Нисходящие распознаватели КС-языков без возвратов

Содержание

Метод рекурсивного спуска

Для улучшения алгоритма с подбором альтернатив для нисходящего разбора в первую очередь необходимо на каждом шаге алгоритма обеспечить однозначный выбор из возможных альтернатив. В таком случае алгоритм не будет требовать возврата на предыдущие шаги и будет обладать линейными характеристиками.
Для этих целей в методе рекурсивного спуска предлагается ориентироваться на терминальный символ входной цепочки. Если текущий символ входной цепочки равен a и текущий выбор необходимо делать для нетерминального символа A, то из всех правил вида $A \to \gamma$ ищется такое, в котором в цепочке γ на первом месте стоит терминальный символ a. Если такое правило найдено, то считывающая головка передвигается на следующий входной символ, а алгоритм запускается рекурсивно для каждого нетерминального символа в цепочке γ. Если для нетерминального символа A существует только одно правило $A \to \gamma$, где γ не начинается с терминального символа, то алгоритм аналогично запускается рекурсивно для каждого нетерминального символа в цепочке γ. В любом другом противном случае входная цепочка не принимается.
Начальный разбор идет с символа S.

Метод рекурсивного спуска

Условия применимости алгоритма рекурсивного спуска можно получить из его описания. Ясно, что для применимости необходимо, чтобы все правила грамматики удовлетворяли двум условиям:

1. Если для нетерминального символа A существует правило вида $A \to \gamma$, где γ начинается с нетерминального символа и состоит как из терминальных, так и из нетерминальных символов, то это должно быть единственное правило для A.
2. Во всех остальных случаях правила для нетерминального символа A должны иметь вид $A \to a\gamma$, где a - терминальный символ, γ состоит как из терминальных, так и из нетерминальных символов.

Данные условия являются достаточными, но не необходимыми. Может возникнуть ситуация, когда грамматика не удовлетворяет этим требованиям, но ее можно преобразовать к такому эквивалентному виду, чтобы эти требования выполнялись. Однако, не существует алгоритма, который бы позволил преобразовать произвольную КС-грамматику к указанному выше виду, равно как не существует и алгоритма, который бы позволял проверить, возможны ли такого рода преобразования. Все это ограничивает область применения данного алгоритма.

Пример использования метода рекурсивного спуска

Рассмотрим грамматику:

$$S \to aA|bB$$

$$A \to a|bA|cC$$

$$B \to b|aB|cC$$

$$C \to AaBb$$

Требуется проверить выводимость цепочки:

$$S \Rightarrow abcbaacaabbb$$

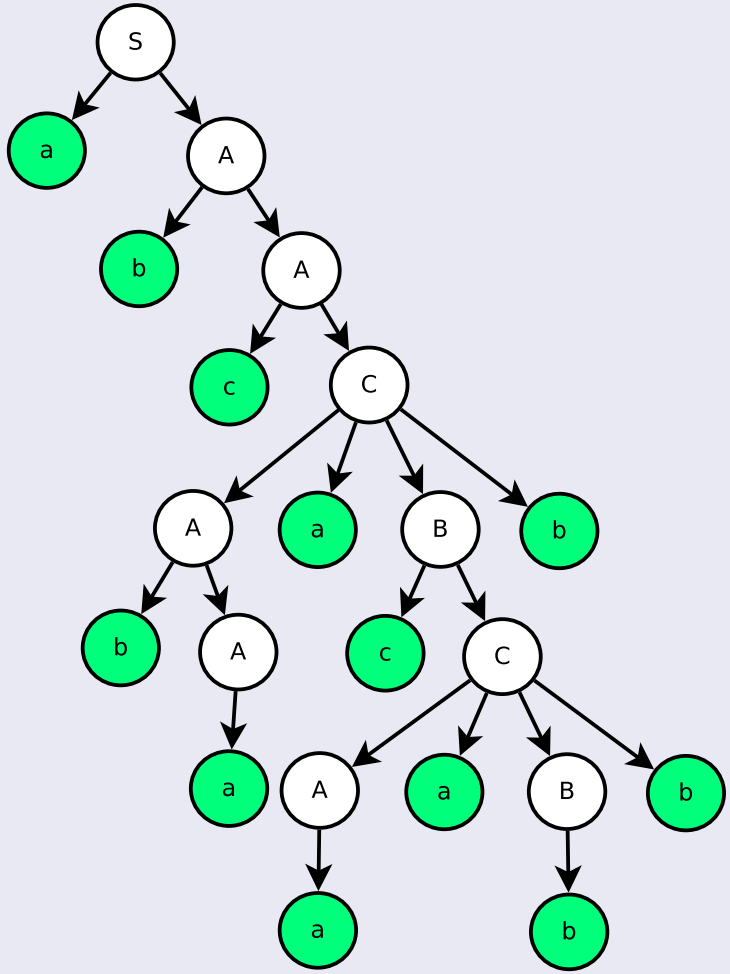
Заметим, что все правила удовлетворяют требованиям метода рекурсивного спуска: для символов S, A, B правая часть любого их правила начинается с терминального символа, у нетерминального символа C правая часть не начинается с терминального символа, но оно единственное для символа C.

