$$p_м(t) = \frac{dw_м(t)}{dt} = Li \cdot \frac{di}{dt}$$

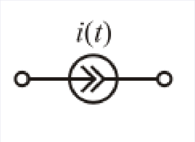
Так как мгновенная мощность всегда выражается через произведение тока на напряжение $p_м = u_L \cdot i$, получаем:

$$u_L \cdot i = Li \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow u_L = L \cdot \frac{di}{dt}, i = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t)dt + i(0)$$

Последние уравнения являются основными соотношениями между напряжением и током для индуктивного элемента.

Напряжение индуктивного элемента зависит не от величины тока, а от скорости его изменения. Если ток постоянный, напряжение на зажимах индуктивного элемента равно нулю. Это эквивалентно короткому замыканию выводов элемента.

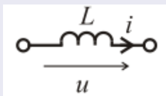
При неизменной индуктивности L ток индуктивного элемента не может изменяться скачком. Иными словами, в любой момент времени t имеем $i_L(t_-) = i_L(t_+)$. Таким образом, в момент t индуктивный элемент эквивалентен источнику тока:

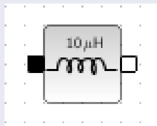


Индуктивный элемент

Индуктивные элементы являются идеальными элементами (моделями) от реально изготавливаемых в промышленности *катушек индуктивности*. На рисунке показан внешний вид таких элементов.

В электрических схемах индуктивные элементы обозначаются следующим образом:





Основной характеристикой катушек индуктивности является их индуктивность L, которая измеряется в Генри: [1 Гн]=[1Дж/1A^2]

Понятие переходных процессов

В электрических цепях могут происходить включения или отключения отдельных ветвей либо внезапные изменения входного воздействия. Такие изменения называют коммутациями. Считают, что коммутация осуществляется с помощью идеального ключа. Идеальный ключ представляет двухполюсник, сопротивление которого равно нулю, если ключ замкнут, и равно бесконечности, если ключ разомкнут. Время замыкания или размыкания ключа считают бесконечно малым.

В резистивных цепях, которые содержат только элементы, описываемые алгебраическими уравнениями, переход из одного состояния в другое происходит мгновенно.

Однако в цепях с индуктивными и емкостными элементами переходный процесс мгновенно завершиться не может.

В общем случае справедливо следующее утверждение (закон коммутации): *в начальный момент после коммутации токи индуктивных элементов и напряжения емкостных элементов остаются такими же, какими они были перед коммутацией, а затем плавно изменяются:*

$$i_L(t_-) = i_L(t_+), u_c(t_-) = u_c(t_+)$$

Напряжения индуктивных и токи емкостных элементов, так же как напряжения и токи резистивных элементов могут изменяться скачком.

Понятие начальных условий

Значения тока индуктивного и напряжения емкостного элементов в момент коммутации называют независимыми начальными условиями. Именно эти токи и напряжения, а также независимые источники, определяют режим цепи в первый момент после коммутации. Если в момент коммутации токи всех индуктивных и напряжения всех емкостных элементов равны нулю, то соответствующие начальные условия называют нулевыми. В противном случае начальные условия являются ненулевыми.

При t_{0^+} индуктивный элемент можно заменить независимым источником тока, а емкостный – источником напряжения. Такая замена упрощает расчет послекоммутационного режима, поскольку мы получаем резистивную цепь, описываемую алгебраическими уравнениями. При нулевых начальных условиях емкостный элемент эквивалентен короткому замыканию, а индуктивный – разрыву.

