Problema 01.

Sea $f(x)$ una antiderivada de $v(x)$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a. $3f(x)$ **es una antiderivada de** $3v(x)$

Solución:

Dado que $f(x)$ es una antiderivada de $v(x)$, es decir:

$$f'(x) = v(x),$$

Debemos verificar si $3f(x)$ es una antiderivada de $3v(x)$.

Consideremos la función $F(x) = 3f(x)$ y calculemos su derivada:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[3f(x)]$$

Usando la regla de la constante multiplicada por una función, tenemos:

$$F'(x) = 3f'(x)$$

Dado que $f'(x) = v(x)$, podemos sustituir:

$$F'(x) = 3v(x)$$

Por lo tanto, la derivada de $3f(x)$ es $3v(x)$, lo que demuestra que $3f(x)$ es efectivamente una antiderivada de $3v(x)$.

Conclusión:

La proposición **(a)** es **verdadera**.

b. $2f(2x)$ **es una antiderivada de** $v(2x)$

Solución:

Dado que $f(x)$ es una antiderivada de $v(x)$, es decir:

$$f'(x) = v(x),$$

Consideremos la función $G(x) = 2f(2x)$ y calculemos su derivada:

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[2f(2x)]$$

Usando la regla de la cadena, tenemos:

$$G'(x) = 2 \cdot f'(2x) \cdot 2 = 4f'(2x)$$

Dado que $f'(2x) = v(2x)$, podemos sustituir:

$$G'(x) = 4v(2x)$$

Por lo tanto, la derivada de $2f(2x)$ es $4v(2x)$, no $v(2x)$.

Conclusión:

La proposición **(b)** es **falsa**.

c. $f(x+3)$ es una antiderivada de $v(x+3)$

Solución:

Dado que $f(x)$ es una antiderivada de $v(x)$, es decir:

$$f'(x) = v(x),$$

Consideremos la función $H(x) = f(x+3)$ y calculemos su derivada:

$$H'(x) = \frac{d}{dx}[f(x+3)]$$

Usando la regla de la cadena, tenemos:

$$H'(x) = f'(x+3)$$

Dado que $f'(x+3) = v(x+3)$, podemos concluir:

$$H'(x) = v(x+3)$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x+3)$ es $v(x+3)$, lo que demuestra que $f(x+3)$ es efectivamente una antiderivada de $v(x+3)$

Conclusión:

La proposición **(c)** es **verdadera**.

Problema 02.

Determine la antiderivada F de la función f, suponiendo que $F(0) = 0$.

a. $f(x) = 4x - \sqrt{x}$

Solución:

La antiderivada de $f(x)$ es:

$$F(x) = \int (4x - \sqrt{x})\, dx$$

Calculamos cada término por separado:

$$\int 4x\, dx = 2x^2, \quad \int x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

Combinando ambos términos:

$$F(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Usando la condición inicial $F(0) = 0$:

$$C = 0$$

La antiderivada es:

$$F(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}$$

Conclusión:

La antiderivada de $f(x) = 4x - \sqrt{x}$ es $F(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}$

b. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

Solución:

La antiderivada de $f(x)$ es:

$$F(x) = \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{x+1} + C$$

Usando la condición inicial $F(0) = 0$:

$$C = 1$$

La antiderivada es:

$$F(x) = -\frac{1}{x+1} + 1$$

Conclusión:

La antiderivada de $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ es $F(x) = -\frac{1}{x+1} + 1$

c. $f(x) = e^{-2x} + 3x^2$

Solución:

La antiderivada de $f(x)$ es:

$$F(x) = \int (e^{-2x} + 3x^2)\, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x^3 + C$$

Usando la condición inicial $F(0) = 0$:

$$C = \frac{1}{2}$$

La antiderivada es:

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x^3 + \frac{1}{2}$$

Conclusión:

La antiderivada de $f(x) = e^{-2x} + 3x^2$ es $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x^3 + \frac{1}{2}$.

Problema 03.