Пример использования метода рекурсивного спуска

Остаток входной цепочки	Текущая цепочка вывода	Полученная цепочка вывода
abcbaacaabbb	S	aA
bcbaacaabbb	A	bA
cbaacaabbb	A	cC
baacaabbb	C	AaBb
baacaabbb	AaBb	bAaBb
aacaabbb	AaBb	aaBb
caabbb	Bb	cCb
aabbb	Cb	AaBbb
aabbb	AaBbb	aaBbb
bbb	Bbb	bbb
ϵ	ϵ	ϵ

Пример использования метода рекурсивного спуска

На рисунке представлено полученное дерево вывода.



Метод рекурсивного спуска

Можно рекомендовать ряд преобразований, которые способствуют приведению грамматики к виду, требуемому для применения алгоритма рекурсивного спуска. Эти преобразования заключаются в следующем:

- исключение ϵ-правил;
- исключение левой рекурсии;
- левая факторизация, которая позволяет исключить для каждого нетерминального символа правила, начинающиеся с одних и тех же терминальных символов: если правило имеет вид $A \to a\alpha_1|a\alpha_2|\ldots|a\alpha_n|b_1\beta_1|b_2\beta_2|\ldots|b_m\beta_m$ и ни одна цепочка β_i не начинается с символа a, то вводим новый нетерминальный символ A' и два правила:

$$A \to aA'|b_1\beta_1|b_2\beta_2|\ldots|b_m\beta_m, A' \to \alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_n$$

- замена нетерминальных символов в правилах на цепочки их выводов.
  Например, если имеются правила:

$$A \to B_1|B_2|\ldots|B_n|b_1\beta_1|b_2\beta_2|\ldots|b_m\beta_m,$$

$$B_1 \to \alpha_{11}|\alpha_{12}|\ldots|\alpha_{1k}$$

$$\ldots$$

$$B_n \to \alpha_{n1}|\alpha_{n2}|\ldots|\alpha_{np}$$

  то заменяем их на одно правило:

$$A \to \alpha_{11}|\alpha_{12}|\ldots|\alpha_{1k}|\ldots|\alpha_{n1}|\alpha_{n2}|\ldots|\alpha_{np}|b_1\beta_1|b_2\beta_2|\ldots|b_m\beta_m,$$

Задание 1

В грамматике, заданной правилами:

$$S \to aABb|bBAa|cCc$$

$$A \to aA|bB|cC$$

$$B \to b|aAC$$

$$C \to aA|bA|cC$$

Выполните вывод цепочки $aabbabbcabbb$ методом рекурсивного спуска

Задание 2

Реализуйте алгоритм рекурсивного спуска на языке программирования Python.

