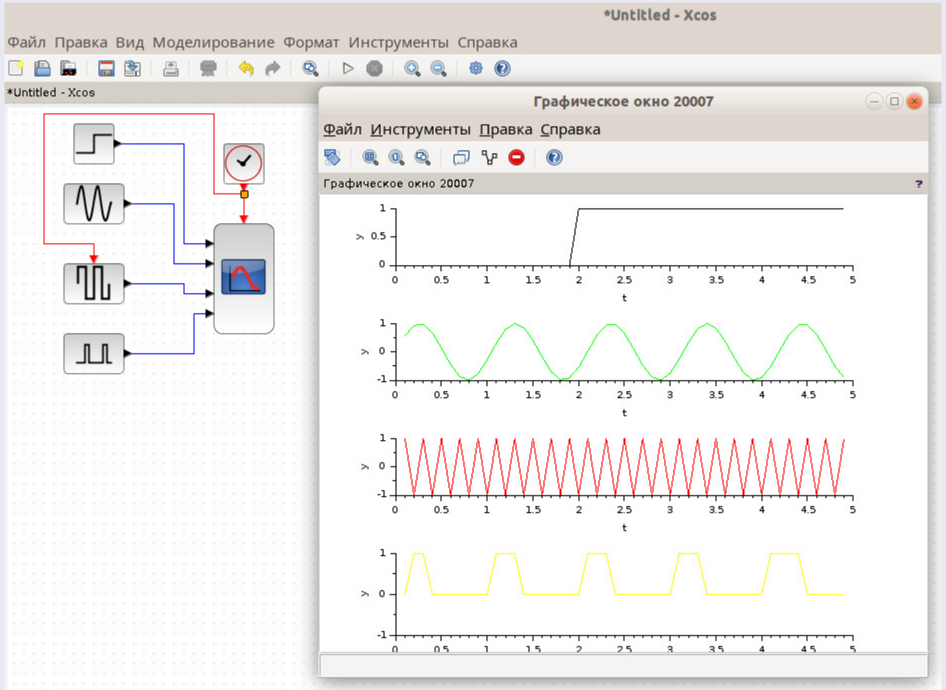
Электрические цепи переменного тока

Содержание

Переменным называется ток, который меняется во времени. На практике обычно рассматривают переменный периодический ток.

Периодическими токами и напряжениями называют токи и напряжения, мгновенные значения которых повторяются через равные промежутки времени.

В современной технике широко используются разнообразные по форме периодические сигналы: прямоугольные, экспоненциальные, колоколообразные, треугольные, синусоидальные и т.д.



Какие из представленных сигналов являются периодическими?

Основные понятия о переменном токе

Периодические токи и напряжения имеют некоторые параметры, незменные во времени, например: максимальное, минимальное значения U_{max}, U_{min}, постоянная составляющая U_0, период T и другие.

Период T является основным параметром.

Периодом называется наибольший промежуток времени, по истечение которого периодическая функция напряжения $u(t)$ или тока $i(t)$ повторяет свои мгновенные значения.

Кроме периода для характеристики периодических функций используется **частота** f, равная числу периодов в секунду. Согласно этому определению частота есть величина, обратная периоду:

$$f = \frac{1}{T}$$

Частота измеряется в **герцах**: [1Гц]=[1/с].

В современной технике используется широкий диапазон частот электрических сигналов - от сотых долей герца до миллиардов герц. В электроэнергетике в России и Европе стандартная частота 50 Гц, в США - 60 Гц.

Периодические сигналы в диапазоне от 50 до 10^5 Гц лежат в звуковом диапазоне.

Для синусоидальных электрических сигналов также используется понятие **угловая частота** $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, которая измеряется в радианах на герц:[Гц· рад]=[$\frac{\text{рад}}{\text{с}}$]

Основные понятия о переменном токе

Важной характеристикой периодических сигналов является среднее значение за период, обозначается U_0, I_o, ее называют **постоянной составляющей**. По определению постоянная составляющая находится: $U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$. Не у всех периодических сигналов есть постоянная составляющая. Для периодических функций, симметричных относительно оси времени, площади положительных и отрицательных полуволн одинаковы, поэтому постоянная составляющая равна нулю. Постоянная составляющая не характеризует энергию и мощность электрического сигнала, а такая характеристика особенно важна. Для этих целей используется квадратичное значение периодического напряжения или тока, которое называется **действующим значением**. Действующее значение переменного тока - это такой эквивалентный постоянный ток, который на том же резисторе, за тоже самое время выделяет тоже самое количество тепла:

$$P = RI^2, W = RI^2T, p(t) = Ri^2(t), dw(t) = Ri^2(t)dt \Rightarrow W = \int_0^T Ri^2(t)dt$$

