С. Д. Шапорев

$$C = A \setminus B = \{x \in C / (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \overline{B}$$

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

$$C = A \oplus B$$

- *Знакомство с теорией множеств*
- *Основные задачи и методы комбинаторного анализа*
- *Оптимизационные алгоритмы теории графов*
- *Сетевые модели и методы*
- *400 задач с решениями*

$$\mathrm{id}_A = \{(x,x) / x \in A\}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\widehat{P}(n,r)$$

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv®

С. Д. Шапорев

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Допущено научно-методическим советом по математике вузов Северо-Запада в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальностям 220200 "Автоматизированные системы обработки информации и управления", 071900 "Информационные системы в технике и технологиях"

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2006

УДК 681.3.06+519.6(075.8)
ББК 32.973я73
Ш24

Шапорев С. Д.

Ш24 Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 400 с.: ил.

ISBN 5-94157-703-6

Рассмотрены вопросы трех разделов, изучаемых в курсе дискретной математики: теории множеств, комбинаторики и теории графов. Изложены основные теоретические сведения и приведены многочисленные примеры решения задач по всем разделам. Для теории множеств обсуждена основная система аксиом, ее модификации и перспективы дальнейшего развития теории на основе аксиоматического метода. Рассмотрены основные типы задач комбинаторики, основанные на 4-х схемах выбора элементов множеств. Приведены основные наиболее употребительные оптимизационные алгоритмы теории графов, алгоритмы сетевого планирования и варианты заданий для выполнения контрольных и расчетно-графических работ.

Для студентов, аспирантов и преподавателей технических вузов

УДК 681.3.06+519.6(075.8)
ББК 32.973я73

Рецензенты:
Попов М. С. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Балтийского государственного технического университета "Военмех" (БГТУ)
Дегтярев В. Г. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Петербургского государственного университета путей сообщения (ПГУПС)

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. гл. редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Наталья Довгулевич*
Компьютерная верстка	*Натальи Караваевой*
Корректор	*Виктория Пиотровская*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 26.10.05.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 32,25.
Тираж 3000 экз. Заказ № 4382
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-703-6

© Шапорев С. Д., 2006
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2006

Оглавление

ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КУРСА 1

Глава 1. Элементы теории множеств 3

1.1. Множества и действия над ними 3
1.2. Отношения и функции. Специальные бинарные отношения 8
1.3. Практическое занятие 1. Операции над множествами. Отношения и функции 17
1.4. Эквивалентные, конечные и бесконечные множества 20
1.5. Практическое занятие 2. Кардинальные числа 26
1.6. Аксиомы теории множеств 27

Глава 2. Комбинаторика 33

2.1. Основные определения комбинаторного анализа 33
2.2. Правило суммы и правило произведения 35
2.3. Формулы для расчета перестановок и сочетаний без повторений и с повторениями 37
2.4. Бином Ньютона и полиномиальная теорема 40
2.4.1. Бином Ньютона 40
2.4.2. Полиномиальная теорема 41
2.5. Практическое занятие 3. Правила суммы и произведения. Перестановки и сочетания. Свойства биномиальных коэффициентов 43
2.6. Метод рекуррентных соотношений 46
2.7. Метод производящих функций 50
2.8. Производящие функции для некоторых схем выбора 54
2.8.1. Производящая функция для (n,r)-сочетаний с ограниченным числом повторений 54
2.8.2. Производящая функция для (n,r)-сочетаний с неограниченным числом повторений 56
2.9. Применение производящих функций для получения комбинаторных чисел 56
2.10. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения 59
2.11. Экспоненциальные производящие функции 65
2.12. О приложениях теории производящих функций к теории вероятностей 66
2.13. Практическое занятие 4. Производящие функции и рекуррентные соотношения 67
2.14. Метод включений и исключений 70
2.15. Учет весов элементов в формуле включений и исключений 75
2.16. Функция Эйлера 79
2.17. Функция Мебиуса 85
2.18. Практическое занятие 5. Формула включений и исключений 86

Глава 3. Теория графов 89

3.1. Основные понятия и определения 89
3.2. Операции над графами 92
3.3. Маршруты, цепи, циклы 95
3.4. Способы задания графов 97

3.5. Метрические характеристики графа ... 103
3.6. Упорядочивание дуг и вершин орграфа ... 104
3.7. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер ... 108
3.8. Определение экстремальных путей на графах. Метод Шимбелла ... 111
3.9. Практическое занятие 6. Способы задания графов. Операции над графами. Метрические характеристики графов. Упорядочивание элементов орграфов ... 112
3.10. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры ... 116
3.11. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Беллмана—Мура ... 120
3.12. Алгоритм нахождения максимального пути ... 125
3.13. Особенности алгоритмов теории графов ... 127
3.14. Практическое занятие 7. Нахождение минимальных и максимальных путей на орграфах ... 128
3.15. Деревья (основные определения) ... 135
3.16. Задача об остове экстремального веса ... 139
3.17. Обходы графов. Фундаментальные циклы ... 142
3.18. Клики, независимые множества ... 147
3.19. Практическое занятие 8. Остовы графов, фундаментальные циклы. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Доминирующие множества и клики ... 151
3.20. Планарность графов ... 157
3.21. Алгоритм укладки графа на плоскости ... 160
3.22. Хроматические графы. Раскраски графов ... 166
3.23. Практическое занятие 9. Планарные и хроматические графы ... 172
3.24. Потоки в сетях ... 174
3.25. Теорема Форда—Фалкерсона ... 175
3.26. Поток минимальной стоимости ... 178
3.27. Элементы сетевого планирования. Критические пути, работы, резервы ... 187
3.28. Линейные графики ... 193
3.29. Практическое занятие 10. Потоки в сетях. Сетевые и линейные графики ... 198

ЧАСТЬ II. ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ ... 239

Глава 4. Теория множеств ... 241

4.1. Ответы и решения задач практического занятия 1 ... 241
4.2. Ответы и решения задач практического занятия 2 ... 254

Глава 5. Комбинаторика ... 259

5.1. Ответы и решения задач практического занятия 3 ... 259
5.2. Ответы и решения задач практического занятия 4 ... 269
5.3. Ответы и решения задач практического занятия 5 ... 286

Глава 6. Теория графов ... 293

6.1. Ответы и решения задач практического занятия 6 ... 293
6.2. Ответы задач практического занятия 7 ... 307
6.3. Ответы и решения задач практического занятия 8 ... 311
6.4. Ответы и решения задач практического занятия 9 ... 328
Ответы и решения задач практического занятия 10 ... 338

Предметный указатель ...

Часть I

Теоретические основы курса

Глава 1. Элементы теории множеств

Глава 2. Комбинаторика

Глава 3. Теория графов

Глава 1

Элементы теории множеств

1.1. Множества и действия над ними

Первичное понятие теории множеств — понятие самого множества.

Множество — это совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединенных по какому-либо признаку. Элементы множества при этом должны быть различными. Множество обозначается скобками $\{..\}$, внутри которых либо просто перечисляются элементы, либо описываются их свойства. Например, $A=\{x\in N/x+2=1\}$ — множество натуральных чисел, удовлетворяющих условию $x+2=1$, очевидно пустое. $B=\{$ сложение, умножение $\}$ — множество основных арифметических операций. Если необходимо указать, что объект a является элементом множества A, то пишут $a\in A$ (a принадлежит A), запись $a\notin A$ говорит о том, что a не принадлежит A.

Если каждый элемент множества A есть элемент множества B, то пишут $A\subseteq B$ или $B\supseteq A$ и говорят, что множество A является *подмножеством* множества B. Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными*, т. е. $A=B$, в противном случае $A\neq B$. Очевидно, что $A=B\Leftrightarrow\forall x((x\in A)\Leftrightarrow(x\in B))=\forall x[(x\in A\to x\in B)\wedge(x\in B\to x\in A)]=$ $=(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$. Итак, $A=B\Leftrightarrow(A\subset B)\wedge(B\subset A)$. Если $M\subseteq A$ и $M\neq\varnothing$, $M\neq A$, то множество M называется *собственным подмножеством* множества A. Пустое множество и множество A называются *несобственными подмножествами* множества A. Если A есть подмножество множества B, причем $A\neq B$, то пишут $A\subset B$ или $B\supset A$. Совокупность всех подмножеств множества A называется его *булеаном*, или *множеством-степенью*, и обозначается через $P(A)$ или 2^A. С помощью скобок и операций

над множествами можно построить новые множества, более сложные, чем исходные.

1. *Объединение* (или *сумма*). Эта операция над множествами обозначается $A \cup B$ и определяется как $C = A \cup B = \{x \in C / (x \in A) \vee (x \in B)\}$. Все операции над множествами можно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера*—Венна**. Если некоторое универсальное множество, содержащее как подмножества все другие множества, обозначить U (или Ω) и изобразить его в виде всей плоскости, то любое множество $A \subset U$ можно изобразить в виде части плоскости, т. е. в виде некоторой фигуры, лежащей на плоскости. Множество C — объединение множеств A и B (C на рис. 1.1 заштриховано), $C = A \cup B$.

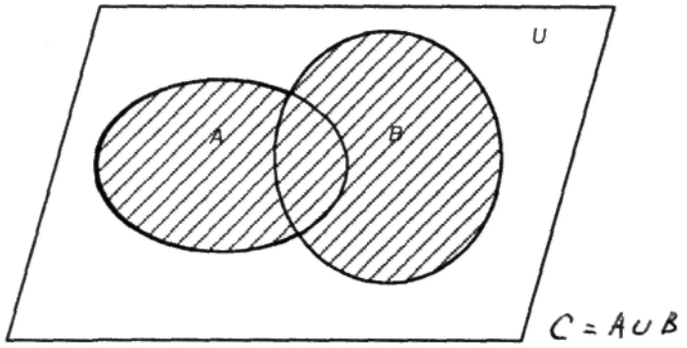


Рис. 1.1

2. *Пересечением* (или *произведением*) двух множеств называется такое множество C, которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам, т. е. $C = A \cap B = \{x \in C / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. Пересечение множеств A и B заштриховано и изображено на рис. 1.2.
3. *Разностью* двух множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят в A и одновременно не входят в B, т. е. $C = A \setminus B = \{x \in C / (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \overline{B}$ (рис. 1.3). Если, в частности, A — подмножество U, то разность $U \setminus A$ обозначается $\overline{A}$ и называется *дополнением* множества A (рис. 1.4).
4. *Симметрической разностью* (или *кольцевой суммой*) множеств A и B называется множество $C = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (рис. 1.5).

* Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский математик.

** Джон Венн (1834–1923) — английский математик и логик.

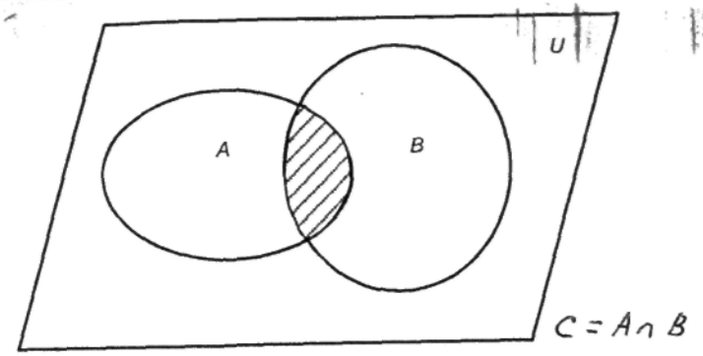


Рис. 1.2

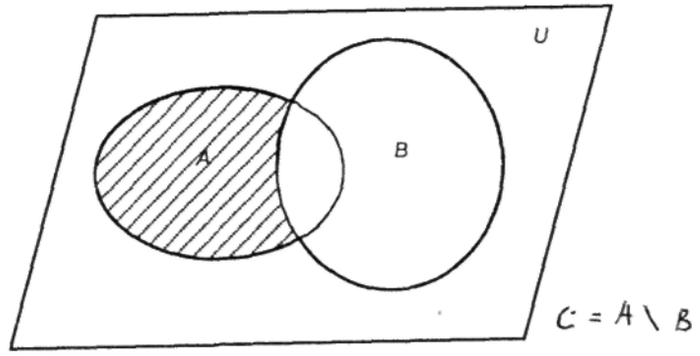


Рис. 1.3

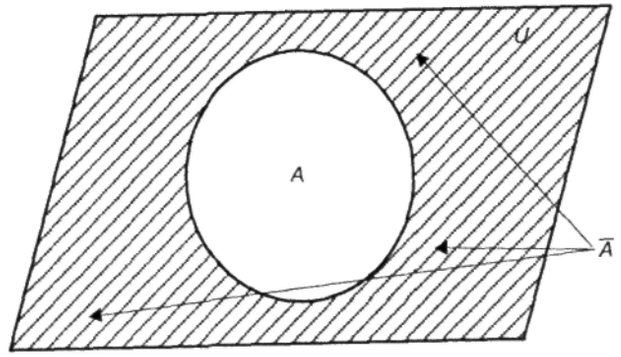


Рис. 1.4

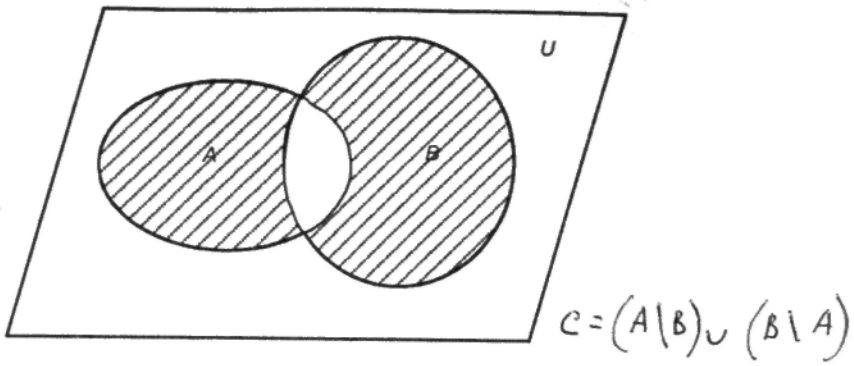


Рис. 1.5

Очевидно, что

$$C = A \oplus B = \{x \in C / ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))\}.$$

Если $a \in A$ и $b \in B$, то пару элементов (a, b) называют *упорядоченной парой*, причем пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

5. Множество, элементами которого являются все упорядоченные пары (a,b), $a \in A$, $b \in B$, называется *прямым*, или *декартовым*, *произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$. Например, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\} \to A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$, а $B \times A = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. Таким образом, декартово произведение не подчиняется коммутативному закону, и $A \times B = B \times A$ справедливо, если $A = B$. Произведение $A \times A$ называется *декартовым квадратом*.

Свойства операций объединения, пересечения и дополнения иногда называются *законами алгебры множеств*.

Эти законы таковы:

1. *Коммутативный закон*: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
2. *Ассоциативный закон*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. *Дистрибутивный закон*: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{cases}$
4. *Законы идемпотентности*: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, в частности $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$.

5. *Законы поглощения*: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.
6. *Законы де Моргана* (двойственности)*: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
7. *Закон двойного дополнения*: $\overline{\overline{A}} = A$.
8. *Закон включения*: $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
9. *Закон равенства*: $A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow (A \cap B) \vee (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

Конечно, этим кратким перечнем количество законов алгебры множеств не исчерпывается. Другие соотношения между множествами могут быть выведены на основе вышеприведенных законов по правилам алгебры логики.

- **Пример 1.** Доказать включения $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$.

  Легче всего это сделать по диаграмме Эйлера—Венна (рис. 1.6–1.7).

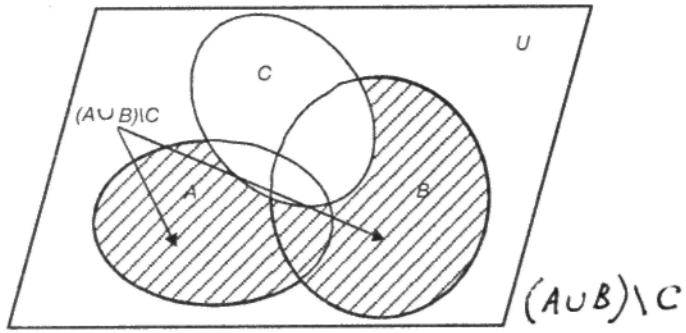


Рис. 1.6

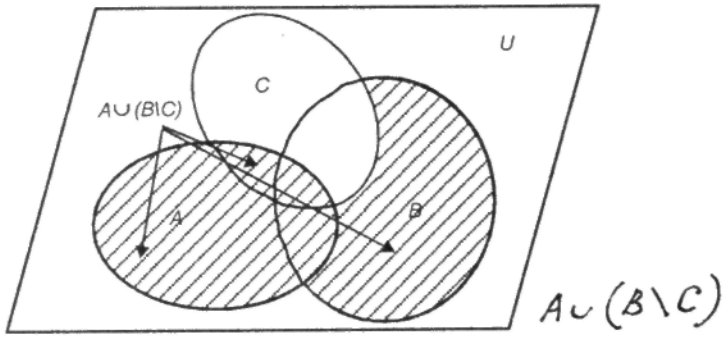


Рис. 1.7

* Огастес де Морган (1806–1871) — шотландский математик и логик.

- **Пример 2.** Пусть $A=\{x\in N/2<x\le 6\}$, $B=\{x\in N/1<x<4\}$, $C=\{x\in N/x^2-4=0\}$. Из каких элементов состоят множества $(A\cap B)\cup(B\cup C)$, $C\times B$, $B\times C$?

  Перепишем множества A, B и C, перечислив их элементы:
  $A=\{3,4,5,6\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{2\}$. Тогда $A\cap B=\{3\}$, $B\cup C=\{2,3\}$,
  $(A\cap B)\cup(B\cup C)=\{2,3\}$, $C\times B=\{(2,2),(2,3)\}$,
  а $B\times C=\{(2,2),(3,2)\}$.

1.2. Отношения и функции. Специальные бинарные отношения

Часто элементы разных множеств связаны различными соотношениями, например соотношениями порядка.

n-местным отношением, или *n-местным предикатом* P, на множествах $A_1, A_2,\dots,A_n$ называется любое подмножество декартова произведения $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$. Обозначение n-местного отношения $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$. При $n=1$ отношение P называется *унарным* и является подмножеством множества A_1. *Бинарным* (или *двуместным* при $n=2$) отношением называется множество упорядоченных пар. Элементы $x_1,x_2,\dots,x_n$ называются *координатами*, или *компонентами*, отношения P.

Для любого множества A отношение $\mathrm{id}_A=\{(x,x)/x\in A\}$ называется *тождественным отношением*, или *диагональю*, а $U_A=A^2=A\times A=$ $=\{(x,y)/x\in A,\ y\in A\}$ — *полным отношением*, или *полным квадратом*.

Пусть P — некоторое бинарное отношение. Тогда *областью определения бинарного отношения* P называется множество $D=\{x/(x,y)\in P$ для некоторого $y\}$, а *областью значений* — множество $R=\{y/(x,y)\in P$ для некоторого $x\}$. Аналогично вводится еще несколько определений. *Обратным* к P отношением называется множество $P^{-1}=\{(y,x)/(x,y)\in P\}$. *Композицией бинарных отношений* $P\subseteq A\times B$ и $Q\subseteq B\times C$ называется множество $P\circ Q=\{(x,y)/x\in A, y\in C, \exists z\in B$ такой, что $(x,z)\in P, (z,y)\in Q\}$ (рис. 1.8).

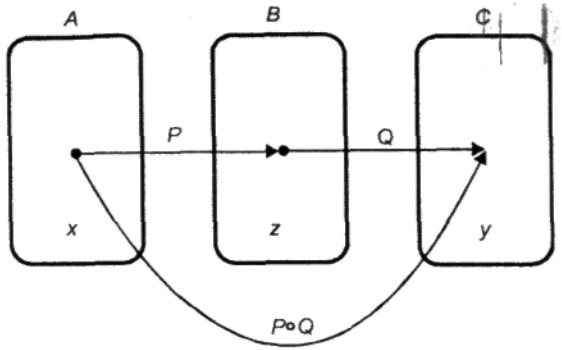


Рис. 1.8

Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1. $(P^{-1})^{-1}=P$.
2. $(P\circ Q)^{-1}=Q^{-1}\circ P^{-1}$.
3. $(P\circ Q)\circ R=P\circ(Q\circ R)$ — ассоциативность композиции.

- **Пример 1.** Пусть $A=\{x/x$ - арабская цифра$\}$, $P=\{(x,y)/x,y\in A, x-y=5\}$. Отношение P можно записать в виде $P=\{(5,0),(6,1),(7,2),(8,3),(9,4)\}$. Тогда для него имеем $D=\{5,6,7,8,9\}$, $R=\{0,1,2,3,4\}$, $P^{-1}=\{(0,5),(1,6),(2,7),(3,8),(4,9)\}$.

- **Пример 2.** Пусть $P=\{(x,y)/x,y\in[-\pi/2,\pi/2], y\ge\sin x\}$. Найдем для этого отношения D, R, P^{-1}, $P\circ P$, $P^{-1}\circ P$, $P\circ P^{-1}$ отношения.

  Очевидно, что $D[-\pi/2,\pi/2]$, $R=[-1,\pi/2]$. По определению $P^{-1}=\{(y,x)/(x,y)\in P\}=\{(y,x)/y,x\in[-\pi/2,\pi/2], x\ge\sin y\}$. Аналогично для композиции $P\circ Q=\{(x,y)/x\in A, y\in C,\ \exists z\in B$ такой, что $(x,z)\in P, (z,y)\in Q\}$, где $P\subseteq A\times B$, а $Q\subseteq B\times C$. В нашем случае $P=A\times B$, $A=[-\pi/2,\pi/2]$, $B=\{(x,y)/\sin x\le y\}$, $Q=P=B\times C$, $C=[-\pi/2,\pi/2]$.

  Тогда $P\circ P=\{(x,y)/x\in[-\pi/2,\pi/2], y\in[-\pi/2,\pi/2], \exists z$ такой, что $(x,z)\in\{x,z\in[-\pi/2,\pi/2],\ z\ge\sin x\}$,
  $(z,y)\in\{y,z\in[-\pi/2,\pi/2],\ y\ge\sin z\}\}=\{(x,y)/\sin x\le y\}$.

Далее таким же образом получим $P \circ P^{-1} = \{(x, y)/x \in [-\pi/2, \pi/2],$
$y \in [-\pi/2, \pi/2], \exists z$ такой, что $(x, z) \in \{x, z \in [-\pi/2, \pi/2],\ z \geq \sin x\},$
$(z, y) \in \{z, y \in [-\pi/2, \pi/2],$
$y \geq \sin x\}\} = \{(x, y)/x \in [-\pi/2, \pi/2], y \in [-\pi/2, \pi/2]\} = [-\pi/2, \pi/2]^2.$

$P^{-1} \circ P = \{(x, y)/x \in \{x/\sin x \leq y\}, y \in \{y/\sin x \leq y\}, \exists z$ такой, что
$(x, z) \in \{(z, x)/z, x \in [-\pi/2, \pi/2],$
$x \geq \sin x\}, (z, y) \in \{(z, y)/z, y \in [-\pi/2, \pi/2],$
$y \geq \sin z\}\} = \{(x, y)/x, y \in [-1, \pi/2]\}.$

Бинарное отношение $f \subseteq A \times B$ называется *функцией*, или *отображением*, из множества A в множество B, если $D_f = A$, $R_f \subseteq B$ и из $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$ следует, что $y_1 = y_2$. Область определения функции обозначается D_f, область значений — R_f. Определяются они так же, как для бинарных отношений. Если же вместо $D_f = A$ выполняется $D_f \subseteq A$, то f называется *частичной функцией*.

Говорят, что функция f задана на множестве A со значениями во множестве B и осуществляет отображение множества A во множество B. Функция f из A в B обозначается через $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Тождественное отношение $\mathrm{id}_A(x) = \{(x, x)/x \in A\}$ является функцией $\mathrm{id}_A : A \to A$, для которой $\mathrm{id}_A(x) = x$ для всех $x \in A$.

Функция f называется *инъективной* (*разнозначной*), если отношение f^{-1} является частичной функцией, т. е. для любых элементов $x_1, x_2 \in D_f$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. Функция $f : A \to B$ называется *функцией A на B*, или *сюръективной функцией*, если $R_f = B$. Для сюръективной функции для любого $y \in B$ существует $x \in A$ такой, что $f(x) = y$.

Функция f называется *биективной*, если она одновременно сюръективна и инъективна. В этом случае говорят, что f осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами A и B. Биекция $f : A \leftrightarrow A$ называется *подстановкой множества* A. Простейшим примером подстановки является функция id_A.

На рис. 1.9 показаны функции $f_j : A \to B$, $i = \overline{1,4}$. Функция f_1 сюръективна, но неинъективна, функция f_2 инъективна, но несюръективна, функция f_3 биективна и является подстановкой (если $A = B$), функция f_4 неинъективна и несюръективна.

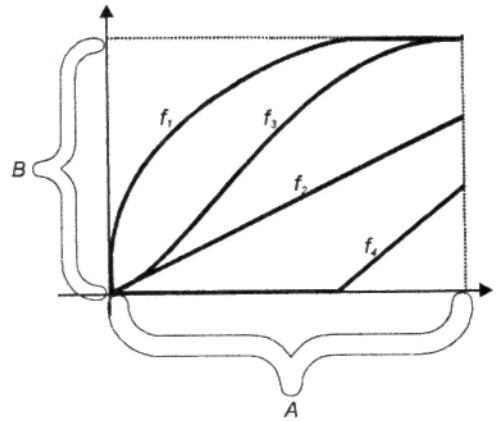


Рис. 1.9

Функции обладают несколькими легко доказываемыми свойствами:

1. Композиция двух функций есть функция, т. е. если $f : A \to B$, $g : B \to C$, то $f \circ g : A \to C$.
2. Композиция двух биективных функций есть биективная функция, если $f : A \leftrightarrow B$, $g : B \leftrightarrow C$, то $f \circ g : A \leftrightarrow C$.
3. Отображение $f : A \to B$ имеет обратное отображение $f^{-1} : B \to A$ тогда и только тогда, когда f — биекция, т. е. если $f : A \leftrightarrow B$, то $f^{-1} : B \leftrightarrow A$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_B$.

В теории множеств важную роль играют два вида специальных бинарных отношений: эквивалентности и порядка. Их прообразами служат интуитивные понятия равенства, предшествования и предпочтения.

Рассмотрим два конечных множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ и бинарное отношение $P \subseteq A \times B$. Введем матрицу $\|P\| = (p_{i,j})$ бинарного отношения P следующим образом: $p_{i,j} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in P, \\ 0, & (a_i, b_j) \notin P. \end{cases}$ Эта матрица содер-

жит полную информацию о связях между элементами множеств A и B и позволяет представить эту информацию в графическом виде.

Матрица любого бинарного отношения обладает следующими свойствами:

1. Если $P,Q \subseteq A\times B$ и $\|P\| = (p_{i,j})$, $\|Q\| = (q_{i,j})$, то $\|P\cup Q\| = \|P\| + \|Q\| = (p_{i,j} + q_{i,j})$; $\|P\cap Q\| = \|P\| * \|Q\| = (p_{i,j}\cdot q_{i,j})$, причем сложение элементов матрицы осуществляется по правилам $0+0=0$, $1+1=1$, $1+0=0+1=1$, а умножение почленно обычным образом, т. е. по правилам $1\cdot 0 = 0\cdot 1 = 0$, $1\cdot 1 = 1$.
2. Если $P\subseteq A\times B$, $Q\subseteq B\times C$, то $\|P\circ Q\| = \|P\|\cdot\|Q\|$, и матрицы умножаются по обычному правилу умножения матриц, но произведение и сумма элементов при перемножении матриц находится по правилам п. 1.
3. $\|P^{-1}\| = \|P\|^T$, где $\|P^{-1}\|$ — матрица обратного отношения P^{-1}.
4. Если $P\subseteq Q$, то $\|P\| = (p_{i,j})$, $\|Q\| = (q_{i,j})$ и $p_{i,j} \le q_{i,j}$.

▪ **Пример 3.** Бинарное отношение $P\subseteq A^2$, $A=\{1,2,3\}$ изображено на рис. 1.10. Его матрица имеет вид $\|P\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть

$$\|Q\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда} \quad \|P\cup Q\| = \|P\| + \|Q\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\|P\cap Q\| = \|P\| * \|Q\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \|P\circ Q\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

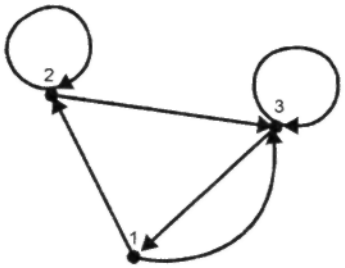


Рис. 1.10

Пусть P — бинарное отношение на множестве A, $P\subseteq A^2$. Отношение P на множестве A называется *рефлексивным*, если $\forall x\in A$, $(x,x)\in P$, т. е. $\mathrm{id}_A = P$, $\|P\| = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$, где звездочкой обозначены нули или единицы. Отношение P называется *иррефлексивным*, если $\forall x\in A$, $(x,x)\notin P$. Отношение P на множестве A называется *симметричным*, если для $\forall x\in P$ и для $\forall y\in P$ из условия $(x,y)\in P$ следует, что $(y,x)\in P$. Это значит, что $\|P\|^T = \|P\|$. Отношение P называется *антисимметричным*, если из условий $(x,y)\in P$ и $(y,x)\in P$ следует, что $x=y$, т. е. $P\cap P^{-1}\subseteq \mathrm{id}_A$ или $\|P\cap P^{-1}\| = \|P\| * \|P\|^T$. Это свойство приводит к тому, что у матрицы $\|P\cap P^{-1}\|$ все элементы вне главной диагонали будут нулевыми (на главной диагонали тоже могут быть нули). Отношение P называется *транзитивным*, если из $(x,y)\in P$ и $(y,z)\in P$ следует, что $(x,z)\in P$, т. е. $P\circ P\subseteq P$.

▪ **Пример 4.** Рассмотрим все свойства следующего отношения P, если $\|P\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь на главной диагонали матрицы $\|P\|$ стоят все единицы, следовательно, P рефлексивно, т. е. $\mathrm{id}_A \subseteq P$. Матрица $\|P\|$ несимметрична, тогда несимметрично и отношение P.

$$\|P\cap P^{-1}\| = \|P\| * \|P\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица нужна для проверки антисимметричности. Так как не все элементы, стоящие вне главной диагонали, нулевые, то отношение P не антисимметрично. Из этого примера видно, что свойство несимметричности не совпадает со свойством антисимметричности.

Наконец, $\|P \circ P\| = \|P\| \cdot \|P\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. $P \circ P \not\subset P$, следовательно, отношение P нетранзитивно.

Рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение на множестве A называется *эквивалентностью* на A. Эквивалентность обозначается символами E или ~, например, xEy, $x \sim y$.

Классом эквивалентности (*смежным классом*) элемента $x \in A$ называется множество $E(x) = \left\{ {}^{y}\!/_{x \sim y} \right\}$. Множество классов эквивалентности элементов множества A по эквивалентности E называется *фактор-множеством* A по E и обозначается $A/E = \left\{ E(x)/_{x \in A} \right\}$.

- **Пример 5.** Докажем, что на множестве $N \times N$ отношение Q является отношением эквивалентности, если $\{(a,b),(c,d)\} \in Q \Leftrightarrow a + d = b + c$.

  Если отношение Q рефлексивно на A, то $\forall x \in Q$ $(x,x) \in Q$. В нашем случае роль A играет множество $N \times N$, а роль элемента x — пара (x,y). Тогда отношение Q рефлексивно на $N \times N$, если $\forall (x,y) \in Q$ $\{(x,y),(x,y)\} \in Q$. По определению $Q: a + d = b + c$, но $a + b = b + a$, следовательно, Q рефлексивно.

  Аналогично, если $\{(a,b),(c,d)\} \in Q$, то и $\{(c,d),(a,b)\} \in Q$, т. к. из $a + d = b + c$ следует, что $c + b = d + a$. Таким образом, Q симметрично.

  Наконец, если $\{(a,b),(c,d)\} \in Q$, $\{(c,d),(f,g)\} \in Q$, то $\{(a,b),(f,g)\} \in Q$, т. к. $a + d = b + c$ и $c + g = d + f$. Тогда $(a+d)+(c+g) = (b+c)+(d+f) \Rightarrow a + d + c + g =$
  $= b + c + d + f \Rightarrow a + g = b + f$, т. е. Q транзитивно.

Разбиением множества A называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств A таких, что каждый элемент множества A принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

Теорема 1.1. **Фактор-множество A/E является разбиением множества A. Наоборот, если $R = \{A_i\}$ — некоторое разбиение множества A, то можно задать соответствующее ему отношение эквивалентности E по правилу $xEy \Leftrightarrow x, y \in A_i$ для некоторого i.**

Если E — эквивалентность на конечном множестве A, то $E(x_i)$ — классы эквивалентности, а $A/E = \{E(x_1), E(x_2), \ldots, E(x_n)\}$ и $E(x_i) = \{b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{m_i}^i\}$, $i = \overline{1,n}$. Если множество A пронумеровано в следующем порядке: $b_1^1, b_2^1, \ldots, b_{m_1}^1, b_1^2, b_2^2, \ldots, b_{m_2}^2, \ldots, b_1^n, b_2^n, \ldots, b_{m_n}^n$, то матрица отношения эквивалентности $\|E\|$ имеет блочно-диагональный вид:

$$\|E\| = \begin{array}{c} \\ m_1\{ \\ m_2\{ \\ \vdots \\ m_n\{ \end{array} \begin{pmatrix} \overset{m_1}{\boxed{1}} & \overset{m_2}{0} & \cdots & \overset{m_n}{0} \\ 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

где блоки $\boxed{1}$ состоят из единиц, а остальные элементы равны нулю. Если же множество A пронумеровано произвольным образом, то матрица $\|E\| = (e_{i,j})$ приводится к блочно-диагональному виду перестановкой строк и столбцов.

Отношение $P \subseteq A^2$ называется *предпорядком*, если оно рефлексивно и транзитивно. Очевидно, что симметричный предпорядок является отношением эквивалентности.

- **Пример 6.** Пусть $A = \{1,2,3,4\}$. Тогда отношение $P = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(3,2),(4,1)\}$ — предпорядок.

Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение на множестве A называется *частичным порядком* на A. Частичный порядок обозначается символом $\le$, а обратное ему отношение $\le^{-1}$ символом $\ge$. Отношение $<$ называется *строгим порядком* и определяется таким образом: $x < y \Leftrightarrow x \le y$ и $x \ne y$. Это отношение не является частичным порядком, т. к. не удовлетворяет условию рефлексивности $x < x$.

Если во множестве A есть элементы x и y, о которых нельзя сказать, что $x \le y$ или $y \le x$, то такие элементы называются *несравнимыми*. Частичный порядок называется *линейным порядком*, если любые два элемента x и y из множества A сравнимы, т. е. $x \le y$ или $y \le x$.

Непустое множество A, на котором зафиксирован некоторый частичный (линейный) порядок, называется *частично (линейно) упорядоченным множеством*. Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества A называется *максимальным (минимальным)*, если для $\forall x \in A$ из $a \le x$ $(x \le a)$ следует $a = x$. Элемент $a \in A$ называется *наибольшим (наименьшим)*, если $x \le a$ $(a \le x)$ для всех $\forall x \in A$. Наибольший элемент обозначается $\max A$, наименьший — $\min A$. Этих элементов у множества может и не быть, например, линейно упорядоченное множество рациональных чисел $(0,1]$ не имеет наименьшего элемента, наибольший элемент равен единице.

Верхней (нижней) гранью подмножества B частично упорядоченного множества A называется всякий элемент $a \in A$ такой, что $b \le a$ $(a \le b)$ для всех $b \in B$. *Точной верхней (нижней) гранью подмножества* $B \subseteq A$ называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань для B. Точная верхняя и точная нижняя грани множества $B \subseteq A$ обозначаются через $\sup B$ (супремум) и $\inf B$ (инфимум) соответственно.

Линейный порядок $\le$ на множестве A называется *полным*, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент. В этом случае множество A называется *вполне упорядоченным*.

Рассмотрим непустое конечное частично упорядоченное множество A. Говорят, что элемент y покрывает элемент x, если $x \le y$ и не существует такого элемента z, что $x < z < y$. Если $x < y$, то существуют такие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что $x = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = y$, где x_{i+1} покрывает x_i.

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если y покрывает элемент x, то точки x и y соединяются отрезком, причем точку, соответствующую x, располагают ниже y. Такие схемы называются *диаграммами Хассе**.

- **Пример 7.** Пусть $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ — линейно упорядоченное множество с обычным отношением порядка на множестве натуральных чисел, не превосходящих семи. Его диаграмма Хассе изображена на рис. 1.11. Элементы этого отношения упорядочены обычным отношением частичного порядка $\le$.

* Хельмут Хассе (1898–1979) — немецкий математик.

Рис. 1.11

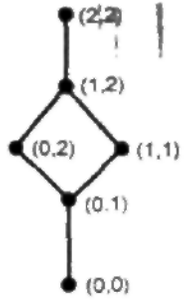


Рис. 1.12

Рассмотрим еще одно отношение: $P = \{(x,y) / x, y \in Z,\ x - y < 1,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$. Элементы этого отношения — пары чисел — будут упорядочены отношением включения $(a,b) \subseteq (c,d) \Leftrightarrow (a \le c) \wedge (b \le d)$. Проверим теперь, будет ли это множество частично упорядоченным. $P = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,2)\}$. Так как $x - x = 0 < 1$ для всех возможных x, то отношение P рефлексивно. $(1,2) \in P$ и $(2,1) \notin P$, следовательно, P несимметрично. Однако если $x - y < 1$ и $y - x < 1$, то $x = y$, иначе из $x \ne y$ следует $|x - y| \ge 1$. Таким образом, отношение P антисимметрично. Пусть теперь $(x,y) \in P$, $(y,z) \in P$ и $x - y < 1$ и $y - z < 1$. Тогда $x < y$ и $y < z$ и, следовательно, $x < z$, т.е. $x - z < 1$ и $(x,z) \in P$. Отношение P транзитивно, тогда P есть частично упорядоченное множество. Его диаграмма Хассе изображена на рис. 1.12.

1.3. Практическое занятие 1. Операции над множествами. Отношения и функции

1.3.1. Доказать равенства:

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

в) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

1.3.2. Пусть $A=\{x\in N/2<x\le 6\}$, $B=\{x\in N/1<x<4\}$, $C=\{x\in N/x^2-4=0\}$. Из каких элементов состоят множества:

а) $B\cup C$;

б) $A\cap B\cap C$;

в) $A\cup B\cup C$;

г) $B\times C$;

д) $C\times B$?

1.3.3. Доказать включения:

а) $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus C$;

б) $(A\cup C)\setminus B\subset(A\setminus B)\cup C$.

1.3.4. Пусть $A\subset U$, $B\subset U$. Найти множество $X\subset U$, удовлетворяющее уравнению $\overline{(X\cup A)}\cup\overline{(X\cup\overline{A})}=B$.

1.3.5. Доказать:

а) если $A\subseteq B\cap C$, то $A\subseteq B$ и $A\subseteq C$;

б) если $A\cap B\subseteq C$, то $A\subseteq\overline{B}\cup C$;

в) если $A\cup B\subseteq C$, то $A\subseteq C$ и $B\subseteq C$;

г) если $A\subseteq B\cup C$, то $A\cap\overline{B}\subseteq C$.

1.3.6. Решить систему уравнений $\begin{cases}A\cap X=B,\\ A\cup X=C,\end{cases}$ где $B\subseteq A\subseteq C$.

1.3.7. Доказать:

а) если $A\subseteq B$, то $\overline{B}\subseteq\overline{A}$;

б) если $A\subseteq B$, то $A\cup C\subseteq B\cup C$;

в) если $A\subseteq B$, то $A\cap C\subseteq B\cap C$.

1.3.8. Решить систему уравнений $\begin{cases}A\setminus X=B,\\ X\setminus A=C,\end{cases}$ $B\subseteq A$, $A\cap C=\varnothing$.

1.3.9. Доказать, что система уравнений $\begin{cases}A\cap X=\varnothing,\\ B\cap\overline{X}=\varnothing\end{cases}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $B\subseteq\overline{A}$, при этом условии решением системы является любое множество X такое, что $B\subseteq X\subseteq\overline{A}$.

1.3.10. Пусть $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $P_1\subseteq A\times B$, $P_2\subseteq B^2$. Изобразить P_1 и P_2 графически, найти $\|(P_1\circ P_2)^{-1}\|$. Проверить с помощью матрицы $\|P_2\|$, является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

а) $\begin{cases}P_1=\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\},\\ P_2=\{(1,1),(2,3),(2,2),(3,4),(1,4),(2,4),(4,2)\}.\end{cases}$

б) $\begin{cases}P_1=\{(b,2),(a,3),(b,1),(b,4),(c,1),(c,2),(c,4)\},\\ P_2=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}.\end{cases}$

1.3.11. Найти область определения, область значений отношения P. Является ли отношение P рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

а) $P\subseteq R^2,(x,y)\in P\Leftrightarrow x^2+y^2=1$;

б) $P\subseteq Z^2,(x,y)\in P\Leftrightarrow x-y$ четно.

1.3.12. Найти $D_P,R_P,P^{-1},P\circ P,P\circ P^{-1},P^{-1}\circ P$ для отношений:

а) $P=\{(x,y)/x,y\in N$ и x делит $y\}$;

б) $P=\{(x,y)/x,y\in R$ и $2x\ge 3y\}$.

1.3.13. Пусть A и B — конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно.

а) сколько существует бинарных отношений между элементами множеств A и B?

б) сколько имеется функций из A в B?

1.3.14. Построить бинарное отношение:

а) рефлексивное, симметричное, нетранзитивное;

б) рефлексивное, антисимметричное, нетранзитивное;

в) рефлексивное, несимметричное, транзитивное;

г) нерефлексивное, антисимметричное, транзитивное.

1.3.15. На множествах N и $N\times N$ определим P_m и S следующим образом:

а) $(a,b)\in P_m\Leftrightarrow(a-b)$ делится на $m(m>0)$;

б) $\{(a,b),(c,d)\} \in S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [((a \cdot d = b \cdot c) \text{ и } b \neq 0 \text{ и } d \neq 0) \text{ или } (a = c, b = 0, d = 0)]$.

Доказать, что P_m и S являются отношениями эквивалентности.

1.3.16. а) доказать, что всякое частично упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего (наименьшего) элемента;

б) построить пример частично упорядоченного множества, имеющего точно один минимальный элемент, но не имеющего наименьшего элемента.

1.4. Эквивалентные, конечные и бесконечные множества

Множества A и B называются *эквивалентными*, если существует биекция $f : A \leftrightarrow B$. Как известно, биекция осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и B. Эквивалентные, или равномощные, множества обозначаются $A \sim B$. По определению эквивалентность обладает свойствами:

1. *Рефлексивность*: $A \sim A$ $(id_A : A \leftrightarrow A)$.
2. *Симметричность*: если $A \sim B$, то $B \sim A$ (т. к. если $f : A \leftrightarrow B$, то $f^{-1} : B \leftrightarrow A$).
3. *Транзитивность*: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (т. к. если $f : A \leftrightarrow B$ и $g : B \leftrightarrow C$, то $f \circ g : A \leftrightarrow C$, *см. разд. 1.2*).

При сравнении множеств по числу содержащихся в них элементов возникает понятие мощности множества. *Мощностью множества* A называется класс всех множеств, эквивалентных множеству A. Обозначение мощности — $|A|$.

Множество A называется *конечным*, если существует $n \in N$ такое, что $A \sim \{1,2,...,n\}$. Тогда $|A| = n$. Таким образом, мощностью конечного множества является число его элементов. Если $A \sim B$, то множества A и B имеют одинаковую мощность.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Если $A \sim N$, то множество A называется *счетным*. Счетное множество — это такое множество A, все элементы которого могут быть занумерованы в бесконечную последовательность $a_1, a_2, ..., a_n ...$ так, чтобы при этом каждый

элемент получил лишь один номер n и каждое натуральное число n было бы номером лишь одного элемента множества A. Таким образом, счетное множество — это множество значений какой-нибудь последовательности $f : N \to B$. Пустое множество по определению относится к счетным. Мощность счетных множеств принято обозначать через $\aleph_0$*. Мощности произвольных множеств называются *кардинальными числами*. Кардинальные числа конечных множеств называются *конечными*, для бесконечных множеств — *бесконечными*.

Рассмотрим некоторые результаты, относящиеся к счетным множествам.

Теорема 1.2. **Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.**

Доказательство. Пусть A — счетное множество, $B \subseteq A$. Если $B = \varnothing$, то оно счетно по определению. Пусть $B \neq \varnothing$. На основании определения счетного множества все элементы множества A занумерованы, а само множество может быть представлено в виде бесконечной последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Если $B \subseteq A$, то a_{n_1} — первый элемент множества B, являющийся одновременно членом последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, a_{n_2} — второй элемент и т. д.

Возможны два случая: после конечного числа шагов все элементы множества B будут исчерпаны либо получится бесконечная последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$ В первом случае множество B будет конечным, во втором — счетным.

Теорема 1.3. **Объединение счетного числа счетных множеств счетно.**

- **Пример 1.** Пусть дан некоторый алфавит $\mathbf{A}$, т. е. набор знаков, называемых буквами. Любая конечная последовательность букв называется *словом*. Пустое слово обозначается символом Λ. Если алфавит конечен, то множество B всех слов алфавита $\mathbf{A}$ счетно.

  Пусть $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$, $k \geq 1$. Определим последовательность $f : N \to B$ таким образом: $f(0) = \Lambda$, если $m > 0$, то $f(m) = A_{n_m} A_{n_{m-1}} ... A_{n_2} A_{n_1}$, где A_{n_i} — i-й разряд записи слова в k-ичной системе счисления. Очевидно, что произвольное слово $A_{n_m} A_{n_{m-1}} ... A_{n_2} A_{n_1}$

---

*$\aleph$ — первая буква древнееврейского алфавита, называемая "алеф", выражение $\aleph_0$ читается: "алеф-нуль".

является значением функции $f(m)$ при значении аргумента $n_1 + n_2 \cdot k^1 + \ldots + n_{m-1} \cdot k^{m-1} + n_m \cdot k^m$, т. е. $R_f = B$. Итак, $f : N \to B$, $R_f = B$, следовательно, множество B счетно, т. к. B эквивалентно счетному множеству N.

- **Пример 2.** Множество всех рациональных чисел Q счетно.

  Всякое рациональное число записывается в виде несократимой дроби m/n, где m — целое число, n — положительное целое число. Следовательно, множество Q эквивалентно множеству таких дробей. Множество дробей вида m/n, в свою очередь, есть подмножество всех слов в алфавите $\{0,1,2,\ldots,9,-,/\}$. Таким образом, Q, являясь подмножеством счетного множества, счетно.

Теорема 1.4. **Всякое бесконечное множество A содержит счетное множество B, притом такое, что $A \setminus B$ есть бесконечное множество.**

Теорема 1.5. **Всякое бесконечное множество A содержит подмножество $B \sim A$, причем $A \setminus B$ есть бесконечное множество.**

Так как никакое конечное множество не содержит части, эквивалентной всему множеству, то последняя теорема выражает свойство, присущее лишь бесконечным множествам и только им, и может служить условием, поясняющим определение бесконечных множеств. В случае бесконечных множеств понятие мощности — обобщение понятия количества элементов конечного множества. Однако любые количества либо равны, либо одно из них больше другого, поэтому возникает вопрос о сравнимости мощностей.

Пусть даны два множества A и B. При их сравнении возможны следующие случаи:

1. Существует взаимно-однозначное соответствие между A и B.
2. Существует взаимно-однозначное соответствие между A и $C \subseteq B$ и нет взаимно-однозначного соответствия между B и $D \subseteq A$.
3. Существует взаимно-однозначное соответствие между A и $C \subseteq B$, а также взаимно-однозначное соответствие между B и $D \subseteq A$.

Третий случай невозможен, если A и B — конечные множества, и возможен для счетных множеств.

Теорема 1.6 Кантора–Бернштейна***. **Если из двух множеств A и B каждое эквивалентно части другого, то эти два множества эквивалентны между собой, т. е. если $|A| \le |B|$ и $|B| \le |A|$, то $|A| = |B|$.**

Доказательство. Пусть $A \sim B_1 \subset B$ и $B \sim A_1 \subset A$. Тогда если $A \sim B_1$, то $B_1 \sim A_2$ и $A \supset A_1 \supset A_2$ в силу взаимно-однозначного соответствия при эквивалентности. Одновременно $B \sim A_1$. Таким образом, показав, что $A \sim A_1$, докажем, что $A \sim B$, т. к. $A_1 \sim B$. Итак, рассмотрим какое-нибудь взаимно-однозначное отображение f. Так как $A \sim B_1$, $B_1 \sim A_2$, $A \overset{f}{\leftrightarrow} A_2$ и $A \sim A_2$. Аналогично $A_1 \subset A \overset{f}{\leftrightarrow} A_3 \subset A_2$ и $A_1 \sim A_3$, $A_2 \subset A_1 \overset{f}{\leftrightarrow} A_4 \subset A_3$ и $A_2 \sim A_4$ и т. д.

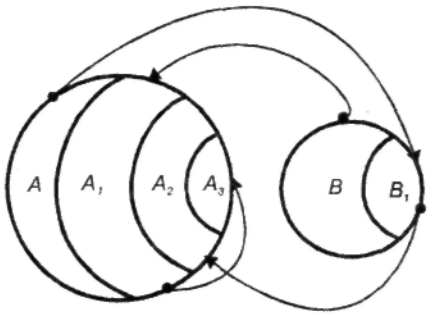


Рис. 1.13

В силу того же взаимно-однозначного соответствия $A \setminus A_1 \overset{f}{\leftrightarrow} A_2 \setminus A_3$, $A_1 \setminus A_2 \overset{f}{\leftrightarrow} A_3 \setminus A_4$, $A_2 \setminus A_3 \overset{f}{\leftrightarrow} A_4 \setminus A_5$ (рис. 1.13). Но тогда $(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots \sim (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup (A_6 \setminus A_7) \cup \ldots$

Введем вспомогательное множество $D = A \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$, тогда $A = D \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup \ldots$, $A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots$, т. к.

$$A = (A \cap A_1 \cap A_2 \cap \ldots) \cup (A \cap \overline{A_1}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup \ldots = ((A \cup A_1) \cap (A \cup A_2) \cap$$
$$\cap (A \cup A_3) \cap \ldots \cap (A_1 \cup \overline{A_1}) \cap (A_2 \cup \overline{A_1}) \cap (A_3 \cup \overline{A_1}) \cap \ldots) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup \ldots =$$

* Георг Кантор (1845–1918) — немецкий математик.

** Сергей Натанович Бернштейн (1880–1966) — советский математик.

$= \left(A \cap \left(A_2 \cup \overline{A_1}\right) \cap \left(A_3 \cup \overline{A_1}\right) \cap \ldots\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2}\right) \cup \ldots = \left(\left(A \cup A_1\right) \cap \right.$
$\cap \left(A_2 \cup \overline{A_1} \cup A_1\right) \cap \left(A_3 \cup \overline{A_1} \cup A_1\right) \cap \ldots \cap \left(A \cup \overline{A_2}\right) \cap \left(A_2 \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2}\right) \cap$
$\left. \cap \left(A_3 \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2}\right) \cap \ldots\right) \cup \ldots = \left(A \cap \left(A_3 \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2}\right) \cap \ldots\right) \cup \ldots = A$, аналогично выражается A_1. Но равенства для A и A_1 можно переписать следующим образом: $A = (D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots) \cup ((A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots)$, $A_1 = (D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots) \cup ((A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots)$. В этих выражениях первые скобки в правых частях одинаковы, а во вторых скобках стоят эквивалентные множества. Устанавливая между элементами множеств $(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots$ и $(A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots$ взаимно-однозначное соответствие и заставляя соответствовать самому себе каждый элемент множества $D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots$, получаем взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств A и A_1, т. е. $A \sim B$ и $|A| = |B|$.

Мы уже упоминали о том, что мощности бесконечных множеств должны быть сравнимы между собой, т. е. должны существовать различные бесконечные мощности. Это действительно так: для каждого множества A существует множество, мощность которого больше мощности множества A.

Теорема 1.7. **Множество всех подмножеств произвольного непустого множества A имеет мощность, большую, чем мощность множества A.**

Эта теорема верна и для пустого множества A. Для $A = \varnothing$ множество всех подмножеств имеет вид $\{\varnothing\}$, т. е. имеет мощность единицу, в то время как $|\varnothing| = 0$.

Рассмотрим множество всех отображений множества N в множество $M = \{0,1\}$. Всякое такое отображение, ставя каждому натуральному числу в соответствие 0 или 1, приводит к построению бесконечной последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$, где $i_n = 0$ или 1, т. е. бесконечной десятичной дроби $0, i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ Таким образом, множество всех бесконечных двоичных дробей имеет мощность, равную мощности всех подмножеств множества N. Так как $|N| = \aleph_0$, то мощность множества всех бесконечных двоичных дробей равна $2^{\aleph_0}$ (см. задачу 1.3.13, б).

Множество A называется *несчетным*, если его мощность больше мощности множества N. Нам известно, что множество всех рациональных чисел счетно (см. пример 2), далее мы покажем, что множество всех действительных

чисел несчетно. Если $A \sim 2^{\aleph_0}$, то множество A называется *континуальным*, или *континуумом*,* и обозначается через $\mathfrak{c}$. Эта мощность несчетна ($2^{\aleph_0} > \aleph_0$).

Теорема 1.8. **Множество всех действительных чисел имеет мощность континуума $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ и, следовательно, несчетно.**

Доказательство. Сначала докажем, что множество действительных чисел R находится во взаимно-однозначном соответствии с действительными числами интервала $(0,1)$.

Рассмотрим две функции $f_1(x) = \operatorname{tg} x$ и $f_2(x) = a + (b-a)x$. Очевидно, что $(-\pi/2, \pi/2) \overset{f_1(x)=\operatorname{tg} x}{\leftrightarrow} R$, аналогично $(0,1) \overset{f_2(x)=a+(b-a)x}{\leftrightarrow} (-\pi/2, \pi/2)$ при $a = -\pi/2$, $b = \pi/2$. Таким образом, $R \sim (-\pi/2, \pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2) \sim (0,1)$, т. е. $R \sim (0,1)$.

Обратим еще раз внимание на процесс разложения действительных чисел в двоичные дроби. Мы уже показали, что мощность множества всех бесконечных двоичных дробей равна мощности всех подмножеств множества N, т. е. мощности континуума (*см. комментарий к теореме 1.7*).

Рассмотрим процесс последовательного разбиения интервала $(0,1)$ на две равные части $\left(0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right)$; $\left(0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right)$. Длины этих отрезков, равные $\frac{1}{2^n}$, обозначим через $\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ независимо друг от друга принимают значение 0 или 1, при этом $\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 0}$ и $\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 1}$ — левая и правая половина $\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}$. Возьмем любое $x \in (0,1)$. Пусть сначала x не равно $\frac{m}{2^n}, m \in N$, т. е. не совпадает с концом или началом какого-нибудь отрезка. Тогда x представимо в виде $i_1, i_2, \ldots, i_n \ldots$, где $i_k = 0$ или 1, а последовательность $i_1, i_2, \ldots, i_n \ldots$ есть последовательность двоичных знаков числа x.

---

* Continuum — непрерывное (лат.), поэтому мощность всех действительных чисел $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ называется мощностью континуума.

Пусть теперь $x \in (0,1)$ и $x = \frac{m}{2^n}$, где дробь $\frac{m}{2^n}$ несократима, тогда x — общий конец двух отрезков, следовательно, x можно представить в виде двух последовательностей двоичных знаков $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 0,1,1,1,\ldots$ и $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 1,0,0,0,\ldots$

Таким образом, каждое действительное число $x \in (0,1)$ имеет либо одно двоичное разложение $0.i_1 i_2 \ldots i_n \ldots$, либо два двоичных разложения $0.i_1 i_2 \ldots i_{n-1} 0111\ldots$ и $0.i_1 i_2 \ldots i_{n-1} 1000\ldots$, причем второй случай наступает тогда и только тогда, когда число x двоично-рационально.

Так как $R \sim (0,1)$, а множество двоично-рациональных чисел счетно (см. пример 2), то достаточно доказать, что множество всех недвоично-рациональных чисел интервала $(0,1)$ имеет мощность $\mathfrak{c}$ (см. задачу 1.5.6). Но это множество находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством непериодических бесконечных двоичных дробей вида $0.i_1 i_2 \ldots i_n \ldots$, которое имеет мощность континуума. Таким образом, $|R| = \mathfrak{c}$.

1.5. Практическое занятие 2. Кардинальные числа

1.5.1. Доказать, что

а) всякое подмножество конечного множества конечно;

б) объединение конечного числа конечных множеств конечно.

1.5.2. Доказать, что множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому собственному подмножеству.

1.5.3. Доказать, что

а) если A бесконечно и B — конечное или счетное множество, то $A \cup B \sim A$;

б) если A бесконечно и несчетно, B конечно или счетно, то $A \setminus B \sim A$.

1.5.4. Доказать, что множество целых чисел счетно.

1.5.5. Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

1.5.6. Доказать, что

а) $(0,1) \sim [0,1] \sim (0,1] \sim [0,1)$;

б) $[a,b] \sim [c,d]$, где $a < b,\ c < d$.

1.5.7. Доказать, что множества точек двух окружностей эквивалентны.

1.5.8. Доказать, что множество всех подмножеств $P(A)$ множества A имеет мощность большую, чем A.

1.5.9. Доказать, что не существует множества, содержащего все множества.

1.5.10. Пусть A — счетное множество точек на действительной прямой. Можно ли выбрать a так, чтобы $\{x + a / x \in A\} \cap A = \varnothing$?

1.6. Аксиомы теории множеств

Теория множеств является универсальным фундаментом для всего здания математики. Область исследования каждой математической дисциплины можно представить в виде набора множеств заданной структуры. Однако свободное использование понятий интуитивного теоретико-множественного универсума иногда приводит к противоречиям.

Приведем в качестве примера два из них. Парадокс Рассела* заключается в следующем. Пусть R есть множество всех множеств, которые не являются элементами самих себя, т. е. $R = \{x / x \notin x\}$. Тогда для любого множества x будет $x \in R \leftrightarrow x \notin x$. Если подставить R вместо x, получится противоречие: оказывается $R \in R$ выполняется тогда и только тогда, когда $R \notin R$.

Парадокс Кантора также связан с множеством всех множеств. Обозначим его A, тогда $P(A)$ — семейство всех подмножеств данного множества A и $P(A) \subseteq A$, т. е. $|P(A)| \le |A|$. Но, с другой стороны, для любого множества A $|P(A)| \ge |A|$. Тогда по теореме Кантора–Бернштейна должно быть $|P(A)| = |A|$, что противоречит теореме 1.7.

Во многом эти парадоксы — следствие аксиоматической теории множеств. Как известно, в любой аксиоматической теории сначала выбирают основные понятия, которые лишь поясняются, ибо они должны быть интуитивно понятны, а затем составляются аксиомы для этих понятий. Основным понятием теории множеств является понятие самого множества. Множество образуется путем отбора определенных объектов и полностью ими определяется, при этом элементами множеств могут быть объекты любой природы. Можно конкретизировать первичное понятие элемента множества и наложить на него некоторые ограничения, которые позволят избежать парадоксов.

---

* Бертран Артур Уильям Рассел (1872–1970) — английский математик.

Например, парадоксов можно избежать, если ввести совокупности объектов двух сортов, одну из них называть классами, а другую — множествами, причем множествами будут только те из классов, которые сами могут быть элементами других классов. Кроме того, следует считать, что множества строятся по шагам. Для каждого текущего шага предшествующие шаги, если они имеются, осуществляются раньше (в логическом, а не во временном смысле) текущего шага. Таким образом, отношение "раньше" упорядочивает шаги. Каждое множество будет построено после некоторого количества шагов и лишь после этого может быть использовано. Когда же множество еще строится путем выбора его элементов, то оно не готово как объект и его нельзя использовать в качестве элемента, например самого себя.

Ограничения подобного рода позволяют избежать парадоксов, однако целесообразнее ограничиться рассмотрением только тех множеств, существование которых может быть доказано на основе некоторой системы аксиом.

Такая система предложена Э. Цермело* в 1908 г., затем она была несколько расширена А. Френкелем** и носит название *системы аксиом Цермело–Френкеля* (ZF).

В систему ZF входят следующие аксиомы.

1. *Аксиома объемности* (*экстенсиональности*): всякое множество полностью определяется своими элементами. Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов: $\forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)\leftrightarrow A=B$.
2. *Аксиома объединения* (*суммы*): объединение всех элементов любого множества A есть множество, т. е. для любого множества A существует множество $\cup A$, состоящее в точности из всех элементов, принадлежащих элементам множества A. Если $\exists A$, то $\exists \cup A=\{a\,/\,a\in b$ для некоторого $b\in A\}$.
3. *Аксиома степени* (*аксиома множества всех подмножеств*): совокупность всех подмножеств произвольного множества A является множеством. Если $\exists A$, то $\exists P(A)=\{B/B\subseteq A\}$.
4. *Аксиома подстановки* (*замены*): для каждого множества A и функции f, определенной на A, существует множество, содержащее в точности объекты $f(x)$ для $x\in A$ $\exists B=\{y/x\in A\wedge y=f(x)\}$.

* Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело (1871–1953) — немецкий математик.

** Абрахам Адольф Френкель (1891–1965) — израильский математик.

5. *Аксиома регулярности* (*фундирования*). Множество A называется *фундированным*, если каждое множество, содержащее A, имеет минимальный элемент. Всякое непустое множество A имеет элемент $a\in A$, для которого $a\cap A=\varnothing$, т. е. этот элемент минимален. Действительно, пусть $a\in A$; если a и A не пересекаются, то a и есть искомый минимальный элемент множества A. Эту аксиому можно сформулировать и таким образом: не существует бесконечно убывающей последовательности множеств $a_1\supseteq a_2\supseteq\ldots$
6. *Аксиома бесконечности.* Она гарантирует существование бесконечного множества — множества натуральных чисел $\exists N=\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$, где $0=\varnothing$, $n+1=n\cup\{n\}$.
7. *Аксиома выделения.* Для любого множества A и свойства F такого, что для любого $a\in A$ утверждение $F(x)$ либо истинно, либо ложно, существует множество $B=\{a/a\in A\wedge F(a)=1\}$, состоящее в точности из тех элементов множества A, для которых F истинно. Название аксиомы объясняется тем, что мы выделяем такие $a\in A$, которые удовлетворяют $F(x)$, из всех элементов множества A.

Иногда вместо аксиомы выделения в систему аксиом включают две аксиомы:

1. *Аксиома существования пустого множества* $\exists\varnothing$.
2. *Аксиома существования пары:* если $\exists A$ и $\exists B$, то $\exists\{A,B\}$.

Эти две аксиомы можно легко вывести из приведенных семи основных аксиом. Например, $\varnothing=\{x/x\neq x\}$. Пусть A — произвольное множество. Оно существует по аксиоме бесконечности. Тогда $\forall x(x\neq x\to x\in A)$ и по аксиоме выделения $\exists\varnothing=\{x/x\neq x, x\in A\}$.

Для того чтобы система аксиом теории множеств была полной, т. е. адекватно формализовала все известные приемы математических рассуждений, необходимо к аксиомам системы ZF добавить еще одну из двух конкурирующих друг с другом аксиом: аксиому выбора (AC)* или аксиому детерминированности (AD)*. Система аксиом ZF с добавленной аксиомой выбора называется *системой аксиом ZFC*.

* AC — сокращение от axiom of choice (англ.), AD — сокращение от axiom of determinateness (англ.).

2 Зак. 4382

Аксиома выбора предложена Э. Цермело в 1904 г. Пусть для каждого $x \in X$ задано множество $A_x \neq \varnothing$. Выбрав в каждом из множеств A_x некоторый элемент $y \in A_x$, получим функцию f, определенную на X, и такую, что $f(x) \in A_x$ для всех $x \in X$, т. е. $f(x) = y$. Эта функция называется *функцией выбора*.

Аксиома выбора. **Для всякого семейства непустых множеств A_x существует функция выбора, т. е. $\forall A_x \neq \varnothing \ \exists f : P(A_x) \to A_x$, что $f(X) \in X$ для $\forall X \subseteq A_x, X \neq \varnothing$.**

Наиболее "прозрачная" формулировка аксиомы выбора такова: для любого непустого множества A_X попарно непересекающихся множеств существует некоторое множество, содержащее в качестве своих аргументов ровно по одному элементу из каждого элемента множества A_X.

Эта аксиома вызвала много споров и серьезные возражения крупных математиков. Основные возражения касались неконструктивного характера самой аксиомы: о функции выбора, существование которой постулируется аксиомой, в общем случае ничего не известно, и нельзя сказать, чему равно значение $f(x)$ для конкретных $x \in X$. Тем не менее, аксиома выбора играет ключевую роль в системе аксиом. Кроме того, она неявно присутствует в доказательстве многих важных утверждений из математического анализа и теории меры, например, в таком: если x — предельная точка множества действительных чисел X, то существует последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ точек множества X, сходящихся к x. Этот пример показывает, что два стандартных определения предельной точки (одно через окрестности, а другое через последовательности) не будут эквивалентными, если нет аксиомы выбора.

Альтернативной аксиоме выбора является предложенная в 1962 г. Мычельским и Штейнгаузом* аксиома детерминированности (AD).

Рассмотрим множество A бесконечных последовательностей натуральных чисел, определяющих следующую бесконечную игру G_A для двух игроков. Игрок I пишет натуральное число n_0, затем игрок II пишет натуральное число n_1 и так далее по очереди. Если получающаяся в результате игры последовательность $n_0, n_1, \ldots, n_k, \ldots$ принадлежит множеству A, то выигрывает

* Гуго Дионисий Штейнгауз (1887–1972) — австрийско-польский математик.

игрок I, в противном случае игрок II. Игра G_A называется детерминированной, если либо игрок I, либо игрок II имеют выигрывающую стратегию.

Аксиома детерминированности. **Всякое множество $A \subseteq I$ детерминировано.** Здесь I — бэровское* пространство (множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел).

Аксиома детерминированности создана, чтобы получить более привлекательные следствия, чем те, которые дает аксиома выбора. В целом эти две конкурирующие аксиомы дают противоположные следствия в тех областях, где они применимы.

Аксиома выбора имеет ряд следствий, в определенной степени нежелательных или приводящих к "парадоксальным" примерам множеств, противоречащим нашей интуиции, вроде парадокса Банаха**—Тарского***: используя аксиому выбора, можно разбить шар на конечное число частей, которые затем можно переставить так, что получится два шара такого же размера, как и исходный. Однако эта аксиома оказывает четкое организующее влияние на бесконечные мощности, делает более "регулярной" структуру бесконечных множеств, сравнивая их по величине и располагая в иерархию алефов. Ее роль особенно важна при изучении наиболее общих топологических пространств, произвольных множеств и порядковых чисел, где она органически входит в структуру большинства рассуждений и построений.

Аксиома детерминированности (AD) противоречит аксиоме выбора (AC). В свою очередь, AD, в отличие от AC, не дает ясной картины бесконечных мощностей и почти не используется в топологии. Зато многие следствия AD укладываются в естественный эвристический принцип: если нет "индивидуальных" примеров множеств с каким-либо свойством, то AD влечет отсутствие множеств, обладающих этим свойством. Кроме того, эта аксиома широко применяется в задачах из теории проективных множеств, неразрешимых с помощью AC.

Выбор между аксиомой детерминированности и аксиомой выбора возможен, очевидно, лишь со временем путем сравнения красоты и богатства теорий, построенных на этих аксиомах.

* Рене Луи Бэр (1874–1932) — французский математик.
** Стефан Банах (1892–1945) — польский математик.
*** Альфред Тарский (1902–1983) — польский математик.

Глава 2

Комбинаторика

2.1. Основные определения комбинаторного анализа

Бытует мнение, что комбинаторные задачи элементарны. Конечно, это не так. Число комбинаторных задач и их разнообразие быстро растет. К их решению прямо или косвенно приводят многие практические задачи. При этом оказывается, что несмотря на заманчивую простоту постановки комбинаторные задачи в большинстве очень трудны; многие из них не поддаются решению до сих пор. К числу современных задач, решаемых комбинаторными методами, относятся:

1. *Задачи на размещения* — задачи о расположении, например, на плоскости предметов, обладающих свойствами дальнодействия.
2. *Задачи о покрытиях и заполнениях* — например, задачи о заполнении заданных пространственных фигур меньшими телами заданных форм и размеров.
3. *Задачи о маршрутах* — задачи оптимального плана, например задачи на отыскание кратчайшего пути и т. п.
4. *Комбинаторные задачи теории графов* — задачи сетевого планирования, например, задачи транспортных и электрических сетей, задачи об окрашивании графов, задачи о перечислении вершин и т. п.
5. *Перечислительные задачи*, в которых речь идет о числе предметов, составляемых из данного набора элементов при соблюдении определенных правил.

В задачах комбинаторного анализа исследуются дискретные множества, т. е. множества, составленные из отдельных обособленных элементов. В большинстве случаев эти множества конечные, но не исключается и рассмотрение множеств, состоящих из бесконечного числа элементов. Особенность комбинаторных

задач заключается в том, что в них преимущественное внимание уделяется двум видам операций: отбору подмножеств и упорядочению элементов. Эти две операции и являются основными комбинаторными.

С операцией отбора подмножеств связано понятие выборки, с которым можно связать как осуществление операции отбора, так и ее результат — само выбранное подмножество.

Подмножество из r элементов, выбранное из множества S_n, состоящего из n элементов, называется (n,r)-*выборкой*, а r — *объемом* этой выборки. Если (n,r)-выборки рассматриваются с учетом порядка элементов в них, то они называются (n,r)-*перестановками*. Если же порядок элементов в выбранных подмножествах не важен, то соответствующие выборки называются (n,r)-*сочетаниями*.

В выборках могут допускаться и не допускаться повторения элементов. Упорядоченная (n,r)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется *перестановкой с повторениями* из n элементов по r или (n,r)-перестановкой с повторениями. Если элементы упорядоченной (n,r)-выборки попарно различны, то такая выборка называется (n,r)-*перестановкой без повторений*. Число (n,r)-перестановок обозначается символом $P_{n,r}$, или $P(n,r)$, а число перестановок с повторениями — $\widetilde{P}_{n,r}$, или $\widetilde{P}(n,r)$. P — первая буква слова permutation (англ. перестановка). До сих пор во многих учебниках (n,r)-перестановки называются *размещениями* и обозначаются символом A_n^r, собственно же перестановками называются упорядоченные (n,n)-выборки. A — первая буква слова arrangement (англ. размещение, приведение в порядок). Неупорядоченная (n,r)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется *сочетанием с повторениями* из n элементов по r.

Число сочетаний без повторений обозначается символами $C(n,r)$, C_n^r, $\binom{n}{r}$, с повторениями — $\widetilde{C}(n,r)$, или $\widetilde{C}_n^r$. C — первая буква слова combination (англ. сочетание). Наиболее употребительным является обозначение C_n^r. Символ $\binom{n}{r}$ называется *символом Аппеля**.

* Поль Эмиль Аппель (1855–1930) — французский математик.

- **Пример 1.** Пусть $A=\{a,b,c\}$, $r=2$. Указать все упорядоченные и неупорядоченные выборки с повторениями и без повторений из трех элементов по два.

  1. $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ — девять перестановок с повторениями, $\widetilde{P}_{3,2}=9$.
  2. ab, ac, ba, bc, ca, cb — шесть перестановок без повторений, $P_{3,2}=6$.
  3. ab, ac, bc — три сочетания без повторений, $C_3^2=3$.
  4. aa, ab, ac, bb, bc, cc — шесть сочетаний с повторениями, $\widetilde{C}_3^2=6$.

2.2. Правило суммы и правило произведения

Основной комбинаторной задачей является подсчет числа (n,r)-выборок при различных условиях. Опыт выполнения комбинаторных операций отбора подмножеств привел к следующим двум логическим правилам.

1. *Правило суммы.* Если из множества S подмножество A (которое может состоять и из одного элемента) можно выбрать n способами, а подмножество B, отличное от A, m способами и при этом выборы A и B таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть получены одновременно, то выбор из множества S множества $A\cup B$ можно получить $n+m$ способами.

   Прокомментируем это правило. Если $A\cap B=\varnothing$, то A и B называются *непересекающимися множествами*, в частности, если $A_i\cap A_j=\varnothing$ при всех $i,j=1,2,\ldots,r$, $i\neq j$, то $S=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r$ называется разбиением множества S на непересекающиеся подмножества или просто *разбиением*. Правило суммы можно сформулировать и в терминах теории множеств: если даны n-множество A и m-множество B, то при $A\cap B=\varnothing$ объединение $A\cup B$ будет $(n+m)$-множеством. Если дано разбиение $S=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r$, где $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i,j=1,2,\ldots,r$, $i\neq j$, и если A_i есть n_i-множество $(i=1,2,\ldots,r)$, то множество S есть $\sum_{i=1}^{r} n_i$-множество.

2. *Правило произведения.* Если из множества S подмножество A может быть выбрано n способами, а после каждого такого выбора подмножество B можно выбрать m способами, то выбор A и B в указанном порядке можно осуществить $n \cdot m$ способами.

В терминах теории множеств это правило соответствует понятию декартова произведения множеств: если A является n-множеством, а B m-множеством, то $A \times B$ окажется $n \cdot m$-множеством. Пусть A_i суть n_i-множества, $i = 1,2,...,r$. Построим множества: $M_1 = A_1$, $M_2 = A_1 \times A_2 = M_1 \times A_2$, $M_3 = M_2 \times A_3,..., M_r = M_{r-1} \times A_r$. Тогда M_r будет ($n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$)-множеством.

При решении практических задач правило произведения часто используется при подсчете числа вариантов при проведении (n, r)-выборок. В этом случае его формулировка может выглядеть, например, так.

Пусть требуется выполнить одно за другим r действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие — n_2 способами и так до r-го действия, которое можно выполнить n_r способами, то все r действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$ способами.

- **Пример 1.** В классе изучают 10 предметов. В понедельник шесть уроков, причем все уроки различные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

  Речь в задаче идет о 6 перестановках без повторения из 10 элементов. Первый урок можно поставить в расписание десятью способами, второй девятью, третий — восемью и т. д. По правилу произведения число способов составления расписания будет равно $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

- **Пример 2.** Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на пять?

  Вспомним признаки делимости. Число делится на пять, если оно оканчивается на нуль или на пять. В задаче речь идет о (n, r)-перестановках с повторениями. Первая цифра может быть выбрана из множества 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Нуль не может участвовать в выборке, ибо при его выборе число будет четырехзначным, а не пятизначным. Итого, девять вариантов выбора для первой цифры. Вторая, третья и четвертая цифры могут быть любыми из набора 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Последняя пятая цифра выбирается только из 0 и 5. Таким образом, $N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$.

2.3. Формулы для расчета перестановок и сочетаний без повторений и с повторениями

Найдем сначала число всех возможных (n, r)-перестановок, т. е. размещений. Задача сводится к последовательному применению правила произведения. В самом деле, в n-множестве S_n имеется n возможностей для выбора первого элемента (n, r)-перестановки; для выбора второго элемента останется $n-1$ возможностей, т. к. речь сейчас идет о перестановках без повторения, т. е. один раз выбранный элемент уже не участвует в дальнейшей выборке. Аналогично рассуждая, получаем, что для выбора r-го элемента останется $n-r+1$ возможностей. Тогда

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)..(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \qquad (2.3.1)$$

Действительно,

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-r) \cdot (n-r+1) \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-r)} = (n-r+1) \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$$

Здесь принято $0! = 1! = 1$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. **Число упорядоченных r-элементных подмножеств множества S_n, состоящего из n элементов, равно $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$.**

В частном случае, когда $n = r$, получаем $A_n^n = P_{n,n} = P_n = \frac{n!}{0!} = n!$ Это число способов упорядочения n-элементного подмножества.

Подсчитаем теперь число всех возможных (n, r)-перестановок с повторениями. В этом случае после выбора любого элемента (n, r)-перестановки остаются все те же n возможностей для выбора следующего элемента. Следовательно, по правилу произведения число (n, r)-перестановок с повторениями равно:

$$\widehat{A}_n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{r \text{ раз}} = n^r. \qquad (2.3.2)$$

Подсчитаем теперь число (n, r)-сочетаний. Пусть имеется ряд неупорядоченных (n, r)-выборок без повторения элементов. Обозначим количество

элементов множества, состоящего из всех возможных (n,r)-сочетаний, через C_n^r. Сравним числа C_n^r и A_n^r. A_n^r — число упорядоченных выборок из n элементов по r; C_n^r — число неупорядоченных выборок из n элементов по r. Очевидно, что каждую неупорядоченную выборку объема r можно упорядочить $r!$ различными способами, то есть $r!C_n^r = A_n^r$. Тогда

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad (2.3.3)$$

Полученный результат формулируется в виде теоремы.

Теорема 2.2. **Число всех неупорядоченных r-элементных подмножеств множества S_n, состоящего из n элементов, равно $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.**

Рассмотрим более сложную задачу о числе $(r_1, r_2, ..., r_k)$-разбиений n-множества S_n, т. е. разбиений вида $S_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,...,k$, причем A_i есть r_i-подмножество множества S_n. Очевидно, $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. Рассуждаем аналогично тому, как это делалось при нахождении числа A_n^r. Для выбора r_1-подмножества A_1 из S_n имеется $C_n^{r_1}$ возможностей, после этого r_2-подмножество A_2 можно выбирать только из оставшихся $n - r_1$ элементов, т. к. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Этот выбор можно осуществить $C_{n-r_1}^{r_2}$ способами и т. д. Применяя правило произведения, получаем, что искомое число $(r_1, r_2, ..., r_k)$-разбиений n-множества S_n равно

$$C_n^{r_1} C_{n-r_1}^{r_2} C_{n-r_1-r_2}^{r_3} ... C_{n-\sum_{i=1}^{k-1} r_i}^{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! ... r_k!}. \qquad (2.3.4)$$

Действительно,

$$\frac{n!}{r_1!(n-r_1)!} \cdot \frac{(n-r_1)!}{r_2(n-r_1-r_2)!} \cdot ... \cdot \frac{(n-r_1-r_2-...-r_{k-1})!}{r_k!(n-r_1-r_2-...-r_k)!} = \frac{n!}{r_1! r_2! ... r_k!}.$$

Итак, число способов, которыми можно представить множество S_n из n элементов в виде суммы k неупорядоченных множеств $A_1, A_2, ..., A_k$, число элементов которых составляет соответственно $r_1, r_2, ..., r_r$, равно $\dfrac{n!}{r_1! r_2! ... r_k!}$.

▪ **Пример 1.** Найти число различных слов (бессмысленных), которое можно получить, переставляя буквы слова *математика*.

Разные буквы слова *математика* представляют собой множества $A_1, A_2, ..., A_k$, на которые можно разбить исходное слово и различные объединения которых будут давать новые бессмысленные слова. Здесь $k = 6$, $A_1 = \{a, a, a\}$, $A_2 = \{m, m\}$, $A_3 = \{м, м\}$, $A_4 = \{e\}$, $A_5 = \{u\}$, $A_6 = \{к\}$. Отсюда $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 2$, $r_4 = r_5 = r_6 = 1$. Исходное множество $S_n = \{м, a, m, e, м, a, m, u, к, a\}$, $n = 10$. Тогда по формуле (2.3.4)

$$N = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 151\,200.$$

Подсчитаем, наконец, число (n,r)-сочетаний с повторениями из множества S_n. Пусть элементы множества S_n занумерованы числами $1,2,...,n$. Так как множество S_n конечно или счетно, то эта операция всегда возможна. Тогда вместо (n,r)-сочетаний множества S_n можно рассматривать (n,r)-сочетания из эквивалентного ему множества $S' = \{1,2,...,n\}$ в силу взаимно-однозначного соответствия.

Всякая (n,r)-выборка из S' может быть записана в виде $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$, где $n_1 \le n_2 \le ... \le n_r$, причем равенство возможно в силу того, что рассматриваются выборки с повторениями. r-выборке $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$ поставим в соответствие r-множество $\{n_1, n_2+1, n_3+2, ..., n_r+r-1\}$, в котором все элементы, очевидно, различны. Соответствие между $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$ и $\{n_1, n_2+1, n_3+2, ..., n_r+r-1\}$ опять взаимно-однозначное, причем r-множества $\{n_1, n_2+1, n_3+2, ..., n_r+r-1\}$ являются r-сочетаниями без повторений из $n+r-1$-множества $S' \cup \{1,2,...,r-1\}$. По формуле (2.3.3) число $(n+r-1, r)$-сочетаний без повторения равно C_{n+r-1}^r. Тогда

$$\widehat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{n(n+1)..(n+r-1)}{r!}. \qquad (2.3.5)$$

2.4. Бином Ньютона* и полиномиальная теорема

2.4.1. Бином Ньютона

Исторически название *бином Ньютона* несправедливо, ибо формулу $(a+b)^n$ знали еще среднеазиатские математики, начиная с Омара Хайяма** (около 1100 г.); в Европе до Ньютона ее знал Паскаль***. Заслуга Ньютона в том, что он обобщил эту формулу для нецелого показателя n. Итак,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^k + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^l a^l b^{n-l} + \ldots$$

$$\ldots + C_n^n a^n b^0. \qquad (2.4.1)$$

Формула (2.4.1) легко доказывается методом математической индукции. Действительно, при $n=1$: $(a+b)^1 = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a+b$. Далее, предположив, что формула верна для $n-1$, получим

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) = a\cdot(a+b)^{n-1} + b\cdot(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{(n-1)-k+1}.$$

Заменим индекс суммирования $k = j-1,\ j = k+1$, тогда $\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} = \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} a^j b^{n-j}$. Отсюда $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k}$. Выровняем пределы изменения индексов суммирования в обеих суммах. Для этого введем дополнительно $C_{n-1}^{-1} = 0,\ C_{n-1}^n = 0$, тогда $\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k}$ и $\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^k a^k b^{n-k}$.

---

* Исаак Ньютон (1643–1727) — английский физик, астроном и математик.

** Гийас ад-Дин Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям (около 1048–после 1122) — иранский математик, астроном и поэт.

*** Блез Паскаль (1623–1662) — французский математик.

Отсюда $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right) a^k b^{n-k} =$

$$= \left\langle \begin{array}{c} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \\ = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\ = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \end{array} \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Для n, нецелого при $|x| < 1$, формула имеет вид $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x +$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots .$$

Биномиальное разложение служит основой для многих комбинаторных формул, например:

1. $a = b = 1$. Получим $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Это число равно числу всех возможных неупорядоченных подмножеств множества S_n, состоящего из n элементов. Действительно, т. к. C_n^k — число k-элементных подмножеств ((n,k)-сочетаний) множества S_n, то сумма в левой части есть число всех подмножеств.

2. $a = 1,\ b = -1$. Отсюда $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$. Из этого равенства следует, что суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных и на нечетных местах, равны между собой и каждая равна 2^{n-1}.

2.4.2. Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема — обобщение формулы бинома на случай k слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \ge 0,\, r_2 \ge 0, \ldots, r_k \ge 0, \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n.}} \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}, \qquad (2.4.2)$$

где суммирование проводится по всем решениям уравнения $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$ в целых неотрицательных числах, т. е. выражение $(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n$ равно сумме всех возможных слагаемых вида $\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} ... a_k^{r_k}$; $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$.

- **Пример 1.** Вычислить $(x + y + z)^3$.

Раскрывая скобки последовательно, производя умножение многочлена на многочлен и приводя подобные члены, получаем $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$. Всего в выражении десять членов. Этот же результат легко найти по полиномиальной формуле (2.4.2) при $n = 3$, $k = 3$. Система условий суммирования здесь имеет вид $\begin{cases} r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, r_3 \geq 0, \\ r_1 + r_2 + r_3 = 3. \end{cases}$ Различных числовых коэффициентов тоже три: $\frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} = 1$, $\frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 0!} = 3$, $\frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 6$. Для более удобного написания конечного результата лучше составить все возможные комбинации индексов r_1, r_2 и r_3 и поместить их в табл. 2.1.

Таблица 2.1

r_1	r_2	r_3
3	0	0
0	3	0
0	0	3
2	1	0
2	0	1
1	2	0
0	2	1
1	0	2
0	1	2
1	1	1

Тогда $(x + y + z)^3 = 1 \cdot (x^3 + y^3 + z^3) + 3 \cdot (x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2) + 6 \cdot xyz$, то же самое, что было получено раньше.

2.5. Практическое занятие 3. Правила суммы и произведения. Перестановки и сочетания. Свойства биномиальных коэффициентов

2.5.1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из них можно использовать не более одного раза?

2.5.2. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

2.5.3. На одной из боковых сторон треугольника взято n точек, на другой — m точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной стороне.

а) сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника?

б) на сколько частей делят треугольник эти прямые?

2.5.4. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

2.5.5. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

2.5.6. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется:

а) хотя бы один туз;

б) ровно один туз;

в) не менее двух тузов;

г) ровно два туза?

2.5.7. Дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

2.5.8. В соревнованиях по гимнастике две команды имели одинаковое число участников. В итоге общая сумма баллов, полученных всеми участни-

ками, равна 156. Сколько было участников, если каждый из них получил оценки только 8 или 9 баллов?

2.5.9. Расстояние от A до B — 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых расстояния от A до B записаны, как показано на рис. 2.1. Сколько среди этих столбов таких, на которых есть только две различные цифры?

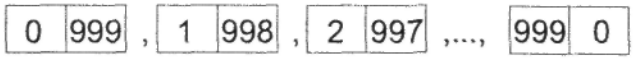


Рис. 2.1

2.5.10. В некотором царстве каждые два человека отличаются набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения царства (максимальное количество зубов у человека — 32).

2.5.11. В роте имеется три офицера и сорок солдат. Сколькими способами может быть выделен наряд, состоящий из одного офицера и трех солдат?

2.5.12. На рояле 88 клавиш. Сколько существует последовательностей из шести попарно различных звуков? (В последовательности звуки идут один за другим.) Сколько существует аккордов из шести звуков? (Аккорд получается, если любые 6 клавиш нажаты одновременно.)

2.5.13. Сколько членов получится после раскрытия всех скобок в выражении $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)(g+1)$?

2.5.14. Сколько существует чисел от 0 до 10^n, в которые не входят две подряд идущие друг за другом одинаковые цифры?

2.5.15. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты, так, чтобы среди них были карты каждой масти?

2.5.16. Какова вероятность, купив один билет, угадать в спортлото (из 49):

а) k номеров ($k = 1,2,...,6$);

б) хотя бы k номеров?

2.5.17. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

2.5.18. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

2.5.19. Сколько различных делителей имеет число:

а) 2310;

б) 10!?

2.5.20. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дадут не более трех имен, а общее число имен равно 300?

2.5.21. На перекрестке A автомобилист разбил стекло левой фары (рис. 2.2), и теперь ему надо кратчайшим путем попасть в ремонтную мастерскую B, не попав при этом в пункт M. Сколькими способами он может выбрать маршрут?

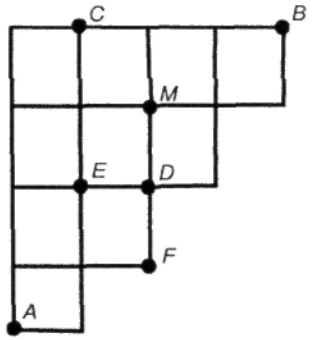


Рис. 2.2

2.5.22. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии?

2.5.23. Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении:

а) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{20}$;

б) $\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2}\right)^{100}$.

2.5.24. Найти коэффициент при t^k в разложении:

а) $\left(2+t^4+t^7\right)^{15}$, $k=17$;

б) $\left(2+t-2t^3\right)^{20}$, $k=10$.

2.5.25. Какое число больше: $99^{50}+100^{50}$ или 101^{50}?

2.5.26. Пусть n и m — целые положительные числа. Доказать

а) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n\cdot 2^{n-1}$;

б) $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$;

в) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)C_n^k = (n+1)\cdot 2^n$.

2.5.27. Доказать, что для любого $m=0,1,2,\ldots,n$ справедливо тождество $C_n^r = \sum_{k=0}^{n} C_{n-m}^k \cdot C_m^{r-k}$.

2.5.28. Доказать, что $\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i}\cdot 2^{n-2i} = \frac{3^n+1}{2}$.

2.5.29. Доказать тождества:

а) $C_{2n-1}^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} C_{2n-i-1}^{n-1}$;

б) $C_{2n}^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} C_{2n-i}^{n}$.

2.5.30. Доказать, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{i-1}}{C_{2n-1}^{i}} = \frac{2}{n+1}$, $n\geq 1$.

2.6. Метод рекуррентных соотношений

В комбинаторном анализе существует целый ряд подходов для изучения комбинаторных объектов и чисел:

1. *Теоретико-множественный подход*. Связан с вычислениями мощностей конечных множеств. Для решения таких вопросов необходима дополнительная информация, т. е. надо заранее знать мощности некоторых подмножеств. К этому пункту относится, например, теорема и формула включений и исключений.
2. *Алгебраический подход*. Основан на использовании вспомогательных, просто получаемых комбинаторных тождеств для нахождения интересующих исследователя комбинаторных чисел. Пример — метод рекуррентных соотношений.
3. *Применение формул обращения*. Формулы обращения связывают между собой различные комбинаторные числа и могут быть получены самыми различными способами.
4. *Метод производящих функций*. Используется для перечисления комбинаторных чисел и установления комбинаторных тождеств.

Рассмотрим один пример алгебраического подхода — *метод рекуррентных соотношений*. Он состоит в том, что решение комбинаторной задачи с n предметами выражается через решение аналогичной задачи с меньшим числом предметов с помощью некоторого соотношения, которое называется *рекуррентным* (от англ. recurrence — возвращение). Пользуясь этим соотношением, искомую величину можно вычислить исходя из того, что для небольшого количества предметов (одного, двух) решение задачи обычно очевидно или легко находится.

В качестве примера найдем число сочетаний из n по r с повторениями. Соответствующая формула уже известна, она имеет вид $\widehat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$. Получим ее теперь методом рекуррентных соотношений.

Докажем вначале вспомогательную формулу, выражающую одно из многочисленных свойств биномиальных коэффициентов:

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-1} + \ldots + C_{r-1}^{r-1}. \qquad (2.6.1)$$

Покажем, что справедливо равенство $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$. Здесь C_n^r — общее число (n,r)-выборок из множества S_n с n элементами, C_{n-1}^r — число $(n-1,r)$-выборок, т. е. число выборок, не содержащих один (например первый) элемент из множества S_n с n элементами (рис. 2.3). В этом случае n-множество S_n становится $(n-1)$-множеством, т. к. первый элемент не выбирается, он фиксирован.

C_{n-1}^{r-1} — число r-выборок из n-множества, содержащих первый элемент. Этот элемент в r-множестве содержится всякий раз, т. е. фактически все ос-

тальные элементы выбираются из $r-1$ элемента, кроме того, первый элемент опять фиксирован и в множестве S_n, как в предыдущем случае, и он не выбирается из n-множества, которое становится ($n-1$)-множеством.

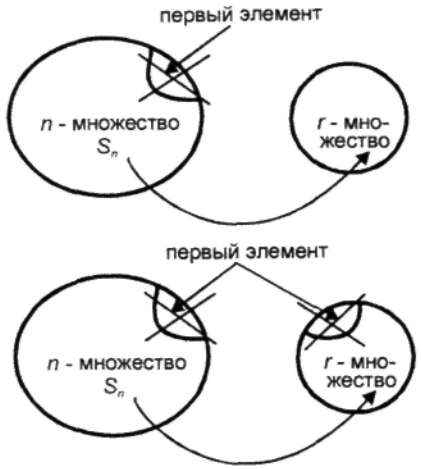


Рис. 2.3

По правилу суммы $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$. Применим эту формулу последовательно $n-r$ раз, получим: $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$,

$C_{n-1}^r = C_{n-2}^r + C_{n-2}^{r-1}$,

$C_{n-2}^r = C_{n-3}^r + C_{n-3}^{r-1}, \ldots,$

$C_{r+1}^r = C_r^r + C_r^{r-1}$. Но $C_r^r = C_{r-1}^{r-1} = 1$, тогда окончательно $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-1} + \ldots + C_r^{r-1} + C_{r-1}^{r-1}$.

Вернемся к доказательству исходного соотношения $\widehat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$. Зададим начальные условия. Для этого рассмотрим число сочетаний с повторениями для малых значений индексов. Очевидно, что $\widehat{C}_n^1 = n$ и $\widehat{C}_1^r = 1$. Действительно, $\widehat{C}_n^1$ — число сочетаний из n элементов по одному. Ясно, что из n элементов можно выбрать ровно n различных выборок, состоящих из одного элемента. $\widehat{C}_1^r$ — число r-сочетаний из одного элемента. Для любого $r > 0$ из одного элемента можно получить только одно r-сочетание, а именно выборку, составленную из r одинаковых элементов. Элементы здесь могут быть одинаковыми, т. к. рассматриваются выборки с повторениями.

Для вывода общей формулы потребуется еще одно вспомогательное соотношение $\widehat{C}_n^r = \widehat{C}_{n-1}^r + \widehat{C}_n^{r-1}$. Иллюстрацией дальнейших рассуждений служит рис. 2.3. Зафиксируем в S_n некоторый элемент. Тогда при выборе каждое r-сочетание либо содержит этот элемент, либо не содержит его. Если r-сочетание не содержит этот элемент, то он не должен вообще попасть в r-сочетание, следовательно, его надо исключить из множества S_n, т. е. в S_n остаются для выбора $n-1$ элементов. Отсюда число r-сочетаний с повторениями из $n-1$ элементов равно $\widehat{C}_{n-1}^r$. Если r-сочетание уже содержит этот элемент, тогда остальные $r-1$ элементов можно выбрать из тех же n элементов множества S_n, т. к. допускаются любые повторения. Число способов такого выбора равно $\widehat{C}_n^{r-1}$.