LL(k) - грамматики

Логическим продолжением идеи, положенной в основу метода рекурсивного спуска, является предложение использовать для выбора одной из множества альтернатив не один, а несколько символов входной цепочки. Однако напрямую переложить алгоритм выбора альтернативы, как для одного символа, не удастся, поскольку два соседних символа в цепочке на самом деле могут быть выведены с использованием различных правил грамматики, поэтому неверным будет напрямую искать их в одном правиле.

Тем не менее существует класс грамматик, в котором осуществляется выбор одной альтернативы из множества возможных именно на основе нескольких начальных символов из входной цепочки. Этот класс грамматик имеет название $LL(k)$-грамматики. Первая буква L обозначает, что входная цепочка читается слева направо, вторая буква L обозначает обстоятельство, что осуществляется левосторонний вывод, k обозначает количество символов, просматриваемых во входной строке. Обычно ведут речь о грамматиках с конкретным значением k, так существуют $LL(1)$ - грамматики, $LL(2)$ - грамматики и т.д.

LL(k) - грамматики

Грамматика обладает свойством $LL(k), k > 0$, если на каждом шаге вывода для однозначного выбора очередной альтернативы достаточно знать символ на верхушке стека и рассмотреть первые k символов от текущего положения считывающей головки во входной строке.
Для $LL(k)$ грамматик существует алгоритм, позволяющий проверить, является ли заданная грамматика $LL(k)$-грамматикой для строго определенного числа k.
Кроме того, известно, что все грамматики, допускающие разбор по методу рекурсивного спуска, являются подклассом $LL(1)$-грамматик.
Есть, однако, неразрешимые проблемы для $LL(k)$-грамматик:

- не существует алгоритма, который бы мог проверить, является ли заданная КС-грамматика $LL(k)$-грамматикой для некоторого произвольного k;
- не существует алгоритма, который бы мог преобразовать произвольную КС-грамматику к виду $LL(k)$-грамматики для некоторого k (или доказать, что преобразование невозможно).

Для $LL(k)$-грамматики при $k > 1$ совсем необязательно, чтобы все правые части правил грамматики для каждого нетерминального символа начинались с k различных терминальных символов. Принципы распознавания предложений входного языка такой грамматики накладывают менее жесткие ограничения на правила грамматики, поскольку k соседних символов, по которым однозначно выбирается очередная альтернатива, могут встречаться в нескольких правилах грамматики.
Поскольку все $LL(k)$-грамматики используют левосторонний нисходящий распознаватель, основанный на алгоритме с подбором альтернатив, очевидно, что они не могут допускать левую рекурсию.

LL(k) - грамматики

Класс $LL(k)$-грамматик широк, но все же он недостаточен для того, чтобы покрыть все возможные синтаксические конструкции в языках программирования. Известно, что существуют детерминированные КС-языки, которые не могут быть заданы $LL(k)$-грамматикой ни для каких k. Однако $LL(k)$-грамматики удобны для использования, поскольку позволяют построить линейные распознаватели. Для построения распознавателей языков, заданных $LL(k)$-грамматиками, используются два множества, определяемые следующим образом:

- $FIRST(k, \alpha)$ - множество терминальных цепочек, укороченных до k символов выводимых из α - строки из терминальных и нетерминальных символов;
- $FOLLOW(k, A)$ - множество укороченных до k символов терминальных цепочек, которые могут следовать непосредственно за нетерминальным символом A в цепочках вывода.

В дальнейшем мы будем рассматривать только $LL(1)$-грамматики. Очевидно, для каждого нетерминальноrо символа в $LL(1)$-грамматике не может быть двух правил, начинающихся с одного и того же терминального символа. Однако это менее жесткое условие, чем то, которое накладывает распознаватель по методу рекурсивного спуска, поскольку, в принципе, $LL(1)$-грамматика допускает в правой части правил цепочки, начинающиеся с нетерминальных символов, а также ϵ-правила. $LL(1)$-грамматики позволяют построить достаточно простой и эффективный распознаватель.