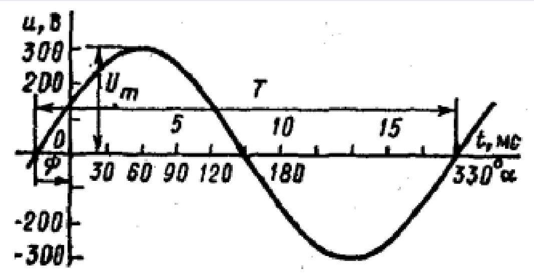
$$RI^2T = \int_0^T Ri^2(t)dt \Rightarrow I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt, I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

Также вводятся понятия действующего значения напряжения: $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$. Измерительные приборы: амперметры, вольтметры, как правило, показывают именно действующее значение периодических токов и напряжений, т.к. определение мощности, сил производся по формулам, содержащим действующие значения.

Синусоидальный переменный ток является частным случаем переменного тока, нашедшим наиболее широкое применение:

$$i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$u(t) = U_{max} \sin(\omega t + \psi_u)$$



I_{max}, U_{max} - амплитуда тока, напряжения соответственно
ψ_i, ψ_u - фаза тока, напряжения.
ω - угловая (циклическая) частота: $\frac{d}{dt}(\omega t + \psi) = \omega$.
При синусоидальном токе все токи и напряжения на отдельных участках сети тоже синусоидальны в установившемся режиме и имеют одну и туже частоту.
Начальная фаза разных синусоидальных сигналов может отличаться, тогда разность начальных фаз называют сдвигом по фазе: $\varphi = \psi_u - \psi_i$, если $\varphi > 0$, напряжение опережает ток.

Синусоидальный переменный ток

Найдем действующее и среднее значения синусоидального тока:

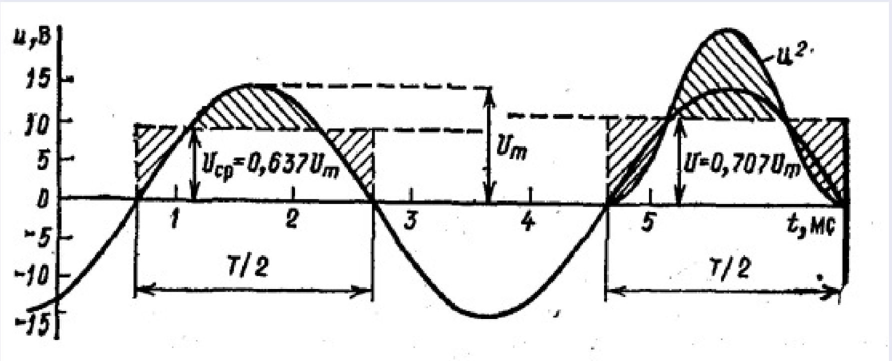
$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{max}^2\sin^2(\omega t)dt}=\sqrt{\frac{I_{max}^2}{T}\int_0^T\frac{(1-\cos(2\omega t))}{2}dt}$$

$$I=I_{max}\sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}\int_0^T dt-\frac{1}{2}\int_0^T\cos(2\omega t)dx\right)}=\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\approx 0.707I_{max}$$

Среднее значение за период функции, симметричной относительно оси времени, равно нулю. Поэтому для синусоиды принято рассматривать среднее значение по модулю:

$$U_{\text{ср}}=\frac{1}{T}\int_0^T|u(t)|dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}u(t)dt$$

$$U_{\text{ср}}=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}U_{max}\sin(\omega t)dt=\frac{2}{T}\frac{T}{2\pi}U_{max}\int_0^{T/2}\left(-\cos\frac{2\pi}{T}t\right)=\frac{2}{\pi}U_{max}\approx 0.637U_{max}$$



Активная энергия и активная мощность синусоидального тока

Электрическая энергия, которая преобразуется или получается из других видов энергии называется активной:

$$p(t) = u(t)i(t)$$

Энергию определяют за целое число периодов:

$$W = \int_0^{kT} u(t)i(t)dt$$

Среднее значение энергии за период называется активной мощностью:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^{T} u(t)i(t)dt$$

В нашем случае:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^{T} I_{max}\sin(\omega t + \psi_i)U_{max}\sin(\omega t + \psi_u)dt$$

$$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$P = \frac{U_{max}I_{max}}{2T}\int_0^{T}\left(\cos(\omega t + \psi_u - \omega t - \psi_i) - \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)\right)dt$$

$$P = \frac{U_{max}I_{max}}{2T}\cos(\psi_u - \psi_i)\int_0^{T}dt = \frac{U_{max}I_{max}}{2}\cos\varphi = \frac{U_{max}I_{max}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\cos\varphi = UI\cos\varphi$$

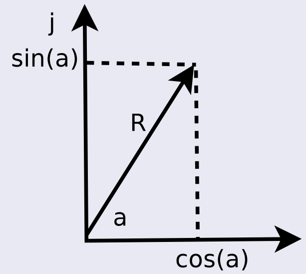
Итак, окончательно имеем:

$$P = UI\cos\varphi$$

Изображение синусоидально изменяющихся величин с помощью комплексных чисел

Для представления синусоидальных величин очень удобно использовать комплексные числа:

$$Re^{ja} = R(\cos(a) + j\sin(a))$$



$$I_m e^{j(\omega t+\psi_i)} = I_m(\cos(\omega t+\psi_i) + j\sin(\omega t+\psi_i))$$

Как видно, мнимая часть комплексного числа есть синусоидально изменяющаяся во времени величина.