По правилу суммы $\widehat{C}_n^r = \widehat{C}_{n-1}^r + \widehat{C}_n^{r-1}$. Применим теперь эту формулу для доказываемого исходного соотношения $\widehat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$. А именно $\widehat{C}_n^2 = \widehat{C}_{n-1}^2 + \widehat{C}_n^1$, $\widehat{C}_{n-1}^2 = \widehat{C}_{n-2}^2 + \widehat{C}_{n-1}^1$, $\widehat{C}_{n-2}^2 = \widehat{C}_{n-3}^2 + \widehat{C}_{n-2}^1, \ldots, \widehat{C}_2^2 = \widehat{C}_1^2 + \widehat{C}_2^1$.

Отсюда $\widehat{C}_n^2 = \widehat{C}_n^1 + \widehat{C}_{n-1}^1 + \widehat{C}_{n-2}^1 + \ldots + \widehat{C}_2^1 + \widehat{C}_1^2 =$

$$= \underbrace{n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1}_{\text{арифметическая прогрессия, } d=1} = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2.$$

Аналогично $\widehat{C}_n^3 = \widehat{C}_{n-1}^3 + \widehat{C}_n^2$, $\widehat{C}_{n-1}^3 = \widehat{C}_{n-2}^3 + \widehat{C}_{n-1}^2$, $\widehat{C}_{n-2}^3 = \widehat{C}_{n-3}^3 + \widehat{C}_{n-2}^2, \ldots$

$\ldots, \widehat{C}_3^3 = \widehat{C}_2^3 + \widehat{C}_3^2$, $\widehat{C}_2^3 = \widehat{C}_1^3 + \widehat{C}_2^2$. Отсюда можно получить формулу для $\widehat{C}_n^3$. Выполним аналогичные подстановки как в предыдущем случае: $\widehat{C}_n^3 = \widehat{C}_n^2 + \widehat{C}_{n-1}^2 + \widehat{C}_{n-2}^2 + \ldots + \widehat{C}_2^2 + \widehat{C}_1^3$. В данном случае лучше не суммировать отрезок числового ряда, а воспользоваться только что полученной формулой для предыдущего индекса $\widehat{C}_n^2 = C_{n+1}^2$. Тогда $\widehat{C}_n^3 = C_{n+1}^2 + C_n^2 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_3^2 + C_2^2$, т. к. $\widehat{C}_1^3 = 1 = C_2^2$. Но $C_{n+1}^2 + C_n^2 + \ldots + C_3^2 + C_2^2 = C_{n+2}^3$ по выведенной формуле (2.6.1). Таким образом, получена очередная формула $\widehat{C}_n^3 = C_{n+2}^3$. Формулы для последующих индексов находятся аналогично. Видно, что доказательство с помощью рекуррентных соотношений весьма громоздкое и утомительное занятие.

2.7. Метод производящих функций

Метод производящих функций не является элементарным, т. к. при его использовании приходится иметь дело с некоторыми понятиями теории функциональных рядов. Метод производящих функций — один из самых развитых теоретических методов комбинаторного анализа и один из самых сильных в приложениях. Его главные идеи были высказаны в конце XVIII в. в работах Лапласа* по теории вероятностей. Для случаев с конечным числом исходов аппарат теории вероятностей чисто комбинаторный.

Рассмотрим произведение конечного числа линейных биномов $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$. В правой части равенства коэффициенты имеют вид $a_k=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_k=1,\\ i_1<i_2<\dots<i_k}}^{n} x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}$. Это легко проверить, например для случая малых n.

Пусть $n=2$. Тогда $(1+x_1t)(1+x_2t)=1+\underbrace{x_1t}_{i_1=1,\,i_2\text{ нет}}+\underbrace{x_2t}_{\substack{i_2=1,\,i_1\text{ нет},\\ \text{т. к. нет } i_1<1}}+\underbrace{x_1x_2t^2}_{\substack{i_1=1,\,i_2=2,\\ i_1<i_2}}$. Для $n>2$ проверка аналогична. В частном случае, когда $x_k=1$, $k=\overline{1,n}$, в качестве коэффициентов a_k получим числа k-сочетаний, т. е.

$$(1+t)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^k. \qquad (2.7.1)$$

Здесь функция $f(t)=(1+t)^n$ и числа C_n^k связаны взаимно-однозначно. Функция $f(t)=(1+t)^n$ есть *производящая функция* последовательности C_n^k. Производящей функцией последовательности $\{a_k\}$ называется сумма степенного ряда $f_a(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$.

Оперировать с такой функцией гораздо удобнее и проще, особенно когда ее можно представить в простой аналитической форме. В то же время эти операции доставляют (производят) необходимую информацию о последовательности r-сочетаний. Идея применения метода производящих функций такова: необходимо вычислить все члены некоторой последовательности $\{a_k\}$.

* Пьер Симон Лаплас (1749–1827) — французский математик, механик и астроном.

С помощью рекуррентного соотношения для a_k или непосредственно из некоторых комбинаторных соображений вычисляют производящую функцию $f_a(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$. Раскладывая затем $f_a(t)$ в ряд и находя коэффициенты при t^k, тем самым находят a_k.

- **Пример 1.** Из формулы бинома Ньютона $f_a(t)=(1+t)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^k$.

  Таким образом, последовательность биномиальных коэффициентов имеет производящую функцию $(1+t)^n$, т. е.

$$\{C_n^0, C_n^1, C_n^2,\dots,C_n^n\}\to(1+t)^n. \qquad (2.7.2)$$

- **Пример 2.** Пусть $a_k=a^k$, $k=0,1,\dots$

  Тогда $\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k=\sum_{k=0}^{\infty}a^k t^k=1+at+a^2t^2+\ldots+a^kt^k+$ $+\ldots=1+(at)+(at)^2+\ldots+(at)^k+\ldots$. Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q=at$. Если $|q|=|at|<1$, то ряд сходится и его сумма $S=f_a(t)=1/(1-at)$. Итак,

$$\{1,a,a^2,a^3,\dots,a^k,\dots\}\to 1/(1-at) \quad \text{при} \quad |at|<1. \qquad (2.7.3)$$

- **Пример 3.** Рассмотрим формулу бинома Ньютона при действительном показателе $\alpha\in R$ $(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\ldots$ $\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}t^k+\ldots$. Пусть $t=-t$ и $\alpha=-1$, тогда $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^k+\ldots$, т. е.

$$\{1,1,1,\dots,1,\dots\}\to\frac{1}{1-t}. \qquad (2.7.4)$$

Если $t=-t$ и $\alpha=-n$, то $\frac{1}{(1-t)^n}=1+nt+\frac{n(n+1)}{2!}t+\ldots$

$$\ldots+\frac{n(n+1)..(n+k-1)}{k!}t^k+\ldots.\ \text{Но}\ n=C_n^1,\ \frac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^2,$$

$$\frac{n(n+1)..(n+k-1)}{k!}=C_{n+k-1}^k\ \text{и т. д.}$$

Тогда $\dfrac{1}{(1-t)^n}=1+C_n^1t+C_{n+1}^2t^2+C_{n+2}^3t^3\ldots+C_{n+k-1}^kt^k+\ldots$, т. е.

$$\left\{1, C_n^1, C_{n+1}^2, C_{n+2}^3,\ldots, C_{n+k-1}^k,\ldots\right\}\to\frac{1}{(1-t)^n}. \qquad (2.7.5)$$

▪ **Пример 4.** Пусть $a_k=\begin{cases}0,\ 0\le k<r,\\ C_k^r,\ k\ge r.\end{cases}$ Тогда $f_a(t)=\dfrac{t^r}{(1-t)^{r+1}}$. Действительно,

$$f_a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k=\sum_{k=r}^{\infty}a_kt^k=\sum_{k=r}^{\infty}C_k^rt^k=\left\langle\begin{matrix}k=r+i,\\ k=r,\ i=0.\end{matrix}\right\rangle=\sum_{i=0}^{\infty}C_{r+i}^rt^{r+i}=$$

$$=t^r\sum_{i=0}^{\infty}C_{r+i}^rt^i=\left\langle\begin{matrix}C_k^r=C_k^{k-r},\\ C_{r+i}^r=C_{r+i}^i\end{matrix}\right\rangle=t^r\sum_{i=0}^{\infty}C_{r+i}^it^i=$$

$$=\left\langle\begin{matrix}\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^kt^k=\dfrac{1}{(1-t)^n},\\ \sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{r+i}^it^i=\dfrac{1}{(1-t)^{r+1}}\end{matrix}\right\rangle=\frac{t^r}{(1-t)^{r+1}}.$$ Итак, для такой числовой последовательности получена производящая функция.

В комбинаторном анализе чаще всего используют три вида производящих функций:

1. *Обычные степенные.*
2. *Экспоненциальные.*
3. *Функции Дирихле**.

Обычные производящие функции (см. примеры 1–3), представляемые в виде $f_a(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kt^k$, соответствуют семействам последовательностей, элементы

* Петер Густав Дирихле (1805–1859) — немецкий математик.

которых являются числами неупорядоченных (n,k)-выборок или функциями от них.

Введем несколько операций в классе производящих функций. $\{f_a(t)\}$ — класс обычных производящих функций $f_a(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kt^k$.

❒ *Суммой* последовательностей $\{a\}=\{a_0,a_1,\ldots\}$ и $\{b\}=\{b_0,b_1,\ldots\}$ называется последовательность $\{c\}=\{a+b\}=\{a_0+b_0,a_1+b_1,\ldots\}=\{c_0,c_1,\ldots\}$, а суммой производящих функций $f_a(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kt^k$ и $f_b(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kt^k$ — производящая функция

$$f_c(t)=f_a(t)+f_b(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k. \qquad (2.7.6)$$

❒ *Произведением* (или *сверткой*) последовательностей $\{a\}$ и $\{b\}$ называется последовательность $\{d\}=\{a\cdot b\}=\{d_0,d_1,\ldots\}$, у которой

$$d_r=a_0b_r+a_1b_{r-1}+a_2b_{r-2}+\ldots+a_rb_0,\ r=0,1,2,\ldots, \qquad (2.7.7)$$

а *произведением* (*сверткой*) производящих функций $f_a(t)$ и $f_b(t)$ — производящая функция

$$f_d(t)=f_a(t)\times f_b(t)=\sum_{k=0}^{\infty}d_kt^k. \qquad (2.7.8)$$

Формула (2.7.7) нуждается в пояснении. Эти коэффициенты получаются при перемножении рядов следующим образом:

$$\begin{cases}r=0,\ d_0=a_0b_0,\\ r=1,\ d_1=a_0b_1+a_1b_0,\\ r=2,\ d_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ r=k,\ d_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_{k-1}b_1+a_kb_0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases} \qquad (2.7.9)$$

Нуль в классе производящих функций $\{f_a(t)\}$ — это $f_0(t)=0$; ей соответствует нулевая последовательность $\{0,0,0,\ldots,0,\ldots\}$.

Единица в классе производящих функций $\{f_a(t)\}$ — это $f_e(t)=1$; ей соответствует единичная последовательность $\{1,0,0,...,0,...\}=e$.

Обратный относительно сложения (противоположный) элемент в классе производящих функций есть следующая функция: $-f_a(t)=f_{-a}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-a_k)t^k$, которой соответствует последовательность $\{-a_0,-a_1,...,-a_k,...\}$.

Обратный элемент относительно умножения в классе производящих функций есть функция $f_a^{-1}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_k t^k$, ей соответствует последовательность $\{\tilde{a}\}=\{\tilde{a}_0,\tilde{a}_1,...\}$, причем $a\cdot\tilde{a}=e,\ a\neq 0$. Так как $a\cdot\tilde{a}=e,\ a\neq 0$, то, учитывая формулы (2.7.9), получаем систему

$$\begin{cases} a_0\tilde{a}_0=1, \\ a_1\tilde{a}_0+a_0\tilde{a}_1=0, \\ a_2\tilde{a}_0+a_1\tilde{a}_1+a_0\tilde{a}_2=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k\tilde{a}_0+a_{k-1}\tilde{a}_1+a_{k-2}\tilde{a}_2+...+a_0\tilde{a}_k=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Неизвестные здесь $\tilde{a}_0,\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_k,...$, количество неизвестных равно количеству уравнений.

Умножение производящей функции на действительное число α определяется по формуле

$$\alpha f_a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\cdot a_k)t^k. \qquad (2.7.10)$$

2.8. Производящие функции для некоторых схем выбора

2.8.1. Производящая функция для (*n*,*r*)-сочетаний с ограниченным числом повторений

В этом случае для получения производящей функции нельзя воспользоваться произведением биномов вида $1+x_k t$, т. е. формулой $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$,

поскольку всякий такой бином отражает лишь две возможности: элемент x_k множества либо не появляется в r-сочетании, либо появляется ровно один раз. Пусть элемент x_k появляется в r-сочетаниях с повторениями $0,1,2,...,j$ раз, тогда точно i появлениям элемента x_k будет соответствовать одночлен $x_k^i t^i$, а по правилу суммы появлению элемента x_k либо 0, либо 1,..., либо j раз должен соответствовать многочлен $1+x_k t+x_k^2t^2+x_k^3t^3+...+x_k^jt^j$. Тогда производящая функция будет иметь вид

$$f(t)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+x_k t+x_k^2t^2+...+x_k^jt^j\right). \qquad (2.8.1)$$

Если нужно найти лишь число a_r соответствующих (n,r)-сочетаний, то необходимо положить $x_1=x_2=...=x_j=1$ и

$$f(t)=\left(1+t+t^2+...+t^j\right)^n=\sum_{k=1}^{l}a_k t^k. \qquad (2.8.2)$$

Коэффициенты a_k будут здесь равны числу сочетаний из n элементов по k с j повторениями.

- **Пример 1.** Рассмотрим сочетания из трех предметов 1, 2, 3; причем 1 и 2 могут встречаться не более двух раз, а 3 — не более одного раза.

  Составим производящую функцию по формуле (2.8.1):

$$f(t)=\left(1+x_1t+x_1^2t^2\right)\left(1+x_2t+x_2^2t^2\right)\left(1+x_3t\right)=1+\left(x_1+x_2+x_3\right)t+\left(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_2^2\right)t^2+\left(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_2^2x_3\right)t^3+\left(x_1^2x_2^2+x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3\right)t^4+x_1^2x_2^2x_3t^5.$$

Если положить $x_1=x_2=x_3=1$, то получим $f(t)=1+3t+5t^2+5t^3+3t^4+t^5$. Здесь коэффициент a_1 равен числу сочетаний из трех по одному элементу не более чем с двумя повторениями, a_2 — из трех элементов по два не более чем с двумя повторениями, a_3 — из трех по три элемента с ограничениями, что первый и второй элемент могут встречаться не более двух раз, а третий не более одного раза. Если же не приравнивать $x_1=x_2=x_3=1$, то, например, коэффициент при t^3, равный $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_2^2x_3$, показывает "качественный" состав r-сочетаний с указанными повторениями: 112,

113, 122, 123, 223. Аналогично коэффициент при t^5 — число r-сочетаний из трех элементов по пять, но с повторениями, тогда такое возможно $a_5 = x_1^2 x_2^2 x_3$: 11223.

2.8.2. Производящая функция для (n,r)-сочетаний с неограниченным числом повторений

Найдем производящую функцию для (n,r)-сочетаний с условием, что хотя бы один элемент каждого вида появится в выборке. Очевидно, что $f_a(t)$ в этом случае будет иметь вид

$$f_a(t) = \left(t + t^2 + \ldots + t^k + \ldots\right)^n = \left[t\left(1 + t + \ldots + t^{k-1} + \ldots\right)\right]^n = t^n (1-t)^{-n} =$$

$$= t^n \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^k. \qquad (2.8.3)$$

Упростим полученную формулу, сделав в ней замену индекса суммирования $n + k = r$, получим $f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^{n+k} = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{r-n} t^r =$

$$= \left\langle \begin{matrix} \text{т. к.} \\ C_n^r = C_n^{n-r} \end{matrix} \right\rangle = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{(r-1)-(r-n)} t^r = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{n-1} t^r = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} t^k. \text{ Здесь } \sum_{k=0}^{n-1} C_{k-1}^{n-1} t^k = 0.$$

Следовательно, число искомых r-сочетаний равно нулю при $r < n$ и C_{r-1}^{n-1} при $r \geq n$. Подобным же образом в производящей функции можно учесть и другие требования, налагаемые на (n,r)-выборки.

2.9. Применение производящих функций для получения комбинаторных чисел

Применим теорию производящих функций и получим явные выражения чисел Фибоначчи*. Числа Фибоначчи B_n равны числу способов расположения n знаков, из которых каждый — нуль или единица, в последовательность, не содержащую двух нулей подряд. Эта последовательность задается рекуррентной формулой

$$\begin{cases} B_0 = 1, \ B_1 = 2, \\ B_n = B_{n-1} + B_{n-2}, \ n \geq 2. \end{cases} \qquad (2.9.1)$$

* Леонардо Фибоначчи Пизанский (1180–1240) — итальянский математик.

Рассмотрим производящую функцию последовательности чисел Фибоначчи $f_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k \to \{B_0, B_1, \ldots, B_k, \ldots\}$. Умножим рекуррентное уравнение в формуле (2.9.1) на t^k и просуммируем полученное выражение от двух до бесконечности. Два числа B_0 и B_1 известны из начальных данных, поэтому необходимо отбросить индексы $k = 0$ и $k = 1$. В результате получим уравнение

$$\sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^k + \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^k \text{ или } \sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = t \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^{k-1} + t^2 \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^{k-2}.$$

Так как $f_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \ldots + B_k t^k + \ldots$,

то $\sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = f_B(t) - B_0 - B_1 t = f_B(t) - 1 - 2t.$

$$\sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^{k-1} = \left\langle \begin{matrix} k-1 = n, \\ k = 2, n = 1 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} B_n t^n = f_B(t) - B_0 = f_B(t) - 1.$$

Аналогично $\sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^{k-2} = \left\langle \begin{matrix} k-2 = n, \\ k = 2, n = 0 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n = f_B(t).$

Тогда $f_B(t) - 1 - 2t = t\left(f_B(t) - 1\right) + t^2 f_B(t)$

или $f_B(t)\left(1 - t - t^2\right) = 1 + 2t - t = 1 + t$. Окончательно производящая функция последовательности чисел Фибоначчи равна

$$f_B(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}. \qquad (2.9.2)$$

Так как обычный степенной ряд, представляющий производящую функцию, есть ряд Тейлора* в окрестности точки $t = 0$, то приведенное выражение можно разложить по общему правилу в ряд Тейлора и получить формулу общего члена B_k. При этом выгоднее использовать замены переменных и уже существующие разложения функций в степенные ряды. Поступим именно таким образом. Разложим дробь $\frac{1}{1-t-t^2}$ на простые слагаемые, для чего найдем сна-

* Брук Тейлор (1685–1731) — английский математик.

чала корни знаменателя: $1-t-t^2=0$, $t_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,

$$t_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\quad t_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Тогда $\frac{1}{1-t-t^2}=-\frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)}=\left(-\frac{1}{t-t_1}+\frac{1}{t-t_2}\right)\cdot\frac{1}{t_1-t_2}=$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}}-\frac{1}{t_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}}\right)$. Теперь воспользуемся известным разложением $\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k$. Итак, $\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_1}\right)^k,\left|\frac{t}{t_1}\right|<1$; $\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_2}\right)^k,\left|\frac{t}{t_2}\right|<1$.

Тогда $\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}}=\frac{1}{t_1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_1}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^k$. Точно таким же образом

$\frac{1}{t_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}}=\frac{1}{t_2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}\right)t^k$. Теперь можно записать разложение исходной дроби

$$\frac{1}{1-t-t^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}\right)t^k-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^k\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^k.$$

Умножим полученное выражение на $1+t$, тогда

$$\frac{1+t}{1-t-t^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^{k+1}\right].$$

Поэтому коэффициент при t^k в разложении будет иметь вид $B_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)+\left(\frac{1}{t_2^k}-\frac{1}{t_1^k}\right)\right]$. Упростим эту формулу, подставив

числовые значения t_1 и t_2:

$$\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}=\frac{t_1^{k+1}-t_2^{k+1}}{(t_1t_2)^{k+1}}=\frac{\frac{(-1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}}-\frac{(-1+\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}}}{(-1)^{k+1}}=\frac{(1+\sqrt{5})^{k+1}-(1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}},$$

аналогично $\frac{1}{t_2^k}-\frac{1}{t_1^k}=\frac{(1+\sqrt{5})^k-(1-\sqrt{5})^k}{2^k}$.

Отсюда $B_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{k+1}-(1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}}+\frac{2(1+\sqrt{5})^k-2(1-\sqrt{5})^k}{2^{k+1}}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot$

$$\cdot\left[\frac{(1+\sqrt{5})^k(1+\sqrt{5}+2)-(1-\sqrt{5})^k(1-\sqrt{5}+2)}{2^{k+1}}\right]=\left\langle\begin{matrix}(1-\sqrt{5})^2=1-2\sqrt{5}+5=\\=6-2\sqrt{5}=2(3-\sqrt{5})\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^k(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^k(1-\sqrt{5})^2}{2^{k+1+1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$$

Итак, окончательно

$$B_0=1,\ B_1=2,\ B_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]. \qquad (2.9.3)$$

2.10. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}, n=0,1,2,\ldots$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *возвратной*, если для некоторого k и всех n выполняется соотношение вида

$$a_{n+k}+p_1a_{n+k-1}+p_2a_{n+k-2}+\ldots+p_ka_n=0, \qquad (2.10.1)$$

где постоянные коэффициенты $p_i, i=1,2,\ldots,k$ не зависят от n.

Многочлен $P(t)=t^k+p_1t^{k-1}+\ldots+p_k$ (2.10.2)

называется *характеристическим многочленом* для возвратной последовательности $\{a_n\}$. Перепишем (2.10.1) следующим образом:

$$a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n,\ c_i=-p_i,\ i=\overline{1,k}. \qquad (2.10.3)$$

Выражение (2.10.3) позволяет вычислять очередной член последовательности по предыдущим k членам. Если задать начальные значения $a_0,a_1,\ldots,a_{k-1}$, то можно определить все другие члены последовательности. Соотношение (2.10.3) часто называют *однородным линейным рекуррентным соотношением.*

Найдем формулу общего члена a_n из (2.10.3). Для этого достаточно найти производящую функцию последовательности $\{a_n\}$ — функцию $f_a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k$.

Введем вспомогательный многочлен $L(t)=1-c_1t-c_2t^2-\ldots-c_kt^k$ и рассмотрим произведение $f_a(t)\cdot L(t)=C(t)$.

Так как $f_a(t)\cdot L(t)=\left(a_0+a_1t+\ldots+a_kt^k+\ldots+a_nt^n+\ldots\right)\cdot$
$\cdot\left(1-c_1t-c_2t^2-\ldots-c_kt^k\right)=a_0+\left(a_1-c_1a_0\right)t+\left(a_2-c_1a_1-c_2a_0\right)t^2+\ldots$
$\ldots+\left(a_k-c_1a_{k-1}-c_2a_{k-2}-\ldots-c_ka_0\right)t^k+\ldots+\left(a_n-c_1a_{n-1}-\right.$
$\left.-c_2a_{n-2}-\ldots-a_ka_{n-k}\right)t^n+\ldots$, то видно, что степень $C(t)$ не превышает $k-1$, поскольку коэффициенты при $t^{n+k}, k=0,1,\ldots$ будут равны нулю в силу уравнения (2.10.3).

Пусть характеристическое уравнение (2.10.2) имеет простые (может быть кратные) корни, т. е. допускает разложение вида $P(t)=(t-t_1)^{\alpha_1}(t-t_2)^{\alpha_2}\ldots(t-t_k)^{\alpha_k}, \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=k$. Тогда $P\left(\frac{1}{t}\right)\cdot t^k=\left[\left(\frac{1}{t}\right)^k+p_1\left(\frac{1}{t}\right)^{k-1}+\ldots+p_{k-1}\frac{1}{t}+p_k\right]t^k=1-c_1t-\ldots-c_kt^k=L(t)$. Отсюда

$$L(t)=t^k\left(\frac{1}{t}-t_1\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{t}-t_2\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\frac{1}{t}-t_k\right)^{\alpha_{k1}}=$$
$$(1-t_1t)^{\alpha_1}(1-t_2t)^{\alpha_2}\ldots$$

$\ldots(1-t_kt)^{\alpha_k}, \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=k$ и характеристическую функцию можно представить в виде

$$f_a(t)=C(t)/L(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\alpha_i}\frac{\beta_{i,n}}{(1-t_it)^n}. \qquad (2.10.4)$$

Так как по формуле (2.7.5) $\frac{1}{(1-t)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^kt^k$, то $\frac{1}{(1-t_it)^n}=\beta\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^kt_i^kt^k$, и, следовательно,

$$f_a(t)=C(t)/L(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\alpha_i}\beta_{i,n}\sum_{j=0}^{\infty}C_{n+j-1}^jt_i^jt^j. \qquad (2.10.5)$$

Формула (2.10.5) дает разложение производящей функции последовательности $\{a_n\}$. Для нахождения формулы общего члена a_n необходимо найти коэффициент при t^n в разложении (2.10.5).

- **Пример 1.** Найти общий член последовательности $\{a_n\}$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0, a_0=2, a_1=1$.

  Перепишем исходное рекуррентное соотношение в виде (2.10.3) $a_{n+1}=4a_{n+1}-3a_n, n=0,1,2,\ldots$ Характеристический многочлен $L(t)$ имеет вид $L(t)=1-4t+3t^2$. Найдем $C(t)$. $C(t)=f_a(t)\cdot L(t)=$
  $=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n+\ldots-4a_0t-4a_1t^2-\ldots-4a_nt^{n+1}-\ldots+3a_0t^2+$
  $+3a_1t^3+\ldots+3a_nt^{n+2}+\ldots=a_0+(a_1-4a_0)t=2-7t$, т. к. $a_0=2$ и $a_1=1$. Тогда $f_a(t)=C(t)/L(t)=\frac{2-7t}{(1-t)(1-3t)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1-3t}$. Методом неопределенных коэффициентов получим

$$(A+B)+(-3A-B)\equiv 2-7t\to\begin{cases}A+B=2,\\3A+B=7\end{cases}\to A=2.5, B=-0.5,$$

$$f_a(t)=\frac{2.5}{1-t}-\frac{0.5}{1-3t}=2.5\sum_{k=0}^{\infty}t^k-0.5\sum_{k=0}^{\infty}3^kt^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(2.5-0.5\cdot 3^k\right)t^k.$$

Отметим, что этот пример может быть решен методом, изложенным в *разделе 2.9*. Действительно, если $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$, то

$$\frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}t^{n+2}-\frac{4}{t}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}t^{n+1}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0,$$

$$\frac{1}{t^2}\sum_{j=2}^{\infty}a_jt^j-\frac{4}{t}\sum_{j=1}^{\infty}a_jt^j+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0,\ \frac{1}{t^2}\left(f_a(t)-a_0-a_1t\right)-$$

3 Зак. 4382

$$-\frac{4}{t}\left(f_a(t)-a_0\right)+3f_a(t)=0,\ f_a(t)-2-t-4tf_a(t)+8t+3t^2f_a(t)=0,$$

$$f_a(t)=\frac{2-7t}{1-4t+3t^2}=\frac{2-7t}{(1-t)(1-3t)},$$

т. е. получен тот же самый результат.

Докажем теперь несколько положений, позволяющих находить общее решение рекуррентных соотношений.

Во-первых, очевидно, что возвратная последовательность (2.10.1) полностью определяется заданием ее первых k членов. Действительно, если $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ уже заданы, то

$$a_k=-p_1a_{k-1}-p_2a_{k-2}-\ldots-p_ka_0,\ a_{k+1}=-p_1a_k-p_2a_{k-1}-\ldots-p_ka_1,\ldots,$$

$$a_{k+n}=-p_1a_{n+k-1}-\ldots-p_2a_{n+k-2}-\ldots-p_ka_n.$$

Во-вторых, если t является корнем характеристического многочлена (2.10.2), то последовательность $\{t^n\}$ удовлетворяет соотношению (2.10.1), т. е. $ct^{n+k}+p_1ct^{n+k-1}+\ldots+p_kct^n=0$. Но $ct^n\left(t^k+p_1t^{k-1}+\ldots+p_k\right)=0$, ибо t есть корень многочлена (2.10.2) и тогда $t^k+p_1t^{k-1}+\ldots+p_k=0$.

В-третьих, рассмотрим $t_1, t_2, \ldots, t_k$ простые (некратные) корни характеристического многочлена (2.10.2). Тогда общее решение рекуррентного соотношения (2.10.1) имеет вид

$$a_n=c_1t_1^n+c_2t_2^n+\ldots+c_kt_k^n, \tag{2.10.6}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — подходящие константы. В самом деле, то что $a_n=c_1t_1^n+c_2t_2^n+\ldots+c_kt_k^n$ удовлетворяет (2.10.1), следует из того, что $t_i, i=\overline{1,k}$ является корнем характеристического уравнения и, следовательно, удовлетворяет (2.10.1), и из того, что если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют (2.10.1), то и последовательность $\{d_n\}, d_n=\alpha a_n+\beta b_n$ ему удовлетворяет при любых α и β.

Кроме того, любая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая (2.10.1), может быть представлена в виде (2.10.6). Эта последовательность полностью определяется своими первыми членами $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$,

тогда если для любых $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ существует единственный набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$ таких, что

$$\begin{cases} c_1+c_2+\ldots+c_k=a_0, \\ c_1t_1+c_2t_2+\ldots+c_kt_k=a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1t_1^{k-1}+c_2t_2^{k-1}+\ldots+c_kt_k^{k-1}=a_{k-1}, \end{cases} \tag{2.10.7}$$

то a_n может быть представлена в виде (2.10.6).

Определитель системы (2.10.7) есть определитель Вандермонда*. Он равен $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{k-1} & t_2^{k-1} & \ldots & t_k^{k-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\le i<j\le k}\left(t_i-t_j\right)$ и не равен нулю, если $t_i\ne t_j$ при $i\ne j$, что в нашем случае выполняется. Таким образом, система линейных уравнений (2.10.7) имеет единственное решение относительно $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Наконец, в-четвертых, можно показать, что если t_i есть корень многочлена (2.10.2) кратности α_i, то общее решение рекуррентного соотношения (2.10.1) имеет вид

$$a_n=\sum_{i=1}^{r}\left(c_{i,1}+c_{i,2}n+\ldots+c_{i,\alpha_i}n^{\alpha_i-1}\right)t_i^n, \tag{2.10.8}$$

где $c_{i,j}, i=\overline{1,r}, j=\overline{1,\alpha_i}$ — произвольные константы, r — количество кратных корней.

- **Пример 2.** Найдем общее решение для примера 1. Характеристический многочлен $P(t)=t^2-4t+3$ имеет корни $t_1=1,\ t_2-3$. Тогда по формуле (2.10.6) получаем $a_n=c_1t_1^n+c_2t_2^n=c_1+c_2\cdot 3^n$.

Неоднородное линейное рекуррентное соотношение имеет вид

$$a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n+b_n, \tag{2.10.9}$$

* Александр Теофиль Вандермонд (1735–1796) — французский математик.

где b_n есть функция от n. Как и в теории линейных дифференциальных уравнений общее решение соотношения (2.10.9) есть сумма любого частного его решения и общего решения уравнения (2.10.1). Общих способов определения частного решения нет, можно решить уравнение (2.10.9) лишь для некоторых специальных значений b.

Способ решения реконструирует производящую функцию последовательности $\{a_n\}$ и похож на способ, изложенный в *разделе 2.9*.

- **Пример 3.** Решить неоднородное рекуррентное соотношение

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=(-1)^n,\ a_0=1, a_1=2.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}t^n-3\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}t^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n,\ \frac{1}{t^2}\sum_{j=2}^{\infty}a_jt^j-\frac{3}{t}\sum_{j=1}^{\infty}a_jt^j+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n,$$

$$\frac{1}{t^2}(f_a(t)-a_0-a_1t)-\frac{3}{t}(f_a(t)-a_0)+2f_a(t)=\frac{1}{1+t},\ f_a(t)-1-2t-$$

$$-3t(f_a(t)-1)+2t^2f_a(t)=\frac{t^2}{1+t},\ f_a(t)=\frac{1}{(1+t)(1-3t+2t^2)}=$$

$$=\frac{1}{(1+t)(t-1)(t-0.5)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-0.5},\ A-3At+2At^2+Bt^2+$$

$$+0.5Bt-0.5B+Ct^2\equiv1\to\begin{cases}A-0.5B-C=1,\\-3A+0.5B=0,\\2A+B+C=0\end{cases}\to A=\frac{1}{12}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{2}{3};$$

$$f_a(t)=\frac{1}{12(t+1)}+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{2}{3(t-0.5)}=$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n+\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}2^nt^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{12}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{2^{n+2}}{3}\right]t^n.\ \text{Отсюда}\ a_n=\frac{(-1)^n+6+2^{n+4}}{12}.$$

2.11. Экспоненциальные производящие функции

Экспоненциальные производящие функции соответствуют упорядоченным (n,r)-выборкам или (n,r)-перестановкам. Из определения упорядоченных и *неупорядоченных* (n,r)*-выборок ясно, что первых в* $r!$ *раз больше, чем вторых*. Поэтому производящая функция в этом случае записывается в виде

$$(1+t)^n=\sum_{k=0}^{n}P(n,k)\frac{t^k}{k!},\qquad(2.11.1)$$

где $P(n,r)$ — число (n,k)-перестановок из n элементов, т. е. $P(n,k)=A_n^k$ в принятых обозначениях.

В случаях, когда допускаются повторения элементов, необходимо в левой части формулы (2.11.1) биномы $(1+t)$ заменить на соответствующие многочлены вида $1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots$, если никакие ограничения на повторные появления не наложены, или многочлены вида

$$\left(1+\frac{t_1}{1!}+\ldots+\frac{t_1^{k_1}}{k_1!}\right)\left(1+\frac{t_2}{1!}+\ldots+\frac{t_2^{k_2}}{k_2!}\right)\ldots\left(1+\frac{t_l}{1!}+\ldots+\frac{t_l^{k_l}}{k_l!}\right)=$$

$=\prod_{j=1}^{l}\left(1+\frac{t_j}{1!}+\ldots+\frac{t_j^{k_j}}{k_j!}\right)$, если соответствующий элемент допускает $k_1,k_2,\ldots,k_l$ повторений в выборках. Представление этого произведения в виде ряда по степеням t дает в качестве коэффициентов при $\frac{t^k}{k!}$ числа k-перестановок, допускающих указанные выше повторения.

Название "экспоненциальная" применяется в силу того, что производящая функция для k-перестановок с неограниченным числом повторений из n элементов имеет вид

$$\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots\right)^n=\left(e^t\right)^n=e^{nt}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nt)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}n^k\frac{t^k}{k!}.\qquad(2.11.2)$$

Так как производящие функции (и простая, и экспоненциальная) представляют собой степенной ряд, то в области его сходимости $(-R,R)$ этот ряд

можно почленно дифференцировать и интегрировать и, следовательно, получать новые степенные ряды и новые производящие функции. Например, возьмем $1+t+t^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}t^k=\frac{1}{1-t}$. Почленным интегрированием этого ряда в области $|t|<1$ получаем выражение для производящей функции

$$-\ln(1-t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}, \qquad (2.11.3)$$

т. е. $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{k},\ldots\right\}\to-\ln(1-t)$.

2.12. О приложениях теории производящих функций к теории вероятностей

Исторически сложилось так, что прежде всего комбинаторные методы нашли применение в теории вероятностей и математической статистике. В современной аксиоматической теории вероятностей сами вероятности мыслятся лишь в связи с пространствами элементарных событий. Комбинаторные методы находят себе место в теории вероятностей именно в той ее части, в которой пространства элементарных событий дискретны. Можно даже говорить о теоретико-вероятностных интерпретациях определенной части комбинаторного анализа.

В самом деле (n,r)-выборки могут быть интерпретированы различными урновыми схемами. Случаи, когда допускаются повторения элементов в выборках, соответствуют урновым схемам с возвращением. Одна из простейших производящих функций в теории вероятностей связана с бросанием монеты и другими событиями с двумя исходами: $q+pt$, $p+q=1$. Для n независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли*) производящей функцией будет $f(t)=(q+pt)^n$, $p+q=1$.

Производящая функция бросания одной шестигранной кости с равновероятными выпадениями очков имеет вид $f(t)=\frac{1}{6}\left(t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6\right)=\frac{t}{6}\cdot\frac{1-t^6}{1-t}$.

* Яков Бернулли (1654–1705) — швейцарский математик.

Комбинаторные задачи о размещениях в их теоретико-вероятностной трактовке приводят к введению различных моментов и функций накопления. Это также верно и для теоретико-числовых интерпретаций и для задач технической автоматики.

2.13. Практическое занятие 4. Производящие функции и рекуррентные соотношения

2.13.1. Найти производящие функции следующих последовательностей:

а) $a_n=n\alpha^n, n=0,1,2,\ldots$;

б) $a_n=\begin{cases}0, n=0,\\ \frac{\alpha^n}{n!}, n=1,2,\ldots\end{cases}$;

в) $a_n=n^2, n=0,1,2,\ldots$;

г) $a_n=\begin{cases}1, n=0,1,\ldots N,\\ 0, n>N\end{cases}$;

д) $a_n=\sin\alpha n, n=0,1,2,\ldots$

2.13.2. Найти производящую функцию последовательности $\{a_n\}$ через производящую функцию последовательности $\{b_n\}$, если

а) $a_n=\begin{cases}0, n=0,\\ b_{n-1}, n=1,2,\ldots\end{cases}$;

б) $a_n=\sum_{i=0}^{n}b_i, n=0,1,2,\ldots$;

в) $a_n=\begin{cases}0, n=0,1,\ldots,k-1,\\ b_{n-k}, n\ge k\end{cases}$;

г) $a_n=b_{n+1}-b_n, n=0,1,2,\ldots$

2.13.3. Найти производящую функцию последовательности $\{2(n-5)+7^{n+2}\}$.

2.13.4. Найти экспоненциальную производящую функцию последовательности $\{a_n\}$, выраженную через производящую функцию последовательности $\{b_n\}$, если

а) $a_n = b_{n+1}, \quad n = 0,1,2,\ldots$;

б) $a_n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot b_{n-r} \cdot g_r$.

2.13.5. С помощью тождеств, связывающих производящие функции, вывести следующие тождества для биномиальных коэффициентов:

а) $(1+t)^n \cdot (1+t)^m = (1+t)^{n+m}$, $\sum_{r=0}^{k} C_n^r \cdot C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$;

б) $(1-t)^{-1-n} \cdot (1-t)^{-1-m} = (1-t)^{-2-n-m}$, $\sum_{r=0}^{k} C_{n+r}^n \cdot C_{m+k-r}^m = C_{n+m+k+1}^k$.

2.13.6. Найти общий член a_n последовательности, для которой функция $f_a(t)$ является производящей:

а) $f_a(t) = (q+pt)^m$;

б) $f_a(t) = \left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-m}$;

в) $f_a(t) = \operatorname{arctg} t$;

г) $f_a(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$.

2.13.7. Применить технику производящих функций для нахождения суммы чисел:

а) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2$;

б) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3$.

2.13.8. Сколькими способами можно разменять 10-копеечную монету монетами 1, 2, 3 и 5 копеек при условии, что каждая из разменных монет присутствует в двух экземплярах?

2.13.9. Сколькими способами выпуклый $(n+2)$-угольник можно разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри $(n+2)$-угольника? Вывести рекуррентное соотношение для $\{a_n\}$, где a_n — число способов разбиения $(n+2)$-угольника, и разрешить это соотношение.

2.13.10. Решить рекуррентные соотношения:

а) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 8$;

б) $a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;

в) $a_{n+2} \pm 9a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

2.13.11. Решить неоднородные рекуррентные соотношения:

а) $a_{n+1} = a_n + n$, $a_0 = 1$;

б) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n + 2^{-n}$, $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{3}{2}$.

2.13.12. Найти общее решение рекуррентных соотношений:

а) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$;

б) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n$.

2.13.13. Пусть $f_a(t)$ и $f_b(t)$ — производящие функции последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно и пусть $f_a(t) \cdot f_b(t) = 1$. Найти $\{b_n\}$ и $f_b(t)$, если $a_n = C_m^n$.

2.13.14. Найти производящую функцию $f_a(t)$ для последовательности $\{a_n\}$, если a_n — число решений в целых неотрицательных числах уравнения $2x + 3y + 5z = n$.

2.13.15. Пусть $a_n = \sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{2j}$, $b_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j}^{2j+1}$, $n = 0,1,2,\ldots$, а $f_a(t)$ и $f_b(t)$ — соответствующие производящие функции. Показать:

а) a_n и b_n связаны соотношениями вида

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_{n+1}, \\ b_{n+1} = b_n + a_n, \ a_0 = 1, \ b_0 = 0; \end{cases}$$

б) $f_a(t)$ и $f_b(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f_a(t)-1=tf_a(t)+f_b(t), \\ f_b(t)=tf_a(t)+tf_b(t) \end{cases}$$

и найти $f_a(t)$ и $f_b(t)$.

2.14. Метод включений и исключений

Содержание комбинаторного анализа не исчерпывается подсчетом числа решений соответствующих задач. Не менее важное место в нем занимают проблемы возможности или невозможности осуществления требуемых выборок или расположений элементов. Логическая сущность метода включения и исключения определяется тем, что он применяется к важной задаче разделения множеств на подмножества в зависимости от того, обладают ли их элементы определенной совокупностью свойств или нет.

Рассмотрим сначала простую задачу о нахождении числа элементов объединения множеств. Будем обозначать через $n(A)$ количество элементов множества A. Основная формула, которой пользуются при нахождении числа элементов объединения двух множеств, такова (рис. 2.4):

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B). \qquad (2.14.1)$$

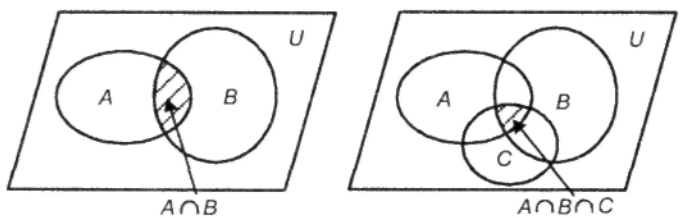


Рис. 2.4

Эта формула совершенно очевидна из диаграммы Эйлера-Венна. С ее помощью можно получить формулу для числа элементов объединения любого числа множеств. Например, для трех элементов имеем

$$N(A\cup B\cup C)=N\{A\cup(B\cup C)\}=N(A)+N(B\cup C)-N\{A\cap(B\cup C)\}=$$
$$=N(A)+N(B\cup C)-N\{(A\cap B)\cup(A\cap C)\}=N(A)+N(B)+N(C)-$$
$$-N(B\cap C)-\{N(A\cap B)+N(A\cap C)-N((A\cap B)\cap(A\cap C))\}=N(A)+$$

$$+N(B)+N(C)-N(B\cap C)-N(A\cap B)-N(A\cap C)+N(A\cap B\cap A\cap C)=$$
$$=N(A)+N(B)+N(C)-N(A\cap B)-N(A\cap C)-N(B\cap C)+$$
$$+N(A\cap B\cap C).$$

Эту формулу тоже можно изобразить с помощью диаграммы (рис. 2.4). Для случая n слагаемых аналогичная формула доказывается методом математической индукции.

Теорема 2.3. **Если** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — **некоторые множества и** $N(A_1)=|A_1|, N(A_2)=|A_2|, \ldots, N(A_n)=|A_n|$, **то** $N(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=$

$$=N(A_1)+N(A_2)+\ldots+N(A_n)-\{N(A_1\cap A_2)+N(A_1\cap A_3)+\ldots$$
$$\ldots+N(A_{n-1}\cap A_n)\}+\{N(A_1\cap A_2\cap A_3)+N(A_1\cap A_2\cap A_4)+\ldots$$
$$\ldots+N(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)\}+\ldots+(-1)^{n-1}N(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n). \qquad (2.14.2)$$

Формулу (2.14.2) можно обобщить и подсчитать не только количество элементов заданных множеств. Пусть дано n-множество S_n некоторых элементов и k-множество свойств $p_1, p_2, \ldots, p_k$, которыми элементы множества S_n могут как обладать, так и не обладать. Выделим какую-либо r-выборку свойств $(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r})$.

Число элементов $s\in S_n$, обладающих всеми r выбранными свойствами, обозначим через $n(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r})$. Отсутствие у элемента какого-либо свойства p_i будем обозначать $\overline{p_i}$. Тогда, например, запись $n(p_1, \overline{p_2}, p_3)$ означает число элементов, обладающих свойствами p_1 и p_3 и не обладающих свойством p_2.

Найдем число элементов, не обладающих набором определенных свойств, начав с самых простых случаев.

1. Пусть имеется одно свойство p, тогда $n(\overline{p})=n-n(p)$.
2. Имеется конечное число свойств $p_1, p_2, \ldots, p_k$, несовместимых друг с другом. Тогда опять $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_k})=n-\sum_{i=1}^{k} n(p_i)$.
3. Элементы обладают комбинациями различных свойств. Тогда справедлива теорема, аналогичная 2.3.

Теорема 2.4. **Если даны n-множество элементов и k-множество свойств p_i, $i=\overline{1,k}$, совместимых между собой, тогда**

$$n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_k}\right)=n-\sum_{i=1}^{k}n(p_i)+\sum_{1\le i<j\le k}n(p_i,p_j)-\sum_{1\le i<j<l\le k}n(p_i,p_j,p_l)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^k n(p_1,p_2,\ldots,p_k). \qquad (2.14.3)$$

Доказательство. Теорема может быть доказана с помощью простейших рассуждений, состоящих в попеременном отбрасывании и возвращении подмножеств. Но здесь для доказательства применяется метод математической индукции.

$k=1$, $n\left(\overline{p}\right)=n-n(p)$. Эта формула очевидна. Пусть теорема верна для $k-1$ свойств, т. е.

$$n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}}\right)=n-\sum_{i=1}^{k-1}n(p_i)+\sum_{1\le i<j\le k-1}n(p_i,p_j)-\sum_{1\le i<j<l\le k-1}n(p_i,p_j,p_l)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{k-1}n(p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}). \qquad (2.14.4)$$

Перейдем к случаю, когда имеется k свойств. Так как $n\left(\overline{p}\right)=n-n(p)$, то по аналогии можно записать $n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}},\overline{p_k}\right)=n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}}\right)-$ $-n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}},p_k\right)$. Применим соотношение (2.14.4) для числа $n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}},p_k\right)$. Получим следующую формулу:

$$n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}},p_k\right)=n(p_k)-\sum_{i=1}^{k-1}n(p_i,p_k)+\sum_{1\le i<j\le k-1}n(p_i,p_j,p_k)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{k-1}n(p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},p_k). \qquad (2.14.5)$$

Прокомментируем ее. В ней $n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}},p_k\right)$ — число элементов, обладающих свойством p_k и одновременно не обладающих свойствами $p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}$; $n(p_k)$ — число элементов, обладающих только свойством p_k, $\sum_{i=1}^{k-1}n(p_i,p_k)$ — число элементов, обладающих свойствами p_i и p_k одновременно, и т. д. Ясно, что для того чтобы получить $n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}},p_k\right)$, из общего числа элементов со свойством p_k, надо вычесть сначала число

элементов, обладающих свойствами p_i и p_k. Однако при этом элементы, имеющие три свойства, а именно p_k и, скажем, p_i и p_j, будут исключены дважды (сначала как элементы со свойствами p_i и p_k, затем как элементы со свойствами p_j и p_k). Значит, надо возвратить все элементы, обладающие тремя свойствами, т. е. прибавить $\sum_{1\le i<j\le k-1}n(p_i,p_j,p_k)$ и т. д. Вычтем теперь из (2.14.4) формулу (2.14.5), получим

$$n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}}\right)-n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_{k-1}},p_k\right)=n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_k}\right)=n-$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{k-1}n(p_i)+n(p_k)\right]+\left[\sum_{1\le i<j\le k-1}n(p_i,p_j)+\sum_{i=1}^{k-1}n(p_i,p_k)\right]+\ldots$$

$$\ldots-(-1)^{k-1}n(p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},p_k)=n-\sum_{i=1}^{k}n(p_i)+$$

$$+\sum_{1\le i<j\le k}n(p_i,p_j)+\ldots+(-1)^k n(p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},p_k).$$

Характер доказательства этой теоремы таков, что его можно применить для любой комбинации свойств, как выполняющихся, так и не имеющих места. Таким образом, в левой части доказанной формулы может стоять не только $n\left(\overline{p_1},\overline{p_2},\ldots,\overline{p_k}\right)$, но и, например, $n\left(p_1,\overline{p_2},p_3,\overline{p_4}\right)$. Теорема формулируется при этом относительно совокупности свойств p_2 и p_4 с обязательным выполнением свойств p_1 и p_3 следующим образом:

$$n\left(p_1,\overline{p_2},p_3,\overline{p_4}\right)=n(p_1,p_3)-n(p_1,p_3,p_2)-n(p_1,p_3,p_4)+$$

$$+n(p_1,p_3,p_2,p_4). \qquad (2.14.6)$$

- **Пример 1.** В комнате несколько человек, знающих хотя бы один из трех языков. Шестеро знают английский, шестеро — немецкий, семеро — французский. Четверо знают английский и немецкий, трое — немецкий и французский, двое — французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек в комнате? Сколько из них знают только английский язык?

  Задачу можно решить традиционным способом "вычерпывания" множеств без применения формулы включений и исключений. Перепишем условие задачи более компактно в виде табл. 2.2.

Таблица 2.2

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
6	6	7	4	3	2	1

Пусть из комнаты ушел человек, знающий все три языка, тогда получим:

Таблица 2.2 (продолжение)

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
5	5	6	3	2	1	0

Пусть теперь ушли три человека (из оставшихся), знающие одновременно английский и немецкий языки; число людей, знающих другие пары языков, не изменится.

Таблица 2.2 (продолжение)

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
2	2	6	0	2	1	0

Пусть уйдут двое, знающие немецкий и французский.

Таблица 2.2 (продолжение)

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
2	0	4	0	0	1	0

Наконец, уходит человек, знающий французский и английский языки. Окончательно получим:

Таблица 2.2 (окончание)

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
1	0	3	0	0	0	0

Итак, в комнате остался один человек, знающий только английский язык, и трое, знающих только французский язык. Кроме того, вышло семь человек, значит, сначала в комнате было одиннадцать человек.

Решим теперь эту же задачу методом включений и исключений. Пусть свойство $p_{\text{А}}$ — знать английский язык, аналогично $p_{\text{Н}}$ и $p_{\text{Ф}}$ — свойства, характеризующие знание немецкого и французского языков. По условию задачи общее число людей составляют все, знающие хотя бы один язык; не знающих хотя бы один язык в задаче нет. По формуле (2.14.2) имеем $n = n(p_{\text{А}}) + n(p_{\text{Н}}) + n(p_{\text{Ф}}) - n(p_{\text{А}}, p_{\text{Н}}) - n(p_{\text{А}}, p_{\text{Ф}}) - n(p_{\text{Н}}, p_{\text{Ф}}) + n(p_{\text{А}}, p_{\text{Н}}, p_{\text{Ф}}) = 6 + 6 + 7 - (4 + 3 + 2) + 1 = 19 - 9 + 1 = 11$. Число людей, знающих только английский язык, это $n(p_{\text{А}}, \overline{p}_{\text{Н}}, \overline{p}_{\text{Ф}})$. По формуле (2.14.6) $n(p_{\text{А}}, \overline{p}_{\text{Н}}, \overline{p}_{\text{Ф}}) = n(p_{\text{А}}) - n(p_{\text{А}}, p_{\text{Н}}) - n(p_{\text{А}}, p_{\text{Ф}}) + n(p_{\text{А}}, p_{\text{Н}}, p_{\text{Ф}}) = 6 - 4 - 2 + 1 = 1$. Так же легко может быть найдет ответ и на другие подобные вопросы.

2.15. Учет весов элементов в формуле включений и исключений

Дальнейшие усложнения метода связаны с введением весов элементов. Как и прежде, будем считать, что веса — это числовые характеристики элементов рассматриваемых множеств.

Итак, пусть задано n-множество S_n и каждому элементу $s_i \in S_n, i = 1,2,\ldots,n$ приписан вес $\omega(s_i)$ из k-множества свойств $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Тогда

$$p_j(s_i) = \begin{cases} 1, \text{ если элемент } s_i \text{ обладает свойством } p_j, \\ 0, \text{ если элемент } s_i \text{ не обладает свойством } p_j. \end{cases}$$

а $\omega(p_j) = \sum\limits_{s_i \in S} p_j(s_i) \cdot \omega(s_i)$ — сумма весов элементов со свойством p_j.

Произведем r-выборку свойств $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r}$ и обозначим сумму весов элементов, обладающих всеми r выбранными свойствами, через $\omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r})$, т.е. $\omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r})$ — это сумма весов элементов множества S_n, которые обладают каждым из свойств $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Сумму, распространенную на все возможные r-выборки свойств, обозначим $\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le k} \omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r}) = \omega(r)$. Здесь суммирование распространяется

на все сочетания $(i_1, i_2, ..., i_r)$ длины r из k свойств, количество сочетаний равно C_k^r. Таким образом, в $\omega(r)$ суммируются веса только тех элементов, которые имеют как минимум r свойств. Пусть элемент $s_i \in S_n$ обладает t свойствами и $t \geq r$, тогда его вес $\omega(s_i)$ в $\omega(r)$ войдет C_t^r раз. Например, $\omega(1) = \sum_{i_1} \omega(p_{i_1}) = \omega(p_1) + \omega(p_2) + ... + \omega(p_k)$ содержит $C_k^1 = k$ членов, а $\omega(2) = \sum_{(i_1, i_2)} \omega(p_{i_1}, p_{i_2}) = \omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + ... + \omega(p_{k-1}, p_k)$ содержит $C_k^2 = k(k+1)/2$ членов и т. д. Через $\omega(0)$ обозначим сумму весов всех элементов множества S_n. Данное определение $\omega(0)$ корректно, т. к. сумма $\omega(0)$ должна включать элементы, обладающие нуль свойствами и более. Действительно, любой из элементов множества S_n удовлетворяет этим условиям. Положим $\omega_k(r)$ — сумма весов элементов, обладающих равно r свойствами из k имеющихся, тогда $\omega_k(0)$ — сумма весов элементов, которые не имеют ни одного из указанных свойств. При таких обозначениях теорема включений и исключений с учетом весов будет формулироваться следующим образом.

Теорема 2.5. **Сумма весов элементов, обладающих точно r свойствами из k свойств $p_1, p_2, ..., p_k$, равна**

$$\omega_k(r) = C_r^0 \omega(r) - C_{r+1}^1 \omega(r+1) + C_{r+2}^2 \omega(r+2) + ... + (-1)^{k-r} C_{r-(k-r)}^r \omega(r + (k-r)) =$$
$$= C_r^0 \omega(r) - C_{r+1}^1 \omega(r+1) + C_{r+2}^2 \omega(r+2) + ... + (-1)^{k-r} C_k^r \omega(k) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i C_{r+i}^r \omega(r+i) = \sum_{i=r}^{k} (-1)^{i-r} C_i^r \omega(i). \qquad (2.15.1)$$

Доказательство. Покажем, что вклад веса $\omega(s_i)$ произвольного элемента $s_i \in S_n$ в правую и левую часть формулы (2.15.1) одинаковый. Пусть $s_i \in S_n$ обладает точно t свойствами. Тогда а) если $t < r$, то $\omega(s)$ не входит в $\omega_k(r)$ и не входит в $\omega(r+i)$, т. е. равенство (2.15.1) примет вид 0 = 0; б) если $t = r$, то $\omega(s)$ входит один раз в $\omega_k(r)$ и один раз в $\omega(r+i)$; в) если $t > r$, то в $\omega_k(r)$ $\omega(s)$ не входит, и левая часть формулы (2.15.1) в этом случае равна

нулю. В $\omega(r+i)$ вес $\omega(s)$ входит C_t^{r+i} раз, $r + i \leq t$. Правая часть формулы (2.15.1) для веса $\omega(s)$ одного элемента $s_i \in S_n$ примет вид

$$C_r^r \omega(r) - C_{r+1}^r \omega(r+1) + ... + (-1)^{t-r} C_t^{t-r} \omega(t) =$$
$$= C_r^r \omega(s) C_t^r - C_{r+1}^r \omega(s) C_t^{r+1} + ... + (-1)^{t-r} C_t^{t-r} \omega(s) C_t^t = \omega(s) \sum_{i=0}^{t-r} (-1)^i C_{r+i}^r C_t^{r+i}.$$

Но $C_{r+i}^r C_t^{r+i} = \dfrac{(r+i)!}{r!\,i!} \cdot \dfrac{t!}{(r+i)!\,(t-r-i)!} = \dfrac{t!}{r!\,(t-r)!} \cdot \dfrac{(t-r)!\,r}{i!\,(t-r-i)!} = C_t^r C_{t-r}^i$,

тогда $\omega(s) \sum_{i=0}^{t-r} (-1)^i C_{r+i}^r C_t^{r+i} = \omega(s) \sum_{i=0}^{t-r} (-1)^i C_t^r C_{t-r}^i = \omega(s) C_t^r \sum_{i=0}^{t-r} (-1)^i C_{t-r}^i =$
$= \omega(s) C_t^r (1-1)^{t-r} = 0$. Таким образом, и в этом случае формула (2.15.1) верна.

Если все элементы $s_i \in S_n, i = 1, 2, ..., n$ имеют единичный вес, т. е. $\omega(p_i) = 1$, то $\omega(k) = n(k)$, и сумма весов равна числу слагаемых в сумме $\omega(r) = n(r)$, тогда формула (2.15.1) превращается в

$$n_k(r) = C_r^r n(r) - C_{r+1}^r n(r+1) + ... + (-1)^{k-r} C_k^r n(k) = \sum_{i=r}^{k} (-1)^{i-r} C_i^r n(i). \qquad (2.15.2)$$

Следующая теорема является, по сути, следствием теоремы 2.5.

Теорема 2.6. **Если даны n-множество S_n, каждый элемент которого имеет вес, и k-множества свойств, то сумма $\omega_k(0)$ весов элементов, не удовлетворяющих ни одному из заданных свойств, определяется по формуле**

$$\omega_k(0) = \omega(0) - \omega(1) + \omega(2) + ...$$
$$... + (-1)^k \omega(k) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq k} \omega(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}). \qquad (2.15.3)$$

Итак, сумма весов множества из n элементов, не удовлетворяющих ни одному из k свойств, равна сумме весов всех элементов множества $\omega(0)$ минус сумма весов элементов, обладающих хотя бы одним свойством, плюс сумма весов элементов, имеющих не менее двух свойств и т. д.

Если все элементы $s_i \in S_n, i = 1, 2, ..., n$ имеют единичный вес, то $\omega(k) = n(k)$ и сумма весов равна числу слагаемых в сумме. В этом случае

$\omega(0)=n$, $\omega_k(0)$ равно числу элементов множества S_n, не удовлетворяющих ни одному из указанных k свойств. Тогда формула (2.15.3) переходит в формулу

$$n(\overline{p_1},\overline{p_2},...,\overline{p_k})=n-\sum_{i=1}^{k}n(p_i)+\sum_{1\le i<j\le k}n(p_i,p_j)-\sum_{1\le i<j<l\le k}n(p_i,p_j,p_l)+...$$
$$+(-1)^k n(p_1,p_2,...,p_k)=$$
$$=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le k}n(p_{i_1},p_{i_2},...,p_{i_k}). \qquad (2.15.4)$$

Метод включения и исключения применяется везде, где речь идет о разделении дискретных множеств, производимом в зависимости от наличия (или отсутствия) у элементов определенных свойств. К числу задач, решаемых с помощью этого метода, относятся, например, задачи о встречах или беспорядках, разновидности задач теории чисел и ее приложений, где применяются специальные функции Эйлера и Мебиуса*.

- **Пример 1.** *Задача о беспорядках или задача о встречах.* Пусть имеется конечное упорядоченное множество чисел $1,2,...,n$. Для них могут быть образованы перестановки $\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Число всех перестановок, очевидно, $n!$. Среди этих перестановок имеются такие, где ни один из элементов не сохранил своего первоначального места: $a_i\ne i$, $i=1,2,...,n$. Такие перестановки называются *беспорядками*. Найдем число беспорядков.

  Множество n элементов рассматривается по отношению к множеству свойств элементов оставаться на своих местах $p_i:\{a_i=i,\ i=1,2,...,n\}$. Очевидно, что если k элементов закрепляются на своих местах, то число $N(k)$ соответствующих перестановок равно $(n-k)!$. Число способов, которыми можно выбрать k закрепленных элементов из общего количества n элементов, равно C_n^k. Тогда число беспорядков, где ни один элемент не сохранил своего первоначального места, находится по формуле, аналогичной формуле (2.15.3),

* Август Фердинанд Мебиус (1790–1868) — немецкий математик.

$$N(0)=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!+...+(-1)^k C_n^k(n-k)!+...$$
$$...+(-1)^n C_n^n(n-n)!=n!-n(n-1)!+\frac{n(n-1)}{2!}(n-2)!+... \qquad (2.15.5)$$
$$...+(-1)^k\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}(n-k)!+...=$$
$$=n!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^k\frac{1}{k!}+...+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]\approx\left[\frac{n!}{e}\right].$$

Здесь выражение $[...]$ обозначает целую часть заданного числа, а e — основание натуральных логарифмов.

- **Пример 2.** *Задача о числе перестановок, в которых остаются на своих местах k элементов.* В этой задаче из n элементов k должно быть неподвижными. Число способов, которыми можно выбрать эти k неподвижных элементов, равно C_n^k. Оставшиеся $n-k$ элементов могут образовывать беспорядки, их число подсчитаем по формуле (2.15.5). Тогда по правилу произведения

$$N(k)=C_n^k(n-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right]=$$
$$=\frac{n!}{k!}\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k!)}\right]. \qquad (2.15.6)$$

2.16. Функция Эйлера

Функцией Эйлера называется функция $\varphi(n)$, определенная на множестве N, значения которой равны числу k натуральных, может быть, и составных целых чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n, т. е. $0<k<n$, $(k,n)=1$. Для $n=1$ полагают $\varphi(1)=1$.

Знаком (a,b) обозначается наибольший общий делитель натуральных чисел a и b. Взаимно простыми называются числа, наибольший общий делитель которых равен единице.

Например, натуральные числа 5 и 7 взаимно просты, т. к. $(5,7)=1$. Таким образом, взаимно простые числа друг на друга нацело не делятся.

Функция Эйлера аналитически выражается следующим образом:

$$\varphi(n)=n-\sum_{1\le i\le k}\frac{n}{q_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{n}{q_iq_j}+\ldots+(-1)^k\frac{n}{q_1q_2\ldots q_k}, \qquad (2.16.1)$$

где k — есть число простых делителей q_i числа n, $i=1,2,\ldots,k$. Чаще функция Эйлера приводится в несколько другом виде

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)=n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_k}\right),$$

$$n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\ldots q_k^{\alpha_k}. \qquad (2.16.2)$$

Формулы (2.16.1) и (2.16.2) рассмотрим позже, а сейчас посчитаем значения $\varphi(n)$ для $n=1,2,\ldots,10$. Разложим в табл. 2.3 числа с 1 до 10 на простые делители.

Таблица 2.3

$1=1^1$	$6=2^1\cdot 3^1$
$2=2^1$	$7=7^1$
$3=3^1$	$8=2^3$
$4=2^2$	$9=3^2$
$5=5^1$	$10=2^1\cdot 5^1$

1. $\varphi(1)=1$ по определению.
2. $\varphi(2)=2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$, $(1,2)=1$. Это число 1.
3. $\varphi(3)=3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$, $(1,3)=1$, $(2,3)=1$. Два числа не превосходят 3 и взаимно просты с числом 3; это числа 1 и 2.
4. $\varphi(4)=4\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=2$, $(1,4)=1$, $(3,4)=1$. Это числа 1 и 3.
5. $\varphi(5)=5\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=4$, $(1,5)=1$, $(2,5)=1$, $(3,5)=1$, $(4,5)=1$. Четыре числа удовлетворяют условию существования функции Эйлера. Это числа 1, 2, 3 и 4.

6. $\varphi(6)=6\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$, $(1,6)=1$, $(5,6)=1$. Это числа 1 и 5.
7. $\varphi(7)=7\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)=6$, $(1,7)=1$, $(2,7)=1$, $(3,7)=1$, $(4,7)=1$, $(5,7)=1$, $(6,7)=1$. Значение функции Эйлера в этом случае равно шести, т. к. шесть чисел удовлетворяют условию существования функции Эйлера. Это числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6.
8. $\varphi(8)=8\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=4$, $(1,8)=1$, $(3,8)=1$, $(5,8)=1$, $(7,8)=1$. Значение функции Эйлера равно четырем. Это числа 1, 3, 5 и 7.
9. $\varphi(9)=9\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=6$, $(1,9)=1$, $(2,9)=1$, $(4,9)=1$, $(5,9)=1$, $(7,9)=1$, $(8,9)=1$. Это числа 1, 2, 4, 5, 7 и 8.
10. $\varphi(10)=10\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=4$, $(1,10)=1$, $(3,10)=1$, $(7,10)=1$, $(9,10)=1$. Это числа 1, 3, 7 и 9.

Функция Эйлера для первых десяти значений аргумента может быть задана как в табл. 2.4.

Таблица 2.4

n	1	2	3	4	5
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4
n	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	2	6	4	6	4

Выведем теперь формулы, представляющие функцию Эйлера. Для этого решим сначала такую вспомогательную задачу. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_k$ — взаимно простые натуральные числа, т. е. $(a_i,a_j)=1$, $i\ne j$, а n — некоторое натуральное число. Найдем число натуральных чисел, не превышающих n и не делящихся ни на одно из чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Пусть A_i — множество натуральных чисел, не превышающих n и делящихся на a_i. Тогда количество

чисел, делящихся по крайней мере на одно из чисел $a_1, a_2, ..., a_k$, равно $n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)$.

Очевидно, $n(A_i) = \left[\frac{n}{a_i}\right]$, где опять $[x]$ — наибольшая целая часть x, не превосходящая x. Множество $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}$ — это множество тех чисел, которые делятся на $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot ... \cdot a_{i_k}$, т. е. $n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \left[\frac{n}{a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot ... \cdot a_{i_k}}\right]$, поскольку числа $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot ... \cdot a_{i_k}$ взаимно простые. По формуле (2.14.2) получим

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = \sum_{1 \le i_1 \le k} n(A_{i_1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + ...$$
$$... + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k).$$

Тогда количество чисел, не превышающих n и делящихся, по крайней мере, на одно из чисел $a_1, a_2, ..., a_k$, равно

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = \sum_{1 \le i_1 \le k} \left[\frac{n}{a_{i_1}}\right] - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} \left[\frac{n}{a_{i_1} a_{i_2}}\right] + ... + (-1)^{k-1} \left[\frac{n}{a_1 a_2 ... a_k}\right].$$

Количество чисел, не превышающих n и не делящихся ни на одно из чисел $a_1, a_2, ..., a_k$, равно

$$n - n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) =$$
$$= n - \sum_{1 \le i_1 \le k} \left[\frac{n}{a_{i_1}}\right] + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} \left[\frac{n}{a_{i_1} a_{i_2}}\right] + ... + (-1)^k \left[\frac{n}{a_1 a_2 ... a_k}\right].$$

Эта формула аналогична формуле (2.14.3) и представляет собой по сути формулу включений и исключений. Ее можно было сразу написать, если ввести $\frac{n}{a_{i_1}} = p_{i_1}$ — свойство числа n делиться на a_{i_1}. Тогда $\left[\frac{n}{a_{i_1}}\right]$ — количество чисел, не превосходящих n и обладающих свойством p_{i_1}. Пусть теперь n — натуральное число, разложение которого на простые множители имеет вид $n = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot q_k^{\alpha_k}$, где $q_1, q_2, ..., q_k$ — простые числа. Если $\varphi(n)$ — число

натуральных целых чисел, взаимно простых с n, то по только что полученной формуле имеем

$$\varphi(n) = n - \sum_{1 \le i_1 \le k} \frac{n}{q_{i_1}} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} \frac{n}{q_{i_1} q_{i_2}} + ... + (-1)^k \frac{n}{q_1 q_2 ... q_k} =$$
$$= n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{q_k}\right) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right).$$

Преобразования сумм в произведения очень громоздки и связаны с разложением многочлена на множители. Например, для $k = 2$ соответствующие преобразования будут иметь вид

$$n - \left(\frac{n}{q_1} + \frac{n}{q_2}\right) + \frac{n}{q_1 q_2} = n\left[1 - \frac{q_2 + q_1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2}\right] = n\left[\frac{q_1 q_2 - q_1 - q_2 + 1}{q_1 q_2}\right] =$$
$$= n\frac{(q_1 - 1)(q_2 - 1)}{q_1 q_2} = n\frac{q_1 - 1}{q_1} \cdot \frac{q_2 - 1}{q_2} = n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right).$$

Перечислим в заключение без доказательства свойства функции Эйлера.

1. Если $(a, b) = 1$, то $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Например, $(3,7) = 1$,

   $\varphi(3 \cdot 7) = \varphi(21) = 21 \cdot \prod_{i=1}^{2}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = 21\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 21 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = 12$;

   $\varphi(21) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$.

2. $\varphi(q^\alpha) = q^\alpha - q^{\alpha - 1} = q^\alpha\left(1 - \frac{1}{q}\right)$. Возьмем $n = 8$, $n = 2^3$,

   $\varphi(8) = 4 = 2^3 - 2^2 = 2^3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4$.

3. $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(q_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right)$.

4. $\sum_{d \backslash n} \varphi(d) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{d \backslash q_i^{\alpha_i}} \varphi(d) = \prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i} = n$, где d — различные делители числа n.

   Например, если $n = 10 = 2^1 \cdot 5^1$, то $\sum_{d \backslash 10} \varphi(d) = \prod_{i=1}^{2} q_i^{\alpha_i} = 2 \cdot 5 = 10$. Выраже-

ние $\sum_{d\backslash 10}\varphi(d)$ означает, что суммирование ведется по всем делителям числа 10, т. е. $\sum_{d\backslash 10}\varphi(d)=\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(5)+\varphi(10)=1+1+4+4=10$.

5. $x^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$, где $n>0$ и $(x,n)=1$. Например, $x=3,\ n=7$, $3^{\varphi(7)}=3^6=729=104\cdot 7+1=1(\mathrm{mod}\,7)$ или $x=3,\ n=10$, $3^{\varphi(10)}=3^4=81=8\cdot 10+1=1(\mathrm{mod}\,10)$.

- **Пример 1.** Найти число способов разложения n шаров по m ящикам так, чтобы r $(0\le r<m)$ ящиков остались пустыми.

Рассмотрим простейший пример. Пусть $m=3,\ n=5,\ r=1$. Из рис. 2.5 сразу ясно, что порядок, т. е. номер шаров, важен, следовательно, речь идет о n перестановках. В данном опыте выбирается ящик. Это выборка с повторениями, т. к. ящики могут повторяться, например, первый шар положен в первый ящик, второй шар положен в первый ящик и т. д. На основе такого простого примера ясно, что речь идет о выборке m ящиков n раз (n шаров) с повторениями (рис. 2.5). Таким образом, число способов, которыми можно разместить n шаров по m ящикам, равно m^n.

Рис. 2.5

Пусть p_i $(i=1,2,..,m)$ — свойство, состоящее в том, что при данной раскладке ящик с номером i остался пустым. Тогда количество раскладок, обладающих свойствами $p_{i_1},p_{i_2},...,p_{i_r}$ $(1\le i_1<i_2<...<i_r\le m)$ при одном способе выбора r пустых ящиков, равно $n(p_{i_1},p_{i_2},...,p_{i_r})=(m-r)^n$, а общее количество раскладок, распространенное на все возможные способы выбора пустых ящиков, будет равно

$$\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_r\le m} n(p_{i_1},p_{i_2},...,p_{i_r})=C_m^r(m-r)^n.$$

Применим теперь формулу включений и исключений типа (2.15.2), получим

$$n_m(r)=\sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}C_k^r\omega(k)=\sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}C_k^rC_m^k(m-k)^n=\left\langle\begin{matrix}k=r+l,\\ k=r,l=0,\\ k=m,l=m-r\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\sum_{l=0}^{m-r}(-1)^lC_{r+l}^rC_m^{r+l}(m-r-l)^n=\left\langle\begin{matrix}C_{r+l}^rC_m^{r+l}=\dfrac{m!}{r!l!(m-r-l)!},\\ C_m^rC_{m-r}^l=\dfrac{m!}{r!l!(m-r-l)!}\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\sum_{l=0}^{m-r}(-1)^lC_m^rC_{m-r}^l(m-r-l)^n=C_m^r\sum_{l=0}^{m-r}(-1)^lC_{m-r}^l(m-r-l)^n.$$

2.17. Функция Мебиуса

Функция Мебиуса $\mu(n)$ определяется для всех $n\in N$ и равна

$$\mu(n)=\begin{cases}1, \text{ если } n=1,\\ 0, \text{ если } n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}...q_k^{\alpha_k} \text{ и } \exists\alpha_i>1,\\ (-1)^k, \text{ если } n=q_1q_2...q_k,\end{cases}\qquad(2.17.1)$$

где $n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}...q_k^{\alpha_k}$ — разложение аргумента на простые сомножители, такое же, как для функции Эйлера *(см. разд. 2.16)*.

Функция Мебиуса для первых десяти значений аргумента представлена в табл. 2.5.

Таблица 2.5

n	1	2	3	4	5
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1
n	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	0	0	1

Рассмотрим некоторые свойства функции $\mu(n)$ и ее связь с функцией Эйлера.

1. $$\sum_{d\backslash n}\mu(d)=\begin{cases}0, \text{ если } n>1,\\ 1, \text{ если } n=1,\end{cases} \qquad (2.17.2)$$

причем суммирование идет по всем делителям d числа n. Итак, если $n=1$, то $\sum_{d\backslash n}\mu(d)=\mu(1)=1$. Если же $n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}...q_k^{\alpha_k}\neq 1$, тогда $\sum_{d\backslash n}\mu(d)=\sum_{d\backslash n,\mu(d)\neq 0}\mu(d)=\sum_{i=1}^{k}C_k^i(-1)^i=(1-1)^k=0$, т. к. все делители d, для которых $\mu(d)\neq 0$, имеют по формуле (2.17.1) вид $q_{i_1}q_{i_2}...q_{i_r}$, т. е. $\mu(q_{i_1}q_{i_2}...q_{i_r})=(-1)^r$. Количество таких делителей $q_{i_1}q_{i_2}...q_{i_r}$, выбираемых из $q_1q_2...q_k$, равно C_k^r.

2. Если $f(n)=\sum_{d\backslash n}g(d)$, то $g(n)=\sum_{d\backslash n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)$, (2.17.3)

где $f(n)$ и $g(n)$ определены на множестве N. Формула (2.17.3) называется *формулой обращения Мебиуса*.

3. $$\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{d\backslash n}\frac{\mu(d)}{d}. \qquad (2.17.4)$$

Формула (2.17.4) устанавливает связь между функциями Эйлера и Мебиуса. Если $n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}...q_k^{\alpha_k}$, то $\sum_{d\backslash n}\frac{\mu(d)}{d}=\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)$.

2.18. Практическое занятие 5. Формула включений и исключений

2.18.1. Из урны, содержащей m различных шаров, одновременно извлекают s $(1\le s\le m)$ шаров, записывают их номера, а затем шары возвращаются обратно в урну. Можно составить $(C_m^s)^d$ различных наборов, получающихся в результате d извлечений. Найти число наборов, в которых

а) встречаются все шары;

б) ровно r $(0\le r\le m)$ шаров не встречается.

2.18.2. Вычислить $S=\sum_{k'}\left(2/2^{k'}\right)$, где суммирование проводится по всем натуральным k', не кратным 2, 3 и 5.

2.18.3. Четыре человека сдают свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что в точности k человек получат свои шляпы назад. Рассмотреть все значения k $(0\le k\le 4)$.

2.18.4. При обследовании читательских вкусов оказалось, что 60 % студентов читают журнал A, 50 % — журнал B, 50 % — журнал C, 30 % — журналы A и B, 20 % — журналы B и C, 40 % — журналы A и C, 10 % — журналы A, B и C. Сколько процентов студентов:

а) не читает ни одного журнала;

б) читает в точности два журнала;

в) читает не менее двух журналов.

2.18.5. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 100 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

2.18.6. Показать, что если $n=30m$, то количество целых положительных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15, равно $22m$.

2.18.7. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — физический, 10 учащихся не посещают ни один из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

2.18.8. Сколькими способами можно расположить за круглым столом n супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

2.18.9. В букинистическом магазине лежит 6 экземпляров романа И. С. Тургенева "Рудин", 3 экземпляра его же романа "Дворянское гнездо" и 4 экземпляра романа "Отцы и дети". Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы "Рудин" и "Дворянское гнездо", и 7 томов, содержащих романы "Дворянское гнездо" и "Отцы и дети". Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую не менее, чем по одному экземпляру каждого из этих романов?

2.18.10. Вычислить:

а) $\varphi(100)$;

б) $\varphi(1000)$;

в) $\varphi(p)$, где p — простое число.

Глава 3

Теория графов

3.1. Основные понятия и определения

Теория графов применяется при анализе функционирования сложных систем, таких как сети железных дорог, телефонные или компьютерные сети, ирригационные системы. Эта теория традиционно является эффективным аппаратом формализации задач экономической и планово-производственной практики, применяется в автоматизации управления производством, в календарном и сетевом планировании.

Основное понятие теории — *граф*. Пусть S — непустое множество, $V^{(2)}$ — множество всех его двухэлементных подмножеств, $U \subset V^{(2)}$. Тогда пара (S,U) называется *неориентированным графом*. Элементы множества S называются *вершинами графа*, а элементы множества U — *ребрами*. Итак, $G = (S,U)$ граф — это конечное множество вершин S и множество ребер U.

Вершины графа обозначают по-разному: или прописными буквами, или строчными с индексами; для ребер наиболее употребительное обозначение — u с индексом, например $u_1, u_2, ..., u_n$. Взаимное расположение, форма и длина ребер значения не имеют. Важно лишь то, что они соединяют две данные вершины множества S.

Если в паре вершин x_i и x_j указано направление связи, т. е. какая из вершин является первой, то соединяющий их отрезок u_k называется дугой, а вершины, определяющие дугу u_k, называют *концевыми вершинами*. Если концевые вершины совпадают, то дугу называют *петлей*. В графе G могут существовать дуги (ребра) с одинаковыми концевыми вершинами. Такие дуги называются *параллельными*.

Если в графе $G = (S, U)$ все элементы множества U изображаются дугами, то граф называется *ориентированным* или *орграфом*, если ребрами, то *неориентированным*. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общий конец.

Вершина x_1 и ребро u_1 называются *инцидентными*, если x_1 является концом ребра u_1, и *неинцидентными* в противном случае. Таким образом, смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность — отношение между разнородными элементами.

Число вершин графа называется его *порядком*. Число дуг (ребер) графа G, инцидентных данной вершине, — степенью $P(x_i)$ вершины x_i. Если степень равна нулю, вершина называется *изолированной*, а если единице — *висячей*.

Граф G называется *простым*, если он не содержит петель и параллельных дуг. Простой граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется *полным*. Граф, содержащий хотя бы две параллельные дуги (ребра), называется *мультиграфом*; граф, содержащий петли, — *псевдографом*.

Граф называется *двудольным*, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (доли), что концы каждого ребра принадлежат разным частям. Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется *полным двудольным*. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин, обозначается символом $K_{p,q}$.

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. Полные графы порядка 1, 2, 3 и 4 (рис. 3.1) обозначаются K_n. Число ребер в полном графе C_n^2. На рис. 3.2 изображены двудольные графы $K_{1,4}$ и $K_{3,3}$. Два графа G и G_1 называются *изоморфными*, если между множеством их вершин существует такое взаимнооднозначное соответствие, при котором в одном из графов ребрами соединены вершины в том и только в том случае, если в другом графе ребрами соединены те же вершины. Для орграфов ориентация дуг также должна быть одинаковой.

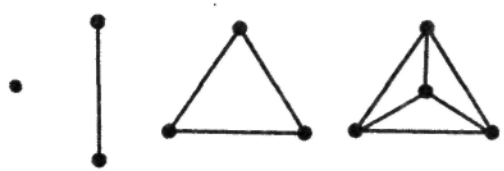


Рис. 3.1

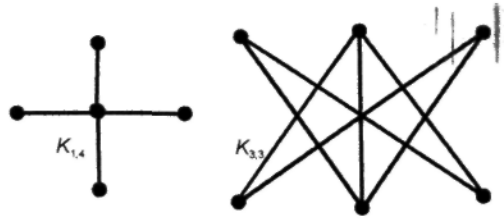


Рис. 3.2

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквивалентностью, т. е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны.

Способов задания графов великое множество. Самый простой способ — задание множеств S и U. Граф также может быть задан просто рисунком. В силу изоморфизма один и тот же граф может быть изображен разными рисунками. Например, на рис. 3.3 представлено изображение одного и того же графа, т. к. в обоих случаях содержится одна и та же информация о вершинах и дугах графа и их взаимном расположении. В некоторых случаях все же приходится различать изоморфные графы; тогда полезно понятие *помеченный граф*.

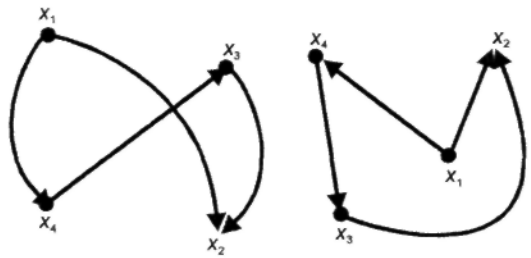


Рис. 3.3

Граф G_n порядка n называется *помеченным*, если его вершинам присвоены некоторые метки, например 1, 2, 3.... На рис. 3.4 изображены три разных графа ($n = 3$). Строго говоря, абстрактный или непомеченный граф — это класс изоморфных графов. Число g_n непомеченных графов порядка n определяется очень сложно. Известна формула Пойа*

$$g_n \cong \frac{2^{C_n^2}}{n!}, \qquad (3.1.1)$$

* Дьердь Пойа (1887–1985) — американский математик.

дающая лишь асимптотику числа g_n, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=1$, где $g(n)=g_n$, $f(n)=\frac{2^{C_n^2}}{n!}$.

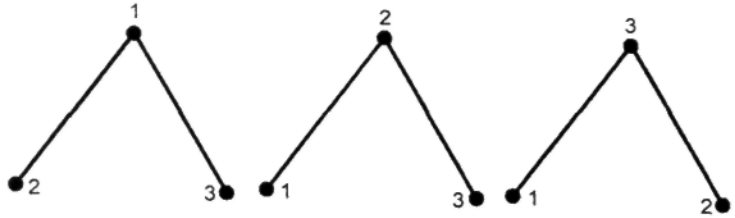


Рис. 3.4

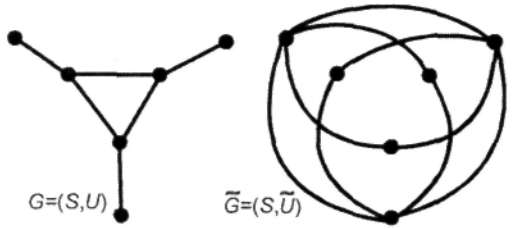


Рис. 3.5

Граф называется плоским (планарным), если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются его вершинами. Для произвольного графа $G=(S,U)$ следующим образом определяется *дополнительный граф* (дополнение) $\tilde{G}=(S,\tilde{U})$. В этом графе $\tilde{G}$ вершин столько же, сколько в графе G, причем любые две несовпадающие вершины смежны в $\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G (рис. 3.5). Граф, изоморфный своему дополнению, называется *самодополнительным*. Пусть $G=(S,U)$. Граф $G'=(S',U')$ называется *подграфом* графа G, если $S'\subset S$ и $U'\subset U$.

3.2. Операции над графами

Определим операции, позволяющие из имеющихся графов получать другие графы с большим или меньшим числом элементов.

1. *Объединение графов*. Граф $G=(S,U)$ называется *объединением* (или *наложением*) графов $G_1=(S_1,U_1)$ и $G_2=(S_2,U_2)$, если $S=S_1\cup S_2$

и $U=U_1\cup U_2$. Объединение $G=G_1\cup G_2$ называется *дизъюнктным*, если $S_1\cap S_2=\varnothing$.

2. *Произведение графов*. Пусть даны графы $G_1=(S_1,U_1)$ и $G_2=(S_2,U_2)$. Граф $G=(S,U)$ называется *произведением* $G_1\times G_2$ графов G_1 и G_2, причем $S=S_1\times S_2$ — декартово произведение множеств вершин исходных графов, а множество ребер получается следующим образом: вершины (x_1,x_2) и (y_1,y_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда или $x_1=y_1$, а x_2 и y_2 смежны в G_2, или $x_2=y_2$, а x_1 и y_1 смежны в G_1 (рис. 3.6).

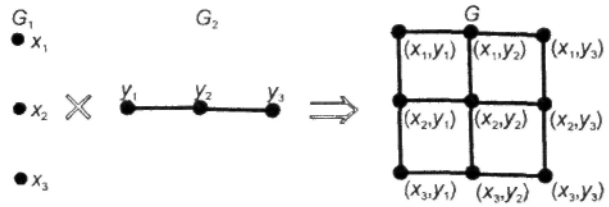


Рис. 3.6

С помощью операции произведения вводятся n-мерные кубы — один из классов графов. n-мерный куб Q_n вводится рекуррентно:

$$Q_1=K_2,\ Q_n=K_2\times Q_{n-1},\ n>1. \qquad (3.2.1)$$

Таким образом, Q_n — граф порядка 2^n, вершины которого можно представить векторами длины n, причем такими, что векторы, смежные одной вершине, будут различаться ровно в одной координате. На рис. 3.7 представлены кубы Q_2 и Q_3. Видно, что каждая вершина n-мерного куба инцидентна n ребрам, следовательно, число ребер n-мерного куба равно $n\cdot 2^{n-1}$.

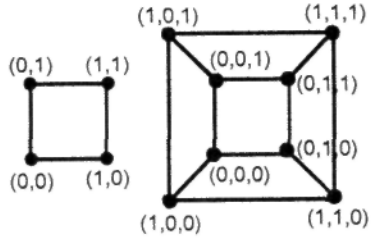


Рис. 3.7

3. *Слияние (отождествление) вершин.* Пусть x_1 и x_2 — две произвольные вершины графа G, а $G_1 = G \setminus \{x_1\} \setminus \{x_2\}$. К графу G_1 присоединим новую вершину y_1, соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин x_1 и x_2 в графе G. Построенный граф G_1 получен из G отождествлением вершин x_1 и x_2 (рис. 3.8).

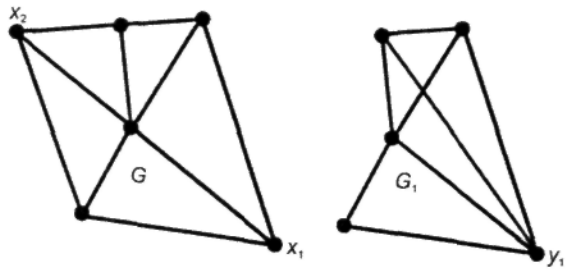


Рис. 3.8

Операция стягивания ребра означает отождествление двух смежных вершин. Граф G называется *стягиваемым* к графу G_1, если G_1 получается из G в результате некоторой последовательности стягиваний ребер.

4. *Расщепление вершин.* Пусть x_1 — одна из вершин графа G. Разобьем ее окружение на две части N_1 и N_2; удалим вершину x_1 вместе с инцидентными ей ребрами; добавим новые вершины x_2 и x_3 и соединяющее их ребро (x_2, x_3); вершину x_2 соединим с каждой вершиной из множества N_1, а вершину x_3 с каждой вершиной из множества N_2. В результате получим граф $\tilde{G}$. Этот граф построен из исходного графа G расщеплением вершины x_1 (рис. 3.9).

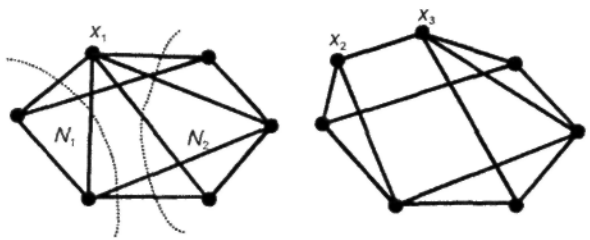


Рис. 3.9

3.3. Маршруты, цепи, циклы

Чередующаяся последовательность $x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots, x_k, u_k, x_{k+1}$ вершин и ребер графа, такая, что $u_i = x_i x_{i+1}$, $i = \overline{1,k}$, называется маршрутом, соединяющим вершины x_1 и x_{k+1}. Очевидно, что маршрут можно задать последовательностью его вершин $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ или последовательностью ребер $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Маршрут называется цепью, если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Гамильтоновой цепью называется простая цепь, содержащая все вершины графа.

Маршрут называется циклическим, если $x_1 = x_{k+1}$. Циклическая цепь называется циклом, а циклическая простая цепь — простым циклом. Число ребер в маршруте называется длиной маршрута. *Гамильтоновым циклом* называется простой цикл, содержащий все вершины графа. Длина всякого цикла не менее трех в графе без петель и кратных ребер. Минимальная из длин циклов графа называется его *обхватом*.

Важным понятием теории графов является *связность*. Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Для орграфа существует еще понятие сильной связности. Для этого определим понятие пути. *Путь* — это ориентированный маршрут. Поэтому если для установления простой (или слабой) связности графа ориентацию его дуг принимать в расчет не следует, то для установления сильной связности это необходимо (рис. 3.10). Орграф называется *сильно связным*, если для любых двух вершин $x_i, x_j \in S$ найдется путь с началом в x_i и концом в x_j. Для неориентированного графа понятие пути и маршрута совпадают.

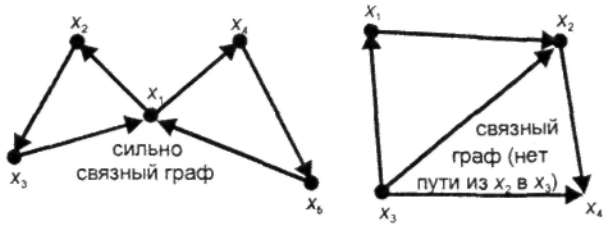


Рис. 3.10

Теорема 3.1. **Для любого графа G либо он сам, либо его дополнение является связным.**

Доказательство. Пусть G — несвязный граф (рис. 3.11), A — одна из его областей связности и $B = G \setminus A$. Тогда для $\forall x \in A$ и $\forall y \in B$ в дополнительном графе $\tilde{G}$ есть ребро (x, y), т. е. произвольная вершина из B соединена

с x маршрутом единичной длины, а произвольная вершина из A, отличная от x, соединена с x маршрутом длиной не более чем два ребра, т. е. граф $\tilde{G}$ связен.

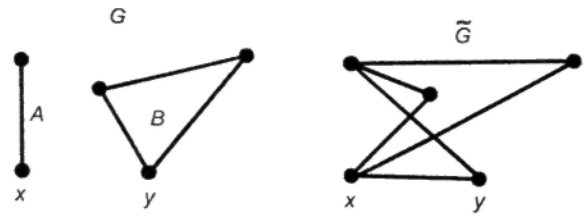


Рис. 3.11

Рассмотрим $S = \bigcup_i S_i$ разложение множества вершин графа $G = (S, U)$ на попарно непересекающиеся подмножества, причем такое, что все вершины в каждом S_i связаны, а вершины из различных S_i не связаны. Тогда можно написать разложение $G = \bigcup_i G_i(S_i, U_i)$ графа G на непересекающиеся связные подграфы $G_i(S_i, U_i)$. Такое разложение называется прямым, а сами подграфы — компонентами связности графа G.

Теорема 3.2. **Любой граф представляется в виде объединения непересекающихся связных (сильно связных) компонент. Разложение графа на связные (сильно связные) компоненты определяется однозначно.**

На рис. 3.12 изображен орграф, разлагающийся на три сильно связных компоненты: подграфы G_1, G_2 и G_3.

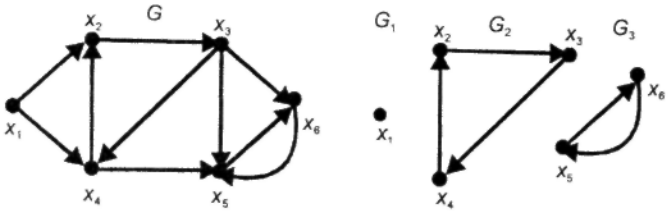


Рис. 3.12

Теорема 3.3. **Пусть $G = (S, U)$ является n-вершинным неориентированным графом с k компонентами связности. Тогда число ребер в таком графе $m(G)$ удовлетворяет условию**

$$n - k \le m(G) \le C_{n-k+1}^2, \qquad (3.3.1)$$

причем обе эти оценки достижимы.

Например, на рис. 3.13 изображен неориентированный граф, у которого $n = 7$, $m = 6$, $k = 2$. Тогда $7 - 2 = 5 < 6 < C_6^2 = 15$, т. е. оценка теоремы 3.3 справедлива.

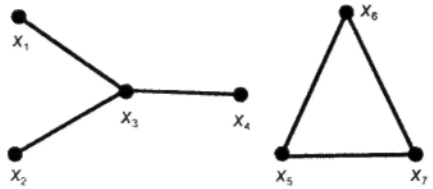


Рис. 3.13

В различных приложениях теории графов дугам (ребрам) графов, моделирующих реальные процессы, обычно сопоставляются какие-либо числовые характеристики. Например, если дугами изображаются транспортные магистрали, то числовой характеристикой дуги может быть пропускная способность соответствующей магистрали и т. п. В таких случаях говорят, что дугам графа приписаны определенные веса.