LL(1) - грамматики

Для $LL(1)$-грамматик алгоритм работы распознавателя на шаге выбора альтернативы заключается в проверке двух условий (предполагается, что a - очередной символ, обозреваемый считывающей головкой, A - нетерминал на верхушке стека:

1. необходимо выбрать в качестве альтернативы правило $A \to \alpha$, если $a \in FIRST(1, \alpha)$
2. необходимо выбрать в качестве альтернативы правило $A \to \epsilon$, если $a \in FOLLOW(1, A)$

Если ни одно из этих условий не выполняется, то цепочка не принадлежит заданному языку, и алгоритм должен сигнализировать об ошибке.
Чтобы проверить, что заданная грамматика является $LL(1)$-грамматикой, необходимо и достаточно проверить для каждого нетерминального символа A, для которого существует более одного правила вида $A \to \alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_n$, выполнение требования:

$$FIRST(1, \alpha_i FOLLOW(1, A)) \cap FIRST(1, \alpha_j FOLLOW(1, A)) = \varnothing, \forall i \neq j$$

Иными словами, если для нетерминального символа A отсутствует правило $A \to \epsilon$, то все множества $FIRST(1, \alpha_1), FIRST(1, \alpha_2), \ldots, FIRST(1, \alpha_n)$ должны попарно не пересекаться, если же присутствует правило $A \to \epsilon$, то они не должны также пересекаться с множеством $FOLLOW(1, A)$.

Алгоритм построения $FIRST(1, A)$

Для $FIRST(1, \alpha)$, если цепочка α начинается с терминального символа b, то $FIRST(1, \alpha) = \{b\}$, если же она начинается с нетерминального символа B, то $FIRST(1, \alpha) = FIRST(1, B)$. Рассмотрим более детальный алгоритм, который строит множества $FIRST(1, \alpha)$ сразу для всех нетерминальных символов грамматики. Алгоритм работает для грамматик, не содержащих ϵ-правил (в противном случае ее нужно преобразовать к такому виду).

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Для всех нетерминальных символов A формируем $FIRST_0(1, A) = \{X | A \to X\alpha\}$ - включает все символы X, стоящие в начале правых частей правил для символа A.
2. Для всех нетерминальных символов A формируем $FIRST_{i+1}(1, A) = FISRT_i(1, A) \cup FIRST_i(1, B)$, где B - все нетерминальные символы множества $FISRT_i(1, A)$
3. Если существует нетерминальный символ A, для которого $FIRST_{i+1}(1, A) \neq FIRST_i(1, A)$ возвратиться к шагу 2, иначе перейти на шаг 4
4. Исключаем из полученных множеств $FIRST_i(1, A)$ все нетерминальные символы.

Алгоритм построения $FIRST(1, A)$

Пример

Применим алгоритм построения $FIRST(1, A)$ для грамматики:

$$S \to T|TR$$

$$R \to +T| - T| + TR| - TR$$

$$T \to E|EF$$

$$F \to *E|/E| * EF|/EF$$

$$E \to (S)|a|b$$

Шаг 1:

$$FIRST_0(1, S) = \{T\}, FIRST_0(1, R) = \{+, -\}, FIRST_0(1, T) = \{E\}$$

$$FIRST_0(1, F) = \{*, /\}, FIRST_0(E) = \{(, a, b\}$$

Шаг 2:

$$FIRST_1(1, S) = \{T, E\}, FIRST_1(1, R) = \{+, -\}, FIRST_1(1, T) = \{E, (, a, b\}$$

$$FIRST_1(1, F) = \{*, /\}, FIRST_1(1, E) = \{(, a, b\}$$

Шаг 3: возвращаемся к шагу 2.

