1. Решите рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 8 \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2^n \end{cases}$$

2. Найдите коэффициент при $\underline{x^{12}}$ в разложении функции

$$f(x) = \frac{(x^3-3x^2)}{(1-x)^4} = (x^3-3x^2)\left(\frac{1}{(1-x)^4}\right)$$

3. В урне 4 красных, 5 синих 2 зеленых шара. Сколько существует способов выбора 7 шаров из урны? Сколько существует способов, если хотя бы один шар красный, хотя бы 2 синие?

4. Докажите, что

$$\frac{1}{n-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^i}$$

5. Докажите, что

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \ldots$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

6. Докажите, что

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + C_m^1 x + C_{m+1}^2 x^2 + C_{m+2}^3 x^3 + \ldots$$

Докажите, что

$$\frac{1}{n-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^i}$$

$n=2$: $\quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$

$$\frac{1}{n-1} = \underbrace{a_0}_{\to 0} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \dots$$

$$1 = (n-1)\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \dots\right)$$

$$1 = n \cdot a_0 + a_1 + \frac{a_2}{n} + \frac{a_3}{n^2} + \dots$$
$$- a_0 - \frac{a_1}{n} - \frac{a_2}{n^2} - \dots$$

$$a_1 - a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$a_0 = 0$$

$$a_2 - a_1 = 0$$

$$a_2 = a_1 = 1$$

$$a_3 - a_2 = 0 \quad a_3 = a_2 = 1$$

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \dots$$

$$1 = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^3} + \frac{n-1}{n^4} + \dots$$

$$1 = \frac{n}{n} + \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^3} + \frac{n}{n^4} + \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

$$1 = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} - \dots$$

$1 = 1$ – верно.

1. Найти НОД(7007, 22869)

2. Найти остаток от деления $(13^{999}+16)$ на 7.

$$13^{999}+16 \equiv x \mod 7$$

$$\begin{array}{r|l} 999 & 6 \\ \cline{2-2} -6 & 166 \\ \hline 39 & \\ -36 & \\ \hline 39 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{33}{166} \\ \times\ 6 \\ \hline 996 \end{array}$$

$$13^3 \equiv y \mod 7$$

$$13^3 = 13 \cdot 13^2 \equiv 6 \cdot 6^2 \equiv 6 \cdot 1 \mod 7$$

$$13^{999}+16 \equiv 1 \mod 7$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \end{cases}$$

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \,/ : a_{n-2}$$

$$a_n = t^n$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$t_1 = t_2 = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

$$a_n = 2^n (C_1 + C_2 \cdot n)$$

при $a_0 = 2^0 \cdot C_1 = 1$

$$C_1 = 1$$

при $a_1 = 2^1 (C_1 + C_2) = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 2 + 2C_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$$a_n = 2^n(1-n);$$

$$a_0 = 1$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^n$$

$$a_n - 2a_{n-1} = 3^n$$

$$\frac{a_n}{3^n} - \frac{2a_{n-1}}{3 \cdot 3^{n-1}} = 1$$

$$b_n = \frac{a_n}{3^n}$$

$$b_n - \frac{2}{3} b_{n-1} = 1$$