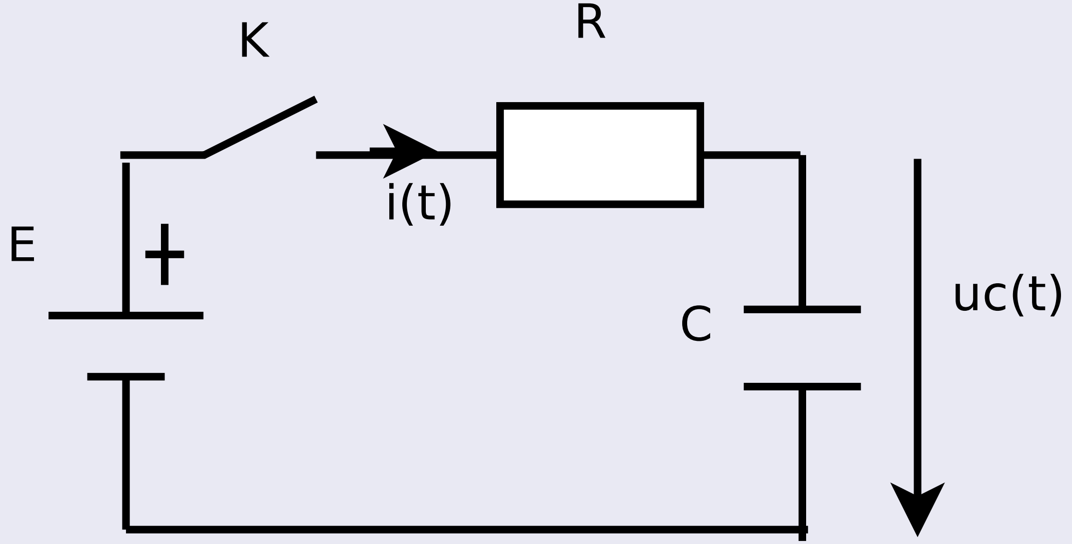
Характер переходных процессов зависит от многих факторов, в частности от числа индуктивных и емкостных элементов, конфигурации цепи, формы токов и напряжений источников и т. д.

Особенности переходных процессов

В отдельных случаях переходные процессы могут сопровождаться нежелательными явлениями. На отдельных участках цепи могут возникать повышенные напряжения или наблюдаться увеличение токов. Расчет и изучение переходных процессов позволяют разработать меры по уменьшению длительности и интенсивности таких явлений. Однако в цепях, которые служат для передачи и обработки информации, переходный режим является основным. Поэтому изучение методов расчета переходных процессов имеет исключительно важное значение для правильного понимания процессов передачи и преобразования информации, принципов работы узлов ЭВМ и систем автоматического управления.

Рассмотрим ряд типовых пример схем с индуктивными и емкостными элементами, в которых возникают переходные процессы. Наиболее простые случаи - это наличие в цепи либо только одного емкостного элемента, либо только одного индуктивного элемента. В этом случае работа схемы в режиме коммутации описывается дифференциальными уравнениями первого порядка. Рассмотрим ряд типовых примеров анализа таких схем.

Пример последовательного соединения емкостного и резистивного элементов



Для схемы, изображенной на рисунке, при нулевых начальных условиях $u_c(t) = 0_{|t=0}$ в момент времени $t = 0$ замыкают ключ K. Требуется определить напряжение на конденсаторе $u_c(t)$ как функцию времени.

Пример последовательного соединения емкостного и резистивного элементов

Для расчета переходного процесса используем известные соотношения:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

Второй закон Кирхгофа:

$$E = i(t)R + u_c(t)$$

Тогда окончательно получаем:

$$u_c(t) + RC \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = E$$

Данное дифференциальное уравнение можно решить методом разделения переменных:

$$RC \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = E - u_c(t) \Rightarrow \frac{du_c(t)}{E - u_c(t)} = \frac{1}{RC} \cdot dt$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int_0^t \frac{du_c(t)}{E - u_c(t)} = \frac{1}{RC} \cdot \int_0^t dt$$

Пример последовательного соединения емкостного и резистивного элементов

$$-\int\limits_0^t \frac{d(E-u_c(t))}{E-u_c(t)} = \frac{t}{RC}$$

Используя табличный интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, получаем:

$$\ln|E-u_c(t)|\big|_0^t = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln|E-u_c(t)| - \ln|E| = \ln\frac{|E-u_c(t)|}{|E|} = -\frac{t}{RC}$$

$$e^{\ln\frac{|E-u_c(t)|}{|E|}} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \frac{|E-u_c(t)|}{|E|} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