Алгоритм построения $FIRST(1, A)$

Пример

Шаг 2:

$$FIRST_2(1, S) = \{T, E, (, a, b\}, FIRST_2(1, R) = \{+, -\}, FIRST_2(1, T) = \{E, (, a, b\}$$

$$FIRST(1, F) = \{*, /\}, FIRST_2(1, E) = \{(, a, b\}$$

Шаг 3: возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2:

$$FIRST_2(1, S) = \{T, E, (, a, b\}, FIRST_2(1, R) = \{+, -\}, FIRST_2(1, T) = \{E, (, a, b\}$$

$$FIRST_2(1, F) = \{*, /\}, FIRST_2(1, E) = \{(, a, b\}$$

Шаг 3: переходим к шагу 4.

Шаг 4:

$$FIRST(1, S) = \{(, a, b\}, FIRST(1, R) = \{+, -\}, FIRST(1, T) = \{(, a, b\}$$

$$FIRST(1, F) = \{*, /\}, FIRST(1, E) = \{(, a, b\}$$

Построение закончено.

Алгоритм построения $FOLLOW(1, A)$

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Для всех нетерминальных символов A формируем $FOLLOW_0(1, A) = \{X | \exists B \to \alpha A X \beta\}$ - вносим все символы, которые в правой части всех правил непосредственно следуют за A.
2. $FOLLOW_0(1, S) = FOLLOW_0(1, S) \cup \{\epsilon\}$ - вносим пустую цепочку в множество последующих символов для целевого символа S - это означает, что в конце разбора за целевым символом цепочка кончается.
3. Для всех нетерминальных символов A определяем $FOLLOW'_i(1, A) = FOLLOW_i(1, A) \cup FIRST(1, B)$ для всех нетерминальных символов B, входящих в $FOLLOW_i(1, A)$.
4. Для всех нетерминальных символов A определяем $FOLLOW''_i(1, A) = FOLLOW'_i(1, A) \cup FOLLOW'_i(1, B)$ для всех нетерминальных символов B, входящих в $FOLLOW'_i(1, A)$, если существует правило $B \to \epsilon$.
5. Для всех нетерминальных символов A: $FOLLOW_{i+1}(1, A) = FOLLOW''_i(1, A) \cup FOLLOW''_i(1, B)$ для всех нетерминальных символов B, если существует правило $B \to \alpha A$
6. Если $FOLLOW_{i+1}(1, A) = FOLLOW_i(1, A)$, то перейти к шагу 7, иначе к шагу 3.
7. Из всех построенных $FOLLOW_i(1, A)$ исключаем все нетерминальные символы.

Алгоритм построения $FOLLOW(1, A)$

Пример

Рассмотрим использование алгоритма нахождения $FOLLOW(1, A)$ для грамматики предыдущего примера. Однако она не является $LL(1)$- грамматикой, т.к. для символов R, F имеется несколько символов, начинающихся с одного и того же терминального символа. Поэтому преобразуем ее в другой вид, добавив ϵ-правила

$$S \to TR$$

$$R \to \epsilon | +TR | -TR$$

$$T \to EF$$

$$F \to \epsilon | *EF | /EF$$

$$E \to (S) | a | b$$

Шаг 1:

$$FOLLOW(1, S) = \{)\}$$

$$FOLLOW(1, R) = \varnothing$$

$$FOLLOW(1, T) = \{R\}$$

$$FOLLOW(1, F) = \varnothing$$

$$FOLLOW(1, E) = \{F\}$$

Алгоритм построения $FOLLOW(1, A)$

Пример

Шаг 2:

$$FOLLOW_0(1, S) = \{)\}$$
$$FOLLOW_0(1, R) = \varnothing$$
$$FOLLOW_0(1, T) = \{R\}$$
$$FOLLOW_0(1, F) = \varnothing$$
$$FOLLOW_0(1, E) = \{F\}$$

Шаг 3:

$$FOLLOW'_0(1, S) = \{)\}$$
$$FOLLOW'_0(1, R) = \varnothing$$
$$FOLLOW'_0(1, T) = \{R, +, -\}$$
$$FOLLOW'_0(1, F) = \varnothing$$
$$FOLLOW'_0(1, E) = \{F, *, /\}$$

