

Tema 5

Agenda



- Introducción
- El problema de la mochila (otra vez más)
- El problema de las 8 reinas
- Ramificación y poda



Universidad

Búsqueda exhaustiva

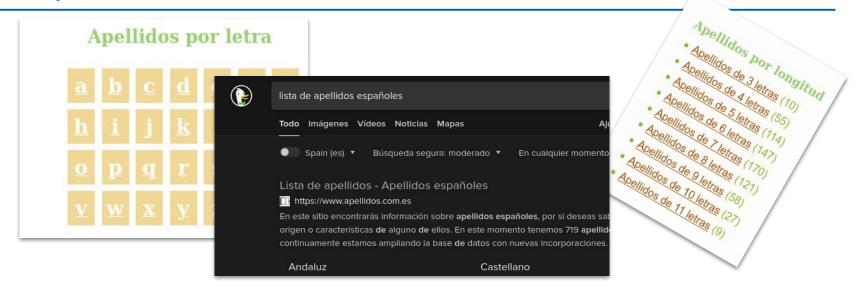
Algunos problemas no pueden resolverse mediante una aproximación algorítmica; i.e.:

- Paso a paso
- De forma determinista

En estos casos, puede que no nos quede más opción que realizar una búsqueda exhaustiva, o fuerza bruta.

Búsqueda exhaustiva





Listado completo de apellidos

¿Cómo me apellido?

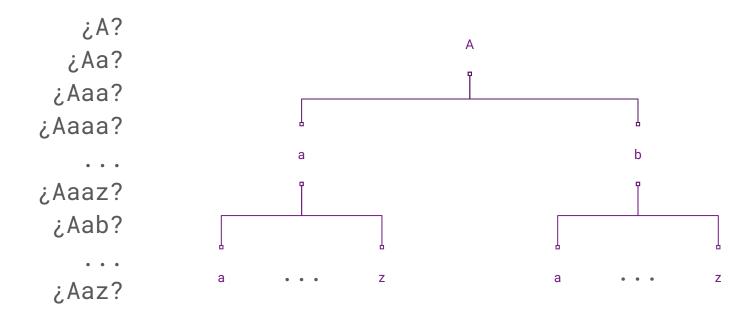
Búsqueda exhaustiva



¿A?	¿Ab?	¿Abz?
¿Aa?	¿Aba?	• • •
¿Aaa?	¿Abaa?	¿Abzz?
¿Aaaa?	• • •	¿Az?
• • •	¿Abaz?	¿Aza?
¿Aaaz?	¿Abb?	¿Azaa?
¿Aab?	¿Abba?	• • •
• • •	• • •	¿Azzz?
¿Aaz?	¿Abbz?	¿B?

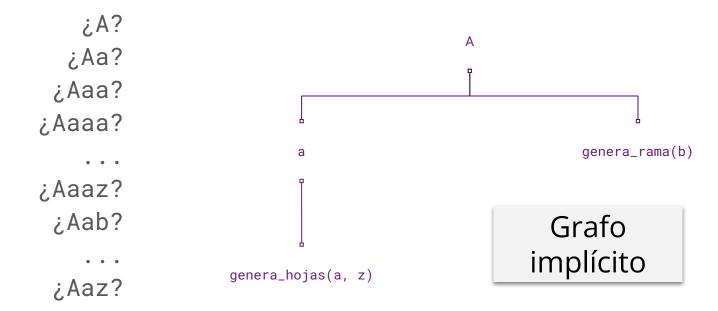
Búsqueda exhaustiva





Búsqueda exhaustiva



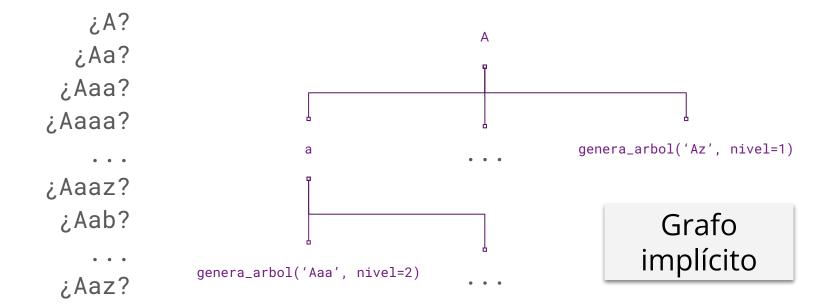




El backtracking es una aproximación (generalmente recursiva) de búsqueda exhaustiva basada en la exploración de grafos implícitos. Para ello, procede de la siguiente forma:

- 1. Por cada nodo de profundidad K, basado en una solución parcial S
- 2. Generamos las derivaciones S' de S, y por cada una de ellas
- 3. Comprobamos si es solución del problema
 - a. Si lo es, almacenar S
 - o. Si no, llamada recursiva al método con S' y K-1







```
# Aprox. incremental
def backtracking(solucion=[], nivel=0):
if nivel == nivel_max:
   return solucion
for c in candidatos:
  siguiente = solucion + [ candidato ]
  if es_solucion(siguiente):
     trata_solucion(siguiente)
  backtracking(siguiente, nivel+1)
```



```
import string
soluciones = []
# Ejemplo de aprox. con cota
def pwdcrack(pwd="", max=10):
 if es_solucion(pwd):
   soluciones.append(pwd)
 if len(pwd) == max:
   return
  for c in string.ascii_letters + string.digits + string.punctuation:
   pwdcrack(pwd + c, max)
```



A este esquema básico pueden incorporarse muchas componentes, en general en forma de parámetros que se añaden en la llamada recursiva:

- Nivel de profundidad
- Estructuras de almacenamiento de soluciones parciales
- Estructuras de almacenamiento de entradas parciales
- Elementos de control de flujo (e.g., finalización del proceso, reporte, etc.)

Problemas



El paso de parámetros por valor duplica las estructuras de datos.

Es mejor el paso por referencia, pero hay que tener cuidado con las modificaciones, o pueden darse casos de corrupción:

- Entre hermanos: el padre aporta distinta información a los hijos
- De padres a hijos (realmente, de hijos a padre): paso de parámetros por referencia, y alteración por parte de los hijos









































































































El problema de la mochila (BT)

























Búsqueda en profundidad hasta 😎

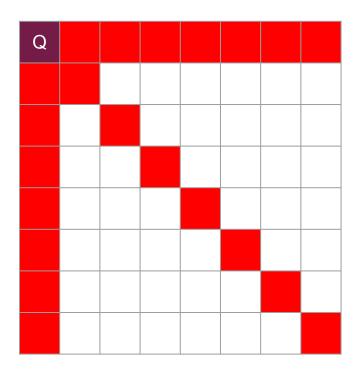


El problema de las 8 reinas



La reina del ajedrez (Q) pone en riesgo a todas las piezas que hay:

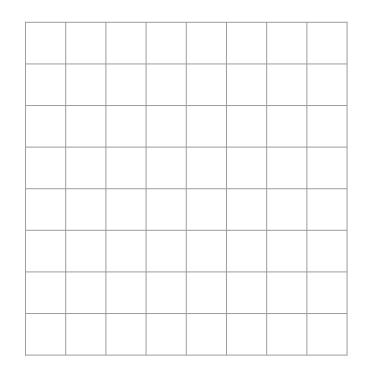
- Diagonales
- Horizontal
- Vertical



El problema de las 8 reinas



El problema de las 8 reinas plantea cómo se podrían introducir 8 reinas en un tablero de 8x8 sin que se amenacen entre sí