Пусть $G = (S, U)$ — орграф. Если каждой дуге $(x_i, x_j) \in U$ поставлено в соответствие некоторое число $\omega(x_i, x_j)$, то граф G называется *графом со взвешенными дугами* или *сетью*. При этом вершины графа называются *узлами сети*. Число $\omega(x_i, x_j)$ называется *весом дуги* (x_i, x_j). *Весом пути* μ (длиной, стоимостью и т. д. в зависимости от контекста) сети G_ω называется число

$$\omega(\mu) = \sum_{(x_i, x_j) \in \mu} \omega(x_i, x_j). \qquad (3.3.2)$$

Понятие сети и веса маршрута для неориентированного графа определяется аналогично.

3.4. Способы задания графов

В подавляющем большинстве случаев граф задается матрицей. Для расчетов на ЭВМ это единственный способ. Существует редко применяемый сейчас метод задания графа в виде латинской матрицы. В этом способе направление дуг задается порядком букв в их названии. Например, рассмотрим граф, изображенный на рис. 3.14. Для него латинская матрица имеет вид, показанный в табл. 3.1.

Таблица 3.1

	A	B	C	D	E
A		AB	AC		
B	BA			BD	
C	CA				CE
D		DB			
E				ED	EE

Если граф неориентированный, то в латинской матрице просто штрихуют соответствующую клеточку в таблице. Наиболее часто граф задают с помощью матриц смежности и инциденций. Рассмотрим изображенный на рис. 3.14 граф.

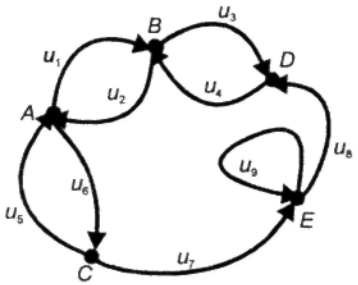


Рис. 3.14

Как для орграфов, так и для неориентированных графов можно определить матрицу смежности вершин.

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Это квадратная матрица $n \times n$ порядка, где n — число вершин. Ее строки и столбцы соответствуют вершинам графа. Элементы p_{ij} матрицы смежности вершин равны числу дуг, идущих из i-й вершины в j-ю. Если орграф не содержит параллельных дуг, то матрица является бинарной и состоит только из нулей

и единиц. В случае неориентированного графа ему вместе с ребром $x_i x_j$ принадлежит и ребро $x_j x_i$, поэтому матрица смежности вершин будет симметрической. Матрица смежности вершин однозначно определяет структуру графа.

Теорема 3.4. **Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности вершин получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов (т. е. одновременно с перестановкой i-й и j-й строк переставляются i-й и j-й столбцы).**

Доказательство. Рассмотрим два графа G и G_1, отличающихся лишь нумерацией вершин. Это значит, что в этих графах существует подстановка s на множестве вершин, сохраняющая их смежность: вершины x_1 и x_2 тогда и только тогда смежны в G, когда их образы $y_1 = s(x_1)$ и $y_2 = s(x_2)$ смежны в G_1. Тогда если $P(G) = P$ и $P(G_1) = P^{(1)}$, то $p^{(1)}_{s(i)s(j)} = p_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$.

Из доказанной теоремы следует, что ранги матриц смежности изоморфных графов равны. Это позволяет ввести для графа следующее определение ранга: *рангом графа* называется ранг его матрицы смежности вершин. Обозначается ранг графа — $\operatorname{rank} G$.

Аналогично можно определить и матрицу смежности дуг. Это также квадратная матрица $m \times m$ порядка, где m — число дуг. Рассмотрим тот же граф без петли u_9. Элементы q_{ij} этой матрицы равны единице, если дуга u_i непосредственно предшествует дуге u_j, и равны нулю в остальных случаях. Для неориентированного графа элемент q_{ij} равен единице, если u_i и u_j смежны, и нулю в остальных случаях.

$$Q = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Определим для рассматриваемого графа матрицу инциденций. Это прямоугольная матрица размерности $n \times m$, где n — число вершин, а m — число дуг. Элементы r_{ij} этой матрицы равны +1, если дуга u_j исходит из i-й вершины (начальная вершина), –1, если дуга u_j входит в i-ю вершину (конечная вершина); 0, если дуга не инцидентна i-й вершине. В случае неориентированного графа элементами матрицы будут числа 1 и 0, т. е.

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } u_j, \\ 0, \text{ вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } u_j. \end{cases}$$

Строки матрицы инциденций называют *векторами инциденций графа* G. Матрица инциденций также однозначно определяет структуру графа. Для матрицы инциденций справедлива теорема, аналогичная теореме 3.4.

$$R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Теорема 3.5. **Графы (орграфы) изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инциденций получаются друг из друга произвольными перестановками строк и столбцов.**

Простой взвешенный граф (сеть) может быть представлен также своей матрицей весов $\Omega = (\omega_{ij})$, где ω_{ij} — вес ребра, соединяющего вершины x_i и x_j. Веса несуществующих ребер полагают равными нулю или бесконечности в зависимости от приложений. Очевидно, что матрица весов является простым обобщением матрицы смежности вершин.

Определим теперь матрицу Кирхгофа*. *Матрицей Кирхгофа* графа G называется матрица $B_{n\times n}$, $n = |S|$, если $b_{ij} = \begin{cases} -1, \ x_i \text{ и } x_j \text{ смежны}, \\ 0, \ x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны и } i \neq j, \\ P(x_i), \ i = j. \end{cases}$

Сумма элементов в каждой строке и каждом столбце этой матрицы равна нулю,

* Густав Роберт Кирхгоф (1824–1887) — немецкий физик.

т. е. $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 0, \ j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0, \ i = \overline{1,n}$. Кроме того, из этого следует, что алгебраические дополнения всех элементов матрицы B равны между собой.

Определим матрицы связности и достижимости. Пусть $P(G)$ — матрица смежности вершин графа $G = (S_n, U)$, а $B = E + P + P^2 + \ldots + P^n$. Введем матрицу $C = (c_{ij}), i, j = \overline{1,n}$ по правилу $c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } b_{ij} \neq 0, \\ 0, \text{ если } b_{ij} = 0. \end{cases}$ Матрица C называется *матрицей связности*, если G — неорграф, и *матрицей достижимости*, если G — орграф. Это значит, что в графе G тогда и только тогда существует маршрут из вершины x_i в вершину x_j, когда $c_{ij} = 1$. Таким образом, в матрице C содержится информация о существовании связей между различными элементами графа G посредством маршрутов.

Матрица контрдостижимости $L = (l_{ij}), \ i, j = \overline{1,n}$, определяется следующим образом:

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_i \text{ достижима из вершины } x_j, \\ 0, \text{ если вершина } x_i \text{ не достижима из вершины } x_j. \end{cases}$$

Можно показать, что $L = C^{\mathrm{T}}$. Матрицы C и L используются для нахождения сильных компонент графа. Пусть $F = C * L$, где операция * означает поэлементное произведение матриц C и L: $f_{ij} = c_{ij} \cdot l_{ij}$ *(см. раздел 1.2)*. Элемент f_{ij} матрицы F равен единице тогда и только тогда, когда вершины x_i и x_j взаимно достижимы, т. е. x_i достижима из x_j, а x_j — из x_i. Таким образом, сильная компонента орграфа, содержащая вершину x_i, состоит из элементов x_j, для которых $f_{ij} = 1$.

- **Пример 1.** Матрицы достижимости C и контрдостижимости L для графа, изображенного на рис. 3.12, равны

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&2&1\\0&0&1&0&1&2\\0&0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},\ P^4=\begin{pmatrix}0&0&0&1&2&1\\0&0&1&0&1&2\\0&0&0&1&3&2\\0&1&0&0&2&2\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ P^5=\begin{pmatrix}0&1&0&0&2&2\\0&0&0&1&3&2\\0&1&0&0&3&3\\0&0&1&0&2&2\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$P^6=\begin{pmatrix}0&0&1&0&2&2\\0&1&0&0&3&3\\0&0&1&0&3&3\\0&0&0&1&3&3\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ B=E+P+P^2+P^3+P^4+P^5+P^6=\begin{pmatrix}1&3&2&2&7&6\\0&3&2&2&10&9\\0&2&3&2&13&12\\0&2&2&3&10&9\\0&0&0&0&4&3\\0&0&0&0&3&4\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix},\ L=C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$F=C*L=\begin{array}{c}\\x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}x_1&x_2&x_3&x_4&x_5&x_6\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array}.$$

По матрице F легко определить состав вершин трех подграфов, образующих сильно связные компоненты исходного графа.

3.5. Метрические характеристики графа

Рассмотрим связный граф $G=(S,U)$, пусть x_1 и x_2 — две его вершины. Длина кратчайшего (x_1,x_2)-маршрута называется *расстоянием между вершинами* x_1 и x_2, обозначается через $d(x_1,x_2)$. Очевидно, что расстояние между вершинами является простой цепью и $d(x_i,x_i)=0$. Для любой вершины x величина

$$e(x)=\max_{y\in S} d(x,y) \tag{3.5.1}$$

называется *эксцентриситетом* вершины x. Максимальный из всех эксцентриситетов вершин называется *диаметром графа* и обозначается $d(G)$, т. е.

$$d(G)=\max_{x\in S} e(x)=\max_{x\in S}\max_{y\in S} d(x,y). \tag{3.5.2}$$

Минимальный из эксцентриситетов вершин графа называется его *радиусом* и обозначается через $r(G)$:

$$r(G)=\min_{x\in S} e(x)=\min_{x\in S}\max_{y\in S} d(x,y). \tag{3.5.3}$$

Вершина x называется *периферийной*, если ее эксцентриситет равен диаметру графа, т. е. $e(x)=d(G)$. Простая цепь, расстояние между концами которой равно $d(G)$, называется *диаметральной цепью*.

Теорема 3.6. **Для любого связного графа G справедливо неравенство $d(G)\le \operatorname{rank} G$.**

Доказательство. Пусть $d(G)=d$ и $x_1,x_2,\dots,x_{d+1}$ — одна из диаметральных цепей графа G. Рассмотрим матрицу смежности вершин $P(G)$ и выберем нумерацию вершин так, чтобы вершины $x_1,x_2,\dots,x_{d+1}$ имели номера $1,2,\dots,d+1$ соответственно. Так как цепь $x_1,x_2,\dots,x_{d+1}$ является подграфом $G'\subset G$, то $P(G)=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ представляет собой клеточную матрицу, в левом верхнем углу которой из-за выбранной нумерации вершин расположена матрица смежности подграфа G'. Этот подграф — простая цепь, т. е.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ — симметрическая матрица порядка $d+1$, все элементы которой, за исключением двух ближайших к главной диагонали полос, равны нулю. Минор порядка d матрицы A, остающийся после вычеркивания первого столбца и последней строки, равен единице. Следовательно, $\operatorname{rank}G = \operatorname{rank}P(G) \geq \operatorname{rank}A \geq d = d(G)$, т. е. $\operatorname{rank}G \geq d(G)$.

Вершина x называется *центральной*, если $e(x) = r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называется его *центром*. Центром может быть единственная вершина графа или несколько вершин (рис. 3.15). Здесь $e(x_1) = e(x_2) = e(x_4) = e(x_6) = 3$, $e(x_3) = e(x_7) = 4$, $e(x_5) = 2$. Таким образом, $d(G) = 4$, $r(G) = 2$. Периферийные вершины: x_3 и x_7, диаметральные цепи: $x_3 - x_2 - x_5 - x_6 - x_7$ и $x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7$, центральная вершина x_5.

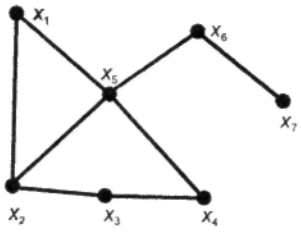


Рис. 3.15

3.6. Упорядочивание дуг и вершин орграфа

Расчеты в задачах, связанных с графами, заметно упрощаются, если их элементы упорядочены. Под упорядочиванием вершин связного орграфа без контуров, т. е. циклических цепей, понимают такое разбиение его вершин на группы, при котором:

1. Вершины первой группы не имеют предшествующих вершин, а вершины последней группы последующих.

2. Вершины любой другой группы не имеют предшествующих в следующей группе.
3. Вершины одной и той же группы дугами не соединяются.

Такое разбиение всегда возможно. В результате подобного упорядочивания получается граф, изоморфный исходному. Упорядочивание элементов выполняется графическим или матричным способом. Графический способ носит название *алгоритма Фалкерсона* и состоит из следующих шагов:

1. Найти вершины графа, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первую группу. Пронумеровать вершины группы в произвольном порядке.
2. Вычеркнуть все пронумерованные вершины и дуги, из них исходящие. В получившемся графе найдется, по крайней мере, одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Этой вершине, входящей во вторую группу, присвоить очередной номер и т. д. Второй шаг повторять до тех пор, пока не будут упорядочены все вершины.

Аналогичным образом упорядочиваются дуги орграфа. Рассмотрим несколько примеров. Упорядочим вершины графа, изображенного на рис. 3.16, *а*. Вершина B не содержит входящих дуг, отнесем ее к первой группе. Вычеркиваем все дуги, исходящие из B. Получим граф, приведенный на рис. 3.16, *б*. В нем опять находим одну вершину, в которую не заходит ни одна дуга. Это вершина D. Вычеркиваем дуги, исходящие из D. Появится еще одна вершина — вершина E, в которую не заходит ни одна дуга. После вычеркивания дуг EC и EA получим вершину A, которая входит, таким образом, в четвертую группу, а вершина C — в пятую. Изоморфный граф с упорядоченными вершинами изображен на рис. 3.17.

В данном примере в каждую группу входит только по одной вершине. Однако в общем случае в каждую такую группу могут входить несколько вершин, если граф большой и содержит много вершин. Упорядочим теперь вершины этого графа матричным способом. Для этого составим матрицу смежности вершин P.

$$P=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

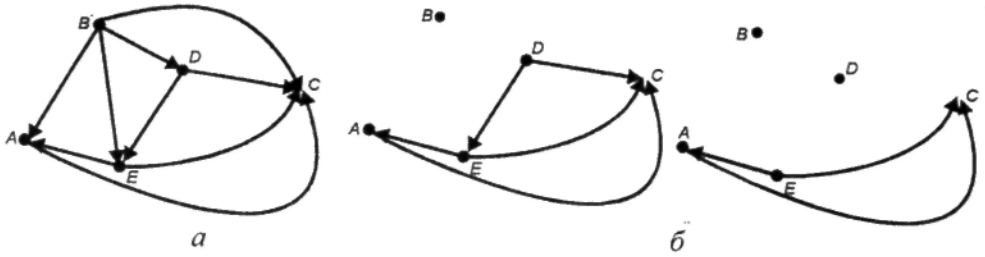


Рис. 3.16

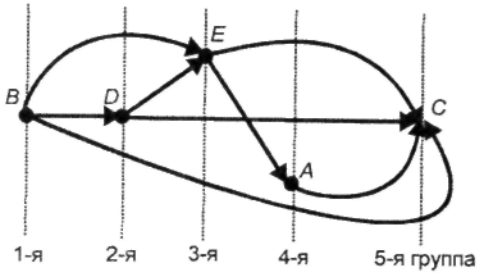


Рис. 3.17

Вычислим компоненты вектора $v_1 = \sum_{i=1}^{5} P^+(x_i)$, представляющие собой полустепени захода вершин графа. Для орграфов различают *полустепень захода* $P^+(x_i)$ вершины x_i (количество дуг, заходящих в x_i) и *полустепень выхода* $P^-(x_i)$ (количество дуг, исходящих из x_i). Полустепень захода вершины B оказалась равной нулю. Это значит, что в эту вершину не заходит ни одна дуга и вершина B образует первую группу. Исключим из рассмотрения вершину B и дуги, из нее исходящие, вычеркнув соответствующую строку матрицы P. Затем вычислим компоненты вектора $v_2 = v_1 - v_B$. Нулевая компонента теперь будет соответствовать вершине D, т. е. вершина D образует вторую группу. Так продолжается до получения вектора v_i, у которого будет часть только нулевых компонент, а остальные вычеркнуты (табл. 3.2). В нашем случае это вектор v_5 и вершина C, которая образует последнюю пятую группу.

Таблица 3.2

	A	B	C	D	E
v_1	2	0	4	1	2
v_2	1	-	3	0	1
v_3	1	-	2	-	0
v_4	0	-	1	-	-
v_5	-	-	0	-	-
Группа	4	1	5	2	3

При упорядочивании дуг получается та же картина, а сами дуги нумеруются подобным же образом. Используем опять граф, изображенный на рис. 3.16, *а*.

1. Найдем дуги, не имеющие непосредственно предшествующих дуг (они образуют первую группу).
2. Вычеркнем найденные дуги. После этого найдется, по крайней мере, одна новая дуга, не имеющая непосредственно предшествующей (в графе без дуг первой группы). Эти дуги составят вторую группу. Второй шаг повторяется до тех пор, пока все дуги не будут разбиты на группы. На рис. 3.18 изображен граф с упорядоченными по описанному алгоритму дугами. Штриховыми линиями показаны связи между дугами, существующие в исходном орграфе.

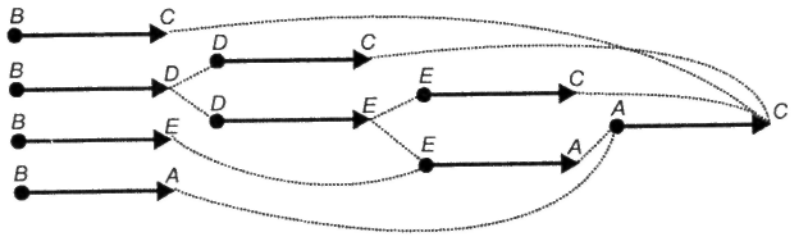


Рис. 3.18

3.7. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер

С помощью матрицы смежности вершин можно найти все маршруты, содержащие заданное количество ребер (дуг). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.7. **Для определения количества маршрутов, состоящих из k ребер (дуг), необходимо возвести в k-ю степень матрицу смежности вершин. Тогда элемент $p_{ij}^{(k)}$ даст количество маршрутов длины k (состоящих из k ребер) из вершины x_i в вершину x_j.**

- **Пример 1.** Рассмотрим неориентированный граф, изображенный на рис. 3.19.

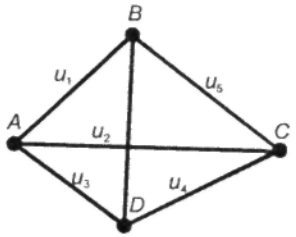


Рис. 3.19

Составим матрицу смежности вершин и возведем ее в квадрат. Результат возведения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первую строку. Элемент $p_{11}^{(2)} = 3$. Это значит, что существуют три маршрута из A в A длиной в два ребра. Действительно, это маршруты Au_1Bu_1A, Au_2Cu_2A, Au_3Du_3A. Из A в B существуют два маршрута: Au_2Cu_5B, Au_3Du_4B. Если использовать числовую матрицу смежности вершин, то для нахождения самих маршрутов необходимо работать с графом. Если же воспользоваться модифицированной матрицей смежности, в ячейки которой записаны названия ребер, то можно получить не только количество маршрутов, но и сами маршруты.

Действительно, для данного примера имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_5 & u_4 \\ u_2 & u_5 & 0 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_5 & u_4 \\ u_2 & u_5 & 0 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 & u_2u_5 + u_3u_4 & u_1u_5 + u_3u_6 & u_1u_4 + u_2u_6 \\ u_5u_2 + u_4u_3 & u_1u_1 + u_5u_5 + u_4u_4 & u_1u_2 + u_4u_6 & u_1u_3 + u_5u_6 \\ u_5u_1 + u_6u_3 & u_1u_2 + u_6u_4 & u_2u_2 + u_5u_5 + u_6u_6 & u_2u_3 + u_5u_4 \\ u_4u_1 + u_2u_6 & u_3u_1 + u_5u_6 & u_3u_2 + u_4u_5 & u_3u_3 + u_4u_4 + u_6u_6 \end{pmatrix}.$$

Аналогично обстоит дело и с орграфом. У него матрица смежности вершин несимметрическая.

Рассмотрим орграф на рис. 3.20 и определим все маршруты с тремя ребрами.

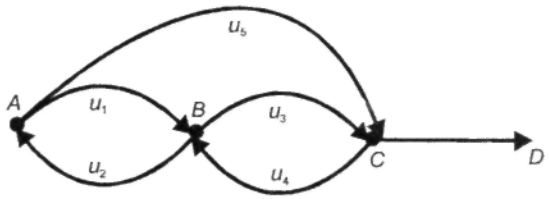


Рис. 3.20

Матрица смежности и результаты ее возведения в квадрат и куб имеют следующий вид:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим элемент $p_{22}^{(2)}$ после возведения матрицы смежности вершин в квадрат. $p_{22}^{(2)} = 2$, т. е. из вершины B в вершину B есть два маршрута

длиной две дуги. Это маршруты Bu_3Cu_4B и Bu_2Au_1B. После возведения матрицы в куб сохраняется та же картина. Например, $p_{12}^{(3)} = 2$; это значит, что есть два маршрута длиной три дуги из вершины A в вершину B. Это маршруты $Au_1Bu_2Au_1B$ и $Au_1Bu_3Cu_4B$. Для получения цепей (маршрутов, в которых каждое ребро встречается один раз) нужно в модифицированной матрице P^3 вычеркнуть те слагаемые, в которых какой-либо сомножитель встречается более одного раза.

Из теоремы 3.7 следуют два важных следствия, позволяющие определять наличие маршрутов и циклов в графе.

Следствие 1. **В графе G мощности n тогда и только тогда существует (x_i, x_j)-маршрут $(x_i \neq x_j)$, когда (i, j)-й элемент матрицы $P + P^2 + \ldots + P^{n-1}$ не равен нулю.**

Следствие 2. **В графе G мощности n тогда и только тогда существует цикл, содержащий вершину x_i, когда (i,i)-й элемент матрицы $P + P^2 + \ldots + P^n$ не равен нулю.**

В рассмотренном примере 1 имеем $n = 4$, $P^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A = P + P^2 + P^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = P + P^2 + P^3 + P^4 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим элементы матрицы A. Например, $a_{24} = 2 \neq 0$. Это значит, что в исходном графе (рис. 3.20) существуют маршруты из вершины B в вершину D. Это маршруты: BCD, $BACD$, $BCBACD$. Аналогично, $b_{22} = 7 \neq 0$. Таким образом, существуют циклы, проходящие через вершину B, например, циклы $BACB$, BAB и BCB. Так как $b_{44} = 0$, то через вершину D не проходит ни один цикл. Это хорошо видно на рис. 3.20.

3.8. Определение экстремальных путей на графах. Метод Шимбелла

Введем, следуя Шимбеллу, специальные операции над элементами матрицы смежности вершин, позволяющие находить кратчайшие или максимальные пути между вершинами, состоящие из заданного количества ребер. Эти операции таковы.

1. Операция умножения двух величин a и b при возведении матрицы в степень соответствует их алгебраической сумме, т. е.

$$\begin{cases} a \cdot b = b \cdot a \Rightarrow a + b = b + a, \\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow a + 0 = 0. \end{cases} \tag{3.8.1}$$

2. Операция сложения двух величин a и b заменяется выбором из этих величин минимального (максимального) элемента, т. е.

$$a + b = b + a = \min(\max)\{a, b\}, \tag{3.8.2}$$

нули при этом игнорируются. Минимальный или максимальный элемент выбирается из ненулевых элементов. Нуль в результате операции (3.8.2) может быть получен лишь тогда, когда все элементы из выбираемых — нулевые.

С помощью этих операций длины кратчайших или максимальных путей между всеми вершинами определяются возведением в степень весовой матрицы Ω, содержащей веса ребер. Например, элементы матрицы Ω^2 вычисляют следующим образом: $\omega_{ij}^{(2)} = \min(\max)\left\{\left(\omega_{i1}^{(1)} + \omega_{1j}^{(1)}\right), \left(\omega_{i2}^{(1)} + \omega_{2j}^{(1)}\right), \ldots, \left(\omega_{in}^{(1)} + \omega_{nj}^{(1)}\right)\right\}$.

Аналогично находят элементы k-й степени матрицы Ω. Рассмотрим пример. Составим для приведенного на рис. 3.21 графа матрицу весов. Она определяет все маршруты, состоящие из одного ребра. Найдем кратчайшие пути из двух ребер, для этого возведем эту матрицу в квадрат с учетом операций Шимбелла (min — кратчайшие пути):

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

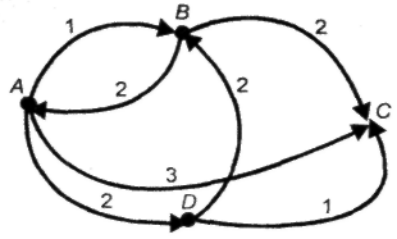


Рис. 3.21

Например: $\omega_{11}^{(2)} = \min\{(\omega_{11}^{(1)} + \omega_{11}^{(1)}), (\omega_{12}^{(1)} + \omega_{21}^{(1)}), (\omega_{13}^{(1)} + \omega_{31}^{(1)}), (\omega_{14}^{(1)} + \omega_{41}^{(1)})\} =$
$= \min\{(0+0), (1+2), (3+0), (2+0)\} = \min\{0, 3, 0, 0\} = 3.$

Аналогично, кратчайшими путями из трех ребер будут

$$P^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

и т. д. Например, длина кратчайшего пути из трех ребер из вершины D в вершину C равна 7. Это путь $DBAC$.

3.9. Практическое занятие 6. Способы задания графов. Операции над графами. Метрические характеристики графов. Упорядочивание элементов орграфов

3.9.1. Показать, что для произвольного графа $G = (S, U)$ справедливо равенство $\sum_{x \in S} P(x) = 2|U|$.

3.9.2. Для графов, изображенных на рис. 3.22, составить матрицы смежности вершин, смежности дуг и инциденций.

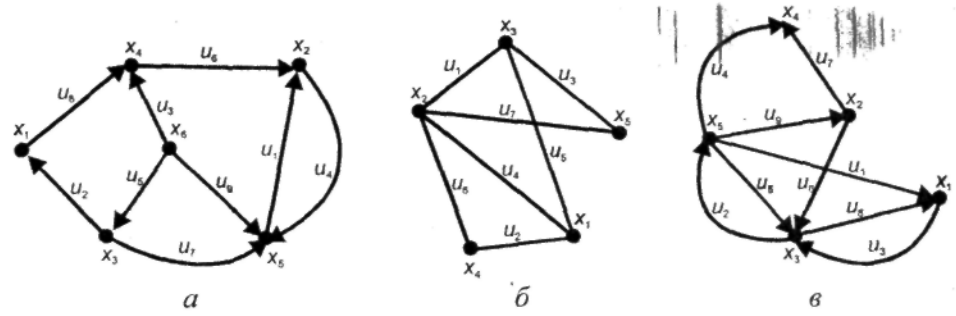


Рис. 3.22

3.9.3. По матрице смежности вершин построить наглядные изображения графов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.9.4. На рис. 3.23 приведены графы G_1 и G_2. Найти $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \times G_2$.

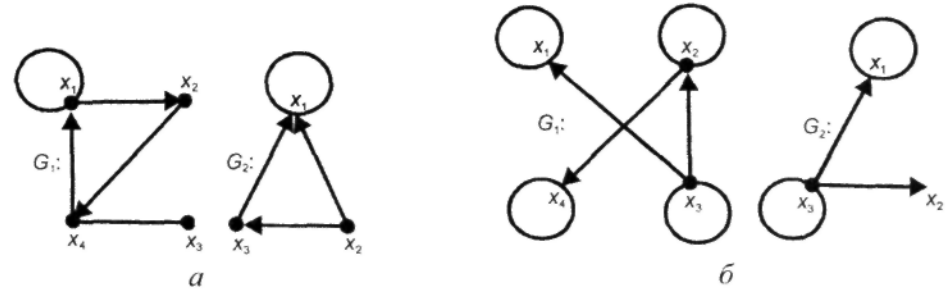


Рис. 3.23, *а* и *б*

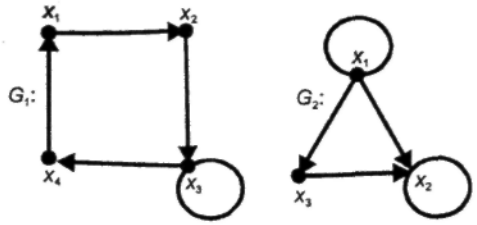


Рис. 3.23, *в*

3.9.5. Найти матрицы сильных компонент и маршрутов длины три дуги (ребра), исходящих из вершины x_1, для графов, изображенных на рис. 3.24.

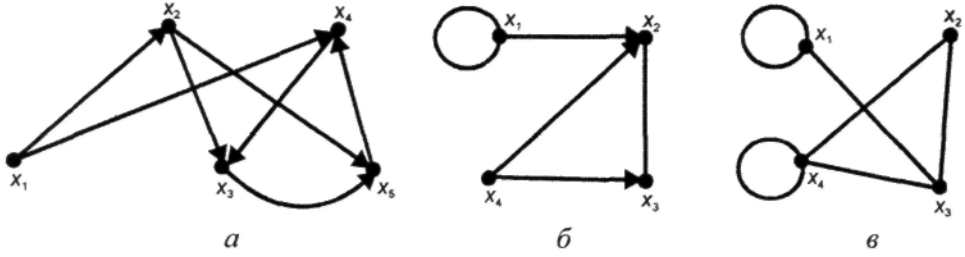


Рис. 3.24

3.9.6. Найти эксцентриситеты вершин, радиусы и диаметры графов, периферийные, центральные вершины и диаметральные цепи графов, приведенных на рис. 3.25.

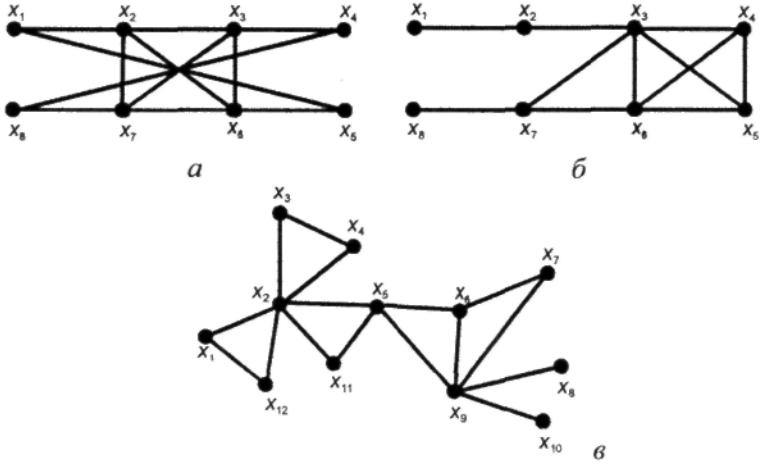


Рис. 3.25

3.9.7. Упорядочить вершины и дуги орграфов, изображенных на рис. 3.26, графическим и матричным способом (дуги — только графическим способом).

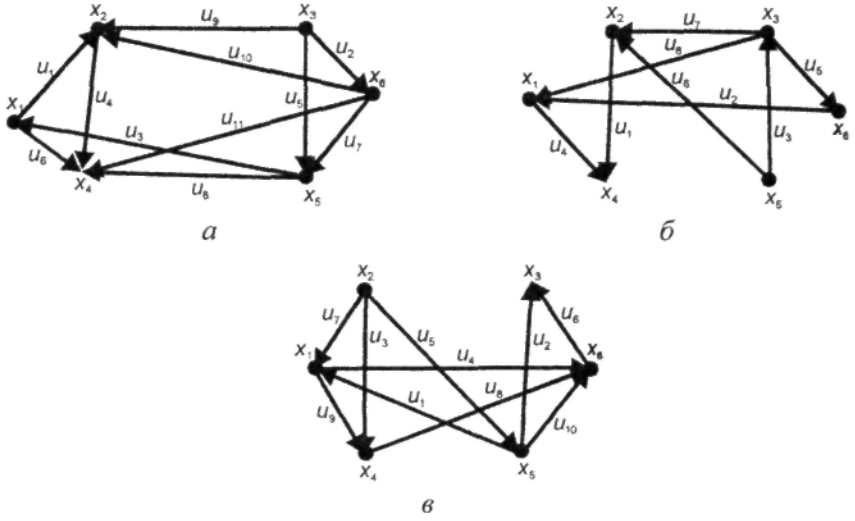


Рис. 3.26

3.9.8. Доказать, что три графа, изображенных на рис. 3.27, изоморфны, а графы на рис. 3.28 неизоморфны.

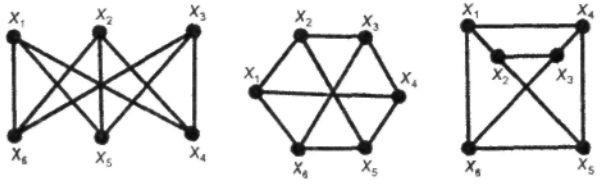


Рис. 3.27

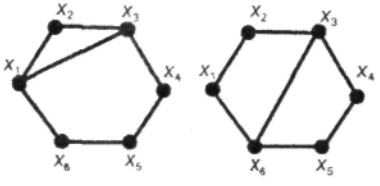


Рис. 3.28

3.9.9. Построить граф, центр которого:

а) состоит ровно из одной вершины;

б) состоит ровно из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин;

в) совпадает с множеством всех вершин.

3.9.10. Показать, что в любом графе без петель и кратных ребер, содержащем не менее двух вершин, найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

3.10. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры*

Рассмотрим еще несколько алгоритмов нахождения кратчайшего пути между двумя заданными вершинами в ориентированной сети. Пусть $G = \{S, U, \Omega\}$ — ориентированный граф со взвешенными дугами. Обозначим s-вершину — начало пути и t-вершину — конец пути.

Общий подход к решению задачи о кратчайшем пути был развит американским математиком Ричардом Беллманом**, который предложил название *динамическое программирование*. Задача о кратчайшем пути — частный случай следующей задачи: найти в заданном графе пути, соединяющие две заданные вершины и доставляющие минимум или максимум некоторой аддитивной функции, определенной на путях. Чаще всего эта функция трактуется как длина пути, и задача называется задачей о кратчайших путях. Алгоритм Дейкстры — одна из реализаций этой задачи. Его часто называют алгоритмом расстановки меток. В процессе работы этого алгоритма узлам сети $x_i \in S$ приписываются числа (метки) $d(x_i)$, которые служат оценкой длины (веса) кратчайшего пути от вершины s к вершине x_i. Если вершина x_i получила на некотором шаге метку $d(x_i)$, это означает, что в графе G существует путь из s в x_i, имеющий вес $d(x_i)$. Метки могут находиться в двух состояниях — быть временными или постоянными. Превращение метки в постоянную означает, что кратчайшее расстояние от вершины s до соответствующей вершины найдено.

Алгоритм Дейкстры содержит одно ограничение — веса дуг должны быть положительными. Сам алгоритм состоит из двух этапов. На первом находится

* Едсгер Дейкстра (1930–2002) — нидерландский математик.

** Ричард Эрнест Беллман (1920–1984) — американский математик.

длина кратчайшего пути, на втором строится сам путь от вершины s к вершине t.

Этап 1. Нахождение длины кратчайшего пути.

Шаг 1. Присвоение вершинам начальных меток.

Полагаем $d(s) = 0^*$ и считаем эту метку постоянной (постоянные метки помечаются сверху звездочкой). Для остальных вершин $x_i \in S$, $x_i \neq s$ полагаем $d(x_i) = \infty$ и считаем эти метки временными. Пусть $\tilde{x} = s$, $\tilde{x}$ — обозначение текущей вершины.

Шаг 2. Изменение меток.

Для каждой вершины x_i с временной меткой, непосредственно следующей за вершиной $\tilde{x}$, меняем ее метку в соответствии со следующим правилом:

$$d_{\text{нов.}}(x_i) = \min\{d_{\text{стар.}}(x_i), d(\tilde{x}) + \omega(\tilde{x}, x_i)\}. \qquad (3.10.1)$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Из всех вершин с временными метками выбираем вершину x_j^* с наименьшим значением метки

$$d(x_j^*) = \min\{d(x_j) / x_j \in S,\ d(x_j) - \text{временная}\}. \qquad (3.10.2)$$

Превращаем эту метку в постоянную и полагаем $\tilde{x} = x_j^*$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.

Если $\tilde{x} = t$, то $d(\tilde{x})$ — длина кратчайшего пути от s до t. В противном случае происходит возвращение ко второму шагу.

Этап 2. Построение кратчайшего пути.

Шаг 5. Последовательный поиск дуг кратчайшего пути.

Среди вершин, непосредственно предшествующих вершине $\tilde{x}$ с постоянными метками, находим вершину x_i, удовлетворяющую соотношению

$$d(\tilde{x}) = d(x_i) + \omega(x_i, \tilde{x}). \qquad (3.10.3)$$

Включаем дугу $(x_i, \tilde{x})$ в искомый путь и полагаем $\tilde{x} = x_i$.

Шаг 6. Проверка на завершение второго этапа.

Если $\tilde{x} = s$, то кратчайший путь найден — его образует последовательность дуг, полученных на пятом шаге и выстроенных в обратном порядке. В противном случае возвращаемся к пятому шагу.

▪ **Пример 1.** Задана весовая матрица Ω сети G. Найти минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_6 по алгоритму Дейкстры.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

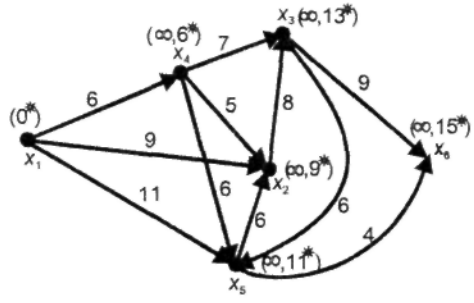


Рис. 3.29

На рис. 3.29 изображен сам граф по данной матрице весов. Поскольку в данном графе есть цикл между вершинами x_2, x_3 и x_5, то вершины графа нельзя упорядочить по алгоритму Фалкерсона. На рисунке графа временные и постоянные метки указаны над соответствующей вершиной. Итак, распишем подробно работу алгоритма Дейкстры по шагам.

Этап 1.

Шаг 1. Полагаем $d(x_1) = 0^*$, $\tilde{x} = x_1$,

$d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_6) = \infty.$

1-я итерация.

Шаг 2. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{x} = x_1$ с временными метками $\tilde{S} = \{x_2, x_4, x_5\}$. Пересчитываем временные метки этих вершин: $d(x_2) = \min\{\infty, 0^* + 9\} = 9$,

$d(x_4) = \min\{\infty, 0^* + 6\} = 6$, $d(x_5) = \min\{\infty, 0^* + 11\} = 11$.

Шаг 3. Одна из временных меток превращается в постоянную $\min\{9, \infty, 6, 11, \infty\} = 6^* = d(x_4)$, $\tilde{x} = x_4$.

Шаг 4. $\tilde{x} = x_4 \neq t = x_6$, происходит возвращение на второй шаг.

2-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_2, x_3, x_5\}$, $d(x_2) = \min\{9, 6^* + 5\} = 9$,

$d(x_3) = \min\{\infty, 6^* + 7\} = 13$, $d(x_5) = \min\{11, 6^* + 6\} = 11$.

Шаг 3. $\min\{d(x_2), d(x_3), d(x_5), d(x_6)\} =$

$= \min\{9, 13, 11, \infty\} = 9^* = d(x_2)$, $\tilde{x} = x_2$.

Шаг 4. $x_2 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

3-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_3\}$, $d(x_3) = \min\{13, 9^* + 8\} = 13$.

Шаг 3. $\min\{d(x_3), d(x_5), d(x_6)\} = \min\{13, 11, \infty\} =$

$= 11^* = d(x_5)$, $\tilde{x} = x_5$.

Шаг 4. $x_5 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

4-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_6\}$, $d(x_6) = \min\{\infty, 11^* + 4\} = 15$.

Шаг 3. $\min\{d(x_3), d(x_6)\} = \min\{13, 15\} = 13^* = d(x_3)$, $\tilde{x} = x_3$.

Шаг 4. $x_3 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

5-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_6\}$, $d(x_6) = \min\{15, 13^* + 9\} = 15$.

Шаг 3. $\min\{d(x_6)\} = \min\{15\} = 15^*$, $\tilde{x} = x_6$.

Шаг 4. $x_6 = t = x_6$, конец первого этапа.

Этап 2.

Шаг 5. Составим множество вершин, непосредственно предшествующих $\tilde{x} = x_6$ с постоянными метками $\tilde{S} = \{x_3, x_5\}$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (3.10.3):

$d(\tilde{x}) = 15 = 11^* + 4 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6)$,

$d(\tilde{x}) = 15 \neq 13^* + 9 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6)$.

Включаем дугу (x_5, x_6) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_5$.

Шаг 6. $\tilde{x} \neq s = x_1$, возвращение на пятый шаг.

2-я итерация.

Шаг 5. $\tilde{S} = \{x_1, x_4\}$.

$d(\tilde{x}) = 11 = 0^* + 11 = d(x_1) + \omega(x_1, x_5)$,

$d(\tilde{x}) = 11 \neq 6^* + 6 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5)$.

Включаем дугу (x_1, x_5) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_1$.

Шаг 6. $\tilde{x} = s = x_1$, завершение второго этапа.

Итак, кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_6 построен. Его длина (вес) равна 15, сам путь образует следующая последовательность дуг: $\mu = (x_1, x_5) - (x_5, x_6)$.

3.11. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Беллмана—Мура*

Если веса — произвольные числа и граф G не содержит ориентированных циклов отрицательного веса, то минимальный путь может быть найден по *алгоритму Беллмана—Мура*, похожему на алгоритм Дейкстры и часто называемому *алгоритмом корректировки меток*. Как и в алгоритме Дейкстры, всем вершинам приписываются метки, однако здесь нет деления меток на временные и постоянные. Корректировка меток осуществляется по старому правилу (3.10.1), однако выполнение условия (3.10.2) теперь не гарантирует, что длина кратчайшего пути от s до x_j найдена, т. к. наличие в графе G дуг с отрицательными весами может уменьшить эту метку на последующих шагах. Поэтому в алгоритме Беллмана—Мура вместо процедуры превращения временной метки в постоянную формируется очередь вершин, в которых нужно проанализировать по правилу (3.10.1) возможности уменьшения меток вершин, не находящихся в данный момент в очереди, но достижимых из нее за один шаг. В процессе работы алгоритма одна и та же вершина может несколько раз вставать в очередь, а затем покидать ее.

Алгоритм Беллмана—Мура состоит из двух этапов. На первом находят длины кратчайших путей от вершины s до всех остальных вершин графа. Этот этап заканчивается при отсутствии вершин в очереди.

* Элиаким Гастингс Мур (1862–1932) — американский математик.

Второй этап — построение кратчайшего пути от s до t — совпадает с соответствующим этапом в алгоритме Дейкстры и выполняется по формуле (3.10.3). Опишем подробно все шаги алгоритма.

Этап 1. Нахождение длин кратчайших путей от вершины s до всех остальных вершин графа.

Шаг 1. Присвоение начальных значений. $d(s) = 0$, $d(x_j) = \infty$, $x_j \in S$, $\tilde{x} = s$, $Q = \{\tilde{x}\}$ — множество вершин в очереди.

Шаг 2. Корректировка меток и очереди.

Удаляем из очереди Q вершину, находящуюся в самом начале очереди. Для каждой вершины x_i, непосредственно достижимой из $\tilde{x}$, корректируем ее метку по формуле (3.10.1). Если при этом $d_{\text{нов}}(x_i) < d_{\text{стар}}(x_i)$, то корректируем очередь вершин, иначе продолжаем перебор вершин и корректировку временных меток.

Корректировка очереди. Если вершина x_i не была ранее в очереди и не находится в ней в данный момент, то ставим ее в конец очереди. Если же x_i уже была когда-нибудь ранее в очереди или находится там в данный момент, то переставляем ее в начало очереди.

Шаг 3. Проверка на завершение первого этапа. Если $Q \neq \varnothing$, то возвращаемся к началу второго шага, если же $Q = \varnothing$, то первый этап закончен, т. е. минимальные расстояния от s до всех вершин графа найдены.

- **Пример 1.** Пусть граф G задан весовой матрицей Ω.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 7 & -8 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -7 & 5 \\ \infty & \infty & 8 & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

На рис. 3.30 изображен исходный граф по матрице весов. Рассчитаем кратчайший путь от узла x_1 до узла x_6.

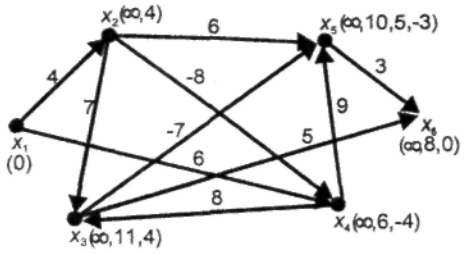


Рис. 3.30

Этап 1.

Шаг 1. $\tilde{x} = x_1$, $d(x_1) = 0$, $d(x_j) = \infty$, $j = \overline{2,6}$, $Q = \{x_1\}$.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_1$, $Q = Q \setminus \{x_1\} = \varnothing$. Пусть $\tilde{S}$ — множество вершин, непосредственно достижимых из вершины $\tilde{x}$. $\tilde{S} = \{x_2, x_4\}$, $d(x_2) = \min\{\infty, 0+4\} = 4$.

4<∞? Да. $Q = \{x_2\}$. x_2 надо было поставить в конец очереди, но Q было пусто, поэтому конец очереди совпал с началом.

$d(x_4) = \min\{\infty, 0+6\} = 6$.

$6 < \infty$? Да. $Q = \{x_2, x_4\}$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет. Переход на начало второго шага.

2-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_2$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_4\}$,

$\tilde{S} = \{x_3, x_4, x_5\}$. $d(x_3) = \min\{\infty, 4+7\} = 11$.

11< ∞? Да. $Q = \{x_4, x_3\}$.

$d(x_4) = \min\{6, 4-8\} = -4$.

-4<6? Да. $Q = \{x_4, x_3\}$. Вершину x_4 надо поставить в начало очереди, но она уже стоит там.

$d(x_5) = \min\{\infty, 4+6\} = 10$.

10<∞? Да. $Q = \{x_4, x_3, x_5\}$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет, переход на третью итерацию второго шага.

3-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_4$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_3, x_5\}$,

$\tilde{S} = \{x_3, x_5\}$. $d(x_3) = \min\{11, -4+8\} = 4$.

4<11? Да. $Q = \{x_3, x_5\}$. Вершину x_3 надо поставить в начало очереди, но она уже там.

$d(x_5) = \min\{10, -4+9\} = 5$.

5<10? Да. $Q = \{x_5, x_3\}$. Вершину x_5 передвигаем из конца очереди в начало.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет, переход на четвертую итерацию второго шага.

4-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_5$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_3\}$, $\tilde{S} = \{x_6\}$.

$d(x_6) = \min\{\infty, 5+3\} = 8$.

8< ∞? Да. $Q = \{x_3, x_6\}$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

5-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_3$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_6\}$, $\tilde{S} = \{x_5, x_6\}$.

$d(x_5) = \min\{5, 4-7\} = -3$.

-3<5? Да. $Q = \{x_5, x_6\}$.

$d(x_6) = \min\{8, 4+5\} = 8$.

9<8? Нет.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

6-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_5$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_6\}$, $\tilde{S} = \{x_6\}$.

$d(x_6) = \min\{8, -3+3\} = 0$.

0<8? Да. $Q = \{x_6\}$. Q содержало только вершину x_6, и она встала в начало очереди.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

7-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_6$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \varnothing$. $\tilde{S} = \varnothing$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$. Конец первого этапа. Найдены минимальные расстояния до всех вершин от первой. Эти расстояния таковы: $d(x_2) = 4$, $d(x_3) = 4$, $d(x_4) = -4$, $d(x_5) = -3$, $d(x_6) = 0$.

Этап 2.

Шаг 4. Полагаем $\tilde{x} = x_6$. Пусть $\tilde{S}$ — множество вершин, непосредственно предшествующих $\tilde{x}$. $\tilde{S} = \{x_3, x_5\}$.

1-я итерация. $d(\tilde{x}) = d(x_6) = 0 \neq 4 + 5 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6)$ или $d(\tilde{x}) = d(x_6) = 0 = -3 + 3 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6)$. Включаем дугу (x_5, x_6) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_5$. Возвращаемся на четвертый шаг.

2-я итерация. $\tilde{x} = s$? Нет.

$\tilde{S} = \{x_2, x_3, x_4\}$. $d(\tilde{x}) = d(x_5) = -3 = 4 - 7 = d(x_3) + \omega(x_3, x_5)$,

$d(\tilde{x}) = d(x_5) = -3 \neq 4 + 6 = d(x_2) + \omega(x_2, x_5)$,

$d(\tilde{x}) = d(x_5) = -3 \neq -4 + 9 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5)$. Включаем дугу (x_3, x_5) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_3$. Возвращаемся на четвертый шаг.

3-я итерация. $\tilde{x} = s$? Нет. $\tilde{S} = \{x_2, x_4\}$.

$d(\tilde{x}) = d(x_3) = 4 \neq 4 + 7 = d(x_2) + \omega(x_2, x_3)$,

$d(\tilde{x}) = d(x_3) = 4 = -4 + 8 = d(x_4) + \omega(x_3, x_4)$. Включаем дугу (x_3, x_4) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_4$. Возвращаемся на четвертый шаг.

4-я итерация. $\tilde{x} = s$? Нет. $\tilde{S} = \{x_1, x_2\}$.

$d(\tilde{x}) = d(x_4) = -4 \neq 0 + 6 = d(x_1) + \omega(x_1, x_4)$,

$d(\tilde{x}) = d(x_4) = -4 = 4 - 8 = d(x_2) + \omega(x_2, x_4)$. Включаем дугу (x_2, x_4) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_2$. Возвращаемся на четвертый шаг.

5-я итерация. $\tilde{x} = s$? Нет. $\tilde{S} = \{x_1\}$.

$d(\tilde{x}) = d(x_2) = 4 = 0 + 4 = d(x_1) + \omega(x_1, x_2)$. Включаем дугу (x_1, x_2) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_1$. Возвращаемся на четвертый шаг.

6-я итерация. $\tilde{x} = s$? Да. Задача закончена. Искомый кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_6 имеет нулевой вес и состоит из следующих дуг: $(x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6)$.

3.12. Алгоритм нахождения максимального пути

Для нахождения максимального пути граф G (сеть) должен быть ациклическим, ибо в противном случае может оказаться, что длины некоторых путей не ограничены сверху. Если G_n — ациклический граф, то для любых двух его вершин $x_i \neq x_j$ выполняется одно из трех условий:

1. x_i предшествует x_j, $x_i \in S_{\text{предш}}(x_j)$.
2. x_i следует за x_j, $x_i \in S_{\text{след}}(x_j)$.
3. Нет пути между x_i и x_j.

Первое и второе условия одновременно не выполнимы из-за требуемой ацикличности графа.

Перед вычислением максимального пути в орграфе необходимо упорядочить вершины графа по алгоритму Фалкерсона. Сам алгоритм вычисления максимального пути чисто перечислительный. Он перебирает все возможные пути от текущей вершины до всех последующих, достижимых из текущей вершины.

Пусть d_j — длина максимального пути от вершины x_1 до вершины x_j, тогда величина d_j удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{cases} d_1 = 0, \\ d_j = \max\left(d_i + \omega_{ij} / x_i \in S_{\text{предш}}(x_j),\ j = 2,3,\ldots,k+1\right), \\ d_j = \infty,\ j = k+2, k+3, \ldots, n. \end{cases} \qquad (3.12.1)$$

Соотношения (3.12.1) позволяют легко вычислить длины максимальных путей от $s = x_1$ до вершин, достижимых из вершины s. Сами пути могут быть построены методом последовательного возвращения (второй этап в алгоритме Дейкстры).

- **Пример 1.** Граф (сеть, рис. 3.31) задан матрицей весов Ω. Найти длину максимального пути из вершины x_1 в x_6 и сам этот путь.

5 Зак. 4382

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 7 & 8 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 7 & 5 \\ \infty & \infty & 8 & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

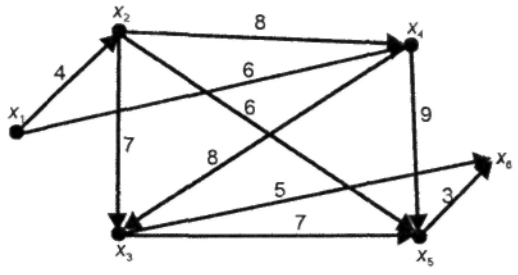


Рис. 3.31

Этот граф ациклический, поэтому возможно упорядочение его вершин по алгоритму Фалкерсона. Сделаем это графическим способом (рис. 3.32), переобозначив две вершины: x_4 назовем x_3', а x_3 — x_4' и применим рекуррентные формулы (3.12.1).

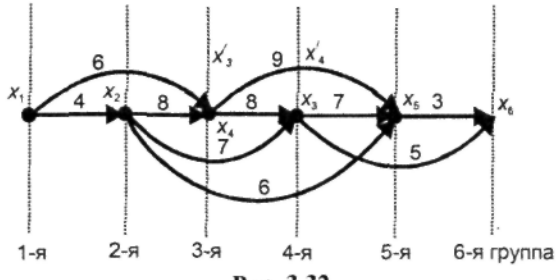


Рис. 3.32

Этап 1.

$d_1 = 0$,

$d_2 = \max(d_1 + 4) = 4$,

$d_3' = \max(d_1 + 6, d_2 + 8) = \max(0 + 6, 4 + 8) = 12$,

$d_4' = \max(d_3' + 8, d_2 + 7) = \max(12 + 8, 4 + 7) = 20$,

$d_5 = \max(d_4' + 7, d_3' + 9, d_2 + 6) = \max(20 + 7, 12 + 9, 4 + 6) = 27$,

$d_6 = \max(d_5 + 3, d_4' + 5) = \max(27 + 3, 20 + 5) = 30$.

Итак, длина максимального пути из x_1 в x_6 равна 30.

Этап 2. x_6: $d_6 = 30 = d_5 + 3 = 27 + 3$ — включаем дугу (x_5, x_6) в максимальный путь, $d_6 = 30 \neq d_4' + 5 = 20 + 5$.

x_5: $d_5 = 27 = d_4' + 7 = 20 + 7$ — включаем дугу (x_4', x_5) в максимальный путь,

$d_5 = 27 \neq d_3' + 9 = 12 + 9$, $d_5 = 27 \neq d_2 + 6 = 4 + 6$.

x_4': $d_4' = 20 = d_3' + 8 = 12 + 8$ — включаем дугу (x_3', x_4') в максимальный путь,

$d_4' = 20 \neq d_2 + 7 = 4 + 7$.

x_3': $d_3' = 12 = d_2 + 8 = 4 + 8$ — включаем дугу (x_2, x_3') в максимальный путь,

$d_3' = 12 \neq d_1 + 6 = 0 + 6$.

x_2: $d_2 = 4 = d_1 + 4 = 0 + 4$ — включаем дугу (x_1, x_2) в максимальный путь. Итак, искомый путь таков: $\mu_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3') - (x_3', x_4') - (x_4', x_5) - (x_5, x_6)$ или в первоначальных обозначениях $\mu_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6)$.

3.13. Особенности алгоритмов теории графов

Рассмотрение предыдущих задач позволяет сформулировать следующие свойства алгоритмов теории графов.

1. Каждый алгоритм состоит из совокупности конечного числа правил и предписаний. Действия над графом (матрицей), производимые в соответствии с правилами, должны быть достаточно просты.

2. Алгоритм применяется в дискретном времени, правила алгоритма — по шагам, число шагов конечно.
3. Какое из правил будет применено на данном шаге или какое действие будет совершено в соответствии с некоторым правилом, зависит только от результатов предыдущих шагов.
4. Алгоритмы обладают свойством локальности: действие в соответствии с правилом или установление непротиворечивости некоторого действия правилам алгоритма происходит на основе анализа дуг, инцидентных данной вершине, или вершин, смежных с данной.
5. Алгоритмы обладают свойством массовости: применяются либо для всех, либо для некоторого бесконечного множества графов.

3.14. Практическое занятие 7. Нахождение минимальных и максимальных путей на орграфах

3.14.1. По заданной матрице весов Ω графа G найти величину минимального пути и сам путь от вершины $s = x_1$ до вершины $t = x_6$ или $t = x_7$ по алгоритму Дейкстры, а затем величину максимального пути и сам путь между теми же вершинами:

1)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ x_4 & \infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\ x_5 & \infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 5 & 8 & 7 & 18 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 11 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 17 \\ x_4 & \infty & 10 & 12 & - & 6 & \infty \\ x_5 & \infty & 7 & 8 & \infty & - & 11 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 6 & 8 & 11 & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 9 & 7 & 15 \\ x_3 & \infty & 8 & - & 7 & 4 & 11 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 7 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\ x_3 & \infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 3 & \infty & 14 \\ x_3 & \infty & 3 & - & 3 & 4 & 16 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 3 & - & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 7 & 9 & \infty & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 6 & \infty & 13 \\ x_3 & \infty & 6 & - & 5 & 6 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 \\ x_5 & \infty & 4 & \infty & 6 & - & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 7 & 15 & \infty & 14 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 7 & 16 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 19 & \infty & 21 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 17 \\ x_5 & \infty & 13 & 14 & 15 & - & 18 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 10 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 11 & 9 & \infty & 19 \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & 10 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & 13 & - & 11 & 10 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 7 & 19 & 20 & \infty & 15 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 11 & 6 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 6 & 9 & \infty & 16 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 8 & 13 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 14 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 7 & 2 & \infty & 13 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 6 & \infty \\ x_3 & \infty & 2 & - & 1 & 3 & 11 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 3 & - & 5 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 10 & 11 & 6 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 13 & 8 & 11 & 17 \\ x_3 & \infty & \infty & - & 5 & 6 & 15 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 6 & \infty & 9 & 12 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 6 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ x_4 & \infty & 4 & 8 & - & 6 & 14 \\ x_5 & \infty & 7 & 5 & \infty & - & 10 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 4 & 9 & 8 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 2 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ x_4 & \infty & 2 & 4 & - & 6 & \infty \\ x_5 & \infty & 2 & \infty & \infty & - & 3 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & \infty & 10 & 8 & 12 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 7 & \infty & 4 & 9 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 5 & \infty & 6 & 11 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 14 \\ x_5 & \infty & \infty & 6 & \infty & - & 13 & 21 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 9 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

16)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 6 & 9 & 13 & 12 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 5 & 9 & 6 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 6 & \infty & 15 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 9 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

17)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 8 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 10 & 9 & 12 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 10 & 12 & 7 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 9 & 13 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 11 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

18)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 11 & 14 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 8 & 10 & 15 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 11 & 16 & 20 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 12 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

19)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 9 & 7 & 13 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 15 & \infty \\ x_3 & \infty & 5 & - & \infty & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & 6 & 7 & - & 8 & 10 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

20)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 11 & 5 & 10 & \infty \\ x_3 & \infty & 4 & - & 3 & 6 & 7 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 7 & - & 5 & 18 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

21)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 4 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 3 & \infty & 10 \\ x_3 & \infty & 3 & - & 4 & 3 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ x_5 & \infty & 2 & \infty & 5 & - & 7 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

22)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 5 & 4 & \infty & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 8 & \infty & 13 \\ x_3 & \infty & 6 & - & 5 & 8 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 4 & - & 10 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

23)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 12 & 10 & \infty & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 10 & 7 & 15 \\ x_3 & \infty & 8 & - & 7 & 10 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 6 & - & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

24)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 15 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 12 & 18 \\ x_3 & \infty & 10 & - & 9 & 12 & 19 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 13 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

25)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 7 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 6 & 13 & \infty \\ x_3 & \infty & 5 & - & 4 & 5 & 6 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 8 & - & 5 & 9 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

26)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 7 & 8 & 13 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 9 & 7 & 12 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 6 & 7 & 8 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 9 & 17 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 10 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

27)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 4 & 5 & 10 & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 11 & 3 & 5 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 6 & 7 & 18 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 6 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

28)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 8 & \infty & 5 & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 7 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ x_4 & \infty & 4 & 6 & - & 5 & 11 \\ x_5 & \infty & 5 & 5 & \infty & - & 3 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

29)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 4 & 6 & 8 \\ x_3 & \infty & 8 & - & 5 & 6 & 12 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 5 & 7 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

30)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 5 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 8 & \infty & 9 & 15 \\ x_3 & \infty & \infty & - & 4 & 6 & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 8 & - & 3 & 11 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

3.14.2. По заданной матрице весов Ω графа G найти минимальный путь по алгоритму Беллмана—Мура между начальной вершиной $s = x_1$ и конечной вершиной $t = x_6$ или $t = x_7$:

1)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & -4 & 2 & -3 \\ x_4 & \infty & \infty & 10 & - & 7 & \infty & 9 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 5 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 5 & \infty & 5 & 11 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & -4 & -6 & 5 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 6 & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 10 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -3 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ x_3 & \infty & 2 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & -7 & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ x_5 & \infty & -4 & \infty & 8 & - & \infty & 11 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & -3 & -5 & - & 3 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 7 & \infty & 10 & \infty \\ x_3 & \infty & 4 & - & \infty & 7 & 6 & 10 \\ x_4 & \infty & \infty & -5 & - & \infty & \infty & 4 \\ x_5 & \infty & -9 & \infty & 12 & - & 6 & \infty \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 8 & 7 & 11 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & -10 & 7 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & 6 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & 5 & - & \infty & 8 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & -6 & - & 7 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & -3 & 7 & \infty & 8 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 5 & 11 & \infty & 13 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 6 & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & 7 & 9 & - & -6 & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 5 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 4 & 7 & 14 & -6 & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & -3 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & -8 & 7 & 10 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & \infty \\ x_6 & \infty & 12 & \infty & 5 & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 6 & 9 & 5 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 7 & 10 & \infty \\ x_3 & \infty & 3 & - & \infty & \infty & \infty & 12 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & -6 & 8 & - & 4 & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & -6 & 10 & 12 \\ x_3 & \infty & 4 & - & -4 & \infty & -7 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ x_5 & \infty & \infty & 7 & 10 & - & 6 & \infty \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 5 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 6 & 11 & 5 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 6 & 7 & 6 \\ x_3 & \infty & -5 & - & \infty & 6 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & -4 & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 4 & \infty & 15 & 8 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & 9 & \infty & 7 \\ x_4 & \infty & \infty & 4 & - & 10 & -6 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ x_6 & \infty & -18 & 7 & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & 12 & 16 & 3 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 5 & \infty & \infty & 13 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & 9 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ x_5 & \infty & -7 & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ x_6 & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 11 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & -5 & 15 & \infty & 18 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 7 & -7 & 8 & 9 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 10 & 8 & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 21 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 9 & 10 & 11 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 6 & \infty & 8 & 9 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty & 12 \\ x_4 & \infty & \infty & -4 & - & \infty & \infty & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 14 & - & 5 & 11 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 7 & \infty & -8 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 13 & -9 & 10 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 3 & -4 & -2 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

16)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 8 & 5 & -10 & \infty \\ x_3 & \infty & 4 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & -5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 13 \\ x_6 & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty & - & 4 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

17)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & 15 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 5 & \infty & 11 & 18 & 20 \\ x_3 & \infty & \infty & - & -4 & -10 & 7 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

18)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & 4 & - & 6 & -6 & 8 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty & 7 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & -5 & \infty & - & 8 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

19)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 6 & \infty & 7 & 11 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & -7 & \infty \\ x_4 & \infty & -8 & \infty & - & \infty & 5 & 6 \\ x_5 & \infty & \infty & 5 & 9 & - & 4 & 18 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

20)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 6 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 6 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & -4 & - & 5 & 8 & 10 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 7 \\ x_5 & \infty & 2 & \infty & \infty & - & 4 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

21)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & -11 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 12 & 8 & 15 & \infty \\ x_3 & \infty & 5 & - & 17 & -9 & 12 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 16 & 27 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & -8 & \infty & - & 8 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

22)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 15 & \infty & 9 & 22 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & -6 & - & 4 & -7 & -8 & 9 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 9 & - & 8 & \infty \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & - & \infty \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

23)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 4 & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 6 & 12 & 8 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 5 & -8 & 9 & 11 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 13 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

24)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 3 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & -4 & 6 & -8 & 8 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ x_5 & \infty & 7 & \infty & 9 & - & 4 & 15 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

25)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 7 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 9 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ x_4 & \infty & -6 & 4 & - & 10 & \infty \\ x_5 & \infty & 8 & -5 & \infty & - & 6 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

26)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 9 & \infty & 7 & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 13 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & -6 & - & 4 & -8 & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 10 & - & 5 & 15 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 8 & -7 & - & 5 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

27)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 6 & \infty & -8 & 13 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 4 & \infty & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & 10 & \infty & - & -9 & \infty & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & 7 & \infty & - & \infty & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & - & 5 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

28)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 12 & \infty & \infty & 15 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 6 & 10 & 7 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & 10 & -8 & 13 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 11 & - & 7 & 16 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

29)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 4 & 10 & \infty & 15 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 4 & \infty & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ x_5 & \infty & -8 & 7 & 11 & - & -6 & \infty \\ x_6 & \infty & \infty & -8 & 7 & \infty & - & 5 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

30)
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 7 & 5 & \infty & 9 & \infty \\ x_2 & \infty & - & -8 & 4 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 3 & 6 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & -4 & - & 6 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

3.15. Деревья (основные определения)

Существует один простой и важный тип графов, которому разные авторы дали одинаковое название — деревья. Деревья отличаются предельной простотой строения. Существует несколько определений дерева.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов называется *лесом*. Таким образом, деревья являются компонентами леса.

Пусть $G=(S,U)$ и $|S|=n$, $|U|=m$. Тогда справедлива эквивалентность следующих утверждений (рис. 3.33):

1. G — дерево.
2. G — связный граф и $m=n-1$.

3. G — ациклический граф и $m = n - 1$.
4. Любые две несовпадающие вершины графа соединяет единственная простая цепь.
5. G — ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

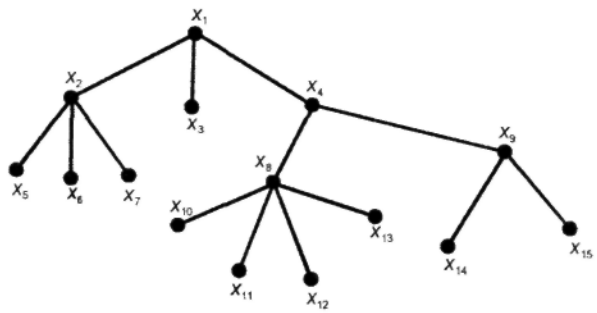


Рис. 3.33

Ориентированный граф называется *ориентированным деревом* (*ордеревом*), если:

1. Существует ровно одна вершина $x_1 \in S$, называемая корнем, которая не имеет предшествующих вершин, т. е. $P(x_1) = 0$.
2. Любой вершине $x_j \neq x_1$ в графе G непосредственно предшествует ровно одна вершина, т. е. $P(x_j) = 1$.

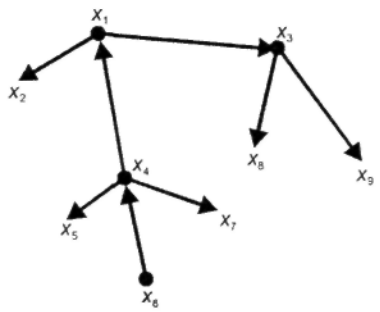


Рис. 3.34

Неориентированное дерево можно превратить в ориентированное, выбрав в качестве корня произвольную вершину. На рис. 3.34 корень графа — вершина x_6. Подграф $G' = (S', U)$ графа $G = (S, U)$ называется *остовным подграфом*, если $S' = S$. Подграф G' графа G называется *остовным поддеревом* (*остовным каркасом*), если $S' = S$ и G — дерево.

Теорема 3.8 (Теорема Кэли).* **Число различных деревьев, которые можно построить на n различных вершинах, равно $t_n = n^{n-2}$.**

В этой формуле подсчитывается число всех деревьев с данными n вершинами. Многие из этих деревьев изоморфны, и возникает вопрос о числе неизоморфных деревьев среди них. Это более трудная задача, она решается для каждого конкретного случая по алгоритму теории Пойа. Для подсчета числа остовов в графе используется матрица Кирхгофа.

Теорема 3.9 (Теорема Кирхгофа). **Число остовных деревьев в связном графе G порядка $n \geq 2$ равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа $B(G)$.**

Подсчитаем, например, по этой теореме число всех остовов графа, изображенного на рис. 3.15. Напомним, что матрица Кирхгофа B определяется следующим образом: $b_{ij} = \begin{cases} -1, & x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,} \\ 0, & x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны и } i \neq j. \\ P(x_i), & i = j. \end{cases}$ Тогда

$$B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

*Артур Кэли (Кейли) (1821–1895) — английский математик.

Определим алгебраическое дополнение элемента b_{11}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3&-1&0&-1&0&0\\-1&2&-1&0&0&0\\0&-1&2&-1&0&0\\-1&0&-1&4&-1&0\\0&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3&-1&0&-1&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\-1&0&-1&4&0\\0&0&0&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-1&0&-1&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\-1&0&-1&4&0\\0&0&0&-1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&-1&0&-1\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&-1&4\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}3&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&0\\-1&0&-1&-1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3&-1&0&-1\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&-1&4\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}3&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&2&-1\\0&-1&2\\-1&0&-1\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}3&-1&0\\-1&2&-1\\-1&0&-1\end{vmatrix}=3(12+0+0-0-2-3)+(-1-4+0+1-0-0)+$$

$$+(-6-1+0-0+1-1)=11.$$

Таким образом, у этого графа существует 11 различных остовов. Все они изображены на рис. 3.35.

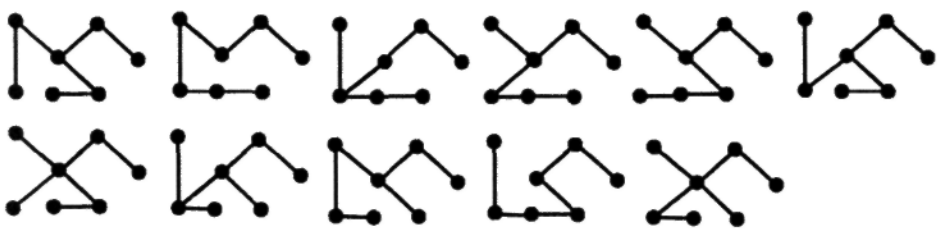


Рис. 3.35

Из определения дерева вытекает следующая теорема.

Теорема 3.10. **Число ребер произвольного неориентированного графа G, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m-n-k$, где m — число ребер, n — число вершин и k — число компонент связности графа G.**

Доказательство. Рассмотрим i-ю компоненту связности G_i графа G. Пусть G_i содержит n_i вершин. Тогда остов G_i^* графа G_i, являясь деревом, содержит n_i-1 ребро. Следовательно, для получения G_i^* из компоненты G_i нужно удалить $m_i-(n_i-1)$ ребер, где m_i — число ребер в G_i.

Просуммируем удаляемые ребра по всем компонентам связности, получим

$$\sum_{i=1}^{k}m_i=m,\ \sum_{i=1}^{k}n_i=n,\ \sum_{i=1}^{k}(m_i-n_i+1)=m-n+k.$$

Число $v(G)=m-n+k$ называется цикломатическим числом или *циклическим рангом графа* G, число $v^*(G)=n-k$ — *коциклическим рангом* или *корангом*. $v^*(G)$ равно числу ребер, входящему в любой остов графа G. Очевидно, что $v(G)+v^*(G)=m$.

Из теоремы 3.10 вытекают два следующих следствия.

Следствие 1. Неориентированный граф G является лесом тогда и только тогда, когда $v(G)=0$.

Следствие 2. Неориентированный граф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $v(G)=1$.

3.16. Задача об остове экстремального веса

Пусть $G=(S,U)$ — связная сеть. В приложениях часто возникает задача о построении остова графа G, имеющего наименьший вес. Пусть, например, $G=(S,U,\Omega)$ служит моделью железнодорожной сети, соединяющей пункты $x_1,x_2,\dots,x_n\in S$, а $\omega(x_i,x_j)$ — расстояние между пунктами x_i и x_j. Требуется проложить сеть телеграфных линий вдоль железнодорожной сети так, чтобы все пункты $x_1,x_2,\dots,x_n$ были связаны между собой телеграфной сетью и общая протяженность линий телеграфной сети была наименьшей.

Известно несколько алгоритмов построения экстремального остовного дерева. Рассмотрим алгоритм Прима (алгоритм ближайшего соседа), представляющий собой итерационную процедуру, состоящую из двух шагов и выполняющуюся $n-1$ раз на графе G с n вершинами. Алгоритм может получать минимальное или максимальное по весу дерево, разница заключается лишь в том, что в формуле (3.16.1) находится либо максимум, либо минимум.

Пусть $S' \subset S$, $S'' \subset S$ и $S = S' \cup S''$, $S' \cap S'' = \varnothing$, т. е. S' и S'' — разбиение множества узлов сети G на два непересекающихся подмножества. Определим пошаговое расстояние между множествами S' и S'' следующим образом:

$$d\left(S', S''\right) = \min\left\{\omega\left(x_i, x_j\right) / x_i \in S',\ x_j \in S''\right\}, \qquad (3.16.1)$$

где $\left(x_i, x_j\right)$ — дуга, соединяющая вершины x_i и x_j.

В алгоритме Прима остовное дерево строится в результате последовательного расширения исходного поддерева. На каждой итерации число вершин и ребер поддерева увеличивается на единицу. Основные шаги алгоритма таковы.

Шаг 1. Присвоение начальных значений. Полагают $S' = \{x_1\}$, где x_1 — произвольная вершина, $S'' = S \setminus S'$, $U' = \varnothing$.

Шаг 2. Обновление данных. Находится ребро $\left(x_i, x_j\right)$ такое, что $x_i \in S'$, $x_j \in S''$ и $\omega\left(x_i, x_j\right) = \min\left\{\omega\left(x_i, x_j\right) / x_i \in S',\ x_j \in S''\right\}$. Полагают $S' = S' \cup \{x_j\}$, $S'' = S \setminus S'$, $U' = U' \cup \{\left(x_i, x_j\right)\}$.

Шаг 3. Проверка на завершение. Если $S' = S$, то $G' = \left(S', U'\right)$ — искомый остов. В противном случае переходят ко второму шагу.

- **Пример 1.** Построить остов с наименьшим весом для сети, заданной матрицей весов Ω. Построим по этой матрице сеть. Поскольку матрица симметрическая, то дан неориентированный граф. Исходный граф изображен на рис. 3.36 слева.

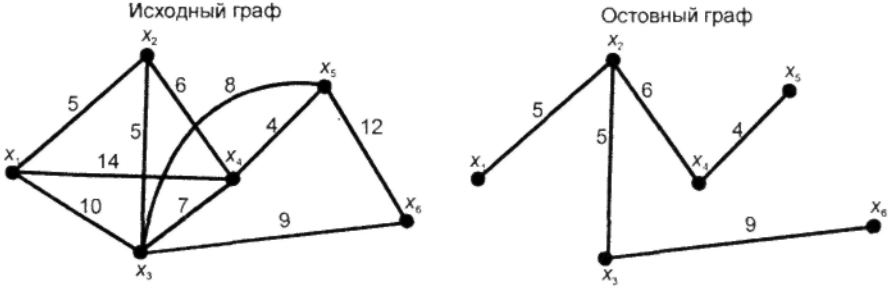


Рис. 3.36

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 14 & \infty & \infty \\ 5 & - & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 10 & 5 & - & 7 & 8 & 9 \\ 14 & 6 & 7 & - & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 4 & - & 12 \\ \infty & \infty & 9 & \infty & 12 & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Шаг 1. $S' = \{x_1\}$, $S'' = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $U' = \varnothing$.

1-я итерация.

Шаг 2. $d\left(S', S''\right) = \omega\left(x_1, x_2\right) = 5$, $S' = \{x_1, x_2\}$, $S'' = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $U' = \{\left(x_1, x_2\right)\}$.

Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

2-я итерация.

Шаг 2. $d\left(S', S''\right) = \omega\left(x_2, x_3\right) = 5$,
$S' = \{x_1, x_2, x_3\}$, $S'' = \{x_4, x_5, x_6\}$, $U' = \{\left(x_1, x_2\right), \left(x_2, x_3\right)\}$.

Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

3-я итерация.

Шаг 2. $d\left(S', S''\right) = \omega\left(x_2, x_4\right) = 6$,
$S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $S'' = \{x_5, x_6\}$, $U' = \{\left(x_1, x_2\right), \left(x_2, x_3\right), \left(x_2, x_4\right)\}$.

Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

4-я итерация.

Шаг 2. $d\left(S', S''\right) = \omega\left(x_4, x_5\right) = 4$, $S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $S'' = \{x_6\}$, $U' = \{\left(x_1, x_2\right), \left(x_2, x_3\right), \left(x_2, x_4\right), \left(x_4, x_5\right)\}$.

Шаг 3. $S' \neq S$, переход на начало второго шага.

5-я итерация.

Шаг 2. $d\left(S', S''\right) = \omega\left(x_3, x_6\right) = 9$,
$S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $S'' = \varnothing$,
$U' = \{\left(x_1, x_2\right), \left(x_2, x_3\right), \left(x_2, x_4\right), \left(x_4, x_5\right), \left(x_3, x_6\right)\}$.

Шаг 3. $S' = S$. Итак, получен остовный граф $G' = \left(S', U'\right)$, изображенный на рис. 3.36 справа, его вес $\omega\left(G'\right) = 5 + 5 + 6 + 4 + 9 = 29$.

3.17. Обходы графов. Фундаментальные циклы

Рассмотрим вопросы, связанные с существованием в графе эйлеровых или гамильтоновых цепей и циклов. При решении прикладных задач часто возникает необходимость отбора вершин или ребер графа, связанная с поисками элемента с определенным свойством.

Напомним, что связный граф называется *эйлеровым*, если он содержит цикл, включающий все ребра графа. Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий. Граф называется гамильтоновым, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа.

Задачи о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов в графе внешне похожи, однако вторая задача значительно сложнее первой. Принадлежность графа к классу эйлеровых легко устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3.11. **Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.**

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть G — эйлеров граф. Тогда цикл этого графа проходит через каждую вершину, причем входит в нее по одному ребру, а выходит по другому. Это значит, что каждая вершина инцидентна четному числу ребер. Таким образом, степени всех вершин четны, т. к. эйлеров цикл должен содержать все ребра графа G.

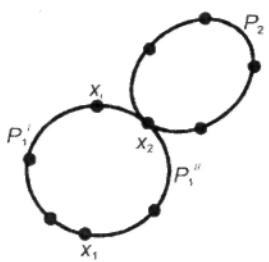


Рис. 3.37

2. Достаточность. Пусть степени всех вершин графа четны. Начнем построение цепи P_1 из произвольной вершины x_1 (рис. 3.37). Попав в очередную вершину x_i, мы всегда можем из нее выйти по другому ребру, т. к. степени всех вершин четны. Продолжив таким образом, мы закончим цепь P_1 в вершине x_1, т. е. P_1 будет циклом. Если при этом окажется, что P_1 содержит все вершины, то граф будет эйлеровым.

   Если P_1 содержит не все вершины графа G, то удалим из G все ребра цикла P_1. Граф $G_1 = G \setminus P_1$ также будет эйлеровым. Кроме того, т. к. G — связный граф, то графы G_1 и P_1 будут иметь хотя бы одну общую вершину x_2 (рис. 3.37). Повторим процедуру построения цикла, начав с вершины x_2. Получим новый цикл $P_3 = P_1' \cup P_2 \cup P_1''$, который, начиная с x_1, проходит по ребрам цепи P_1' до x_2, затем обходит все ребра цепи P_2 и возвращается в x_1 по ребрам цепи P_1''.

   Если P_3 — не эйлеров цикл, то повторяя описанную процедуру, получим еще больший цикл и так далее до тех пор, пока не получится эйлеров цикл.

Для эйлеровых графов существует процедура, называемая *алгоритмом Флери*, которая позволяет очень быстро построить один из существующих эйлеровых циклов. Этот алгоритм задается следующими правилами:

1. Произвольно выбирают некоторую вершину x_1 и ребро u_1, инцидентное x_1. Этому ребру присваивают номер 1. Вычеркивают это ребро u_1 и переходят в вершину x_2 по ребру $u_1 = (x_1, x_2)$.
2. Находясь в вершине x_i, следует не выбирать ребро, соединяющее x_i с x_1, если имеется возможность иного выбора.
3. Находясь в вершине x_i, не следует выбирать ребро, которое является перешейком (т. е. ребром, при удалении которого граф, образованный невычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру).
4. После того как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

   - **Пример 1.** Построить эйлеров цикл в графе G, изображенном на рис. 3.38. Граф G эйлеров, ибо $P(x_1) = P(x_4) = P(x_5) = P(x_8) = 2$, $P(x_2) = P(x_3) = P(x_6) = P(x_7) = 4$.

     1. Выберем x_1 и ребро $u_1 = (x_1, x_7)$ и присвоим ему номер 1, затем перейдем в вершину $x_i = x_7$.

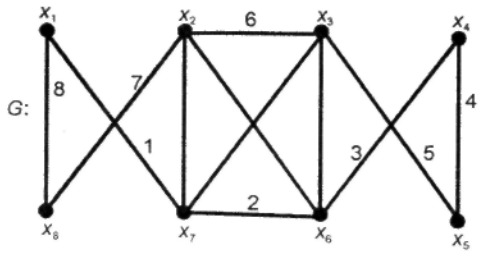


Рис. 3.38

2. Находясь в x_7, не выбираем вычеркнутое ребро 1. Из оставшихся трех ребер ни одно не является перешейком, поэтому выбираем любое, например, $u_2 = (x_7, x_6)$, присваиваем ему номер 2 и переходим в вершину $x_i = x_6$.

3. После восьми шагов опять приходим в вершину x_1. Построенный цикл:
$(x_1, x_7) - (x_7, x_6) - (x_6, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_3) -$
$- (x_3, x_2) - (x_2, x_8) - (x_8, x_1)$.

Если каждое ребро графа G входит в одну из существующих реберно-непересекающихся цепей этого графа, то говорят, что набор таких цепей покрывает граф G. Пусть связный граф G содержит k вершин нечетной степени. Заметим, что по лемме о рукопожатиях (см. задачу 3.9.1) число k четно. В этом случае справедлива теорема о минимальном числе реберно-непересекающихся цепей.

Теорема 3.12. **Если связный граф содержит ровно k вершин нечетной степени, то минимальное число покрывающих его реберно-непересекающихся цепей равно $k/2$.**

Вопрос о принадлежности графов к классу гамильтоновых решается, как правило, очень трудно. Рассмотрим несколько теорем такого рода (достаточных условий гамильтоновости).

Теорема 3.13. **Граф со степенной последовательностью (списком степеней его вершин) $P_1 \le P_2 \le \ldots \le P_n$ является гамильтоновым, если для всякого k, удовлетворяющего неравенствам $1 \le k < n/2$, истинна импликация $(P_k \le k) \Rightarrow (P_{n-k} \ge n-k)$.**

На основе теоремы 3.13 были получены другие достаточные условия гамильтоновости. Эти условия проще в практическом применении, но слабее теоремы 3.13.

Теорема 3.14 (теорема Оре).* **Если для любой пары x и y несмежных вершин графа G порядка $n \ge 3$ выполняется условие $P(x) + P(y) \ge n$, то G — гамильтонов граф.**

Из этой теоремы вытекает следствие.

Если $|G| = n \ge 3$ и для любой вершины x графа G выполняется неравенство $P(x) \ge n/2$, то G — гамильтонов граф.

Все эти теоремы дают достаточные условия гамильтоновости. На практике для построения примеров негамильтоновых графов с заданными свойствами были бы полезны необходимые условия гамильтоновости. Однако для графов общего вида необходимые условия неизвестны за исключением некоторых особых типов графов.

Для ориентированных эйлеровых и гамильтоновых графов получены результаты, похожие на вышеприведенные. Следующие две теоремы характеризуют эйлеровы орграфы.

Теорема 3.15. **Для связного ориентированного графа G следующие утверждения равносильны:**

- **граф $G = (S, U)$ эйлеров;**
- **для любой вершины $x \in S$ верно равенство $P^+(x) = P^-(x)$;**
- **граф G является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер.**

Теорема 3.16. **Связный орграф G содержит открытую эйлерову цепь тогда и только тогда, когда в нем есть две такие вершины x и y, что $P^-(x) = P^+(x) + 1$, $P^-(y) = P^+(y) - 1$ и $P^+(z) = P^-(z)$ для любой вершины z, отличной от x и y.**

Вопросы, связанные с распознаванием гамильтоновости орграфа и построением гамильтоновых контуров или путей, столь же сложны, как и аналогичные вопросы для неориентированных графов. Следующая теорема дает достаточные условия гамильтоновости ориентированного графа.

Теорема 3.17. **Пусть G — сильно связный орграф порядка $n > 1$ без петель и параллельных дуг. Если для любой пары x и y его несовпадающих несмежных вершин справедливо неравенство $P(x) + P(y) \ge 2n - 1$, то в G есть гамильтонов контур.**

---

* Ойстин Оре (1899–1968) — норвежский математик.

Пусть $G=(S,U)$ — неориентированный граф, содержащий n вершин, m ребер и k компонент связности, G' — остов графа G. G' имеет $v^*(G)=n-k$ ребер $u_1,u_2,...,u_{n-k}$. Эти ребра называются *ветвями* остова G'. Оставшиеся $m-n+k$ ребер $v_1,v_2,...,v_{m-n+k}$, не входящие в G', называются *хордами* остова G'.

По определению дерева, если к остову G' добавить произвольную хорду v_i, то в полученном графе $G'\cup\{v_i\}$ найдется ровно один цикл C_i, состоящий из хорды v_i и некоторых ветвей остова G'. Цикл C_i называется *фундаментальным циклом* графа G относительно хорды v_i остова G'. Множество $C=\{C_1,C_2,...,C_{m-n+k}\}$ всех фундаментальных циклов относительно хорд остова G' называется *фундаментальным множеством* циклов графа G относительно остова G'. Ясно, что $|C|=v(G)=m-n+k$.

Пусть $w_1,w_2,...,w_m$ — последовательность $v_1,v_2,...,v_{m-n+k},u_1,u_2,...,u_{n-k}$ всех ребер графа G. Фундаментальному циклу C_i соответствует вектор $\bar{c}=(c_{i1},c_{i2},...,c_{im})$, определенный следующим образом: $c_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } w_j\in C_i,\\ 0, \text{ если } w_j\notin C_i.\end{cases}$ Тогда фундаментальное множество циклов C задается матрицей фундаментальных циклов $C^*=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{v(G),1} & c_{v(G),2} & \dots & c_{v(G),m}\end{pmatrix}$,

которая имеет вид

$$C^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1,v(G)+1} & c_{1,v(G)+2} & \dots & c_{1,m}\\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{2,v(G)+1} & c_{2,v(G)+2} & \dots & c_{2,m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{v(G),v(G)+1} & c_{v(G),v(G)+2} & \dots & c_{v(G),m}\end{pmatrix}=\left(C_1^*\middle|C_2^*\right),$$

где C_1^* — единичная матрица порядка $v(G)$ — содержит лишь хорды фундаментальных циклов C_i.

- **Пример 2.** Найти матрицу фундаментальных циклов графа G, изображенного на рис. 3.39. Здесь $m=10$, $n=7$, $k=1$.

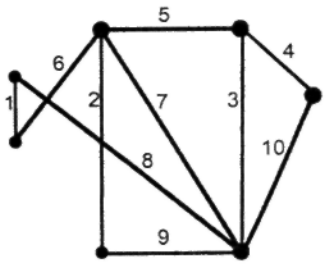


Рис. 3.39

Так как цикломатическое число равно $v(G)=10-7+1=4$, то для получения остова G' необходимо удалить четыре ребра. Пусть это будут ребра 1, 2, 3 и 4 (остов на рис. 3.39 выделен жирными линиями). Остальные ребра графа G занумеруем цифрами от 5 до 10. Из рис. 3.39 видно, что фундаментальный цикл C_1, соответствующий хорде 1, состоит из ребер 1, 6, 7, 8, цикл C_2 — из ребер 2, 7, 9, цикл C_3 — из ребер 3, 5, 7, цикл C_4 — из ребер 4, 5, 7, 10. Тогда C^* имеет вид:

$$C^*=\begin{array}{c} \\ C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|cccccc}1&0&0&0&0&1&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\end{array}.$$

3.18. Клики, независимые множества

Множество вершин графа называется *независимым* (*внутренне устойчивым*), если никакие две вершины из этого множества не смежны. Очевидно, что граф, порожденный вершинами независимого множества, будет пустым.

Независимое множество называется *максимальным*, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества. Наибольшее по мощности независимое множество называется наибольшим.

Как установил Шеннон*, теория независимых множеств в графе имеет большое значение для фундаментальных проблем теории информации. Сам процесс передачи информации может быть представлен в виде графа, причем максимальное число безошибочных сигналов соответствует максимальному независимому множеству графа.

Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется числом *(вершинной) независимости* или *неплотностью* этого графа и обозначается $\alpha_0(G)$. Для графа, изображенного на рис. 3.40, наибольшими независимыми множествами будут: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и $\{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, максимальными независимыми $\{x_1, x_8, x_7, x_6\}$, $\{x_2, x_{10}, x_7, x_6\}$ и т. д. Задачи отыскания наибольшего независимого множества и определения числа независимости, как правило, очень трудны, поэтому полезны оценки их величин.

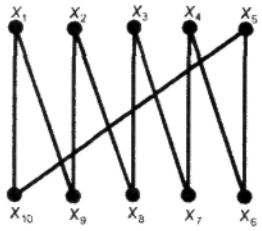


Рис. 3.40

Теорема 3.18. **Для любого графа $G = (S, U)$ верно неравенство $\alpha_0(G) \geq \sum_{x \in S} (1 + P(x))^{-1}$.**

Доказательство теоремы 3.18, которое здесь опущено, дает алгоритм построения независимого множества M, такого что $|M| \geq \sum_{x \in S} (1 + P(x))^{-1}$.

Множество M строится следующим образом: всякий раз в графе G выбирается вершина минимальной степени и заносится в множество M, после чего эта вершина и все смежные с ней удаляются из графа. Далее процесс повторяется. Построенное таким способом множество M иногда принимают в качестве первого приближения при отыскании наибольшего независимого множества вершин графа.

С понятием независимости в графе связано понятие доминирования. Подмножество $S' \subset S$ вершин графа $G = (S, U)$ называется *доминирующим*

* Клод Элвуд Шеннон (1916–2001) — американский математик.

(внешне устойчивым), если каждая вершина из $S \setminus S'$ смежна с некоторой вершиной из S', т. е. каждая вершина графа находится на расстоянии в одно ребро от доминирующего множества. Доминирующее множество называется *минимальным*, если никакое его собственное подмножество не является доминирующим. Доминирующее множество, имеющее наименьшую мощность, называется наименьшим.

Число доминирования $\delta(G)$ графа G есть наименьшее число вершин, составляющих минимальное доминирующее множество. Отыскание наименьшего доминирующего множества является содержанием многих прикладных задач. Например, задача размещения предприятий в ряде населенных пунктов при условии, чтобы расстояние от каждого из населенных пунктов до какого-либо предприятия не превосходило заданной величины, сводится к построению наименьшего доминирующего множества, если предположить, что вершины графа — предприятия — смежны тогда и только тогда, когда расстояние между соответствующими пунктами не превышает заданной величины.

Теорема 3.19. **Независимое множество максимально тогда и только тогда, когда оно доминирующее.**

Доказательство. Пусть $S' \subseteq S$ — максимальное независимое множество. Тогда не может быть вершины $k \in S \setminus S'$, не соединенной с ребром, т. к. в противном случае множество $k \cup S'$ также было бы независимым, но S' — максимальное по условию. Отсюда S' — доминирующее множество.

Пусть теперь S' — независимое доминирующее множество. Тогда никакую вершину k нельзя перевести из $S \setminus S'$ в S' так, чтобы множество $k \cup S'$ осталось независимым. Следовательно, S' — максимальное множество.

Антиподом понятия независимого множества является понятие клики. Подмножество S' вершин графа $G = (S, U)$ называется *кликой*, если любые две входящие в него вершины смежны. Это значит, что подграф $G' = (S', U')$ является полным. Определение клик графа полезно в кластерном анализе, при информационном поиске и т. д.

Клика называется *максимальной*, если она не содержится в клике с большим числом вершин, и *наибольшей*, если число вершин в ней наибольшее среди всех клик. Число вершин в наибольшей клике графа называется *кликовым числом* или *плотностью графа* и обозначается через $\varphi(G)$.

Практически очевидна следующая теорема.

Теорема 3.20. **Подмножество вершин графа G является кликой тогда и только тогда, когда оно независимо в дополнительном графе $\overline{G}$, т. е. $\varphi(G)=\alpha_0(\overline{G})$.**

Клика графа представляет "естественные" группировки вершин в максимально полные подграфы. На рис. 3.41 представлен граф и все его клики.

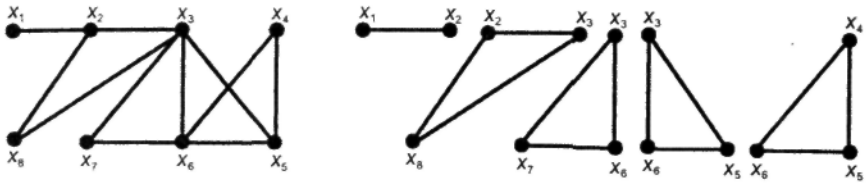


Рис. 3.41

Опишем алгоритм выделения клик в графе. Этот алгоритм представляет собой поиск с возвращением по специальному дереву поиска. Каждый узел этого дерева соответствует полному подграфу исходного графа, а само дерево поиска строится следующим образом. Корень дерева поиска — пустое начальное множество $S=\varnothing$. Пусть теперь S — произвольная вершина дерева поиска какого-либо уровня. Тогда вершиной следующего уровня дерева будет вершина $S\cup\{x\}$, если $x\notin S$ и смежна с каждой вершиной из S. В дереве поиска вершины S и $S\cup\{x\}$ соединяются ребром, которое соответствует вершине x. На рис. 3.42 показано дерево поиска для графа G, изображенного на рис. 3.41 (вершины обозначены только цифрами, буква x опущена).