Алгоритм построения $FOLLOW(1, A)$

Пример

Шаг 4:

$$FOLLOW_0''(1, S) = \{), \epsilon\}$$

$$FOLLOW_0''(1, R) =$$

$$FOLLOW_0''(1, T) = \{R, +, -\}$$

$$FOLLOW_0''(1, F) =$$

$$FOLLOW_0''(1, E) = \{F, *, /, R, +, -\}$$

Шаг 5:

$$FOLLOW_1(1, S) = \{), \epsilon\}$$

$$FOLLOW_1(1, R) = \{), \epsilon\}$$

$$FOLLOW_1(1, T) = \{R, +, -\}$$

$$FOLLOW_1(1, F) = \{R, +, -\}$$

$$FOLLOW_1(1, E) = \{F, *, /\}$$

Шаг 6: возвращаемся к шагу 3.

Алгоритм построения $FOLLOW(1, A)$

Пример

Шаг 3:

$$FOLLOW_1'(1, S) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_1'(1, R) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_1'(1, T) = \{R, +, -\}$$
$$FOLLOW_1'(1, F) = \{R, +, -\}$$
$$FOLLOW_1'(1, E) = \{F, *, /\}$$

Шаг 4:

$$FOLLOW_1''(1, S) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_1''(1, R) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_1''(1, T) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_1''(1, F) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_1''(1, E) = \{F, *, /, R, +, -\}$$

Алгоритм построения $FOLLOW(1, A)$

Пример

Шаг 5:

$$FOLLOW_2(1, S) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_2(1, R) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_2(1, T) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_2(1, F) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_2(1, E) = \{F, *, /, R, +, -\}$$

Шаг 6: возвращаемся к шагу 3.

Шаг 3:

$$FOLLOW'_2(1, S) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW'_2(1, R) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW'_2(1, T) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW'_2(1, F) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW'_2(1, E) = \{F, *, /, R, +, -,), \epsilon\}$$

Алгоритм построения $FOLLOW(1, A)$

Пример

Шаг 4:

$$FOLLOW_2''(1, S) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_2''(1, R) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_2''(1, T) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_2''(1, F) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_2''(1, E) = \{F, *, /, R, +, -,), \epsilon\}$$

Шаг 5:

$$FOLLOW_3(1, S) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_3(1, R) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_3(1, T) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_3(1, F) = \{R, +, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW_3(1, E) = \{F, *, /, R, +, -,), \epsilon\}$$

Шаг 6: переходим к шагу 7.

Алгоритм построения $FOLLOW(1, A)$

Пример

Шаг 7:

$$FOLLOW(1, S) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW(1, R) = \{), \epsilon\}$$
$$FOLLOW(1, T) = \{+, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW(1, F) = \{+, -,), \epsilon\}$$
$$FOLLOW(1, E) = \{*, /, +, -,), \epsilon\}$$

Построение закончено.

Свод результатов

Пример

Для грамматики:

$$S \to TR$$

$$R \to \epsilon | +TR | -TR$$

$$T \to EF$$

$$F \to \epsilon | *EF | /EF$$

$$E \to (S) | a | b$$

множества FIRST, FOLLOW для каждого нетерминального символа представим в виде таблицы:

$A \in VN$	$FIRST(1, A)$	$FOLLOW(1, A)$
S	(a b	) ϵ
R	+ -	) ϵ
T	(a b	+ -) ϵ
F	* /	+ -) ϵ
E	(a b	* / + -) ϵ

Разбор выводимой цепочки

Пример

При разборе будем нумеровать правила грамматики слева направо и добавлять их в стек. Текущее состояние будем обозначать тройкой: (x, y, z), где x - остаток входной цепочки, y - рабочий стек, z - стек считанных правил.