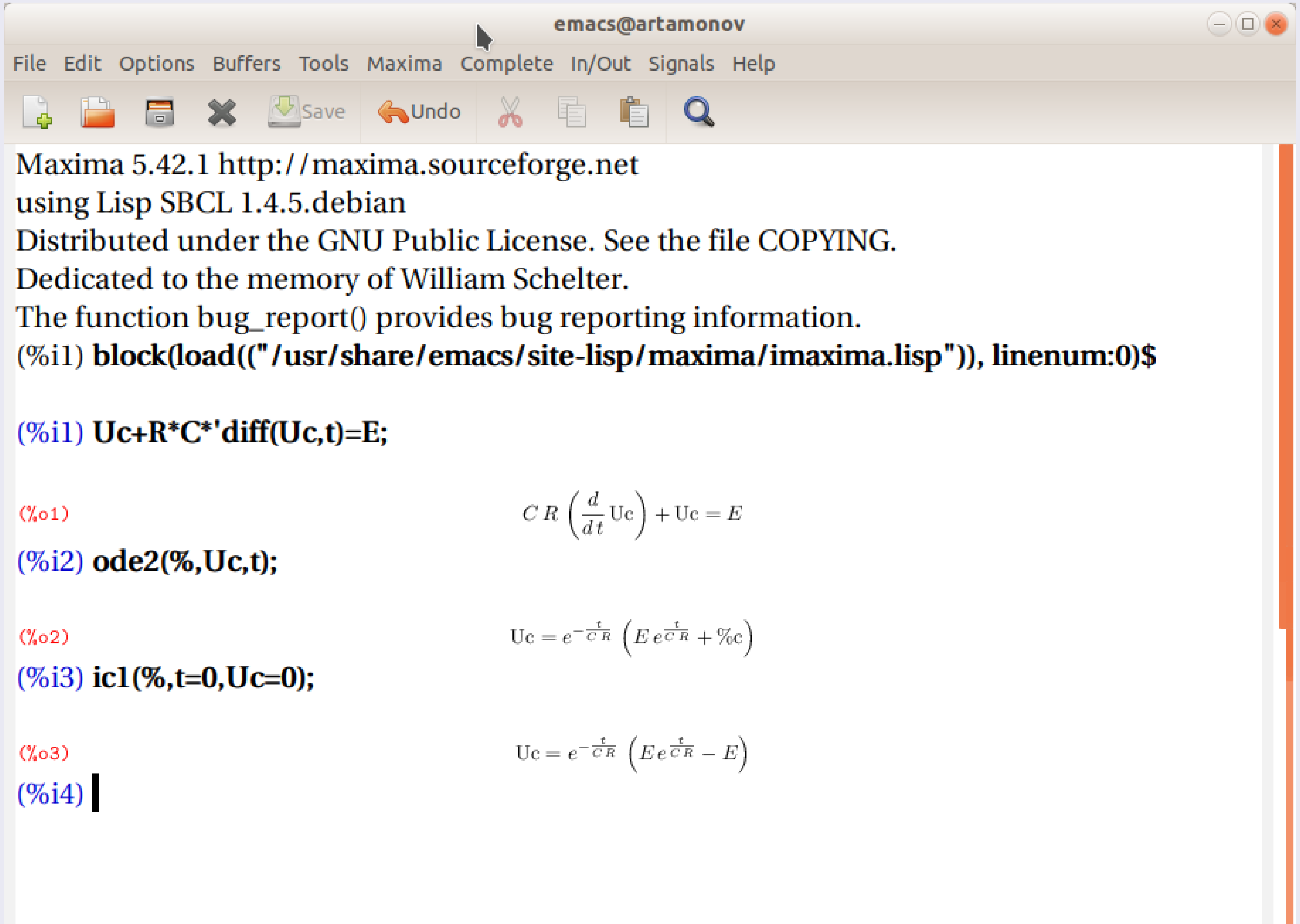
Окончательно получаем:

$$(E-u_c(t)) = E\cdot e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow u_c(t) = E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Переходные процессы в цепях первого порядка