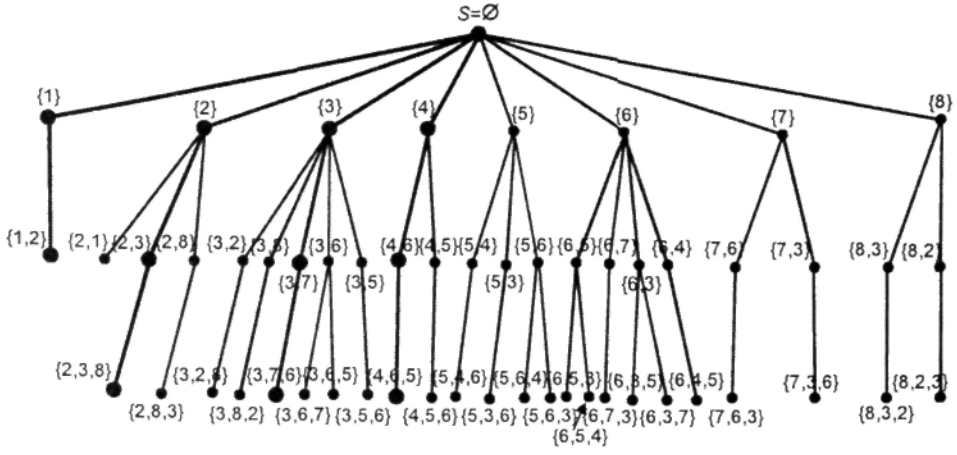


Рис. 3.42

Каждая клика мощностью n порождается в дереве поиска $n!$ раз. При построении дерева все тонкие ребра можно оборвать, они не приводят к новым кликам. При этом необходимо руководствоваться двумя правилами:

1. Если все поддеревья узла $S\cup\{x\}$ в дереве поиска клик уже исследованы, то нужно исследовать лишь только те вершины из $S\cup\{y\}$, для которых вершина y не смежна с x.
2. Если S — узел в дереве поиска, а $\widetilde{S}$ — узел предыдущего уровня и все поддеревья узла $\widetilde{S}\cup\{x\}$ уже исследованы, то все неисследованные поддеревья узла $S\cup\{x\}$ можно опустить.

Иногда полезно понятие матрицы клик. Пусть $G=(S,U)$ — произвольный граф, $Q=\{Q_1,Q_1,...,Q_p\}$ — множество всех его максимальных клик и $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Определим бинарную $p\times n$-матрицу $C=C(G)$, строки которой соответствуют кликам из множества Q, а столбцы — вершинам графа G, причем $c_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } x_j\in Q_i,\\ 0, \text{ если } x_j\notin Q_i.\end{cases}$ Матрица $C(G)$ называется *матрицей клик* графа G. Для графа, изображенного на рис. 3.41, матрица клик имеет следующий вид:

$$C(G)=\begin{array}{c} \\ Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

3.19. Практическое занятие 8. Остовы графов, фундаментальные циклы. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Доминирующие множества и клики

3.19.1. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов G' и найти его вес $\omega(G')$.

1)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & \infty & 5 & \infty & \infty & 14 \\ x_2 & 10 & - & 6 & 2 & 4 & 8 & \infty \\ x_3 & \infty & 6 & - & 3 & 1 & 1 & \infty \\ x_4 & 5 & 2 & 3 & - & 6 & \infty & 3 \\ x_5 & \infty & 4 & 1 & 6 & - & 5 & \infty \\ x_6 & \infty & 8 & 1 & \infty & 5 & - & 2 \\ x_7 & 14 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & - \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 7 & 15 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ x_2 & 7 & - & 13 & 9 & \infty & \infty & 8 \\ x_3 & 15 & 13 & - & 7 & 15 & 7 & \infty \\ x_4 & 12 & 9 & 7 & - & 9 & \infty & 11 \\ x_5 & \infty & \infty & 15 & 9 & - & 10 & \infty \\ x_6 & 10 & \infty & 7 & \infty & 10 & - & 12 \\ x_7 & \infty & 8 & \infty & 11 & \infty & 12 & - \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 11 & \infty & 14 & \infty & 12 \\ x_2 & 10 & - & 10 & 9 & \infty & \infty & 7 \\ x_3 & 11 & 10 & - & 12 & 10 & \infty & 6 \\ x_4 & \infty & 9 & 12 & - & 9 & 12 & \infty \\ x_5 & 14 & \infty & 10 & 9 & - & 11 & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 12 & 11 & - & \infty \\ x_7 & 12 & 7 & 6 & \infty & 12 & \infty & - \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ x_2 & 3 & - & 10 & 6 & 8 & \infty & 4 \\ x_3 & 5 & 10 & - & 5 & 7 & \infty & 9 \\ x_4 & \infty & 6 & 5 & - & 8 & 7 & \infty \\ x_5 & 6 & 8 & 7 & 8 & - & 9 & 11 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 7 & 9 & - & \infty \\ x_7 & \infty & 4 & 9 & \infty & 11 & \infty & - \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 8 & \infty & 10 & 13 & \infty & 11 \\ x_2 & 8 & - & 7 & 8 & \infty & 15 & \infty \\ x_3 & \infty & 7 & - & \infty & 19 & 10 & 15 \\ x_4 & 10 & 8 & \infty & - & 9 & \infty & 6 \\ x_5 & 13 & \infty & 19 & 9 & - & 8 & \infty \\ x_6 & \infty & 15 & 10 & \infty & 8 & - & 12 \\ x_7 & 11 & \infty & 15 & 6 & \infty & 12 & - \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & 8 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ x_2 & 6 & - & 11 & 12 & 9 & \infty & 5 \\ x_3 & 8 & 11 & - & 7 & 8 & \infty & 9 \\ x_4 & \infty & 12 & 7 & - & 6 & 5 & 10 \\ x_5 & \infty & 9 & 8 & 6 & - & 8 & \infty \\ x_6 & 7 & \infty & \infty & 5 & 8 & - & 7 \\ x_7 & \infty & 5 & 9 & 10 & \infty & 7 & - \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 8 & \infty & 3 & 6 & \infty \\ x_2 & 3 & - & 7 & 6 & \infty & \infty & 4 \\ x_3 & 8 & 7 & - & 4 & 6 & \infty & 10 \\ x_4 & \infty & 6 & 4 & - & 5 & 7 & \infty \\ x_5 & 3 & \infty & 6 & 5 & - & 8 & 9 \\ x_6 & 6 & \infty & \infty & 7 & 8 & - & \infty \\ x_7 & \infty & 4 & 10 & \infty & 9 & \infty & - \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 9 & 10 & 15 & \infty & \infty & 11 \\ x_2 & 9 & - & 14 & 12 & \infty & 8 & 15 \\ x_3 & 10 & 14 & - & 10 & 9 & \infty & 6 \\ x_4 & 15 & 12 & 10 & - & 11 & 12 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & 9 & 11 & - & 12 & 11 \\ x_6 & \infty & 8 & \infty & 12 & 12 & - & \infty \\ x_7 & 11 & 15 & 6 & \infty & 11 & \infty & - \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 8 & 9 & \infty & \infty & \infty & 6 \\ x_2 & 8 & - & 7 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ x_3 & 9 & 7 & - & 6 & 10 & 5 & \infty \\ x_4 & \infty & 6 & 6 & - & 8 & 7 & \infty \\ x_5 & \infty & 9 & 10 & 8 & - & 4 & 5 \\ x_6 & \infty & \infty & 5 & 7 & 4 & - & 6 \\ x_7 & 6 & \infty & \infty & \infty & 5 & 6 & - \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 8 & 4 & 9 & \infty & 6 & \infty \\ x_2 & 8 & - & 11 & 6 & 10 & \infty & 8 \\ x_3 & 4 & 11 & - & 7 & \infty & 9 & \infty \\ x_4 & 9 & 6 & 7 & - & 5 & 6 & \infty \\ x_5 & \infty & 10 & \infty & 5 & - & 7 & 6 \\ x_6 & 6 & \infty & 9 & 6 & 7 & - & 8 \\ x_7 & \infty & 8 & \infty & \infty & 6 & 8 & - \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty \\ x_2 & 10 & - & 6 & 1 & 4 & \infty & 5 \\ x_3 & \infty & 6 & - & 3 & 1 & 2 & \infty \\ x_4 & 5 & 1 & 3 & - & 3 & \infty & 5 \\ x_5 & \infty & 4 & 1 & 3 & - & 4 & 2 \\ x_6 & 6 & \infty & 2 & \infty & 4 & - & \infty \\ x_7 & \infty & 5 & \infty & 5 & 2 & \infty & - \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 11 & 14 & \infty & \infty & 8 \\ x_2 & 5 & - & 5 & 7 & \infty & \infty & 8 \\ x_3 & 11 & 5 & - & 4 & 8 & 6 & \infty \\ x_4 & 14 & 7 & 4 & - & 7 & \infty & 11 \\ x_5 & \infty & \infty & 8 & 7 & - & 3 & 5 \\ x_6 & \infty & \infty & 6 & \infty & 3 & - & 6 \\ x_7 & 8 & 8 & \infty & 11 & 5 & 6 & - \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & 5 & \infty & 8 & \infty & 10 \\ x_2 & 6 & - & 9 & 7 & 6 & \infty & \infty \\ x_3 & 5 & 9 & - & 8 & 9 & \infty & 11 \\ x_4 & \infty & 7 & 8 & - & 5 & 6 & \infty \\ x_5 & 8 & 6 & 9 & 5 & - & 7 & 9 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 6 & 7 & - & \infty \\ x_7 & 10 & \infty & 11 & \infty & 9 & \infty & - \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 8 & \infty & \infty & 8 & \infty \\ x_2 & 5 & - & 7 & 10 & \infty & 8 & \infty \\ x_3 & 8 & 7 & - & 4 & 7 & 7 & \infty \\ x_4 & \infty & 10 & 4 & - & 6 & 9 & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & 7 & 6 & - & 3 & 5 \\ x_6 & 8 & 8 & 7 & 9 & 3 & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & 4 & 5 & 6 & - \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & 5 & \infty & 10 & 9 & \infty \\ x_2 & 6 & - & 4 & 5 & 3 & \infty & 6 \\ x_3 & 5 & 4 & - & 6 & 7 & \infty & 8 \\ x_4 & \infty & 5 & 6 & - & 3 & 6 & \infty \\ x_5 & 10 & 3 & 7 & 3 & - & 8 & 7 \\ x_6 & 9 & \infty & \infty & 6 & 8 & - & 5 \\ x_7 & \infty & 6 & 8 & \infty & 7 & 5 & - \end{array}$$

16)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 7 & 8 & \infty & 6 & \infty & 4 \\ x_2 & 7 & - & 8 & \infty & 5 & 10 & \infty \\ x_3 & 8 & 8 & - & 6 & \infty & 3 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & 6 & - & 3 & 9 & 4 \\ x_5 & 6 & 5 & \infty & 3 & - & 8 & 7 \\ x_6 & \infty & 10 & 3 & 9 & 8 & - & \infty \\ x_7 & 4 & \infty & \infty & 4 & 7 & \infty & - \end{array}$$

17)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 12 & 10 & \infty & 11 & \infty & 18 \\ x_2 & 12 & - & 13 & 14 & \infty & \infty & 7 \\ x_3 & 10 & 13 & - & 9 & 13 & \infty & 16 \\ x_4 & \infty & 14 & 9 & - & 15 & 14 & \infty \\ x_5 & 11 & \infty & 13 & 15 & - & 15 & 14 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 14 & 15 & - & \infty \\ x_7 & 18 & 7 & 16 & \infty & 14 & \infty & - \end{array}$$

18)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 4 & 11 & \infty & 6 & \infty \\ x_2 & 5 & - & 8 & 9 & \infty & 9 & \infty \\ x_3 & 4 & 8 & - & \infty & 5 & \infty & 7 \\ x_4 & 11 & 9 & \infty & - & \infty & 5 & 3 \\ x_5 & \infty & \infty & 5 & \infty & - & 7 & 8 \\ x_6 & 6 & 9 & \infty & 5 & 7 & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & 7 & 3 & 8 & 6 & - \end{array}$$

19)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 8 & 9 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ x_2 & 8 & - & 6 & 5 & 9 & \infty & 7 \\ x_3 & 9 & 6 & - & 11 & 7 & 12 & \infty \\ x_4 & \infty & 5 & 11 & - & 3 & 5 & 4 \\ x_5 & 10 & 9 & 7 & 3 & - & 4 & \infty \\ x_6 & \infty & \infty & 12 & 5 & 4 & - & 9 \\ x_7 & \infty & 7 & \infty & 4 & \infty & 9 & - \end{array}$$

20)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 11 & 5 & 8 & \infty & 8 & \infty \\ x_2 & 11 & - & 6 & 13 & \infty & 10 & \infty \\ x_3 & 5 & 6 & - & \infty & 7 & \infty & 9 \\ x_4 & 8 & 13 & \infty & - & 3 & 5 & 8 \\ x_5 & \infty & \infty & 7 & 3 & - & 9 & 7 \\ x_6 & 8 & 10 & \infty & 5 & 9 & - & \infty \\ x_7 & \infty & \infty & 9 & 8 & 7 & \infty & - \end{array}$$

21)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 11 & \infty & 8 & \infty & 10 \\ x_2 & \infty & - & \infty & 12 & 5 & 8 & \infty \\ x_3 & 11 & \infty & - & \infty & 6 & 4 & 3 \\ x_4 & \infty & 12 & \infty & - & 5 & \infty & 7 \\ x_5 & 8 & 5 & 6 & 5 & - & 7 & 4 \\ x_6 & \infty & 8 & 4 & \infty & 7 & - & \infty \\ x_7 & 10 & \infty & 3 & 7 & 4 & \infty & - \end{array}$$

22)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & \infty & 10 & 11 & \infty & 6 \\ x_2 & \infty & - & \infty & 12 & 10 & 5 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 3 & 3 & \infty & 8 \\ x_4 & 10 & 12 & 3 & - & 6 & \infty & 7 \\ x_5 & 11 & 10 & 3 & 6 & - & 9 & \infty \\ x_6 & \infty & 5 & \infty & \infty & 9 & - & 11 \\ x_7 & 6 & \infty & 8 & 7 & \infty & 11 & - \end{array}$$

23)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 12 & 10 & 14 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 12 & \infty & 5 & \infty & 7 \\ x_3 & 12 & 12 & - & 7 & 6 & 8 & \infty \\ x_4 & 10 & \infty & 7 & - & 4 & 9 & 9 \\ x_5 & 14 & 5 & 6 & 4 & - & 8 & \infty \\ x_6 & \infty & \infty & 8 & 9 & 8 & - & 7 \\ x_7 & \infty & 7 & \infty & 9 & \infty & 7 & - \end{array}$$

24)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 8 & 12 & 7 & \infty & 16 \\ x_2 & 3 & - & 4 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ x_3 & 8 & 4 & - & 5 & 7 & 11 & \infty \\ x_4 & 12 & \infty & 5 & - & 10 & 6 & 4 \\ x_5 & 7 & 9 & 7 & 10 & - & 5 & \infty \\ x_6 & \infty & \infty & 11 & 6 & 5 & - & 5 \\ x_7 & 16 & \infty & \infty & 4 & 8 & 5 & - \end{array}$$

25)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 7 & \infty & \infty & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 17 & 8 & 15 & \infty \\ x_3 & 7 & \infty & - & 5 & 6 & \infty & 10 \\ x_4 & \infty & 17 & 5 & - & 12 & 5 & 3 \\ x_5 & \infty & 8 & 6 & 12 & - & 4 & 9 \\ x_6 & 11 & 15 & \infty & 5 & 4 & - & \infty \\ x_7 & \infty & \infty & 10 & 3 & 9 & \infty & - \end{array}$$

26)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 6 & 9 & 5 & 8 & 11 \\ x_3 & \infty & 6 & - & 2 & 5 & 6 & 6 \\ x_4 & \infty & 9 & 2 & - & \infty & 4 & \infty \\ x_5 & 7 & 5 & 5 & \infty & - & 4 & 12 \\ x_6 & \infty & 8 & 6 & 4 & 4 & - & 3 \\ x_7 & \infty & 11 & 6 & \infty & 12 & 3 & - \end{array}$$

27)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 8 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ x_2 & 3 & - & \infty & 11 & 6 & \infty & 15 \\ x_3 & 8 & \infty & - & 4 & 5 & 7 & 10 \\ x_4 & \infty & 11 & 4 & - & 13 & 8 & 7 \\ x_5 & 9 & 6 & 5 & 13 & - & 6 & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & 7 & 8 & 6 & - & 3 \\ x_7 & \infty & 15 & 10 & 7 & 12 & 3 & - \end{array}$$

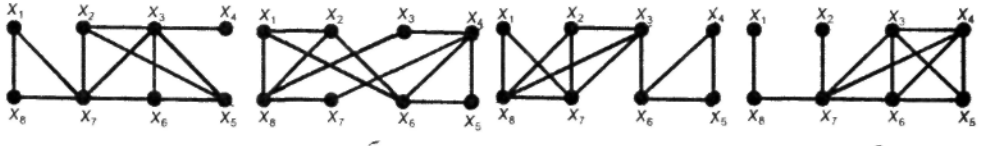
28)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 4 & \infty & \infty & 7 & \infty & 20 \\ x_2 & 4 & - & 3 & \infty & 5 & 14 & 15 \\ x_3 & \infty & 3 & - & 6 & 7 & 11 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & 6 & - & 12 & 10 & 4 \\ x_5 & 7 & 5 & 7 & 12 & - & 8 & \infty \\ x_6 & \infty & 14 & 11 & 10 & 8 & - & 5 \\ x_7 & 20 & 15 & \infty & 4 & \infty & 5 & - \end{array}$$

29)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & 2 & - & 1 & 8 & 4 & \infty & 10 \\ x_3 & \infty & 1 & - & \infty & 5 & 6 & 9 \\ x_4 & 7 & 8 & \infty & - & \infty & 3 & \infty \\ x_5 & \infty & 4 & 5 & \infty & - & 4 & 10 \\ x_6 & \infty & \infty & 6 & 3 & 4 & - & 4 \\ x_7 & \infty & 10 & 9 & \infty & 10 & 4 & - \end{array}$$

30)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 5 & 2 & 16 & \infty & \infty \\ x_2 & 10 & - & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & 5 & 4 & - & 8 & 15 & 13 & \infty \\ x_4 & 2 & \infty & 8 & - & 8 & 5 & 7 \\ x_5 & 16 & \infty & 15 & 8 & - & 11 & 18 \\ x_6 & \infty & \infty & 13 & 5 & 11 & - & 4 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & 7 & 18 & 4 & - \end{array}$$

3.19.2. Используя матричную теорему Кирхгофа, найти число остовных деревьев в полном двудольном графе $K_{m,n}$.

3.19.3. Найти матрицы фундаментальных циклов, радиусы и диаметры графов, изображенных на рис. 3.43. Являются ли изображенные графы эйлеровыми или гамильтоновыми?



а *б* *в* *г*

Рис. 3.43

3.19.4. Доказать, что если для любых двух несмежных вершин x и y связного n-вершинного графа выполняется условие $P(x)+P(y)\geq n$, то граф имеет гамильтонов цикл.

3.19.5. По алгоритму Флери найти эйлеров цикл в графах, изображенных на рис. 3.44.

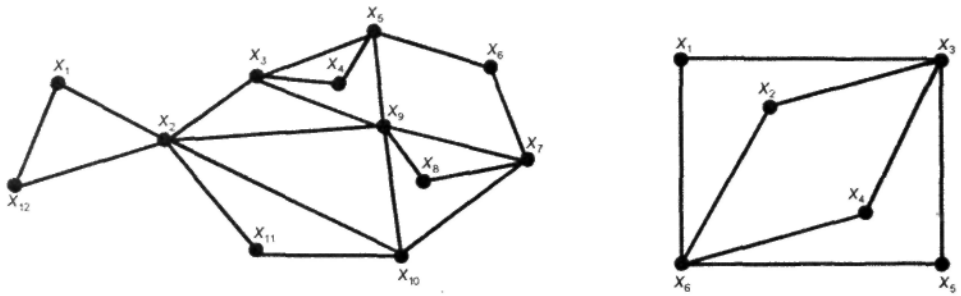


Рис. 3.44

3.19.6. Найти наибольшее независимое множество вершин в графе Петерсена* (рис. 3.45).

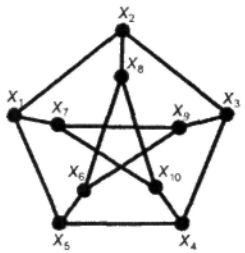


Рис. 3.45

3.19.7. Показать, что граф Петерсена не гамильтонов.

3.19.8. Найти число доминирования $\delta(G)$ и наименьшее доминирующее множество графов, представленных на рис. 3.46.

3.19.9. Построить дерево поиска клик, матрицу клик и найти наибольшие клики графов, изображенных на рисунках 3.44, *а*, 3.45 и 3.46, *б*, *в*.

* Джулиус Петер Христиан Петерсен (1839–1910) — датский математик.

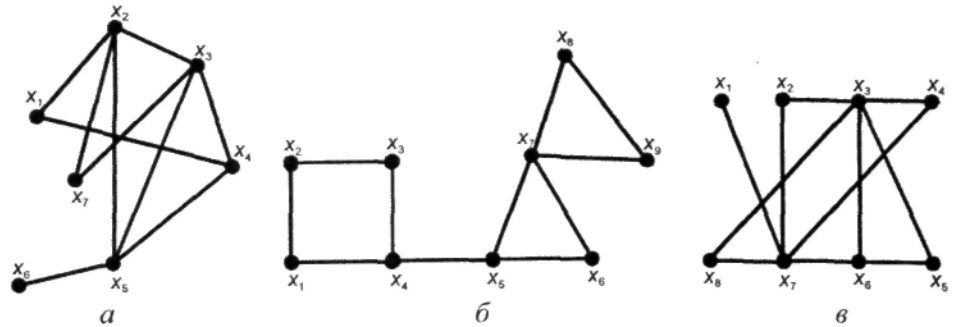


Рис. 3.46

3.19.10. Приведите пример графа, в котором наименьшее доминирующее множество не является независимым.

3.20. Планарность графов

Ранее уже отмечалось, что возможно несколько изображений одного графа, поскольку все изоморфные графы несут одну и ту же информацию. На практике при изготовлении микросхем необходимо выяснить, можно ли схему радиоэлектронного устройства, которая представляет собой граф, изобразить на плоскости без пересечений проводников. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Таким образом, возникает задача построения и исследования плоского графа. Плоским называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра — непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным.

Все планарные графы укладываются на плоскости (имеют плоскую укладку). На рис. 3.47 изображен планарный граф G и его плоская укладка $\widetilde{G}$.

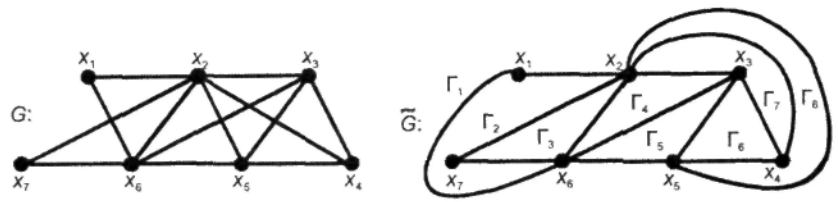


Рис. 3.47

Очевидно, что

1. Всякий подграф планарного графа планарен.
2. Граф планарен тогда и только тогда, когда каждая связная компонента этого графа — планарный граф.

Гранью планарного графа называется множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена плоской кривой, не пересекающей ребер этого графа. *Границей* грани называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани. Например, граф $\tilde{G}$ на рис. 3.47 имеет восемь граней: $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_8$. Неограниченная грань Γ_1 называется *внешней*, а остальные грани $\Gamma_2, \Gamma_3, ..., \Gamma_8$ — *внутренними*.

Пусть n, m, f — соответственно число вершин, ребер и граней планарного графа.

Теорема 3.21 (теорема Эйлера). **Для всякого связного планарного графа верно равенство**

$$n - m + f = 2. \qquad (3.20.1)$$

Доказательство. Пусть G — связный планарный n-вершинный граф. Рассмотрим некоторый остов G' этого графа. Остов имеет всего одну внешнюю грань, n вершин и $n-1$ ребер, поэтому формула (3.20.1) для остова G' выполняется. Будем поочередно добавлять к остову G' недостающие ребра графа G. При каждом добавлении число вершин не изменится, число ребер увеличится на единицу, так же как и число граней, поскольку при добавлении к остову ребра, связывающего две несмежные вершины, получается цикл, разделяющий текущую грань на две.

Таким образом, формула (3.20.1) будет верна для всякого графа, получающегося в результате таких операций, а поскольку графом G заканчивается вся эта процедура, то формула (3.20.1) будет верна и для него.

Имеется несколько критериев планарности и найдены эффективные алгоритмы, осуществляющие плоскую укладку планарного графа. Для формулировки критерия планарности введем понятие гомеоморфизма графов. Рассмотрим операцию подразбиения ребра в графе $G = (S, U)$. После подразбиения ребра $(x, y) \in U$ получается граф $G' = (S', U')$, где $S' = S \cup \{xy\}$, $U' = (U \setminus \{(x, y)\}) \cup \{(x, xy), (xy, y)\}$, т. е. ребро (x, y) заменяется на (x, y)-цепь длины два. Два графа называются *гомеоморфными*, если они оба могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер. На рис. 3.48 изображены исходный граф G и два гомеоморфных графа G_1 и G_2.

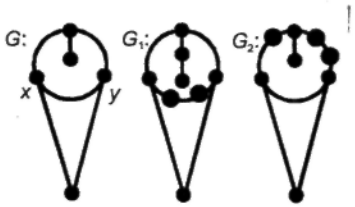


Рис. 3.48

Теорема 3.22 (теорема Понтрягина—Куратовского**).* **Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.** Эквивалентная форма критерия планарности описана в следующей теореме.

Теорема 3.23. **Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых (т. е. получаемых последовательностью отождествлений вершин, связанных ребрами) к графам K_5 или $K_{3,3}$.**

Для непланарных графов вводятся характеристики, представляющие ту или иную меру непланарности. Если граф непланарен, то для его геометрической реализации удаляют отдельные ребра (переносят их на другую плоскость). Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу, называется *числом планарности* или *искаженностью* $sk(G)$ графа G. Для числа планарности полного графа справедлива следующая формула:

$$sk(G) = C_n^2 - 3n + 6, \; n \geq 3. \qquad (3.20.2)$$

Важнейшая характеристика непланарного графа — его *толщина* $t(G)$ — наименьшее число планарных подграфов графа G, объединение которых дает сам граф. Толщина графа равна минимальному числу плоскостей l, при котором граф G разбивается на плоские части $G_1, G_2, ..., G_l$. Очевидно, что толщина планарного графа равна единице. Для толщины связного (n, m)-графа справедливы такие оценки

$$t(G) \geq \left]\frac{m}{3n-6}\right[, \; t(G) \geq \left[\frac{m+3n-7}{3n-6}\right], \qquad (3.20.3)$$

где $[...]$ — целая часть числа, а $]..[= [...] + 1$.

---

* Лев Семенович Понтрягин (1908–1988) — советский математик.

** Казимеж Куратовский (1896–1980) — польский математик.

3.21. Алгоритм укладки графа на плоскости

Критерии планарности в практическом применении не всегда просты и не дают информации о том, как строить укладку графа на плоскости, если он планарен. Все это вызвало появление алгоритмов, которые проверяют граф на планарность и строят его плоскую укладку. Рассмотрим один из них.

Этот алгоритм представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уложенному подграфу $\tilde{G}$ графа G новой цепи L, оба конца которой принадлежат G. После этого в качестве подграфа $\tilde{G}$ выбирается любой простой цикл графа G, и процесс присоединения новых цепей продолжается до тех пор, пока не будет построен плоский граф, изоморфный G, или присоединение новой простой цепи на некотором этапе окажется невозможным, что свидетельствует о непланарности исходного графа G.

Введем несколько определений. Пусть имеется некоторая плоская укладка подграфа $\tilde{G}$ графа G. *Сегментом* G_i относительно $\tilde{G} = (\tilde{S}, \tilde{U})$ называется подграф графа $G = (S, U)$ следующих двух видов:

1. Ребро $u = (x, y) \in U$ такое, что $u \notin \tilde{U}$, $x, y \in \tilde{S}$.
2. Связная компонента графа $G \setminus \tilde{G}$, дополненная всеми ребрами графа G, инцидентными вершинам взятой компоненты, и концами этих ребер.

Вершина u сегмента G_i называется контактной, если $u \in \tilde{S}$. Граф $\tilde{G}$ — плоский, следовательно, он разбивает плоскость на грани. Допустимой гранью для сегмента G_i относительно $\tilde{G}$ называется грань Γ графа $\tilde{G}$, содержащая все контактные вершины сегмента G_i. Обозначим через $\Gamma(G_i)$ — множество допустимых граней для G_i. Для непланарных графов может быть $\Gamma(G_i) = \varnothing$. Рассмотрим простую цепь L сегмента G_i, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин. Такие цепи называются α-цепями. Всякая α-цепь может быть уложена в любую грань, допустимую для данного сегмента.

Два сегмента G_1 и G_2 относительно $\tilde{G}$ называются конфликтующими, если

1. $\theta = \Gamma(G_1) \cap \Gamma(G_2) \neq \varnothing$.
2. Существуют две α-цепи $L_1 \in G_1$ и $L_2 \in G_2$, которые без пересечений нельзя уложить одновременно ни в какую грань $\Gamma \in \theta$.

Пусть $\tilde{G}$ — плоская укладка некоторого подграфа графа G. Для каждого сегмента G_i относительно $\tilde{G}$ находим множество допустимых граней. Тогда могут осуществляться только следующие три случая:

1. Существует сегмент G_i, для которого $\Gamma(G_i) = \varnothing$. В этом случае исходный граф G непланарен.
2. Для некоторого сегмента G_i существует единственная допустимая грань Γ. Тогда можно расположить любую α-цепь сегмента G_i в грани Γ. При этом грань Γ разобьется на две грани.
3. $\Gamma(G_i) \geq 2$ для Γ_i. В этом случае можно расположить α-цепь в любой допустимой грани.

Сам алгоритм укладки планарного графа G на плоскость состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Выбираем любой простой цикл C графа G. Этот цикл укладывается на плоскости и полагается $\tilde{G} = C$.

Шаг 2. Находим все грани графа $\tilde{G}$ и все сегменты G_i относительно $\tilde{G}$. Если множество сегментов пусто, происходит переход на шаг 7.

Шаг 3. Для каждого сегмента G_i определяем множество допустимых граней $\Gamma(G_i)$. Если найдется сегмент G_i, для которого $\Gamma(G_i) = \varnothing$, то исходный граф G непланарен; конец алгоритма, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Если существует сегмент G_i, для которого имеется единственная допустимая грань Γ, то происходит переход на шаг 6, иначе на шаг 5.

Шаг 5. Для некоторого сегмента G_i, для которого $\Gamma(G_i) > 1$, выбираем произвольную допустимую грань.

Шаг 6. Произвольная α-цепь L сегмента G_i помещается в грань Γ, $\tilde{G}$ заменяется на $\tilde{G} \cup L$ и происходит переход к шагу 1.

Шаг 7. Построена укладка $\tilde{G}$ графа G на плоскости. Конец алгоритма.

- **Пример 1.** Пусть граф G изображен на рис. 3.49.

  Шаг 1. Выберем простой цикл $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, который разбивает плоскость на две грани Γ_1 и Γ_2. Положим $\tilde{G} = C$.

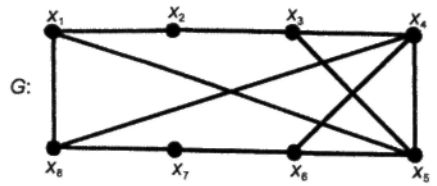


Рис. 3.49

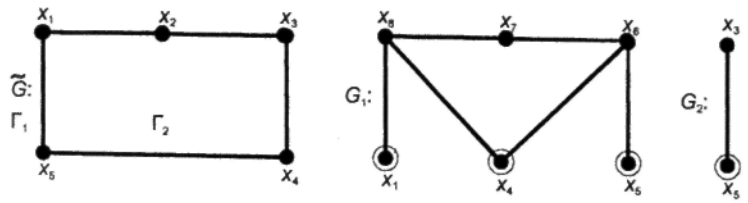


Рис. 3.50

Шаг 2. На рис. 3.50 изображен граф $\tilde{G} = C$ и сегменты G_1, G_2 исходного графа G относительно $\tilde{G}$. Контактные вершины обведены кружками. $\Gamma(G_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}, i = 1,2$.

Шаг 3. $\Gamma(G_i) \neq \varnothing, i = 1,2$.

Шаг 4. Нет сегмента, для которого бы существовала единственная допустимая грань.

Шаг 5. Любую α-цепь можно уложить в Γ_1 или в Γ_2. Выберем для укладки грань Γ_1.

Шаг 6. Пусть $L = \{x_1, x_8, x_7, x_6, x_5\}$. Поместим эту α-цепь в Γ_1. Возникает новый граф $\tilde{G}$ и его сегменты (рис. 3.51) G_1, G_2, G_3. Появляется и новая грань Γ_3.

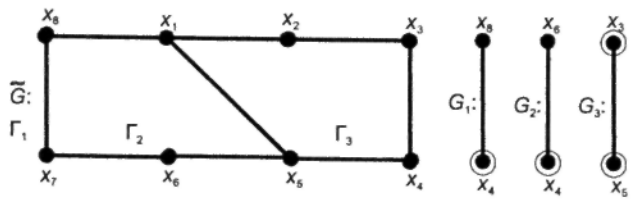


Рис. 3.51

Переходим к первому шагу.

Шаг 1. Новых сегментов три: G_1, G_2, G_3.

Шаг 2. $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_2) = \{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_3) = \{\Gamma_1, \Gamma_3\}$.

Шаг 3. $\Gamma(G_i) \neq \varnothing, i = 1,2,3$.

Шаг 4. $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2) = \{\Gamma_1\}$, переход на шаг 6.

Шаг 6. α-цепь $L_1 = \{x_4, x_8\}$ поместим в грань Γ_1, α-цепь $L_2 = \{x_4, x_6\}$ также помещаем в эту же грань. В результате возникает новый граф $\tilde{G}$, изображенный на рис. 3.52. Этот граф имеет пять граней и один сегмент.

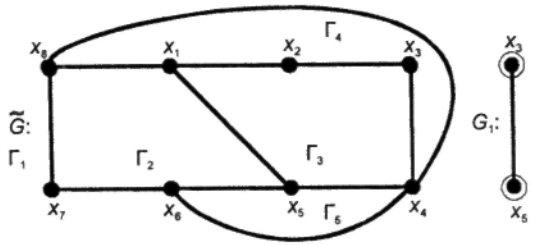


Рис. 3.52

Шаг 1. G_1 — ребро (x_3, x_5).

Шаг 2. $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_3\}$.

Шаг 3. $\Gamma(G_1) \neq \varnothing$.

Шаг 4. $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_3\}$, переход на шестой шаг.

Шаг 6. α-цепь $L_1 = \{x_3, x_5\}$ поместим в грань Γ_3. Новый граф $\tilde{G}$ на рис. 3.53 является плоской укладкой исходного планарного графа.

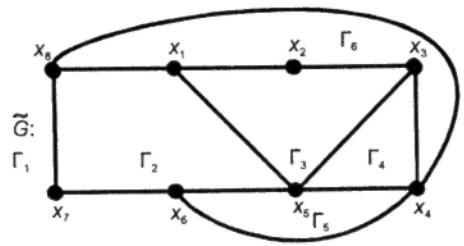


Рис. 3.53

▪ **Пример 2.** Попытаемся получить плоскую укладку графа K_5, изображенного на рис. 3.54. Поскольку известно, что граф непланарен, алгоритм должен закончить работу на третьем шаге.

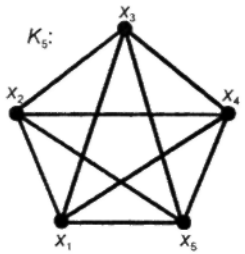


Рис. 3.54

Шаг 1. Выберем простой цикл $C=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $\tilde{G}=C$.

Шаг 2. Граней у графа $\tilde{G}$ две: Γ_1 и Γ_2, сегментов пять, все они показаны на рис. 3.55.

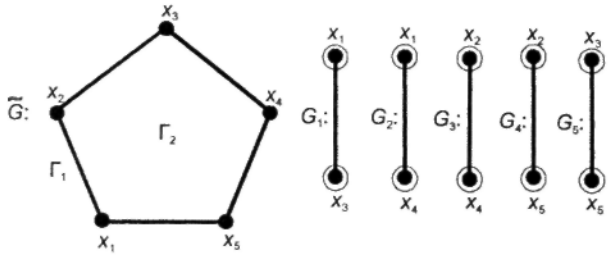


Рис. 3.55

Шаг 3. $\Gamma(G_i)=2, i=\overline{1,5}$.

Шаг 4. $\Gamma(G_i)\neq 1, i=\overline{1,5}$.

Шаг 5. Выберем для G_1 и G_5 грань Γ_2 в качестве допустимой грани.

Шаг 6. α-цепи $L_1=\{x_1,x_3\}$ и $L_2=\{x_3,x_5\}$ присоединим к графу $\tilde{G}$. Получим новый граф $\tilde{G}$ и три сегмента G_1,G_2,G_3 (рис. 3.56).

Шаг 1-2. Новых граней у графа $\tilde{G}$ четыре: $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$.

Шаг 3. $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_2)=\{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_3)=\{\Gamma_1\}$.

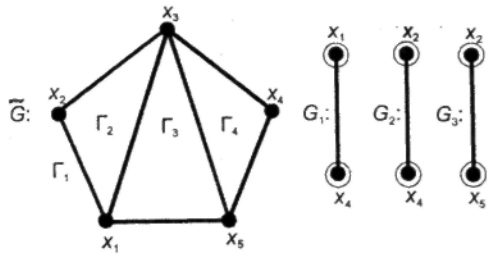


Рис. 3.56

Шаг 4. Для G_1 и G_2 выберем грань Γ_1.

Шаг 6. α-цепи $L_1=\{x_1,x_4\}$ и $L_2=\{x_2,x_4\}$ поместим в грань Γ_1 и присоединим к $\tilde{G}$.

Шаг 1. $\tilde{G}$ и сегмент G_1 показаны на рис. 3.57.

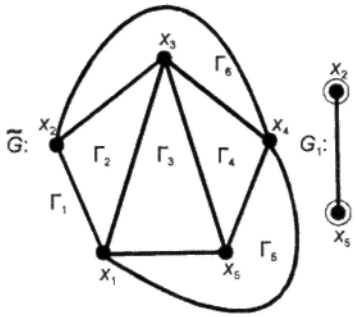


Рис. 3.57

Шаг 2. Граней у графа $\tilde{G}$ теперь шесть: $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5,\Gamma_6$.

Шаг 3. $\Gamma(G_1)=\varnothing$. Исходный граф G непланарен, конец алгоритма.

В заключение найдем число планарности и толщину полного графа K_5. По формуле (3.20.2) $sk(K_5)=C_5^2-3\cdot 5+6=10-15+6=1$. Это соответствует действительности, у графа $\tilde{G}$ остался один неприсоединенный сегмент G_1 (рис. 3.57).

Для толщины полного графа модификация формул (3.20.3) дает точную оценку $t(K_5)=\left[\frac{n+7}{6}\right]=\left[\frac{5+7}{6}\right]=2$. Таким образом, этот граф

Теорема 3.27. **Всякий планарный граф 5-раскрашиваем.**

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по числу вершин графа. Совершенно очевидно, что если у графа не более пяти вершин, то теорема справедлива. Предположим, что она верна для графов порядка $n, n \geq 5$.

Рассмотрим планарный граф G с $n+1$ вершиной и докажем сначала несколько вспомогательных соотношений. Во-первых, из теоремы 3.21 следует, что если в связном плоском (n,m)-графе граница каждой грани является r-циклом, $r \geq 3$, то $m(r-2) = r(n-2)$.

Действительно, т. к. каждая грань графа ограничена r-циклом, то каждое ребро принадлежит двум граням, т. е. $f \cdot r = 2m$, где f — число граней, но $f = 2 - n + m$ из теоремы 3.21, тогда $(2-n+m)\cdot r = 2m$ и $m(r-2) = r(n-2)$. При $r = 3$ получим $m = 3n - 6$.

Далее убедимся в том, что если число вершин у максимального плоского графа не менее четырех, то степень каждой вершины не менее трех (рис. 3.59). Рассмотрим вершину x_1. Пусть x_3 — смежная с ней вершина. Ребро (x_1, x_3) принадлежит двум граням — треугольникам (x_1, x_3, x_2) и (x_1, x_3, x_4), причем $x_2 \neq x_4$, т. к. число вершин не менее четырех. Таким образом, x_1 смежна по крайней мере с тремя вершинами x_2, x_3 и x_4 (рис. 3.59).

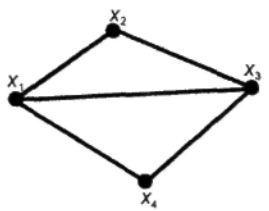


Рис. 3.59

Итак, для максимального плоского графа с учетом двух предыдущих замечаний и леммы о рукопожатиях (см. задачу 3.9.1) получим $m = 3n - 6$, $2m = 2(3n-6) = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \ldots \geq 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i \geq 6} n_i$, где n_i — число вершин степени i у максимального плоского графа. Но $n = \sum_{i \geq 3} n_i = n_3 + n_4 + n_5 + \sum_{i \geq 6} n_i$, тогда

$$6n - 12 = 6(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i \geq 6} n_i - 12 \geq 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i \geq 6} n_i .$$

Отсюда $n_3 + n_4 + n_5 \geq 4$, т. е. всякий планарный граф с $n \geq 4$ вершинами имеет, по крайней мере, четыре вершины со степенями, не превосходящими пяти.

Максимальный плоский граф G' отличается от исходного G лишь наличием дополнительных ребер, соединяющих несмежные вершины без пересечения с прочими ребрами. Если в графе G' имеется по крайней мере четыре вершины со степенями не больше пяти, то в исходном графе G такие вершины и подавно имеются.

Вернемся теперь к основному доказательству. В графе порядка $n+1$ содержится вершина x_0, степень которой не превосходит пяти. Пусть $S = S(x_0)$ — окружение вершины x_0 в графе G (рис. 3.60).

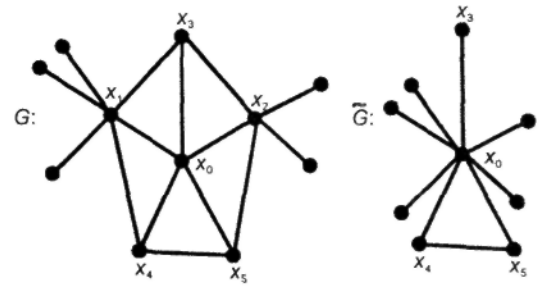


Рис. 3.60

Возможны два случая.

1. $|S| = 4$. В этом случае граф $G \setminus \{x_0\}$ 5–раскрашиваем по индуктивному предположению. Раскрасим вершины графа $G \setminus \{x_0\}$ пятью цветами, а вершину x_0 окрасим в тот цвет, который не был использован при раскраске вершин из S.
2. $|S| = 5$. В множестве S существуют две несмежные вершины x_1 и x_2, иначе $G(S) = K_5$ и граф G не будет планарным (рис. 3.60). Граф $\tilde{G}$, полученный из $G \setminus \{x_0\}$ слиянием вершин x_1 и x_2 в вершину x, плоский и 5-раскрашиваемый по индуктивному предположению.

Рассмотрим какую-либо из его 5-раскрасок. В графе G окрасим вершины x_1 и x_2 в цвет вершины x, а остальные отличные от x вершины — в те же цвета, что и соответствующие вершины графа $\tilde{G}$. Затем припишем вершине x_0

цвет, не используемый при раскраске вершин из S. Таким образом, получится правильная 5-раскраска графа G.

Трудность проблемы четырех красок привела к появлению большого числа равносильных ей формулировок. В конце 60-х гг. прошлого века эта проблема была сведена к исследованию большого, но конечного множества так называемых неустранимых конфигураций, число которых оказалось равно 1482.

В 1976 г. научному коллективу под руководством К. Аппеля и В. Хейкена удалось с использованием ЭВМ правильно раскрасить все графы из множества неустранимых конфигураций, затратив на это около 2000 часов машинного времени. Таким образом, хотя такое доказательство очень сложно повторить, можно считать, что формально гипотеза четырех красок доказана.

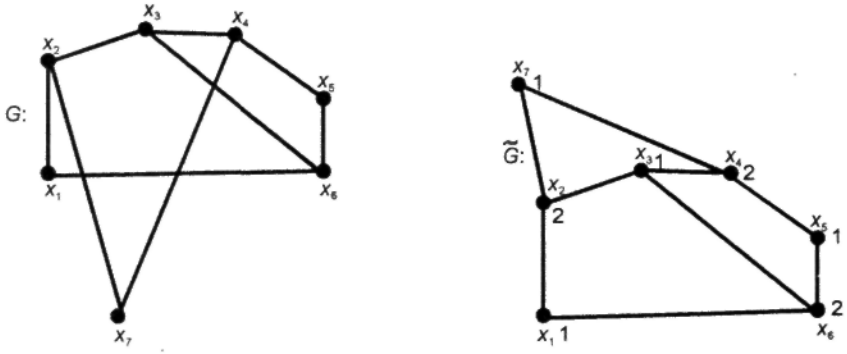
В заключение рассмотрим очень простой алгоритм последовательной раскраски графа. Этот алгоритм в общем случае не приводит к минимальной раскраске. Только для некоторых классов графов, например полных k-дольных, последовательная раскраска минимальна.

Алгоритм последовательной раскраски содержит два правила:

1. Произвольной вершине x графа G присваивается цвет 1.
2. Если вершины $x_1, x_2, \ldots, x_i$ раскрашены k цветами $1, 3, \ldots, k, k \le i$, то новой произвольно взятой вершине x_{i+1} приписывается минимальный цвет, не использованный при раскраске вершин из ее окружения.

▪ **Пример 1.** Оценить и найти хроматическое число графа, изображенного на рис. 3.61, *а*, и раскрасить его вершины по алгоритму последовательной раскраски. Является ли полученная раскраска минимальной?

Плоская укладка этого графа, полученная по описанному в *разделе 3.21* алгоритму, изображена на рис. 3.61, *б*. Исходный граф G — планарный.



а *б*

Рис. 3.61

Оценим его хроматическое число. Формула (3.22.1) дает $n = 7$, $m = 9$, $P(G) = 3$, $\chi(G) \le 3 + 1 = 4$. Аналогично, по (3.22.2) получим

$$\left[\frac{7}{\left[\frac{49-18}{7}\right]} \cdot \frac{1-\left\{\frac{49-18}{7}\right\}}{1+\left[\frac{49-18}{7}\right]}\right] \le \chi(G) \le \left[\frac{3+\sqrt{9+8\cdot 2}}{2}\right],$$

т. е. $0 \le \chi(G) \le 4$. Наконец, т. к. $\alpha_0(G) = 4$, по формуле (3.22.3) получим $7/4 \le \chi(G) \le 7 - 4 + 1$, т. е. $1.75 \le \chi(G) \le 4$.

На самом деле $\chi(G) = 2$. Раскрасим вершины этого графа по алгоритму последовательной раскраски. Выберем в качестве начальной вершину x_7 и присвоим ей цвет 1. $S(x_7) = \{x_2, x_4\}$, поэтому обеим вершинам присваиваем цвет 2. Далее выберем, например, вершину x_3. Ее окружение $S(x_3) = \{x_2, x_4, x_6\}$. Вершины x_2 и x_4 уже окрашены, вершина x_6 еще нет. Минимальным цветом, не использованным при раскраске вершин из окружения вершины x_3, является цвет 1, поэтому вершине x_3 присвоим этот цвет.

После нескольких этапов работы алгоритма получится раскраска, показанная на рис. 3.61, *б*. Эта раскраска минимальна, т. к. граф G двуцветен и представляет собой неполный двудольный граф (рис. 3.62). Двуцветные графы удовлетворяют следующей теореме.

Теорема 3.28 (теорема Кенига).* **Граф двуцветен тогда и только тогда, когда он не содержит нечетных простых циклов.** Это условие выполняется для графа $\tilde{G}$ (рис. 3.61, *б*).

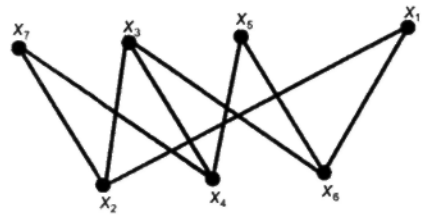


Рис. 3.62

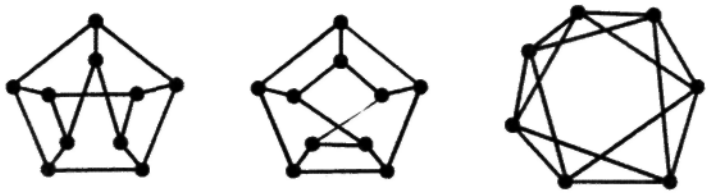
* Денез Кёниг (1884–1944) — венгерский математик.

3.23. Практическое занятие 9. Планарные и хроматические графы

3.23.1. Определим графы G_n следующим образом. Пусть G_n — граф, множество вершин которого совпадает с отрезком натурального ряда $\{1,2,...,10\}$, а множество ребер определяется следующим условием: несовпадающие вершины x и y смежны тогда, когда числа x и y взаимно просты. При каких значениях n графы G_n планарны?

3.23.2. Доказать, что любой граф можно уложить в трехмерном пространстве R^3.

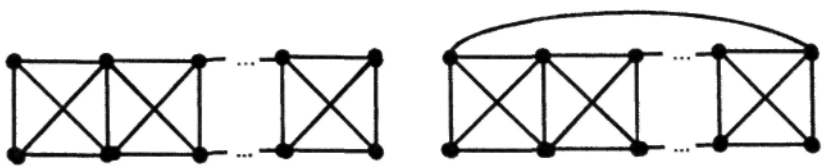
3.23.3. Какие из графов, изображенных на рис. 3.63, являются планарными?



а *б* *в*

Рис. 3.63

3.23.4. При каких n графы порядка $2n$, изображенные на рис. 3.64, являются планарными?



а *б*

Рис. 3.64

3.23.5. С помощью алгоритма укладки графа на плоскость построить плоские укладки или установить непланарность графов, изображенных на рис. 3.65.

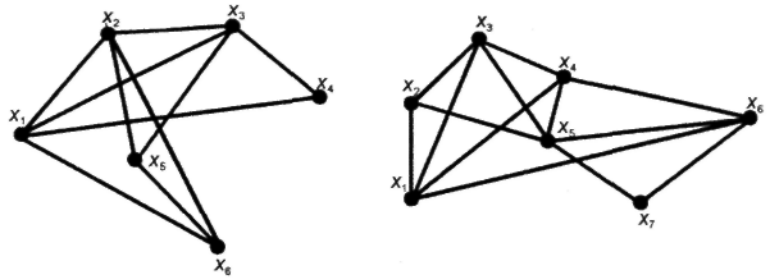


Рис. 3.65

3.23.6. Найти число планарности и толщину графов

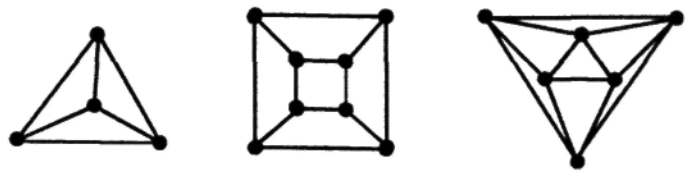
а) K_5;

б) $K_{3,3}$;

в) графа Петерсена.

3.23.7. Уложить графы а) K_5 и б) $K_{3,3}$ на торе.

3.23.8. Определить хроматические числа графов, изображенных на рис. 3.66.



а *б* *в*

Рис. 3.66

3.23.9. Граф называется *критическим*, если удаление любой из его вершин приводит к графу с меньшим хроматическим числом. Показать, что K_n является критическим графом при $n>1$, а C_n — тогда и только тогда, когда n нечетно. C_n — простой цикл, содержащий n вершин.

3.23.10. Приведите пример графа, последовательная раскраска вершин которого не является минимальной.

3.24. Потоки в сетях

Функциональное назначение большинства физически реализованных сетей состоит в том, что они служат носителями систем потоков, т. е. систем, в которых некоторые объекты текут, движутся или транспортируются по системе каналов (дуг сети) ограниченной пропускной способности. Примерами могут служить потоки автомобильного транспорта по сети автодорог, грузов по участку железнодорожной сети, воды в городской сети водоснабжения, электрического тока в электросети, телефонных или телеграфных сообщений по каналам связи, программ в вычислительной сети. Ограниченная пропускная способность означает, что интенсивность перемещения соответствующих предметов по каналу ограничена сверху определенной величиной.

Наиболее часто в сети решается задача о максимальном потоке и минимальном разрезе. При этом граф $G=(S,U)$ должен удовлетворять следующим условиям:

1. G — связный граф без петель.
2. Существует ровно одна вершина, не имеющая предшествующих; эта вершина называется *источником* и обозначается s.
3. Существует ровно одна вершина, не имеющая последующих; эта вершина называется *стоком* и обозначается t.
4. Каждой дуге $(x_i,x_j)\in U$ поставлено в соответствие неотрицательное число $c(x_i,x_j)$, $c(x_i,x_j)\in\Omega$, называемое *пропускной способностью дуги.*

Функция $\varphi(x_i,x_j)$, определенная на множестве дуг сети $G=(S,U,\Omega)$, называется *потоком*, если $0\le\varphi(x_i,x_j)\le c(x_i,x_j)\ \forall(x_i,x_j)\in U$ и $\sum\limits_{x_i\in S_{пр}(x_j)}\varphi(x_i,x_j)=\sum\limits_{x_j\in S_{сл}(x_i)}\varphi(x_i,x_j)$ для любой вершины $x_i\in S$ и $x_i\notin\{s,t\}$. Последнее условие называется *условием сохранения потока*; в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают.

Величина $\Delta(x_i,x_j)=c(x_i,x_j)-\varphi(x_i,x_j)$ называется *остаточной пропускной способностью* дуги (x_i,x_j). Если $\varphi(x_i,x_j)=c(x_i,x_j)$, то дуга называется *насыщенной.*

Максимальный поток определяется с помощью одного из основных понятий теории сетей — разреза. *Разрез* может быть представлен как множество дуг, исключение которых из сети отделило бы некоторое множество узлов от

остальной сети. Предположим, что множество вершин сети S разбито на два непустых непересекающихся подмножества $S=S'\cup S''$ и $S'\cap S''=\varnothing$. Множество дуг, начала которых лежат в S', а концы в S'', называется *ориентированным разрезом* и обозначается $(S'\to S'')$. Следовательно,

$$(S'\to S'')=\{(x_i,x_j)/x_i\in S',\ x_j\in S''\}. \qquad (3.24.1)$$

Пропускной способностью или *величиной разреза* $(S'\to S'')$ называется сумма пропускных способностей входящих в него дуг, т. е.

$$c(S'\to S'')=\sum_{x_i\in S',\,x_j\in S''}c(x_i,x_j). \qquad (3.24.2)$$

На рис. 3.67 изображена сеть, на которой около каждого ребра указана его пропускная способность. Произведены два разреза I и II. При разрезе I вершины оказались разбиты на подмножества $S'=\{x_1,x_2\}$ и $S''=\{x_3,x_4,x_5\}$, а ребрами, образующими разрез, стали ребра $(x_1,x_3),(x_1,x_4),(x_2,x_4)$. При разрезе II $S'=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, а $S''=\{x_5\}$, разрез образуют ребра $(x_3,x_5),(x_4,x_5)$.

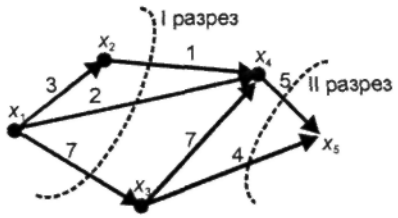


Рис. 3.67

3.25. Теорема Форда–Фалкерсона

Теорема 3.29. **Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока в сети от источника к стоку равна пропускной способности минимального разреза.**

Доказательство. Алгоритм Форда—Фалкерсона построения максимального потока и минимального разреза основан на следующих обстоятельствах.

1. Предположим, что в сети имеется некоторый поток и путь из s в t, состоящий из ненасыщенных дуг. Тогда очевидно, что поток в сети можно увеличить на величину Δ, равную минимальной из остаточных пропускных способностей дуг, входящих в этот путь. Перебирая все возможные пути из

s в t и проводя такую процедуру увеличения потока, пока это возможно, получаем в результате *полный поток*, т. е. такой поток, для которого каждый путь из s в t содержит по крайней мере одну насыщенную дугу.

2. Рассмотрим произвольный маршрут (неориентированный путь) из s в t. Дуги, образующие этот маршрут, естественным образом делятся на два типа: прямые (ориентированные от s к t) и обратные (ориентированные от t к s). Пусть существует путь, в котором прямые дуги не насыщены, а потоки на обратных дугах положительны; Δ_1 — минимальная из остаточных пропускных способностей прямых дуг, а Δ_2 — минимальная из величин потоков обратных дуг. Тогда поток в сети можно увеличить на величину $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$, прибавляя Δ к потокам на прямых дугах и вычитая Δ из потоков на обратных дугах (рис. 3.68). Очевидно, что при этом условие баланса (условие сохранения потока) $\sum\limits_{x_i \in S_{\text{пр}}(x_j)} \varphi(x_i, x_j) = \sum\limits_{x_j \in S_{\text{сл}}(x_i)} \varphi(x_i, x_j)$ для узлов, входящих в рассматриваемый маршрут, не нарушится. Ясно, что если множество обратных дуг не пусто, то при такой процедуре увеличения потока в сети фактического перемещения объектов вдоль рассматриваемого маршрута не происходит, т. к. оно в принципе нереально. Однако эта процедура уменьшает потоки на некоторых дугах, которые, возможно, были перед этим насыщенными, образуя таким образом новые пути из ненасыщенных дуг, вдоль которых и происходит фактическое перемещение потока величины Δ.

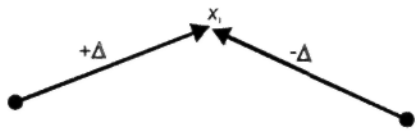


Рис. 3.68

Ясно также, что первая процедура является частным случаем второй.

- **Пример 1.** Пропускные способности дуг заданы следующей матрицей.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ s \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 12 & - & 13 & - & - \\ - & - & 11 & 14 & 15 & - \\ - & - & - & - & - & 8 \\ - & - & - & - & 7 & 15 \\ - & - & 8 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Построить максимальный поток от s к t и указать минимальный разрез, отделяющий s от t.

Этап 1.

Путь $s \xrightarrow{12} x_1 \xrightarrow{14} x_3 \xrightarrow{15} t$. $\delta = \min(12, 14, 15) = 12$. Увеличим по этому пути поток до 12 единиц, ребро (s, x_1) становится насыщенным. Поставим величину потока на дугах (x_1, x_3) и (x_3, t).

Путь $s \xrightarrow{13} x_3 \xrightarrow{12(15)} t$. $\delta = \min(13, 15-12) = 3$. Поток можно увеличить на три единицы. Дуга (x_3, t) станет насыщенной. Путь $s \xrightarrow{3(13)} x_3 \xrightarrow{7} x_4 \xrightarrow{8} x_2 \xrightarrow{8} t$. Можно увеличить поток на семь единиц; дуга (x_3, x_4) станет насыщенной, потоки на дугах примут вид как на рис. 3.69: $s \xrightarrow{10(13)} x_3 \xrightarrow{7(7)} x_4 \xrightarrow{7(8)} x_2 \xrightarrow{7(8)} t$. Больше путей нет. Конец первого этапа.

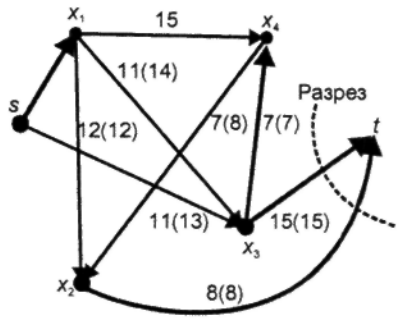


Рис. 3.69

Этап 2.

Рассмотрим теперь маршруты, содержащие противоположные дуги. Маршрут $s \xrightarrow{10(13)} x_3 \xleftarrow{12(14)} x_1 \xrightarrow{11} x_2 \xrightarrow{7(8)} t$. Поток можно увеличить на единицу на дуге (x_2, t). Тогда потоки по дугам этого маршрута станут такими: $s \xrightarrow{11(13)} x_3 \xleftarrow{11(14)} x_1 \xrightarrow{1(11)} x_2 \xrightarrow{8(8)} t$. Дуга (x_2, t) стала насыщенной.

Больше маршрутов нет. Поток максимален. Делаем разрез вокруг t по насыщенным дугам и получаем его величину 15 + 8 = 23 единицы.

3.26. Поток минимальной стоимости

Рассмотрим задачу определения потока, заданной величины θ от s к t в сети $G=(S,U,\Omega,D)$, в которой каждая дуга (x_i,x_j) характеризуется пропускной способностью $c(x_i,x_j)\in\Omega$ и неотрицательной стоимостью $d(x_i,x_j)\in D$ пересылки единичного потока из x_i в x_j вдоль дуги (x_i,x_j).

Если $\theta>\varphi_{\max}$, где $\varphi_{\max}$ — величина максимального потока в сети G от s к t, то решения нет. Если же $\theta\le\varphi_{\max}$, то может быть определено несколько различных потоков величины θ от s к t. Математическая модель задачи выглядит следующим образом. Минимизировать

$$\sum_{(x_i,x_j)\in U} d(x_i,x_j)\cdot\varphi(x_i,x_j), \qquad (3.26.1)$$

где $\varphi(x_i,x_j)$ — поток по дуге (x_i,x_j) при ограничениях:

1. $0\le\varphi(x_i,x_j)\le c(x_i,x_j)\ \exists(x_i,x_j)\in U$.
2. Для начальной вершины $s\in S$ $\sum_{x_i\in S}\varphi(s,x_i)-\sum_{x_i\in S}\varphi(x_i,s)=\theta$ — уравнение истока.
3. Для конечной вершины $t\in S$ $\sum_{x_i\in S}\varphi(t,x_i)-\sum_{x_i\in S}\varphi(x_i,t)=-\theta$ — уравнение стока.
4. Для любой другой вершины $x_j\ne s,t$ $\sum_{x_i\in S}\varphi(x_j,x_i)-\sum_{x_i\in S}\varphi(x_i,x_j)=0$ — условие сохранения потока.

Если μ^* — кратчайший путь от s к t в сети $G=(S,U,D)$, $c_{\min}(\mu^*)$ — минимальная из пропускных способностей дуг, входящих в путь μ^*, и если $\theta<c_{\min}(\mu^*)$, то задача имеет тривиальное решение — весь поток θ направляется вдоль пути μ^*. Общее решение задачи о потоке минимальной стоимости строится следующим образом. Сначала находится кратчайший путь μ^* от s к t и величина $\varphi_{\max}(\mu^*)$ максимально возможного потока вдоль этого пути. Если окажется, что $\theta\le\varphi_{\max}(\mu^*)$, то задача решена. В противном случае сеть модифицируют специальным образом. Затем опять находят кратчайший путь от s к t и максимально возможный поток вдоль этого пути в модифицированной сети. Процедуры модификации сети и нахождения кратчайшего пути в ней повторяются до тех пор, пока либо нужное количество θ не будет переправлено, либо возникнет сеть, в которой нет пути от s к t, что означает отсутствие решения у исходной задачи.

Модификация сети допускается только определенного порядка. Пусть $G=(S,U,\Omega,D)$ — исходная сеть, S — множество вершин, U — множество ребер, Ω — множество весов (пропускных способностей дуг), D — набор стоимостей пересылки единичного потока из x_i в x_j вдоль дуги (x_i,x_j).

Модифицированная относительно данного потока φ сеть $\tilde G=(\tilde S,\tilde U,\tilde\Omega,\tilde D)$ строится следующим образом.

1. $\tilde S=S$, т. е. число и набор вершин в модифицированной сети не изменяется.
2. $\tilde U=U\cup V$, где V — некоторое множество фиктивных дуг. Таким образом, после модификации число дуг сети увеличивается.
3. Если $(x_j,x_i)\in S$ и $\varphi(x_j,x_i)>0$, то дуга (x_i,x_j) включается в множество V. При этом полагается $\tilde c(x_i,x_j)=\varphi(x_j,x_i)$, $\tilde d(x_i,x_j)=-d(x_j,x_i)$. Этот пункт применяется только к дугам, по которым проходит поток φ, относительно которого происходит модификация сети.
4. Для всех ненасыщенных дуг, где нет противоположного потока, в том числе и для ненасыщенных дуг с потоком, относительно которого происходит модификация сети, т. е. для $(x_i,x_j)\in S$, $\varphi(x_i,x_j)<c(x_i,x_j)$ и $\varphi(x_j,x_i)=0$ полагают $\tilde c(x_i,x_j)=c(x_i,x_j)-\varphi(x_i,x_j)$, $\tilde d(x_i,x_j)=d(x_i,x_j)$.
5. Для всех насыщенных дуг $(x_i,x_j)\in S$, $\varphi(x_i,x_j)=c(x_i,x_j)$ и $\varphi(x_j,x_i)=0$ полагают $\tilde c(x_i,x_j)=0$, $\tilde d(x_i,x_j)=\infty$.

Это довольно сложный и "длительный" алгоритм. Нахождение кратчайшего пути как в исходной, так особенно в модифицированной сети может потребовать использования алгоритма Беллмана—Мура. Кроме того, решение типичных учебных задач требует три-четыре итерации алгоритма.

- **Пример 1.** Пусть матрицами Ω и D заданы пропускные способности дуг сети и стоимости транспортировки единичного потока вдоль всех дуг. Требуется: 1) построить максимальный поток от s к t и указать

минимальный разрез, отделяющий s от t; 2) построить поток величины $\theta = [3/4\varphi_{\max}]$, имеющий минимальную стоимость, здесь $[...]$ — целая часть числа.

Построим рисунок соответствующей сети (рис. 3.70). Первое число на дугах — стоимость транспортировки единичного потока вдоль этой дуги; второе — пропускная способность дуги.

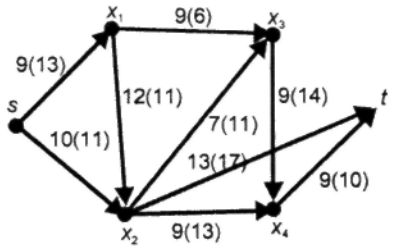


Рис. 3.70

Найдем максимальный поток от вершины s к вершине t по алгоритму Форда—Фалкерсона.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ s \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 13 & 11 & - & - & - \\ - & - & 11 & 6 & - & - \\ - & - & - & 11 & 13 & 17 \\ - & - & - & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}, \quad D = \begin{array}{c} \\ s \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 9 & 10 & - & - & - \\ - & - & 12 & 9 & - & - \\ - & - & - & 7 & 9 & 13 \\ - & - & - & - & 14 & - \\ - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Этап 1.

Путь $s \xrightarrow{11} x_2 \xrightarrow{17} t$. $\delta = \min(11, 17) = 11$. Увеличим по этому пути поток до 11 единиц, ребро (s, x_2) станет насыщенным. Второй возможный путь $s \xrightarrow{13} x_1 \xrightarrow{11} x_2 \xrightarrow{13} x_4 \xrightarrow{10} t$. $\delta = \min(13, 11, 13, 10) = 10$. Поток по этому пути равен 10 единицам. Дуга (x_4, t) станет насыщенной. Третий путь, по которому возможен ненулевой поток, — это путь $s \xrightarrow{3} x_1 \xrightarrow{1} x_2 \xrightarrow{6} t$. Здесь $\delta = \min(3, 1, 6) = 1$. По этому пути можно увеличить поток лишь на единицу, при этом дуга (x_1, x_2) станет насыщенной. Больше путей нет.

Этап 2.

Рассмотрим маршруты с противоположными ребрами. Маршрут $s \xrightarrow{2} x_1 \xrightarrow{6} x_3 \xleftarrow{11} x_2 \xrightarrow{5} t$. Поток можно увеличить на две единицы на дуге (s, x_1). Эта дуга станет насыщенной. Тогда потоки по этому маршруту будут такими: $s \xrightarrow{13(13)} x_1 \xrightarrow{6(2)} x_3 \xleftarrow{11(-2)} x_2 \xrightarrow{17(14)} t$. Больше маршрутов нет. Поток максимален. На рис. 3.71 на дугах графа стоят две цифры: первая — пропускная способность дуги, вторая — поток по дуге (насыщенные дуги выделены). Теперь можно сделать несколько разрезов, например, отделяя исток и сток. И по разрезу I, и по разрезу II поток одинаков $\varphi_{\max} = 24$.

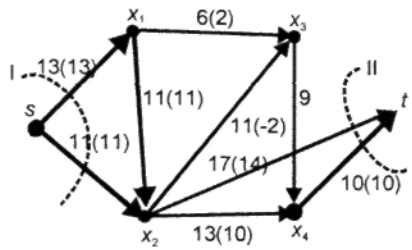


Рис. 3.71

Построим теперь поток величины $\theta = \left[\frac{3}{4}\varphi_{\max}\right] = \left[\frac{3}{4} \cdot 24\right] = 18$ единиц.

По рассмотренному алгоритму для этого надо построить кратчайший путь от s к t на графе $G = (S, U, D)$. Этот граф изображен на рис. 3.72, веса всех дуг в нем положительны, можно использовать алгоритм Дейкстры.

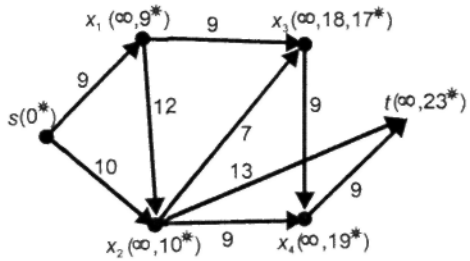


Рис. 3.72

Этап 1.

Шаг 1. $d(s) = 0^*$, $d(x_1) = d(x_2) = ... = d(t) = \infty$, $\tilde{x} = s$.

1-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{S}=\{x_1,x_2\}$, $d(x_1)=\min(\infty,0^*+9)=9$,

$d(x_2)=\min(\infty,0^*+10)=10$.

Шаг 3. $\min(9,10,\infty,\infty,\infty)=9^*=d(x_1)$. $\tilde{x}=x_1$.

Шаг 4. $\tilde{x}=t$? Нет. Переход на начало второго шага.

2-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{S}=\{x_2,x_3\}$, $d(x_2)=\min(10,9^*+12)=10$,

$d(x_3)=\min(\infty,9^*+9)=18$.

Шаг 3. $\min(10,18,\ \infty,\infty)=10^*=d(x_2)$. $\tilde{x}=x_2$. Шаг 4. $\tilde{x}=t$? Нет.

3-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{S}=\{x_3,x_4,t\}$, $d(x_3)=\min(18,10^*+7)=17$,

$d(x_4)=\min(\infty,10+9)=19$, $d(t)=\min(\infty,10+13)=23$.

Шаг 3. $\min(17,19,\ 23)=17^*=d(x_3)$. $\tilde{x}=x_3$.

Шаг 4. $\tilde{x}=t$? Нет. Переход на начало второго шага.

4-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{S}=\{x_4\}$, $d(x_4)=\min(19,17^*+14)=19$.

Шаг 3. $\min(19,23)=19^*=d(x_4)$, $\tilde{x}=x_4$.

Шаг 4. $\tilde{x}=t$? Нет. Переход на начало второго шага.

5-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{S}=\{t\}$, $d(t)=\min(23,19^*+9)=23$.

Шаг 3. $\min(23)=23^*=d(t)$, $\tilde{x}=t$.

Шаг 4. $\tilde{x}=t$? Да. Конец первого этапа.

Этап 2.

Кратчайший путь здесь очевиден, это путь $\mu_1^*=(s,x_2)-(x_2,t)$. Максимальный поток по этому пути $\varphi_{\max}=c_{\min}(\mu_1^*)=\min(11,17)=11$. Так как $\theta=18$ то $\varphi_{\max}<\theta$; требуется модификация сети.

Положим $\varphi(s,x_2)=\varphi(x_2,t)=11$ и $\varphi(x_i,x_j)=0$ для остальных дуг. Тогда по третьему пункту правил модификации сети включим обратные дуги (x_2,s) и (t,x_2). При этом $\tilde{c}(x_2,s)=11$, $\tilde{d}(x_2,s)=-10$, $\tilde{c}(t,x_2)=17$, $\tilde{d}(t,x_2)=-13$.

По четвертому пункту правил характеристики всех дуг, где нет потока, останутся без изменений, для дуг потока $\varphi=11$, т. е. только для дуги (x_2,t), изменятся характеристики $\tilde{d}(x_2,t)=13$, $\tilde{c}(x_2,t)=17-11=6$. По пятому пункту правил для насыщенной дуги (s,x_2) $\tilde{c}(s,x_2)=0$, $\tilde{d}(s,x_2)=\infty$. В результате имеем новую сеть $G=(S,U,D)$ (рис. 3.73). Необходимо найти кратчайший путь между s и t в этой сети. Так как теперь есть дуги с отрицательным весом, следует применить алгоритм Беллмана—Мура.

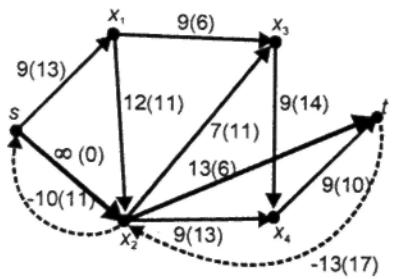


Рис. 3.73

Этап 1.

$d(s)=0$, $d(x_1)=d(x_2)=\ldots=d(t)=\infty$, $Q=\{s\}$.

1-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x}=s$, $Q=\varnothing$, $\tilde{S}=\{x_1,x_2\}$,

$d(x_1)=\min(\infty,0+9)=9$,

$9<\infty$? Да, корректировка очереди. $Q=\{x_1\}$,

$d(x_2)=\min(\infty,0+\infty)=\infty$,

$\infty<\infty$? Нет, корректировка очереди не проводится.

Шаг 3. $Q=\varnothing$? Нет.

2-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_1$, $Q = Q \setminus \{x_1\} = \varnothing$, $\tilde{S} = \{x_2, x_3\}$,

$d(x_2) = \min(\infty, 9+12) = 21$,

$21 < \infty$? Да, корректировка очереди. $Q = \{x_2\}$,

$d(x_3) = \min(\infty, 9+9) = 18$,

$18 < \infty$? Да. $Q = \{x_2, x_3\}$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

3-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_2$, $Q = \{x_3\}$, $\tilde{S} = \{s, x_3, x_4\}$,

$0 < 0$? Нет, корректировка очереди не проводится,

$d(x_3) = \min(18, 21+7) = 18$,

$18 < 18$? Нет,

$d(x_4) = \min(\infty, 21+9) = 30$,

$30 < \infty$? Да, корректировка очереди. $Q = \{x_3, x_4\}$,

$d(t) = \min(\infty, 21+13) = 34$,

$34 < \infty$? Да, корректировка очереди. $Q = \{x_3, x_4, t\}$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

4-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_3$, $Q = \{x_4, t\}$, $\tilde{S} = \{x_4\}$,

$d(x_4) = \min(30, 18+13) = 30$,

$30 < 30$? Нет, очередь не корректируется.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

5-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_4$, $Q = \{t\}$, $\tilde{S} = \{t\}$,

$d(t) = \min(34, 30+9) = 34$,

$34 < 34$? Нет, очередь не корректируется.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

6-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = t$, $Q = \varnothing$, $\tilde{S} = \varnothing$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Да. Конец первого этапа алгоритма Беллмана—Мура.

Итак, кратчайший путь найден. Это путь $\mu_2^* = (s, x_1) - (x_1, x_2) - (x_2, t)$. Его вес $d(\mu_2^*) = 9+12+13 = 34$. $\varphi_{\max} = c_{\min}(\mu_2^*) = \min(13, 11, 6) = 6$. Общий поток по двум уже рассмотренным путям $\varphi_{\text{общ}} = 11+6 = 17 < 18 = \theta$, т. е. требуется еще одна модификация сети.

Положим опять $\varphi(s, x_1) = \varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2, t) = 6$, $\varphi(s, x_2) = 11$ и $\varphi(x_i, x_j) = 0$ для остальных дуг. По третьему пункту правил включаем обратные дуги (x_1, s), (x_2, x_1) и (t, x_2), причем последняя дуга уже присутствует. Полагаем $\tilde{c}(x_1, s) = 6$, $\tilde{d}(x_1, s) = -9$, $\tilde{c}(x_2, x_1) = 6$, $\tilde{d}(x_2, x_1) = -12$, $\tilde{c}(t, x_2) = 17$, $\tilde{d}(t, x_2) = -13$. По четвертому пункту правил все ненасыщенные дуги, где нет потока, остаются без изменений, кроме дуг с потоком (x_1, s), (x_1, x_2). Здесь $\tilde{c}(s, x_1) = 13-6 = 7$, $\tilde{d}(s, x_1) = 9$, $\tilde{c}(x_1, x_2) = 11-6 = 5$, $\tilde{d}(x_1, x_2) = 12$. По пятому пункту правил для насыщенной дуги (x_2, t) $\tilde{c}(x_2, t) = 0$, $\tilde{d}(x_2, t) = \infty$. В полученной после второй модификации сети $G = (S, U, D)$ необходимо найти кратчайший путь между вершинами s и t. Так как опять имеются отрицательные веса, то снова придется применить алгоритм Беллмана—Мура (рис. 3.74).

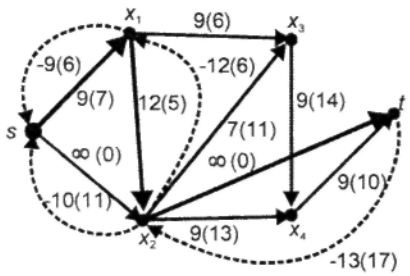


Рис. 3.74

Этап 1.

Шаг 1. $d(s) = 0$, $d(x_1) = \ldots = d(t) = \infty$. $Q = \{s\}$.

Шаг 2. $\tilde{x} = s,\ Q = \varnothing,\ \tilde{S} = \{x_1, x_2\}$,

$d(x_1) = \min(\infty, 0+9) = 9,\ 9 < \infty$? Да. $Q = \{x_1\}$,

$d(x_2) = \min(\infty, 0+\infty) = \infty$.

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$. Переход на второй шаг.

2-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_1,\ Q = \varnothing$,

$\tilde{S} = \{s, x_2, x_3\},\ d(s) = \min(0, 9-9) = 0$,

$0 < 0$?, нет корректировки очереди,

$d(x_2) = \min(\infty, 9+12) = 21,\ 21 < \infty$? Да. $Q = \{x_2\}$,

$d(x_3) = \min(\infty, 9+9) = 18,\ 18 < \infty$? Да. $Q = \{x_2, x_3\}$.

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$. Переход на второй шаг.

3-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_2,\ Q = \{x_3\},\ \tilde{S} = \{s, x_1, x_3, x_4, t\}$,

$d(s) = \min(0, 21-10) = 0$, нет корректировки очереди,

$d(x_1) = \min(9, 21-12) = 9$, нет корректировки очереди,

$d(x_3) = \min(18, 21+7) = 18$, нет корректировки очереди,

$d(x_4) = \min(\infty, 21+9) = 30,\ Q = \{x_3, x_4\}$,

$d(t) = \min(\infty, 21+\infty) = \infty$, нет корректировки очереди.

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$. Переход на второй шаг.

4-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_3,\ Q = \{x_4\},\ \tilde{S} = \{x_4\}$,

$d(x_4) = \min(30, 18+14) = 30$, нет корректировки очереди.

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$.

5-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = x_4,\ Q = \varnothing,\ \tilde{S} = \{t\}$,

$d(t) = \min(\infty, 30+9) = 39,\ Q = \{t\}$.

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$.

6-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{x} = t,\ Q = \varnothing,\ \tilde{S} = \varnothing$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$. Конец первого этапа. Критический путь найден.

$\mu_3^* = (s, x_1) - (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, t)$. Его вес $d(\mu_3^*) = 9+12+9+9 = 39$. $\varphi_{\max} = c_{\min}(\mu_3^*) = \min(7, 5, 13, 10) = 5$. Таким образом, по этому пути можно пустить поток в пять единиц. Тогда общий поток будет $\varphi_{\text{общ}} = 17+5 = 22 > \theta = 18$. Для того чтобы сформировать поток требуемой величины $\theta = 18$, необходимо по пути μ_3^* направить поток величиной всего в одну единицу.

Тогда $\varphi(s, x_1) = 7,\ \varphi(x_1, x_2) = 7,\ \varphi(x_2, x_4) = 1,\ \varphi(x_4, t) = 1$. Кроме того, два предыдущих потока дали $\varphi(s, x_2) = 11,\ \varphi(x_2, t) = 17$. Таким образом, минимальная стоимость всего потока $\theta = 18$ равна $\sum_{(x_i, x_j) \in S} d(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_i, x_j) = 9 \cdot 7 + 12 \cdot 7 + 10 \cdot 11 + 13 \cdot 17 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 496$.

3.27. Элементы сетевого планирования. Критические пути, работы, резервы

При планировании и управлении сложными комплексами работ используют их графические модели — сетевые графики. С математической точки зрения *сетевой график* — это связный орграф без петель и контуров. Основными понятиями сетевого планирования являются понятия работы и события.

Работа — это любые действия, сопровождающиеся затратами ресурсов и времени и приводящие к определенным результатам. *Событие* — результат завершения одной или нескольких работ — является предпосылкой для выполнения работ, следующих за ним. Любая работа на сети может быть определена двумя событиями, между которыми она находится. Событием может начинаться или заканчиваться несколько работ. Работы на сети изображают дугами, а события — вершинами сети.

Сетевой график обладает рядом особенностей, в частности, он имеет только одно исходное событие (исток сети) и только одно завершающее событие — окончание всех работ. Рассмотрим пример построения сети по приведенной в табл. 3.3 последовательности работ.

Таблица 3.3

Последовательность работ		
Исходная работа	**Опирается на работу**	**Продолжительность работ**
a_1	-	3
a_2	-	6
a_3	-	4
a_4	a_1	5
a_5	a_2	1
a_6	a_2	9
a_7	a_3, a_5	6
a_8	a_4, a_6, a_7	8

Работы a_1, a_2 и a_3 не имеют предшествующих, поэтому реализация проекта начинается с этих работ; они изображаются дугами, выходящими из одной вершины — события x_1. Работе a_4 предшествует работа a_1, поэтому дуга a_4 на сети изображена вслед за дугой a_1.То же самое с дугами a_5 и a_6. Далее надо изобразить дуги a_7 и a_8. Работа a_7 опирается на работы a_3 и a_5. Итоговая работа a_8 опирается на a_4, a_6 и a_7 (рис. 3.75). На рисунках сети не рекомендуется во избежание путаницы изображать одновременно выполняемые работы параллельными дугами. Однако можно вводить дополнительные события и фиктивные работы (нулевой продолжительности), которые изображаются штриховыми линиями. Если, к примеру, работа a_5 опиралась бы еще на a_1, то между событиями x_2 и x_3 пришлось бы ввести штриховую дугу.

Имея сеть работ некоторого проекта, мы можем посчитать время выполнения всего проекта и различных его частей, состоящих из разного набора работ. Для этого введем еще несколько определений. Сначала определим минимальное время, за которое можно выполнить все работы комплекса. Для этого найдем продолжительность $t(\mu_i)$ всех полных путей μ_i. В нашем случае таких путей четыре: $\mu_1: 1-2-5-6$; $\mu_2: 1-3-5-6$; $\mu_3: 1-4-5-6$; $\mu_4: 1-3-4-5-6$.

Их продолжительности $t(\mu_1)=16$, $t(\mu_2)=23$, $t(\mu_3)=18$, $t(\mu_4)=21$. Наиболее продолжителен второй путь, который называют *критическим*. Он определяет минимальное время выполнения всех работ комплекса. Минимальное время называют *критическим сроком* и обозначают $t_{кр}$. Итак, в рассматриваемом примере $t_{кр} = 23$.

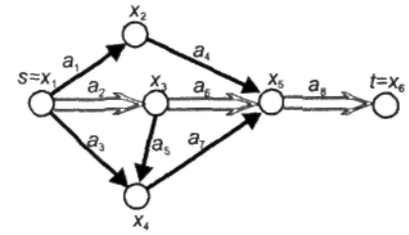


Рис. 3.75

Все работы и события, лежащие на критическом пути, называют *критическими*, все остальные работы и события — *некритическими*. Задержка любой критической работы вызывает задержку выполнения всего комплекса. Следовательно, чтобы уменьшить время выполнения комплекса работ, надо сократить сроки критических работ. Некритические работы допускают некоторое запаздывание их выполнения без нарушения критического срока. Это запаздывание измеряется резервом времени событий и работ.

Свершением события называется момент, к которому заканчиваются все входящие в него работы и может быть начата любая выходящая работа. Некоторые события можно совершать в разные моменты, т. е. варьировать свершение этих событий. Например, событие x_2 может свершиться через три дня (по окончании работы a_1), но может наступить и позже на срок до семи дней, поскольку на пути μ_1, где лежит это событие, есть резерв времени $t_{кр} - t(\mu_1) = 23 - 16 = 7$ дней. Поэтому для событий различают ранний и поздний сроки свершения.

Ранним сроком $t_р(x_j)$ свершения события x_j называется самый ранний момент времени, к которому завершатся все работы, предшествующие этому событию. Ранние сроки для всех событий могут быть рассчитаны по формуле

$$t_р(x_j) = \max_{(x_i, x_j) \in U_j^+} \left(t_р(x_i) + t(x_i, x_j)\right), \qquad (3.27.1)$$

где U_j^+ — множество работ, входящих в x_j событие; $t_р(x_i)$ — ранний срок свершения начального события работы (x_i, x_j); $t(x_i, x_j)$ — продолжительность работы (x_i, x_j).

Поздним сроком $t_п(x_i)$ свершения события x_i называется самый поздний момент времени, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием.

В нашем случае $t_п(x_6)=23$. Чтобы не нарушался критический срок, событие x_5 должно произойти, в крайнем случае, на восемь дней раньше, поэтому $t_п(x_5)=23-8=15$. Аналогично, $t_п(x_2)=15-5=10$. Таким образом, поздние сроки событий рассчитываются по формуле

$$t_п(x_i)=\min_{(x_i,x_j)\in U_i^-}\left(t_п(x_j)-t(x_i,x_j)\right), \qquad (3.27.2)$$

где U_i^- — множество работ, выходящих из x_i события, $t_п(x_j)$ — поздний срок свершения конечного события работы (x_i,x_j).

Разности между поздним и ранним сроками свершения события x_i составляет *резерв времени* $R(x_i)$ этого события:

$$R(x_i)=t_п(x_i)-t_р(x_i). \qquad (3.27.3)$$

Резерв показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события x_i без изменения срока наступления итогового события t. У критических событий ранние и поздние сроки совершения совпадают, ибо резерв времени у них равен нулю.

Зная сроки свершения событий, можно найти ранние и поздние сроки начала и окончания работы (x_i,x_j). Очевидно, что

$$\begin{cases} t_{р.н}(x_i,x_j)=t_р(x_i), & t_{р.о}(x_i,x_j)=t_р(x_i)+t(x_i,x_j), \\ t_{п.о}(x_i,x_j)=t_п(x_j), & t_{п.н}(x_i,x_j)=t_п(x_j)-t(x_i,x_j). \end{cases} \qquad (3.27.4)$$

Для работ определяют два резерва времени. *Полный* резерв времени работы — это максимальное количество времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, не нарушая критический срок,

$$R_п(x_i,x_j)=t_п(x_j)-t_р(x_i)-t(x_i,x_j). \qquad (3.27.5)$$

Формулу (3.27.5) можно проиллюстрировать рис. 3.76.

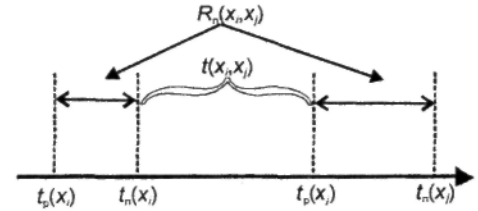


Рис. 3.76

Отдельные работы, помимо полного резерва, имеют свободный резерв времени, составляющий часть полного резерва, остающуюся после исключения резерва времени $R(x_j)$ конечного события x_j данной работы,

$$R_с(x_i,x_j)=t_р(x_j)-t_р(x_i)-t(x_i,x_j). \qquad (3.27.6)$$

Свободный резерв времени — это запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что она начнется в свой ранний срок и при этом ранние сроки начала последующих работ не изменятся. Понятно, что все резервы критических работ равны нулю.

Рассчитаем все резервы времени для событий и работ исходного примера. Все расчеты проводят в четыре этапа: 1) вычисляют $t_р(x_i)$; 2) $t_п(x_i)$; 3) $R(x_i)$; 4) критический путь и резервы времени работ.

Этап 1.

При вычислении $t_р(x_i)$ перемещаются по сети от события $s=x_1$ к событию t в порядке возрастания номеров. А именно $t_р(x_1)=0$. Для события x_2 по формуле (3.27.1) $t_р(x_2)=t_р(x_1)+t(x_1,x_2)=0+3=3$. Аналогично, $t_р(x_3)=t_р(x_1)+$ $+t(x_1,x_3)=0+6=6$. Для вершин x_4 и x_5 формулу (3.27.1) необходимо применять в полном объеме, т. е.

$$t_р(x_4)=\max_{\substack{(x_1,x_4),\\(x_3,x_4)}}\left(t_р(x_1)+t(x_1,x_4),\ t_р(x_3)+t(x_3,x_4)\right)=\max(0+4,6+1)=7;$$

$$t_р(x_5)=\max_{\substack{(x_2,x_5),\\(x_3,x_5),\\(x_4,x_5)}}\left(t_р(x_2)+t(x_2,x_5),\ t_р(x_3)+t(x_3,x_5),\ t_р(x_4)+t(x_4,x_5)\right)=$$

$=\max(3+5,6+9,7+6)=15$. Наконец, $t_р(x_6)=t_р(x_5)+t(x_5,x_6)=$ $=15+8=23$. Получили критический срок. Итак, $t_{кр}=t_р(x_6)=23$.

Этап 2.

При вычислении поздних сроков свершения событий перемещаются по сети от t к s в порядке убывания номеров. Так как $t_п(x_6)=t_р(x_6)$, то исходное значение $t_п$ известно. Далее используем формулу (3.27.2). Например, $t_п(x_5)=t_п(x_6)-t(x_5,x_6)=23-8=15$. Аналогично, $t_п(x_4)=t_п(x_5)-t(x_4,x_5)=15-6=9$, $t_п(x_2)=t_п(x_5)-t(x_2,x_5)=15-5=10$. Из события x_3 выходят две работы a_5 и a_6, поэтому $t_п(x_3)=\min\limits_{\substack{(x_3,x_5),\\(x_3,x_4)}}(t_п(x_5)-t(x_3,x_5),\ t_п(x_4)-t(x_3,x_4))=\min(15-9,9-1)=6$.

Наконец, из события x_1 выходят сразу три работы a_1, a_2 и a_3. Поэтому здесь $t_п(x_1)=\min\limits_{\substack{(x_1,x_2),\\(x_1,x_3),\\(x_1,x_4)}}(t_п(x_2)-t(x_1,x_2),t_п(x_3)-t(x_1,x_3),t_п(x_4)-t(x_1,x_4))=$

$=\min(10-3,6-6,9-4)=0$.

Этап 3.

Для вычисления резервов времени событий достаточно вычесть числа, записанные в правых и левых секторах кружков, друг из друга (рис. 3.77).

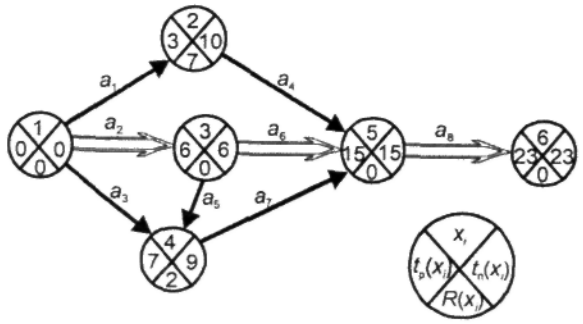


Рис. 3.77

Этап 4.

У критических событий резерв времени равен нулю. В нашем примере критическими являются события x_1, x_3, x_5 и x_6. Они и определяют критические работы и критический путь 1-3-5-6 (рис. 3.77).

Резервы времен работ сети вычисляют по формулам (3.27.4), (3.27.5) и (3.27.6). Например, $t_{р.о}(x_1,x_2)=t_р(x_1)+t(x_1,x_2)=0+3=3$,

$t_{р.н}(x_1,x_2)=t_р(x_1)=0$, $t_{п.о}(x_1,x_2)=t_п(x_2)=10$, $t_{п.н}(x_1,x_2)=t_п(x_2)-t(x_1,x_2)=$ $=10-3=7$, $R_п(x_1,x_2)=t_п(x_2)-t_р(x_1)-t(x_1,x_2)=10-0-3=7$,

$R_с(x_1,x_2)=t_р(x_2)-t_р(x_1)-t(x_1,x_2)=3-0-3=3$.

В заключение заметим, что критических путей на сети может быть несколько. Они могут включать в себя и фиктивные работы.