El problema de las 8 reinas



1. Aproximación limpia

64⁸ combinaciones

- nivel = 1
- iteración = 1

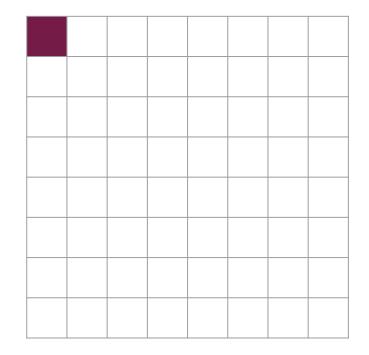
El problema de las 8 reinas



1. Aproximación limpia

64⁸ combinaciones

- nivel = 2
- iteración = 1



El problema de las 8 reinas



1. Aproximación limpia

 64^8 combinaciones = 2^{48}

- nivel = 2
- iteración = 2

Límites de la búsqueda exhaustiva



Energía mínima necesaria para realizar una operación* → 2.85×10⁻²¹ J

Cantidad de energía en el universo** → 1.8×10⁴⁷ J

Con toda la energía del universo pueden realizarse ~2²²⁵ operaciones:

log₂ 1.8e47 / 2.85e-21

Por eso es buena idea trabajar con AES-256:)

*Principio de Landauer; ** Jim Lochner, Big Bang Energy;

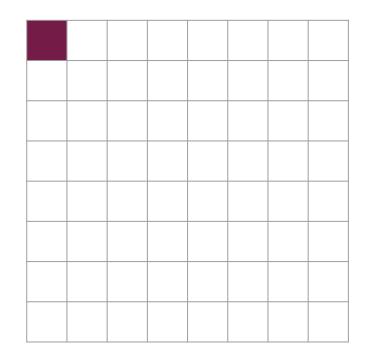
El problema de las 8 reinas



2. Sin repeticiones

o binom(64, 8) combinaciones

- nivel = 1
- iteración = 1



El problema de las 8 reinas



2. Sin repeticiones

binom(64, 8) combinaciones

- nivel = 2
- iteración = 1

El problema de las 8 reinas



2. Sin repeticiones

binom(64, 8) combinaciones

- nivel = 2
- iteración = 2

El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas

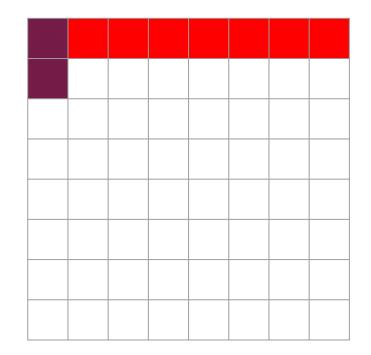
- nivel = 1
- iteración = 1

El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas

- nivel = 2
- iteración = 1

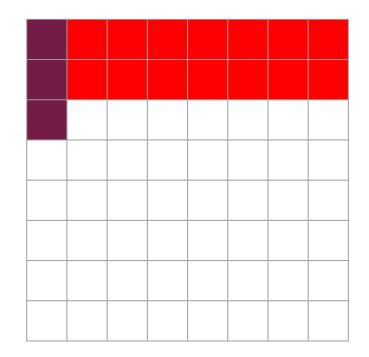


El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas

- nivel = 3
- iteración = 1

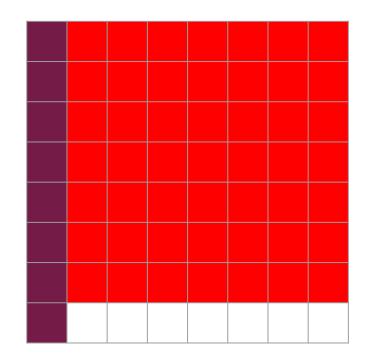


El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 1



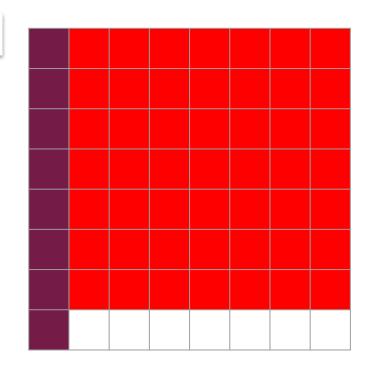
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 1



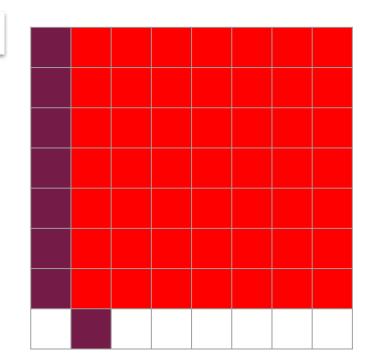
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 2