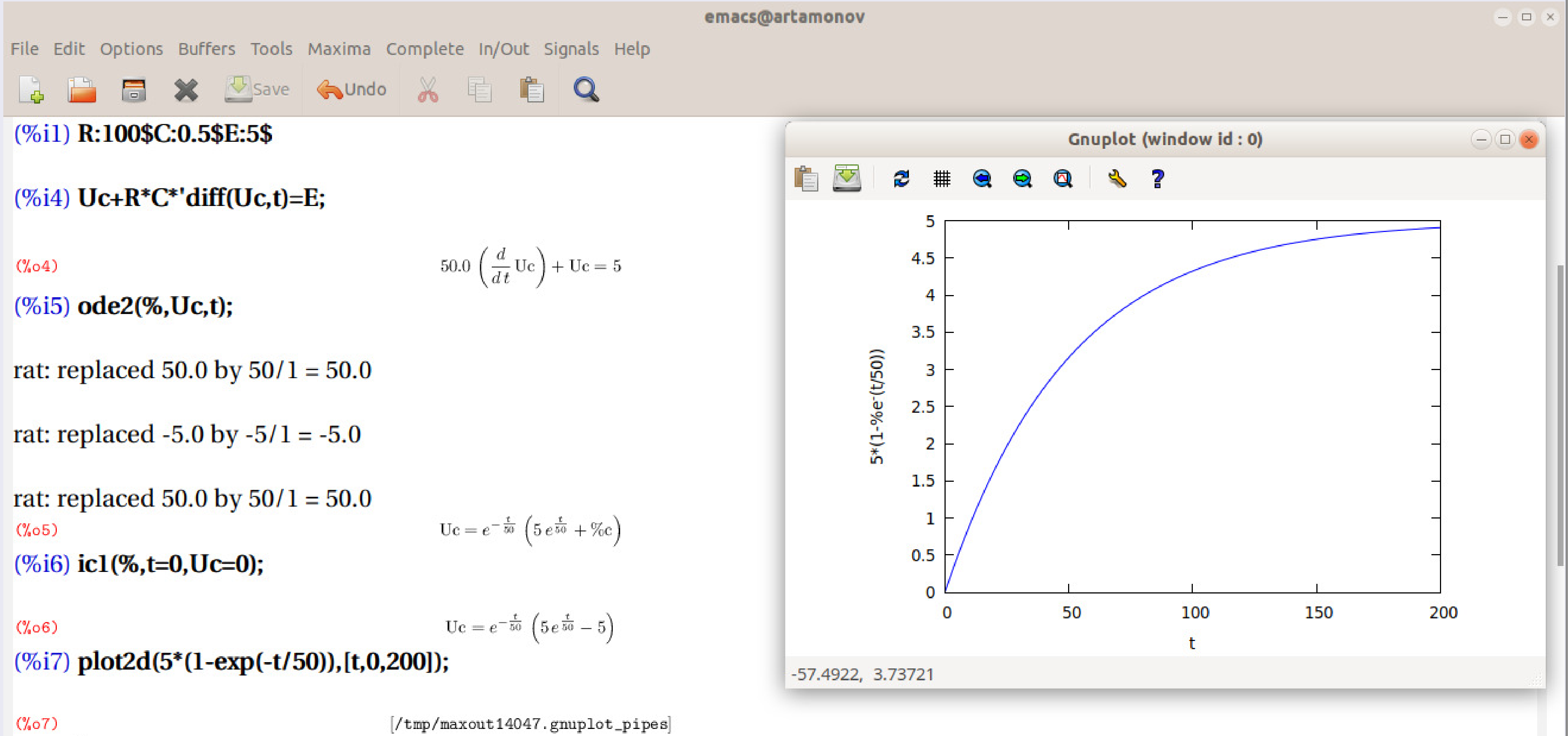
Пример последовательного соединения емкостного и резистивного элементов

Для нахождения символьного решения полученного нами дифференциального уравнения $u_c(t) + RC \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = E$ удобно также использовать систему maxima:



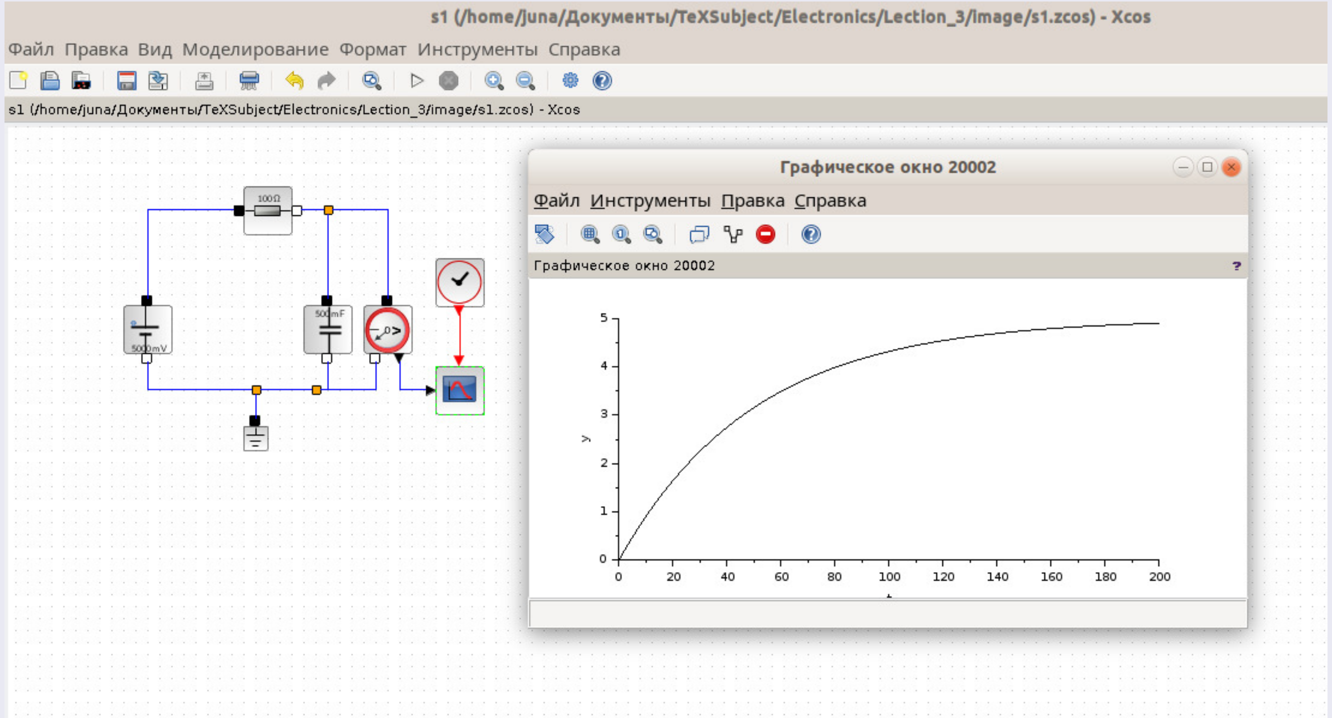
Пример последовательного соединения емкостного и резистивного элементов

Можно также провести расчет к конкретными значениями параметров и даже построить график зависимости:



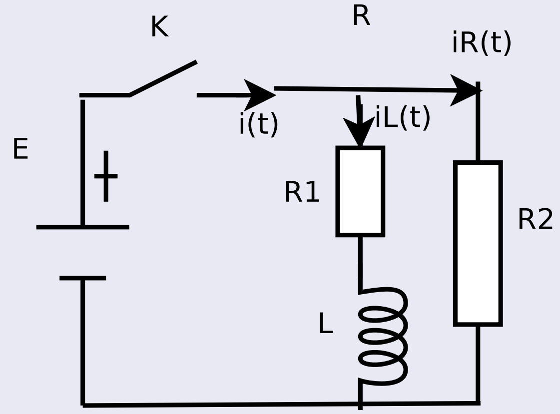
Пример последовательного соединения емкостного и резистивного элементов

А теперь проведем моделирование в xcos scilab:



Зная напряжение на конденсаторе, можно найти ток, используя соотношение $i(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$. Из последнего соотношения видно, что ток в цепи при $t \to \infty$ стремится к нулю, а сам конденсатор заряжается до напряжения источника питания. Это соответствует утверждению, что после завершения переходных процессов конденсатор становится эквивалентен разрыву провода.

Пример параллельного соединения индуктивного и резистивного элементов



Для схемы, изображенной на рисунке, при нулевых начальных условиях $i_L(t) = 0_{|t=0}$ в момент времени $t = 0$ замыкают ключ K. Требуется определить ток в катушке индуктивности $i_L(t)$ как функцию времени, а также $i_R(t), i(t)$.

Пример параллельного соединения индуктивного и резистивного элементов

Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$i(t) = i_L(t) + i_R(t)$$

По второму закону Кирхгофа:

$$E = R_1 i_L(t) + u_L(t), E = i_R(t) \cdot R_2, u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Выполним необходимые преобразования:

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + R_1 i_L(t) = E$$

$$i_R(t) = \frac{E}{R_2}$$

Как видно, для нахождения тока $i_L(t)$ требуется решить дифференциальное уравнение.