3.28. Линейные графики

Наряду с сетевым графиком при анализе и оптимизации комплекса работ применяется и линейный график. Построим его для нашего примера. На дугах исходного линейного графика проставлены интенсивности потребления ресурса. Найдем по этому линейному графику критический путь, критический срок, критические работы и резервы времени некритических работ. На рис. 3.78 вверху изображен исходный сетевой график, для того чтобы яснее были видны последовательности работ. Ниже — линейный график. Он имеет две шкалы: шкалу времени и шкалу потребления ресурса. Проанализируем линейный график. Наибольшей отметки времени на нем $t=23$ соответствует работа (5, 6), значение $t=23$ и является критическим сроком. Ясно, что будучи заключительной работой комплекса, работа (5, 6) и есть критическая. Непосредственно ей предшествует работа (3, 5), а этой работе — (1, 3); обе эти работы также являются критическими. Все остальные работы — некритические. Критические работы на линейном графике выделены жирной чертой.

По линейному графику можно легко найти резервы времени $R_п(i,j)$ некритических работ. Например, работу (4, 5) в случае необходимости можно отсрочить или увеличить время ее выполнения на два дня. То же самое касается и работы (1, 4). Ее можно сдвинуть на три дня. Таким образом, $R_п(4,5)=2$, $R_п(1,4)=5$. Определяя $R_п(1,4)$, мы учли возможность сдвига работы (4, 5). Если же оперировать только с работой (1, 4) и не затрагивать последующие, то найдется свободный резерв времени данной работы. У работы (1, 4) свободный резерв три дня, т. е. $R_с(1,4)=3$.

Аналогично из линейного графика получим $R_п(2,5)=7$, $R_п(1,2)=7$ $R_с(2,5)=7$, $R_с(1,2)=0$. Для построения шкалы потребления ресурса в ходе работ спроектируем на ось $0t$ начальные и конечные точки работ. В полученных промежутках нужно просуммировать интенсивности всех работ, расположенных над этими промежутками. Например, для $t\in[6,7]$ интенсивность равна 50 + 50 + 20 = 120 единиц.

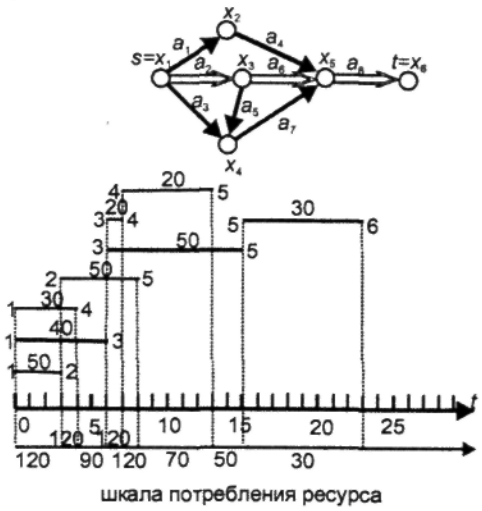


Рис. 3.78

Одна из самых распространенных оптимизационных задач сетевого планирования — задача о сохранении срока выполнения комплекса работ при ограниченных ресурсах. Она возникает в случаях, когда для реализации комплекса работ в плановый срок имеющихся ресурсов недостаточно.

Когда работ мало (одна, две), ответить на вопрос об отсрочке работ, об их очередности и т. п. можно с точки зрения здравого смысла. Если же работ много, то придется упорядочить эти работы и следить, какая из них вызывает превышение ресурса. Пусть в условиях разобранного ранее примера требуется установить время начала и окончания работ так, чтобы завершить комплекс в возможно меньшее время при условии, что расход ресурса в любой момент не должен превышать 100 единиц.

Шаг 1.

Рассмотрим промежуток $t \in [0, 6]$. Здесь расположено четыре работы: (1,2), (1, 3), (1, 4) и (2,5). Для выявления работ, подлежащих отсрочке, прежде всего упорядочим их. Выпишем полные резервы времени: $R_п(1, 2) = 7$, $R_п(1, 4) = 5$, $R_п(1, 3) = 0$, $R_п(2, 5) = 7$. В порядке возрастания полного резерва времени присвоим номера работам (1, 3) — № 1, (1, 4) — № 2, (1, 2) — № 3, (2, 5) — № 4. В отведенный ресурс укладываются только две работы: № 1 и № 2. Поэтому работу № 3, т. е. работу (1, 2), а вслед за ней и работу (2, 5) сдвигаем до момента $t = 6$; ресурс времени это позволяет, критический срок от этого не увеличится. Положение работ после первого шага показано на рис. 3.79.

Рис. 3.79

Шаг 2.

Рассмотрим отрезок $t \in [6, 7]$. Здесь $R_п(1, 2) = 1$, $R_п(3, 4) = 2$, $R_п(4, 5) = 2$, $R_п(3, 5) = 0$. Номера работ по возрастанию полного резерва времени: (3, 5) — № 1, (1, 2) — № 2, (3, 4) — № 3, (4, 5) — № 4. Предел ресурса полностью выбирают первая и вторая работы. Таким образом, следует сдвинуть работу (3,4), а вместе с ней и работу (4, 5) на один день вправо. Положение работ комплекса после второго шага показано на рис. 3.80.

Рис. 3.80

Шаг 3.

$t \in [7, 8]$. Полные резервы времени работ на этом отрезке равны $R_п(1, 2) = 1$, $R_п(3, 5) = 0$, $R_п(3, 4) = 1$. Работа (1, 2) уже длится, следовательно, сдвигать надо работу (3, 4) и следующую за ней работу (4, 5).

Шаг 4.

$t \in [8, 9]$. Работы (1, 2) и (3, 5) уже длятся, у работы (3, 4) полный резерв времени равен нулю. Тем не менее, именно эту работу необходимо сдвигать

на один день вправо. Вместе с ней сдвинутся работы (4, 5) и (5, 6), тем самым критический срок будет увеличен на один день. Положение работ комплекса после четвертого шага изображено на рис. 3.81.

Рис. 3.81

Шаг 5.

$t \in [9,10]$. Полные резервы работ на этом отрезке времени таковы: $R_п(2,5)=2$, $R_п(3,5)=0$, $R_п(3,4)=0$. Сдвигаем на два дня вправо работу (2, 5).

Шаг 6.

$t \in [11,15]$. Работы (3, 5) и (4, 5) уже длятся, необходимо сдвигать на четыре дня вправо работу (2, 5). При этом на четыре дня увеличится критический срок. Теперь ресурс нигде не превышен, планирование работ комплекса закончено. Итоговое положение работ изображено на рис. 3.82. $t_{кр} = 28$ дней.

Рис. 3.82

По последнему линейному графику составлена следующая таблица (табл. 3.4) со сроками начала $t_н$ и окончания $t_о$ работ комплекса.

Таблица 3.4

Сроки	Работы							
	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 6)
$t_н$	7	0	0	15	6	6	10	20
$t_о$	10	6	4	20	7	15	15	28

Рассмотренный метод эвристический, он не обеспечивает всегда точную минимизацию времени выполнения работ, но дает хорошее приближение к этому. Его основные этапы таковы:

1. Анализ шкалы потребления ресурса и выделение отрезков, где потребление превышает установленный предел.
2. Определение на первом временном интервале, где есть превышение ресурса, работ, подлежащих отсрочке. Для этого все работы упорядочиваются по возрастанию полных резервов времени. Первые номера отдают работам, начатым ранее анализируемого промежутка.
3. Последовательное (по возрастанию номеров) суммирование интенсивностей потребления ресурса. Как только суммарная интенсивность превысит установленный предел, слагаемое, вызвавшее превышение, отбрасывают, а соответствующую ему работу назначают к отсрочке и т. д. до полного перебора всех работ на данном промежутке.
4. Преобразование линейного графика: сдвигают назначенные к отсрочке работы и работы, следующие за ними. Строят новую шкалу потребления ресурса.
5. Если на преобразованной шкале вновь имеются промежутки, где суммарная потребность в ресурсе превышает предел, то алгоритм повторяют, начиная с п. 2 до тех пор, пока не останется промежутков, в которых наблюдается превышение предела ресурса.

После завершения процесса оптимизации получают линейный график, по которому можно выделить критический путь. Он, как правило, отличается от критического пути исходного графика составляющими его работами. Изменится (увеличится) и продолжительность нового критического пути, т. е. критический срок. Это неизбежное следствие ограничения ресурса, используемого при производстве работ комплекса.

В нашем примере работы, входящие в новый критический путь: (1, 3)-(3, 5)-(2, 5)-(5, 6), а его продолжительность увеличилась на пять дней. На практике обычно возникают еще более сложные задачи с дополнительными ограничениями на состав и сроки проведения работ. Для их решения разработаны более сложные алгоритмы сетевого планирования и составления расписаний.

3.29. Практическое занятие 10. Потоки в сетях. Сетевые и линейные графики

3.29.1. По данной матрице пропускных способностей дуг Ω графа G найти максимальный поток от вершины $s = x_1$ до вершины $t = x_7$ и указать минимальный разрез, отделяющий s от t.

1)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 18 & 16 & - & - & 9 & - \\ x_2 & - & - & 8 & 11 & 7 & - & 13 \\ x_3 & - & - & - & - & 13 & - & 19 \\ x_4 & - & - & 10 & - & - & 15 & - \\ x_5 & - & - & - & 17 & - & 28 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 14 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 9 & - & 11 & - & 17 & - \\ x_2 & - & - & 6 & - & 8 & - & 12 \\ x_3 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ x_4 & - & 5 & - & - & - & 5 & 4 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 7 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 9 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 5 & - & - & 8 & - \\ x_2 & - & - & - & 3 & 3 & - & 4 \\ x_3 & - & - & - & 4 & 5 & 10 & - \\ x_4 & - & - & - & - & 4 & - & 9 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 5 & 6 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 5 & - & 15 & 9 & - \\ x_2 & - & - & - & - & 6 & - & 7 \\ x_3 & - & 3 & - & 4 & - & 7 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & 8 & 3 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 9 & 18 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 5 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & - & - & 9 & - & 26 \\ x_2 & - & - & - & - & - & - & - \\ x_3 & - & 7 & - & - & 11 & - & - \\ x_4 & - & - & 8 & - & - & 12 & 11 \\ x_5 & - & - & - & 13 & - & 10 & - \\ x_6 & - & - & 14 & - & - & - & 8 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & - & 8 & - & - & - \\ x_2 & - & - & 8 & 12 & 10 & - & 6 \\ x_3 & - & - & - & - & - & 5 & 11 \\ x_4 & - & - & - & - & 4 & 12 & - \\ x_5 & - & - & 5 & - & - & - & 9 \\ x_6 & - & - & - & - & 6 & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 12 & 14 & - & 11 & - & 7 \\ x_2 & - & - & 17 & 17 & - & 20 & - \\ x_3 & - & - & - & 10 & 12 & - & 16 \\ x_4 & - & - & - & - & 9 & - & 11 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 12 & - \\ x_6 & - & - & 15 & - & - & - & 9 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 10 & 18 & 8 & - & - \\ x_2 & - & - & 6 & - & 11 & 15 & 19 \\ x_3 & - & - & - & - & 12 & - & 13 \\ x_4 & - & - & - & - & - & - & 5 \\ x_5 & - & - & - & 16 & - & 7 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 9 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 7 & 9 & - & - & 8 & - \\ x_2 & - & - & 11 & 14 & 10 & - & 6 \\ x_3 & - & - & - & - & 9 & 11 & 19 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 12 & - \\ x_5 & - & - & - & 8 & - & 14 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 10 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 8 & 18 & - & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 9 & 17 & - \\ x_3 & - & 6 & - & - & 10 & - & 24 \\ x_4 & - & - & - & - & 15 & - & 6 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 8 & 12 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 12 & 9 & - & - & 11 & - \\ x_2 & - & - & 12 & 7 & - & - & - \\ x_3 & - & - & - & 12 & 10 & - & 18 \\ x_4 & - & - & - & - & 12 & 15 & 6 \\ x_5 & - & 8 & - & - & - & 12 & 15 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 4 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 11 & 20 & 9 & - & - \\ x_2 & - & - & 7 & - & 10 & - & - \\ x_3 & - & - & - & - & - & 9 & 10 \\ x_4 & - & 15 & - & - & 13 & - & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & 6 & 14 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 8 & - & - & 11 & - \\ x_2 & - & - & 10 & 14 & - & 19 & - \\ x_3 & - & - & - & 10 & 8 & - & 7 \\ x_4 & - & - & - & - & 4 & - & 12 \\ x_5 & - & 8 & - & - & - & 7 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 13 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 8 & 15 & - & 14 & - \\ x_2 & - & - & - & - & 7 & 13 & 19 \\ x_3 & - & 6 & - & - & 9 & - & 15 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 8 & 11 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 5 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 15 & 17 & - & - & 11 & - \\ x_2 & - & - & 20 & 20 & - & 33 & - \\ x_3 & - & - & - & 13 & 15 & - & 16 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 12 & 19 \\ x_5 & - & 17 & - & 12 & - & - & 8 \\ x_6 & - & - & - & - & 2 & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

16)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & - & 11 & 7 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 6 & - & - \\ x_3 & - & 6 & - & - & - & 9 & 11 \\ x_4 & - & - & 4 & - & - & - & 4 \\ x_5 & - & - & 8 & - & - & 5 & - \\ x_6 & - & - & - & 7 & - & - & 6 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

17)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 9 & 11 & - & - & 18 & - \\ x_2 & - & - & 8 & 10 & - & - & 13 \\ x_3 & - & - & - & 11 & - & 20 & - \\ x_4 & - & - & - & - & 8 & - & 11 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 14 & 6 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 4 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

18)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 17 & - & - & 11 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 13 & - & - \\ x_3 & - & - & - & - & - & 9 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & - & 11 \\ x_5 & - & - & 8 & 12 & - & - & 18 \\ x_6 & - & - & - & 10 & - & - & - \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

19)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 15 & - & - & 8 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & - & 15 & - \\ x_3 & - & 6 & - & - & - & - & 18 \\ x_4 & - & - & - & - & - & - & 4 \\ x_5 & - & 7 & - & 13 & - & - & - \\ x_6 & - & - & 10 & - & - & - & 8 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

20)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 12 & - & - & 16 & - \\ x_2 & - & - & 9 & 11 & 13 & - & - \\ x_3 & - & - & - & - & 12 & - & 17 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 14 & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & 16 & 18 \\ x_6 & - & - & 11 & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

21)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 18 & - & 15 & - & - & - \\ x_2 & - & - & 11 & - & 14 & - & 16 \\ x_3 & - & - & - & - & - & 14 & - \\ x_4 & - & - & 14 & - & 19 & - & 7 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 26 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 19 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

22)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 13 & - & - & 21 & - & - \\ x_2 & - & - & - & 10 & 7 & - & - \\ x_3 & - & - & - & 11 & 12 & - & 14 \\ x_4 & - & - & - & - & 10 & - & 15 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 4 & 8 \\ x_6 & - & 12 & 11 & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

23)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 12 & - & 10 & - & 11 & - \\ x_2 & - & - & 9 & - & 13 & - & 11 \\ x_3 & - & - & - & 7 & - & 8 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & 6 & 13 \\ x_5 & - & - & 8 & - & - & - & 9 \\ x_6 & - & - & - & - & 15 & - & 6 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

24)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 20 & 22 & - & - & - & - \\ x_2 & - & - & 17 & 15 & - & 21 & 20 \\ x_3 & - & - & - & 9 & 11 & - & - \\ x_4 & - & - & - & - & 9 & - & 16 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 8 & 13 \\ x_6 & - & - & 17 & - & - & - & 10 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

25)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 9 & 11 & - & 15 & - \\ x_2 & - & - & 14 & 17 & 13 & - & 8 \\ x_3 & - & - & - & 14 & 16 & - & 18 \\ x_4 & - & - & - & - & 8 & - & 15 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 17 & - \\ x_6 & - & 20 & - & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

26)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 8 & - & 11 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 7 & - & - \\ x_3 & - & - & - & - & - & 9 & - \\ x_4 & - & - & 7 & - & - & - & 4 \\ x_5 & - & - & 6 & 10 & - & - & 6 \\ x_6 & - & - & - & 4 & - & - & 5 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

27)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 15 & 12 & - & 11 & - \\ x_2 & - & - & - & 17 & 12 & - & 14 \\ x_3 & - & - & - & - & 17 & 15 & 21 \\ x_4 & - & - & - & - & 16 & 25 & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & 13 & - \\ x_6 & - & 13 & - & - & - & - & 10 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

28)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 16 & - & 9 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 6 & - & - \\ x_3 & - & 3 & - & - & - & 6 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & 5 & 3 \\ x_5 & - & - & - & 17 & - & - & 18 \\ x_6 & - & 11 & - & - & - & - & 4 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

29)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & - & 13 & 15 & - & - \\ x_2 & - & - & 11 & 13 & - & 18 & - \\ x_3 & - & - & - & - & 15 & - & 18 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 9 & 13 \\ x_5 & - & 11 & - & - & - & 15 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 10 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

30)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 11 & - & - & 25 & - \\ x_2 & - & - & - & - & 14 & - & 29 \\ x_3 & - & - & - & 3 & - & 16 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & - & 6 \\ x_5 & - & - & - & 17 & - & - & - \\ x_6 & - & - & - & - & 8 & - & 4 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

3.29.2. По матрице пропускных способностей дуг, взятой из задачи 3.29.1, и матрице стоимости транспортировки единичного потока D вдоль дуг сети, взятой из данной задачи, построить поток величины $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]$, имеющий минимальную стоимость. Здесь $[...]$ — целая часть числа.

1)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 4 & - & - & 5 & - \\ x_2 & - & - & 2 & 6 & 4 & - & 2 \\ x_3 & - & - & - & - & 5 & - & 8 \\ x_4 & - & - & 3 & - & - & 6 & - \\ x_5 & - & - & - & 7 & - & 9 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 4 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 4 & - & 6 & - & 12 & - \\ x_2 & - & - & 3 & - & 3 & - & 7 \\ x_3 & - & - & - & - & - & - & 2 \\ x_4 & - & 3 & - & - & - & 3 & 1 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 2 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 5 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 7 & 2 & - & - & 5 & - \\ x_2 & - & - & - & 1 & 2 & - & 3 \\ x_3 & - & - & - & 3 & 3 & 7 & - \\ x_4 & - & - & - & - & 1 & - & 6 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 3 & 4 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 4 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 7 & - & 17 & 11 & - \\ x_2 & - & - & - & - & 8 & - & 9 \\ x_3 & - & 5 & - & 6 & - & 9 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & 10 & 5 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 11 & 20 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & - & - & 4 & - & 19 \\ x_2 & - & - & - & - & - & - & - \\ x_3 & - & 2 & - & - & 6 & - & - \\ x_4 & - & - & 3 & - & - & 7 & 6 \\ x_5 & - & - & - & 8 & - & 5 & - \\ x_6 & - & - & 9 & - & - & - & 3 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & - & 7 & - & - & - \\ x_2 & - & - & 10 & 6 & 7 & - & 12 \\ x_3 & - & - & - & - & - & 11 & 5 \\ x_4 & - & - & - & - & 15 & 4 & - \\ x_5 & - & - & 11 & - & - & - & 6 \\ x_6 & - & - & - & - & 10 & - & 9 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 9 & - & 6 & - & 6 \\ x_2 & - & - & 10 & 10 & - & 15 & - \\ x_3 & - & - & - & 5 & 4 & - & 8 \\ x_4 & - & - & - & - & 4 & - & 6 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 7 & - \\ x_6 & - & - & 7 & - & - & - & 3 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 5 & 9 & 4 & - & - \\ x_2 & - & - & 12 & - & 5 & 7 & 10 \\ x_3 & - & - & - & - & 6 & - & 7 \\ x_4 & - & - & - & - & - & - & 10 \\ x_5 & - & - & - & 8 & - & 14 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 18 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 7 & - & - & 6 & - \\ x_2 & - & - & 9 & 12 & 8 & - & 4 \\ x_3 & - & - & - & - & 7 & 9 & 15 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 10 & - \\ x_5 & - & - & - & 6 & - & 10 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 4 & 9 & - & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 11 & 13 & - \\ x_3 & - & 8 & - & - & 5 & - & 6 \\ x_4 & - & - & - & - & 10 & - & 3 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 5 & 8 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 5 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 4 & 3 & - & - & 3 & - \\ x_2 & - & - & 4 & 2 & - & - & - \\ x_3 & - & - & - & 4 & 3 & - & 6 \\ x_4 & - & - & - & - & 4 & 5 & 2 \\ x_5 & - & 2 & - & - & - & 4 & 5 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 1 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 15 & 24 & 13 & - & - \\ x_2 & - & - & 11 & - & 14 & - & - \\ x_3 & - & - & - & - & - & 13 & 14 \\ x_4 & - & 19 & - & - & 17 & - & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & 10 & 18 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 11 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 4 & - & - & 6 & - \\ x_2 & - & - & 5 & 7 & - & 9 & - \\ x_3 & - & - & - & 5 & 4 & - & 3 \\ x_4 & - & - & - & - & 2 & - & 6 \\ x_5 & - & 4 & - & - & - & 3 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 5 & 12 & - & 11 & - \\ x_2 & - & - & - & - & 4 & 10 & 15 \\ x_3 & - & 2 & - & - & 5 & - & 10 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 4 & 7 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 2 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 3 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 6 & - & - & 4 & - \\ x_2 & - & - & 7 & 7 & - & 11 & - \\ x_3 & - & - & - & 4 & 5 & - & 5 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 4 & 5 \\ x_5 & - & 6 & - & 4 & - & - & 3 \\ x_6 & - & - & - & - & 1 & - & 2 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

16)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 2 & - & 6 & 3 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 3 & - & - \\ x_3 & - & 3 & - & - & - & 4 & 5 \\ x_4 & - & - & 2 & - & - & - & 2 \\ x_5 & - & - & 4 & - & - & 2 & - \\ x_6 & - & - & - & 3 & - & - & 4 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

17)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 13 & 9 & - & - & 7 & - \\ x_2 & - & - & 15 & 10 & - & - & 6 \\ x_3 & - & - & - & 10 & - & 5 & - \\ x_4 & - & - & - & - & 15 & - & 10 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 6 & 18 \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 20 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

18)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 4 & - & - & 7 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 9 & - & - \\ x_3 & - & - & - & - & - & 15 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ x_5 & - & - & 16 & 8 & - & - & 5 \\ x_6 & - & - & - & 7 & - & - & - \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

19)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & - & - & 13 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & - & 5 & - \\ x_3 & - & 18 & - & - & - & - & 4 \\ x_4 & - & - & - & - & - & - & 25 \\ x_5 & - & 15 & - & 7 & - & - & - \\ x_6 & - & - & 10 & - & - & - & 13 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

20)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 20 & 24 & - & - & 32 & - \\ x_2 & - & - & 18 & 22 & 26 & - & - \\ x_3 & - & - & - & - & 24 & - & 34 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 28 & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & 32 & 36 \\ x_6 & - & - & 22 & - & - & - & 14 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

21)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 36 & - & 30 & - & - & - \\ x_2 & - & - & 22 & - & 28 & - & 32 \\ x_3 & - & - & - & - & - & 28 & - \\ x_4 & - & - & 28 & - & 38 & - & 14 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 52 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 38 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

22)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & - & - & 8 & - & - \\ x_2 & - & - & - & 10 & 15 & - & - \\ x_3 & - & - & - & 9 & 8 & - & 6 \\ x_4 & - & - & - & - & 10 & - & 5 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 20 & 12 \\ x_6 & - & 8 & 9 & - & - & - & 13 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

23)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & - & 5 & - & 6 & - \\ x_2 & - & - & 4 & - & 6 & - & 5 \\ x_3 & - & - & - & 3 & - & 4 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & 3 & 7 \\ x_5 & - & - & 4 & - & - & - & 5 \\ x_6 & - & - & - & - & 8 & - & 3 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

24)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 7 & 8 & - & - & - & - \\ x_2 & - & - & 6 & 5 & - & 7 & 7 \\ x_3 & - & - & - & 3 & 4 & - & - \\ x_4 & - & - & - & - & 3 & - & 5 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 3 & 4 \\ x_6 & - & - & 6 & - & - & - & 3 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

25)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 12 & 9 & - & 7 & - \\ x_2 & - & - & 8 & 5 & 9 & - & 13 \\ x_3 & - & - & - & 6 & 5 & - & 5 \\ x_4 & - & - & - & - & 13 & - & 7 \\ x_5 & - & - & - & - & - & 4 & - \\ x_6 & - & 3 & - & - & - & - & 15 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

26)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 16 & - & 22 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 14 & - & - \\ x_3 & - & - & - & - & - & 18 & - \\ x_4 & - & - & 14 & - & - & - & 8 \\ x_5 & - & - & 12 & 20 & - & - & 12 \\ x_6 & - & - & - & 8 & - & - & 10 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

27)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 3 & 4 & - & 3 & - \\ x_2 & - & - & - & 6 & 4 & - & 5 \\ x_3 & - & - & - & - & 6 & 5 & 7 \\ x_4 & - & - & - & - & 5 & 8 & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & 4 & - \\ x_6 & - & 4 & - & - & - & - & 3 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

28)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & - & 8 & - & 4 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 3 & - & - \\ x_3 & - & 1 & - & - & - & 3 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & 2 & 1 \\ x_5 & - & - & - & 6 & - & - & 7 \\ x_6 & - & 4 & - & - & - & - & 2 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

29)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & - & 7 & 5 & - & - \\ x_2 & - & - & 9 & 7 & - & 4 & - \\ x_3 & - & - & - & - & 5 & - & 4 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 14 & 7 \\ x_5 & - & 9 & - & - & - & 5 & - \\ x_6 & - & - & - & - & - & - & 10 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

30)
$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 10 & - & - & 7 & - \\ x_2 & - & - & - & - & 8 & - & 11 \\ x_3 & - & - & - & 6 & - & 12 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & - & 9 \\ x_5 & - & - & - & 5 & - & - & - \\ x_6 & - & - & - & - & 12 & - & 20 \\ x_7 & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

3.29.3. По приведенному перечню работ и их взаимной последовательности построить сетевой график, определить критический срок, ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, ранние и поздние сроки начала и окончания всех работ, а также полные и свободные резервы времени всех работ.

1)

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
I	**II**	**III**
a_1	-	5
a_2	-	8
a_3	-	11
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_2	12
a_6	a_1, a_2, a_3	18
a_7	a_4, a_5, a_6	7

2)

I	**II**	**III**
a_1	-	9
a_2	-	5
a_3	a_1	11
a_4	a_1, a_2	7
a_5	a_1, a_2	4
a_6	a_3, a_4	13
a_7	a_1, a_5	15

3)

I	**II**	**III**
a_1	-	7
a_2	-	11
a_3	-	5
a_4	a_1	10
a_5	a_1, a_2, a_3	4
a_6	a_3	13
a_7	a_3, a_4, a_5	12
a_8	a_4	8

4)

I	II	III
a_1	-	3
a_2	-	2
a_3	-	4
a_4	a_1	3
a_5	a_1	5
a_6	a_2, a_3	9
a_7	a_3	6
a_8	a_2, a_3, a_4	8
a_9	a_3, a_5, a_6	4
a_{10}	a_7	6

5)

I	II	III
a_1	-	6
a_2	-	9
a_3	-	8
a_4	a_1	5
a_5	a_3	3
a_6	a_3	7
a_7	a_3, a_4	9
a_8	a_1, a_2, a_5, a_6	11
a_9	a_6	10

6)

I	II	III
a_1	-	11
a_2	-	9
a_3	-	7
a_4	a_2	5
a_5	a_1	6
a_6	a_3, a_4	8
a_7	a_2, a_3, a_4, a_5	10
a_8	a_6	13
a_9	a_1, a_7, a_8	15

7)

I	II	III
a_1	-	3
a_2	-	6
a_3	-	4
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_2, a_3	4
a_6	a_3	7
a_7	a_3, a_4, a_5	5

8)

I	II	III
a_1	-	10
a_2	-	12
a_3	-	9
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_3	7
a_6	a_2, a_4	9
a_7	a_1, a_2, a_4, a_5	5

9)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	6
a_3	a_1	9
a_4	a_1, a_2	11
a_5	a_1, a_2	4
a_6	a_3	6
a_7	a_3	10
a_8	a_1, a_4, a_6	8
a_9	a_1, a_4, a_5, a_6	12

10)

I	II	III
a_1	-	10
a_2	-	9
a_3	-	12
a_4	a_1	7
a_5	a_1, a_2	8
a_6	a_1, a_2, a_3	13
a_7	a_6	15
a_8	a_4, a_5, a_7	11
a_9	a_6	9

11)

I	II	III
a_1	-	8
a_2	a_1	4
a_3	-	10
a_4	-	13
a_5	a_1, a_3	3
a_6	a_2, a_4	6
a_7	a_1, a_4, a_5	5

12)

I	II	III
a_1	-	4
a_2	-	6
a_3	a_1, a_2	12
a_4	a_1, a_2	4
a_5	a_2	5
a_6	a_3, a_4, a_5	10
a_7	a_3	7

13)

I	II	III
a_1	-	8
a_2	-	11
a_3	a_1	10
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_2	12
a_6	a_1, a_2	14
a_7	a_3	9
a_8	a_4, a_5	6
a_9	a_3, a_4, a_5, a_6	5

14)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	6
a_3	-	8
a_4	a_1, a_2	11
a_5	a_2, a_3	7
a_6	a_2	6
a_7	a_4, a_5	5
a_8	a_6	9
a_9	a_2, a_3	7

15)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	7
a_3	-	10
a_4	a_1, a_2	5
a_5	a_2, a_3	7
a_6	a_3	10
a_7	a_3, a_4, a_5	5

16)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	6
a_3	a_1	8
a_4	a_1, a_2	10
a_5	a_2, a_3	7
a_6	a_1, a_3, a_4	5
a_7	a_4	7

17)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	7
a_3	-	8
a_4	a_3	5
a_5	a_2, a_4	10
a_6	a_1, a_2, a_3	12
a_7	a_2, a_5	4

18)

I	II	III
a_1	-	8
a_2	-	10
a_3	a_1	8
a_4	a_1, a_2	12
a_5	a_2	6
a_6	a_3, a_4, a_5	9
a_7	a_3, a_4	7

19)

I	II	III
a_1	-	4
a_2	-	4
a_3	a_2	6
a_4	a_1, a_2	7
a_5	a_1, a_3	10
a_6	a_2, a_4, a_5	5
a_7	a_2	8

20)

I	II	III
a_1	-	8
a_2	-	5
a_3	-	6
a_4	a_1, a_2	10
a_5	a_2	10
a_6	a_2, a_3	8
a_7	a_3, a_4, a_5	5

21)

I	II	III
a_1	-	6
a_2	-	10
a_3	a_2	10
a_4	a_1, a_2	8
a_5	a_3	6
a_6	a_2, a_4, a_5	4
a_7	a_2	3

22)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	7
a_3	-	8
a_4	a_3	8
a_5	a_2, a_4	10
a_6	a_1, a_2, a_3	5
a_7	a_2, a_5	7

23)

I	II	III
a_1	-	11
a_2	-	13
a_3	-	10
a_4	a_1, a_2	8
a_5	a_2, a_3	6
a_6	a_2, a_3	15
a_7	a_1, a_2	7
a_8	a_2, a_4, a_5	9
a_9	a_6	12

24)

I	II	III
a_1	-	3
a_2	-	2
a_3	a_1	5
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_2	4
a_6	a_3	4
a_7	a_4, a_5	6
a_8	a_6, a_7	7
a_9	a_4, a_5	5

25)

I	II	III
a_1	-	10
a_2	-	12
a_3	a_1	14
a_4	a_1, a_2	11
a_5	a_1, a_2	7
a_6	a_1, a_4	9
a_7	a_3	15
a_8	a_1, a_4	13
a_9	a_5, a_6	8

26)

I	II	III
a_1	-	7
a_2	-	9
a_3	a_1, a_2	11
a_4	a_2	6
a_5	a_3, a_4	8
a_6	a_2	10
a_7	a_3, a_4, a_6	12
a_8	a_2, a_5	13

27)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	4
a_3	a_1	6
a_4	a_1, a_2	5
a_5	a_2, a_3	7
a_6	a_2, a_3, a_4	9
a_7	a_4	4
a_8	a_5, a_6	7

28)

I	II	III
a_1	-	10
a_2	-	11
a_3	-	13
a_4	a_1	9
a_5	a_1, a_2	7
a_6	a_1, a_2, a_3	15
a_7	a_4	6
a_8	a_4, a_5, a_6	12
a_9	a_1, a_7, a_8	5

29)

I	II	III
a_1	-	6
a_2	-	8
a_3	a_2	12
a_4	a_1, a_2	5
a_5	a_1, a_3	7
a_6	a_2, a_4, a_5	7
a_7	a_2	10

30)

I	II	III
a_1	-	7
a_2	-	5
a_3	-	10
a_4	a_3	14
a_5	a_2, a_4	8
a_6	a_1, a_2, a_3	10
a_7	a_2, a_5	6

3.29.4. По сетевым графикам, приведенным в задаче 3.29.3, и объемам потребления ресурса для каждой работы, взятым из текущей задачи, построить линейный график с учетом ресурсных ограничений. Максимальный расход ресурса в любой момент времени для данного проекта указан в строке $Res_{\max}$.

1)

Работы	Интенсивность потребления ресурса
I	II
a_1	20
a_2	40
a_3	50
a_4	30
a_5	30
a_6	70
a_7	80
$Res_{\max}$	100

8 Зак. 4382

2)

I	II
a_1	70
a_2	30
a_3	50
a_4	30
a_5	30
a_6	40
a_7	50
$Res_{\max}$	100

3)

I	II
a_1	30
a_2	40
a_3	60
a_4	20
a_5	40
a_6	30
a_7	70
a_8	20
$Res_{\max}$	100

4)

I	II
a_1	10
a_2	20
a_3	30
a_4	20
a_5	30
a_6	40
a_7	10
a_8	20
a_9	50
a_{10}	10
$Res_{\max}$	50

5)

I	II
a_1	10
a_2	20
a_3	30
a_4	20
a_5	10
a_6	30
a_7	30
a_8	30
a_9	10
$Res_{\max}$	50

6)

I	II
a_1	20
a_2	30
a_3	60
a_4	50
a_5	40
a_6	30
a_7	60
a_8	60
a_9	90
$Res_{\max}$	100

7)

I	II
a_1	10
a_2	30
a_3	40
a_4	20
a_5	20
a_6	30
a_7	40
$Res_{\max}$	50

8)

I	II
a_1	30
a_2	20
a_3	30
a_4	10
a_5	20
a_6	30
a_7	10
$Res_{\max}$	50

9)

I	II
a_1	60
a_2	40
a_3	50
a_4	20
a_5	60
a_6	20
a_7	30
a_8	40
a_9	80
$Res_{\max}$	100

10)

I	II
a_1	20
a_2	30
a_3	70
a_4	40
a_5	50
a_6	50
a_7	70
a_8	90
a_9	20
$Res_{\max}$	100

11)

I	II
a_1	20
a_2	30
a_3	20
a_4	60
a_5	10
a_6	40
a_7	50
$Res_{\max}$	100

12)

I	II
a_1	30
a_2	30
a_3	20
a_4	30
a_5	20
a_6	50
a_7	10
$Res_{\max}$	50

13)

I	II
a_1	30
a_2	60
a_3	20
a_4	40
a_5	50
a_6	30
a_7	30
a_8	40
a_9	60
$Res_{\max}$	100

14)

I	II
a_1	20
a_2	20
a_3	20
a_4	20
a_5	30
a_6	30
a_7	30
a_8	10
a_9	40
$Res_{\max}$	50

15)

I	II
a_1	30
a_2	20
a_3	30
a_4	10
a_5	50
a_6	20
a_7	30
$Res_{\max}$	50

16)

I	II
a_1	10
a_2	40
a_3	20
a_4	50
a_5	30
a_6	20
a_7	30
$Res_{\max}$	50

17)

I	II
a_1	30
a_2	20
a_3	70
a_4	50
a_5	30
a_6	40
a_7	80
$Res_{\max}$	100

18)

I	II
a_1	10
a_2	40
a_3	10
a_4	30
a_5	40
a_6	30
a_7	10
$Res_{\max}$	50

19)

I	II
a_1	40
a_2	50
a_3	100
a_4	20
a_5	40
a_6	80
a_7	60
$Res_{\max}$	100

20)

I	II
a_1	60
a_2	40
a_3	30
a_4	50
a_5	30
a_6	50
a_7	70
$Res_{\max}$	100

21)

I	II
a_1	20
a_2	40
a_3	20
a_4	20
a_5	30
a_6	50
a_7	30
$Res_{\max}$	50

22)

I	II
a_1	20
a_2	30
a_3	20
a_4	40
a_5	40
a_6	20
a_7	30
$Res_{\max}$	50

23)

I	II
a_1	20
a_2	60
a_3	40
a_4	10
a_5	40
a_6	50
a_7	30
a_8	20
a_9	60
$Res_{\max}$	100

24)

I	II
a_1	70
a_2	10
a_3	20
a_4	60
a_5	30
a_6	20
a_7	50
a_8	80
a_9	40
$Res_{\max}$	100

25)

I	II
a_1	30
a_2	80
a_3	70
a_4	50
a_5	50
a_6	60
a_7	20
a_8	40
a_9	110
$Res_{\max}$	120

26)

I	II
a_1	20
a_2	40
a_3	30
a_4	20
a_5	20
a_6	10
a_7	20
a_8	30
$Res_{\max}$	50

27)

I	II
a_1	40
a_2	20
a_3	50
a_4	10
a_5	30
a_6	20
a_7	20
a_8	30
$Res_{\max}$	50

28)

I	II
a_1	30
a_2	40
a_3	60
a_4	30
a_5	20
a_6	50
a_7	40
a_8	70
a_9	90
$Res_{\max}$	100

29)

I	II
a_1	40
a_2	50
a_3	10
a_4	10
a_5	40
a_6	50
a_7	40
$Res_{\max}$	50

30)

I	II
a_1	30
a_2	20
a_3	50
a_4	40
a_5	10
a_6	40
a_7	40
$Res_{\max}$	50

3.29.5. Построить фрагмент сетевого графика по следующим данным:

а) имеется пять работ $a_1, a_2, ..., a_5$. Работы a_2 и a_3 начаты одновременно; работа a_4 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2, a_3; работа a_5 может быть начата после выполнения работы a_3;

б) имеется семь работ $a_1, a_2, ..., a_7$. Работа a_3 выполняется после работ a_1 и a_4; работа a_4 начинается после выполнения работы a_2; работа a_6 может быть выполнена после работ a_4 и a_5; работа a_7 выполняется после работ a_3 и a_6.

3.29.6. По сетевому графику, изображенному на рис. 3.83, установить, как повлияет на срок выполнения комплекса увеличение продолжительности работы a_{10}, работы a_{16}. Можно ли использовать полный резерв времени работы a_{10} для увеличения продолжительности работы a_{15}? Можно ли увеличивать продолжительность работы a_{10} за счет свободного резерва времени работы a_{15}? Изменится ли полный

резерв времени работы a_5, если срок выполнения комплекса возрастет за счет увеличения продолжительности работы a_{16}? Продолжительности всех работ следующие: a_1 — 18, a_2 — 17, a_3 — 5, a_4 — 23, a_5 — 19, a_6 — 10, a_7 — 17, a_8 — 10, a_9 — 18, a_{10} — 16, a_{11} — 16, a_{12} — 5, a_{13} — 7, a_{14} — 10, a_{15} — 9, a_{16} — 5.

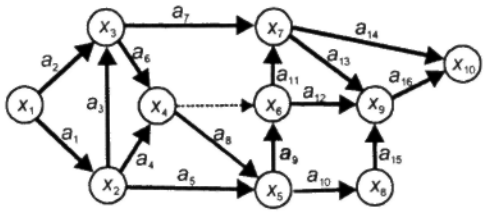


Рис. 3.83

3.29.7. По сетевому графику, изображенному на рис. 3.84, установить, можно ли полный резерв времени работы a_4 распределить на работы a_{13}, a_{16}, не нарушив срок завершения комплекса. Можно ли полный резерв времени работы a_8 распределить на работы a_4, a_5, не влияя на продолжительность критического пути? Можно ли свободный резерв времени работы a_4 передать на последующие работы, не изменив их раннего начала? Продолжительности всех работ таковы: a_1 — 1, a_2 — 1, a_3 — 2, a_4 — 2, a_5 — 5, a_6 — 4, a_7 — 5, a_8 — 2, a_9 — 3, a_{10} — 10, a_{11} — 1, a_{12} — 5, a_{13} — 1, a_{14} — 1, a_{15} — 10, a_{16} — 2.

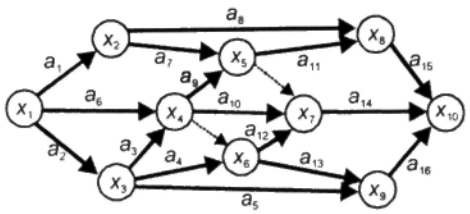


Рис. 3.84

3.29.8. Для комплекса работ, представленного сетевым графиком на рис. 3.85, определить сроки свершения событий, критический путь,

сроки начала и окончания работ, резервы времени работ. Продолжительности работ следующие: a_1 — 11, a_2 — 12, a_3 — 10, a_4 — 12, a_5 — 10, a_6 — 7, a_7 — 10, a_8 — 7, a_9 — 10, a_{10} — 4, a_{11} — 8, a_{12} — 11.

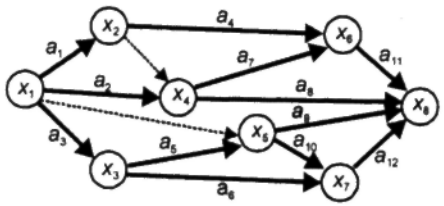


Рис. 3.85

Часть II

Ответы, решения, указания

Глава 4. Теория множеств

Глава 5. Комбинаторика

Глава 6. Теория графов

Глава 4

Теория множеств

4.1. Ответы и решения задач практического занятия 1

1.3.1. а) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$. Равенство можно доказать чисто формально, используя основные законы алгебры множеств *(см. раздел 1.1)*, либо с помощью диаграмм Эйлера—Венна. Надо заметить, что если в исходном соотношении участвует не более трех множеств, то второй способ предпочтительнее.

В нашем случае $A\setminus B=A\cap\overline{B}$. Преобразуем левую часть $A\setminus(A\setminus B)=A\setminus(A\cap\overline{B})=A\cap\overline{(A\cap\overline{B})}=$

$=A\cap(\overline{A}\cup B)=(\overline{A}\cap A)\cup(B\cap A)=$

$=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$. На рис. 4.1 изображены правая и левая части исходного равенства;

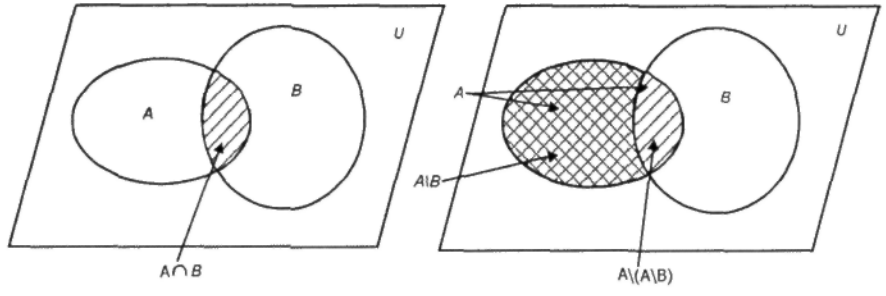


Рис. 4.1

б) $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$. $(A\setminus B)\setminus C = (A\cap\overline{B})\cap\overline{C}$, $A\setminus(B\cup C) = A\cap\overline{(B\cup C)} = A\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$. На рис. 4.2 приведены диаграммы Эйлера—Венна этого равенства;

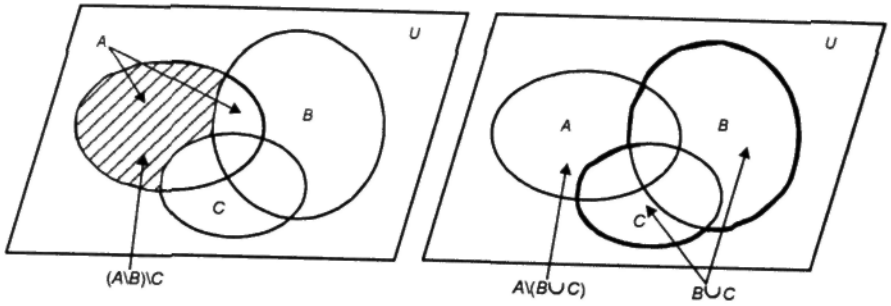


Рис. 4.2

в) $(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus(B\cap C)$. $(A\setminus B)\cap C = (A\cap\overline{B})\cap C = A\cap\overline{B}\cap C$, $(A\cap C)\setminus(B\cap C) = (A\cap C)\cap\overline{(B\cap C)} = (A\cap C)\cap(\overline{B}\cup\overline{C}) = (A\cap C\cap\overline{B})\cup(A\cap C\cap\overline{C}) = A\cap\overline{B}\cap C$. На рис. 4.3 выделено множество, соответствующее левой и правой части исходного равенства.

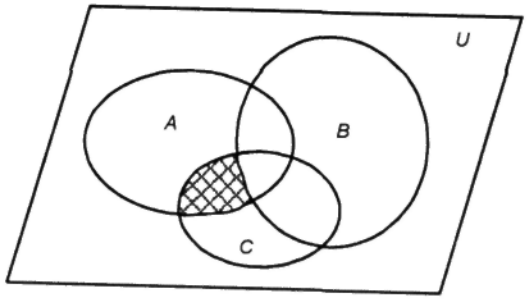


Рис. 4.3

1.3.2. $A = \{x\in N/2 < x \le 6\} = \{3,4,5,6\}$, $B = \{x\in N/1 < x \le 4\} = \{2,3\}$, $C = \{x\in N/x^2 - 4 = 0\} = \{2\}$.

а) $B\cup C = \{2,3\} = B$;

б) $A\cap B\cap C = \varnothing$;

в) $A\cup B\cup C = \{2,3,4,5,6\}$;

г) $B\times C = \{(2,2),(3,2)\}$;

д) $C\times B = \{(2,2),(2,3)\} \ne B\times C$.

1.3.3. а) $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus C$. $A\cup(B\setminus C) = A\cup(B\cap\overline{C}) = (A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})$, $(A\cup B)\setminus C = (A\cup B)\cap\overline{C} = (A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C}) = (A\cup(B\cap\overline{C}))\cap(\overline{C}\cup(B\cap\overline{C})) = ((A\cup B)\cap(A\cup\overline{C}))\cap(\overline{C}\cup(B\cap\overline{C}))$. Поскольку пересечение двух любых непустых множеств "меньше" исходных множеств, т. е. является подмножеством каждого из них, то $(A\cup B)\setminus C\subset A\cup(B\setminus C)$. Это хорошо видно и на диаграмме Эйлера—Венна (рис. 4.4). Границы множеств в левой и правой части выделены жирной линией;

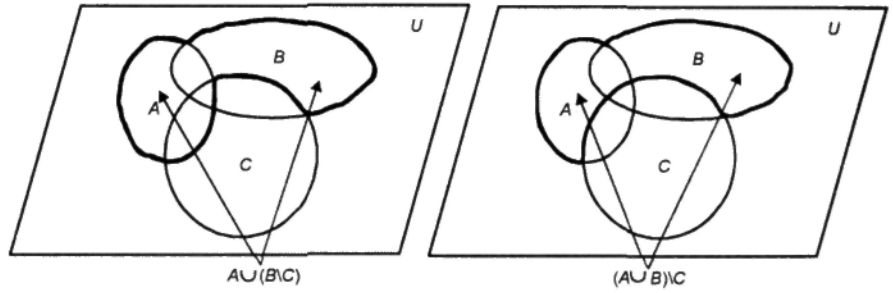


Рис. 4.4

б) $(A\cup C)\setminus B\subset(A\setminus B)\cup C$. $(A\cup C)\setminus B = (A\cup C)\cap\overline{B} = (A\cap\overline{B})\cup(C\cap\overline{B})$, $(A\setminus B)\cup C = (A\cap\overline{B})\cup C$.

Так как $C\cap\overline{B}\subset C$, то $(A\cup C)\setminus B\subset(A\setminus B)\cup C$.

1.3.4. $\overline{(X\cup A)}\cup\overline{(X\cup\overline{A})} = \overline{\overline{(X\cup A)}\cup\overline{(X\cup\overline{A})}} = \overline{(X\cup A)\cap(X\cup\overline{A})} = B$.

Тогда $(X\cup A)\cap X\cup\overline{A} = \overline{B}$.

Отсюда $(X\cap X)\cup(A\cap X)\cup(X\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{A}) = X\cup(X\cap A)\cup(X\cap\overline{A}) = X\cup(X\cap(A\cup\overline{A})) = X\cup X = X = \overline{B}$.

Итак, $X = \overline{B}$.

1.3.5. а) если $A \subseteq B \cap C$, то $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$. Если $B \cap C \neq \varnothing$, то $B \cap C \subseteq B$ и $B \cap C \subseteq C$. $A \subseteq B \cap C \subseteq B$, т. е. $A \subseteq B$, аналогично $A \subseteq B \cap C \subseteq C$, т. е. $A \subseteq C$. Это очевидно из рис. 4.5;

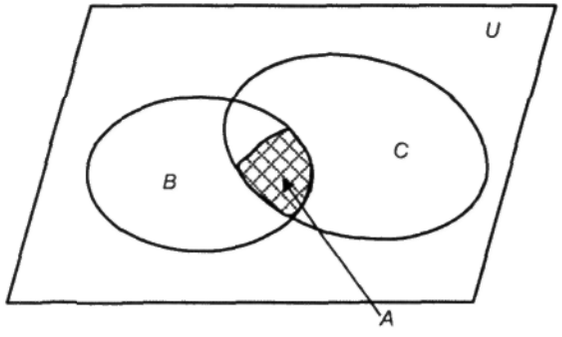


Рис. 4.5

б) если $A \cap B \subseteq C$, то $A \subseteq \overline{B} \cup C$. Рассмотрим два случая. Пусть вначале $A \cap B = C$, тогда $A \setminus B \subseteq \overline{B}$, $(A \setminus B) \cup C = (A \setminus B) \cup (A \cap B) =$ $= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A$. $(A \setminus B) \cup C \subseteq \overline{B} \cup C$, т. е. $A \subseteq \overline{B} \cup C$ (рис. 4.6). Пусть теперь $A \cap B \subset C$, в этом случае все равно $A \setminus B \subseteq \overline{B}$ и $A \subseteq (A \setminus B) \cup C$. Но $(A \setminus B) \cup C \subseteq \overline{B} \cup C$, тогда $A \subseteq (A \setminus B) \cup C \subseteq \overline{B} \cup C$, т. е. $A \subseteq \overline{B} \cup C$ (рис. 4.6);

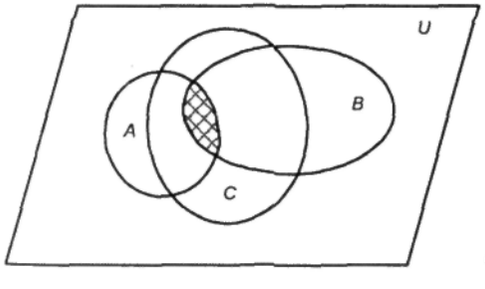


Рис. 4.6

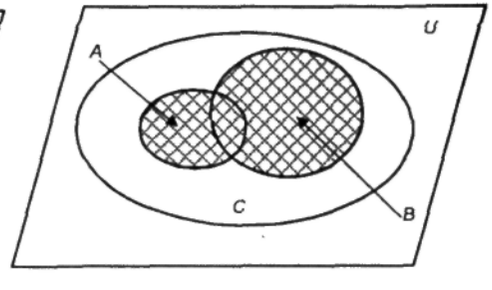
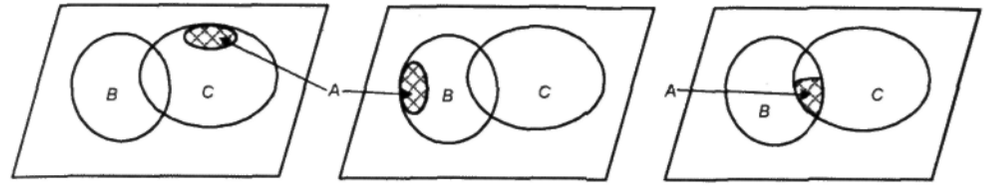


Рис. 4.7

в) если $A \cup B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$. Эти включения очевидны по определению объединения двух множеств (рис. 4.7), т. е. если, например, $A \subseteq A \cup B$, $A \cup B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ и т. д.;

г) если $A \subseteq B \cup C$, то $A \cap \overline{B} \subseteq C$. Рассмотрим три случая. Пусть $A \subseteq C$ и $A \not\subset B$, тогда $A \subseteq \overline{B}$ и $A \cap \overline{B} = A \subseteq C$ (рис. 4.8, *а*). Пусть теперь $A \subseteq B$, $A \not\subset C$. В этом случае $A \not\subset B$ и $A \cap \overline{B} = \varnothing$, но $\varnothing \subseteq C$, т. е. $A \cap \overline{B} \subseteq C$ (рис. 4.8, *б*). Наконец, пусть $A \subseteq B \cap C$ (рис. 4.8, *в*), т. е. $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$. Но $A \not\subset \overline{B}$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$ и $A \cap \overline{B} = \varnothing \subseteq C$.



а *б* *в*

Рис. 4.8

1.3.6. $\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$ $B \subseteq A \subseteq C$. $B = A \cap X$, т. е. $B \subseteq A \cap X$, следовательно, $X \subseteq \overline{A} \cup B$ из 1.3.5, б. Кроме того, т. к. $B \subseteq A \cap X$, $B \subseteq A$ и $B \subseteq X$ по задаче 1.3.5, а. Таким образом, из первого уравнения получаем $B \subseteq X \subseteq \overline{A} \cup B$. Из второго уравнения $A \cup X = C$, т. е. $X \subseteq C$ и $\overline{A} \cap C \subseteq X \subseteq C$ из задачи 1.3.5, в, г. Так как в результате объединения множеств площадь множеств на диаграммах Эйлера—Венна увеличивается, а в результате пересечения — уменьшается, то $B \cup (\overline{A} \cap C) \subseteq X \subseteq (\overline{A} \cup B) \cap C = (\overline{A} \cap C) \cup (B \cap C) = (\overline{A} \cap C) \cup B$, потому что $B \subseteq X$ и левая часть по "площади" не превысит X, одновременно $X \subseteq C$ и $B \subseteq C$, т. е. правая часть не изменится. Таким образом, $(\overline{A} \cap C) \cup B \subseteq X \subseteq (\overline{A} \cap C) \cup B$. Отсюда $X = (\overline{A} \cap C) \cup B = (C \setminus A) \cup B$. Границы множества X выделены жирной линией на рис. 4.9.

1.3.7. Проще всего доказать справедливость требуемых включений на диаграммах Эйлера—Венна:

а) если $A \subseteq B$, то $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ (рис. 4.10);

б) если $A \subseteq B$, то $A \cup C \subseteq B \cup C$ (рис. 4.11);

в) если $A \subseteq B$, то $A \cap C \subseteq B \cap C$ (рис. 4.12).

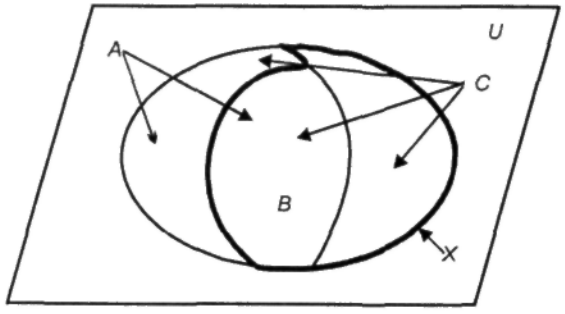


Рис. 4.9

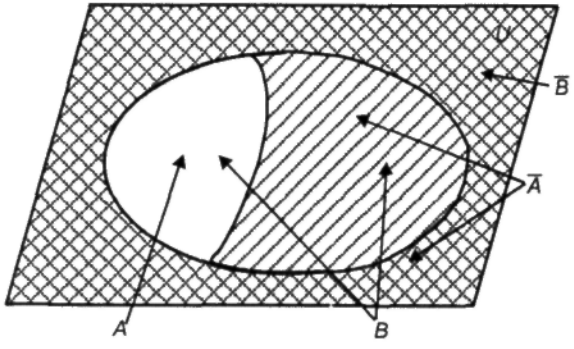


Рис. 4.10

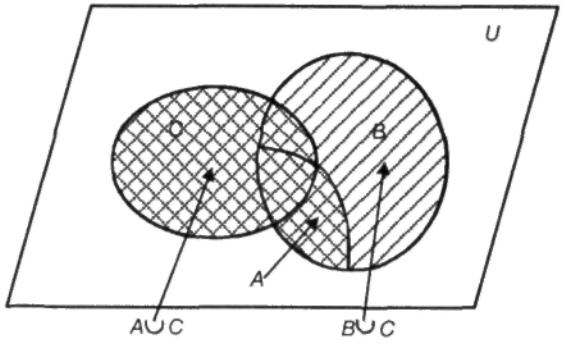


Рис. 4.11

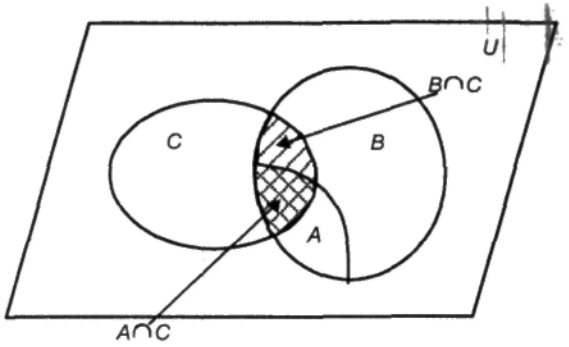


Рис. 4.12

1.3.8. $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases}$ $B \subseteq A$, $A \cap C = \varnothing$. Из первого уравнения имеем $A \cap \overline{X} = B$, т. е. $B \subseteq A \cap \overline{X}$, $B \subseteq \overline{X}$, $\overline{X} \subseteq \overline{A} \cup B$ (см. задачу 1.3.5). Аналогично из второго уравнения: $X \cap \overline{A} = C$, $C \subseteq X \cap \overline{A}$, $C \subseteq X$, $C \subseteq \overline{A}$, $X \subseteq A \cup C$. Если $\overline{X} \subseteq \overline{A} \cup B$, то $\overline{\overline{A} \cup B} \subseteq \overline{\overline{X}}$ (см. задачу 1.3.7, а), т. е. $A \cap \overline{B} \subseteq X$, $(A \cap \overline{B}) \cup C \subseteq X \cup C \subseteq X$ (см. задачу 1.3.7, б). Далее $B \subseteq \overline{X}$, т. е. $X \subseteq \overline{B}$, тогда $X \subseteq X \cap \overline{B} \subseteq (A \cup C) \cap \overline{B}$ (см. задачу 1.3.7, в). Но $(A \cup C) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup C$, т. к. $B \subseteq A$ и $A \cap C = \varnothing$, т. е. $B \not\subset C$ и $C \subseteq \overline{B}$.

Таким образом, $(A \cap \overline{B}) \cup C \subseteq X \subseteq (A \cap \overline{B}) \cup C$, т. е. $X = (A \cap \overline{B}) \cup C = (A \setminus B) \cup C$. Границы множества X выделены жирной линией на рис. 4.13.

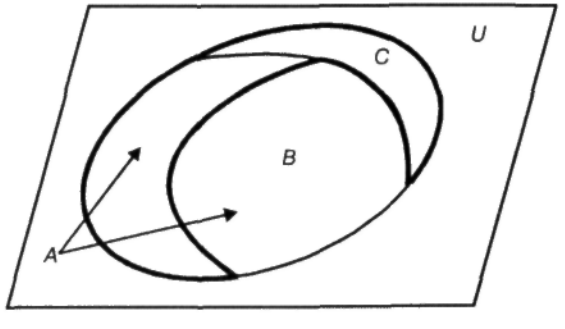


Рис. 4.13

1.3.9. $\begin{cases} A \cap X = \varnothing, \\ B \cap \overline{X} = \varnothing. \end{cases}$ Так как $B \cap \overline{X} = \varnothing$, то $B \not\subset \overline{X}$, следовательно, $B \subseteq X$. Аналогично $A \cap X = \varnothing$, т. е. $A \cap B = \varnothing$ и $B \not\subset A$, тогда $B \subseteq \overline{A}$. Отсюда же $X \not\subset A$, следовательно, $X \subseteq \overline{A}$. Итак, $B \subseteq X \subseteq \overline{A}$, X — любое множество, $B \subseteq \overline{A}$ — необходимое условие существования решения (рис. 4.14).

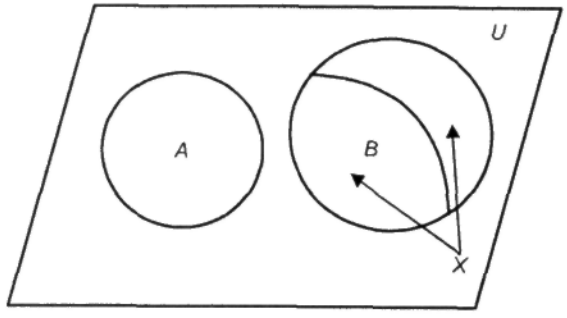


Рис. 4.14

1.3.10. а) $P_1 = \{(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\}$,
$P_2 = \{(1,1),(2,3),(2,2),(3,4),(1,4),(2,4),(4,2)\}$. Отношения P_1 и P_2 графически представлены на рис. 4.15.

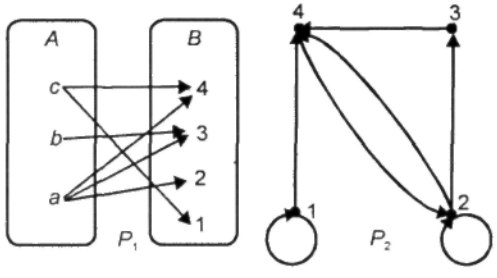


Рис. 4.15

По определению матрицы бинарных отношений будут иметь следующий вид:

$$\|P_1\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \|P_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Таким образом,

можно найти только матрицы композиций $P_1 \circ P_2$ и $(P_1 \circ P_2)^{-1}$, а именно $\|P_1 \circ P_2\| = \|P_1\| \cdot \|P_2\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\|(P_1 \circ P_2)^{-1}\| =$

$= \|(P_1 \circ P_2)^T\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. В матрице P_2 на главной диагонали имеются нулевые элементы, следовательно, P_2 нерефлексивно. Сама матрица P_2 несимметрична, т. е. отношение P_2 также несимметрично. Для проверки антисимметричности вычислим матрицу $\|P_2 \cap P_2^{-1}\| =$

$$= \|P_2\| * \|P_2^T\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице есть ненулевые элементы, стоящие вне главной диагонали, следовательно, отношение P_2 неантисимметрично. Найдем, наконец,

$$\|P_2 \circ P_2\| = \|P_2\| \cdot \|P_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \|P_2\|, \text{ т. е. } P_2 \circ P_2 \not\subset P_2,$$

значит, P_2 не является транзитивным отношением.

б) $P_1 = \{(b,2),(a,3),(b,1),(b,4),(c,1),(c,2),(c,4)\}$,
$P_2 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}$. Графическое изображение отношений P_1 и P_2 приведено на рис. 4.16.

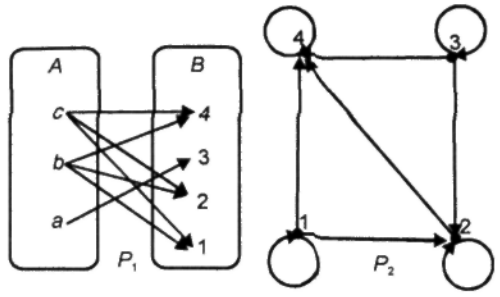


Рис. 4.16

$$\|P_1\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \|P_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|P_1 \circ P_2\| = \|P_1\| \cdot \|P_2\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|(P_1 \circ P_2)^{-1}\| = \|(P_1 \circ P_2)^T\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

P_2 рефлексивно, несимметрично. $\|P_2 \cap P_2^{-1}\| = \|P_2\| * \|P_2^T\| =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \|P_2\|.$$

Отношение P_2 антисимметрично. $\|P_2 \circ P_2\| = \|P_2\| \cdot \|P_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \|P_2\|$, т. е. $P_2 \circ P_2 \subseteq P_2$, следовательно, отношение P_2 транзитивно.

1.3.11. а) $P \subseteq R^2$, $(x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$ (рис. 4.17). Так как $x^2 + x^2 \neq 1$ для любого $x \in [-1,1]$, то отношение P нерефлексивно. Если $(x, y) \in P$, то $(y, x) \in P$, т. е. P симметрично.

Далее, например, $(1,0) \to x^2 + y^2 = 1$, т. е. $(x, y) \in P$ и $(0,1) \to x^2 + y^2 = 1$, т. е. $(y, x) \in P$, но $x \neq y$, следовательно, P не антисимметрично. Наконец, если $(x, y) \in P \to x^2 + y^2 = 1$ и $(y, z) \in P \to y^2 + z^2 = 1$, то $x^2 + z^2 = 2 - 2y^2 \neq 1$, т. е. $(x, z) \notin P$ и отношение P нетранзитивно;

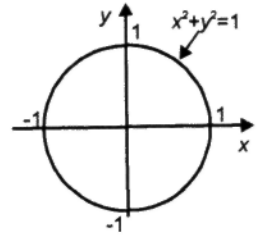


Рис. 4.17

б) $P \subseteq Z^2$, $(x, y) \in P \Leftrightarrow x - y$ четно. $P = \{0, \pm 2, \pm 4, ..., \pm 2n, ...\}$. Разность двух целых чисел четна тогда и только тогда, когда оба числа либо одновременно четны, либо одновременно нечетны. Итак, (x, y) имеют вид либо $(2k, 2m)$, либо $(2k+1, 2m+1)$. Тогда $z = x - y = 2(k - m)$ — четно.

В этом случае $x - x = 0$ — четно, т. е. отношение P рефлексивно. Если $\begin{cases} (2k, 2m) \\ (2k+1, 2m+1) \end{cases} \in P$, то $\begin{cases} (2m, 2k) \\ (2m+1, 2k+1) \end{cases} \in P$, значит, P симметрично. Аналогично, если $(2k, 2m) \in P$, то $(2m, 2k) \in P$, но $2k \neq 2m$, т. е. P не антисимметрично. Если $x - y$ четно и $y - z$ тоже четно, то $x - z$ четно, т. к. вид чисел x и z определяется видом числа y. Поэтому x и z либо одновременно четны, либо одновременно нечетны. Таким образом, отношение P транзитивно.

1.3.12. а) $P = \{(x, y) / x, y \in N$ и x делит $y\}$. Условимся считать, что нуль делит нуль. Тогда поскольку $(x, x) \in R$ (действительное число), то $D_P = R_P = N$. $P^{-1} = \{(y, x) / y, x \in N$ и y делит $x\}$, $P \circ P = \{(x, y) / x \in N, y \in N, \exists z \in N$ такой, что x делит z и z делит $y\} = \{(x, y) / x, y \in N$ и x делит $y\} = P$.

$P \circ P^{-1} = \{(x,y)/x \in N, y \in N,$ $\exists z \in N$ такой, что $(x,z) \in P$ и $(y,z) \in P^{-1}\} = N^2$. Здесь надо взять такое z, что x делит z и y делит z, например $z = x \cdot y$, т. е. нужное z легко находится по x и y.

$P^{-1} \circ P = \{(x,y)/x \in N, y \in N, \exists z \in N,$ такой что $(z,x) \in P^{-1}$ $(z,y) \in P\} = N^2$. В этом случае при любых x и y можно взять $z = 1$, т. к. z должно делить x и z должно делить y;

б) $P = \{(x,y)/x, y \in R$ и $2x \geq 3y\}$. $D_P = R_P = R$,

$P^{-1} = \{(y,x)/y, x \in R$ и $2y \geq 3x\}$,

$P \circ P^{-1} = P^{-1} \circ P = \{(x,y)/x, y \in R$ и $4x \geq 9y\} = R^2$.

1.3.13. а) по определению бинарное отношение $P \subseteq A \times B$ — это любое подмножество декартова произведения $A \times B$, которое, очевидно, состоит из $m \cdot n$ пар элементов. Так как бинарное отношение связывает два элемента и при этом их можно менять местами, то общее количество отношений будет равно $2^{m \cdot n}$;

б) по определению $f: A \to B$ для всякого x и из $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$ следует, что $y_1 = y_2$. Элементов y имеется n штук, элементов x — m штук. Для каждого $y \in B$ может быть выбран $x \in A$, причем выбор происходит по схеме $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ раз}}$. Таким образом, число функций $f: A \to B$ равно n^m.

1.3.14. а) Например, $P = \{(x,y)/x, y \in R, |x - y| \leq 1\}$. Отношение рефлексивно, т. к. для всякого x $(x,x) \in R$, действительно, $|x - x| = 0 \leq 1$. Если $|x - y| \leq 1$, то $|y - x| \leq 1$, таким образом, P симметрично. Для транзитивности необходимо, чтобы при $|x - y| \leq 1$ и $|y - z| \leq 1$ выполнялось $|x - z| \leq 1$ для всяких $x, y, z \in R$.

Пусть $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$, тогда $|x - y| \leq 1$, $|y - z| \leq 1$, но $|x - z| > 1$, следовательно, P нетранзитивно;

б) $P = \{(x,y)/x, y \in Z, x \leq y \leq x^2\}$. $(x,x) \in P$, ибо $x \leq x \leq x^2$, справедливо для всякого $x \in Z$, т. е. отношение P рефлексивно. P антисимметрично, если из $(x,y) \in P$ и $(y,x) \in P$ следует $x = y$. Неравенства $x \leq y \leq x^2$ и $y \leq x \leq y^2$ выполняются одновременно только тогда, когда $x = y$. Например, если $x = 5$, $y = 7$, то $5 \leq 7 \leq 25$, но $7 \geq 5 \leq 49$, если же $x = y = 7$, то $7 \leq 7 \leq 49$. P нерефлексивно, ибо из $x \leq y \leq x^2$ и $y \leq z \leq y^2$ не следует $x \leq z \leq x^2$ для любых $x, y, z \in Z$. Например, если $x = 3$, $y = 5$, $z = 24$, то $3 \leq 5 \leq 9$, $5 \leq 24 \leq 25$, но $3 \leq 24 \geq 9$;

в) $P = \{(x,y)/x, y \in R, x \leq y\}$. P рефлексивно, т. к. для любого $x \in R$ $x \leq x$, несимметрично, поскольку $1 \leq 2$ и $(1,2) \in P$, но $2 \geq 1$, т. е. $(2,1) \notin P$. Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ для всяких $x, y, z \in R$, следовательно, отношение P рефлексивно;

г) $P = \{(x,y)/x, y \in R, x = y = 0\}$. $x = x \neq 0$, если $x \neq 0$, т. е. P нерефлексивно, $x = y = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ и $y = 0$, т. е. $x = y$, следовательно, P антисимметрично. Если $x = y = 0$ и $y = z = 0$, то $x = z = 0$ и P транзитивно.

1.3.15 а) Эквивалентностью на заданном множестве называется рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение. $P_m = \{(a,b)/a, b \in N, a - b$ делится на $m\}$. $\frac{a-a}{m} = 0$ делится на m, т. е. P_m рефлексивно. Если $\frac{a-b}{m} = n$, то $\frac{b-a}{m} = -n$, таким образом, P_m симметрично. Пусть $\frac{a-b}{m} = n$, $\frac{b-c}{m} = k$, тогда $\frac{a-b}{m} + \frac{d-c}{m} = \frac{a-c}{m} = n + k$, т. е. P_m транзитивно. Следовательно, отношение P_m есть отношение эквивалентности;

б) $S = \{(a,b),(c,d)/(a,b),(c,d) \in N \times N, a \cdot d = b \cdot c$ и $b \neq 0, d \neq 0$ или $a = c$, $b = 0, d = 0\}$. Отношение S рефлексивно на $N \times N$, если для любой пары $(a,b) \in S$ $\{(a,b),(a,b)\} \in S$. Но $a \cdot b = b \cdot a$, следовательно, отношение S рефлексивно.

9 Зак 4382

Если $\{(a,b),(c,d)\}\in S$, то и $\{(c,d),(a,b)\}\in S$, т. к. из $a\cdot d=b\cdot c$ следует, что и $c\cdot b=d\cdot a$. Таким образом, S симметрично. Далее если $\{(a,b),(c,d)\}\in S$, $\{(c,d),(f,g)\}\in S$, то $\{(a,b),(f,g)\}\in S$, т. к. $a\cdot d=b\cdot c$ и $c\cdot g=d\cdot f$, тогда и $(a\cdot d)(c\cdot g)=(b\cdot c)(d\cdot f)\Rightarrow a\cdot g=b\cdot f$. Следовательно, S транзитивно.

1.3.16. а) Множество A частично упорядочено, если отношение P на нем рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Антисимметричность отношения P на множестве A означает, что если $(a,b)\in P$ и $(b,a)\in P$, то $a=b$. Элемент $a\in A$ называется наибольшим, если для всякого $b\in A$ $b\le a$.

Пусть a' и a'' — два наибольших элемента множества A. Тогда в силу антисимметричности, если $(a',a'')\in P$ и $(a'',a')\in P$, то $a'=a''$, т. е. они должны совпадать. Это значит, что наибольший элемент — единственный;

б) $P=\{(x,y)/x,y\in R, x=y=0$ или $x\ne 0, y\ne 0, x<y\}$. Это отношение рефлексивно, ибо $x=x=0$, антисимметрично, т. к. если $x<y$ и $y<x$, то $x=y$ или $x=y$, $y=x$, то $x=y=0$, транзитивно, потому что если $x=y$ и $y=z$, то $x=z$ и $x=y=z=0$ или если $x<y$ и $y<z$, то $x<z$ и $x\ne 0$, $y\ne 0$, $z\ne 0$. Таким образом, отношение P — отношение частичного порядка.

$x=0$ — минимальный элемент, т. к. для любого $y\in A$, если $x\le y$, то $x=y=0$. Если $P=\{(x,y)/x,y\in R, x=y=0\}$, то $x=0$ — единственный элемент, если же $P=\{(x,y)/x,y\in R, x\ne 0, y\ne 0, x<y\}$, то не существует $a\in R$ такого, чтобы для всякого $x\in R$ $a\le x$. Таким образом, наименьшего элемента нет.

4.2. Ответы и решения задач практического занятия 2

1.5.1. а) Пусть A_n — конечное множество, $|A_n|=n$, $B_k\subseteq A_n$, т. е. $k\le n$. Так как A_n конечно, то все элементы A_n могут быть пронумерованы.

Способов нумерации столько же, сколько существует способов упорядочить множество A_n. Это число равно $n!$. Пусть $a_1,a_2,\dots,a_n$ — представление множества A_n. Так как $B_k\subseteq A_n$, то a_{n_1} — первый элемент конечной последовательности $a_1,a_2,\dots,a_n$ и в то же время первый элемент множества B_k, a_{n_2} — второй элемент и т. д. Так как $k\le n$, то мы получим конечную последовательность $a_{n_1},a_{n_2},\dots,a_{n_k}$. Следовательно, множество B_k конечно. Число способов получить последовательность $a_{n_1},a_{n_2},\dots,a_{n_k}$ равно

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!};$$

б) пусть даны $B_1,B_2,\dots,B_k$ и $A=B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_k$. Рассмотрим сначала случай, когда $B_i\cap B_j=\varnothing, i\ne j$, $i,j=\overline{1,k}$. Пронумеруем элементы множества B_1 в виде $b_1^{(1)},b_2^{(1)},\dots,b_{n_1}^{(1)}$, элементы множества B_2 в виде $b_1^{(2)},b_2^{(2)},\dots,b_{n_2}^{(2)}$ и т. д. Тогда всем элементам множества A можно поставить в соответствие номера $b_1^{(1)},b_2^{(1)},\dots,b_{n_1}^{(1)}$, $b_1^{(2)},b_2^{(2)},\dots,b_{n_2}^{(2)},\dots,b_1^{(k)},b_2^{(k)},\dots,b_{n_k}^{(k)}$. Так как эта последовательность номеров конечна, то A — конечное множество.

Пусть теперь множества B_i пересекаются. Положим $B_1'=B_1$, $B_2'=B_2\setminus B_1',\dots$, $B_n'=B_n\setminus(B_1'\cup B_2'\cup\dots\cup B_{n-1}')$. Так как $B_1'=B_1$, $B_2'=B_2\setminus B_1'=B_2\cap\overline{B_1}=\overline{B_1}\cap B_2$, $B_3'=B_3\setminus(B_1'\cup B_2')=B_3\setminus$
$\setminus(B_1\cup(B_2\setminus B_1))=B_3\setminus(B_1\cup(B_2\cap\overline{B_1}))=$
$=B_3\setminus(B_1\cup B_2)=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3,\dots,$
$B_n'=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{B_{n-1}}\cap B_n$, то
$B_1'\cup B_2'\cup\dots\cup B_n'=B_1\cup(\overline{B_1}\cap B_2)\cup(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3)\cup\dots$
$\cup(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{B_{n-1}}\cap B_n)=B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n=A$. Кроме того, $B_i'\cap B_j'=\varnothing$, например, $B_1'\cap B_2'=B_1\cap(\overline{B_1}\cap B_2)=\varnothing$ и т. д. Следовательно, по первой части задачи множество A конечно.

1.5.2. Пусть A — бесконечное множество, $B=\{b_0,b_1,...\}$ — счетное подмножество A. Тогда $B\cup(A\setminus B)=(A\cup B)\cap(B\cup\overline{B})=A\cup B$ и $A\sim A\cup B=B\cup(A\setminus B)$, т. к. объединение бесконечного и счетного множества есть множество бесконечное (см. теорему 1.4).

Аналогично

$$B\cup(A\setminus B)\sim(B\setminus\{b_0\})\cup(A\setminus B)=\left(\left(B\cap\overline{\{b_0\}}\right)\cup A\right)\cap\left(\left(B\cap\overline{\{b_0\}}\right)\cup\overline{B}\right)=$$

$$=\left((A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{\{b_0\}}\right)\right)\cap\left(\left(B\cup\overline{B}\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{\{b_0\}}\right)\right)\sim A\cap\overline{\left(\overline{B}\cup\overline{\{b_0\}}\right)}=$$

$$=A\cap\overline{\left(B\cap\overline{\{b_0\}}\right)}=A\cap\overline{\{b_0\}}=A\setminus\{b_0\}.$$ Итак, $A\sim A\setminus\{b_0\}$, причем очевидно, что $\{A\setminus\{b_0\}\}\subseteq A$.

1.5.3. а) Пусть A_1 — счетное подмножество и $A_1\subset A$. $A_1\cup B\sim A_1$ (теорема 1.3), $(A\setminus A_1)\cup(A_1\cup B)=\left(A\cap\overline{A_1}\right)\cup A_1\cup B=$

$$=\left((A\cup A_1)\cap\left(\overline{A_1}\cup A_1\right)\right)\cup B=A\cup A_1\cup B=A\cup B,$$

т. к. $A_1\subset A$, $(A\setminus A_1)\cup(A_1\cup B)\sim(A\setminus A_1)\cup A_1=$

$$=\left(A\cap\overline{A_1}\right)\cup A_1=(A\cup A_1)\cap\left(A_1\cup\overline{A_1}\right)=A\cup A_1=A.$$

Итак, $A\cup B\sim A$;

б) следует из теоремы 1.4.

1.5.4. Рассмотрим функцию $f:Z\leftrightarrow N$, $f(0)=0$, $f(k)=2k$, $f(-k)=2k-1$, $k=1,2,...$ Таким образом, f обеспечивает взаимно-однозначное соответствие между точками множеств Z и N, следовательно, множество Z счетно, т. к. $Z\sim N$.

1.5.5. Пусть $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, $a_i\in Z$. Каждый многочлен $P_n(x)$ взаимно-однозначно соответствует конечной последовательности целых чисел $\{a_0,a_1,...,a_n\}$. Множество же всех конечных последовательностей, составленных из элементов множества Z, есть счетное множество. Действительно, рассмотрим сначала пару целых чисел (n_1,n_2) и натуральное число $|n_1|+|n_2|=n$. Имеется ровно $n+1$ пара целых чисел, у которых сумма модулей компонент равна n: $(0,n),(1,n-1),...,(n-1,1),(n,0)$. Обозначим через A_{n+1} множество всех пар целых чисел, удовлетворяющих условию $|n_1|+|n_2|=n$. Тогда множество $Z^{(2)}$ всех пар целых чисел есть сумма счетного множества конечных множеств A_{n+1} и счетное множество.

Докажем теперь счетность множества $Z^{(n+1)}$ всех последовательностей, состоящих из $n+1$ элементов множества Z методом математической индукции. Поскольку множество $Z^{(2)}$ счетно, предположим, что счетно и множество $Z^{(n)}$. Покажем, что при этом будет счетно множество $Z^{(n+1)}$. В самом деле, пусть $\{a_0,a_1,...,a_n,...\}$. Каждой последовательности $z^{(n+1)}=\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n},a_k\}\in Z^{(n+1)}$ соответствует пара $(z^{(n)},a_k)$, где $z^{(n)}=\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n}\}\in Z^{(n)}$, причем различным $z^{(n+1)}$ соответствуют различные пары такого вида.

Так как по предположению множество $Z^{(n)}$ всех последовательностей $z^{(n)}$ счетно, то счетно и множество всех пар $(z_i^{(n)},a_k)$, а следовательно, и множество всех последовательностей $z^{(n+1)}=\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n},a_k\}$. Последовательности $z^{(n+1)}$ — это последовательности целых коэффициентов многочленов $P_n(x)$ от одной переменной. Следовательно, множество $P_n(x)$ всех многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

1.5.6. а) Пусть $A=(0,1)$ и, например, $B=(0,1]$. Тогда $A\cup\{1\}=B$. $\{1\}$ — конечное множество, а B — множество действительных чисел полуотрезка $(0,1]$ — бесконечно. Из задачи 1.5.3 а) следует, что $A\sim B$, т. е. $(0,1)\sim(0,1]$. Прочие случаи аналогичны;

б) положим $f_1(x)=a+(b-a)x$. Эта функция осуществляет взаимно-однозначное соответствие между $[0,1]$ и $[a,b]$, т. е. $[0,1]\sim[a,b]$. Пусть $f_2(x)=c+(d-c)x$. Тогда $[0,1]\sim[c,d]$. Отсюда $[a,b]\sim[c,d]$.

1.5.7. Рассмотрим две окружности с центром в начале координат и радиусами r и R (рис. 4.18). Точке $(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$ сопоставим точку $(R\cos\varphi,R\sin\varphi)$. Таким образом, между точками этих двух окружностей установлено взаимно-однозначное соответствие, т. е. множества всех точек этих окружностей эквивалентны.

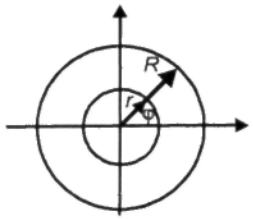


Рис. 4.18

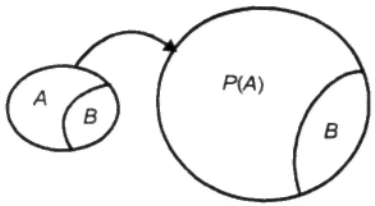


Рис. 4.19

1.5.8. Пусть g — такая функция из A в $P(A)$, что $g(x)=\{x\}$. Она устанавливает взаимно-однозначное соответствие между A и подмножеством множества $P(A)$, состоящим из одноэлементных подмножеств A, так что $|A|\le|P(A)|$. Покажем теперь, что $A\sim P(A)$.

Рассмотрим $f: A\leftrightarrow P(A)$ и положим $B=\{x/x\in A, x\notin f(x)\}$ (рис. 4.19). Так как $P(A)$ — множество всех подмножеств A, то $B\subset P(A)$. Пусть $x_0\in A$ и $f(x_0)=B$. Это возможно, т. к. $f: A\leftrightarrow P(A)$ и $B\subset P(A)$.

Предположим $x_0\in B$, тогда $x_0\in f(x_0)=B$, наоборот, $x_0\notin B$, то $x_0\notin f(x_0)$ и $x_0\in B$ по определению множества B. Следовательно, не существует такой функции $f: A\leftrightarrow P(A)$, для которой множество ее значений совпадает с $P(A)$, т. е. $|A|<|P(A)|$.

1.5.9. Пусть U — множество, содержащее все множества. Тогда $P(U)\subseteq U$ по определению U. Но с другой стороны, $|P(U)|>|U|$ (*см. задачу 1.5.8*). Получено противоречие, следовательно, исходное предположение о существовании U неверно.

1.5.10. Можно. Рассмотрим множество $B=\{x-y/x,y\in A\}$. Оно счетно, т. к. множество A по условию счетно. Пусть $a\in R\setminus B$, тогда для всякого $a\in R\setminus B$ $\{x+a/x\in A\}\cap A=\varnothing$.

Глава 5

Комбинаторика

5.1. Ответы и решения задач практического занятия 3

2.5.1. Трехзначное число содержит три десятичных разряда, каждый из которых заполняется по порядку цифрами 1, 2, 3, 4 и 5. Первый разряд может быть заполнен любой из этих цифр, для второго остаются четыре цифры, т. к. по условию задачи каждую из этих цифр можно использовать не более одного раза, наконец, третий разряд заполняется лишь тремя оставшимися неиспользованными цифрами. По правилу произведения общее число способов составления чисел равно $5\cdot4\cdot3=60$.

2.5.2. Действует то же правило произведения, что и в предыдущей задаче. Старший разряд числа может быть заполнен любой из девяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Нуль не может использоваться, т. к. иначе число будет четырехзначным, а не пятизначным. Второй, третий и четвертый разряды заполняются любой цифрой из десяти. Младший разряд можно заполнить только нулем или пятеркой, т. к. число делится на пять, если оно оканчивается на 0 или 5. Таким образом, число способов равно $9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot2=18\,000$.

2.5.3. Требования задачи становятся очевидными из рисунка (рис. 5.1). Из вершины A треугольника ABC проведено m прямых, каждая из которых пересекается с n прямыми, проведенными из вершины B. Таким образом, число точек пересечения равно $n\cdot m\cdot m$ прямых, проведенных из вершины A, делят треугольник ABC на $m+1$ область, аналогично n прямых, исходящих из B, делят треугольник на $n+1$ область. Тогда общее число частей в треугольнике ABC будет равно $(n+1)(m+1)$.

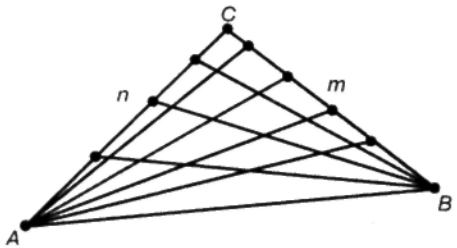


Рис. 5.1

2.5.4. Существует пять четных и пять нечетных цифр. Четные цифры: 0, 2, 4, 6, 8. Старший разряд двузначного четного числа можно заполнить четырьмя способами (цифры 2, 4, 6, 8), младший — пятью (можно использовать все пять цифр). Общее число требуемых чисел $4 \cdot 5 = 20$.

2.5.5. Из пяти номеров пассажир совершенно не помнит лишь один, следовательно, этот номер может быть замещен любой цифрой из существующих десяти. Две группы цифр пассажир помнит. Эти группы могут следующими способами располагаться в забытом пятизначном числе: ?2337, ?3723, 23?37, 37?23, 2337?, 3723?. Следовательно, существует не более $6 \cdot 10 = 60$ номеров, которые нужно перебрать, чтобы открыть камеру.

2.5.6. Карты из колоды вынимаются по схеме без возвращения (т. е. без повторения) и без упорядочивания. Всего существует C_{52}^{10} способов вынуть 10 карт из 52. Тузов в колоде четыре, поэтому есть C_{48}^{10} способов вынуть 10 карт, чтобы среди них не было ни одного туза.

Тогда

а) хотя бы один туз окажется в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$ случаях (по правилу суммы);

б) $C_4^1 \cdot C_{48}^9$ — ровно один туз (C_4^1 — один туз из четырех и C_{48}^9 — девять не тузов из 48 карт, не содержащих тузов);

в) не менее двух тузов — это значит два, три или четыре туза. Это же количество получится, если из общего числа способов вынуть 10 карт из 52 вычесть число способов не вытащить ни одного туза и не вытащить ровно один туз (любой из четырех мастей). Тогда $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4 \cdot C_{48}^9$;

г) $C_4^2 \cdot C_{48}^8$ — ровно два туза.

2.5.7. Точки по условию задачи могут образовывать выпуклый n-угольник (рис. 5.2). Тогда первая точка может быть соединена с ($n-1$)-й точкой, вторая — с $n-2$ точками и т. д., наконец, ($n+1$)-я точка может быть соединена только с одной точкой. Прямые, получающиеся путем очередного соединения точек, обозначены на рис. 5.2 цифрами в скобках. Таким образом, всего получится $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+$ $+1 = \frac{1+(n-1)}{2}(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$ прямых.

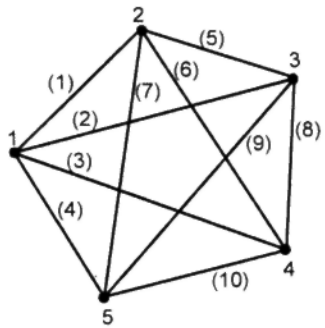


Рис. 5.2

2.5.8. Пусть x — число участников, получивших 8 баллов, а y — 9 баллов. Тогда $x + y = 2k$, т. е. число всех участников четное, т. к. обе команды имели одинаковое число участников. Очевидно, что $\begin{cases} x + y = 2k, \\ 8x + 9y = 156, \end{cases}$ необходимо лишь оценить пределы изменения $2k$. Так как $16 \cdot 9 = 144 < 156$ и $20 \cdot 8 = 160 > 156$, то $2k$ не может быть меньше 17 и больше 19, т. е. $2k = 18$. Итак, $\begin{cases} x + y = 18, \\ 8x + 9y = 156, \end{cases} \Rightarrow x = 12,\ y = 6$.

2.5.9. Два числа на одном километровом столбе в сумме всегда дают 999. Если взять столб, на котором только две в любом разряде различные цифры, то если одна из них A, то другая обязательно $9 - A$ (рис. 5.3) и т. д.

0	999	9	990	222	777	333	666

Рис. 5.3

Всего таких столбов $2^3 = 8$ (число зеркально обратных в цифровом выражении столбов, в каждом из трех разрядов может стоять либо A, либо $9 - A$). Можно использовать лишь пять различных пар цифр: (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6) и (4, 5); остальные пары повторяют перечисленные. По правилу произведения число всех столбов, на которых только две различные цифры, равно $8 \cdot 5 = 40$.

2.5.10. Рассмотрим всех людей с одним зубом. Очевидно, единственный зуб может находиться на любом из 32 мест, т. е. людей с разным расположением (набором) одного зуба C_{32}^1. Тогда общее число людей с различными наборами всех зубов равно $C_{32}^0 + C_{32}^1 + \ldots + C_{32}^{32} = 2^{32} = 4\,294\,967\,292$ человека.

2.5.11. Одного офицера из трех можно выбрать C_3^1 способами (выборка без повторения и без упорядочивания). Аналогично, для солдат — C_{40}^3. По правилу произведения наряд может быть выделен $C_3^1 \cdot C_{40}^3 = 29\,640$ способами.

2.5.12. В последовательности важен порядок звуков, в аккорде порядок не важен. Следовательно, существует C_{88}^6 аккордов и A_{88}^6 последовательностей.

2.5.13. Каждый из членов, которые получаются после раскрытия скобок, содержит семь сомножителей. Любой из этих сомножителей — либо буква, либо цифра, т. е. может находиться в двух состояниях. Тогда, например, число членов, в которых содержится только одна цифра C_7^1, две C_7^2 и т. д. Всего членов $C_7^0 + C_7^1 + \ldots + C_7^7 = 2^7 = 128$.

2.5.14. Пусть дано n-значное число. После выбора k его цифр $(k+1)$-я цифра может быть выбрана, очевидно, девятью способами. Таким образом, количество n-значных чисел, не содержащих двух идущих подряд одинаковых чисел, равно 9^n при $n > 1$ и 10 при $n = 1$. Общее количество чисел равно $10 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^n$.

2.5.15. В описанном способе набора шести карт может оказаться:

а) две пары карт одинаковой масти и по одной карте двух других мастей. Таких выборок по правилу произведения $C_4^2 \cdot \left(C_{13}^2\right)^2 \cdot \left(C_{13}^1\right)^2$, где C_4^2 — число способов выбора двух мастей из четырех, C_{13}^2 — число способов выбора двух карт одной и той же масти, C_{13}^1 — число способов выбора одной карты любой масти;

б) три карты одной масти и по одной карте других мастей. Таких выборок $C_4^1 \cdot \left(C_{13}^1\right)^3 \cdot C_{13}^3$ (см. пункт а).

2.5.16. а) Купивший билет выбирает 6 номеров из 49. Все возможные выборки считаются равновероятными. Зафиксируем 6 номеров. Тогда требуемая вероятность равна отношению числа выборок, содержащих k из шести фиксированных номеров, к числу всех выборок. Всего выборок C_{49}^6. k номеров из шести содержат $C_6^k \cdot C_{43}^{6-k}$ выборок — сначала из шести верных номеров выбирают k, а затем $6-k$ номеров дополняют из числа 43 "несчастливых" номеров. Таким образом, вероятность угадать составляет $\left(C_6^k \cdot C_{43}^{6-k}\right) / C_{49}^6$;

б) аналогичные рассуждения дают $\left(\sum_{i=k}^{6} C_6^i \cdot C_{43}^{6-i}\right) \Big/ C_{49}^6$.

2.5.17. Для пары мужчина—женщина места можно выбрать двумя способами (рис. 5.4). После этого мужчин можно посадить на выбранные места $n!$ способами, на остальных местах $n!$ способами можно посадить женщин. Всего $2(n!)^2$ способов.

Рис. 5.4

2.5.18. Первую монету можно положить в любой из двух карманов, т. е. имеется два способа выбора. Вторую можно выбрать аналогичным способом и т. д. Всего 2^9 способов.