Для представления токов и напряжений в комплексной форме приняты следующие условные обозначения:

Комплекс мгновенного значения тока: $\dot{i} = I_{max}e^{j(\omega t+\psi_i)}$

Комплекс мгновенного значения напряжения: $\dot{u} = U_{max}e^{j(\omega t+\psi_u)}$

Комплекс амплитудного значения тока: $\dot{I}_{max} = I_{max}e^{j\psi_i}$

Комплекс действующего значения тока: $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$

Изображение производной от синусоидальной функции в комплексной форме

Для комплекса мгновенного значения тока имеем:

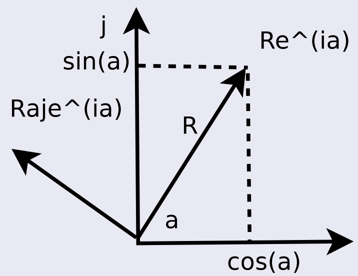
$$\dot{i} = I_{max} e^{j(\omega t + \psi_i)}$$

$$\frac{d\dot{i}}{dt} = j\omega I_{max} e^{j(\omega t + \psi_i)} = j\omega \cdot \dot{i}$$

Аналогично для остальных комплексов имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{I}_{max}\right) = j\omega \dot{I}_{max}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{I}\right) = j\omega \dot{I}$$



На комплексной плоскости дифференцирование приводит к повороту вектора на 90 градусов против часовой стрелки.

Изображение интеграла от синусоидальной функции в комплексной форме

Для комплекса мгновенного значения тока имеем:

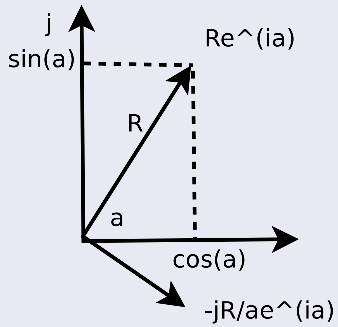
$$\dot{i} = I_{max} e^{j(\omega t + \psi_i)}$$

$$\int_0^t \dot{i} = \int_0^t I_{max} e^{j(\omega t + \psi_i)} dt = \frac{I_{max} e^{j(\omega t + \psi_i)}}{j\omega} = \frac{\dot{i}}{j\omega} = -j\frac{\dot{i}}{\omega}$$

Аналогично для остальных комплексов имеем:

$$\int_0^t \dot{I}_{max} = \frac{\dot{I}_{max}}{j\omega}$$

$$\int_0^t \dot{I} = \frac{\dot{I}}{j\omega}$$



На комплексной плоскости интегрирование приводит к повороту вектора на 90 градусов по часовой стрелки.

Закон Ома в комплексной форме

Поскольку $i(t) = I_{max}\sin(\omega t + \psi_i)$, $u(t) = U_{max}\sin(\omega t + \psi_u)$, то величина $\frac{u(t)}{i(t)}$ - переменная величина, и закон Ома для мгновенных синусоидальных значений н имеет смысла.

С другой стороны, $\dot{i} = I_{max}e^{j(\omega t+\psi_i)}$, $\dot{u} = U_{max}e^{j(\omega t+\psi_u)}$

$$\frac{\dot{u}}{\dot{i}} = \frac{U_{max}e^{j(\omega t+\psi_u)}}{I_{max}e^{j(\omega t+\psi_i)}} = \frac{U_{max}e^{j\psi_u}}{I_{max}e^{j\psi_i}} = \frac{U_{max}}{I_{max}}e^{j(\psi_u-\psi_i)} = \frac{U_{max}}{I_{max}}e^{j\varphi} = \frac{U}{I}e^{j\varphi} = Ze^{j\varphi}$$

Величина $Ze^{j\varphi}$ является комплексным числом, которое не зависит от времени, оно называется комплексным сопротивлением.

Комплексное сопротивление обозначается:

$$\dot{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = R + jX$$

$R = Z\cos\varphi$ - активное сопротивление цепи;

$X = Z\sin\varphi$ - реактивное сопротивление цепи.