Determine las integrales indefinidas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x}}$

Solución:

Para resolver esta integral, utilizamos la sustitución $u = \sqrt{x}$, de modo que $x = u^2$ y $dx = 2u\,du$.

La integral se convierte en:

$$\int \frac{1}{(u^2+2)u} \cdot 2u\,du = 2\int \frac{1}{u^2+2}\,du$$

Usando la fórmula para la integral de $\frac{1}{u^2+a^2}$, donde $a = \sqrt{2}$:

$$2\int \frac{1}{u^2+(\sqrt{2})^2}\,du = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Sustituyendo $u = \sqrt{x}$, obtenemos:

$$F(x) = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Conclusión:

La integral indefinida de $f(x) = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x}}$ es:

$$F(x) = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right) + C$$

b. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}+4}$

Solución:

Para resolver esta integral, usamos la sustitución $u = \sqrt{x+3}$, de modo que $x = u^2 - 3$ y $dx = 2u\,du$.

Reescribimos la integral en términos de u:

$$\int \frac{u^2-3}{u+4} \cdot 2u\,du = 2\int \frac{u(u^2-3)}{u+4}\,du = 2\int \frac{u^3-3u}{u+4}\,du$$

Dividimos el numerador por el denominador:

$$= 2\int \left(u^2 - 4u + \frac{16}{u+4}\right)\,du$$

Ahora integramos término a término:

$$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3}$$

$$\int -4u\,du = -2u^2$$

$$\int \frac{16}{u+4}\,du = 16\ln|u+4|$$

Por lo tanto:

$$F(u) = \frac{2}{3}u^3 - 4u^2 + 32\ln|u+4| + C$$

Sustituyendo $u = \sqrt{x+3}$:

$$F(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x+3})^3 - 4(x+3) + 32\ln|\sqrt{x+3}+4| + C$$

Simplificando:

$$F(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} - 4(x+3) + 32\ln|\sqrt{x+3}+4| + C$$

Conclusión:

La integral indefinida de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}+4}$ es:

$$F(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} - 4(x+3) + 32\ln|\sqrt{x+3}+4| + C$$

c. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}+1}$

Solución:

Para resolver esta integral, utilizamos la sustitución $u = \sqrt{1+x^2}$, de modo que:

$$x = \sqrt{u^2 - 1}, dx = \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-1}}$$

Reescribimos la integral en términos de u:

$$\int \frac{(\sqrt{u^2-1})^3}{u+1} \cdot \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{(u+1)^2}\,du$$

Simplificamos dividiendo:

$$\int \left(u^2 - 2 + \frac{3}{u+1} \right) du$$

Ahora integramos término a término:

$$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3}$$

$$\int -2\,du = -2u$$

$$\int \frac{3}{u+1}\,du = 3\ln|u+1|$$

Por lo tanto:

$$F(u) = \frac{u^3}{3} - 2u + 3\ln|u+1| + C$$

Sustituyendo $u = \sqrt{1+x^2}$:

$$F(x) = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{1+x^2} + 3\ln|\sqrt{1+x^2}+1| + C$$

Conclusión:

La integral indefinida de $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}+1}$ es:

$$F(x) = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{1+x^2} + 3\ln|\sqrt{1+x^2}+1| + C$$

d. $f(x) = e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

Solución:

Distribuimos y reescribimos la integral:

$$\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{e^x}{x} \, dx - \int \frac{e^x}{x^2} \, dx$$

Para la segunda integral, utilizamos integración por partes. Definimos: $u = \frac{1}{x}$, $dv = e^x \, dx$, entonces $du = -\frac{1}{x^2} \, dx$, $v = e^x$.

Aplicando la integración por partes:

$$\int \frac{e^x}{x^2} \, dx = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x} \, dx$$

Por lo tanto, la integral total es:

$$F(x) = \frac{e^x}{x} + \mathrm{Ei}(x) + C$$

Conclusión:

La integral indefinida de $f(x) = e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ es:

$$F(x) = \frac{e^x}{x} + \mathrm{Ei}(x) + C$$