Проверим вывод цепочки $a + a * b$ в данной грамматике. Алгоритм включает шаги:

1. необходимо выбрать в качестве альтернативы правило $A \to \alpha$, если $a \in FIRST(1, \alpha)$
2. необходимо выбрать в качестве альтернативы правило $A \to \epsilon$, если $a \in FOLLOW(1, A)$

Номер итерации	x	y	z	Пояснения
1	$a + a * b$	S	ϵ	Начало
2	$a + a * b$	TR	1	$a \in FIRST(1, TR)$
3	$a + a * b$	EFR	$1, 5$	$a \in FIRST(1, EF)$
4	$a + a * b$	aFR	$1, 5, 10$	$a \in FIRST(1, a)$
5	$+a * b$	FR	$1, 5, 10$	
6	$+a * b$	R	$1, 5, 10, 6$	$+ \in FOLLOW(1, F)$
7	$+a * b$	$+TR$	$1, 5, 10, 6, 3$	$+ \in FIRST(1, +TR)$
8	$a * b$	TR	$1, 5, 10, 6, 3$	
9	$a * b$	EFR	$1, 5, 10, 6, 3, 5$	$a \in FIRST(1, EF)$
10	$a * b$	aFR	$1, 5, 10, 6, 3, 5, 10$	$a \in FIRST(1, a)$
11	$*b$	FR	$1, 5, 10, 6, 3, 5, 10$	
12	$*b$	$*EFR$	$1, 5, 10, 6, 3, 5, 10, 7$	$* \in FIRST(1, *EF)$
13	b	EFR	$1, 5, 10, 6, 3, 5, 10, 7$	

Разбор выводимой цепочки

Пример

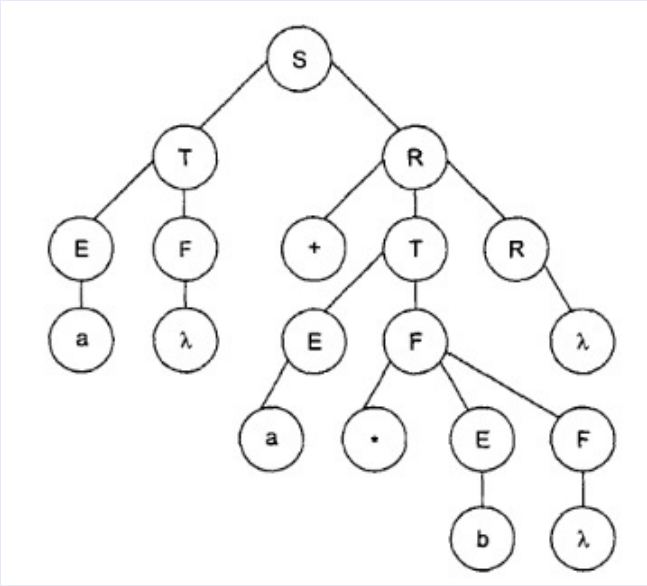
Номер итерации	x	y	z	Пояснения
14	b	bFR	$1, 5, 10, 6, 3, 5, 10, 7, 11$	$b \in FIRST(1, b)$
15	ϵ	FR	$1, 5, 10, 6, 3, 5, 10, 7, 11$	
16	ϵ	R	$1, 5, 10, 6, 3, 5, 10, 7, 11, 6$	$\epsilon \in FOLLOW(1, F)$
17	ϵ	ϵ	$1, 5, 10, 6, 3, 5, 10, 7, 11, 6, 2$	$\epsilon \in FOLLOW(1, R)$

Пользуясь правилами из стека, можно восстановить вывод:

$$S \to TR \to EFR \to aFR \to aR \to a + TR \to a + EFR \to a + aFR \to a + a * EFR \to a + a * bFR \to$$

$$\to a + a * bR \to a + a * b$$

На рисунке показано дерево вывода:



Задание 1

Осуществить в рассмотренной грамматике разбор цепочки $(a + a) * b$

Задание 2

Осуществить в рассмотренной грамматике разбор цепочки $a + a*$