Законы Кирхгофа в комплексной форме

Первый закон Кирхгофа справедлив во всех формах:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$$

Второй закон Кирхгофа: *в замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений на пассивных элементах контура равна алгебраической сумме ЭДС источников напряжения, входящих в этот контур:*

$$\sum_{k=1}^{m} \dot{I}_k \cdot \dot{Z} = \sum_{k=1}^{l} \dot{E}_k$$

Резистор при синусоидальном токе

Резистор R - это двухполюсный элемент, у которого при данных условиях можно пренебречь индуктивностью и ёмкостью.

$$R = \frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{U}{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

Для резистивного элемента у тока и напряжения фаза одинакова, поэтому у резистора число активное сопротвление.
Активная мощность резистора:

$$P = UI\cos\varphi = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}, \varphi = 0$$

Следует заметить, что активное сопротивление на переменном токе может существенно отличаться от сопротивления на постоянном токе по причине поверхностного эффекта- на постоянном токе ток протекает по всему сечению проводника, на переменном токе он протекает по поверхности проводника, причем чем больше частота тока, тем выраженее этот эффект.

Катушка индуктивности при синусоидальном токе

$$i(t) = I_{max}\sin(\omega t),$$

$$u_L = L\frac{di(t)}{dt} = LI_{max}\omega\cos(\omega t) = LI_{max}\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

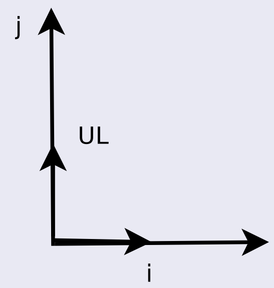
Таким образом, напряжение на катушке индуктивности опережает ток на $\frac{\pi}{2}$.
В комплексной форме имеем:

$$\dot{\dot{i}} = I_m e^{j\omega t}$$

$$\dot{u}_L = L\cdot\frac{\dot{\dot{i}}}{dt} = j\omega L\dot{\dot{i}} = \dot{Z}_L\dot{\dot{i}}$$

$$\dot{Z}_L = j\omega L = jX_L$$

Комплексное сопротивление катушки чисто реактивное.



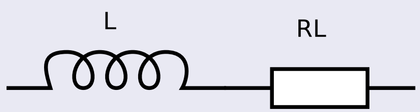
$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$$

Поскольку $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $P = UI\cos\varphi = 0$ - катушка не оказывает влияние на активную мощность цепи.

Катушка индуктивности при синусоидальном токе

Заметим, что из формулы $\dot{Z}_L = j\omega L$ следует, что при постоянном токе $\varphi = 0$ получаем $\dot{Z}_L = 0$ - катушка не оказывает сопротивления току. Наоборот, чем больше частота, тем большее сопротивление оказывает катушка индуктивности.

Реальные катушки выполняют проводом, который обладает активным сопротивелением, поэтому схема замещения реальной катушки имеет вид:



Конденсатор при синусоидальном токе

Для конденсатора имеем:

$$u_c(t) = U_{max}\sin(\omega t), i = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

Переходя к комплексной форме, получаем:

$$\dot{u}_c = U_{max}e^{j\omega t}, \dot{i} = C\frac{d\dot{u}_c}{dt} = C\frac{dU_{max}e^{j\omega t}}{dt} = j\omega C U_{max}e^{j\omega t} = j\omega C\dot{u}_c$$

Тогда получаем:

$$\dot{u}_c = \frac{\dot{i}}{j\omega C}$$

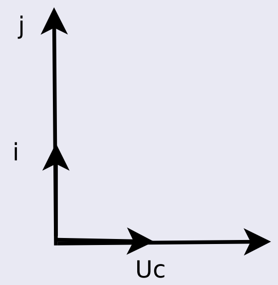
Также будем иметь $\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{Z}\dot{I}$, где $\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C}$- комплексное сопротивление конденсатора.

Также можн представить $\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j^2\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -jX_c$, где $X_c = \frac{1}{\omega C}$.

Из последнего выражения видно, что для постоянного тока ($\omega = 0$) конденсатор оказывает бесконечно большое сопротивление, чем больше частота тока, тем меньшее сопротивление оказывает конденсатор.

Выражение $\dot{U} = -jX_c\dot{I}$ показывает, что сдвиг между напряжением и током тоже на $\pi/2$, однако в данном случае ток опережает напряжение.

Конденсатор при синусоидальном токе



$$P = UI\cos\varphi, \varphi = \psi_i - \psi_i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0$$

Величины X_c, X_L - сопротивления конденсатора и катушки индуктивности также как и активное сопротивление измеряются в омах,однако с преобразованием энергии эти сопротивления X_c, X_L связи не имеют, поскольку физически отражают противодействие накопленного заряда конденсатора и противодействие ЭДС самоиндукции соответственно.