2.5.19. а) $2\,310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Единица является делителем любого числа. Остальные делители (все разные!) будут получаться путем перемножения одного, двух, трех, четырех и пяти чисел из набора 2, 3, 5, 7, 11, т. е. число всех делителей равно $C_5^0 + C_5^1 + \ldots + C_5^5 = 2^5 = 32$;

б) $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$. Всего делителей $C_{15}^0 + C_{15}^1 + \ldots + C_{15}^{15} = 2^{15}$. Из-за кратности простых делителей среди них будут одинаковые, которые надо исключить. Рассмотрим, например, делитель 3^4. Кратных трем будут четыре различных делителя: 3, 9, 27, 81. Таким образом, число различных делителей для простого кратного делителя равно его кратности. К этому надо добавить единицу, т. к. она делитель любого числа. Тогда всего различных делителей будет $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$.

2.5.20. Первое имя можно выбрать 300 способами, пару имен можно выбрать 300^2 способами, тройку — 300^3 способами (*см. задачу 2.5.18*). Всего $300 + 300^2 + 300^3$ способов.

2.5.21. Разделим всевозможные маршруты на две группы: проходящие через точку C и проходящие через точку D. Других способов попасть из A в B нет. Из A в C можно попасть пятью способами, а из C в B — единственным, т. е. первая группа состоит из пяти маршрутов. Вторая группа состоит из 10 маршрутов. Действительно, из A в D можно попасть либо через E, либо через F. Из A в E можно попасть тремя (кратчайшими!) способами, из A в F — двумя способами. Следовательно, из A в D можно попасть $3 + 2 = 5$ способами. Наконец, из D в B можно попасть двумя способами, т. е. общее число маршрутов из A в B через D равно $5 \cdot 2 = 10$. Таким образом, общее число всевозможных маршрутов из A в B (через C и через D) равно $5 + 10 = 15$ (рис. 5.5).

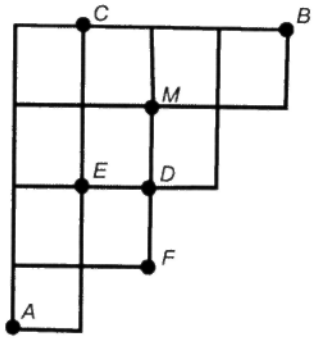


Рис. 5.5

2.5.22. Какие бы $m-1$ членов комиссии ни собрались, должен найтись замок, который они не могут открыть, но ключ от этого замка имеется

у каждого из остальных $n-m+1$ членов комиссии (появление одного из которых дает возможность открыть сейф). Поэтому число замков равно C_n^{m-1}, а число ключей равно $(n-m+1)C_n^{m-1}$.

2.5.23. а) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{20} = \left(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot 2^{\frac{k}{2}} \cdot 3^{\frac{20-k}{3}}$. Очевидно, что член разложения будет рационален, если k четно, а $20-k$ кратно трем, т. е. $k = 2, 8, 14, 20$;

б) $\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2}\right)^{100} = \left(6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{4}}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k \cdot 6^{\frac{k}{3}} \cdot 2^{\frac{100-k}{4}}$. Для рациональности текущего члена необходимо, чтобы k было кратно трем и $100-k$ делилось на четыре. Так как k меняется от 0 до 100, то двум приведенным требованиям удовлетворяют следующие значения k: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 и 96. Итак, рациональных членов будет девять.

2.5.24. а) Представим исходное выражение в виде $\left(2+t^4+t^7\right)^{15} = \left[\left(t^4+t^7\right)+2\right]^{15} = (A+2)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot A^k \cdot 2^{15-k}$, $A = t^4\left(1+t^3\right)$. k-й член равен $C_{15}^k \cdot A^k \cdot 2^{15-k}$, причем в A входят степени t от $4k$ до $7k$. Степень 17 может входить в A^3 и в A^4, следовательно, надо проверить только эти члены. $A^3 = t^{12}\left(1+t^3\right)^3 = t^{12} \cdot \sum_{k=0}^{3} C_3^k t^{3k}$. 17 на 3 не делится, следовательно, члена t^{17} здесь нет. Аналогично, $A^4 = t^{16}\left(1+t^3\right)^4 = t^{16} \cdot \sum_{k=0}^{4} C_4^k t^{3k}$, $3k \neq 1$, члена t^{17} тоже нет. Итак, в разложении $\left(2+t^4+t^7\right)^{15}$ нет t^{17}, т. е. коэффициент при t^{17} равен нулю;

б) $\left(2+t-2t^3\right)^{20} = (A+2)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot A^k \cdot 2^{20-k}$, $A = t - 2t^3$. Если $k = 4$, то A^k содержит t в степенях от 4 до 12, $k = 5$ — от 5 до 15, $k = 6$ — от 6 до 18, $k = 7$ — от 7 до 21, $k = 8$ — от 8 до 24, $k = 9$ — от 9 до 27 и $k = 10$ — от 10 до 30. Тогда

$C_{20}^4 \cdot 2^{16} \cdot A^4 = C_{20}^4 \cdot 2^{16} \cdot t^4 \sum_{i=0}^{4} C_4^i (-2)^i t^{2i}$, если $i = 3$, то появится член с t^{10}, его коэффициент будет $C_{20}^4 \cdot 2^{16} \cdot C_4^3 \cdot (-2)^3$. При $k = 5,7,9$ члена с t^{10} в разложении не будет. Если $k = 6$, то появится член $C_{20}^6 \cdot 2^{14} \cdot C_6^2 \cdot (-2)^2 t^{10}$, при $k = 8$ аналогично будет $C_{20}^8 \cdot 2^{12} \cdot C_8^1 \cdot (-2)^1 t^{10}$ и при $k = 10$ подобный член равен $C_{20}^{10} \cdot 2^{10} \cdot C_8^0 \cdot (-2)^0 t^{10}$. Таким образом, общий коэффициент при t^{10} в исходном выражении равен $\left(-C_{20}^4 + 2^{19} \cdot C_4^3 + C_{20}^6 + 2^{16} \cdot C_6^2 - C_{20}^8 \cdot 2^{13} \cdot C_8^1 + C_{20}^{10} \cdot 2^{10} \cdot C_8^0\right) =$
$= 2^{10} \cdot 19\,409\,716$.

2.5.25. Представим 99 = 100 – 1 и 101 = 100 + 1. Тогда

$99^{50} = (100-1)^{50} = C_{50}^0 \cdot 100^0 - C_{50}^1 \cdot 100^1 + \ldots + (-1)^k C_{50}^k \cdot 100^k + \ldots$
$\ldots - C_{50}^{49} \cdot 100^{49} + C_{50}^{50} \cdot 100^{50}$,

$101^{50} = (100+1)^{50} = C_{50}^0 \cdot 100^0 + C_{50}^1 \cdot 100^1 + \ldots$
$\ldots + C_{50}^k \cdot 100^k + \ldots + C_{50}^{49} \cdot 100^{49} + C_{50}^{50} \cdot 100^{50}$. Найдем разность $101^{50} - 99^{50}$. Если эта разность больше 100^{50}, то число 101^{50} больше числа $99^{50} + 100^{50}$.

$101^{50} - 99^{50} = 2\left(C_{50}^1 \cdot 100^1 + C_{50}^3 \cdot 100^3 + \ldots + C_{50}^{47} \cdot 100^{47} + C_{50}^{49} \cdot 100^{49}\right)$.

Только последнее слагаемое $2 \cdot C_{50}^{49} \cdot 100^{49} = 2 \cdot \dfrac{50!}{49! \cdot 1!} \cdot 100^{49} = 100^{50}$.

Следовательно, $101^{50} - 99^{50} > 100^{50}$ и число 101^{50} больше числа $99^{50} + 100^{50}$.

2.5.26. а) Так как $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k$, тогда

$\dfrac{d}{dt} \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k t^{k-1} = \dfrac{d}{dt}(1+t)^n = n(1+t)^{n-1}$. Положим $t = 1$,

тогда $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$;

б) $\dfrac{d^2}{dt^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot k \cdot (k-1) t^{k-2} = \dfrac{d^2}{dt^2}(1+t)^n = n(n-1)(1+t)^{n-2}$.

При $t = 1$ имеем $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k = n(n-1) \cdot 2^{n-2}$;

в) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) C_n^k = 2\sum_{k=0}^{n} k C_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 2^n = (n+1) \cdot 2^n$.

2.5.27. Зафиксируем m-подмножество n-множества (рис. 5.6). Пусть $r-k$ элементов принадлежат m-подмножеству, а k элементов — его дополнению. Число (n,r)-выборок при этих условиях по правилу произведения равно $C_{n-m}^k \cdot C_m^{r-k}$. Просуммировав по k, получим число всех (n,r)-выборок из n-множества, т. е. $\sum_{k=0}^{n} C_{n-m}^k \cdot C_m^{r-k} = C_n^r$.

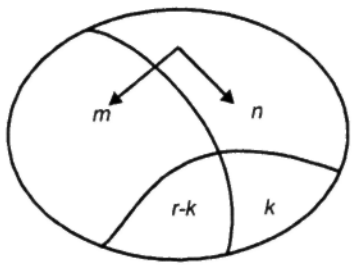


Рис. 5.6

2.5.28. Так как по формуле бинома Ньютона $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot 2^{-i}$ и

$\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot (-1)^i \cdot 2^{-i}$, то

$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{3^n+1}{2^n} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot \left[1+(-1)^i\right] \cdot 2^{-i} =$

$= \left\langle \begin{array}{l} 1+(-1)^i = 2, i = 2k, \\ 1+(-1)^i = 0, i = 2k+1 \end{array} \right\rangle = 2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i} \cdot 2^{-2i}$. Тогда

$\dfrac{3^n+1}{2} = 2^n \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i} \cdot 2^{-2i} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i} \cdot 2^{n-2i}$.

2.5.29. а) $C_{2n-1}^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}C_{2n-i-1}^{n-1}=C_{2n-2}^{n-1}+C_{2n-3}^{n-1}+\ldots+C_{n}^{n-1}+C_{n-1}^{n-1}$. Равенство $C_n^k=C_n^{n-k}$ проверяется непосредственно. $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$ (*см. раздел 2.6*). Кроме того, $C_{2n-1}^{n-1}=C_{2n-1}^{2n-1-(n-1)}=C_{2n-1}^{n}$. Тогда $C_{2n-1}^{n}=C_{2n-2}^{n}+C_{2n-2}^{n-1}$, $C_{2n-2}^{n}=C_{2n-3}^{n}+C_{2n-3}^{n-1}$, …, $C_{n+1}^{n}=C_{n}^{n}+C_{n}^{n-1}$, но $C_n^n=C_{n-1}^{n-1}$. Подставляя эти равенства друг в друга в обратном порядке, получаем

$$C_{2n-1}^{n}=C_{2n-1}^{n-1}=C_{2n-2}^{n-1}+C_{2n-3}^{n-1}+\ldots+C_{n}^{n-1}+C_{n-1}^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}C_{2n-i-1}^{n-1};$$

б) доказательство аналогично пункту а.

$$C_{2n}^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}C_{2n-i}^{n}=C_{2n-1}^{n}+C_{2n-2}^{n}+\ldots+C_{n+1}^{n}+C_{n}^{n}.$$

$C_{2n}^{n-1}=C_{2n}^{2n-(n-1)}=C_{2n}^{n+1}$, $C_{2n}^{n+1}=C_{2n-1}^{n+1}+C_{2n-1}^{n}$, $C_{2n-1}^{n+1}=C_{2n-2}^{n+1}+C_{2n-2}^{n}$, …, $C_{n+2}^{n+1}=C_{n+1}^{n+1}+C_{n+1}^{n}$, $C_{n+1}^{n+1}=C_{n}^{n}$. Тогда $C_{2n}^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}C_{2n-i}^{n}$.

2.5.30.
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{C_{n-1}^{i-1}}{C_{2n-1}^{i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\dfrac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}}{\dfrac{(2n-1)!}{i!(2n-i-1)!}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!\cdot i\cdot(2n-i-1)!}{(2n-1)!(n-i)!}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n-i-1)!(n-1)![2n-(2n-i)]}{(2n-1)!(n-i)!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2n(n-1)!(2n-i-1)!-(n-1)!(2n-i)!}{(2n-1)!(n-i)!}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{2n(n-1)!(n-1)!(2n-i-1)!}{(2n-1)(2n-2)!(n-1)!(n-i)!}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!n!(2n-i)!}{(2n-1)!n!(n-i)!}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{2n}{(2n-1)\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}}\cdot\frac{(2n-i-1)!}{(n-1)!(n-i)!}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}}\cdot\frac{(2n-i)!}{(n-i)!}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{2n}{(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}}\cdot C_{2n-i-1}^{n-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\cdot C_{2n-i}^{n}=\qquad\text{(см. задачу 2.5.29)}$$
$$=\frac{2n}{(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}C_{2n-i-1}^{n-1}-\frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}C_{2n-i}^{n}=\frac{2n}{(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}}\cdot C_{2n-1}^{n-1}-$$
$$-\frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\cdot C_{2n}^{n-1}=2-\frac{2n}{n+1}=\frac{2}{n+1}.$$

5.2. Ответы и решения задач практического занятия 4

2.13.1. а) $a_n=n\alpha^n, n=0,1,2,\ldots,\ \alpha\in R$. $f_a(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^nt^n=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}n(\alpha t)^n=\langle z=\alpha t\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}nz^n=z\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-1}=z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=$$
$$=z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{\alpha t}{(1-\alpha t)^2};$$

б) $a_n=\begin{cases}0, n=0,\\ \dfrac{\alpha^n}{n!}, n=1,2,\ldots\end{cases}$

$$f_a(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha t)^n}{n!}=e^{\alpha t}-1;$$

в) $a_n=n^2, n=0,1,2,\ldots$

$$f_a(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}n^2t^n=\sum_{n=0}^{\infty}n[(n-1)+1]t^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}nt^n=t^2\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)t^{n-2}+t\sum_{n=0}^{\infty}nt^{n-1}=$$
$$=t^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2}{dt^2}t^n+t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}t^n=t^2\frac{d^2}{dt^2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n+t\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}t^n=t^2\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)+$$
$$+t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)=t^2\frac{2(1-t)}{(1-t)^4}+\frac{t}{(1-t)^2}=\frac{t(1+t)}{(1-t)^3};$$

г) $a_n=\begin{cases}1, n=0,1,\ldots,N,\\ 0, n>N.\end{cases}$

$$f_a(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{N}t^n=1+t+t^2+\ldots+t^N=\frac{1-t^{N+1}}{1-t};$$

д) $a_n=\sin\alpha n, n=0,1,2,\ldots,\alpha\in R$. По формуле Эйлера

$$e^{i\alpha x}=\cos\alpha x+i\sin\alpha x,\ \sin\alpha x=\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i},\ \cos\alpha x=\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}.$$

Введем новую вспомогательную функцию $\varphi(\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

По аналогии с формулой Эйлера получим

$$\varphi^n(\alpha)=\cos n\alpha+i\sin n\alpha,\ \sin n\alpha=\frac{\varphi^n(\alpha)-\varphi^n(-\alpha)}{2i},$$

$$\cos n\alpha=\frac{\varphi^n(\alpha)+\varphi^n(-\alpha)}{2}.$$

Пусть $F(t,\alpha)=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\alpha)\,t^n=\sum_{n=0}^{\infty}[t(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cos n\alpha+i\sum_{n=0}^{\infty}t^n\sin n\alpha,$$

тогда $F(t,\alpha)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[t\varphi(\alpha)]^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n=\dfrac{1}{1-r}=\dfrac{1}{1-t(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$.

Отсюда по аналогии с функцией $\varphi(\alpha)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n\sin\alpha n=\frac{F(t,\alpha)-F(t,-\alpha)}{2i}=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-t(\cos\alpha+i\sin\alpha)}-\frac{1}{1-t(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-t\cos\alpha)-it\sin\alpha}-\frac{1}{(1-t\cos\alpha)+it\sin\alpha}\right]=\frac{1}{2i}\cdot$$

$$\cdot\frac{1-t\cos\alpha+it\sin\alpha-1+t\cos\alpha+it\sin\alpha}{(1\text{-}t\cos\alpha)^2+t^2\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{t\sin\alpha}{1-2t\cos^2\alpha+t^2\cos^2\alpha+t^2\sin^2\alpha}=\frac{t\sin\alpha}{1-2t\cos^2\alpha+t^2}.$$

Но $\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n\sin\alpha n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n=f_a(t)=\dfrac{t\sin\alpha}{1-2t\cos^2\alpha+t^2}$.

2.13.2. а) $f_a(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{n-1}t^n=t\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{n-1}t^{n-1}=t\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kt^k=tf_b(t)$;

б) $f_a(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}b_it^n=b_0t^0+(b_0+b_1)\,t^1+\ldots$

$$\ldots+(b_0+b_1+\ldots+b_k)\,t^k+\ldots=b_0(1+t+t^2+\ldots+t^k+\ldots)+$$

$$+b_1(t+t^2+\ldots+t^k+\ldots)+\ldots+b_kt^k+\ldots=b_0\cdot\frac{1}{1-t}+b_1\left(\frac{1}{1-t}-1\right)+\ldots$$

$$\ldots+b_k\left(\frac{1}{1-t}-1-t-\ldots-t^{k-1}\right)+\ldots=\frac{b_0}{1-t}+$$

$$+\frac{b_1t}{1-t}+\ldots+\frac{b_kt^k}{1-t}+\ldots=\frac{1}{1-t}(b_0+b_1t+\ldots+b_kt^k+\ldots)=$$

$$=\frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n=\frac{1}{1-t}f_b(t);$$

в) $f_a(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum\limits_{n=k}^{\infty}b_{n-k}t^n=t^k\sum\limits_{n=k}^{\infty}b_{n-k}t^{n-k}=\left\langle\begin{matrix}i=n-k,\\ n=k,i=0,\\ k=n-i\end{matrix}\right\rangle=$

$$=t^k\sum_{i=0}^{\infty}b_it^i=t^kf_b(t);$$

г) $f_a(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_{n+1}t^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nt^n=$

$$=\left\langle\begin{matrix}n+1=i,\\ n=0,i=1,\\ n=i-1\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}b_it^{i-1}-\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}t^n=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{\infty}b_it^i-f_b(t)=\frac{1}{t}[f_b(t)-f_b(0)]-$$

$$-f_b(t)=\frac{f_b(t)-f_b(0)}{t}-\frac{tf_b(t)}{t}=\frac{(1-t)f_b(t)-f_b(0)}{t}.$$

2.13.3. $f_a(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[2(n-5)+7^{n+2}\right]t^n=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-5)t^n+49\sum\limits_{n=0}^{\infty}7^nt^n=$

$$=2\left[t\sum_{n=0}^{\infty}nt^{n-1}-5\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right]+49\sum_{n=0}^{\infty}(7t)^n=2t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}t^n-10\sum_{n=0}^{\infty}t^n+49\sum_{n=0}^{\infty}(7t)^n=$$

$$=2t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)-\frac{10}{1-t}+\frac{49}{1-7t}=\frac{2t}{(1-t)^2}-\frac{10}{1-t}+\frac{49}{1-7t}.$$

2.13.4. а) $f_a(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{n!}t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}\left[(n+1)t^n\right]=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}\frac{dt^{n+1}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}t^{n+1}+b_0-b_0\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_i}{i!}t^i-\frac{db_0}{dt}=\frac{d}{dt}f_b(t);$$

б) $f_a(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^r\frac{b_{n-r}\cdot g_r}{n!}\right]t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{r=0}^{n}\frac{b_{n-r}}{(n-r)!}t^{n-r}\cdot$

$$\cdot\frac{g_r}{r!}t^r=\frac{b_0}{0!}t^0+\frac{g_0}{0!}t^0+\left(\frac{b_1}{1!}t^1\cdot\frac{g_0}{0!}t^0+\frac{b_0}{0!}t^0\cdot\frac{g_1}{1!}t^1\right)+\left(\frac{b_2}{2!}t^2\cdot\frac{g_0}{0!}t^0+\frac{b_1}{1!}t^1\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{g_1}{1!}t^1+\frac{b_0}{0!}t^0\cdot\frac{g_2}{2!}t^2\right)+\ldots+\left(\frac{b_k}{k!}t^k\cdot\frac{g_0}{0!}t^0+\frac{b_{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}\cdot\frac{g_1}{1!}t^1+\ldots+\frac{b_0}{0!}t^0\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{g_k}{k!}t^k\right)+\ldots=\frac{b_0}{0!}t^0\left(\frac{g_0}{0!}t^0+\frac{g_1}{1!}t^1+\ldots+\frac{g_k}{k!}t^k+\ldots\right)+\frac{b_1}{1!}t^1\left(\frac{g_0}{0!}t^0+\right.$$

$$\left.+\frac{g_1}{1!}t^1+\ldots+\frac{g_k}{k!}t^k+\ldots\right)+\ldots+\frac{b_n}{n!}t^n\left(\frac{g_0}{0!}t^0+\frac{g_1}{1!}t^1+\ldots+\frac{g_k}{k!}t^k+\ldots\right)+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}t^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_k}{k!}t^k=f_b(t)\cdot f_g(t).$$

2.13.5. а) Пусть $f_a(t)=(1+t)^n$, $f_b(t)=(1+t)^m$. Тогда $f_c(t)=(1+t)^{n+m}=f_a(t)\cdot f_b(t)$ по свойству свертки производящих функций и $c_r=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0$, $r=0,1,2,\ldots$ Выясним вид этих коэффициентов

$$f_a(t)\cdot f_b(t)=\left(C_n^0+C_n^1t+\ldots+C_n^nt^n\right)\cdot$$

$$\cdot\left(C_m^0+C_m^1t+\ldots+C_m^mt^m\right)=C_n^0C_m^0+\left(C_n^0C_m^1+C_n^1C_m^0\right)t+\ldots$$

$$\ldots+\left(C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+\ldots+C_n^kC_m^0\right)t^k+\ldots$$ В то же время $(1+t)^{n+m}=C_{n+m}^0+C_{n+m}^1t+\ldots+C_{n+m}^kt^k+\ldots+C_{n+m}^{n+m}t^{n+m}$. Коэффициенты при одинаковых степенях t должны совпадать, например, при t^k: $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{m-k}+\ldots+C_n^kC_m^0=\sum\limits_{r=0}^{k}C_n^rC_m^{k-r}=C_{n+m}^k$;

б) решение аналогично пункту а. Рассмотрим свертку производящих функций и коэффициенты при t^k в левой и правой части равенства.

$$(1-t)^{-1-n}\cdot(1-t)^{-1-m}=(1-t)^{-2-n-m},$$

$$(1-t)^{-1-n}=\frac{1}{(1-t)^{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k}^kt^k,\ (1-t)^{-1-m}=\frac{1}{(1-t)^{m+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{m+k}^kt^k,$$

$$(1-t)^{-2-n-m}=\frac{1}{(1-t)^{n+m+2}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+m+k+1}^kt^k.$$

Тогда $C_{n+m+k+1}^k=C_n^nC_{m+k}^m+C_{n+1}^nC_{m+k-1}^m+\ldots$

$$\ldots+C_{n+k-1}^nC_{m+1}^m+C_{n+k}^nC_m^m=\sum_{r=0}^{k}C_{n+r}^nC_{n+k-r}^m.$$

2.13.6. а) $f_a(t)=(q+pt)^m=\sum\limits_{n=0}^{m}C_m^nq^{m-n}(pt)^n=\sum\limits_{n=0}^{m}C_m^nq^{m-n}p^nt^n$,

$$a_n=C_m^nq^{m-n}p^n;$$

б) $f_a(t)=\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^m}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nC_{m+n-1}^n\left(\frac{t^2}{2}\right)^n=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^nC_{m+n-1}^nt^{2n},\ a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^nC_{m+n-1}^n;$$

в) $f_a(t)=\operatorname{arctg}t$. Так как $\int\limits_0^t\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}t$ и $\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$, то

$$\int_0^t\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^t\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\right]dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^tx^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1},$$

$$a_n=\frac{(-1)^n}{2n+1};$$

г) $f_a(t)=\int\limits_0^te^{-x^2}dx=\int\limits_0^t\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\right)dx=$

$$=t-\frac{t^3}{1!\cdot3}+\frac{t^5}{2!\cdot5}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}t^{2n+1},$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

2.13.7. а) Определим четыре числовые последовательности $a_k = 1$, $b_k = ka_k$, $c_k = kb_k$, $d_k = \sum_{i=0}^{k} i^2$ и их производящие функции $f_a(t)$, $f_b(t)$, $f_c(t)$ и $f_d(t)$. Эти последовательности порождают суммируемые числа, например, $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \ldots$; $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3, \ldots$; $c_1 = 1$, $c_2 = 4, c_3 = 9, \ldots$; $d_1 = 1, d_2 = 5, d_3 = 14, \ldots$.

Искомой суммой будет число d_k — общий член последовательности $\{d_k\}$. Для его определения необходимо найти $f_d(t)$.

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot t^k = \frac{1}{1-t}, \quad f_a'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k t^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1},$$

$tf_a'(t) = t\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = f_b(t)$. Аналогично $f_c(t) = tf_b'(t) =$

$= t\left(tf_a'(t)\right)' = tf_a'(t) + t^2 f_a''(t)$. Кроме того, $d_k = \sum_{i=0}^{k} i^2$ (см. пример 2.13.2, б). Тогда $f_d(t) = \frac{t(1+t)}{(1-t)^4}$. Разложим полученное выражение в ряд. Так как $\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^k$ (формула (2.7.5)), то $\frac{1}{(1-t)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^k t^k$, следовательно,

$$f_d(t) = t\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k t^k + t^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k t^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k t^{k+2}$$ и

$$d_k = C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^{k-2} = \left\langle C_n^k = C_n^{n-k} \right\rangle = C_{k+2}^3 +$$

$$+ C_{k+1}^3 = \frac{(k+2)!}{(k-1)!3!} + \frac{(k+1)!}{(k-2)!3!} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k-1)k(k+1)}{6} =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6};$$

б) аналогично предыдущему пункту имеем: $a_k = 1$, $b_k = ka_k$, $c_k = kb_k$, $d_k = kc_k$, $w_k = \sum_{i=0}^{k} i^3$ (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Номер	a_k	b_k	c_k	d_k	w_k
1	1	1	1	1	1
2	1	2	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	9
3	1	3	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	36
...	...	...	...	...	...
k	1	k	k^2	k^3	$\sum_{i=0}^{k} i^3$

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot t^k = \frac{1}{1-t}, \quad f_b(t) = tf_a'(t), \quad f_c(t) = tf_a'(t) + t^2 f_a''(t),$$

$$f_d(t) = tf_c'(t) = t\left(tf_a'(t) + t^2 f_a''(t)\right)' =$$

$$= t\left(f_a'(t) + tf_a''(t) + 2tf_a''(t) + t^2 f_a'''(t)\right) =$$

$$= tf_a'(t) + 3t^2 f_a''(t) + t^3 f_a'''(t),$$

$$f_w(t) = \frac{f_d(t)}{1-t} = \frac{t}{1-t}\left[\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{6t}{(1-t)^3} + \frac{6t^2}{(1-t)^4}\right] = \frac{1+4t+t^2}{(1-t)^5},$$

$\frac{1}{(1-t)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^k$. Тогда

$$f_w(t) = t\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^k + 4t^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^k + t^3 \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^{k+1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} 4C_{k+4}^4 t^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 t^{k+3}$$ и

$$w_k = C_{k+3}^4 + 4C_{k+2}^4 + C_{k+1}^4 = \frac{(k+3)!}{(k-1)!4!} +$$

$$+\frac{4(k+2)!}{(k-2)!4!}+\frac{(k+1)!}{(k-3)!4!}=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}+\frac{4(k-1)k(k+1)(k+2)}{4!}+$$

$$+\frac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{4!}=\frac{k(k+1)}{4!}[(k+2)(k+3)+4(k-1)(k+2)+$$

$$+(k-2)(k-1)]=\frac{k(k+1)}{4!}(6k^2+6k)=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

2.13.8. Для решения этой задачи используется производящая функция с ограниченным числом повторений (*см. раздел 2.8*). Обозначим через a_1 монету в 1 коп., a_2 — монету в 2 коп., a_3 — 3 коп., a_4 — 5 коп. Тогда $f_a(t)=(1+a_1t+a_1^2t^2)(1+a_2t+a_2^2t^2)(1+a_3t+a_3^2t^2)(1+a_4t+a_4^2t^2)$.

Если положить $a_1=a_2=a_3=a_4=1$, то

$f_a(t)=(1+t+t^2)^4=1+4t+10t^2+16t^3+19t^4+16t^5+$ $+10t^6+4t^7+t^8$, причем коэффициенты этого разложения равны числу способов вытащить четыре монеты разных составов с указанными ограничениями.

Можно довольно легко установить и качественный состав выборок, а тогда и проверить условие суммы быть равной 10 коп. А именно:

- t^0: существует лишь один способ — $a_1^0a_2^0a_3^0a_4^0$ — не вытащить ни одной монеты;
- t^1: $\underset{1+0+0+0}{a_1^1a_2^0a_3^0a_4^0}$, $\underset{0+2+0+0}{a_1^0a_2^1a_3^0a_4^0}$, $\underset{0+0+3+0}{a_1^0a_2^0a_3^1a_4^0}$, $\underset{0+0+0+5}{a_1^0a_2^0a_3^0a_4^1}$ — четыре способа вытащить по одной монете разного достоинства. Здесь не выполняется условие $a_1+a_2+a_3+a_4=10$;
- t^2: $\underset{1+2}{a_1a_2}$, $\underset{1+3}{a_1a_3}$, $\underset{1+5}{a_1a_4}$, $\underset{2+3}{a_2a_3}$, $\underset{2+5}{a_2a_4}$, $\underset{1+1}{a_1^2}$, $\underset{2+2}{a_2^2}$, $\underset{3+3}{a_3^2}$, $\underset{5+5}{a_4^2}$, $\underset{3+5}{a_3a_4}$. $a_4^2=5+5=10$. Имеется один способ размена;
- t^3: $\underset{1+2+3}{a_1a_2a_3}$, $\underset{1+2+5}{a_1a_2a_4}$, $\underset{2+3+5}{a_2a_3a_4}$, $\underset{1+3+5}{a_1a_3a_4}$, $\underset{1+1+2}{a_1^2a_2}$, $\underset{1+1+3}{a_1^2a_3}$, $\underset{1+1+5}{a_1^2a_4}$, $\underset{2+2+1}{a_2^2a_1}$, $\underset{2+2+3}{a_2^2a_3}$, $\underset{2+2+5}{a_2^2a_4}$, $\underset{3+3+1}{a_3^2a_1}$, $\underset{3+3+2}{a_3^2a_2}$, $\underset{3+3+5}{a_3^2a_4}$, $\underset{5+5+1}{a_4^2a_1}$, $\underset{5+5+2}{a_4^2a_2}$, $\underset{5+5+3}{a_4^2a_3}$. Итого 16 способов выборки из четырех монет по три монеты с указанными повторениями. Из них один способ удовлетворяет условию равенства суммы 10 коп.: $a_2a_3a_4=2+3+5=10$;

- t^4: $\underset{1+2+3+5}{a_1a_2a_3a_4}$, $\underset{1+1+2+3}{a_1^2a_2a_3}$, $\underset{1+1+3+5}{a_1^2a_3a_4}$, $\underset{1+1+2+5}{a_1^2a_2a_4}$, $\underset{1+1+2+2}{a_1^2a_2^2}$, $\underset{1+1+3+3}{a_1^2a_3^2}$, $\underset{1+1+5+5}{a_1^2a_4^2}$, $\underset{2+2+3+3}{a_2^2a_3^2}$, $\underset{2+2+5+5}{a_2^2a_4^2}$, $\underset{3+3+5+5}{a_3^2a_4^2}$, $\underset{2+2+1+3}{a_2^2a_1a_3}$, $\underset{2+2+3+5}{a_2^2a_3a_4}$, $\underset{2+2+1+5}{a_2^2a_1a_4}$, $\underset{3+3+1+2}{a_3^2a_1a_2}$, $\underset{3+3+1+5}{a_3^2a_1a_4}$, $\underset{3+3+2+5}{a_3^2a_2a_4}$, $\underset{5+5+1+2}{a_4^2a_1a_2}$, $\underset{5+5+2+3}{a_4^2a_2a_3}$, $\underset{5+5+1+3}{a_4^2a_1a_3}$. Есть три способа размена: $a_1^2a_3a_4=1+1+3+5=10$, $a_2^2a_3^2=2+2+3+3=10$, $a_2^2a_1a_4=2+2+1+5=10$;
- t^5: $\underset{1+1+2+3+5}{a_1^2a_2a_3a_4}$, $\underset{1+2+2+3+5}{a_1a_2^2a_3a_4}$, $\underset{1+2+3+3+5}{a_1a_2a_3^2a_4}$, $\underset{1+2+3+5+5}{a_1a_2a_3a_4^2}$, $\underset{1+1+2+2+3}{a_1^2a_2^2a_3}$, $\underset{1+1+2+2+5}{a_1^2a_2^2a_4}$, $\underset{1+1+3+3+2}{a_1^2a_3^2a_2}$, $\underset{1+1+3+3+5}{a_1^2a_3^2a_4}$, $\underset{1+1+5+5+2}{a_1^2a_4^2a_2}$, $\underset{1+1+5+5+3}{a_1^2a_4^2a_3}$, $\underset{2+2+3+3+1}{a_2^2a_3^2a_1}$, $\underset{2+2+3+3+5}{a_2^2a_3^2a_4}$, $\underset{2+2+5+5+1}{a_2^2a_4^2a_1}$, $\underset{1+1+5+5+3}{a_2^2a_4^2a_3}$, $\underset{3+3+5+5+1}{a_3^2a_4^2a_1}$, $\underset{3+3+5+5+2}{a_3^2a_4^2a_2}$. Из 16 способов размена подходит лишь один: $a_1^2a_3^2a_2=1+1+3+3+2=10$;
- t^6: $\underset{1+1+2+2+3+5}{a_1^2a_2^2a_3a_4}$, $\underset{1+1+2+3+3+5}{a_1^2a_2a_3^2a_4}$, $\underset{1+1+2+3+5+5}{a_1^2a_2a_3a_4^2}$, $\underset{1+2+2+3+3+5}{a_1a_2^2a_3^2a_4}$, $\underset{1+2+2+3+5+5}{a_1a_2^2a_3a_4^2}$, $\underset{1+2+3+3+5+5}{a_1a_2a_3^2a_4^2}$, $\underset{1+1+1+2+3+5}{a_1^3a_2a_3a_4}$, $\underset{1+2+2+2+3+5}{a_1a_2^3a_3a_4}$, $\underset{1+2+3+3+3+5}{a_1a_2a_3^3a_4}$, $\underset{1+2+3+5+5+5}{a_1a_2a_3a_4^3}$. Нет требуемых способов размена;
- t^7: $\underset{1+1+2+2+3+3+5}{a_1^2a_2^2a_3^2a_4}$, $\underset{1+2+2+3+3+5+5}{a_1a_2^2a_3^2a_4^2}$, $\underset{1+1+2+3+3+5+5}{a_1^2a_2a_3^2a_4^2}$, $\underset{1+1+2+2+3+5+5}{a_1^2a_2^2a_3a_4^2}$. Нет способов;
- t^8: $\underset{1+1+2+2+3+3+5+5}{a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2}$. Нет требуемых способов.

Итого существует всего лишь шесть способов размена 10 коп. четырьмя указанными монетами с описанными ограничениями: $2+3+5$, $1+1+3+5$, $1+2+2+5$, $2+2+3+3$, $1+1+2+3+3$, $5+5$.

2.13.9. Пусть a_{n+2} — требуемое число способов разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники, не пересекающиеся внутри многоугольника. Пронумеруем вершины исходного многоугольника числами от 1 до $n+2$. При любом разбиении найдется треугольник, содержащий ребро многоугольника с вершинами $n+1$ и $n+2$ (рис. 5.7, *а*). Третья

вершина этого треугольника может быть любой из остальных $1,2,\ldots,n+1$. Пусть это будет вершина k. Удалим треугольник с вершинами $k,n+1,n+2$; получим два многоугольника с числом вершин $k+1$ (вершины $1,2,\ldots,k,n+2$) и $n-k+2$ (вершины $k+1,k+2,\ldots,n+1$).

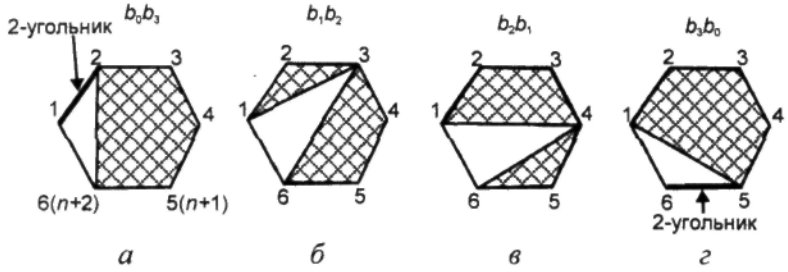


Рис. 5.7

Выбирая k-ю вершину с первой по ($n+2$)-ю, будем иметь аналогичную картину разбиения (рис. 5.7), при этом по правилам произведения и суммы получим $a_{n+2}=a_2\cdot a_{n+1}+a_3\cdot a_n+a_4\cdot a_{n-1}+\ldots+a_n\cdot a_3+a_{n+1}\cdot a_2$, где, очевидно, $a_2=1$ (одна сторона многоугольника — "двуугольник"). Пусть $b_n=a_{n+2}$, тогда $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k-1}\cdot b_{n-k}$, $b_0=1$ (рис. 5.7). Правая часть последней формулы является сверткой двух одинаковых последовательностей $\{b_n\}$ и $\{b_n\}$. Получим теперь производящую функцию из рекуррентного соотношения $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k-1}\cdot b_{n-k}$ и найдем явное выражение для b_n. Для этого умножим рекуррентное соотношение на t^n и просуммируем его по n от единицы до бесконечности. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_nt^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}b_{k-1}\cdot b_{n-k}=\sum_{n=1}^{\infty}b_0\cdot b_{n-1}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_1\cdot b_{n-2}t^n+\ldots.$$

Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nt^n=f_b(t)-b_0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_0\cdot b_{n-1}t^n=b_0t\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{n-1}t^{n-1}=b_0tf_b(t)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_1\cdot b_{n-2}t^n=b_1t^2\sum_{n=1}^{\infty}b_{n-2}t^{n-2}=b_1t^2f_b(t),\ldots.$$

Отсюда $f_b(t)-b_0=tf_b(t)(b_0+b_1t+b_2t^2+\ldots)=tf_b^2(t)$, т. е. $tf_b^2(t)-f_b(t)+1=0$. Тогда $f_b(t)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4t}}{2t}$. Поскольку результат $f_b(t)$ должен быть представлен рядом по неотрицательным степеням t, то решение $f_b(t)=\dfrac{1+\sqrt{1-4t}}{2t}$ является посторонним. Это видно из выражения $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots$ $\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\ldots=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_\alpha^kx^k$ и $(1-4t)^{\frac{1}{2}}=1+$

$$+\frac{1}{2}(-4t)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-4t)^2+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-4t)^k+\ldots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kC_{\frac{1}{2}}^k(4t)^k,\quad C_{\frac{1}{2}}^k=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}.$$

При подсчете $C_{\frac{1}{2}}^k$ можно убедиться, что полученное выражение имеет знак минус во всех членах, начиная со второго, первый член ряда равен единице. Чтобы $f_b(t)$ была положительна, необходимо выбрать знак минус в выражении $f_b(t)=\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$, т. е. $f_b(t)=\dfrac{1}{2t}\left[1-(1-4t)^{\frac{1}{2}}\right]$.

Тогда $1-(1-4t)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}(4t)-\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(4t)^2+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}C_{\frac{1}{2}}^k(4t)^k$.

Отсюда $f_b(t)=(2t)^{-1}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}C_{\frac{1}{2}}^k4\cdot4^{k-1}t^k=2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}C_{\frac{1}{2}}^k(4t)^{k-1}=$

$$=(2t)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}C_{\frac{1}{2}}^k4\cdot4^{k-1}t^k=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}C_{\frac{1}{2}}^k(4t)^{k-1}=\left\langle\begin{matrix}k-1=n,\\k=1,n=0,\\k=n+1\end{matrix}\right\rangle=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{\frac{1}{2}}^{n+1} 2^{2n+1} t^n = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot 4}{2!}t^2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{k+1}\cdot\frac{k(k+1)\ldots(2k-1)2k}{k!}t^k + \ldots =$$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}C_{2k}^k t^k$. Итак, окончательно $b_n = a_{n+2} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$, где a_{n+2} — число способов разбиения $(n+2)$-угольника на треугольники непересекающимися внутри него диагоналями.

2.13.10. а) Здесь $a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 8$. Характеристический многочлен имеет вид $L(t) = 1 - 3t + t^2 - 3t^3$. Тогда

$$C(t) = f_a(t)\cdot L(t) =$$

$$= \left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots\right)\left(1 - 3t + t^2 - 3t^3\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

$$\ldots + a_n t^n + \ldots - 3a_0 t - 3a_1 t^2 - \ldots$$

$$- 3a_{n-1}t^n - \ldots + a_0 t^2 + a_1 t^3 + \ldots + a_{n-2}t^n + \ldots$$

$$\ldots - 3a_0 t^3 - 3a_1 t^4 - \ldots - 3a_{n-3}t^n + \ldots =$$

$$= a_0 + (a_1 - 3a_0)t + (a_2 - 3a_1 + a_0)t^2 =$$

$= 1 + (3-3)t + (8-9+1)t^2 = 1$. Отсюда $f_a(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 - 3t^3} =$

$= \frac{1}{(1-3t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-3t} + \frac{Bt + C}{1+t^2}$. Найдем A, B и C методом неопределенных коэффициентов.

$$1 \equiv A + At^2 + Bt + C - 3Bt^2 - 3Ct \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = 1, \\ A - 3B = 0, \\ B - 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{9}{10}, B = \frac{3}{10}, C = \frac{1}{10}.$$

Тогда $f_a(t) = \frac{1}{10}\left(\frac{9}{1-3t} + \frac{3t+1}{1+t^2}\right)$. Так как $\frac{1}{1-3t} = \sum_{k=0}^{\infty}3^k t^k$ и

$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}$, то $f_a(t) = \frac{1}{10}\left[\sum_{k=0}^{\infty}9\cdot 3^k t^k + \sum_{k=0}^{\infty}3\cdot(-1)^k t^{2k+1} + \right.$

$\left. + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\right]$. Тогда $\begin{cases} a_{2k} = \frac{1}{10}\left[9\cdot 3^{2k} + (-1)^k\right], \\ a_{2k+1} = \frac{1}{10}\left[9\cdot 3^{2k+1} + 3(-1)^k\right]; \end{cases}$

б) $a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

$$\frac{1}{t^3}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+3}t^{n+3} + \frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}t^{n+2} - \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n = 0,$$

$$\frac{1}{t^3}\sum_{k=3}^{\infty}a_k t^k + \frac{1}{t^2}\sum_{k=2}^{\infty}a_k t^k - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}a_k t^k - \sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n = 0,$$

$$\frac{1}{t^3}\left(f_a(t) - a_0 - a_1 t - a_2 t^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{t^2}\left(f_a(t) - a_0 - a_1 t\right) - \frac{1}{t}\left(f_a(t) - a_0\right) - f_a(t) = 0,$$

$$f_a(t) - 1 - 2t - 3t^2 + t\left(f_a(t) - 1 - 2t\right) - t^2\left(f_a(t) - 1\right) - t^3 f_a(t) = 0,$$

$$f_a(t)\left(1 + t - t^2 - t^3\right) - 1 - 2t - 3t^2 - t - 2t^2 + t^2 = 0,$$

$$f_a(t) = \frac{1 + 3t + 4t^2}{1 + t - t^2 - t^3} = \frac{1 + 3t + 4t^2}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2}.$$

$$1 + 3t + 4t^2 \equiv A\left(1 + 2t + t^2\right) +$$

$$+ B\left(1 - t^2\right) + C(1 - t) \Rightarrow \begin{cases} 1 = A + B + C, \\ 3 = 2A - C, \\ 4 = A - B \end{cases} \Rightarrow A = 2, B = -2, C = 1.$$

$$f_a(t) = \frac{2}{1-t} - \frac{2}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}t^k - 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)t^k =$$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k(k-1) + 2\right]t^k$, $a_n = (-1)^n(n-1) + 2$;

в) $a_{n+2} \pm 9a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 0$. $a_{n+2} = \mp 9a_n$, $L(t) = 1 \pm 9t^2$,

$C(t) = f_a(t) \cdot L(t) =$

$= \left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots\right)\left(1 \pm 9t^2\right) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$

$\ldots \pm 9a_0 t^2 \pm 9a_1 t^3 \pm \ldots \pm 9a_{n-2} t^n + \ldots = a_0 + a_1 t = 1$,

$$f_a(t) = C(t)/L(t) = \frac{1}{1 \pm 9t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 9)^k t^k,\ a_n = (\mp 9)^n.$$

2.13.11. а) $a_{n+1} = a_n + n,\ a_0 = 1$. $\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n +$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + t\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

$$\frac{1}{t}\left(f_a(t) - a_0\right) = f_a(t) + t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = f_a(t) + \frac{2t}{(1-t)^2},$$

$$f_a(t) - 1 - tf_a(t) = \frac{2t}{(1-t)^2},\ f_a(t) = \frac{3t^2 - 2t + 1}{(1-t)^3} =$$

$$= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1-t)^3},$$

$$3t^2 - 2t + 1 \equiv A(1-t)^2 + B(1-t) + C \Rightarrow \begin{cases} 3 = A, & A = 3, \\ -2 = -2A - B, & \Rightarrow B = -4, \\ 1 = A + B + C & C = 2. \end{cases}$$

Итак,

$$f_a(t) = \frac{3}{1-t} - \frac{4}{(1-t)^2} + \frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} 3t^k - \sum_{k=0}^{\infty} 4C_{k+1}^k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2C_{k+2}^k t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(3 - 4C_{k+1}^k + 2C_{k+2}^k\right)t^k,\ a_n = 3 - 4C_{n+1}^1 + 2C_{n+2}^2;$$

б) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n + 2^{-n},\ a_0 = 1,\ a_1 = \frac{3}{2}$.

$$\frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} t^{n+2} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} t^n,$$

$$\frac{1}{t^2}\left(f_a(t) - a_0 - a_1 t\right) = \frac{1}{t}\left(f_a(t) - a_0\right) - \frac{1}{4}f_a(t) + \frac{1}{1 - t/2},$$

$$4\left(f_a(t) - 1 - \frac{3}{2}t\right) = 4t\left(f_a(t) - 1\right) - t^2 f_a(t) + \frac{2t^2}{2-t},$$

$$f_a(t)\left(4 - 4t + t^2\right) = \frac{2t^2}{2-t} + 2t + 4,\ f_a(t) = \frac{8}{(2-t)\left(t^2 - 4t + 4\right)} =$$

$$= \frac{-8}{(t-2)^3} = \frac{1}{(1 - t/2)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2}^k \left(\frac{t}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} C_{k+2}^2 t^k,$$

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}.$$

2.13.12. а) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $L(t) = 1 - t - t^2$,

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. По формуле (2.10.6)

$$a_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n;$$

б) $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n$. Перепишем уравнение в виде (2.10.1): $a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = 0$. По формуле (2.10.2) $P(t) = t^2 - t + \frac{1}{4}$.

Корни многочлена $P(t)$ равны $t_{1,2} = \frac{1}{2}$. Тогда по формуле (2.10.8) для кратных корней получим

$$a_n = \sum_{i=1}^{1}\left(C_{i,1} + C_{i,2}n\right)t_i^n = \left(C_1 + C_2 n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{C_1}{2^n} + \frac{C_2 n}{2^n}.$$

2.13.13. Так как $a_n = C_m^n$, то $f_a(t) = (1+t)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n t^n$.

Тогда $f_b(t) = (1+t)^{-m}$, ибо $f_a(t) \cdot f_b(t) = (1+t)^m \cdot (1+t)^{-m} = 1$.

Отсюда $b_n = C_{-m}^n$,

где $C_{-m}^n = (-1)^n C_{m+n-1}^n = (-1)^n \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{n!}$,

т. к. $(1+t)^{-m} = \frac{1}{(1+t)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{m+n-1}^n t^n$.

2.13.14. Для решения этой задачи введем дополнительные определения. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные множества, а $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ — множество весов элементов этих множеств. Вес — это либо число, либо переменная, которая может принимать любое числовое значение.

Рассмотрим декартово произведение множеств $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \left\{ a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \Big/ a_i \in A_i, i = \overline{1,n} \right\}$. Пусть n_i — число элементов множества A_i с весом ω, тогда $\Omega(A_i) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} n_i \omega$ — сумма весов элементов множества A_i. Вес элементов множества A будет равен $\omega(a) = \omega(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \omega(a_1) \cdot \omega(a_2) \cdot \ldots \omega(a_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \omega(a_i), \omega \in \Omega$.

Справедливо равенство, называемое *обобщенным правилом произведения*: $\Omega(A) = \Omega(A_1) \cdot \Omega(A_2) \cdot \ldots \cdot \Omega(A_n)$.

Обратимся теперь к нашей задаче. Введем веса элементам данных множеств следующим образом: $\omega(2x) = t^{2x}$, $\omega(3y) = t^{3y}$, $\omega(5z) = t^{5z}$ и $\omega(a) = \omega(2x, 3y, 5z) = t^{2x+3y+5z=n} = t^{2x} \cdot t^{3y} \cdot t^{5z} = \omega(2x) \cdot \omega(3y) \cdot \omega(5z)$.

Видно, что степень веса $t^{2x+3y+5z=n}$ любого элемента $a = (2x, 3y, 5z) \in A$ дает одно из решений исходного уравнения $2x + 3y + 5z = n$, причем по обобщенному правилу произведения $\Omega(A) = \Omega(A_1) \cdot \Omega(A_2) \cdot \Omega(A_3)$.

Найдем производящую функцию для $\Omega(A)$:

$$f_{\Omega(A)}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots = \left(t^{2 \cdot 0} + t^{2 \cdot 1} + t^{2 \cdot 2} + \ldots + t^{2 \cdot x} + \ldots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(t^{3 \cdot 0} + t^{3 \cdot 1} + t^{3 \cdot 2} + \ldots + t^{3 \cdot y} + \ldots\right)\left(t^{5 \cdot 0} + t^{5 \cdot 1} + t^{5 \cdot 2} + \ldots + t^{5 \cdot z} + \ldots\right) = \left(1 + t^2 +\right.$$
$$\left. + t^4 + \ldots\right)\left(1 + t^3 + t^6 + \ldots\right)\left(1 + t^5 + t^{10} + \ldots\right) = \frac{1}{1 - t^2} \cdot \frac{1}{1 - t^3} \cdot \frac{1}{1 - t^5}.$$

2.13.15. а) Найдем связь между a_n и b_n. Для этого выпишем выражения для a_{n+1}, a_n и b_{n+1}:

$$a_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+j+1}^{2j} = C_{n+1}^0 + C_{n+2}^2 + C_{n+3}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n},$$

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{2j} = C_n^0 + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^4 + \ldots + C_{2n-1}^{2n-2} + C_{2n}^{2n},$$

$$b_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_{n+j+1}^{2j+1} = C_{n+1}^1 + C_{n+2}^3 + C_{n+3}^5 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n+1}.$$ Очевидно, что $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$ и $C_{2n}^{2n} = C_{2n+1}^{2n+1} = 1$, кроме того $C_{n+k}^{2k} + C_{n+k}^{2k-1} =$

$$= \frac{(n+k)!}{2k!(n-k)!} + \frac{(n+k)!}{(2k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+k)!(n-k+1) + (n+k)!2k}{2k!(n-k+1)!} =$$
$$= \frac{(n+k)!(n+k+1)}{2k!(n-k+1)!} = C_{n+k+1}^{2k}.$$ Таким образом, $a_{n+1} = a_n + b_{n+1}$.

Аналогично расписав выражения для b_{n+1}, b_n и a_n, получим

$$b_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_{n+j+1}^{2j+1} = C_{n+1}^1 + C_{n+2}^3 + C_{n+3}^5 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n+1},$$

$$b_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j}^{2j+1} = C_n^1 + C_{n+1}^3 + C_{n+2}^5 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n-1}^{2n-1},$$

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{2j} = C_n^0 + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^4 + \ldots + C_{2n-1}^{2n-2} + C_{2n}^{2n},$$

$$C_{2n}^{2n} = C_{2n+1}^{2n+1} = 1,$$

$$C_{n+k}^{2k+1} + C_{n+k}^{2k} = \frac{(n+k)!}{(2k+1)!(n-k-1)!} + \frac{(n+k)!}{(2k)!(n-k)!} =$$
$$= \frac{(n+k)!(n-k) + (n+k)!(2k+1)}{(2k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+k)!(n-k+2k+1)}{(2k+1)!(n-k)!} = C_{n+k+1}^{2k+1},$$

т. е. $b_{n+1} = b_n + a_n$. Определим начальные члены последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. $a_0 = \sum\limits_{j=0}^{0} C_j^{2j} = C_0^0 = 1$, положим $b_0 = 0$, т. к. указанная сумма не существует при $n = 0$.

Итак, $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_{n+1}, \\ b_{n+1} = b_n + a_n, \ a_0 = 1, \ b_0 = 0. \end{cases}$

б) Умножим теперь каждое из полученных соотношений на t^{n+1} и просуммируем по n от нуля до бесконечности.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}t^{n+1} = t\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}t^{n+1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}t^{n+1} = t\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + t\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n;\ f_a(t) - a_0 = tf_a(t) + f_b(t),$$

$$f_b(t) - b_0 = tf_b(t) + tf_a(t) \text{ или } \begin{cases} f_a(t) - 1 = tf_a(t) + f_b(t), \\ f_b(t) = tf_b(t) + tf_a(t). \end{cases}$$

Наконец, найдем $f_a(t)$ и $f_b(t)$ из полученной системы

$$f_a(t) = \frac{1-t}{t} f_b(t),\ \frac{1-t}{t} f_b(t) - 1 = (1-t)f_b(t) + f_b(t),$$

$$f_b(t) = \frac{t}{t^2 - 3t + 1} \text{ и } f_a(t) = \frac{1-t}{t^2 - 3t + 1}.$$

5.3. Ответы и решения задач практического занятия 5

2.18.1. а) Обозначим p_i $(1 \le i \le m)$ свойство набора, состоящее в том, что шар с номером i в этом наборе не содержится. Тогда число наборов, полученных в результате d извлечений и обладающих свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$ $(1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le m)$ по правилу произведения, равно $N_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \left(C_{m-k}^s\right)^d$,

а $N(r) = \sum\limits_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le m} N_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = C_m^k \cdot \left(C_{m-k}^s\right)^d$.

По формуле включений и исключений (2.15.2)

$$N_m(r) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r \cdot N(r) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r C_m^k \left(C_{m-k}^s\right)^d =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} t = k - r, k = t + r, \\ k = r, t = 0, \\ k = m, t = m - r \end{matrix} \right\rangle = \sum_{t=0}^{m-r} (-1)^t C_m^{t+r} C_{t+r}^r \left(C_{m-r-t}^s\right)^d.$$

Но $C_m^{t+r} \cdot C_{t+r}^r = C_m^r \cdot C_{m-r}^t$, т. к. $\dfrac{m!}{(t+r)!(m-t-r)!} \cdot \dfrac{(t+r)!}{r!t!}$

$$= \frac{m!}{r!(m-r)!} \cdot \frac{(m-r)!}{t!(m-r-t)!} = \frac{m!}{r!t!(m-r-t)!}.$$

Тогда $\sum\limits_{t=0}^{m-r} (-1)^t C_m^{t+r} C_{t+r}^r \left(C_{m-r-t}^s\right)^d =$

$$= \sum_{t=0}^{m-r} (-1)^t C_m^r C_{m-r}^t \left(C_{m-r-t}^s\right)^d = C_m^r \sum_{t=0}^{m-r} (-1)^t C_{m-r}^t \left(C_{m-r-t}^s\right)^d,\ 0 \le r \le m.$$

Кроме того, в последней сумме верхнее значение индекса суммирования t можно уменьшить до $m - r - s$, т. к. если $t_{\max} = m - r$, то $C_{m-r-t}^s = C_0^s = 0$.

Итак, б) $N_m(r) = C_m^r \sum\limits_{t=0}^{m-r-s} (-1)^t C_{m-r}^t \left(C_{m-r-t}^s\right)^d$ — число наборов, в которых встречается ровно r шаров. Если $r = 0$, то а) $N_m(0) = C_m^r \sum\limits_{t=0}^{m-s} (-1)^t C_m^t \left(C_{m-t}^s\right)^d$ — число наборов, в которых встречаются все шары.

2.18.2. Пусть p_i, $i = 1,2,3$ — свойство индекса суммирования быть кратным 2, 3 и 5. Тогда по формуле (2.14.3) получим

$$S = \sum_{k'} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{3k}} + \frac{1}{2^{5k}}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2\cdot 3k}} + \frac{1}{2^{2\cdot 5k}} + \frac{1}{2^{3\cdot 5k}}\right) -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2\cdot 3\cdot 5k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^k} - \left(\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{3k}} + \frac{1}{2^{5k}}\right) - \left(\frac{1}{2^{6k}} + \frac{1}{2^{10k}} + \frac{1}{2^{15k}}\right) - \frac{1}{2^{30k}}\right] =$$

$$= 2 - \frac{1}{1-2^{-2}} - \frac{1}{1-2^{-3}} - \frac{1}{1-2^{-5}} + \frac{1}{1-2^{-6}} + \frac{1}{1-2^{-10}} + \frac{1}{1-2^{-15}} - \frac{1}{1-2^{-30}}.$$

2.18.3. Пусть свойство p_i, $i = \overline{1,4}$ — i-я шляпа вернулась к своему владельцу. Поскольку порядок (т. е. принадлежность шляп) здесь существенен, то речь идет о перестановках из четырех предметов. Очевидно, общее число перестановок равно $4! = 24$.

Для подсчета точного числа людей, получивших назад свои шляпы, воспользуемся формулами (2.15.2) и (2.15.3).

$N_k(0)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le k} N(p_{i_1}, p_{i_2},\ldots, p_{i_k})$. В нашем случае $N_4(0)=$

$=\sum_{m=0}^{4}(-1)^m \sum_{1\le i_1\le i_2\le i_3\le i_4\le 4} N(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4})=N(0)-N(1)+N(2)-N(3)+N(4)$,

где $N(0)=24$ — общее количество вариантов возвращения шляп, $N(1)$ — число случаев, когда одна шляпа возвратится своему владельцу. Очевидно, $N(1)=C_4^1\cdot 3!$ (одна из четырех шляп фиксируется, остальные возвращаются наугад). Аналогично, $N(2)=C_4^2\cdot 2!$, $N(3)=C_4^3\cdot 1!$, $N(4)=C_4^4\cdot 0!$.

Тогда $N_4(0)=24-4\cdot 3!+6\cdot 2!-4\cdot 1!+1\cdot 0!=9$, т. е. $p_0=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

По формуле (2.15.2) $N_k(r)=\sum_{i=r}^{k}(-1)^{i-r}C_i^r N(i)=\sum_{i=r}^{4}(-1)^{i-r}C_i^r N(i)$,

$N_4(1)=\sum_{i=1}^{4}(-1)^{i-1}C_i^1 N(i)=1\cdot N(1)-C_2^1\cdot N(2)+C_3^1\cdot N(3)-C_4^1\cdot N(4)=$

$=1\cdot 4\cdot 3!-2\cdot 6\cdot 2!+3\cdot 4\cdot 1!-4\cdot 1\cdot 0!=8$, $p_1=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$. Аналогично,

$N_4(2)=C_2^2N(2)-C_3^2N(3)+C_4^2N(4)=1\cdot 6\cdot 2!-3\cdot 4\cdot 1!+6\cdot 1\cdot 0!=6$,

$p_2=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$. $N_4(3)=C_3^3N(3)-C_4^3N(4)=1\cdot 4\cdot 1!-4\cdot 1\cdot 0!=0$,

$p_3=0$. Это очевидный результат, т. к. если трое из четырех получат точно свои шляпы назад, то четвертый волей-неволей также получит свою, а не чужую шляпу. Наконец, $N_4(4)=C_4^4N(4)=1\cdot 1\cdot 0!=1$,

$p_4=\frac{1}{24}$.

2.18.4. Воспользуемся здесь, как и в предыдущей задаче, формулами (2.15.2) и (2.15.3), причем свойство p_i, $i=1,2,3$ — это свойство читать i-й журнал.

а) Тогда $N_3(0)=\sum_{m=0}^{3}(-1)^m \sum_{1\le i_1\le i_2\le i_3\le 3} N(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3})=$

$=N(0)-N(1)+N(2)-N(3)$, где $N(0)$ — общее количество студентов равно 1 или 100 %, $N(1)$ — число студентов, читающих хотя бы один журнал, $N(1)=0{,}6+0{,}5+0{,}5=1{,}6$, аналогично, $N(2)=0{,}3+0{,}2+0{,}4=0{,}9$ и $N(3)=0{,}1$. Отсюда $N_3(0)=1-1{,}6+0{,}9-0{,}1=0{,}2$, т. е. 20 % студентов не читают ни один журнал;

б) применим теперь формулу $N_k(r)=\sum_{i=r}^{k}(-1)^{i-r}C_i^r N(i)$ и найдем $N_3(2)$ — количество студентов, читающих ровно два журнала.

$N_3(2)=\sum_{i=2}^{3}(-1)^{i-2}C_i^2N(i)=C_2^2N(2)-C_3^2N(3)=$

$=1\cdot 0.9-3\cdot 0.1=0.6$, т. е. 60 %.

Итак, ровно два журнала читает 60 % студентов. Чтобы узнать, сколько студентов читают не менее двух журналов (не менее двух — это два или три), достаточно к найденному числу прибавить количество студентов, читающих все три журнала. Получим 70 %.

в) для подсчета числа студентов, читающих не менее двух журналов, можно также воспользоваться формулой

$\tilde{N}_k(r)=\sum_{i=r}^{k}(-1)^{i-r}C_{i-1}^{r-1}N(i)=$

$=\sum_{i=2}^{3}(-1)^{i-2}C_{i-1}^1N(i)=C_1^1N(2)-C_2^1N(3)=$

$=1\cdot 0{,}9-2\cdot 0{,}1=0{,}7$, т. е. 70 %.

В этой задаче так мало исходных данных (т. е. мало свойств p_i), что ее можно решить графически на диаграмме Эйлера—Венна (рис. 5.8).

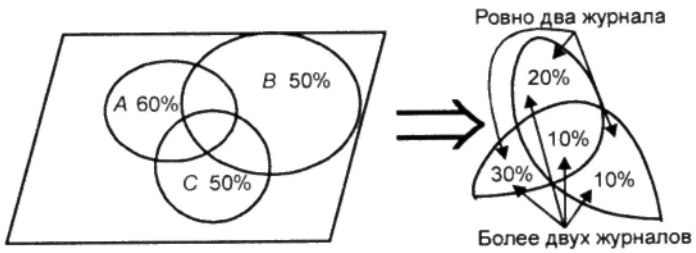


Рис. 5.8

2.18.5. Задача решается по формуле (2.16.1). Введем три свойства $p_i = \dfrac{1000}{q_i}$, $i = 1,2,3$ — свойства числа 1000 делиться на числа 3, 5 и 7.

Тогда $N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}) = n - \sum\limits_{k=1}^{3} n(p_i) + \sum\limits_{1 \le i \le j \le 3} n(p_i, p_j) - n(p_1, p_2, p_3) =$

$= n - \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{n}{q_i} + \sum\limits_{1 \le i < j \le 3} \dfrac{n}{q_i q_j} - \dfrac{n}{q_1 q_2 q_3}$, где $n = 1000$, $q_1 = 3$, $q_2 = 5$ и $q_3 = 7$. Окончательно,

$$N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}) = 1000 - \left\{\left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{7}\right]\right\} +$$

$$+ \left\{\left[\frac{1000}{15}\right] + \left[\frac{1000}{21}\right] + \left[\frac{1000}{35}\right]\right\} + \left[\frac{1000}{105}\right] = 1000 - (333 + 200 + 142) +$$

$$+ (66 + 47 + 28) - 9 = 457.$$

2.18.6. Задача решается аналогично предыдущей задаче 2.18.5.

$$N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}) =$$

$$= N(0) = n - \sum_{k=1}^{3} \frac{n}{q_i} + \sum_{1 \le i < j \le 3} \frac{n}{q_i q_j} - \frac{n}{q_1 q_2 q_3} = 30m - \left\{\left[\frac{30m}{6}\right] +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{30m}{10}\right] + \left[\frac{30m}{15}\right]\right\} + \left\{\left[\frac{30m}{60}\right] + \left[\frac{30m}{90}\right] + \left[\frac{30m}{150}\right]\right\} - \left[\frac{30m}{900}\right] = 30m -$$

$$- (5m + 3m + 2m) + (m + m + m) - m = 30m - 10m + 3m - m = 22m.$$

2.18.7. Введем два свойства $p_м$ — ученик посещает математический кружок и $p_ф$ — посещает физический кружок. По условию задачи дано $m = 35$, $n(p_м) = 20$, $n(p_ф) = 11$, $n(\overline{p_м}, \overline{p_ф}) = 10$. Тогда поскольку $n(\overline{p_м}, \overline{p_ф}) = n - [n(p_м) + n(p_ф)] + n(p_м, p_ф)$, то $n(p_м, p_ф) =$
$= n(\overline{p_м}, \overline{p_ф}) - n + n(p_м) + n(p_ф) = 10 - 35 + 20 + 11 = 6$
и $n(p_i, \overline{p_б}) = n(p_i) - n(p_м, p_ф) = 20 - 6 = 14$ (по формуле (2.14.6)).

2.18.8. Пусть p_i — свойство i-го мужчины и i-й женщины чередоваться за круглым столом и не быть супругами. Тогда по формуле (2.14.3)

$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_k}) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \sum\limits_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le k} n(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k})$. Подсчитаем теперь числа $\sum\limits_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le k} n(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k})$.

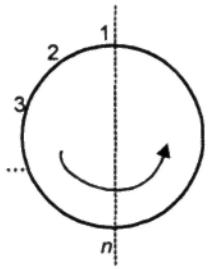


Рис. 5.9

Число всевозможных расположений n пар за круглым столом равно n (рис. 5.9, движение на полкруга). Так как супруги могут меняться местами, то число расположений n пар за круглым столом равно $2n$.

Число способов занять за столом k фиксированных мест супружескими парами равно C_n^k, из-за возможности меняться местами это число надо удвоить. Таким образом, $2n \cdot 2 \cdot C_n^k = 4nC_n^k$ — число способов выбрать k фиксированных мест k супружескими парами.

Незанятые места образуют беспорядки, тогда $[(n-k)!]^2$ — число способов рассадить остальных и по правилу произведения $4nC_n^k[(n-k)!]^2$ — число всех способов рассадить k супружеских пар среди n мест. Остальные $2n - k - 1$ (одно место отнимается из-за того, что стол круглый) мест можно занять по схеме примера 1 в *разделе 2.16*, т. е. $(2n-k-1)^{k-1}$ способами.

Тогда $\sum\limits_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le k} n(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}) = 4nC_n^k[(n-k)!]^2(2n-k-1)^{k-1}$

и $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_k}) = n(0) = 4n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k[(n-k)!]^2(2n-k-1)^{k-1}$.

2.18.9. Введем три признака p_P — том содержит роман "Рудин", $p_Д$ — том содержит роман "Дворянское гнездо" и p_O — том содержит роман "Отцы и дети". По условию задачи $n(p_P)=6$, $n(p_Д)=3$, $n(p_O)=4$, $n(p_P,p_Д)=5$ и $n(p_Д,p_O)=7$. Необходимо найти $n(p_P,p_Д,p_O)$. По формуле (2.14.3) имеем

$$n(p_P,p_Д,p_O)=n-[n(p_P)+n(p_Д)+n(p_O)]+[n(p_P,p_Д)+n(p_P,p_O)+$$
$$+n(p_Д,p_O)]-n(\overline{p_P},\overline{p_Д},\overline{p_O})=25-(6+3+4)+(5+0+7)-0=24$$

способа.

2.18.10. По формуле (2.16.2) получаем

а) $100=2^2\cdot 5^2$, $\varphi(100)=100\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)=100\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=40$;

б) $1000=2^3\cdot 5^3$,

$$\varphi(100)=100\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)=100\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=40;$$

в) $p=p^1$, если p — простое число. Тогда

$$\varphi(p)=p\prod_{i=1}^{1}\left(1-\frac{1}{p}\right)=p\left(\frac{p-1}{p}\right)=p-1.$$

Глава 6

Теория графов

6.1. Ответы и решения задач практического занятия 6

3.9.1. Это первая теорема теории графов принадлежит Леонарду Эйлеру и опубликована им в 1736 г. В современной теории графов этот результат называется *леммой о рукопожатиях*: сумма степеней всех вершин графа — четное число, равное удвоенному числу ребер.

Действительно, каждое ребро инцидентно двум вершинам, поэтому вносит двойку в сумму в правой части. Одновременно, одно и то же ребро участвует в образовании степеней обеих инцидентных вершин, таким образом в сумму в левой части тоже вносит двойку.

Из этой леммы вытекает интересное следствие: в любом графе число вершин нечетной степени четно.

3.9.2.

$$\text{а) } P=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array},$$

$$Q = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

б) $$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_2 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$Q = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

в) $$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$Q = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3.9.3.

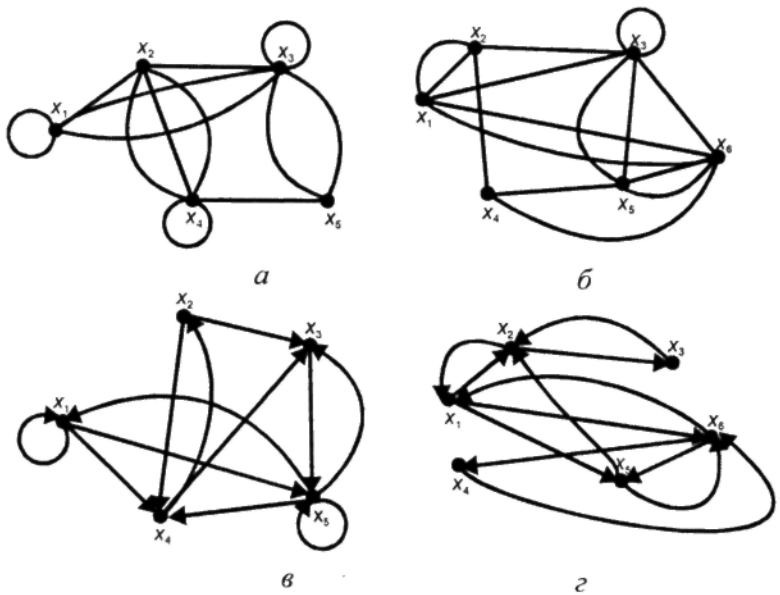


Рис. 6.1

3.9.4. а) Объединением графов G_1 и G_2 называется граф $G = (S_1 \cup S_2, U_1 \cup U_2)$. Поэтому множество вершин будет насчитывать четыре вершины. К множеству дуг S_1 добавляются две дуги (x_2, x_1) и (x_2, x_3). Тогда итоговый граф G будет иметь вид, показанный слева на рис. 6.2, *а*.

Множеством вершин произведения графов $G_1 \times G_2$ будет декартово произведение множеств $S_1 \times S_2$. Таким образом, всего вершин будет двенадцать. Количество ребер определяется по правилу: $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in G = G_1 \times G_2$, если $x_1 = x_2$ и $(y_1, y_2) \in G_2$ или $y_1 = y_2$ и $(x_1, x_2) \in G_1$ (рис. 6.2, *а*, справа).

Пункты б) и в) решаются аналогично.

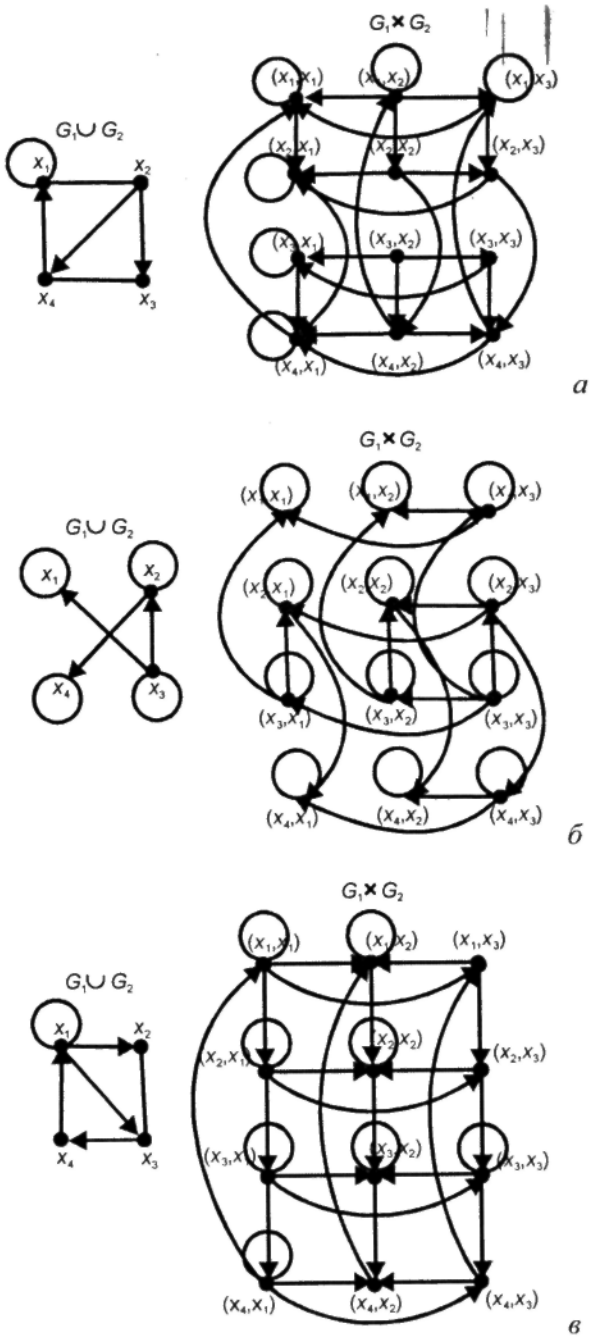


Рис. 6.2

3.9.5. а) $P=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$, $P^2=\begin{pmatrix}0&0&2&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$,

$$P^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&2\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ P^4=\begin{pmatrix}0&0&1&2&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$P^5=\begin{pmatrix}0&0&2&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$B=E+P+P^2+\ldots+P^5=\begin{pmatrix}1&1&5&4&4\\0&1&3&3&4\\0&0&2&2&2\\0&0&2&2&2\\0&0&2&2&2\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$F=C*L=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Видно, что граф содержит три сильные компоненты связности. Первая сильная компонента состоит из вершины x_1, вторая — x_2 и третья из трех вершин $\{x_3,x_4,x_5\}$. По матрице P^3 находим, что из вершины x_1 выходят три пути длиной три дуги. Первый из x_1 в x_4 — это путь $x_1-x_2-x_5-x_4$, два других — пути из x_1 в x_5: $x_1-x_2-x_3-x_5$ и $x_1-x_4-x_3-x_5$;

б) $P=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$, $P^2=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$, $P^3=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$,

$$P^4=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix},\ B=E+P+P^2+P^3+P^4=\begin{pmatrix}5&6&4&0\\0&3&2&0\\0&2&3&0\\0&4&4&1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$F=C*L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Сильных компонент связности три: вершины $\{x_1\}$, $\{x_2, x_3\}$ и $\{x_4\}$. Маршрутов длиной три ребра, исходящих из вершины x_1, четыре: $x_1 - x_1 - x_1 - x_1$, $x_1 - x_1 - x_1 - x_2$, $x_1 - x_2 - x_3 - x_2$ и $x_1 - x_1 - x_2 - x_3$;

в) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$P^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $P^4 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 10 & 10 & 13 \\ 8 & 10 & 15 & 15 \\ 9 & 13 & 15 & 18 \end{pmatrix}$,

$$B = E + P + P^2 + P^3 + P^4 = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 14 & 13 \\ 10 & 16 & 17 & 21 \\ 14 & 17 & 23 & 24 \\ 13 & 21 & 24 & 30 \end{pmatrix},$$

$$C = L = F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граф представляет собой одну связную компоненту $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Маршрутов длины три ребра, исходящих из вершины x_1, двенадцать. Это маршруты: $x_1 - x_1 - x_1 - x_1$, $x_1 - x_1 - x_3 - x_1$, $x_1 - x_3 - x_1 - x_1$, $x_1 - x_1 - x_3 - x_2$, $x_1 - x_3 - x_4 - x_2$, $x_1 - x_1 - x_1 - x_3$, $x_1 - x_3 - x_2 - x_3$, $x_1 - x_3 - x_4 - x_3$, $x_1 - x_3 - x_1 - x_3$, $x_1 - x_3 - x_2 - x_4$, $x_1 - x_1 - x_3 - x_4$, $x_1 - x_3 - x_4 - x_4$.

3.9.6. а) $e(x_1) = e(x_2) = e(x_3) = e(x_4) = e(x_5) = e(x_6) = e(x_7) = e(x_8) = 7$, $d(G) = r(G) = 7$. Все вершины периферийные и центральные. Диаметральных цепей много, например,

$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_8 - x_7 - x_6 - x_5$,

$x_2 - x_3 - x_4 - x_8 - x_7 - x_6 - x_5 - x_1$,

$x_3 - x_4 - x_8 - x_7 - x_6 - x_5 - x_1 - x_2$,

$x_4 - x_8 - x_7 - x_6 - x_5 - x_1 - x_2 - x_3$,

$x_8 - x_7 - x_6 - x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$,

$x_7 - x_6 - x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_8$,

$x_6 - x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_8 - x_7$,

$x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_8 - x_7 - x_6$,

$x_1 - x_2 - x_7 - x_8 - x_4 - x_3 - x_6 - x_5$ и т. д.;

б) $e(x_1) = e(x_8) = 7$, $e(x_2) = e(x_5) = e(x_6) = e(x_7) = 6$, $e(x_3) = e(x_4) = 5$, $d(G) = 7$, $r(G) = 5$. Периферийные вершины x_1 и x_2, центральные вершины x_3 и x_4 составляют центр графа. Диаметральные цепи: $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8$,

$x_1 - x_2 - x_3 - x_6 - x_4 - x_5 - x_7 - x_8$,

$x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - x_4 - x_6 - x_7 - x_8$;

в) $e(x_1) = e(x_3) = e(x_4) = e(x_8) = e(x_{10}) = e(x_{12}) = 8$, $e(x_6) = e(x_7) = e(x_9) = 7$, $e(x_2) = 6$, $e(x_{11}) = 5$, $e(x_5) = 4$, $d(G) = 8$, $r(G) = 5$. Периферийные вершины $x_1, x_3, x_4, x_8, x_{10}, x_{12}$, центральная вершина x_5, центр графа состоит из одной вершины. Диаметральных цепей много, например, $x_1 - x_{12} - x_2 - x_{11} - x_5 - x_6 - x_7 - x_9 - x_8$ и т. д.

3.9.7. а) Упорядочим сначала вершины графа графическим и матричным способом так, как это изложено в *разделе 3.6* (табл. 6.1). Получим изоморфный граф, изображенный на рис. 6.3.

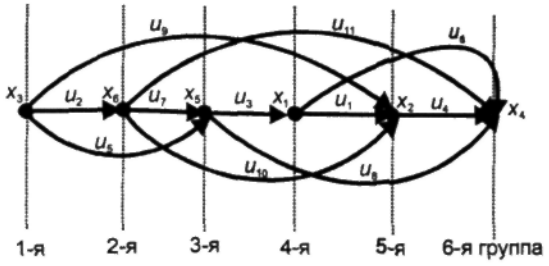


Рис. 6.3

Таблица 6.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
v_1	1	3	0	4	2	1
v_2	1	2	-	4	1	0
v_3	1	1	-	3	0	-
v_4	0	1	-	2	-	-
v_5	-	0	-	1	-	-
v_6	-	-	-	0	-	-
группы	4	5	1	6	3	2

$$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Дуги упорядочиваются аналогично вершинам. В результате получим граф, приведенный на рис. 6.4.

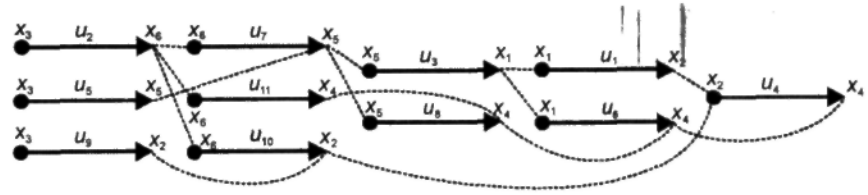


Рис. 6.4

Пункты б) и в) выполняются аналогично (рис. 6.5–6.8, табл. 6.2, 6.3).

б)

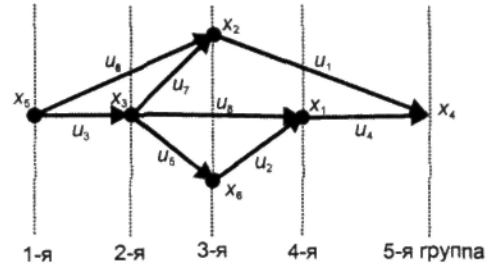


Рис. 6.5

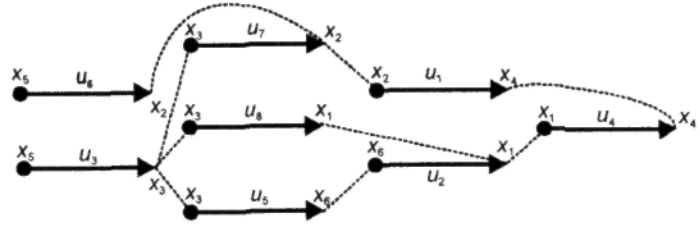


Рис. 6.6

$$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Таблица 6.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
v_1	2	2	1	2	0	1
v_2	2	1	0	2	-	1
v_3	1	0	-	2	-	0
v_4	0	-	-	1	-	-
v_5	-	-	-	0	-	-
группы	4	3	2	5	1	3

в)

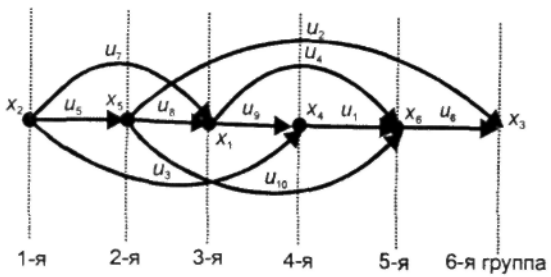


Рис. 6.7

$$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Таблица 6.3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
v_1	2	0	2	2	1	3
v_2	1	-	2	1	0	3
v_3	0	-	1	1	-	2
v_4	-	-	1	0	-	1
v_5	-	-	1	-	-	0
v_6	-	-	0	-	-	-
группы	3	1	6	4	2	5

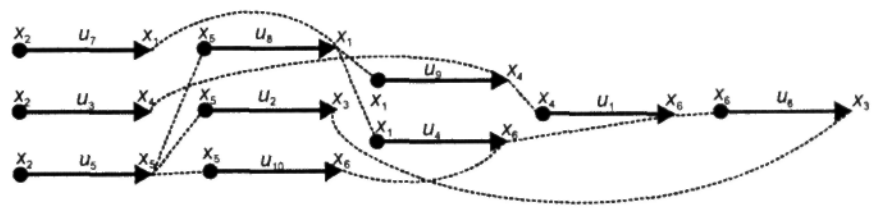


Рис. 6.8

3.9.8. Воспользуемся теоремой 3.4 и проанализируем матрицы смежности вершин изображенных на рис. 3.27 и 3.28 графов. Матрицы трех первых графов равны $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $P_2 = P_3$. Если одновременно переставить в P_2 вторую и пятую строки и второй и пятый столбец, то получится матрица P_1. Следовательно, по теореме 3.4 все три графа на рис. 3.27 изоморфны.

Для графов, изображенных на рис. 3.28, матрицы смежности вершин имеют вид: $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим сначала строки матриц P_4 и P_5. В них различны первая, третья и шестая строки, все остальные элементы совпадают. Поэтому переставлять необходимо эти строки и эти же столбцы. Однако никакая их перестановка не дает желаемого эффекта, появление единицы в нужной позиции в какой-нибудь строке влечет за собой исчезновение нужной единицы в соседней строке из-за различной инцидентности вершин x_2, x_5 и x_6 с соответствующими ребрами. Следовательно, графы, изображенные на рис. 3.28, не изоморфны.

3.9.9.

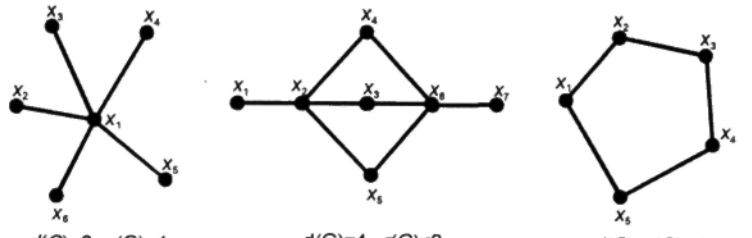


Рис. 6.9

3.9.10. Рассмотрим n-вершинный полный граф. Число его ребер равно C_n^2, а степень любой вершины $n-1$. Удалим одно ребро этого графа. Так как ребро инцидентно двум вершинам, то появится две вершины с одинаковыми степенями, равными $n-2$. Удалим еще одно ребро. Если это ребро не инцидентно ни одной из двух вершин, появившихся после удаления первого ребра, то образуются четыре вершины с одинаковыми степенями; если же второе ребро инцидентно какой-либо из двух вершин, у которых удалено первое ребро, то останутся, по крайней мере, две вершины с одинаковыми степенями $n-2$.

После удаления всех ребер, получим граф с n изолированными вершинами, т. е. степень каждой вершины будет равна нулю. Этот процесс для графа K_4 изображен на рис. 6.10.

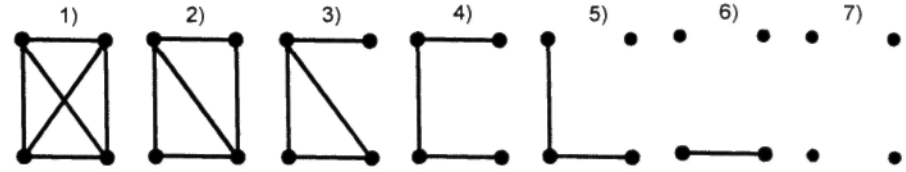


Рис. 6.10

6.2. Ответы задач практического занятия 7

3.14.1. 1) $d_{\min} = 16$, $\mu_{\min} = (x_1, x_3) - (x_3, x_6)$,

$d_{\max} = 35$, $\mu_{\max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6)$;

2) $d_{\min} = 29$, $\mu_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_6)$,

$d_{\max} = 60$, $\mu_{\max} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6)$;

3) $d_{\min} = 24$, $\mu_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6)$,

$d_{\max} = 53$, $\mu_{\max} = (x_1, x_5) - (x_5, x_2) - (x_3, x_3) - (x_3, x_6)$;

4) $d_{\min} = 18$, $\mu_{\min} = (x_1, x_4) - (x_4, x_6)$,

$d_{\max} = 40$, $\mu_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_5) - (x_5, x_6)$;

5) $d_{\min} = 30$, $\mu_{\min} = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$,

$d_{\max} = 61$, $\mu_{\max} = (x_1, x_3) - (x_3, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7)$;

6) $d_{\min}=12,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6),$

$d_{\max}=23,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_6);$

7) $d_{\min}=19,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6),$

$d_{\max}=32,\ \mu_{1\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6),$

$\mu_{2\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_6);$

8) $d_{\min}=32,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6),$

$d_{\max}=70,\ \mu_{\max}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_6);$

9) $d_{\min}=28,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6),$

$d_{\max}=48,\ \mu_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6);$

10) $d_{\min}=28,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_7),$

$d_{\max}=52,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7);$

11) $d_{\min}=8,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_6),$

$d_{\max}=21,\ \mu_{1\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6),$

$\mu_{2\max}=(x_1,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6);$

12) $d_{\min}=22,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6),$

$d_{\max}=44,\ \mu_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6);$

13) $d_{\min}=18,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6),$

$d_{\max}=34,\ \mu_{\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6);$

14) $d_{\min}=9,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6),$

$d_{\max}=21,\ \mu_{\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6);$

15) $d_{\min}=21,\ \mu_{\min}=(x_1,x_6)-(x_6,x_7),$

$d_{\max}=34,\ \mu_{\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6);$

16) $d_{\min}=20,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6),$

$d_{\max}=33,\ \mu_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6);$

17) $d_{\min}=17,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6),$

$d_{\max}=48,\ \mu_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6);$

18) $d_{\min}=33,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6),$

$d_{\max}=58,\ \mu_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6);$

19) $d_{\min}=23,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_6),$

$d_{\max}=52,\ \mu_{\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_6);$

20) $d_{\min}=17,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7),$

$d_{\max}=36,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_7);$

21) $d_{\min}=11,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6),$

$d_{\max}=23,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_6);$

22) $d_{\min}=17,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_6),$

$d_{\max}=26,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6);$

23) $d_{\min}=23,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6),$

$d_{\max}=42,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6);$

24) $d_{\min}=29,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6),$

$d_{\max}=56,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6);$

25) $d_{\min}=15,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7),$

$d_{\max}=30,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_7);$

26) $d_{\min}=16,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6),$

$d_{\max}=41,\ \mu_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6);$

27) $d_{\min}=19,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_6),$

$d_{\max}=35,\ \mu_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6);$

28) $d_{\min}=13,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6),$

$d_{\max}=30,\ \mu_{1\max}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6),$

$\mu_{2\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6);$

29) $d_{\min}=12,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6),$

$d_{\max}=23,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6);$

30) $d_{\min}=15,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_7),$

$d_{\max}=34,\ \mu_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6)-(x_6,x_7).$

3.14.2. 1) $d_{\min}=11,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7);$

2) $d_{\min}=5,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7);$

3) $d_{\min}=11,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_6)-(x_6,x_4)-(x_4,x_7);$

4) $d_{\min}=6,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_3)-(x_3,x_6)-(x_6,x_7);$

5) $d_{\min}=6,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6);$

6) $d_{\min}=1,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7);$

7) $d_{\min}=4,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7);$

8) $d_{\min}=7,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_6)-(x_6,x_7);$

9) $d_{\min}=6,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6)-(x_6,x_7);$

10) $d_{\min}=8,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6);$

11) $d_{\min}=3,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_6)-(x_6,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_7);$

12) $d_{\min}=2,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7);$

13) $d_{\min}=-8,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7);$

14) $d_{\min}=10,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7);$

15) $d_{\min}=9,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6);$

16) $d_{\min}=-3,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_6)-(x_6,x_7);$

17) $d_{\min}=2,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7);$

18) $d_{\min}=8,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_4)-(x_4,x_7);$

19) $d_{\min}=12,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)-(x_6,x_7);$

20) $d_{\min}=10,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6);$

21) $d_{\min}=-7,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_4)-(x_4,x_7);$

22) $d_{\min}=22,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_7);$

23) $d_{\min}=7,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_6)-(x_6,x_7);$

24) $d_{\min}=15,\ \mu_{1\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)-(x_6,x_7),$

$\mu_{2\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7);$

25) $d_{\min}=17,\ \mu_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6);$

26) $d_{\min}=3,\ \mu_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_4)-(x_4,x_7);$

27) $d_{\min}=9,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_7);$

28) $d_{\min}=10,\ \mu_{1\min}=(x_1,x_6)-(x_6,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)-(x_6,x_7),$

$\mu_{2\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6)-(x_6,x_7);$

29) $d_{\min}=8,\ \mu_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7);$

30) $d_{\min}=9,\ \mu_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6).$

6.3. Ответы и решения задач практического занятия 8

3.19.1. 1) $G_1'=\{(x_1,x_4),(x_2,x_4),(x_3,x_5),(x_3,x_6),(x_4,x_7),(x_6,x_7)\},$

$\omega(G_1')=14;$

$G_2'=\{(x_1,x_4),(x_2,x_4),(x_3,x_4),(x_3,x_5),(x_3,x_6),(x_6,x_7)\},$

$\omega(G_2')=14;$

2) $G'=\{(x_1,x_2),(x_2,x_4),(x_2,x_7),(x_3,x_4),(x_3,x_6),(x_4,x_5)\},$

$\omega(G')=47;$

3) $G'=\{(x_1,x_2),(x_2,x_4),(x_2,x_7),(x_3,x_7),(x_4,x_5),(x_5,x_6)\},$

$\omega(G')=52;$

4) $G'=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_1,x_5),(x_2,x_7),(x_3,x_4),(x_4,x_6)\},$

$\omega(G')=30;$

5) $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_7), (x_5, x_6)\}$, $\omega(G') = 46$;

6) $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_6), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_6)\}$, $\omega(G') = 36$;

7) $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_1, x_6), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_4, x_5)\}$, $\omega(G') = 25$;

8) $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_6), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_7)\}$, $\omega(G') = 52$;

9) $G' = \{(x_1, x_7), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_5, x_6), (x_5, x_7)\}$, $\omega(G') = 32$;

10) $G' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7)\}$, $\omega(G') = 33$;

11) $G' = \{(x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_5, x_7)\}$, $\omega(G') = 14$;

12) $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_5, x_6), (x_5, x_7)\}$, $\omega(G') = 28$;

13) $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7)\}$, $\omega(G') = 37$;

14) $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_5, x_6), (x_5, x_7)\}$, $\omega(G') = 28$;

15) $G' = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_6, x_7)\}$, $\omega(G') = 26$;

16) $G' = \{(x_1, x_7), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_4, x_5), (x_4, x_7)\}$, $\omega(G') = 25$;

17) $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_5), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_4, x_6)\}$, $\omega(G') = 63$;

18) $G' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_3, x_5), (x_4, x_6), (x_4, x_7)\}$, $\omega(G') = 28$;

19) $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_7), (x_5, x_6)\}$, $\omega(G') = 30$;

20) $G' = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7)\}$, $\omega(G') = 33$;

21) $G' = \{(x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_6), (x_3, x_7), (x_4, x_5), (x_5, x_7)\}$, $\omega(G') = 29$;

22) $G' = \{(x_1, x_7), (x_2, x_6), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_7), (x_5, x_6)\}$, $\omega(G') = 33$;

23) $G' = \{(x_1, x_3), (x_2, x_5), (x_2, x_7), (x_3, x_5), (x_4, x_5), (x_6, x_7)\}$, $\omega(G') = 34$;

24) $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$, $\omega(G') = 26$;

25) $G' = \{(x_1, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_4, x_6), (x_4, x_7), (x_5, x_6)\}$, $\omega(G') = 32$;

26) $G' = \{(x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$, $\omega(G') = 25$;

27) $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$, $\omega(G') = 27$;

28) $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_6, x_7)\}$, $\omega(G') = 27$;

29) $G' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$, $\omega(G') = 18$;

30) $G' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_6, x_7)\}$, $\omega(G') = 28$.