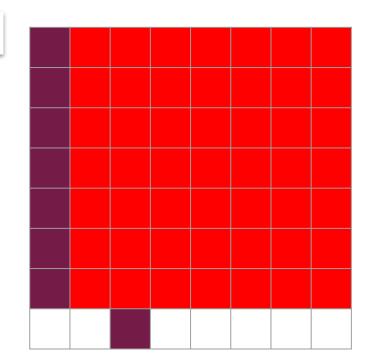
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 3



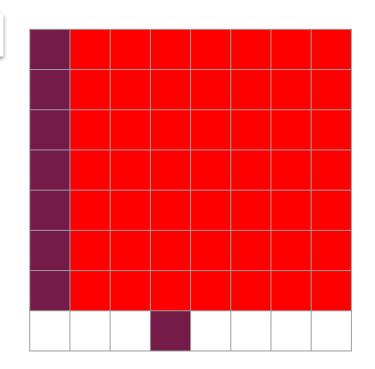
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 4



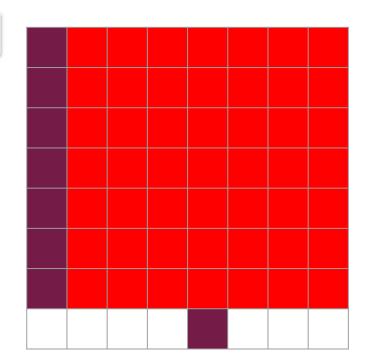
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 5



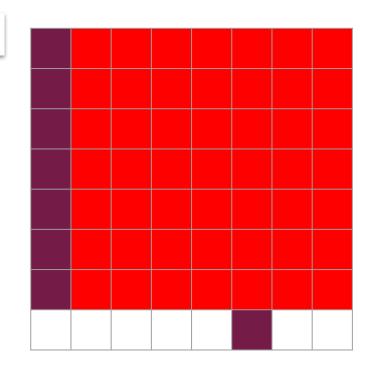
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 6



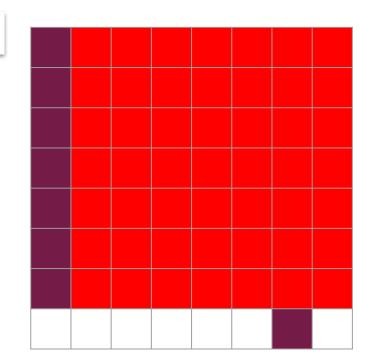
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 7



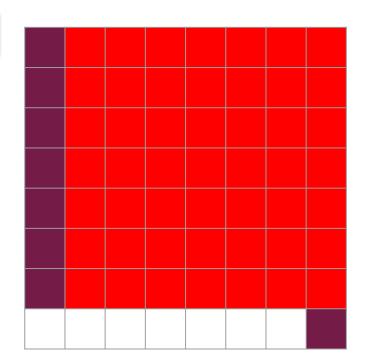
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No → ¡Backtracking!

3. Sin repetir filas

- nivel = **8**
- iteración = 8

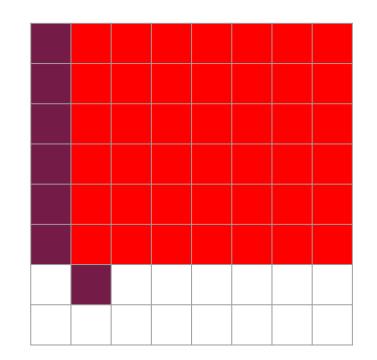


El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas

- nivel = 7
- iteración = 2



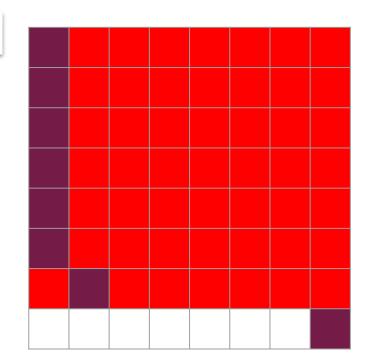
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No → ¡Backtracking!