Пример параллельного соединения индуктивного и резистивного элементов

Решим полученное дифференциальное уравнение (оно в целом повторяет д.у. предыдущего примера):

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + R_1 i_L(t) = E \Rightarrow L\frac{di_L(t)}{dt} = E - R_1 i_L(t) \Rightarrow \frac{di_L(t)}{E - R_1 i_L(t)} = \frac{dt}{L}$$

$$\int_0^t \frac{di_L(t)}{E - R_1 i_L(t)} = \frac{t}{L} \Rightarrow -\frac{1}{R_1}\int_0^t \frac{d(E - R_1 i_L(t))}{E - R_1 i_L(t)} = \frac{t}{L}$$

$$\int_0^t \frac{d(E - R_1 i_L(t))}{E - R_1 i_L(t)} = -\frac{R_1 t}{L} \Rightarrow \ln\left|E - R_1 i_L(t)\right|\Big|_0^t = -\frac{R_1 t}{L}$$

$$\ln\left|E - R_1 i_L(t)\right|\Big|_0^t = \ln\left|E - R_1 i_L(t)\right| - \ln\left|E - R_1 \cdot 0\right| = \ln\frac{|E - R_1 i_L(t)|}{|E|} = -\frac{R_1 t}{L}$$

$$\frac{|E - R_1 i_L(t)|}{|E|} = e^{-\frac{R_1 t}{L}} \Rightarrow i_L(t) = \frac{E}{R_1}\cdot\left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}}\right)$$

В последнем выражении при $t \to \infty$ получим $i_L(t) = \frac{E}{R_1}$, что соответствует утверждению, что при постоянном токе катушка индуктивности эквивалентна короткому замыканию ее контактов.

Пример параллельного соединения индуктивного и резистивного элементов

Находим остальные параметры электрической цепи:

$$i(t) = \frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}}\right) = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{E}{R_1} \cdot e^{-\frac{R_1 t}{L}}$$

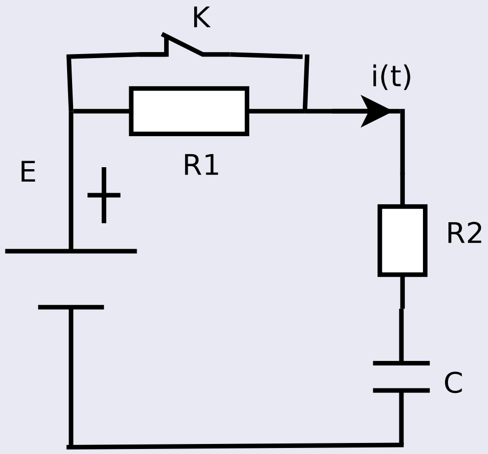
Также можно найти напряжение на индуктивном элементе:

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}}\right)\right) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R_1}\right) - \frac{EL}{R_1}\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{R_1 t}{L}}\right) = 0 + E \cdot e^{-\frac{R_1 t}{L}}$$

$$u_L(t) = E \cdot e^{-\frac{R_1 t}{L}}$$

Из последнего выражения при $t \to \infty$ напряжение на индуктивном элементе $u_L(t) \to 0$

Пример при ненулевых начальных условиях



В начальный момент времени $t = 0$ ключ K является нормально замкнутым, а через две секунды размыкается. Необходимо определить ток через конденсатор, как функцию времени. Провести расчеты и моделирование при численных значениях: $E = 50$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $C = 0.05$ Ф.

Пример при ненулевых начальных условиях

В начальный момент времени и далее в течение двух секунд схема эквивалентна схеме первого примера с полученным там решением:

$$i(t) = \frac{E}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}} = \frac{5}{3} e^{-\frac{2t}{3}}, i(t = 2_-) \approx 0.44 \text{ А}$$

$$u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{R_2 C}}\right) = 50(1 - e^{-\frac{2t}{3}}), u_c(t = 2_-) \approx 36.82 \text{ В}$$