3.19.2. Составим матрицу Кирхгофа для полного двудольного графа $K_{m,n}$. Для того чтобы понять ее структуру, составим матрицы для графов $K_{1,4}$ и $K_{3,3}$, изображенных на рис. 3.4 *(см. раздел 3.1)*.

$$B_{K_{1,4}} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$B_{K_{3,3}} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Таким образом, для полного двудольного графа $K_{m,n}$ матрица Кирхгофа будет иметь вид:

$$B_{K_{m,n}} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{matrix}}^{m} & \overbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{matrix}}^{n} \\ \left.\begin{matrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{matrix}\right\} m & \left.\begin{matrix} m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m \end{matrix}\right\} n \end{pmatrix}$$

Вычислим алгебраическое дополнение $A_{1,1}$ элемента $b_{1,1}$. В этом случае необходимо подсчитать определитель вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{matrix}}^{m-1} & \overbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{matrix}}^{n} \\ \left.\begin{matrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{matrix}\right\} m-1 & \left.\begin{matrix} m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m \end{matrix}\right\} n \end{vmatrix}.$$

Для этого воспользуемся техникой оперирования с блочными матрицами. Рассмотрим определитель Δ, разбитый на четыре блока: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$, где A и D — квадратные матрицы. Пусть $|A| \neq 0$. Тогда вычтем из второй строки первую, умноженную слева на $-CA^{-1}$. Получим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$. Аналогично, если $|D| \neq 0$, то, вычитая в Δ из первой строки вторую, умноженную слева на $-BD^{-1}$, получим $\Delta = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|$.

Применим первую из выведенных формул. Пусть

$$A = \left.\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{matrix}}^{m-1} \end{pmatrix}\right\} m-1.$$

Тогда, очевидно, $|A| = n^{m-1}$, а

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Вычислим все необходимые члены выражения $D - CA^{-1}B$:

$$CA^{-1} = \left(\overbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{matrix}}^{m-1} \right\} n \cdot \left(\overbrace{\begin{matrix} 1/n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/n \end{matrix}}^{m-1} \right\} m-1 \right) =$$

$$= \left(\overbrace{\begin{matrix} -1/n & -1/n & \dots & -1/n \\ -1/n & -1/n & \dots & -1/n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1/n & -1/n & \dots & -1/n \end{matrix}}^{m-1} \right\} n \Bigg),$$

$$CA^{-1}B = \left(\overbrace{\begin{matrix} -1/n & -1/n & \dots & -1/n \\ -1/n & -1/n & \dots & -1/n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1/n & -1/n & \dots & -1/n \end{matrix}}^{m-1} \right\} n \Bigg).$$

$$\cdot \left(\overbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{matrix}}^{n} \right\} m-1 \right) = \left(\overbrace{\begin{matrix} \frac{m-1}{n} & \frac{m-1}{n} & \dots & \frac{m-1}{n} \\ \frac{m-1}{n} & \frac{m-1}{n} & \dots & \frac{m-1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{m-1}{n} & \frac{m-1}{n} & \dots & \frac{m-1}{n} \end{matrix}}^{n} \right\} n \Bigg),$$

$$D - CA^{-1}B = \left(\overbrace{\begin{matrix} m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m \end{matrix}}^{n} \right\} n \cdot \left(\begin{matrix} \frac{m-1}{n} & \frac{m-1}{n} & \dots & \frac{m-1}{n} \\ \frac{m-1}{n} & \frac{m-1}{n} & \dots & \frac{m-1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{m-1}{n} & \frac{m-1}{n} & \dots & \frac{m-1}{n} \end{matrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{nm-m+1}{n} & -\frac{m-1}{n} & \dots & -\frac{m-1}{n} \\ -\frac{m-1}{n} & \frac{nm-m+1}{n} & \dots & -\frac{m-1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{m-1}{n} & -\frac{m-1}{n} & \dots & \frac{mn-m+1}{n} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$|D - CA^{-1}B| = \left(\frac{m-1}{n} \right)^n \cdot \begin{vmatrix} \frac{nm-m+1}{m-1} & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \frac{nm-m+1}{m-1} & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \frac{nm-m+1}{m-1} \end{vmatrix}.$$

Прибавим в этом определителе к первому столбцу все остальные, получим

$$\left|D-CA^{-1}B\right|=\left(\frac{m-1}{n}\right)^{n}\cdot\begin{vmatrix}\frac{n}{m-1} & -1 & \dots & -1\\ \frac{n}{m-1} & \frac{nm-m+1}{m-1} & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{n}{m-1} & -1 & \dots & \frac{nm-m+1}{m-1}\end{vmatrix}=\left(\frac{m-1}{n}\right)^{n-1}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & \dots & -1\\ 1 & \frac{nm-m+1}{m-1} & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & -1 & \dots & \frac{nm-m+1}{m-1}\end{vmatrix}=\left(\frac{m-1}{n}\right)^{n-1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & \frac{nm}{m-1} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 0 & \dots & \frac{nm}{m-1}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{m-1}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{nm}{m-1}\right)^{n-1}=m^{n-1}$$ Окончательно,

$\Delta=|A|\cdot\left|D-CA^{-1}B\right|=n^{m-1}\cdot m^{n-1}$. Например, для графов $K_{1,4}$ и $K_{3,3}$, изображенных на рис. 3.2, количество остовов равно: для $K_{1,4}$ всего 1, а для $K_{3,3}$ — 81.

3.19.3. а) Здесь $n=8,\ m=12,\ k=1$. Цикломатическое число графа $\nu(G)=12-8+1=5$ равно числу хорд графа и мощности множества фундаментальных циклов $\left|C^{*}\right|=\nu(G)=5$, коциклическое число $\nu^{*}(G)=8-1=7$ равно числу ребер остова этого графа.

Выделим в исходном графе остов, тогда хордами будут ребра 3, 6, 7, 8 и 11 (рис. 6.11).

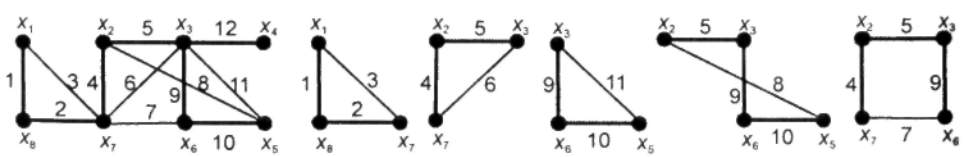


Рис. 6.11

По определению фундаментальными циклами будут следующие совокупности ребер C_1: 3, 1, 2; C_2: 6, 4, 5; C_3: 7, 4, 5, 9; C_4: 8, 5, 9, 10; C_5: 11, 9, 10. Матрица фундаментальных циклов имеет вид:

$$C^{*}=\left(C_1^{*}\middle|C_2^{*}\right)=\begin{array}{c}\\ C_1\\ C_2\\ C_2\\ C_4\\ C_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccccc}3 & 6 & 7 & 8 & 11 & 1 & 2 & 4 & 5 & 9 & 10 & 12\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\end{array}.$$

Вычислим теперь радиус и диаметр графа. $e(x_1)=7$, $e(x_2)=6$, $e(x_3)=6$, $e(x_4)=7$, $e(x_5)=6$, $e(x_6)=5$, $e(x_7)=5$, $e(x_8)=6$, $d(G)=7$, $r(G)=5$.

$P(x_4)=1$, $P(x_1)=P(x_8)=2$, $P(x_2)=P(x_5)=P(x_6)=3$, $P(x_3)=P(x_7)=5$. Поскольку у графа имеются вершины с нечетной степенью, то по теореме 3.11 граф не является эйлеровым. Выпишем теперь все пары несмежных вершин: (x_1,x_2), (x_1,x_3), (x_1,x_4), (x_1,x_6), (x_1,x_5), (x_2,x_8), (x_2,x_6), (x_2,x_4), (x_3,x_8), (x_4,x_8), (x_4,x_7), (x_4,x_6), (x_4,x_5), (x_5,x_7), (x_5,x_8), (x_6,x_8). Например, $P(x_1)+P(x_2)=2+3=5<n$, следовательно, по теореме 3.14 граф не гамильтонов. Это видно и из рис. 6.11; вершина x_4 имеет степень 1, т. е. простой цикл через нее провести невозможно.

б) Решение аналогично пункту а.

$n=8,\ m=12,\ k=1,\ \nu(G)=5,\ \left|C^{*}\right|=5,\ \nu^{*}(G)=7$. C_1: 4, 2, 6, 9, 10, 12; C_2: 5, 1, 2; C_3: 7, 1, 2, 6, 9, 10, 12; C_4: 8, 3, 6, 9; C_5: 11, 10, 12 (рис. 6.12). Матрица фундаментальных циклов

$$C^{*}=\begin{array}{c}\\ C_1\\ C_2\\ C_2\\ C_4\\ C_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccccc}4 & 5 & 7 & 8 & 11 & 1 & 2 & 3 & 6 & 9 & 10 & 12\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\end{array}.$$

$d(G)=7,\ r(G)=6$. $P(x_1)=P(x_2)=3,\ P(x_3)=P(x_5)=P(x_7)=2$, $P(x_4)=P(x_6)=P(x_8)=4$. Граф не эйлеров и не гамильтонов.

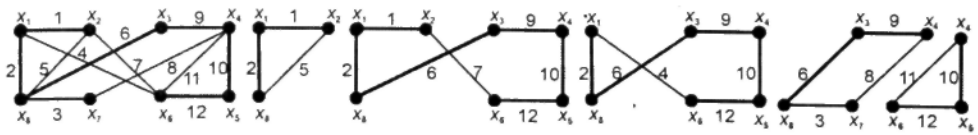


Рис. 6.12

в) $n=8,\ m=12,\ k=1,\ \nu(G)=5,\ \nu^*(G)=7$. C_1: 2, 1, 5; C_2: 3, 5, 6; C_3: 4, 5, 6, 7; C_4: 8, 6, 7; C_5: 10, 11, 12 (рис. 6.13).

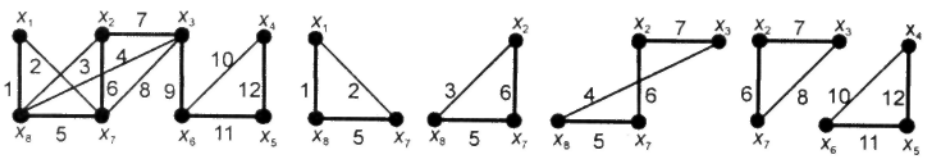


Рис. 6.13

$d(G)=7,\ r(G)=4$. $P(x_1)=P(x_4)=P(x_5)=2$, $P(x_2)=P(x_6)=3,\ P(x_3)=P(x_7)=P(x_8)=4$. Граф не эйлеров и не гамильтонов.

$$C^*=\begin{array}{c}\\ C_1\\ C_2\\ C_2\\ C_4\\ C_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccc}2&3&4&8&10&1&5&6&7&9&11&12\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccccc}1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1\end{array}\right)\end{array}.$$

г) $n=8,\ m=12,\ k=1,\ \nu(G)=5,\ \nu^*(G)=7$.

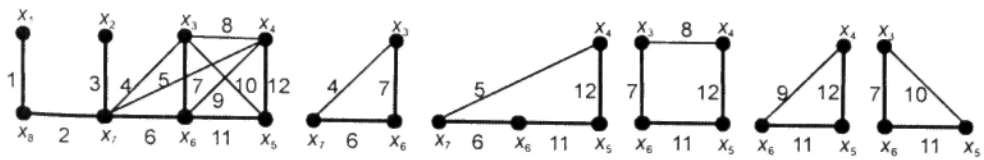


Рис. 6.14

C_1: 4, 6, 7; C_2: 5, 6, 11, 12; C_3: 8, 7, 11, 12; C_4: 9, 11, 12; C_5: 10, 7, 11 (рис. 6.14).

$$C^*=\begin{array}{c}\\ C_1\\ C_2\\ C_2\\ C_4\\ C_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccc}4&5&8&9&10&1&2&3&6&7&11&12\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0\end{array}\right)\end{array}.$$

$d(G)=6,\ r(G)=4\ P(x_1)=P(x_2)=1,\quad P(x_3)=P(x_4)=P(x_6)=4$, $P(x_5)=3,\ P(x_7)=5,\ P(x_8)=2$. Граф не эйлеров и не гамильтонов.

3.19.4. Условия этой задачи эквивалентны условиям теоремы 3.14 (теоремы Оре). Поскольку теорема 3.14 — следствие теоремы 3.13, при решении будем ее использовать. На рис. 6.15 изображен кубический гамильтонов граф, имеющий четыре основных простых цикла.

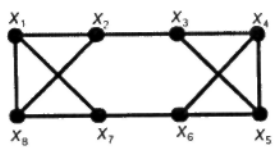


Рис. 6.15

В теореме 3.13 утверждается, что если в гамильтоновом графе степени половины вершин не превосходят их номеров, то степени другой половины вершин — не менее номеров этих вершин.

Пусть дан граф $G=(S,U)$, $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, $P(x_i)=d_i, i=\overline{1,n}$ и $d_1\le d_2\le\ldots\le d_n$ — степенная последовательность графа G. Если показать, что $d_k>k, k=\overline{1,[n/2-1]}$, то задача сведется к теореме 3.13.

Решим задачу методом от противного. Выберем индекс $t\in\{1,2,\ldots,[n/2-1]\}$. Пусть для него выполняется неравенство $d_t\le t$. Если существуют i и j такие, что $i,j\le t$ и $(x_i,x_j)\notin U$, то $P(x_i)+P(x_j)\le 2d_t\le 2t<n$, что противоречит условиям задачи: для любых вершин $x,y\in S$, $(x,y)\notin U$ (x и y не смежны) $P(x)+P(y)\ge n$.

Следовательно, вершины $x_1, x_2, ..., x_t$ попарно смежны. Но $d_l \le t, l = \overline{1,t}$, по нашему предположению. Это значит, что каждая вершина $x_l, l = \overline{1,t}$ из перечня вершин $x_1, x_2, ..., x_t$ смежна не более чем с одной вершиной $x_m, t+1 \le m \le n$ (раз они попарно смежны, то их степени могут достигать значения $t-1$, поэтому каждую из них можно соединить еще лишь с одной вершиной).

Так как $t < n/2$, то $n - t > t$ (т. е. вершин x_m больше, чем вершин x_l), следовательно, обязательно найдется хотя бы одна вершина $x_j, j = \overline{t+1,n}$, несмежная ни с одной из вершин $x_i, i = \overline{1,t}$, т. е. $P(x_j) \le n - t - 1$. Но тогда для пары несмежных вершин x_i и x_j будет $P(x_i) + P(x_j) \le n - t - 1 + t = n - 1 < n$, что противоречит условию задачи. Полученное противоречие доказывает теорему 3.14.

3.19.5. а) Исходный граф эйлеров, ибо $P(x_1) = P(x_4) = P(x_6) = P(x_8) = P(x_{11}) = P(x_{12}) = 2$, $P(x_2) = P(x_9) = 6$, $P(x_3) = P(x_5) = P(x_7) = P(x_{10}) = 4$. Выберем за начальную вершину x_1 и ребро (x_1, x_2), присвоим ребру номер 1 и перейдем в вершину x_2. Из вершины x_2 выходят пять еще не помеченных ребер, все они не являются перешейками, поэтому можно выбрать любое, например (x_2, x_3). Присвоим этому ребру номер 2 и перейдем в вершину x_3. Далее процесс продолжается аналогично до перебора всех ребер. Возможный эйлеров цикл показан на рис. 6.16.

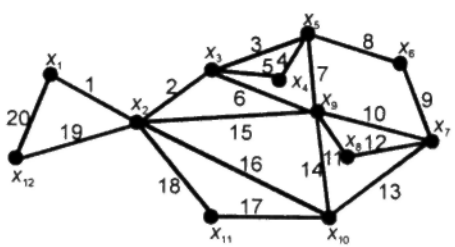


Рис. 6.16

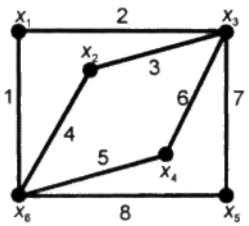


Рис. 6.17

б) Решение аналогично пункту а. Один из возможных эйлеровых циклов показан нумерацией ребер графа на рис. 6.17.

3.19.6. Сначала оценим число вершинной независимости по теореме 3.18. Здесь $P(x_1) = ... = P(x_{10}) = 3$, поэтому

$$\alpha_0(G) \ge \sum_{i=1}^{10} (1 + P(x_i))^{-1} = \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4}}_{10 \text{ членов}} = 2.5.$$

Построим множество M, для которого $|M| > \sum_{x \in S} (1 + P(x))^{-1}$. Выберем первой вершину x_1, затем удалим ее и все смежные с ней вершины x_2, x_7 и x_5. Вновь выберем вершину x_3. После этого все внешние вершины оказываются удаленными. Аналогичные действия для внутренних вершин графа дадут еще две вершины независимого множества: x_6 и x_{10}. Итак, одно из возможных множеств вершин – $\{x_1, x_3, x_6, x_{10}\}$. Поскольку граф симметричный, то это же множество будет наибольшим. Аналогично находятся другие независимые множества вершин, например $\{x_1, x_8, x_9, x_4\}$.

Таким образом, $\alpha_0(G) = 4$.

3.19.7. У графа Петерсена $n = 10$, $P(x_i) = 3, i = \overline{1,10}$, поэтому $P(x_i) < n/2 = 5$, т.е. не выполняется следствие 1 теоремы 3.14. Сама теорема 3.14 также не выполняется, ибо $P(x_i) + P(x_j) = 6 < n = 10$ при условии, что x_i и x_j не смежны и $i, j = \overline{1,10}, i \ne j$.

Проверим теперь выполнение условий основной теоремы 3.13. Для $1 \le k < 5$ проверим истинность импликации

$(P_k \le k) \Rightarrow (P_{n-k} \ge n - k)$.

$k = 1$, $P(x_1) = 3$ больше, а не меньше или равно 1,

$P(x_9) = 3$ меньше, а не больше или равно 9, $0 \to 0 = 1$;

$k = 2$, $P(x_2) = 3$ больше, а не меньше или равно 2,

$P(x_8) = 3$ меньше, а не больше или равно 8, $0 \to 0 = 1$;

$k=3,\ P(x_3)=3\le 3,$

$P(x_7)=3$ меньше, а не больше или равно 7, $1\to 0=0$;

$k=4,\ P(x_4)=3\le 4,$

$P(x_6)=3$ меньше, а не больше или равно 6, $1\to 0=0$.

Таким образом, для $k=3$ и $k=4$ условия теоремы нарушены, граф Петерсена не гамильтонов.

3.19.8. Специального алгоритма поиска доминирующего множества нет, однако когда вершин графа немного, это не составляет особого труда.

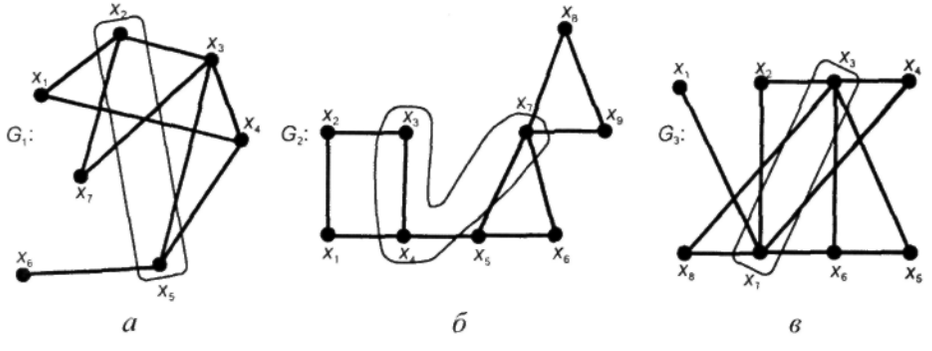


Рис. 6.18

а) Доминирующим множеством для данного графа будет, например, множество $\{x_1,x_3,x_5\}$ или $\{x_2,x_4,x_5\}$. Минимальным и наименьшим является множество $\{x_2,x_5\}$ (рис. 6.18, *а*), т. е. $\delta(G_1)=2$.

б) $\delta(G_2)=3$. Решение видно из рис. 6.18, *б*.

в) $\delta(G_3)=2$. В этом случае доминирующее множество будет и независимым множеством. Подмножество вершин графа, являющееся как независимым, так и доминирующим, называется ядром.

3.19.9. По методике, изложенной в *разделе 3.18*, построим дерево поиска клик графа, изображенного на рис. 3.44. Это дерево показано на рис. 6.19.

Таким образом, у данного графа восемь клик. Все они показаны на рис. 6.20.

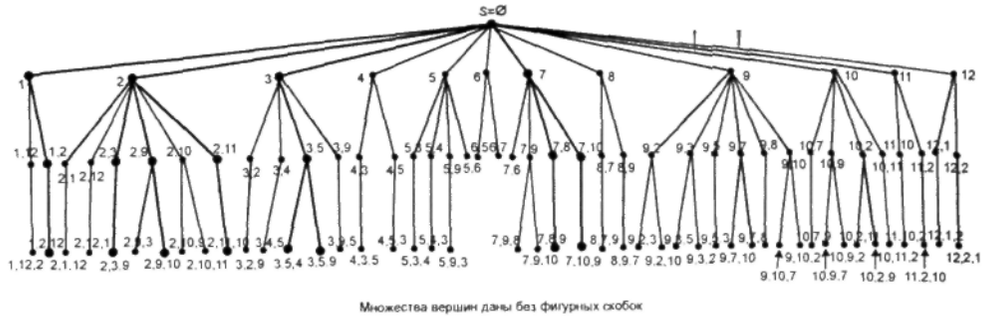


Рис. 6.19

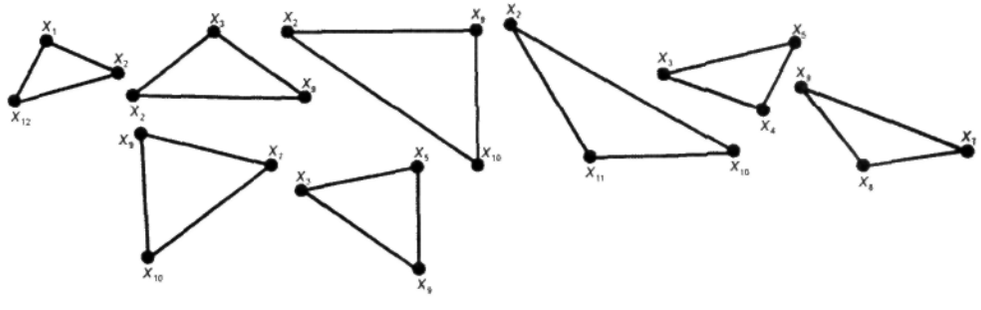


Рис. 6.20

Матрица клик данного графа имеет следующий вид:

$$C(G)=\begin{array}{c} \\ Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5\\ Q_6\\ Q_7\\ Q_8\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12}\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

б) Решение аналогично пункту а. Дерево поиска клик графа Петерсена изображено на рис. 6.21.

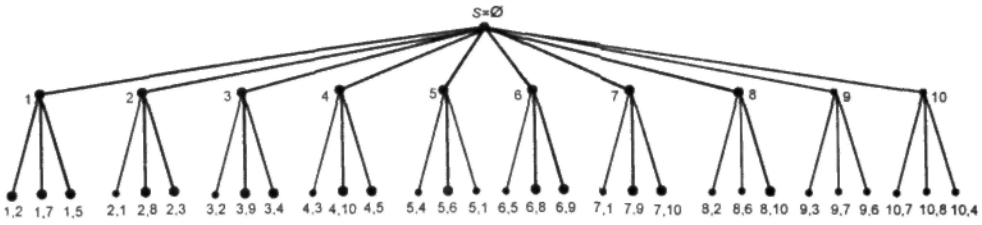


Рис. 6.21

У графа 15 клик, все они содержат по две вершины. Матрица клик графа такова:

$$C(G)=\begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13} \\ Q_{14} \\ Q_{15} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Множества вершин даны без фигурных скобок.

в) Дерево поиска клик графа, изображенного на рис. 3.46, *б*, показано на рис. 6.22. Всего у графа семь клик, состоящих из двух и трех вершин. Матрица клик графа равна

$$C(G)=\begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

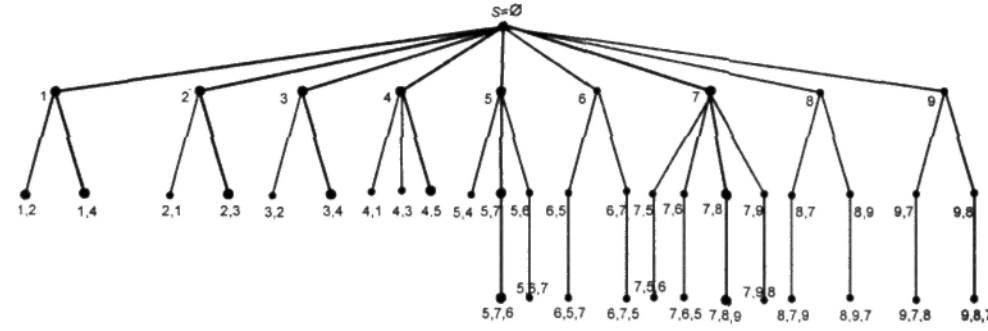


Рис. 6.22

г) Граф имеет девять клик (рис. 6.23). Матрица клик выглядит следующим образом:

$$C(G)=\begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

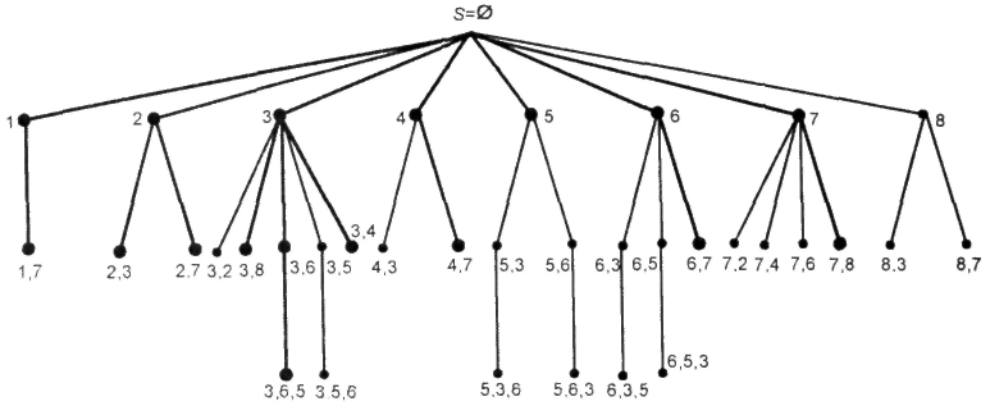


Рис. 6.23

3.19.10. Множество вершин графа независимо, если никакие две вершины этого множества не смежны. Наименьшее доминирующее множество состоит из вершин графа, которые в целом смежны со всеми остальными вершинами, не входящими в это наименьшее доминирующее множество.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяет граф, вершины наименьшего доминирующего множества которого не смежны между собой. Таким условиям удовлетворяет, например, граф, изображенный на рис. 3.46, *в*.

6.4. Ответы и решения задач практического занятия 9

3.23.1. Для ответа на вопрос задачи удобнее всего применить какой-нибудь формальный признак планарности, использующий число вершин и ребер графа G_n. Однако необходимого и достаточного признака, оперирующего только с числами n и m, нет. Из теоремы 3.21 вытекает следующее следствие: для связного планарного (n,m)-графа выполняется неравенство $m \le 3n-6$ при $n \ge 3$. Действительно, если граф планарный, то всякая его грань ограничена по крайней мере тремя ребрами. Исключение составляет лишь дерево с тремя вершинами, но для него формула $m \le 3n-6$ справедлива. Поэтому если f — число граней графа G_n и он планарен, то число $3f$ является оценкой снизу удвоенного числа ребер графа, т. е. $3f \le 2m$. По формуле (3.20.1)

$f = m-n+2$, т. е. $3n-6 \ge m$. Применим это неравенство к графам G_n при $n=6$ и $n=7$. Если $n=6$, $m=11$, $18-6=12 \ge 11$, если же $n=7$, $m=17$, $21-6=15<17$.

Можно предложить и иное решение. Пусть i — номер вершины x, j — номер вершины y, $i<j$; $i_1, i_2, ..., i_k$ — вершины, номера которых взаимно просты с i, т. е. $(i_k, i)=1$, $j_1, j_2, ..., j_l$ — вершины, номера которых взаимно просты с j.

Рассмотрим последовательность чисел $i_1, i_2, ..., i_k$ и $j_1, j_2, ..., j_l$, удовлетворяющих условиям $i_p > i+1, p=\overline{1,k}$, и $j_q > j+1, q=\overline{1,l}$. Видно, что если при этих условиях $i_p > j_q$, граф перестает быть планарным. Этот факт хорошо виден на рис. 6.24. При $n=6$ имеем $i=2$, $i_1=3$, $i_2=5$; $j=3$, $j_1=2$, $j_2=4$, $j_3=5$. По предложенному критерию следует сравнивать только i_2 и i_3, при этом $i_2=j_3$. Далее при $n=7$, $i=2$, $i_1=3$, $i_2=5$; $i_3=7$, $j=3$, $j_1=2$, $j_2=4$, $j_3=5$, $j_4=7$. Сравниваем i_2, i_3, j_3, j_4, $i_3=7>j_3=5$, граф не планарен.

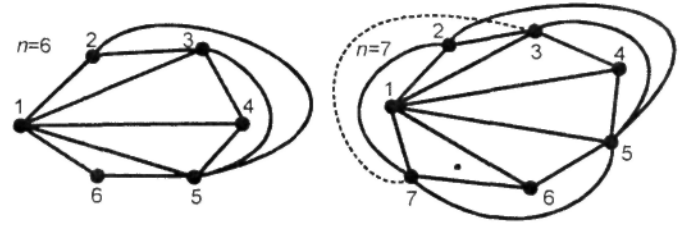


Рис. 6.24

Для предложенного множества вершин $\{1,2,...,10\}$ планарность или непланарность графов может быть легко установлена по рисункам, подобным рис. 6.24.

Итак, начиная с $n \ge 7$, графы G_n не будут планарными.

3.23.2. Все вершины $x_1, x_2, ..., x_n$ графа $G=(S_n, U_m)$ поместим в различные точки оси Ox. Рассмотрим пучок плоскостей, проходящий через Ox (рис. 6.25). Из этого пучка выберем m различных плоскостей. Каждое ребро $(x_i, x_j)=u_k$ изображаем в соответствующей плоскости по-

луокружностью, проходящей через вершины x_i и x_j. В результате получается укладка графа G в трехмерном пространстве R^3, т. к. ребра не пересекаются, потому что лежат в разных плоскостях.

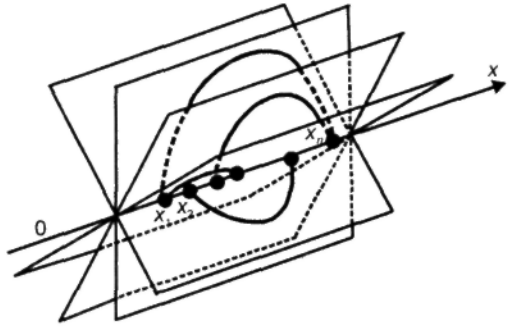


Рис. 6.25

3.23.3. а) Воспользуемся теоремой 3.22. Поскольку степень каждой вершины графа равна трем, то в нем можно попытаться выделить подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$. На рис. 6.26, *а* изображен подграф исходного графа, гомеоморфный $K_{3,3}$ (рис. 3.26, *б*). По критерию Понтрягина—Куратовского исходный граф не планарен.

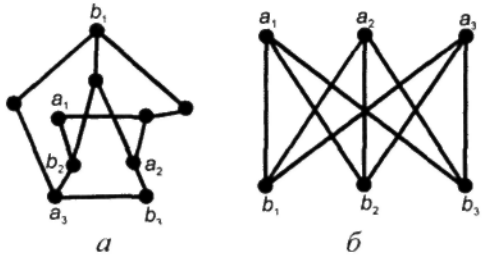


Рис. 6.26

б) Решение аналогично пункту а. В исходном графе можно выделить подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$ (рис. 6.27). Исходный граф не планарен.

в) Для проверки планарности в этом случае применим теорему 3.23. Рассмотрим подграф исходного графа, изображенный на рис. 6.28, *а*, и отождествим в нем вершины x_1 и x_6. В результате получим граф, имеющий шесть вершин (рис. 6.28, *б*), который изоморфен

графу $K_{3,3}$ (рис. 6.28, *в*). Таким образом, исходный граф имеет подграф, стягиваемый к графу $K_{3,3}$, следовательно, он не планарен.

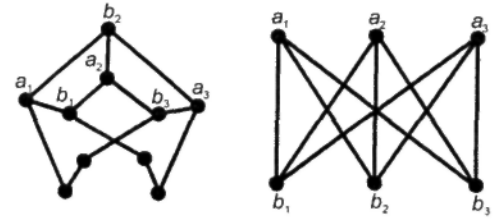


Рис. 6.27

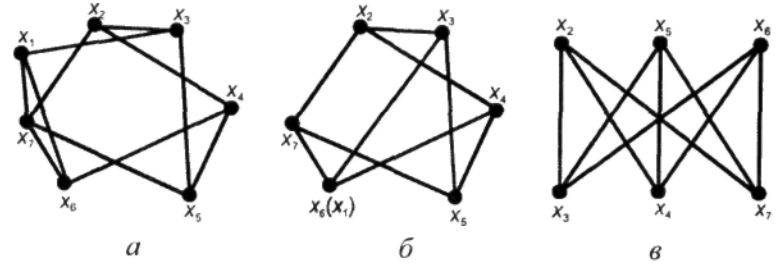


Рис. 6.28

3.23.4. а) Исходный граф G_{2n} составлен из графов K_4. Граф K_4 планарен, а поскольку все графы K_4 "приставлены" друг к другу справа, то шестое ребро каждого графа K_4 можно расположить во внешней грани, как это показано на рис. 6.29. Таким образом, исходный граф будет планарен при любом n.

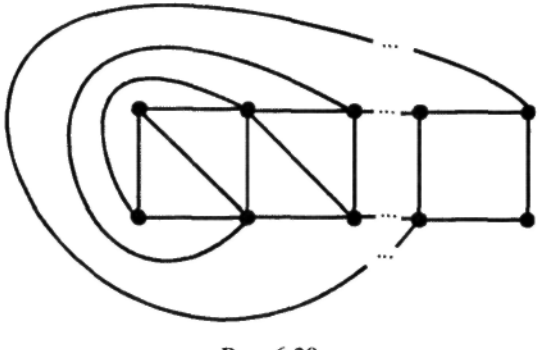
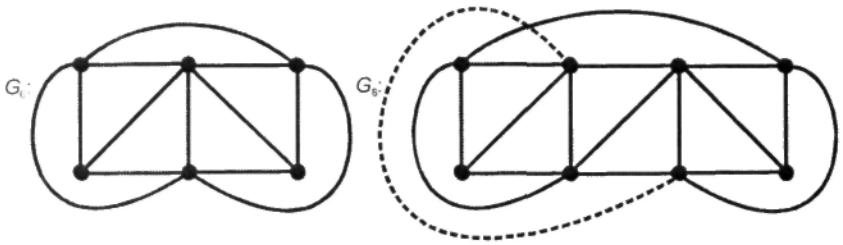


Рис. 6.29

б) Будем последовательно увеличивать размерность n и исследовать графы G_{2n}. Пусть $n=3$. Граф $G_{2n}=G_6$ еще планарен, т. к. шестое ребро каждого графа K_4 можно расположить во внешней грани (рис. 6.30, *а*). Если же $n=4$, то для графа G_8 подобная операция возможна лишь для двух крайних справа и слева графов K_4; для всех внутренних графов K_4 это невозможно (рис. 6.30, *б*), т. е. начиная с $n \geq 4$ графы G_{2n} будут непланарными.



а *б*

Рис. 6.30

3.23.5. а) Шаг 1. Выберем простой цикл $C=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, пусть $\tilde{G}=C$.

Шаг 2. Граф $\tilde{G}$ имеет четыре сегмента G_1, G_2, G_3 и G_4 (рис. 6.31).

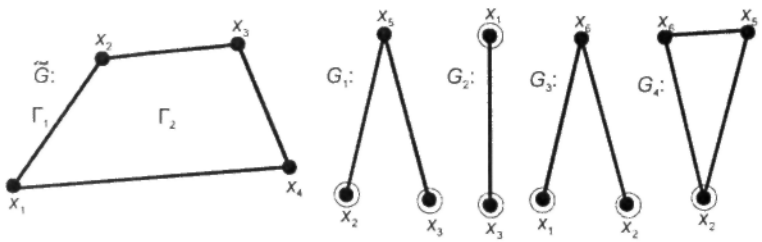


Рис. 6.31

Шаг 3. $\Gamma(G_1)=...=\Gamma(G_4)=\{\Gamma_1,\Gamma_2\}$, $\Gamma(G_i)\neq\varnothing, i=\overline{1,4}$.

Шаг 4. Нет сегмента, для которого существовала бы единственная допустимая грань.

Шаг 5. Любую α-цепь можно уложить в Γ_1 или в Γ_2.

Шаг 6. Уложим G_1 и G_3 в Γ_1, а G_2 в Γ_2. Возникнет новый граф $\tilde{G}$ и один его сегмент G_1 (рис. 6.32).

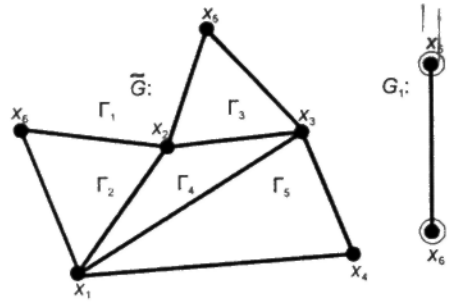


Рис. 6.32

Шаг 1-2. $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_1\}$.

Шаг 3. $\Gamma(G_1)\neq\varnothing$.

Шаг 4. Переход на шестой шаг.

Шаг 6. α-цепь $L_1=\{x_5,x_6\}$ поместим в грань Γ_1. Новый граф $\tilde{G}$ является плоской укладкой исходного графа (рис. 6.33).

Шаг 7. Конец алгоритма.

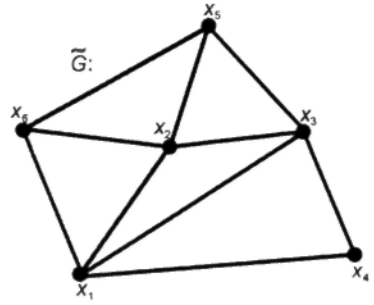


Рис. 6.33

б) Шаг 1. Пусть $C=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_6\}$, $\tilde{G}=C$.

Шаг 2. Сегментов четыре: G_1, G_2, G_3, G_4 (рис. 6.34).

Шаг 3. $\Gamma(G_1)=...=\Gamma(G_4)=\{\Gamma_1,\Gamma_2\}$, $\Gamma(G_i)\neq\varnothing, i=\overline{1,4}$.

Шаг 4. Нет сегмента с одной допустимой гранью.

Шаг 5. Любую α-цепь можно уложить в Γ_1 или в Γ_2.

Шаг 6. Уложим G_2 и G_3 в Γ_2, а G_1 и G_4 в Γ_1. Получим плоскую укладку исходного графа G на плоскости (рис. 6.35).

Шаг 7. Конец алгоритма.

12 Зак. 4382

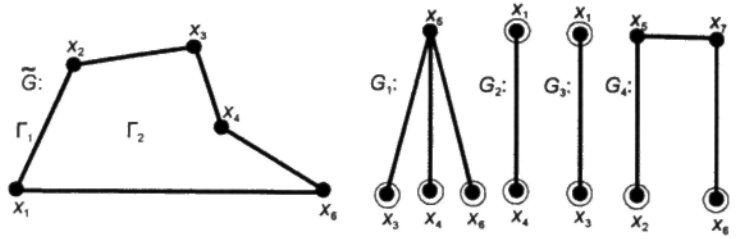


Рис. 6.34

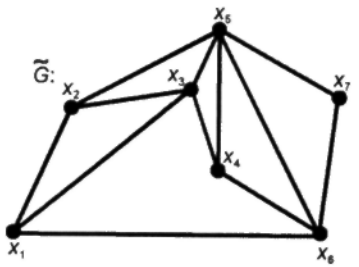


Рис. 6.35

3.23.6. а) Вычислим характеристики графа K_5. Этот граф полный, поэтому для нахождения числа планарности (искаженности) можно воспользоваться формулой (3.20.2). $sk(K_5)=C_5^2-3\cdot 5+6=1$. Толщина графа равна $t(K_5)=\left[\frac{5+7}{6}\right]=\left[\frac{12}{6}\right]=2$ *(см. раздел 3.21).*

б) $G=K_{3,3}$. $K_{3,3}$ — неполный граф, пользоваться формулой (3.20.2) нельзя. Однако в данном случае число планарности легко определить по рис. 6.36.

$sk(K_{3,3})=1$. Для толщины графа $K_{n,m}$ известна следующая формула:

$t(K_{n,m})=\left]\frac{nm}{2(n+m-2)}\right[$, где $]..[=[...]+1$. Отсюда

$t(K_{3,3})=\left]\frac{3\cdot 3}{2(3+3-2)}\right[=\left]\frac{9}{8}\right[=2$, что является очевидным результатом.

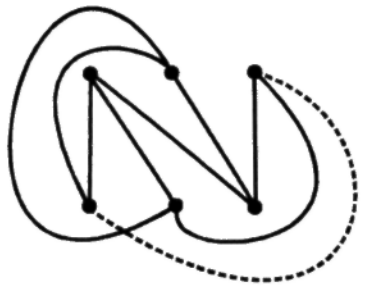


Рис. 6.36

в) G — граф Петерсена (рис. 3.45). Это неполный граф, $n=10$, $m=15$. Число планарности можно определить из рис. 6.37. $sk(G)=2$. Формулы (3.20.3) дают очень приблизительную оценку толщины графа. Например, в нашем случае $t(G)\geq\left]\frac{15}{30-6}\right[=1$ и $t(G)\geq\left[\frac{15+30-7}{30-6}\right]=1$. На самом деле $t(G)=3$ для графа Петерсена.

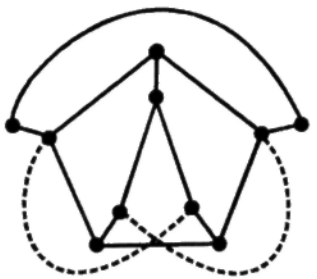


Рис. 6.37

3.23.7. а) Топологически тор эквивалентен сфере с одной ручкой (рис. 6.38). В силу стереографической проекции все планарные графы укладываются на сфере. Графы, которые нельзя уложить на плоскости, но можно уложить на торе, называются *тороидальными*. На рис. 6.39, *а* изображена такая укладка тороидального графа K_5.

б) Решение аналогично пункту а. Укладка графа $K_{3,3}$ на торе изображена на рис. 6.39, *б*.

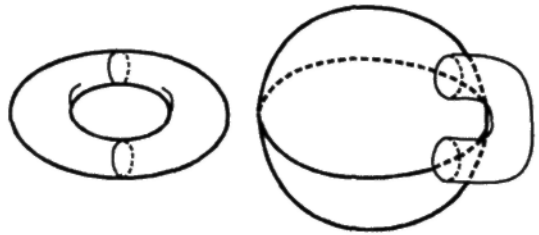
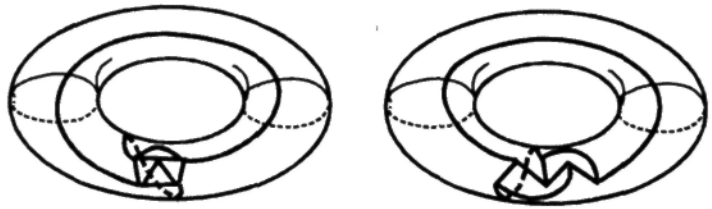


Рис. 6.38



а *б*

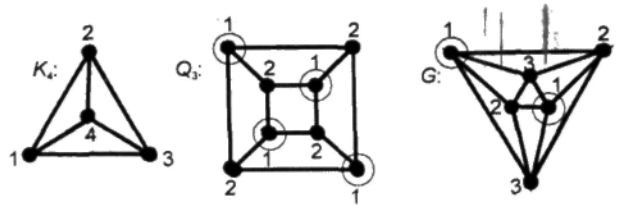
Рис. 6.39

3.23.8. а) Исходный граф K_4. Хроматические числа полных графов находятся по формуле $\chi(K_n)=n$. В нашем случае $\chi(K_4)=4$. Приведенная на рис. 6.40, *а* раскраска вершин подтверждает это.

б) Данный граф — это Q_3. Сначала оценим хроматическое число этого графа по формулам *раздела 3.22*. $P(x_i)=3, i=\overline{1,8}$. $\chi(Q_3)\le 3+1=4$. Далее т. к. $n=8,\ m=12$, то

$$\left[\frac{8}{\left[\frac{64-24}{8}\right]}\cdot\frac{1-\left\{\frac{40}{8}\right\}}{1+\left[\frac{40}{8}\right]}\right]\le\chi(Q_3)\le\left[\frac{3+\sqrt{9+8\cdot 4}}{2}\right],$$

$0\le\chi(Q_3)\le 4$. Наибольшее независимое множество вершин графа Q_3 обведено кружками на рис. 6.40, *б*. Видно, что $\alpha_0(Q_3)=4$. Тогда $\frac{8}{4}\le\chi(Q_3)\le 8-4+1$, $2\le\chi(Q_3)\le 5$. В действительности $\chi(Q_3)=2$. Раскраска вершин указана на рис. 6.40, *б*).



а *б* *в*

Рис. 6.40

в) $P(x_i)=4, i=\overline{1,6},\ m=12$. Первая оценка хроматического числа дает $\chi(G)\le 4+1=5$. Далее $\left[\frac{6}{2}\cdot\frac{1}{3}\right]\le\chi(G)\le\left[\frac{3+\sqrt{9+8\cdot 6}}{2}\right]$,

$1\le\chi(G)\le 5$, $\alpha_0(G)=2$, $\frac{6}{2}\le\chi(G)\le 6-2+1$, $3\le\chi(G)\le 5$.

На самом деле $\chi(G)=3$ (см. раскраску графа на рис. 6.40, *в*).

3.23.9. Так как все вершины полного графа K_n смежны и $P(x_i)=n, i=\overline{1,n}$, а $\chi(K_n)=n$, то удаление любой из них автоматически уменьшает степень всех оставшихся вершин на единицу. Оставшийся граф будет также полным графом K_{n-1} и $\chi(K_{n-1})=n-1$. Таким образом, K_n — критический граф. Любой простой цикл C_{2n} изоморфен неполному двудольному графу (рис. 6.41), поэтому $\chi(C_{2n})=2$. При удалении любой вершины простой цикл превращается в дерево T, а $\chi(T)=2$. Таким образом, если n четно, то C_{2n} — некритический граф. Если же n нечетно, то, очевидно, что $\chi(C_{2n+1})=3$ (рис. 6.42). При удалении любой вершины опять получается дерево и $\chi(T)=2$, т. е. C_{2n+1} — критический граф.

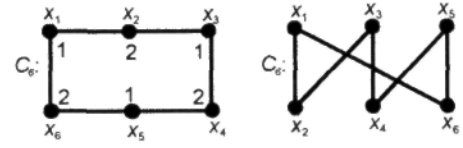


Рис. 6.41

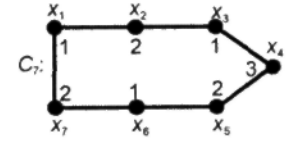
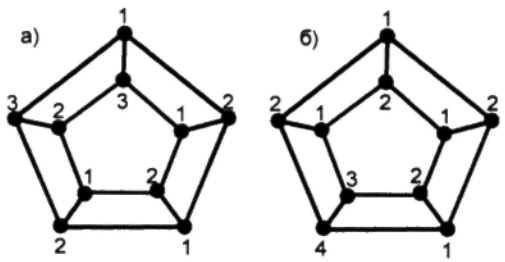


Рис. 6.42

3.23.10. На рис. 6.43, *а* приведена минимальная 3-раскраска графа G. Правильная 2-раскраска невозможна, ибо это недвудольный граф. Алгоритм последовательной раскраски использует четыре цвета (рис. 6.43, *б*). Последовательная раскраска этого графа не является минимальной.



а *б*

Рис. 6.43

Ответы и решения задач практического занятия 10

3.29.1. 1) $\varphi_{\max}=43$; 2) $\varphi_{\max}=27$; 3) $\varphi_{\max}=22$; 4) $\varphi_{\max}=25$; 5) $\varphi_{\max}=35$; 6) $\varphi_{\max}=18$; 7) $\varphi_{\max}=42$; 8) $\varphi_{\max}=22$; 9) $\varphi_{\max}=24$; 10) $\varphi_{\max}=31$; 11) $\varphi_{\max}=25$; 12) $\varphi_{\max}=31$; 13) $\varphi_{\max}=29$; 14) $\varphi_{\max}=26$; 15) $\varphi_{\max}=41$; 16) $\varphi_{\max}=20$; 17) $\varphi_{\max}=21$; 18) $\varphi_{\max}=24$; 19) $\varphi_{\max}=19$; 20) $\varphi_{\max}=34$; 21) $\varphi_{\max}=33$; 22) $\varphi_{\max}=22$; 23) $\varphi_{\max}=33$; 24) $\varphi_{\max}=40$; 25) $\varphi_{\max}=35$; 26) $\varphi_{\max}=14$; 27) $\varphi_{\max}=38$; 28) $\varphi_{\max}=18$; 29) $\varphi_{\max}=34$; 30) $\varphi_{\max}=15$.

3.29.2. 1) $\varphi_{\max}=43$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=28$, $\mu_1=(x_1,x_2)-(x_2,x_7)$, $d(\mu_1)=5$, $\theta_1=13$, стоимость первого потока $T_1=65$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_2)=9$, $\theta_2=9$, $T_2=81$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_3)=12$, $\theta_3=16$, $T_3=72$, $T_{\text{общая}}=218$;

2) $\varphi_{\max}=24$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=16$, $\mu_1=(x_1,x_4)-(x_4,x_7)$, $d(\mu_1)=7$, $\theta_1=4$, стоимость первого потока $T_1=28$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_2)=9$, $\theta_2=6$, $T_2=54$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_2)-(x_2,x_7)$, $d(\mu_3)=11$, $\theta_3=3$, $T_3=33$. После третьей модернизации $\mu_4=(x_1,x_4)-(x_4,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_4)=14$, $\theta_4=5$, $T_4=84$, $T_{\text{общая}}=199$;

3) $\varphi_{\max}=22$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=14$, $\mu_1=(x_1,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_1)=9$, $\theta_1=7$, стоимость первого потока $T_1=63$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_7)$, $d(\mu_2)=9$, $\theta_2=5$, $T_2=45$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_2)-(x_2,x_7)$, $d(\mu_3)=10$, $\theta_3=4$, $T_3=20$, $T_{\text{общая}}=128$;

4) $\varphi_{\max}=25$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=16$, $\mu_1=(x_1,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_1)=18$, $\theta_1=5$, стоимость первого потока $T_1=90$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7)$, $d(\mu_2)=18$, $\theta_2=3$, $T_2=54$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_7)$, $d(\mu_3)=21$, $\theta_3=2$, $T_3=42$, После третьей модернизации $\mu_4=(x_1,x_5)-(x_5,x_7)$, $d(\mu_4)=37$, $\theta_4=15$, $T_4=222$, $T_{\text{общая}}=408$;

5) $\varphi_{\max}=35$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=23$, $\mu_1=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_1)=12$, $\theta_1=8$, стоимость первого потока $T_1=96$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_7)$, $d(\mu_2)=18$, $\theta_2=1$, $T_2=18$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_7)$, $d(\mu_3)=19$, $\theta_3=26$, $T_3=266$, $T_{\text{общая}}=380$;

6) $\varphi_{\max}=18$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=12$, $\mu_1=(x_1,x_2)-(x_2,x_7)$, $d(\mu_1)=17$, $\theta_1=6$, стоимость первого потока $T_1=102$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_7)$, $d(\mu_2)=18$, $\theta_2=4$, $T_2=72$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_4)-(x_4,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_3)=20$, $\theta_3=7$, $T_3=40$, $T_{\text{общая}}=214$;

7) $\varphi_{\max}=43$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=28$, $\mu_1=(x_1,x_7)$, $d(\mu_1)=6$, $\theta_1=7$, стоимость первого потока $T_1=42$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_2)=16$, $\theta_2=9$, $T_2=144$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_3)=17$, $\theta_3=14$, $T_3=204$, $T_{\text{общая}}=390$;

8) $\varphi_{\max}=22$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=14$, $\mu_1=(x_1,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_1)=12$, $\theta_1=10$, стоимость первого потока $T_1=120$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_4)-(x_4,x_7)$, $d(\mu_2)=19$, $\theta_2=5$, $T_2=76$, $T_{\text{общая}}=196$;

9) $\varphi_{\max}=24$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=16$, $\mu_1=(x_1,x_2)-(x_2,x_7)$, $d(\mu_1)=9$, $\theta_1=6$, стоимость первого потока $T_1=54$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_2)=13$, $\theta_2=8$, $T_2=104$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_3)=22$, $\theta_3=9$, $T_3=44$, $T_{\text{общая}}=202$;

10) $\varphi_{\max}=31$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=20$, $\mu_1=(x_1,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_1)=10$, $\theta_1=8$, стоимость первого потока $T_1=80$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_4)-(x_4,x_7)$, $d(\mu_2)=12$, $\theta_2=6$, $T_2=72$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_2)-(x_2,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_3)=21$, $\theta_3=5$, $T_3=105$. После третьей модернизации $\mu_4=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_7)$, $d(\mu_4)=27$, $\theta_4=12$, $T_4=27$, $T_{\text{общая}}=284$;

11) $\varphi_{\max}=25$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=16$, $\mu_1=(x_1,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_1)=4$, $\theta_1=4$, стоимость первого потока $T_1=16$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_7)$, $d(\mu_2)=8$, $\theta_2=6$, $T_2=48$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_3)=9$, $\theta_3=9$, $T_3=54$, $T_{\text{общая}}=112$;

12) $\varphi_{\max}=31$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=20$, $\mu_1=(x_1,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_1)=29$, $\theta_1=10$, стоимость первого потока $T_1=290$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_5)-(x_5,x_7)$, $d(\mu_2)=31$, $\theta_2=9$, $T_2=279$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_7)$, $d(\mu_3)=59$, $\theta_3=5$, $T_3=59$, $T_{\text{общая}}=628$;

13) $\varphi_{\max}=29$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=19$, $\mu_1=(x_1,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_1)=7$, $\theta_1=7$, стоимость первого потока $T_1=49$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_2)=13$, $\theta_2=11$, $T_2=143$. После второй модернизации $\mu_3=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7)$, $d(\mu_3)=15$, $\theta_3=1$, $T_3=15$, $T_{\text{общая}}=207$;

14) $\varphi_{\max}=26$, $\theta=\left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]=17$, $\mu_1=(x_1,x_6)-(x_6,x_7)$, $d(\mu_1)=14$, $\theta_1=7$, стоимость первого потока $T_1=98$. После первой модернизации $\mu_2=(x_1,x_3)-(x_3,x_7)$, $d(\mu_2)=15$, $\theta_2=8$,

$T_2 = 120$. После второй модернизации $\mu_3 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_3) = 19$, $\theta_3 = 11$, $T_3 = 38$, $T_{общая} = 256$;

15) $\varphi_{max} = 41$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 27$, $\mu_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_1) = 6$, $\theta_1 = 7$, стоимость первого потока $T_1 = 42$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_6) - (x_6, x_5) - (x_5, x_7)$, $d(\mu_2) = 8$, $\theta_2 = 2$, $T_2 = 16$. После второй модернизации $\mu_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$, $d(\mu_3) = 11$, $\theta_3 = 16$, $T_3 = 176$, После третьей модернизации $\mu_4 = (x_1, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_7)$, $d(\mu_4) = 14$, $\theta_4 = 1$, $T_4 = 14$, После четвертой модернизации $\mu_5 = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_5) = 17$, $\theta_5 = 15$, $T_5 = 17$, $T_{общая} = 265$;

16) $\varphi_{max} = 20$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 13$, $\mu_1 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_1) = 8$, $\theta_1 = 4$, стоимость первого потока $T_1 = 32$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_2) = 9$, $\theta_2 = 5$, $T_2 = 45$. После второй модернизации $\mu_3 = (x_1, x_5) - (x_5, x_3) - (x_3, x_7)$, $d(\mu_3) = 12$, $\theta_3 = 2$, $T_3 = 24$. После третьей модернизации $\mu_4 = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_3) - (x_3, x_7)$, $d(\mu_3) = 14$, $\theta_4 = 5$, $T_4 = 28$, $T_{общая} = 129$;

17) $\varphi_{max} = 24$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 16$, $\mu_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$, $d(\mu_1) = 19$, $\theta_1 = 9$, стоимость первого потока $T_1 = 171$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_2) = 27$, $\theta_2 = 4$, $T_2 = 108$. После второй модернизации $\mu_3 = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_3) = 29$, $\theta_3 = 11$, $T_3 = 87$, $T_{общая} = 366$;

18) $\varphi_{max} = 24$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 16$, $\mu_1 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$, $d(\mu_1) = 12$, $\theta_1 = 11$, стоимость первого потока $T_1 = 132$. После

первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_7)$, $d(\mu_2) = 18$, $\theta_2 = 7$, $T_2 = 90$, $T_{общая} = 222$;

19) $\varphi_{max} = 19$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 12$, $\mu_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_1) = 23$, $\theta_1 = 8$, стоимость первого потока $T_1 = 184$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_6) - (x_6, x_3) - (x_3, x_7)$, $d(\mu_2) = 24$, $\theta_2 = 7$, $T_2 = 96$, $T_{общая} = 280$;

20) $\varphi_{max} = 34$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 22$, $\mu_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_1) = 46$, $\theta_1 = 7$, стоимость первого потока $T_1 = 322$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$, $d(\mu_2) = 58$, $\theta_2 = 12$, $T_2 = 696$. После второй модернизации $\mu_3 = (x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_7)$, $d(\mu_3) = 72$, $\theta_3 = 5$, $T_3 = 216$, $T_{общая} = 1234$;

21) $\varphi_{max} = 33$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 22$, $\mu_1 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_1) = 44$, $\theta_1 = 7$, стоимость первого потока $T_1 = 308$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$, $d(\mu_2) = 68$, $\theta_2 = 16$, $T_2 = 1020$, $T_{общая} = 1328$;

22) $\varphi_{max} = 22$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 14$, $\mu_1 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$, $d(\mu_1) = 20$, $\theta_1 = 8$, стоимость первого потока $T_1 = 160$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_6)$, $d(\mu_2) = 21$, $\theta_2 = 10$, $T_2 = 126$, $T_{общая} = 286$;

23) $\varphi_{max} = 33$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 22$, $\mu_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_1) = 9$, $\theta_1 = 6$, стоимость первого потока $T_1 = 54$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$, $d(\mu_2) = 11$, $\theta_2 = 11$,

$T_2 = 121$. После второй модернизации $\mu_3 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_3) = 12$, $\theta_3 = 10$, $T_3 = 60$, $T_{общая} = 235$;

24) $\varphi_{max} = 40$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 26$, $\mu_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$, $d(\mu_1) = 14$, $\theta_1 = 20$, стоимость первого потока $T_1 = 280$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_2) = 16$, $\theta_2 = 9$, $T_2 = 96$, $T_{общая} = 376$;

25) $\varphi_{max} = 35$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 23$, $\mu_1 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_1) = 16$, $\theta_1 = 11$, стоимость первого потока $T_1 = 176$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$, $d(\mu_2) = 17$, $\theta_2 = 9$, $T_2 = 153$. После второй модернизации $\mu_3 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_3) = 22$, $\theta_3 = 7$, $T_3 = 66$, $T_{общая} = 395$;

26) $\varphi_{max} = 14$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 9$, $\mu_1 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$, $d(\mu_1) = 34$, $\theta_1 = 6$, стоимость первого потока $T_1 = 204$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_2) = 44$, $\theta_2 = 5$, $T_2 = 132$, $T_{общая} = 336$;

27) $\varphi_{max} = 38$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 25$, $\mu_1 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_1) = 6$, $\theta_1 = 10$, стоимость первого потока $T_1 = 60$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_7)$, $d(\mu_2) = 10$, $\theta_2 = 15$, $T_2 = 150$, $T_{общая} = 210$;

28) $\varphi_{max} = 18$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 12$, $\mu_1 = (x_1, x_5) - (x_5, x_7)$, $d(\mu_1) = 11$, $\theta_1 = 9$, стоимость первого потока $T_1 = 99$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_2) = 13$, $\theta_2 = 4$, $T_2 = 39$, $T_{общая} = 138$;

29) $\varphi_{max} = 34$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 22$, $\mu_1 = (x_1, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_1) = 14$, $\theta_1 = 13$, стоимость первого потока $T_1 = 182$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_2) = 15$, $\theta_2 = 10$, $T_2 = 150$, $T_{общая} = 332$;

30) $\varphi_{max} = 15$, $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{max}\right] = 10$, $\mu_1 = (x_1, x_2) - (x_2, x_7)$, $d(\mu_1) = 21$, $\theta_1 = 5$, стоимость первого потока $T_1 = 105$. После первой модернизации $\mu_2 = (x_1, x_3) - (x_3, x_4) - (x_4, x_7)$, $d(\mu_2) = 25$, $\theta_2 = 3$, $T_2 = 75$. После второй модернизации $\mu_3 = (x_1, x_6) - (x_6, x_7)$, $d(\mu_3) = 27$, $\theta_3 = 4$, $T_3 = 54$, $T_{общая} = 234$.

3.29.3. Сетевые графики для всех вариантов заданий приведены на рис. 6.44–6.73.

1) Путей шесть. $t_{кр} = 36$. $t_р(x_1) = 0$, $t_р(x_2) = 5$, $t_р(x_3) = 8$, $t_р(x_4) = 11$, $t_р(x_5) = 29$, $t_р(x_6) = 36$, $t_п(x_6) = 36$, $t_п(x_5) = 29$, $t_п(x_4) = 11$, $t_п(x_3) = 11$, $t_п(x_2) = 11$, $t_п(x_1) = 0$;
$R(x_1) = R(x_4) = R(x_5) = R(x_6) = 0$, $R(x_2) = 6$, $R(x_3) = 3$;
$t_{р.н}(a_1) = 0$, $t_{р.о}(a_1) = 5$, $t_{п.н}(a_1) = 6$, $t_{п.о}(a_1) = 11$, $R_п(a_1) = 6$, $R_с(a_1) = 0$, $t_{р.н}(a_2) = 0$, $t_{р.о}(a_2) = 8$, $t_{п.н}(a_2) = 3$, $t_{п.о}(a_2) = 11$, $R_п(a_2) = 3$, $R_с(a_2) = 0$, $t_{р.н}(a_3) = 0$, $t_{р.о}(a_3) = 11$, $t_{п.н}(a_3) = 0$, $t_{п.о}(a_3) = 11$, $R_п(a_3) = 0$, $R_с(a_3) = 0$, $t_{р.н}(a_4) = 5$, $t_{р.о}(a_4) = 11$, $t_{п.н}(a_4) = 23$, $t_{п.о}(a_4) = 29$, $R_п(a_4) = 18$, $R_с(a_4) = 18$, $t_{р.н}(a_5) = 8$, $t_{р.о}(a_5) = 20$, $t_{п.н}(a_5) = 17$, $t_{п.о}(a_5) = 29$, $R_п(a_5) = 9$, $R_с(a_5) = 9$, $t_{р.н}(a_6) = 11$, $t_{р.о}(a_6) = 29$, $t_{п.н}(a_6) = 11$, $t_{п.о}(a_6) = 29$, $R_п(a_6) = 0$, $R_с(a_6) = 0$, $t_{р.н}(a_7) = 29$, $t_{р.о}(a_7) = 36$, $t_{п.н}(a_7) = 29$, $t_{п.о}(a_7) = 36$, $R_п(a_7) = 0$, $R_с(a_7) = 0$.

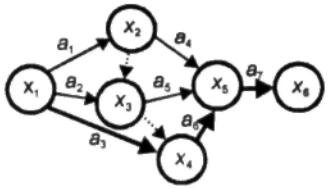


Рис. 6.44

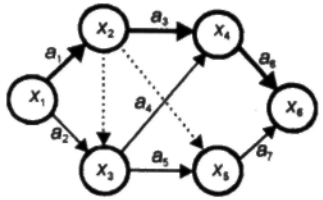


Рис. 6.45

2) Путей шесть. $t_{кр} = 33$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=9$, $t_р(x_3)=9$,
$t_р(x_4)=20$, $t_р(x_5)=13$, $t_р(x_6)=33$, $t_п(x_6)=33$, $t_п(x_5)=18$,
$t_п(x_4)=20$, $t_п(x_3)=13$, $t_п(x_2)=9$, $t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_2)=$
$=R(x_4)=R(x_6)=0$, $R(x_3)=4$, $R(x_5)=5$;
$t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=9$, $t_{п.н}(a_1)=0$, $t_{п.о}(a_1)=9$,
$R_п(a_1)=0$, $R_с(a_1)=0$,
$t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=5$, $t_{п.н}(a_2)=8$,
$t_{п.о}(a_2)=13$, $R_п(a_2)=8$, $R_с(a_2)=4$,
$t_{р.н}(a_3)=9$, $t_{р.о}(a_3)=20$, $t_{п.н}(a_3)=9$,
$t_{п.о}(a_3)=20$, $R_п(a_3)=0$, $R_с(a_3)=0$,
$t_{р.н}(a_4)=9$, $t_{р.о}(a_4)=16$, $t_{п.н}(a_4)=13$,
$t_{п.о}(a_4)=20$, $R_п(a_4)=4$, $R_с(a_4)=4$,
$t_{р.н}(a_5)=9$, $t_{р.о}(a_5)=13$, $t_{п.н}(a_5)=14$,
$t_{п.о}(a_5)=18$, $R_п(a_5)=5$, $R_с(a_5)=0$,
$t_{р.н}(a_6)=20$, $t_{р.о}(a_6)=33$, $t_{п.н}(a_6)=20$,
$t_{п.о}(a_6)=33$, $R_п(a_6)=0$, $R_с(a_6)=0$,
$t_{р.н}(a_7)=13$, $t_{р.о}(a_7)=28$, $t_{п.н}(a_7)=33$,
$t_{п.о}(a_7)=18$, $R_п(a_7)=5$, $R_с(a_7)=5$.

3) Путей семь. $t_{кр} = 29$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=7$, $t_р(x_3)=11$,
$t_р(x_4)=5$, $t_р(x_5)=17$, $t_р(x_6)=17$, $t_р(x_7)=29$, $t_п(x_7)=29$,
$t_п(x_6)=17$, $t_п(x_5)=17$, $t_п(x_4)=13$, $t_п(x_3)=13$, $t_п(x_2)=7$,
$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_2)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_3)=6$,

$R(x_4)=8$; $t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=7$, $t_{п.н}(a_1)=0$, $t_{п.о}(a_1)=7$,
$R_п(a_1)=0$, $R_с(a_1)=0$,
$t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=11$, $t_{п.н}(a_2)=2$, $t_{п.о}(a_2)=13$,
$R_п(a_2)=2$, $R_с(a_2)=0$,
$t_{р.н}(a_3)=0$, $t_{р.о}(a_3)=5$, $t_{п.н}(a_3)=8$, $t_{п.о}(a_3)=13$,
$R_п(a_3)=8$, $R_с(a_3)=0$,
$t_{р.н}(a_4)=7$, $t_{р.о}(a_4)=17$, $t_{п.н}(a_4)=7$,
$t_{п.о}(a_4)=17$, $R_п(a_4)=0$, $R_с(a_4)=0$,
$t_{р.н}(a_5)=11$, $t_{р.о}(a_5)=15$, $t_{п.н}(a_5)=13$,
$t_{п.о}(a_5)=17$, $R_п(a_5)=2$, $R_с(a_5)=2$,
$t_{р.н}(a_6)=5$, $t_{р.о}(a_6)=18$, $t_{п.н}(a_6)=16$,
$t_{п.о}(a_6)=29$, $R_п(a_6)=11$, $R_с(a_6)=11$,
$t_{р.н}(a_7)=17$, $t_{р.о}(a_7)=29$, $t_{п.н}(a_7)=17$,
$t_{п.о}(a_7)=29$, $R_п(a_7)=0$, $R_с(a_7)=0$,
$t_{р.н}(a_8)=17$, $t_{р.о}(a_8)=25$, $t_{п.н}(a_8)=21$,
$t_{п.о}(a_8)=29$, $R_п(a_8)=4$, $R_с(a_8)=4$.

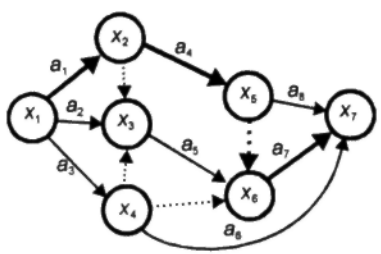


Рис. 6.46

4) Путей восемь. $t_{кр} = 17$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=3$, $t_р(x_3)=4$,
$t_р(x_4)=4$, $t_р(x_5)=6$, $t_р(x_6)=13$, $t_р(x_7)=10$, $t_р(x_8)=17$,
$t_п(x_8)=17$, $t_п(x_7)=11$, $t_п(x_6)=13$, $t_п(x_5)=9$, $t_п(x_4)=4$,
$t_п(x_3)=4$, $t_п(x_2)=6$, $t_п(x_1)=0$;
$R(x_1)=R(x_3)=R(x_4)=R(x_6)=R(x_8)=0$,

$R(x_7)=1$, $R(x_5)=3$, $R(x_6)=1$;
$t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=3$, $t_{п.н}(a_1)=3$,
$t_{п.о}(a_1)=6$, $R_п(a_1)=3$, $R_с(a_1)=0$,
$t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=2$, $t_{п.н}(a_2)=2$,
$t\ (a_2)=4$, $R\ (a_2)=2$, $R_с(a_2)=2$,
$t_{р.н}(a_3)=0$, $t_{р.о}(a_3)=4$, $t_{п.н}(a_3)=0$,
$t_{п.о}(a_3)=4$, $R_п(a_1)=0$, $R_с(a_1)=0$,
$t_{р.н}(a_4)=3$, $t_{р.о}(a_4)=6$, $t_{п.н}(a_4)=6$,
$t_{п.о}(a_4)=9$, $R_п(a_4)=3$, $R_с(a_4)=0$,
$t_{р.н}(a_5)=3$, $t_{р.о}(a_5)=8$, $t_{п.н}(a_5)=8$,
$t_{п.о}(a_5)=13$, $R_п(a_5)=5$, $R_с(a_5)=5$,
$t_{р.н}(a_6)=4$, $t_{р.о}(a_6)=13$, $t_{п.н}(a_6)=4$,
$t_{п.о}(a_6)=13$, $R_п(a_6)=0$, $R_с(a_6)=0$,
$t_{р.н}(a_7)=4$, $t_{р.о}(a_7)=10$, $t_{п.н}(a_7)=5$,
$t_{п.о}(a_7)=11$, $R_п(a_7)=1$, $R_с(a_7)=0$,
$t_{р.н}(a_8)=6$, $t_{р.о}(a_8)=14$, $t_{п.н}(a_8)=11$,
$t_{п.о}(a_8)=17$, $R_п(a_8)=3$, $R_с(a_8)=3$,
$t_{р.н}(a_9)=13$, $t_{р.о}(a_9)=17$, $t_{п.н}(a_9)=13$,
$t_{п.о}(a_9)=17$, $R_п(a_9)=0$, $R_с(a_9)=0$,
$t_{р.н}(a_{10})=10$, $t_{р.о}(a_{10})=16$, $t_{п.н}(a_{10})=11$,
$t_{п.о}(a_{10})=17$, $R_п(a_{10})=1$, $R_с(a_{10})=1$.

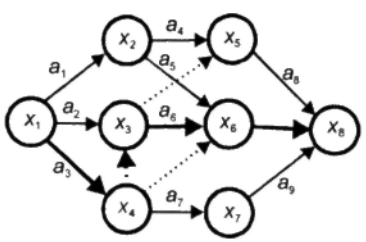


Рис. 6.47

5) Путей семь. $t_{кр}=26$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=6$, $t_р(x_3)=8$,
$t_р(x_4)=11$, $t_р(x_5)=15$, $t_р(x_6)=15$, $t_р(x_7)=26$, $t_п(x_7)=26$,
$t_п(x_6)=15$, $t_п(x_5)=15$, $t_п(x_4)=17$, $t_п(x_3)=8$, $t_п(x_2)=12$,
$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_3)=R(x_5)=R(x_6)=$
$=R(x_7)=0$, $R(x_2)=6$, $R(x_4)=6$;
$t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=6$, $t_{п.н}(a_1)=6$,
$t_{п.о}(a_1)=12$, $R_п(a_1)=6$, $R_с(a_1)=0$,
$t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=9$, $t_{п.н}(a_2)=6$,
$t_{п.о}(a_2)=15$, $R_п(a_2)=6$, $R_с(a_2)=6$,
$t_{р.н}(a_3)=0$, $t_{р.о}(a_3)=8$, $t_{п.н}(a_3)=0$,
$t_{п.о}(a_3)=8$, $R_п(a_3)=0$, $R_с(a_3)=0$,
$t_{р.н}(a_4)=6$, $t_{р.о}(a_4)=11$, $t_{п.н}(a_4)=12$,
$t_{п.о}(a_4)=17$, $R_п(a_4)=6$, $R_с(a_4)=0$,
$t_{р.н}(a_5)=8$, $t_{р.о}(a_5)=11$, $t_{п.н.}(a_5)=12$,
$t_{п.о}(a_5)=15$, $R_п(a_5)=4$, $R_с(a_5)=4$,
$t_{р.н}(a_6)=8$, $t_{р.о}(a_6)=15$, $t_{п.н}(a_6)=8$,
$t_{п.о}(a_6)=15$, $R_п(a_6)=0$, $R_с(a_6)=0$,
$t_{р.н}(a_7)=11$, $t_{р.о}(a_7)=20$, $t_{п.н}(a_7)=17$,
$t_{п.о}(a_7)=26$, $R_п(a_7)=6$, $R_с(a_7)=6$,
$t_{р.н}(a_8)=15$, $t_{р.о}(a_8)=26$, $t_{п.н}(a_8)=15$,
$t_{п.о}(a_8)=26$, $R_п(a_8)=0$, $R_с(a_8)=0$,
$t_{р.н}(a_9)=15$, $t_{р.о}(a_9)=25$, $t_{п.н}(a_9)=16$,
$t_{п.о}(a_9)=26$, $R_п(a_9)=1$, $R_с(a_9)=1$.

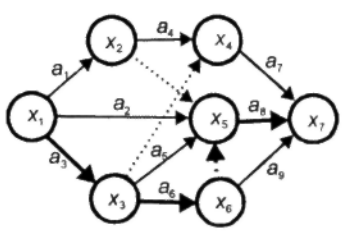


Рис. 6.48

6) Путей шесть. $t_{кр}=50$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=11$, $t_р(x_3)=9$,
$t_р(x_4)=14$, $t_р(x_5)=17$, $t_р(x_6)=22$, $t_р(x_7)=35$, $t_р(x_8)=50$,
$t_п(x_8)=50$, $t_п(x_7)=35$, $t_п(x_6)=22$, $t_п(x_5)=25$,
$t_п(x_4)=14$, $t_п(x_3)=9$, $t_п(x_2)=19$, $t_п(x_1)=0$;
$R(x_1)=R(x_2)=R(x_4)=R(x_6)=R(x_7)=R(x_8)=0$,
$R(x_2)=8$, $R(x_5)=8$; $t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=11$, $t_{п.н}(a_1)=8$,
$t_{п.о}(a_1)=19$, $R_п(a_1)=8$, $R_с(a_1)=0$,
$t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=9$, $t_{п.н}(a_2)=0$,
$t_{п.о}(a_2)=9$, $R_п(a_2)=0$, $R_с(a_2)=0$,
$t_{р.н}(a_3)=0$, $t_{р.о}(a_3)=7$, $t_{п.н}(a_3)=7$,
$t_{п.о}(a_3)=14$, $R_п(a_3)=7$, $R_с(a_3)=7$,
$t_{р.н}(a_4)=9$, $t_{р.о}(a_4)=14$, $t_{п.н}(a_4)=9$,
$t_{п.о}(a_4)=14$, $R_п(a_4)=0$, $R_с(a_4)=0$,
$t_{р.н}(a_5)=11$, $t_{р.о}(a_5)=17$, $t_{п.н}(a_5)=19$,
$t_{п.о}(a_5)=25$, $R_п(a_5)=8$, $R_с(a_5)=0$,
$t_{р.н}(a_6)=14$, $t_{р.о}(a_6)=22$, $t_{п.н}(a_6)=14$,
$t_{п.о}(a_6)=22$, $R_п(a_6)=0$, $R_с(a_6)=0$,
$t_{р.н}(a_7)=17$, $t_{р.о}(a_7)=27$, $t_{п.н}(a_7)=25$,
$t_{п.о}(a_7)=35$, $R_п(a_7)=8$, $R_с(a_7)=8$,
$t_{р.н}(a_8)=22$, $t_{р.о}(a_8)=35$, $t_{п.н}(a_8)=22$,
$t_{п.о}(a_8)=35$, $R_п(a_8)=0$, $R_с(a_8)=0$,
$t_{р.н}(a_9)=35$, $t_{р.о}(a_9)=50$, $t_{п.н}(a_9)=35$,
$t_{п.о}(a_9)=50$, $R_п(a_9)=0$, $R_с(a_9)=0$.

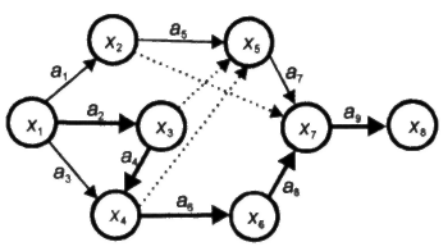


Рис. 6.49

7) Путей шесть. $t_{кр}=15$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=3$, $t_р(x_3)=6$,
$t_р(x_4)=4$, $t_р(x_5)=10$, $t_р(x_6)=15$, $t_п(x_6)=15$, $t_п(x_5)=10$,
$t_п(x_4)=8$, $t_п(x_3)=6$, $t_п(x_2)=4$, $t_п(x_1)=0$;
$R(x_1)=R(x_3)=R(x_5)=R(x_6)=0$, $R(x_2)=1$, $R(x_4)=4$;
$t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=3$, $t_{п.н}(a_1)=1$,
$t_{п.о}(a_1)=4$, $R_п(a_1)=1$, $R_с(a_1)=0$,
$t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=6$, $t_{п.н}(a_2)=0$,
$t_{п.о}(a_2)=6$, $R_п(a_2)=0$, $R_с(a_2)=0$,
$t_{р.н}(a_3)=0$, $t_{р.о}(a_3)=4$, $t_{п.н}(a_3)=4$,
$t_{п.о}(a_3)=8$, $R_п(a_3)=4$, $R_с(a_3)=0$,
$t_{р.н}(a_4)=3$, $t_{р.о}(a_4)=9$, $t_{п.н}(a_4)=4$,
$t_{п.о}(a_4)=10$, $R_п(a_4)=1$, $R_с(a_4)=1$,
$t_{р.н}(a_5)=6$, $t_{р.о}(a_5)=10$, $t_{п.н}(a_5)=6$,
$t_{п.о}(a_5)=10$, $R_п(a_5)=0$, $R_с(a_5)=0$,
$t_{р.н}(a_6)=4$, $t_{р.о}(a_6)=11$, $t_{п.н}(a_6)=8$,
$t_{п.о}(a_6)=15$, $R_п(a_6)=4$, $R_с(a_6)=4$,
$t_{р.н}(a_7)=10$, $t_{р.о}(a_7)=15$, $t_{п.н}(a_7)=10$,
$t_{п.о}(a_7)=15$, $R_п(a_7)=0$, $R_с(a_7)=0$.

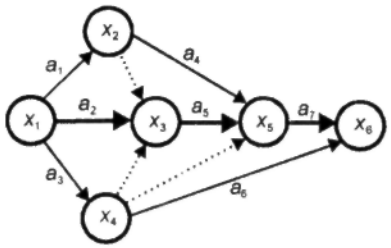


Рис. 6.50

8) Путей семь. $t_{кр}=25$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=10$, $t_р(x_3)=10$,
$t_р(x_4)=16$, $t_р(x_5)=17$, $t_р(x_6)=25$, $t_п(x_6)=25$, $t_п(x_5)=20$,
$t_п(x_4)=16$, $t_п(x_3)=13$, $t_п(x_2)=10$, $t_п(x_1)=0$;

$R(x_1)=R(x_2)=R(x_4)=R(x_6)=0$, $R(x_3)=3$, $R(x_5)=3$;

$t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=10$, $t_{п.н}(a_1)=0$,

$t_{п.о}(a_1)=10$, $R_п(a_1)=0$, $R_с(a_1)=0$,

$t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=12$, $t_{п.н}(a_2)=4$,

$t_{п.о}(a_2)=16$, $R_п(a_2)=4$, $R_с(a_2)=4$,

$t_{р.н}(a_3)=0$, $t_{р.о}(a_3)=9$, $t_{п.н}(a_3)=4$,

$t_{п.о}(a_3)=13$, $R_п(a_3)=4$, $R_с(a_3)=1$,

$t_{р.н}(a_4)=10$, $t_{р.о}(a_4)=16$, $t_{п.н}(a_4)=10$,

$t_{п.о}(a_4)=16$, $R_п(a_4)=0$, $R_с(a_4)=0$,

$t_{р.н}(a_5)=10$, $t_{р.о}(a_5)=17$, $t_{п.н}(a_5)=14$,

$t_{п.о}(a_5)=20$, $R_п(a_5)=3$, $R_с(a_5)=0$,

$t_{р.н}(a_6)=16$, $t_{р.о}(a_6)=25$, $t_{п.н}(a_6)=16$,

$t_{п.о}(a_6)=25$, $R_п(a_6)=0$, $R_с(a_6)=0$,

$t_{р.н}(a_7)=17$, $t_{р.о}(a_7)=22$, $t_{п.н}(a_7)=20$,

$t_{п.о}(a_7)=25$, $R_п(a_7)=3$, $R_с(a_7)=3$.

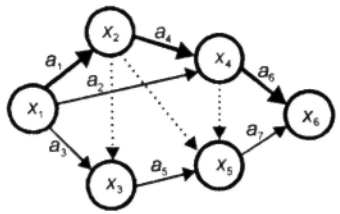


Рис. 6.51

9) Путей одиннадцать. $t_{кр}=32$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=5$, $t_р(x_3)=6$, $t_р(x_4)=14$, $t_р(x_5)=20$, $t_р(x_6)=20$, $t_р(x_7)=32$, $t_п(x_7)=32$, $t_п(x_6)=20$, $t_п(x_5)=20$, $t_п(x_4)=14$, $t_п(x_3)=9$, $t_п(x_2)=5$, $t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_2)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_3)=3$;

$t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=5$, $t_{п.н}(a_1)=0$, $t_{п.о}(a_1)=5$, $R_п(a_1)=0$,

$R_с(a_1)=0$, $t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=6$, $t_{п.н}(a_2)=3$, $t_{п.о}(a_2)=9$,

$R_п(a_2)=3$, $R_с(a_2)=0$, $t_{р.н}(a_3)=5$, $t_{р.о}(a_3)=14$, $t_{п.н}(a_3)=5$,

$t_{п.о}(a_3)=14$, $R_п(a_3)=0$, $R_с(a_3)=0$,

$t_{р.н}(a_4)=6$, $t_{р.о}(a_4)=17$, $t_{п.н}(a_4)=9$,

$t_{п.о}(a_4)=20$, $R_п(a_4)=3$, $R_с(a_4)=3$,

$t_{р.н}(a_5)=6$, $t_{р.о}(a_5)=10$, $t_{п.н}(a_5)=16$,

$t_{п.о}(a_5)=20$, $R_п(a_5)=10$, $R_с(a_5)=10$,

$t_{р.н}(a_6)=14$, $t_{р.о}(a_6)=20$, $t_{п.н}(a_6)=14$,

$t_{п.о}(a_6)=20$, $R_п(a_6)=0$, $R_с(a_6)=0$,

$t_{р.н}(a_7)=14$, $t_{р.о}(a_7)=24$, $t_{п.н}(a_7)=22$,

$t_{п.о}(a_7)=32$, $R_п(a_7)=8$, $R_с(a_7)=8$,

$t_{р.н}(a_8)=20$, $t_{р.о}(a_8)=28$, $t_{п.н}(a_8)=24$,

$t_{п.о}(a_8)=32$, $R_п(a_8)=4$, $R_с(a_8)=4$,

$t_{р.н}(a_9)=20$, $t_{р.о}(a_9)=32$, $t_{п.н}(a_9)=20$,

$t_{п.о}(a_9)=32$, $R_п(a_9)=0$, $R_с(a_9)=0$.

