## Problema 01.

**Sea $f(x)$ una antiderivada de $v(x)$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.**

**a.** $3f(x)$ **es una antiderivada de** $3v(x)$

**Solución:**

Dado que $f(x)$ es una antiderivada de $v(x)$, es decir:

$$f'(x) = v(x),$$

Debemos verificar si $3f(x)$ es una antiderivada de $3v(x)$.

Consideremos la función $F(x) = 3f(x)$ y calculemos su derivada:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[3f(x)]$$

Usando la regla de la constante multiplicada por una función, tenemos:

$$F'(x) = 3f'(x)$$

Dado que $f'(x) = v(x)$, podemos sustituir:

$$F'(x) = 3v(x)$$

Por lo tanto, la derivada de $3f(x)$ es $3v(x)$, lo que demuestra que $3f(x)$ es efectivamente una antiderivada de $3v(x)$.

**Conclusión:**

La proposición **(a)** es **verdadera**.

**b.** $2f(2x)$ **es una antiderivada de** $v(2x)$

**Solución:**

Dado que $f(x)$ es una antiderivada de $v(x)$, es decir:

$$f'(x) = v(x),$$

Consideremos la función $G(x) = 2f(2x)$ y calculemos su derivada:

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[2f(2x)]$$

Usando la regla de la cadena, tenemos:

$$G'(x) = 2 \cdot f'(2x) \cdot 2 = 4f'(2x)$$

Dado que $f'(2x) = v(2x)$, podemos sustituir:

$$G'(x) = 4v(2x)$$

Por lo tanto, la derivada de $2f(2x)$ es $4v(2x)$, no $v(2x)$.

**Conclusión:**

La proposición **(b)** es **falsa**.

**c.** $f(x+3)$ **es una antiderivada de** $v(x+3)$

**Solución:**

Dado que $f(x)$ es una antiderivada de $v(x)$, es decir:

$$f'(x) = v(x),$$

Consideremos la función $H(x) = f(x+3)$ y calculemos su derivada:

$$H'(x) = \frac{d}{dx}[f(x+3)]$$

Usando la regla de la cadena, tenemos:

$$H'(x) = f'(x+3)$$

Dado que $f'(x+3) = v(x+3)$, podemos concluir:

$$H'(x) = v(x+3)$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x+3)$ es $v(x+3)$, lo que demuestra que $f(x+3)$ es efectivamente una antiderivada de $v(x+3)$

**Conclusión:**

La proposición **(c)** es **verdadera**.

## Problema 02.

**Determine la antiderivada $F$ de la función $f$, suponiendo que $F(0) = 0$.**

**a.** $f(x) = 4x - \sqrt{x}$

**Solución:**

La antiderivada de $f(x)$ es:

$$F(x) = \int (4x - \sqrt{x})\, dx$$

Calculamos cada término por separado:

$$\int 4x\, dx = 2x^2, \quad \int x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

Combinando ambos términos:

$$F(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Usando la condición inicial $F(0) = 0$:

$$C = 0$$

La antiderivada es:

$$F(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}$$

**Conclusión:**

La antiderivada de $f(x) = 4x - \sqrt{x}$ es $F(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}$

**b.** $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

**Solución:**

La antiderivada de $f(x)$ es:

$$F(x) = \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{x+1} + C$$

Usando la condición inicial $F(0) = 0$:

$$C = 1$$

La antiderivada es:

$$F(x) = -\frac{1}{x+1} + 1$$

**Conclusión:**

La antiderivada de $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ es $F(x) = -\frac{1}{x+1} + 1$

**c.** $f(x) = e^{-2x} + 3x^2$

**Solución:**

La antiderivada de $f(x)$ es:

$$F(x) = \int (e^{-2x} + 3x^2)\, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x^3 + C$$

Usando la condición inicial $F(0) = 0$:

$$C = \frac{1}{2}$$

La antiderivada es:

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x^3 + \frac{1}{2}$$

**Conclusión:**

La antiderivada de $f(x) = e^{-2x} + 3x^2$ es $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x^3 + \frac{1}{2}$.