По законам коммутации

$$u_c(t = 2_-) = u_c(t = 2_+) \approx 36.82 \text{ В}$$

Это и есть ненулевые начальные условия для момента времени $t = 2_+$. В этот момент времени структура схемы меняется и суммарное сопротивление становится равно $R_1 + R_2$. В остальном схема остается эквивалентна схеме из первого примера, однако при ненулевых начальных условиях:

$$\ln|E - u_c(t)|\big|_{2_+}^{t} = -\frac{t}{(R_1 + R_2)C} + \frac{2}{(R_1 + R_2)C} \Rightarrow$$

$$\ln|E - u_c(t)| - \ln|E - u_c(t = 2_+)| = \ln\frac{|E - u_c(t)|}{|E - u_c(t = 2_+)|} = -\frac{t}{(R_1 + R_2)C} + \frac{2}{(R_1 + R_2)C} \Rightarrow$$

$$u_c(t) = E - (E - u_c(t = 2_+))e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C} + \frac{2}{(R_1+R_2)C}}$$

Пример при ненулевых начальных условиях

$$u_c(t) = 50 - (50 - 36.82)e^{-\frac{t}{2}+1} = 50(1 - e^{-\frac{t}{2}+1}) + 36.82e^{-\frac{t}{2}+1}$$

$$u_c(t = 2_+) = 36.82 \text{ В}$$

$$i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} = 0.05 \cdot \left(25e^{-t/2+1} - 18.41e^{-t/2+1}\right) = 0.05 \cdot 6.59 \cdot e^{-t/2+1},$$

$$i_c(t = 2_+) = 0.05 \cdot 6.59 \cdot e^{-0} \approx 0.33 \text{ А}$$

Как видно из расчетов, напряжение продолжает меняться непрерывно, ток меняется скачком с 0.44 А до 0.33 А. Построим графики данных функций в maxima, а также проведем моделирование в scilab.

Пример при ненулевых начальных условиях

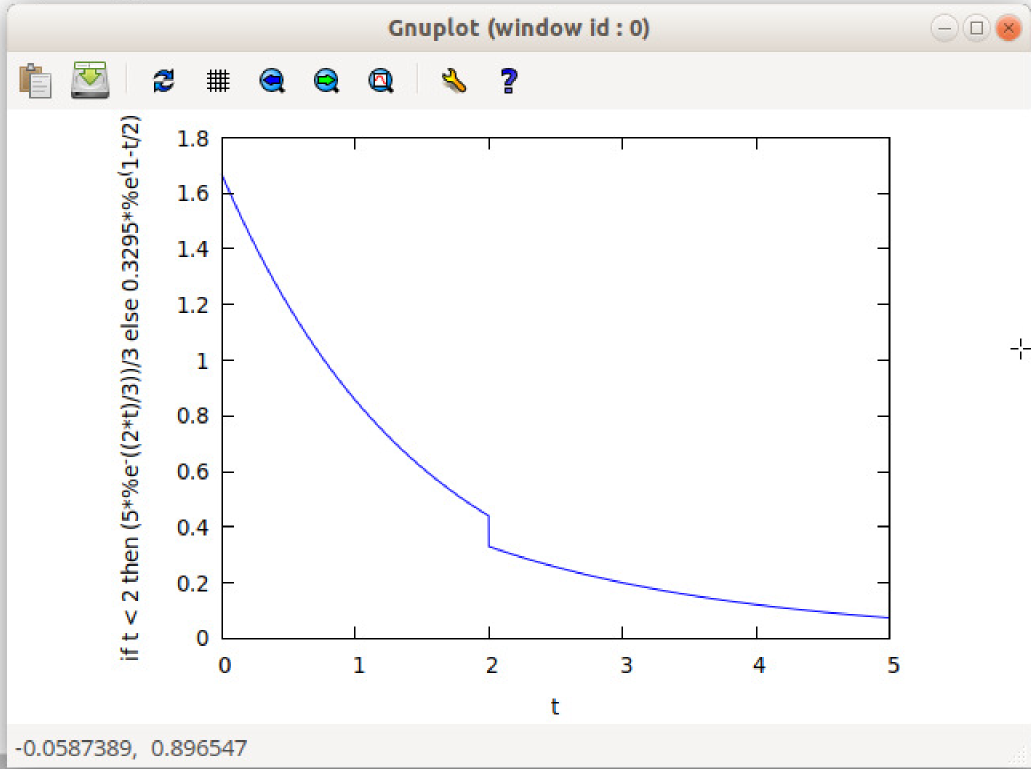
(%i7) **i(t):=block(if t<2 then 5/3*exp(-2/3*t) else 0.05*6.59*exp(-t/2+1));**