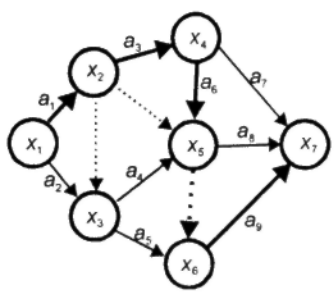


Рис. 6.52

10) Путей девять. $t_{кр}=51$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=10$, $t_р(x_3)=10$, $t_р(x_4)=12$, $t_р(x_5)=40$, $t_р(x_6)=25$, $t_р(x_7)=51$, $t_п(x_7)=51$, $t_п(x_6)=25$, $t_п(x_5)=40$, $t_п(x_4)=12$, $t_п(x_3)=12$, $t_п(x_2)=12$, $t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_2)=2$, $R(x_3)=2$;

$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=10,\ t_{п.н}(a_1)=2,$
$t_{п.о}(a_1)=12,\ R_п(a_1)=2,\ R_с(a_1)=0,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=9,\ t_{п.н}(a_2)=3,$
$t_{п.о}(a_2)=12,\ R_п(a_2)=3,\ R_с(a_2)=1,$
$t_{р.н}(a_3)=0,\ t_{р.о}(a_3)=12,\ t_{п.н}(a_3)=0,$
$t_{п.о}(a_3)=12,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=10,\ t_{р.о}(a_4)=17,\ t_{п.н}(a_4)=33,$
$t_{п.о}(a_4)=40,\ R_п(a_4)=23,\ R_с(a_4)=8,$
$t_{р.н}(a_5)=10,\ t_{р.о}(a_5)=18,\ t_{п.н}(a_5)=32,$
$t_{п.о}(a_5)=40,\ R_п(a_5)=22,\ R_с(a_5)=7,$
$t_{р.н}(a_6)=12,\ t_{р.о}(a_6)=25,\ t_{п.н}(a_6)=12,$
$t_{п.о}(a_6)=25,\ R_п(a_6)=0,\ R_с(a_6)=0,$
$t_{р.н}(a_7)=25,\ t_{р.о}(a_7)=40,\ t_{п.н}(a_7)=25,$
$t_{п.о}(a_7)=40,\ R_п(a_7)=0,\ R_с(a_7)=0,$
$t_{р.н}(a_8)=40,\ t_{р.о}(a_8)=51,\ t_{п.н}(a_8)=40,$
$t_{п.о}(a_8)=51,\ R_п(a_8)=0,\ R_с(a_8)=0,$
$t_{р.н}(a_9)=25,\ t_{р.о}(a_9)=34,\ t_{п.н}(a_9)=42,$
$t_{п.о}(a_9)=51,\ R_п(a_9)=17,\ R_с(a_9)=17.$

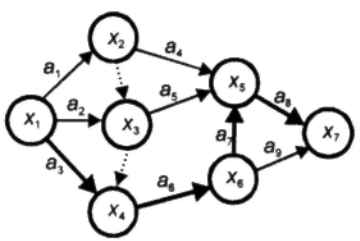


Рис. 6.53

11) Путей шесть. $t_{кр}=19$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=8$, $t_р(x_3)=10$,
$t_р(x_4)=13$, $t_р(x_5)=13$, $t_р(x_6)=13$, $t_р(x_7)=19$, $t_п(x_7)=19$,
$t_п(x_6)=14$, $t_п(x_5)=13$, $t_п(x_4)=13$, $t_п(x_3)=11$, $t_п(x_2)=9$,

$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_7)=0$,
$R(x_2)=1, R(x_3)=1,\ R(x_6)=1;$
$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=8,\ t_{п.н}(a_1)=1,$
$t_{п.о}(a_1)=9,\ R_п(a_1)=1,\ R_с(a_1)=0,$
$t_{р.н}(a_2)=8,\ t_{р.о}(a_2)=12,\ t_{п.н}(a_2)=9,$
$t_{п.о}(a_2)=13,\ R_п(a_2)=1,\ R_с(a_2)=1,$
$t_{р.н}(a_3)=0,\ t_{р.о}(a_3)=10,\ t_{п.н}(a_3)=1,$
$t_{п.о}(a_3)=11,\ R_п(a_3)=1,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=0,\ t_{р.о}(a_4)=13,\ t_{п.н}(a_4)=0,$
$t_{п.о}(a_4)=13,\ R_п(a_4)=0,\ R_с(a_4)=0,$
$t_{р.н}(a_5)=10,\ t_{р.о}(a_5)=13,\ t_{п.н}(a_5)=11,$
$t_{п.о}(a_5)=14,\ R_п(a_5)=1,\ R_с(a_5)=0,$
$t_{р.н}(a_6)=13,\ t_{р.о}(a_6)=19,\ t_{п.н}(a_6)=13,$
$t_{п.о}(a_6)=19,\ R_п(a_6)=0,\ R_с(a_6)=0,$
$t_{р.н}(a_7)=13,\ t_{р.о}(a_7)=18,\ t_{п.н}(a_7)=14,$
$t_{п.о}(a_7)=19,\ R_п(a_7)=1,\ R_с(a_7)=1.$

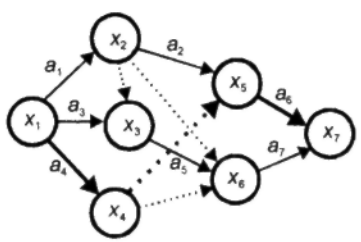


Рис. 6.54

12) Путей семь. $t_{кр}=28$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=6$, $t_р(x_3)=6$,
$t_р(x_4)=18$, $t_р(x_5)=18$, $t_р(x_6)=28$, $t_п(x_6)=28$, $t_п(x_5)=18$,
$t_п(x_4)=18$, $t_п(x_3)=6$, $t_п(x_2)=6$, $t_п(x_1)=0$;
$R(x_1)=R(x_2)=R(x_3)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=0$;
$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=4,\ t_{п.н}(a_1)=2,$

$t_{п.о}(a_1)=6,\ R_п(a_1)=2, R_с(a_1)=2,$

$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=6,\ t_{п.н}(a_2)=0,$

$t_{п.о}(a_2)=6,\ R_п(a_2)=0,\ R_с(a_2)=0,$

$t_{р.н}(a_3)=6,\ t_{р.о}(a_3)=18,\ t_{п.н}(a_3)=6,$

$t_{п.о}(a_3)=18,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$

$t_{р.н}(a_4)=6,\ t_{р.о}(a_4)=10,\ t_{п.н}(a_4)=14,$

$t_{п.о}(a_4)=18, R_п(a_4)=10, R_с(a_4)=10,$

$t_{р.н}(a_5)=6,\ t_{р.о}(a_5)=11,\ t_{п.н}(a_5)=13,$

$t_{п.о}(a_5)=18,\ R_п(a_5)=7,\ R_с(a_5)=7,$

$t_{р.н}(a_6)=18,\ t_{р.о}(a_6)=28,\ t_{п.н}(a_6)=18,$

$t_{п.о}(a_6)=28, R_п(a_6)=0, R_с(a_6)=0,$

$t_{р.н}(a_7)=18,\ t_{р.о}(a_7)=25,\ t_{п.н}(a_7)=21,$

$t_{п.о}(a_7)=28,\ R_п(a_7)=3,\ R_с(a_7)=3.$

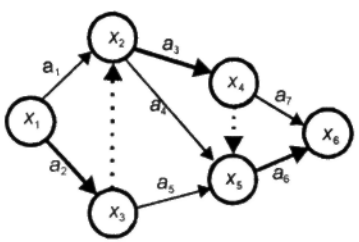


Рис. 6.55

13) Путей десять. $t_{кр}=30$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=8$,

$t_р(x_3)=11$, $t_р(x_4)=18$, $t_р(x_5)=23$, $t_р(x_6)=25$,

$t_р(x_7)=30$, $t_п(x_7)=30$, $t_п(x_6)=25$, $t_п(x_5)=24$,

$t_п(x_4)=21$, $t_п(x_3)=11$, $t_п(x_2)=11$, $t_п(x_1)=0$;

$R(x_1)=R(x_3)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_2)=3$, $R(x_4)=3$, $R(x_5)=1$;

$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=8,\ t_{п.н}(a_1)=3,$

$t_{п.о}(a_1)=11,\ R_п(a_1)=3,\ R_с(a_1)=0,$

$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=11,\ t_{п.н}(a_2)=0,$

$t_{п.о}(a_2)=11,\ R_п(a_2)=0,\ R_с(a_2)=0,$

$t_{р.н}(a_3)=8,\ t_{р.о}(a_3)=18,\ t_{п.н}(a_3)=11,$

$t_{п.о}(a_3)=21,\ R_п(a_3)=3,\ R_с(a_3)=0,$

$t_{р.н}(a_4)=8,\ t_{р.о}(a_4)=14,\ t_{п.н}(a_4)=18,$

$t_{п.о}(a_4)=24,\ R_п(a_4)=10,\ R_с(a_4)=9,$

$t_{р.н}(a_5)=11,\ t_{р.о}(a_5)=23,\ t_{п.н}(a_5)=12,$

$t_{п.о}(a_5)=24,\ R_п(a_5)=1,\ R_с(a_5)=0,$

$t_{р.н}(a_6)=11,\ t_{р.о}(a_6)=25,\ t_{п.н}(a_6)=11,$

$t_{п.о}(a_6)=25,\ R_п(a_6)=0,\ R_с(a_6)=0,$

$t_{р.н}(a_7)=18,\ t_{р.о}(a_7)=27,\ t_{п.н}(a_7)=21,$

$t_{п.о}(a_7)=30,\ R_п(a_7)=3,\ R_с(a_7)=3,$

$t_{р.н}(a_8)=23,\ t_{р.о}(a_8)=29,\ t_{п.н}(a_8)=24,$

$t_{п.о}(a_8)=30,\ R_п(a_8)=1,\ R_с(a_8)=1,$

$t_{р.н}(a_9)=25,\ t_{р.о}(a_9)=30,\ t_{п.н}(a_9)=25,$

$t_{п.о}(a_9)=30,\ R_п(a_9)=0,\ R_с(a_9)=0.$

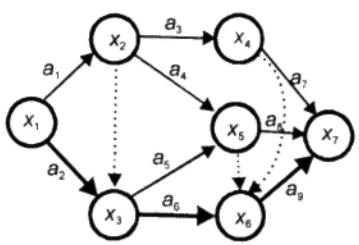


Рис. 6.56

14) Путей семь. $t_{кр}=22$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=6$, $t_р(x_3)=6$,

$t_р(x_4)=8$, $t_р(x_5)=17$, $t_р(x_6)=12$, $t_р(x_7)=22$, $t_п(x_7)=22$,

$t_п(x_6)=13$, $t_п(x_5)=17$, $t_п(x_4)=10$, $t_п(x_3)=6$, $t_п(x_2)=6$,

$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_2)=R(x_3)=R(x_5)=R(x_7)=0$,

$R(x_4)=2$, $R(x_6)=1$; $t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=5,\ t_{п.н}(a_1)=1,$

$t_{\text{п.о}}(a_1)=6,\ R_{\text{п}}(a_1)=1,\ R_{\text{с}}(a_1)=1,$
$t_{\text{р.н}}(a_2)=0,\ t_{\text{р.о}}(a_2)=6,\ t_{\text{п.н}}(a_2)=0,$
$t_{\text{п.о}}(a_2)=6,\ R_{\text{п}}(a_2)=0,\ R_{\text{с}}(a_2)=0,$
$t_{\text{р.н}}(a_3)=0,\ t_{\text{р.о}}(a_3)=8,\ t_{\text{п.н}}(a_3)=2,$
$t_{\text{п.о}}(a_3)=10,\ R_{\text{п}}(a_3)=2,\ R_{\text{с}}(a_3)=0,$
$t_{\text{р.н}}(a_4)=6,\ t_{\text{р.о}}(a_4)=17,\ t_{\text{п.н}}(a_4)=6,$
$t_{\text{п.о}}(a_4)=17,\ R_{\text{п}}(a_4)=0,\ R_{\text{с}}(a_4)=0,$
$t_{\text{р.н}}(a_5)=8,\ t_{\text{р.о}}(a_5)=15,\ t_{\text{п.н}}(a_5)=10,$
$t_{\text{п.о}}(a_5)=17,\ R_{\text{п}}(a_5)=2,\ R_{\text{с}}(a_5)=2,$
$t_{\text{р.н}}(a_6)=6,\ t_{\text{р.о}}(a_6)=12,\ t_{\text{п.н}}(a_6)=7,$
$t_{\text{п.о}}(a_6)=13,\ R_{\text{п}}(a_6)=1,\ R_{\text{с}}(a_6)=0,$
$t_{\text{р.н}}(a_7)=17,\ t_{\text{р.о}}(a_7)=22,\ t_{\text{п.н}}(a_7)=17,$
$t_{\text{п.о}}(a_7)=22,\ R_{\text{п}}(a_7)=0,\ R_{\text{с}}(a_7)=0,$
$t_{\text{р.н}}(a_8)=12,\ t_{\text{р.о}}(a_8)=21,\ t_{\text{п.н}}(a_8)=13,$
$t_{\text{п.о}}(a_8)=22,\ R_{\text{п}}(a_8)=1,\ R_{\text{с}}(a_8)=1,$
$t_{\text{р.н}}(a_9)=8,\ t_{\text{р.о}}(a_9)=15,\ t_{\text{п.н}}(a_9)=15,$
$t_{\text{п.о}}(a_9)=22,\ R_{\text{п}}(a_9)=7,\ R_{\text{с}}(a_9)=7.$

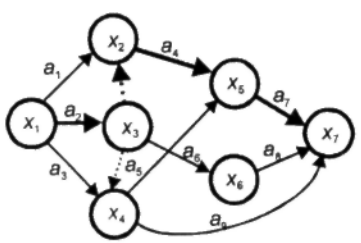


Рис. 6.57

15) Путей шесть. $t_{\text{кр}}=22$. $t_{\text{р}}(x_1)=0$, $t_{\text{р}}(x_2)=7$, $t_{\text{р}}(x_3)=7$,
$t_{\text{р}}(x_4)=10$, $t_{\text{р}}(x_5)=10$, $t_{\text{р}}(x_6)=17$, $t_{\text{р}}(x_7)=22$,
$t_{\text{п}}(x_7)=22$, $t_{\text{п}}(x_6)=17$, $t_{\text{п}}(x_5)=10$, $t_{\text{п}}(x_4)=10$,
$t_{\text{п}}(x_3)=10$, $t_{\text{п}}(x_2)=12$, $t_{\text{п}}(x_1)=0$;

$R(x_1)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_2)=5$, $R(x_3)=3$;
$t_{\text{р.н}}(a_1)=0,\ t_{\text{р.о}}(a_1)=5,\ t_{\text{п.н}}(a_1)=7,$
$t_{\text{п.о}}(a_1)=12,\ R_{\text{п}}(a_1)=7,\ R_{\text{с}}(a_1)=2,$
$t_{\text{р.н}}(a_2)=0,\ t_{\text{р.о}}(a_2)=7,\ t_{\text{п.н}}(a_2)=3,$
$t_{\text{п.о}}(a_2)=10,\ R_{\text{п}}(a_2)=3,\ R_{\text{с}}(a_2)=0,$
$t_{\text{р.н}}(a_3)=0,\ t_{\text{р.о}}(a_3)=10,\ t_{\text{п.н}}(a_3)=0,$
$t_{\text{п.о}}(a_3)=10,\ R_{\text{п}}(a_3)=0,\ R_{\text{с}}(a_3)=0,$
$t_{\text{р.н}}(a_4)=7,\ t_{\text{р.о}}(a_4)=12,\ t_{\text{п.н}}(a_4)=12,$
$t_{\text{п.о}}(a_4)=17,\ R_{\text{п}}(a_4)=5,\ R_{\text{с}}(a_4)=5,$
$t_{\text{р.н}}(a_5)=10,\ t_{\text{р.о}}(a_5)=17, t_{\text{п.н}}(a_5)=10,$
$t_{\text{п.о}}(a_5)=17,\ R_{\text{п}}(a_5)=0,\ R_{\text{с}}(a_5)=0,$
$t_{\text{р.н}}(a_6)=10,\ t_{\text{р.о}}(a_6)=20,\ t_{\text{п.н}}(a_6)=12,$
$t_{\text{п.о}}(a_6)=22,\ R_{\text{п}}(a_6)=2,\ R_{\text{с}}(a_6)=2,$
$t_{\text{р.н}}(a_7)=17,\ t_{\text{р.о}}(a_7)=22,\ t_{\text{п.н}}(a_7)=17,$
$t_{\text{п.о}}(a_7)=22,\ R_{\text{п}}(a_7)=0,\ R_{\text{с}}(a_7)=0.$

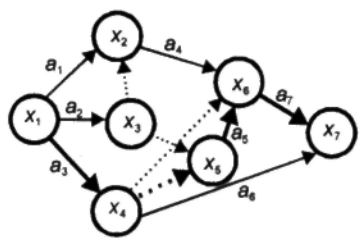


Рис. 6.58

16) Путей восемь. $t_{\text{кр}}=23$. $t_{\text{р}}(x_1)=0$, $t_{\text{р}}(x_2)=5$, $t_{\text{р}}(x_3)=6$,
$t_{\text{р}}(x_4)=13$, $t_{\text{р}}(x_5)=6$, $t_{\text{р}}(x_6)=13$, $t_{\text{р}}(x_7)=16$, $t_{\text{р}}(x_8)=16$,
$t_{\text{р}}(x_9)=23$, $t_{\text{п}}(x_9)=23$, $t_{\text{п}}(x_8)=18$, $t_{\text{п}}(x_7)=16$, $t_{\text{п}}(x_6)=16$,
$t_{\text{п}}(x_5)=6$, $t_{\text{п}}(x_4)=16$, $t_{\text{п}}(x_3)=6$, $t_{\text{п}}(x_2)=6$, $t_{\text{п}}(x_1)=0$;
$R(x_1)=R(x_3)=R(x_5)=R(x_7)=R(x_9)=0$, $R(x_2)=1$,
$R(x_4)=3$, $R(x_6)=10$, $R(x_8)=2$;

$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=5,\ t_{п.н}(a_1)=1,$
$t_{п.о}(a_1)=6,\ R_п(a_1)=1,\ R_с(a_1)=0,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=6,\ t_{п.н}(a_2)=0,$
$t_{п.о}(a_2)=6,\ R_п(a_2)=0,\ R_с(a_2)=0,$
$t_{р.н}(a_3)=5,\ t_{р.о}(a_3)=13,\ t_{п.н}(a_3)=8,$
$t_{п.о}(a_3)=16,\ R_п(a_3)=3,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=6,\ t_{р.о}(a_4)=16,\ t_{п.н}(a_4)=6,$
$t_{п.о}(a_4)=16,\ R_п(a_4)=0,\ R_с(a_4)=0,$
$t_{р.н}(a_5)=13,\ t_{р.о}(a_5)=20,\ t_{п.н}(a_5)=16,$
$t_{п.о}(a_5)=23,\ R_п(a_5)=3,\ R_с(a_5)=3,$
$t_{р.н}(a_6)=16,\ t_{р.о}(a_6)=21,\ t_{п.н}(a_6)=18,$
$t_{п.о}(a_6)=23,\ R_п(a_6)=2,\ R_с(a_6)=2,$
$t_{р.н}(a_7)=16,\ t_{р.о}(a_7)=23,\ t_{п.н}(a_7)=16,$
$t_{п.о}(a_7)=23,\ R_п(a_7)=0,\ R_с(a_7)=0.$

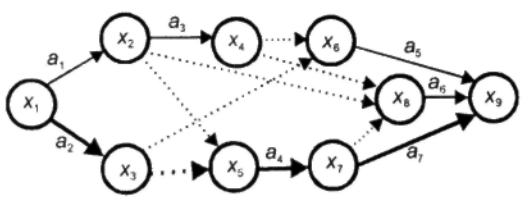


Рис. 6.59

17) Путей шесть. $t_{кр}=27$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=8$, $t_р(x_3)=7$,
$t_р(x_4)=8$, $t_р(x_5)=13$, $t_р(x_6)=23$, $t_р(x_7)=27$, $t_п(x_7)=27$,
$t_п(x_6)=23$, $t_п(x_5)=13$, $t_п(x_4)=8$, $t_п(x_3)=13$, $t_п(x_2)=15$,
$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_4)=$
$=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_2)=3$, $R(x_3)=4$;
$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=5,\ t_{п.н}(a_1)=6,$
$t_{п.о}(a_1)=11,\ R_п(a_1)=6,\ R_с(a_1)=3,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=7,\ t_{п.н}(a_2)=4,$

$t_{п.о}(a_2)=11,\ R_п(a_2)=4,\ R_с(a_2)=0,$
$t_{р.н}(a_3)=0,\ t_{р.о}(a_3)=8,\ t_{п.н}(a_3)=0,$
$t_{п.о}(a_3)=8,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=8,\ t_{р.о}(a_4)=13,\ t_{п.н}(a_4)=8,$
$t_{п.о}(a_4)=13,\ R_п(a_4)=0,\ R_с(a_4)=0,$
$t_{р.н}(a_5)=13,\ t_{р.о}(a_5)=23,\ t_{п.н}(a_5)=13,$
$t_{п.о}(a_5)=23,\ R_п(a_5)=0,\ R_с(a_5)=0,$
$t_{р.н}(a_6)=8,\ t_{р.о}(a_6)=20,\ t_{п.н}(a_6)=15,$
$t_{п.о}(a_6)=27,\ R_п(a_6)=7,\ R_с(a_6)=7,$
$t_{р.н}(a_7)=23,\ t_{р.о}(a_7)=27,\ t_{п.н}(a_7)=23,$
$t_{п.о}(a_7)=27,\ R_п(a_7)=0,\ R_с(a_7)=0.$

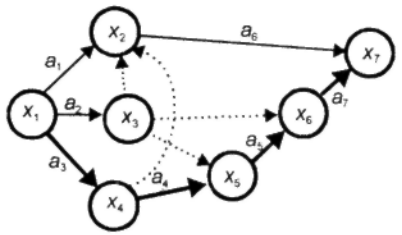


Рис. 6.60

18) Путей семь. $t_{кр}=31$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=8$, $t_р(x_3)=10$,
$t_р(x_4)=10$, $t_р(x_5)=22$, $t_р(x_6)=22$, $t_р(x_7)=31$, $t_п(x_7)=31$,
$t_п(x_6)=22$, $t_п(x_5)=22$, $t_п(x_4)=10$, $t_п(x_3)=10$, $t_п(x_2)=10$,
$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_3)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$,
$R(x_2)=2$;
$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=8,\ t_{п.н}(a_1)=2,$
$t_{п.о}(a_1)=10,\ R_п(a_1)=2,\ R_с(a_1)=0,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=10,\ t_{п.н}(a_2)=0,$
$t_{п.о}(a_2)=10,\ R_п(a_2)=0,\ R_с(a_2)=0,$
$t_{р.н}(a_3)=8,\ t_{р.о}(a_3)=16,\ t_{п.н}(a_3)=14,$
$t_{п.о}(a_3)=22,\ R_п(a_3)=6,\ R_с(a_3)=6,$

$t_{р.н}(a_4)=10,\ t_{р.о}(a_4)=22,\ t_{п.н}(a_4)=10,$
$t_{п.о}(a_4)=22,\ R_п(a_4)=0,\ R_с(a_4)=0,$
$t_{р.н}(a_5)=10,\ t_{р.о}(a_5)=16,\ t_{п.н.}(a_5)=16,$
$t_{п.о}(a_5)=22,\ R_п(a_5)=6,\ R_с(a_5)=6,$
$t_{р.н}(a_6)=22,\ t_{р.о}(a_6)=31,\ t_{п.н}(a_6)=22,$
$t_{п.о}(a_6)=31,\ R_п(a_6)=0,\ R_с(a_6)=0,$
$t_{р.н}(a_7)=22,\ t_{р.о}(a_7)=29,\ t_{п.н}(a_7)=24,$
$t_{п.о}(a_7)=31,\ R_п(a_7)=2,\ R_с(a_7)=2.$

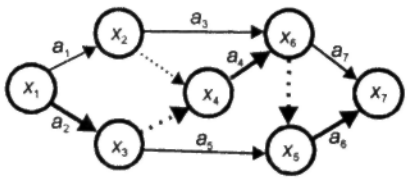


Рис. 6.61

19) Путей шесть. $t_{кр}=25$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=4$, $t_р(x_3)=4$,
$t_р(x_4)=4$, $t_р(x_5)=10$, $t_р(x_6)=20$, $t_р(x_7)=25$, $t_п(x_7)=25$,
$t_п(x_6)=20$, $t_п(x_5)=10$, $t_п(x_4)=13$, $t_п(x_3)=4$, $t_п(x_2)=13$,
$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_3)=$
$=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_2)=9$, $R(x_4)=9$;
$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=4,\ t_{п.н}(a_1)=9,$
$t_{п.о}(a_1)=13,\ R_п(a_1)=9,\ R_с(a_1)=0,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=4,\ t_{п.н}(a_2)=0,$
$t_{п.о}(a_2)=4,\ R_п(a_2)=0,\ R_с(a_2)=0,$
$t_{р.н}(a_3)=4,\ t_{р.о}(a_3)=10,\ t_{п.н}(a_3)=4,$
$t_{п.о}(a_3)=10,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=4,\ t_{р.о}(a_4)=11,\ t_{п.н}(a_4)=13,$
$t_{п.о}(a_4)=20,\ R_п(a_4)=9,\ R_с(a_4)=9,$
$t_{р.н}(a_5)=10,\ t_{р.о}(a_5)=20,\ t_{п.н}(a_5)=10,$
$t_{п.о}(a_5)=20,\ R_п(a_5)=0,\ R_с(a_5)=0,$

$t_{р.н}(a_6)=20,\ t_{р.о}(a_6)=25,\ t_{п.н}(a_6)=20,$
$t_{п.о}(a_6)=25,\ R_п(a_6)=0,\ R_с(a_6)=0,$
$t_{р.н}(a_7)=4,\ t_{р.о}(a_7)=12,\ t_{п.н}(a_7)=17,$
$t_{п.о}(a_7)=25,\ R_п(a_7)=13,\ R_с(a_7)=13.$

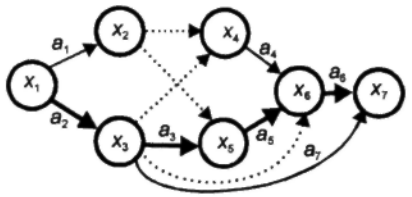


Рис. 6.62

20) Путей шесть. $t_{кр}=23$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=8$, $t_р(x_3)=5$,
$t_р(x_4)=6$, $t_р(x_5)=6$, $t_р(x_6)=18$, $t_р(x_7)=23$, $t_п(x_7)=23$,
$t_п(x_6)=18$, $t_п(x_5)=15$, $t_п(x_4)=15$, $t_п(x_3)=8$, $t_п(x_2)=8$,
$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_2)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_3)=3$,
$R(x_4)=9$, $R(x_5)=9$;
$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=8,\ t_{п.н}(a_1)=0,$
$t_{п.о}(a_1)=8,\ R_п(a_1)=0,\ R_с(a_1)=0,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=5,\ t_{п.н}(a_2)=3,$
$t_{п.о}(a_2)=8,\ R_п(a_2)=3,\ R_с(a_2)=0,$
$t_{р.н}(a_3)=4,\ t_{р.о}(a_3)=6,\ t_{п.н}(a_3)=9,$
$t_{п.о}(a_3)=15,\ R_п(a_3)=9,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=8,\ t_{р.о}(a_4)=18,\ t_{п.н}(a_4)=8,$
$t_{п.о}(a_4)=18,\ R_п(a_4)=0,\ R_с(a_4)=0,$
$t_{р.н}(a_5)=5,\ t_{р.о}(a_5)=15,\ t_{п.н}(a_5)=8,$
$t_{п.о}(a_5)=18,\ R_п(a_5)=3,\ R_с(a_5)=3,$
$t_{р.н}(a_6)=6,\ t_{р.о}(a_6)=14,\ t_{п.н}(a_6)=15,$
$t_{п.о}(a_6)=23,\ R_п(a_6)=9,\ R_с(a_6)=9,$

$t_{р.н}(a_7)=18,\ t_{р.о}(a_7)=23,\ t_{п.н}(a_7)=18,$

$t_{п.о}(a_7)=23,\ R_п(a_7)=0,\ R_с(a_7)=0.$

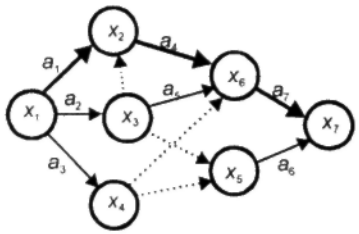


Рис. 6.63

21) Путей пять. $t_{кр}=30$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=10$, $t_р(x_3)=6$,

$t_р(x_4)=10$, $t_р(x_5)=20$, $t_р(x_6)=26$, $t_р(x_7)=30$, $t_п(x_7)=30$,

$t_п(x_6)=26$, $t_п(x_5)=20$, $t_п(x_4)=18$, $t_п(x_3)=18$, $t_п(x_2)=10$,

$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_2)=$

$=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_3)=12$, $R(x_4)=8$;

$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=6,\ t_{п.н}(a_1)=12,$

$t_{п.о}(a_1)=18,\ R_п(a_1)=12,\ R_с(a_1)=0,$

$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=10,\ t_{п.н}(a_2)=0,$

$t_{п.о}(a_2)=10,\ R_п(a_2)=0,\ R_с(a_2)=0,$

$t_{р.н}(a_3)=10,\ t_{р.о}(a_3)=20,\ t_{п.н}(a_3)=10,$

$t_{п.о}(a_3)=20,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$

$t_{р.н}(a_4)=10,\ t_{р.о}(a_4)=18,\ t_{п.н}(a_4)=18,$

$t_{п.о}(a_4)=26,\ R_п(a_4)=8,\ R_с(a_4)=8,$

$t_{р.н}(a_5)=20,\ t_{р.о}(a_5)=26,\ t_{п.н}(a_5)=20,$

$t_{п.о}(a_5)=26,\ R_п(a_5)=0,\ R_с(a_5)=0,$

$t_{р.н}(a_6)=26,\ t_{р.о}(a_6)=30,\ t_{п.н}(a_6)=26,$

$t_{п.о}(a_6)=30,\ R_п(a_6)=0,\ R_с(a_6)=0,$

$t_{р.н}(a_7)=10,\ t_{р.о}(a_7)=13,\ t_{п.н}(a_7)=27,$

$t_{п.о}(a_7)=30,\ R_п(a_7)=17, R_с(a_7)=17.$

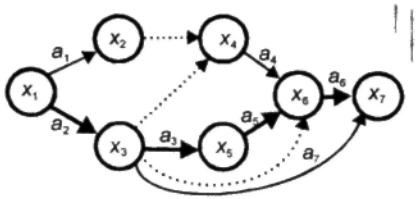


Рис. 6.64

22) Путей шесть. $t_{кр}=33$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=8$, $t_р(x_3)=7$,

$t_р(x_4)=8$, $t_р(x_5)=16$, $t_р(x_6)=16$, $t_р(x_7)=26$,

$t_р(x_8)=33$, $t_п(x_8)=33$, $t_п(x_7)=26$, $t_п(x_6)=16$,

$t_п(x_5)=16$, $t_п(x_4)=28$, $t_п(x_3)=16$,

$t_п(x_2)=8$, $t_п(x_1)=0$;

$R(x_1)=R(x_2)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=R(x_8)=0$,

$R(x_3)=9$, $R(x_4)=20$;

$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=5,\ t_{п.н}(a_1)=23,$

$t_{п.о}(a_1)=28,\ R_п(a_1)=23,\ R_с(a_1)=3,$

$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=7,\ t_{п.н}(a_2)=9,$

$t_{п.о}(a_2)=16,\ R_п(a_2)=9,\ R_с(a_2)=0,$

$t_{р.н}(a_3)=0,\ t_{р.о}(a_3)=8,\ t_{п.н}(a_3)=0,$

$t_{п.о}(a_3)=8,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$

$t_{р.н}(a_4)=8,\ t_{р.о}(a_4)=16,\ t_{п.н}(a_4)=8,$

$t_{п.о}(a_4)=16,\ R_п(a_4)=0,\ R_с(a_4)=0,$

$t_{р.н}(a_5)=16,\ t_{р.о}(a_5)=26,\ t_{п.н}(a_5)=16,$

$t_{п.о}(a_5)=26,\ R_п(a_5)=0,\ R_с(a_5)=0,$

$t_{р.н}(a_6)=8,\ t_{р.о}(a_6)=13,\ t_{п.н}(a_6)=28,$

$t_{п.о}(a_6)=33,\ R_п(a_6)=20,\ R_с(a_6)=20,$

$t_{р.н}(a_7)=26,\ t_{р.о}(a_7)=33,\ t_{п.н}(a_7)=26,$

$t_{п.о}(a_7)=33,\ R_п(a_7)=0,\ R_с(a_7)=0.$

13 Зак. 4382

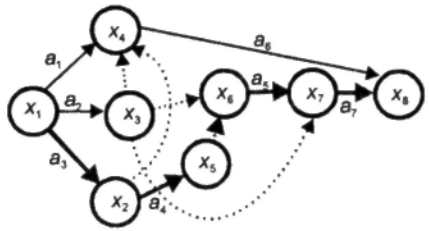


Рис. 6.65

23) Путей девять. $t_{кр}=40$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=13$, $t_р(x_3)=13$,
$t_р(x_4)=13$, $t_р(x_5)=21$, $t_р(x_6)=28$, $t_р(x_7)=40$, $t_п(x_7)=40$,
$t_п(x_6)=28$, $t_п(x_5)=31$, $t_п(x_4)=13$, $t_п(x_3)=13$, $t_п(x_2)=23$,
$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_3)=R(x_4)=R(x_6)=R(x_7)=0$,
$R(x_2)=10$, $R(x_5)=10$;
$t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=11$, $t_{п.н}(a_1)=12$,
$t_{п.о}(a_1)=23$, $R_п(a_1)=12$, $R_с(a_1)=2$,
$t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=13$, $t_{п.н}(a_2)=0$,
$t_{п.о}(a_2)=13$, $R_п(a_2)=0$, $R_с(a_2)=0$,
$t_{р.н}(a_3)=0$, $t_{р.о}(a_3)=10$, $t_{п.н}(a_3)=3$,
$t_{п.о}(a_3)=13$, $R_п(a_3)=3$, $R_с(a_3)=3$,
$t_{р.н}(a_4)=13$, $t_{р.о}(a_4)=21$, $t_{п.н}(a_4)=23$,
$t_{п.о}(a_4)=31$, $R_п(a_4)=10$, $R_с(a_4)=0$,
$t_{р.н}(a_5)=13$, $t_{р.о}(a_5)=19$, $t_{п.н}(a_5)=25$,
$t_{п.о}(a_5)=31$, $R_п(a_5)=12$, $R_с(a_5)=2$,
$t_{р.н}(a_6)=13$, $t_{р.о}(a_6)=28$, $t_{п.н}(a_6)=13$,
$t_{п.о}(a_6)=28$, $R_п(a_6)=0$, $R_с(a_6)=0$,
$t_{р.н}(a_7)=13$, $t_{р.о}(a_7)=20$, $t_{п.н}(a_7)=33$,
$t_{п.о}(a_7)=40$, $R_п(a_7)=20$, $R_с(a_7)=20$,
$t_{р.н}(a_8)=21$, $t_{р.о}(a_8)=30$, $t_{п.н}(a_8)=31$,
$t_{п.о}(a_8)=40$, $R_п(a_8)=10$, $R_с(a_8)=10$,
$t_{р.н}(a_9)=28$, $t_{р.о}(a_9)=40$, $t_{п.н}(a_9)=28$,
$t_{п.о}(a_9)=40$, $R_п(a_9)=0$, $R_с(a_9)=0$.

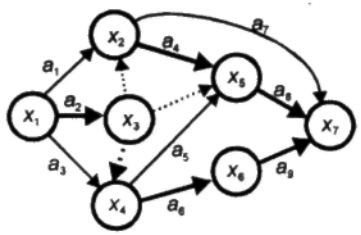


Рис. 6.66

24) Путей восемь. $t_{кр}=22$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=3$,
$t_р(x_3)=3$, $t_р(x_4)=8$, $t_р(x_5)=9$, $t_р(x_6)=15$,
$t_р(x_7)=22$, $t_п(x_7)=22$, $t_п(x_6)=15$, $t_п(x_5)=9$,
$t_п(x_4)=11$, $t_п(x_3)=5$, $t_п(x_2)=3$, $t_п(x_1)=0$;
$R(x_1)=R(x_2)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$,
$R(x_3)=2$, $R(x_4)=3$;
$t_{р.н}(a_1)=0$, $t_{р.о}(a_1)=3$, $t_{п.н}(a_1)=0$,
$t_{п.о}(a_1)=3$, $R_п(a_1)=0$, $R_с(a_1)=0$,
$t_{р.н}(a_2)=0$, $t_{р.о}(a_2)=2$, $t_{п.н}(a_2)=3$,
$t_{п.о}(a_2)=5$, $R_п(a_2)=3$, $R_с(a_2)=1$,
$t_{р.н}(a_3)=3$, $t_{р.о}(a_3)=8$, $t_{п.н}(a_3)=6$,
$t_{п.о}(a_3)=11$, $R_п(a_3)=3$, $R_с(a_3)=0$,
$t_{р.н}(a_4)=3$, $t_{р.о}(a_4)=9$, $t_{п.н}(a_4)=3$,
$t_{п.о}(a_4)=9$, $R_п(a_4)=0$, $R_с(a_4)=0$,
$t_{р.н}(a_5)=3$, $t_{р.о}(a_5)=7$, $t_{п.н}(a_5)=5$,
$t_{п.о}(a_5)=9$, $R_п(a_5)=2$, $R_с(a_5)=2$,
$t_{р.н}(a_6)=8$, $t_{р.о}(a_6)=12$, $t_{п.н}(a_6)=11$,
$t_{п.о}(a_6)=15$, $R_п(a_6)=3$, $R_с(a_6)=3$,

$t_{р.н}(a_7)=9,\ t_{р.о}(a_7)=15,\ t_{п.н}(a_7)=9,$

$t_{п.о}(a_7)=15,\ R_п(a_7)=0,\ R_с(a_7)=0,$

$t_{р.н}(a_8)=15,\ t_{р.о}(a_8)=22,\ t_{п.н}(a_8)=15,$

$t_{п.о}(a_8)=22,\ R_п(a_8)=0,\ R_с(a_8)=0,$

$t_{р.н}(a_9)=9,\ t_{р.о}(a_9)=14,\ t_{п.н}(a_9)=17,$

$t_{п.о}(a_9)=22,\ R_п(a_9)=8,\ R_с(a_9)=8.$

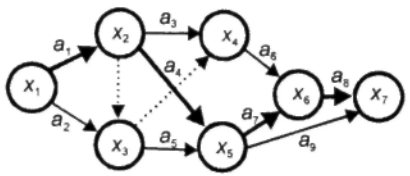


Рис. 6.67

25) Путей девять. $t_{кр}=40$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=10$, $t_р(x_3)=12$,

$t_р(x_4)=24$, $t_р(x_5)=23$, $t_р(x_6)=32$, $t_р(x_7)=40$, $t_п(x_7)=40$,

$t_п(x_6)=32$, $t_п(x_5)=23$, $t_п(x_4)=25$, $t_п(x_3)=12$, $t_п(x_2)=11$,

$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_3)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$,

$R(x_2)=1$, $R(x_4)=1$; $t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=10,\ t_{п.н}(a_1)=1,$

$t_{п.о}(a_1)=11,\ R_п(a_1)=1,\ R_с(a_1)=0,$

$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=12,\ t_{п.н}(a_2)=0,$

$t_{п.о}(a_2)=12,\ R_п(a_2)=0,\ R_с(a_2)=0,$

$t_{р.н}(a_3)=10,\ t_{р.о}(a_3)=24,\ t_{п.н}(a_3)=11,$

$t_{п.о}(a_3)=25,\ R_п(a_3)=1,\ R_с(a_3)=0,$

$t_{р.н}(a_4)=12,\ t_{р.о}(a_4)=23,\ t_{п.н}(a_4)=12,$

$t_{п.о}(a_4)=23,\ R_п(a_4)=0,\ R_с(a_4)=0,$

$t_{р.н}(a_5)=12,\ t_{р.о}(a_5)=19,\ t_{п.н}(a_5)=25,$

$t_{п.о}(a_5)=32,\ R_п(a_5)=13,\ R_с(a_5)=13,$

$t_{р.н}(a_6)=23,\ t_{р.о}(a_6)=32,\ t_{п.н}(a_6)=23,$

$t_{п.о}(a_6)=32,\ R_п(a_6)=0,\ R_с(a_6)=0,$

$t_{р.н}(a_7)=24,\ t_{р.о}(a_7)=39,\ t_{п.н}(a_7)=25,$

$t_{п.о}(a_7)=40,\ R_п(a_7)=1,\ R_с(a_7)=1,$

$t_{р.н}(a_8)=23,\ t_{р.о}(a_8)=36,\ t_{п.н}(a_8)=27,$

$t_{п.о}(a_8)=40,\ R_п(a_8)=4,\ R_с(a_8)=4,$

$t_{р.н}(a_9)=32,\ t_{р.о}(a_9)=40,\ t_{п.н}(a_9)=32,$

$t_{п.о}(a_9)=40,\ R_п(a_9)=0,\ R_с(a_9)=0.$

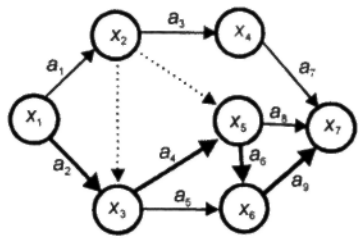


Рис. 6.68

26) Путей восемь. $t_{кр}=41$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=9$, $t_р(x_3)=9$,

$t_р(x_4)=20$, $t_р(x_5)=20$, $t_р(x_6)=28$, $t_р(x_7)=41$,

$t_п(x_7)=41$, $t_п(x_6)=28$, $t_п(x_5)=29$, $t_п(x_4)=20$,

$t_п(x_3)=9$, $t_п(x_2)=9$, $t_п(x_1)=0$;

$R(x_1)=R(x_2)=R(x_3)=R(x_4)=R(x_6)=R(x_7)=0$, $R(x_5)=9$;

$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=7,\ t_{п.н}(a_1)=2,$

$t_{п.о}(a_1)=9,\ R_п(a_1)=2,\ R_с(a_1)=2,$

$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=9,\ t_{п.н}(a_2)=0,$

$t_{п.о}(a_2)=9,\ R_п(a_2)=0,\ R_с(a_2)=0,$

$t_{р.н}(a_3)=9,\ t_{р.о}(a_3)=20,\ t_{п.н}(a_3)=9,\ t_{п.о}(a_3)=20,$

$R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,\ t_{р.н}(a_4)=9,\ t_{р.о}(a_4)=15,$

$t_{п.н}(a_4)=14,\ t_{п.о}(a_4)=20,\ R_п(a_4)=5,\ R_с(a_4)=5,$

$t_{р.н}(a_5)=20,\ t_{р.о}(a_5)=28,$

$t_{п.н}(a_5)=20,\ t_{п.о}(a_5)=28, R_п(a_5)=0, R_с(a_5)=0,$

$t_{р.н}(a_6)=9,\ t_{р.о}(a_6)=19,\ t_{п.н}(a_6)=19,$
$t_{п.о}(a_6)=29,\ R_п(a_6)=10,\ R_с(a_6)=1,$
$t_{р.н}(a_7)=20,\ t_{р.о}(a_7)=27,\ t_{п.н}(a_7)=29,$
$t_{п.о}(a_7)=41,\ R_п(a_7)=9,\ R_с(a_7)=9,$
$t_{р.н}(a_8)=28,\ t_{р.о}(a_8)=41,\ t_{п.н}(a_8)=28,$
$t_{п.о}(a_8)=41,\ R_п(a_8)=0,\ R_с(a_8)=0.$

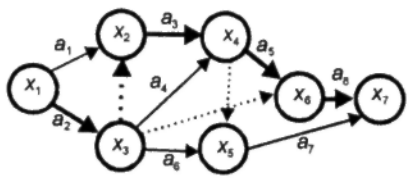


Рис. 6.69

27) Путей восемь. $t_{кр}=27$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=5$,
$t_р(x_3)=4$, $t_р(x_4)=5$, $t_р(x_5)=11$, $t_р(x_6)=10$,
$t_р(x_7)=11$, $t_р(x_8)=20$, $t_р(x_9)=27$, $t_п(x_9)=27$,
$t_п(x_8)=20$, $t_п(x_7)=11$, $t_п(x_6)=11$, $t_п(x_5)=11$,
$t_п(x_4)=6$, $t_п(x_3)=6$, $t_п(x_2)=5$, $t_п(x_1)=0$;
$R(x_1)=R(x_2)=R(x_5)=R(x_7)=R(x_8)=R(x_9)=0$, $R(x_3)=2$,
$R(x_4)=1$, $R(x_6)=1$; $t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=5,\ t_{п.н}(a_1)=0,$
$t_{п.о}(a_1)=5,\ R_п(a_1)=0,\ R_с(a_1)=0,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=4,\ t_{п.н}(a_2)=2,$
$t_{п.о}(a_2)=6,\ R_п(a_2)=2,\ R_с(a_2)=0,$
$t_{р.н}(a_3)=5,\ t_{р.о}(a_3)=11,\ t_{п.н}(a_3)=5,$
$t_{п.о}(a_3)=1,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=5,\ t_{р.о}(a_4)=10,\ t_{п.н}(a_4)=6,$
$t_{п.о}(a_4)=11,\ R_п(a_4)=1,\ R_с(a_4)=0,$
$t_{р.н}(a_5)=11,\ t_{р.о}(a_5)=18,\ t_{п.н}(a_5)=13,$
$t_{п.о}(a_5)=20,\ R_п(a_5)=2,\ R_с(a_5)=2,$

$t_{р.н}(a_6)=11,\ t_{р.о}(a_6)=20,\ t_{п.н}(a_6)=11,$
$t_{п.о}(a_6)=20,\ R_п(a_6)=0,\ R_с(a_6)=0,$
$t_{р.н}(a_7)=10,\ t_{р.о}(a_7)=14,\ t_{п.н}(a_7)=23,$
$t_{п.о}(a_7)=27,\ R_п(a_7)=13,\ R_с(a_7)=13,$
$t_{р.н}(a_8)=20,\ t_{р.о}(a_8)=27,\ t_{п.н}(a_8)=20,$
$t_{п.о}(a_8)=27,\ R_п(a_8)=0,\ R_с(a_8)=0.$

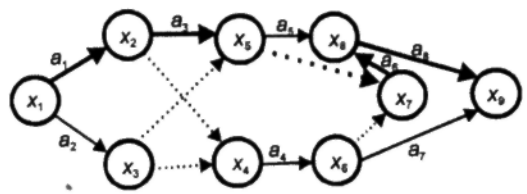


Рис. 6.70

28) Путей восемь. $t_{кр}=45$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=10$, $t_р(x_3)=11$,
$t_р(x_4)=13$, $t_р(x_5)=19$, $t_р(x_6)=28$, $t_р(x_7)=40$, $t_р(x_8)=45$,
$t_п(x_8)=45$, $t_п(x_7)=40$, $t_п(x_6)=28$, $t_п(x_5)=28$,
$t_п(x_4)=13$, $t_п(x_3)=13$, $t_п(x_2)=13$, $t_п(x_1)=0$;
$R(x_1)=R(x_4)=R(x_6)=R(x_7)=R(x_8)=0$, $R(x_2)=3$,
$R(x_3)=2$, $R(x_5)=9$; $t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=10,\ t_{п.н}(a_1)=3,$
$t_{п.о}(a_1)=13,\ R_п(a_1)=3,\ R_с(a_1)=0,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=11,\ t_{п.н}(a_2)=2,$
$t_{п.о}(a_2)=13,\ R_п(a_2)=2,\ R_с(a_2)=0,$
$t_{р.н}(a_3)=0,\ t_{р.о}(a_3)=13,\ t_{п.н}(a_3)=0,$
$t_{п.о}(a_3)=13,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=10,\ t_{р.о}(a_4)=19,\ t_{п.н}(a_4)=19,$
$t_{п.о}(a_4)=28,\ R_п(a_4)=9,\ R_с(a_4)=0,$
$t_{р.н}(a_5)=11,\ t_{р.о}(a_5)=18,\ t_{п.н}(a_5)=21,$
$t_{п.о}(a_5)=28,\ R_п(a_5)=10,\ R_с(a_5)=10,$
$t_{р.н}(a_6)=13,\ t_{р.о}(a_6)=28,\ t_{п.н}(a_6)=13,$

$t_{п.о}(a_6)=28,\ R_п(a_6)=0, R_с(a_6)=0,$
$t_{р.н}(a_7)=19,\ t_{р.о}(a_7)=25,\ t_{п.н}(a_7)=34,$
$t_{п.о}(a_7)=40,\ R_п(a_7)=15,\ R_с(a_7)=15,$
$t_{р.н}(a_8)=28,\ t_{р.о}(a_8)=40,\ t_{п.н}(a_8)=28,$
$t_{п.о}(a_8)=40,\ R_п(a_8)=0,\ R_с(a_8)=0,$
$t_{р.н}(a_9)=40,\ t_{р.о}(a_9)=45,\ t_{п.н}(a_9)=40,$
$t_{п.о}(a_9)=45,\ R_п(a_9)=0,\ R_с(a_9)=0.$

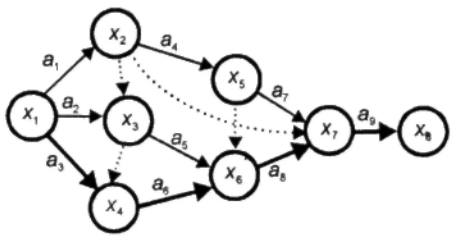


Рис. 6.71

29) Путей шесть. $t_{кр}=34$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=8$, $t_р(x_3)=6$,
$t_р(x_4)=8$, $t_р(x_5)=20$, $t_р(x_6)=27$, $t_р(x_7)=34$, $t_п(x_7)=34$,
$t_п(x_6)=27$, $t_п(x_5)=20$, $t_п(x_4)=22$, $t_п(x_3)=20$, $t_п(x_2)=8$,
$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_2)=R(x_5)=R(x_6)=R(x_7)=0$,
$R(x_3)=14$, $R(x_4)=14$;
$t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=6,\ t_{п.н}(a_1)=14,$
$t_{п.о}(a_1)=20,\ R_п(a_1)=14,\ R_с(a_1)=0,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=8,\ t_{п.н}(a_2)=0,$
$t_{п.о}(a_2)=8,\ R_п(a_2)=0,\ R_с(a_2)=0,$
$t_{р.н}(a_3)=8,\ t_{р.о}(a_3)=20,\ t_{п.н}(a_3)=8,$
$t_{п.о}(a_3)=20,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=8,\ t_{р.о}(a_4)=13,\ t_{п.н}(a_4)=22,$
$t_{п.о}(a_4)=27,\ R_п(a_4)=14,\ R_с(a_4)=14,$
$t_{р.н}(a_5)=20,\ t_{р.о}(a_5)=27,\ t_{п.н}(a_5)=20,$

$t_{п.о}(a_5)=27,\ R_п(a_5)=0,\ R_с(a_5)=0,$
$t_{р.н}(a_6)=27,\ t_{р.о}(a_6)=34,\ t_{п.н}(a_6)=27,$
$t_{п.о}(a_6)=34,\ R_п(a_6)=0,\ R_с(a_6)=0,$
$t_{р.н}(a_7)=8,\ t_{р.о}(a_7)=18,\ t_{п.н}(a_7)=24,$
$t_{п.о}(a_7)=34,\ R_п(a_7)=16,\ R_с(a_7)=16.$

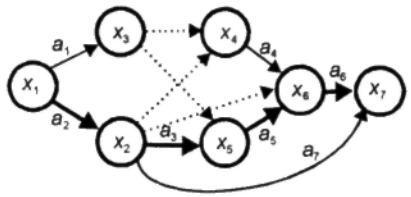


Рис. 6.72

30) Путей шесть. $t_{кр}=38$. $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=10$, $t_р(x_3)=5$,
$t_р(x_4)=24$, $t_р(x_5)=10$, $t_р(x_6)=32$, $t_р(x_7)=38$, $t_п(x_7)=38$,
$t_п(x_6)=32$, $t_п(x_5)=28$, $t_п(x_4)=24$, $t_п(x_3)=24$, $t_п(x_2)=10$,
$t_п(x_1)=0$; $R(x_1)=R(x_2)=R(x_4)=R(x_6)=R(x_7)=0$,
$R(x_3)=19$, $R(x_5)=18$; $t_{р.н}(a_1)=0,\ t_{р.о}(a_1)=7,\ t_{п.н}(a_1)=21,$
$t_{п.о}(a_1)=28,\ R_п(a_1)=21,\ R_с(a_1)=3,$
$t_{р.н}(a_2)=0,\ t_{р.о}(a_2)=5,\ t_{п.н}(a_2)=19,$
$t_{п.о}(a_2)=24,\ R_п(a_2)=19,\ R_с(a_2)=0,$
$t_{р.н}(a_3)=0,\ t_{р.о}(a_3)=10,\ t_{п.н}(a_3)=0,$
$t_{п.о}(a_3)=10,\ R_п(a_3)=0,\ R_с(a_3)=0,$
$t_{р.н}(a_4)=10,\ t_{р.о}(a_4)=24,\ t_{п.н}(a_4)=10,$
$t_{п.о}(a_4)=24,\ R_п(a_4)=0,\ R_с(a_4)=0,$
$t_{р.н}(a_5)=24,\ t_{р.о}(a_5)=32,\ t_{п.н}(a_5)=24,$
$t_{п.о}(a_5)=32,\ R_п(a_5)=0,\ R_с(a_5)=0,$
$t_{р.н}(a_6)=10,\ t_{р.о}(a_6)=20,\ t_{п.н}(a_6)=28,$
$t_{п.о}(a_6)=38,\ R_п(a_6)=18, R_с(a_6)=18,$
$t_{р.н}(a_7)=32,\ t_{р.о}(a_7)=38,\ t_{п.н}(a_7)=32,$
$t_{п.о}(a_7)=38,\ R_п(a_7)=0,\ R_с(a_7)=0.$

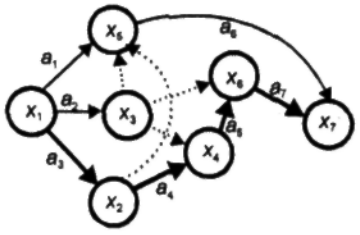
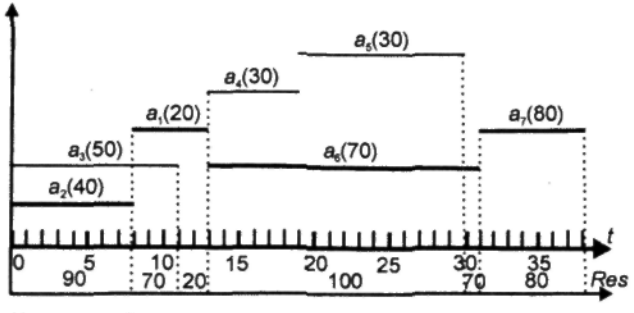


Рис. 6.73

3.29.4. Линейные графики всех вариантов приведены на рис. 6.74–6.103.

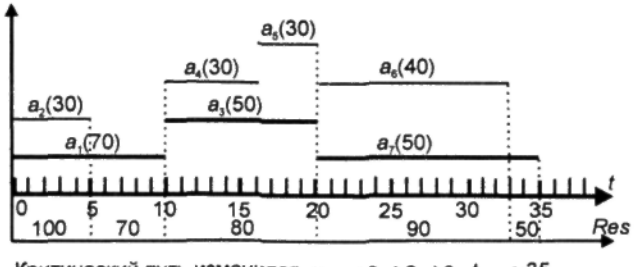
1)



Критический путь изменился. $\mu_{кр.\ нов}$: $a_2 \to a_1 \to a_6 \to a_7$. $t_{кр.\ нов} = 38$.

Рис. 6.74

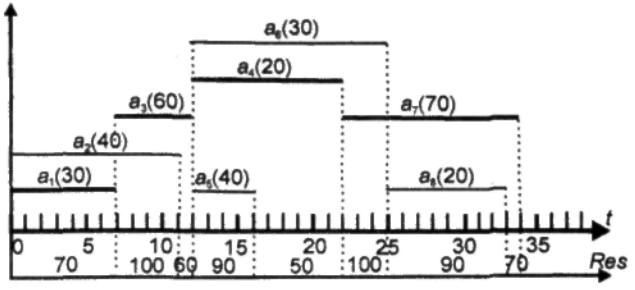
2)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_1 \to a_3 \to a_7$. $t_{кр\ нов} = 35$.

Рис. 6.75

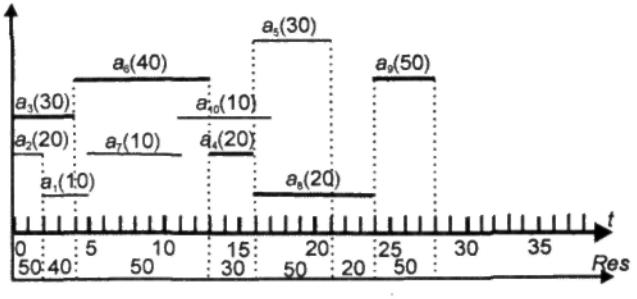
3)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_1 \to a_3 \to a_4 \to a_7$. $t_{кр.\ нов} = 34$.

Рис. 6.76

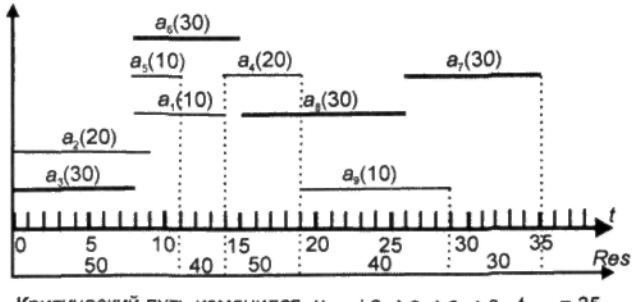
4)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_3 \to a_6 \to a_4 \to a_8 \to a_9$. $t_{кр\ нов} = 28$.

Рис. 6.77

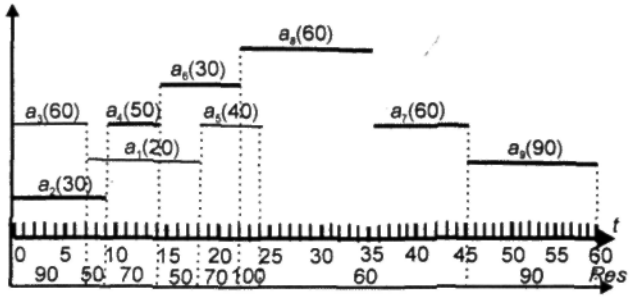
5)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_3 \to a_6 \to a_8 \to a_7$. $t_{кр\ нов} = 35$.

Рис. 6.78

6)

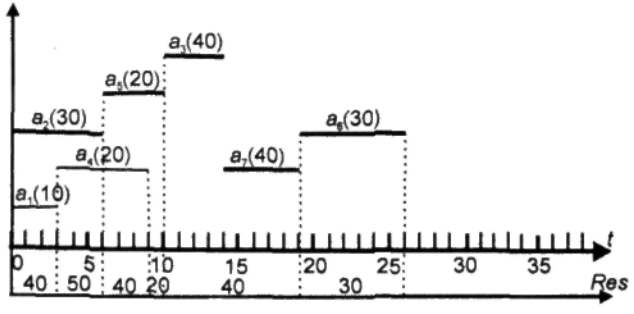


Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_4 \to a_6 \to a_8 \to a_7 \to a_9$. $t_{кр\ нов} = 60$.

Рис. 6.79

7)

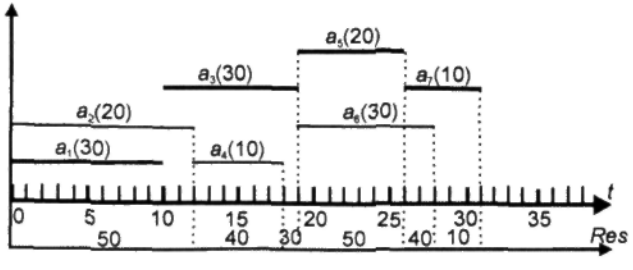
Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_3 \to a_6 \to a_8 \to a_7$. $t_{кр\ нов} = 35$.



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_5 \to a_3 \to a_7 \to a_8$. $t_{кр\ нов} = 26$.

Рис. 6.80

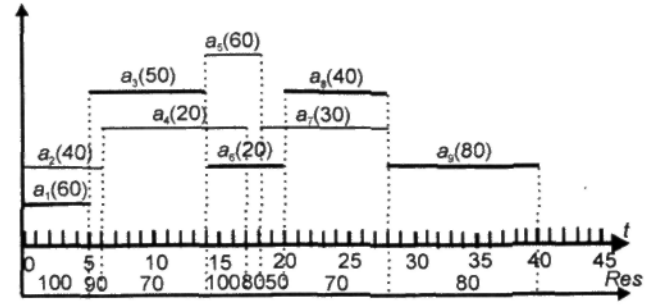
8)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_1 \to a_3 \to a_5 \to a_7$. $t_{кр\ нов} = 31$.

Рис. 6.81

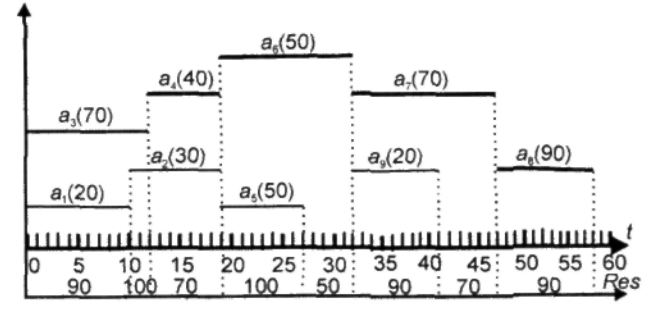
9)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_1 \to a_3 \to a_6 \to a_8 \to a_9$. $t_{кр\ нов} = 40$.

Рис. 6.82

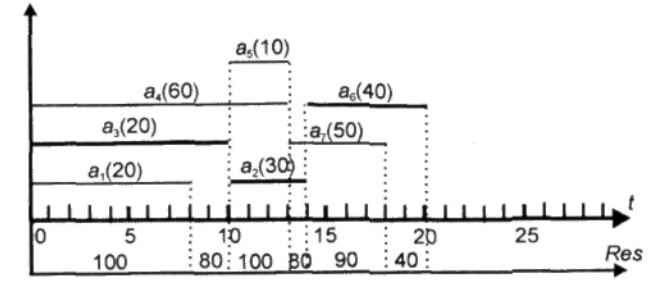
10)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_3 \to a_4 \to a_6 \to a_7 \to a_8$. $t_{кр\ нов} = 58$.

Рис. 6.83

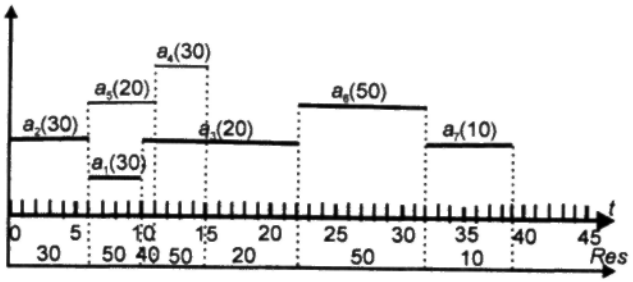
11)



Критический путь изменился. $\mu_{кр.\ нов}$: $a_3 \to a_2 \to a_6$. $t_{кр\ нов} = 20$.

Рис. 6.84

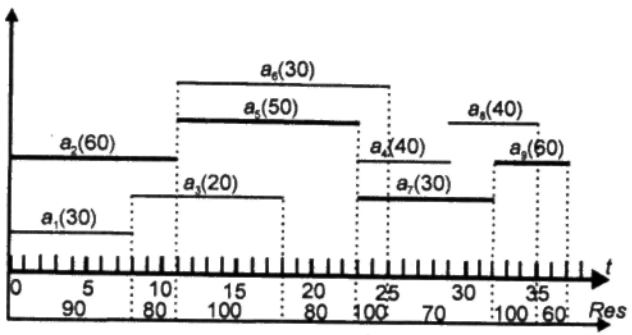
12)



Критический путь изменился. $\mu_{кр.\ нов}$: $a_2 \to a_1 \to a_3 \to a_6 \to a_7$. $t_{кр.\ нов} = 39$.

Рис. 6.85

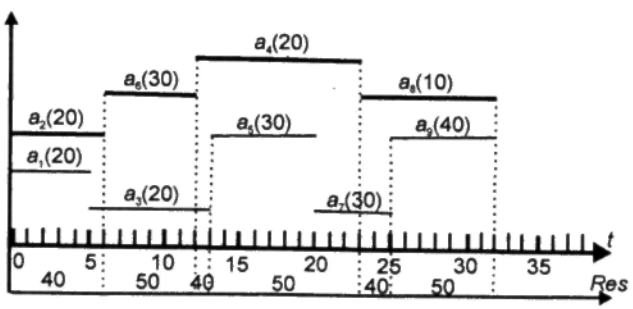
13)



Критический путь изменился. $\mu_{кр.\ нов}$: $a_2 \to a_5 \to a_7 \to a_9$. $t_{кр.\ нов} = 37$.

Рис. 6.86

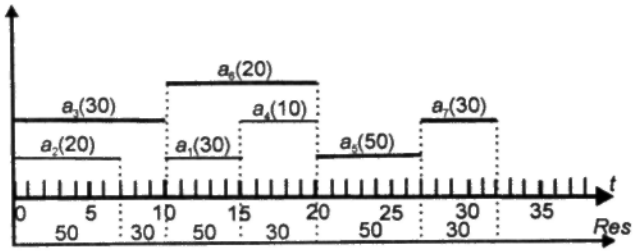
14)



Критический путь изменился. $\mu_{кр.\ нов}$: $a_2 \to a_6 \to a_4 \to a_8$. $t_{кр.\ нов} = 32$.

Рис. 6.87

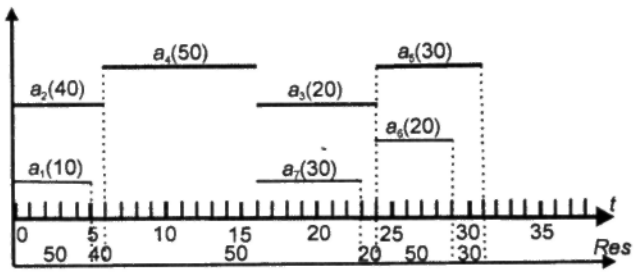
15)



Критический путь изменился. $\mu_{кр.\ нов}$: $a_3 \to a_6 \to a_5 \to a_7$. $t_{кр.\ нов} = 32$.

Рис. 6.88

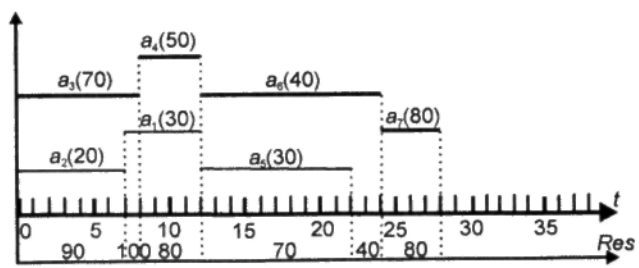
16)



Критический путь изменился. $\mu_{кр.\ нов}$: $a_2 \to a_4 \to a_3 \to a_5$. $t_{кр.\ нов} = 31$.

Рис. 6.89

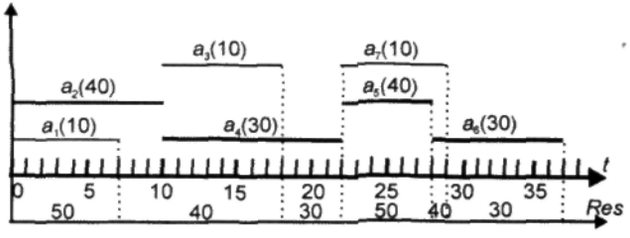
17)



Критический путь изменился. $\mu_{кр.\ нов}$: $a_3 \to a_4 \to a_6 \to a_7$. $t_{кр.\ нов} = 28$.

Рис. 6.90

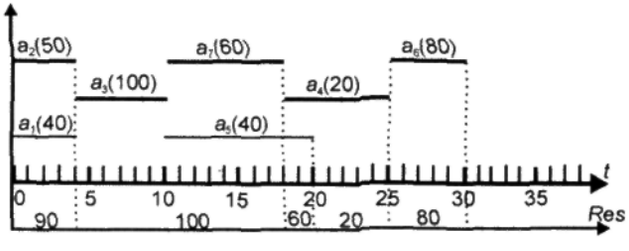
18)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_4 \to a_5 \to a_6$. $t_{кр\ нов} = 37$.

Рис. 6.91

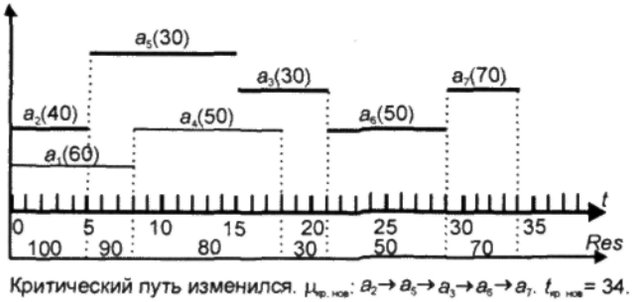
19)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_3 \to a_7 \to a_4 \to a_6$. $t_{кр\ нов} = 30$.

Рис. 6.92

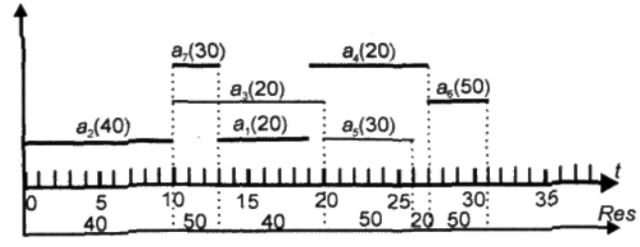
20)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_5 \to a_3 \to a_6 \to a_7$. $t_{кр\ нов} = 34$.

Рис. 6.93

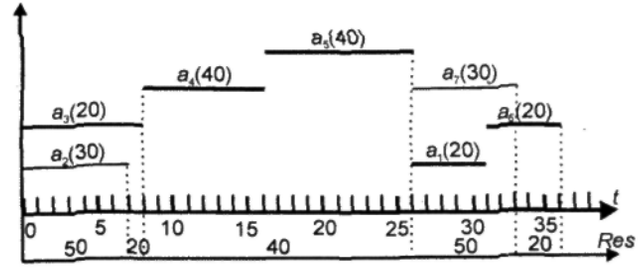
21)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_7 \to a_1 \to a_4 \to a_6$. $t_{кр\ нов} = 31$.

Рис. 6.94

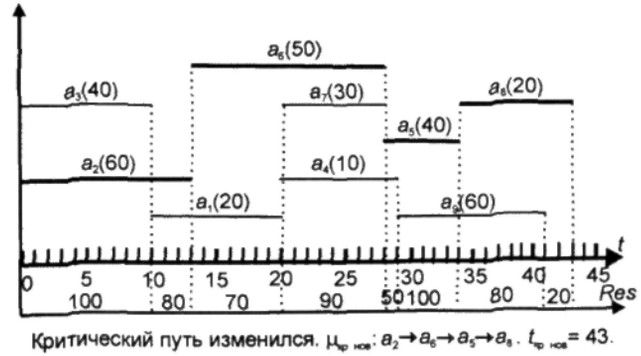
22)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_3 \to a_4 \to a_5 \to a_1 \to a_6$. $t_{кр\ нов} = 36$.

Рис. 6.95

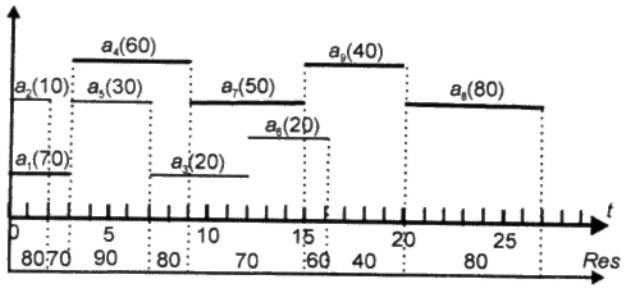
23)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_6 \to a_5 \to a_8$. $t_{кр\ нов} = 43$.

Рис. 6.96

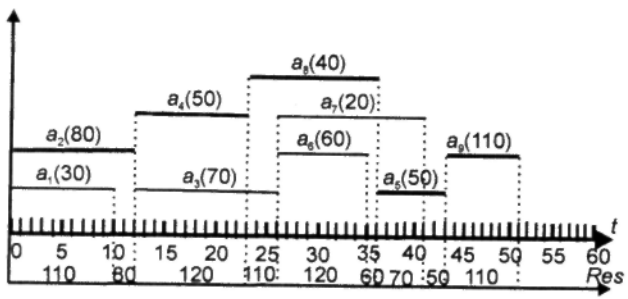
24)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_1 \to a_4 \to a_7 \to a_9 \to a_8$. $t_{кр.\ нов} = 27$.

Рис. 6.97

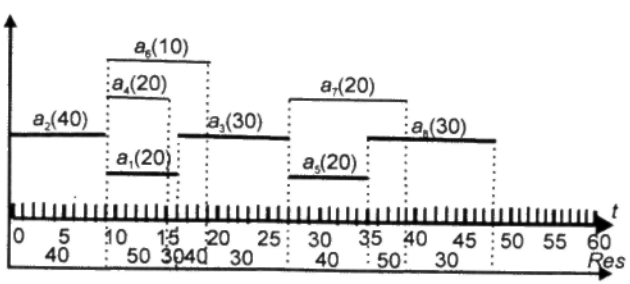
25)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_4 \to a_8 \to a_5 \to a_9$. $t_{кр\ нов} = 51$.

Рис. 6.98

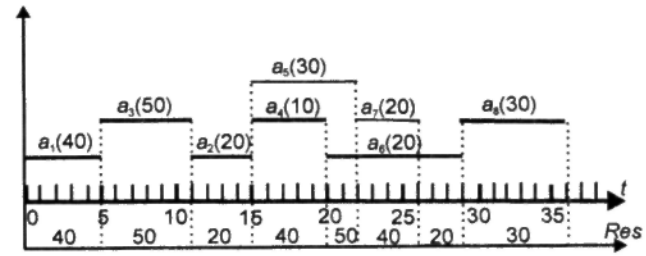
26)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_1 \to a_3 \to a_5 \to a_8$. $t_{кр\ нов} = 48$.

Рис. 6.99

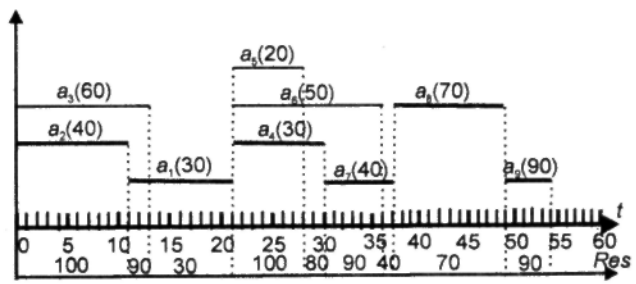
27)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_1 \to a_3 \to a_2 \to a_4 \to a_6 \to a_8$. $t_{кр\ нов} = 36$.

Рис. 6.100

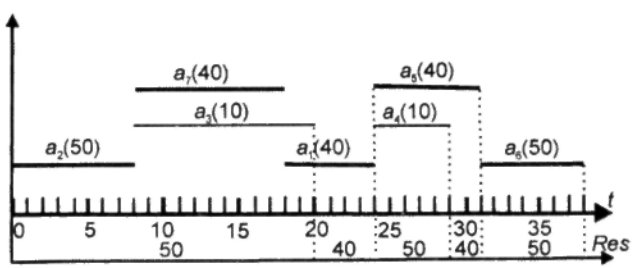
28)



Критический путь изменился. $\mu_{кр.\ нов}$: $a_2 \to a_1 \to a_4 \to a_7 \to a_6 \to a_9$. $t_{кр.\ нов} = 54$.

Рис. 6.101

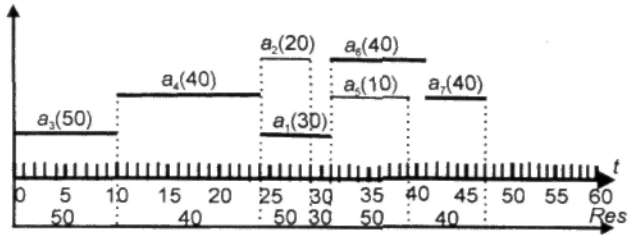
29)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_2 \to a_7 \to a_1 \to a_5 \to a_6$. $t_{кр\ нов} = 38$.

Рис. 6.102

30)



Критический путь изменился. $\mu_{кр\ нов}$: $a_3 \to a_4 \to a_1 \to a_6 \to a_7$. $t_{кр\ нов} = 47$.

Рис. 6.103

3.29.5. а) Отношения предшествования работ приведены в табл. 6.4, фрагмент сетевого графика показан на рис. 6.104.

Таблица 6.4

Основные работы	Работы, предшествующие основной
a_1	-
a_2	-
a_3	-
a_4	a_1, a_2, a_3
a_5	a_3

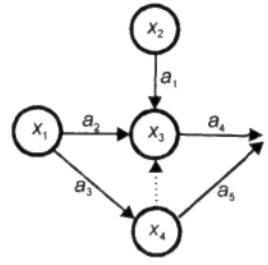


Рис. 6.104

б) Решение аналогично п. а (табл. 6.5 и рис. 6.105).

Таблица 6.5

Основные работы	Работы, предшествующие основной
a_1	-
a_2	-
a_3	a_1, a_4
a_4	a_2
a_5	-
a_6	a_4, a_5
a_7	a_3, a_6

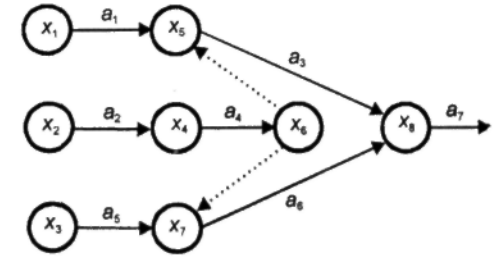


Рис. 6.105

3.29.6. Некоторые характеристики проекта приведены ниже: $t_{кр} = 97$.

$\mu_{кр}: a_1 \to a_4 \to a_8 \to a_9 \to a_{11} \to a_{13} \to a_{16}$; $t_р(x_1) = 0$,

$t_р(x_2) = 18$, $t_р(x_3) = 23$, $t_р(x_4) = 41$, $t_р(x_5) = 51$, $t_р(x_6) = 69$,

$t_р(x_7) = 85$, $t_р(x_8) = 67$, $t_р(x_9) = 92$, $t_р(x_{10}) = 97$, $t_п(x_{10}) = 97$,

$t_п(x_9) = 92$, $t_п(x_8) = 83$, $t_п(x_7) = 85$, $t_п(x_6) = 69$, $t_п(x_5) = 51$,

$t_п(x_4) = 41$, $t_п(x_3) = 31$, $t_п(x_2) = 18$, $t_п(x_1) = 0$;

$R(x_1) = R(x_2) = R(x_4) = R(x_5) = R(x_6) = R(x_7) = R(x_9) = R(x_{10}) = 0$,

$R(x_3) = 8$, $R(x_8) = 16$;

$t_{р.н}(a_{10}) = 51$, $t_{р.о}(a_{10}) = 67$, $t_{п.н}(a_{10}) = 67$,

$t_{п.о}(a_{10}) = 83$, $R_п(a_{10}) = 16$, $R_с(a_{10}) = 0$,

$t_{р.н}(a_{15})=67,\ t_{р.о}(a_{15})=76,\ t_{п.н}(a_{15})=83,$
$t_{п.о}(a_{15})=92,\ R_п(a_{15})=16,\ R_с(a_{15})=16,$
$t_{р.н}(a_{16})=92,\ t_{р.о}(a_{16})=97,\ t_{п.н}(a_{16})=92,$
$t_{п.о}(a_{16})=97,\ R_п(a_{16})=0,\ R_с(a_{16})=0.$

Продолжительность работы a_{10} можно увеличить на 16 единиц времени, т. к. $R_п(a_{10})=16$. Вместе с увеличением a_{10} произойдет пропорциональное уменьшение полного и свободного резервов работы a_{15}, которые равны $R_п(a_{15})=R_с(a_{15})=16$. Увеличение a_{10} на срок свыше 16 единиц времени приведет к увеличению критического срока проекта.

Поскольку работы a_{10} и a_{15} не лежат на критическом пути и a_{15} опирается только на a_{10}, то для увеличения продолжительности работы a_{15} можно использовать полный резерв времени работы a_{10}.

Увеличить продолжительность работы a_{10} можно именно за счет свободного резерва времени работы a_{15}. Полный резерв времени работы a_{15} не изменится при увеличении продолжительности работы a_{16}, если неизменно ее раннее (или позднее) начало. При увеличении продолжительности работы a_{16} будет увеличиваться лишь критический срок. В табл. 6.6 приведена взаимная последовательность работ, а на рис. 6.106 — линейный график проекта.

Таблица 6.6

Основные работы	Работы, предшествующие основным	Продолжительность работ
a_1	-	18
a_2	-	17
a_3	a_1	5
a_4	a_1	23

Таблица 6.6 (окончание)

Основные работы	Работы, предшествующие основным	Продолжительность работ
a_5	a_1	19
a_6	a_2, a_3	10
a_7	a_2, a_3	17
a_8	a_4, a_6	10
a_9	a_5, a_8	18
a_{10}	a_5, a_8	16
a_{11}	a_4, a_6, a_9	16
a_{12}	a_4, a_6, a_9	5
a_{13}	a_7, a_{11}	7
a_{14}	a_7, a_{11}	10
a_{15}	a_{10}	9
a_{16}	a_{12}, a_{13}, a_{15}	5

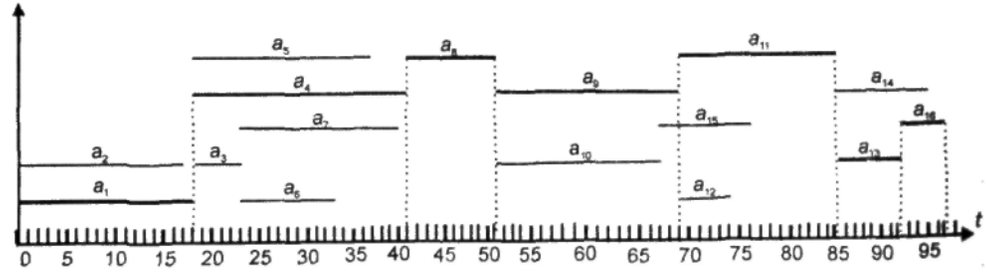


Рис. 6.106

3.29.7. Характеристики данного сетевого графика следующие: $t_р(x_1)=0$, $t_р(x_2)=1$, $t_р(x_3)=1$, $t_р(x_4)=4$, $t_р(x_5)=7$, $t_р(x_6)=4$, $t_р(x_7)=14$,

$t_p(x_8)=8$, $t_p(x_9)=6$, $t_p(x_{10})=18$, $t_п(x_{10})=18$, $t_п(x_9)=16$,
$t_п(x_8)=8$, $t_п(x_7)=17$, $t_п(x_6)=12$, $t_п(x_5)=7$, $t_п(x_4)=4$,
$t_п(x_3)=2$, $t_п(x_2)=2$, $t_п(x_1)=0$;
$R(x_1)=R(x_4)=R(x_5)=R(x_8)=R(x_{10})=0$, $R(x_2)=1$, $R(x_3)=1$,
$R(x_6)=8$, $R(x_7)=3$, $R(x_9)=10$;
$t_{р.н}(a_4)=1$, $t_{р.о}(a_4)=3$, $t_{п.н}(a_4)=10$,
$t_{п.о}(a_4)=12$, $R_п(a_4)=9$, $R_с(a_4)=1$,
$t_{р.н}(a_5)=1$, $t_{р.о}(a_5)=6$, $t_{п.н}(a_5)=11$,
$t_{п.о}(a_5)=16$, $R_п(a_5)=10$, $R_с(a_5)=0$,
$t_{р.н}(a_8)=1$, $t_{р.о}(a_8)=3$, $t_{п.н}(a_8)=6$,
$t_{п.о}(a_8)=8$, $R_п(a_8)=5$, $R_с(a_8)=5$,
$t_{р.н}(a_{13})=4$, $t_{р.о}(a_{13})=5$, $t_{п.н}(a_{13})=15$,
$t_{п.о}(a_{13})=16$, $R_п(a_{13})=11$, $R_с(a_{13})=1$,
$t_{р.н}(a_{16})=6$, $t_{р.о}(a_{16})=8$, $t_{п.н}(a_{16})=16$,
$t_{п.о}(a_{16})=18$, $R_п(a_{16})=10$, $R_с(a_{16})=10$.

На работу a_4 опираются следующие последовательности работ: $a_{13}\to a_{16}$ и $a_{12}\to a_{14}$, причем $R_п(a_4)=9$ определяется последовательностью работ $a_4\to a_{12}\to a_{14}$, если же брать последовательность $a_4\to a_{13}\to a_{16}$, то здесь резерв времени для a_4 составляет уже 12 единиц времени. Таким образом, полный резерв времени работы a_4 можно распределить на работы a_{13} и a_{16}, критический срок при этом не нарушится.

$R_п(a_8)=5$, $R_п(a_4)=9$, $R_п(a_5)=10$, работы $a_4\to a_5$ и a_8 между собой не связаны. За счет полного резерва работы a_8 можно увеличить длительность работ a_4 и a_5 на пять единиц времени, при этом критический срок не нарушится, т. к. полный резерв каждой из этих работ больше пяти.

Свободный резерв времени работы a_4 $R_с(a_4)=1$ нельзя передать ни работе a_{13}, ни работе a_{12}, не изменив их раннего начала, ибо этот ре-

зерв представляет собой зазор между работой a_4 и, например, работой a_{13} (табл. 6.7 и рис. 6.107). Передача свободного резерва a_4 представляет собой присоединение этого промежутка к работе a_{13} слева, следовательно, раннее начало работы a_{13} изменится.

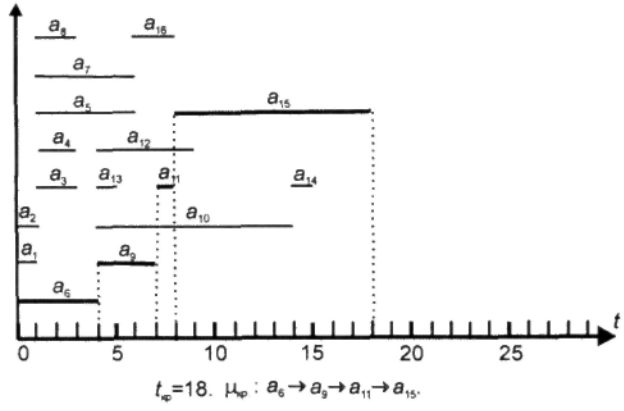


Рис. 6.107

Таблица 6.7

Основные работы	Работы, предшествующие основным	Продолжительность работ
a_1	-	1
a_1	-	1
a_2	-	1
a_3	a_2	2
a_4	a_2	2
a_5	a_2	5
a_6	-	4

Таблица 6.7 (окончание)

Основные работы	Работы, предшествующие основным	Продолжительность работ
a_7	a_1	5
a_8	a_1	2
a_9	a_3, a_6	3
a_{10}	a_3, a_6	10
a_{11}	a_7, a_9	1
a_{12}	a_3, a_4, a_6	5
a_{13}	a_3, a_4, a_6	1
a_{14}	a_7, a_9, a_{10}, a_{12}	1
a_{15}	a_8, a_{11}	10
a_{16}	a_5, a_{13}	2

3.29.8. $t_{кр} = 35$. $\mu_{кр} : a_3 \to a_5 \to a_{10} \to a_{12}$. $t_р(x_1) = 0$, $t_р(x_2) = 11$, $t_р(x_3) = 10$, $t_р(x_4) = 12$, $t_р(x_5) = 20$, $t_р(x_6) = 23$, $t_р(x_7) = 24$, $t_р(x_8) = 35$, $t_п(x_8) = 35$, $t_п(x_7) = 24$, $t_п(x_6) = 27$, $t_п(x_5) = 20$, $t_п(x_4) = 17$, $t_{кр} = 18$.

$\mu_{кр} : a_6 \to a_9 \to a_{11} \to a_{15}$.

$t_п(x_3) = 10$, $t_п(x_2) = 15$, $t_п(x_1) = 0$;

$R(x_1) = R(x_3) = R(x_5) = R(x_7) = R(x_8) = 0$, $R(x_2) = 4$, $R(x_4) = 5$, $R(x_6) = 4$ (табл. 6.8 и рис. 6.108);

Таблица 6.8

Основные работы	Работы, предшествующие основным	Продолжительность работ
a_1	-	11
a_2	-	12
a_3	-	10
a_4	a_1	12
a_5	a_3	10
a_6	a_3	7
a_7	a_1, a_2	10
a_8	a_1, a_2	7
a_9	a_5	10
a_{10}	a_5	4
a_{11}	a_4, a_7	8
a_{12}	a_6, a_{10}	11

$t_{р.н}(a_1) = 0$, $t_{р.о}(a_1) = 11$, $t_{п.н}(a_1) = 4$,
$t_{п.о}(a_1) = 15$, $R_п(a_1) = 4$, $R_с(a_1) = 0$,
$t_{р.н}(a_2) = 0$, $t_{р.о}(a_2) = 12$, $t_{п.н}(a_2) = 5$,
$t_{п.о}(a_2) = 17$, $R_п(a_2) = 5$, $R_с(a_2) = 0$,
$t_{р.н}(a_3) = 0$, $t_{р.о}(a_3) = 10$, $t_{п.н}(a_3) = 0$,
$t_{п.о}(a_3) = 10$, $R_п(a_3) = 0$, $R_с(a_3) = 0$,
$t_{р.н}(a_4) = 11$, $t_{р.о}(a_4) = 23$, $t_{п.н}(a_4) = 15$,
$t_{п.о}(a_4) = 27$, $R_п(a_4) = 4$, $R_с(a_4) = 0$,

$t_{р.н}(a_5)=10,\ t_{р.о}(a_5)=20,\ t_{п.н}(a_5)=10,$

$t_{п.о}(a_5)=20,\ R_п(a_5)=0,\ R_с(a_5)=0,$

$t_{р.н}(a_6)=10,\ t_{р.о}(a_6)=17,\ t_{п.н}(a_6)=17,$

$t_{п.о}(a_6)=24,\ R_п(a_6)=7,\ R_с(a_6)=7,$

$t_{р.н}(a_7)=12,\ t_{р.о}(a_7)=22,\ t_{п.н}(a_7)=17,$

$t_{п.о}(a_7)=27,\ R_п(a_7)=5,\ R_с(a_7)=1,$

$t_{р.н}(a_8)=12,\ t_{р.о}(a_8)=19,\ t_{п.н}(a_8)=28,$

$t_{п.о}(a_8)=35,\ R_п(a_8)=16,\ R_с(a_8)=16,$

$t_{р.н}(a_9)=20,\ t_{р.о}(a_9)=30,\ t_{п.н}(a_9)=25,$

$t_{п.о}(a_9)=35,\ R_п(a_9)=5,\ R_с(a_9)=5,$

$t_{р.н}(a_{10})=20,\ t_{р.о}(a_{10})=24,\ t_{п.н}(a_{10})=20,$

$t_{п.о}(a_{10})=24,\ R_п(a_{10})=0,\ R_с(a_{10})=0,$

$t_{р.н}(a_{11})=23,\ t_{р.о}(a_{11})=31,\ t_{п.н}(a_{11})=27,$

$t_{п.о}(a_{11})=35,\ R_п(a_{11})=4,\ R_с(a_{11})=4,$

$t_{р.н}(a_{12})=24,\ t_{р.о}(a_{12})=35,\ t_{п.н}(a_{12})=24,$

$t_{п.о}(a_{12})=35,\ R_п(a_{12})=0,\ R_с(a_{12})=0.$

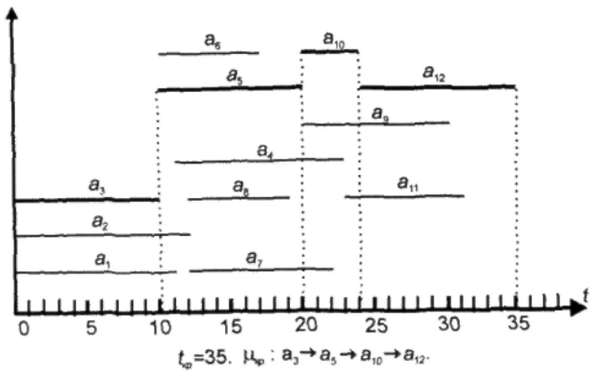


Рис. 6.108

Предметный указатель

А

Аксиома:
- бесконечности 29
- выбора 30
- выделения 29
- детерминированности 30, 31
- объединения (суммы) 28
- объемности (экстенсиональности) 28
- подстановки (замены) 28
- регулярности (фундирования) 29
- степени (аксиома множества всех подмножеств) 28
- существования пары 29
- существования пустого множества 29

Алгоритм:
- Беллмана–Мура (алгоритм корректировки меток) 120
- вычисления максимального пути 125
- Дейкстры (алгоритм расстановки меток) 116
- Прима (алгоритм ближайшего соседа) 140
- Фалкерсона 105
- Флери 143
- Форда–Фалкерсона 175

Ассоциативность композиции 9

Б

Бинарное отношение:
- композиция 8
- матрица 11
- область значений 8
- область определения 8
- свойства 9
- функция (отображение) 10

Бином Ньютона 40

Буква 21

Бэровское пространство 31

В

Вектор инциденций графа 100

Вершина:
- висячая 90
- изолированная 90
- контактная 160
- концевая 89
- периферийная 103
- расстояние между вершинами 103
- степень 90
- центральная 104

Ветвь 146

Выборка 34
- объем 34
- перестановка 34
- сочетание 34

Г

Гипотеза четырех красок 166

Грань 158
- внешняя 158
- внутренняя 158
- граница 158

Граф 89
- вершина 89
- гамильтонов 142
- гомеоморфные графы 158
- двудольный 90
- диаметр 103
- дополнительный 92
- изоморфные графы 90
- критический 173
- мультиграф 90
- неориентированный 89, 90
- обхват 95
- объединение (наложение) графов 92
- ориентированный (орграф) 90
- Петерсена 156
- планарный 157
- плоский (планарный) 92
- плотность 149
- подграф 92
- полный 90
- полный двудольный 90
- помеченный 91
- порядок 90
- произведение графов 93
- простой 90
- псевдограф 90
- радиус 103
- ранг 99

(окончание рубрики см. на стр. 394)

Граф *(окончание)*:
расщепление вершин 94
ребро 89
самодополнительный 92
связный 95
слияние (отождествление) вершин 94
со взвешенными дугами (сеть) 97
стягиваемый 94
толщина 159
центр 104
эйлеров 142

Д

Декартово произведение множеств 36
Декартовый квадрат 6
Дерево 135
ориентированное (ордерево) 136
Диагональ 8
Диаграммы Хассе 16
Динамическое программирование 116
Дополнение 4
Дуга 89
вес 97
насыщенная 174
параллельные дуги 89

З

Задачи:
комбинаторные задачи теории графов 33
на размещения 33
о маршрутах 33
о покрытиях и заполнениях 33
перечислительные 33
Закон:
алгебры множеств 6
включения 7
двойного дополнения 7
де Моргана (двойственности) 7
идемпотентности 6
равенства 7
поглощения 7

И

Инфимум 16
Инцидентность 90
Искаженность 159
Источник 174

К

Кардинальные числа 21
бесконечные 21
конечные 21
Класс эквивалентности (смежный класс) 14
Клика 149
максимальная 149
наибольшая 149
Кликовое число 149
Композиция 8
ассоциативность 9
бинарных отношений 8
Континуум 25
Корень 136
Коциклический ранг (коранг) 139
Критический срок 189

Л

Лемма о рукопожатиях 291
Лес 135
Линейный порядок 16

М

Маршрут 95
длина 95
циклический 95
Матрица:
бинарного отношения 11
достижимости 101
Кирхгофа 100
клик 151
контрдостижимости 101
свойства 12
связности 101
Метод:
включения и исключения 70
производящих функций 47, 50
рекуррентных соотношений 47
Многочлен характеристический 60
Множества:
дискретные 33
непересекающиеся 35
равные 3
эквивалентные (равномощные) 20
Множество 3
бесконечное 20
вполне упорядоченное 16
конечное 20
континуальное (континуум) 25
максимальное 147
минимальное 149
мощность 20
наибольшее 147
наименьшее 149
независимое (внутренне устойчивое) 147
несчетное 24
разбиение 14, 35
счетное 20
фундированное 29
частично (линейно) упорядоченное 16

Множество-степень 3
Мощность 20
Мультиграф 90

Н

Неплотность 148

О

Обобщенное правило произведения 282
Обхват 95
Объединение 4
графов 92
дизъюнктное 93
Операции:
основные комбинаторные 34
Шимбелла 111
Определитель Вандермонда 63
Орграф 90
сильно связный 95
Ордерево 136
Отношение:
n-местное 8
антисимметричное 13
бинарное 8
двуместное 8
иррефлексивное 13
координаты (компоненты) отношения 8
обратное 8
полное (полный квадрат) 8
рефлексивное 13
симметричное 13
тождественное (диагональ) 8
транзитивное 13
унарное 8

П

Парадокс:
Банаха–Тарского 31
Кантора 27
Рассела 27
Пересечение (произведение) 4
Перестановка 34
без повторений 34
беспорядок 78
размещение 34
с повторениями 34
Перешеек 143
Петля 89
Подграф 92
остовный 137
Поддерево остовное (остовной каркас) 137
Подмножество 3
верхняя (нижняя) грань 16
доминирующее (внешне устойчивое) 148
несобственное 3
собственное 3
точная верхняя (нижняя) грань 16
Подстановка множества 10
Подход:
алгебраический 47
теоретико-множественный 46
Полный квадрат 8
Полустепень:
выхода 106
захода 106
Порядок:
линейный 15
строгий 15
частичный 15
Последовательность возвратная 59
Поток 174
полный 176
Правило:
произведения 36
суммы 35
Предикат n-местный 8
Предпорядок 15
Применение формул обращения 47
Произведение
графов 93
прямое (декартовое) 6
Произведение (свертка)
последовательностей 53
производящих функций 53
Пропускная способность
дуги 174
дуги остаточная 174
разреза 175
Псевдограф 90
Путь 95
вес 97
критический 189

Р

Работа 187
критическая 189
некритическая 189
Радиус 103
Разбиение 35
Разбиение множества 14
Разность 4
Разрез 174
величина 175
ориентированный 175
Ранг 99
Раскраска 166

Расщепление вершин 94
Ряд Тейлора 57

С

Связность 95
Сетевой график 187
Сеть 97
Символ Аппеля 34
Симметрическая разность
(кольцевая сумма) 4
Система аксиом ZFC 29
Система аксиом Цермело–Френкеля
(ZF) 28
Слияние (отождествление) вершин 94
Слово 21
Смежность 90
Событие 187
критическое 189
некритическое 189
резерв времени 190
свершение 189
Соотношение:
однородное линейное рекуррентное 60
рекуррентное 47
Сочетание с повторениями 34
Срок свершения события
поздний 190
ранний 189
Сток 174
Сумма последовательностей 53
Супремум 16
Схема Бернулли 66

Т

Теорема:
Кенига 171
Кирхгофа 137
Кэли 137
Оре 145
полиномиальная 41
Понтрягина—Куратовского 159
Хивуда 167
Эйлера 158

У

Узлы сети 97
Упорядоченная пара 6
Урновая схема 66
с возвращением 66
Условие
сохранения потока 174

Ф

Фактор-множество 14
Формула:
обращения Мебиуса 86
Пойа 91
Функция:
биективная 10
выбора 30
инъективная (разнозначная) 10
Мебиуса 85
область значений 10
область определения 10
производящая 50
производящая Дирихле 52
производящая обычная степенная 52
производящая экспоненциальная 52
свойства 11
сюръективная 10
частичная 10
Эйлера 79
экспоненциальная производящая 65

Х

Хорда 146
Хроматическое число 166

Ц

Цепь 95
гамильтонова 95
диаметральная 103
простая 95
Цикл 95
гамильтонов 95
простой 95
фундаментальный 146
Циклический ранг графа 139
Цикломатическое число 139

Ч

Числа Фибоначчи 56
Число:
(вершинной) независимости 148
планарности (искаженность) 159

Э

Эквивалентность 14
класс 14
свойства 20
Эксцентриситет 103

Шапорев Сергей Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Балтийского государственного технического университета "Военмех". Член ассоциации математиков вузов Северо-Запада. Автор более 50 работ по небесной механике и вычислительной математике.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Пособие представляет собой учебный курс, включающий лекции и практические занятия по трем разделам, изучаемым в курсе дискретной математики: теории множеств, комбинаторике и теории графов. Благодаря многолетнему опыту преподавания, автор излагает вопросы теории сжато, но в то же время достаточно для освоения курса, просто и доступно. Обсуждается основная система аксиом для теории множеств, рассматриваются основные типы задач комбинаторики, приведены наиболее употребительные оптимизационные алгоритмы теории графов. Весь теоретический материал рассматривается на конкретных практических задачах и упражнениях. Приводятся подробные решения более четырехсот задач, предложенных в книге. Весь материал изложен на высоком методическом уровне и рассчитан на студентов технических вузов, изучающих дискретную математику.

$$A \subseteq B$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

ISBN 5-94157-703-6

9 785941 577033

БХВ-Петербург

194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б

E-mail: mail@bhv.ru
Internet: www.bhv.ru

Тел./факс: (812) 591-6243