(%o7) $i(t) := \mathbf{block}\left(\mathbf{if}\ t < 2\ \mathbf{then}\ \frac{5}{3}\exp\left(\frac{-2}{3}t\right)\ \mathbf{else}\ 0.05\,6.59\exp\left(\frac{-t}{2}+1\right)\right)$

(%i8) **plot2d(i(t),[t,0,5]);**

(%o8) [/tmp/maxout19135.gnuplot_pipes]

(%i9)



U:**- ***maxima*** Bot L32 (Inferior Maxima: run)

Пример при ненулевых начальных условиях

emacs@artamonov

File Edit Options Buffers Tools Maxima Complete In/Out Signals Help

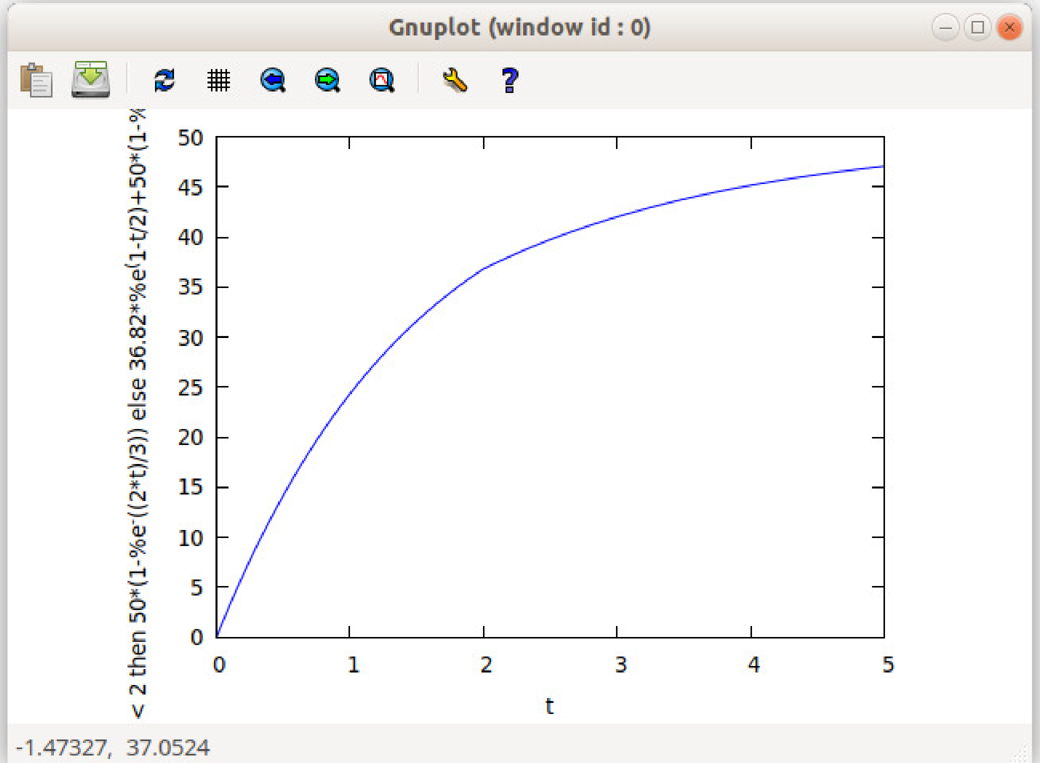
(%i9) **uc(t):=block(if t<2 then 50*(1-exp(-2/3*t)) else 50*(1-exp(-t/2+1))+36.82*exp(-t/2+1));**

(%o9) $$\mathrm{uc}(t) := \mathbf{block}\left(\mathbf{if}\ t < 2\ \mathbf{then}\ 50\left(1-\exp\left(\frac{-2}{3}t\right)\right)\ \mathbf{else}\ 50\left(1-\exp\left(\frac{-t}{2}+1\right)\right)+36.82\exp\left(\frac{-t}{2}+1\right)\right)$$

(%i10) **plot2d(uc(t),[t,0,5]);**

(%o10) [/tmp/maxout19135.gnuplot_pipes]

(%i11)



U:** *maxima* Bot L38 (Inferior Maxima: run)

Пример при ненулевых начальных условиях