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 8



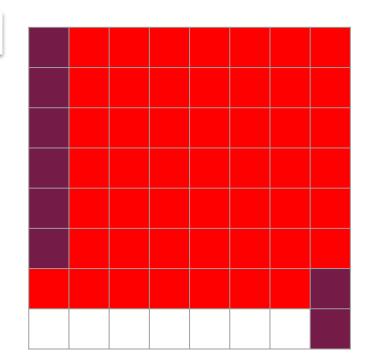
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No → ¡Backtracking!

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 8

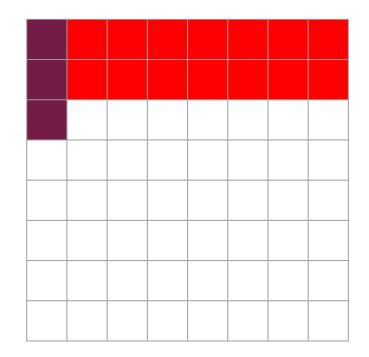


El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas

- nivel = 3
- iteración = 1

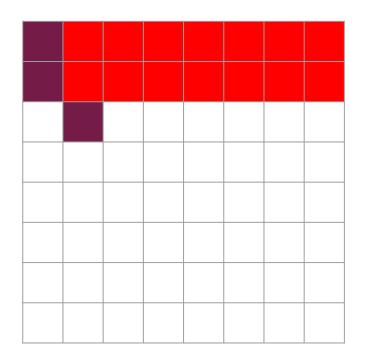


El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas

- nivel = 3
- iteración = 2



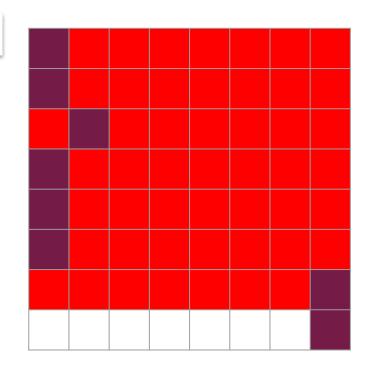
El problema de las 8 reinas



¿Es solución? No → ¡Backtracking!

3. Sin repetir filas

- nivel = 8
- iteración = 8



El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas, ni columnas

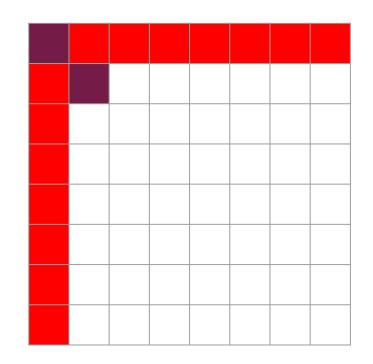
- nivel = 1
- iteración = 1

El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas, ni columnas

- nivel = 2
- iteración = 1

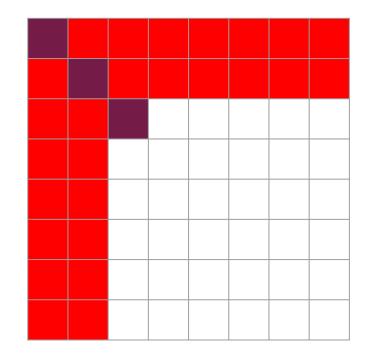


El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas, ni columnas

- nivel = 3
- iteración = 1

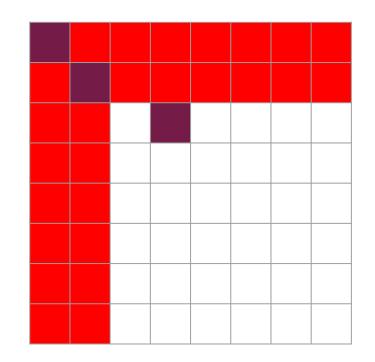


El problema de las 8 reinas



3. Sin repetir filas, ni columnas

- nivel = 3
- iteración = 2

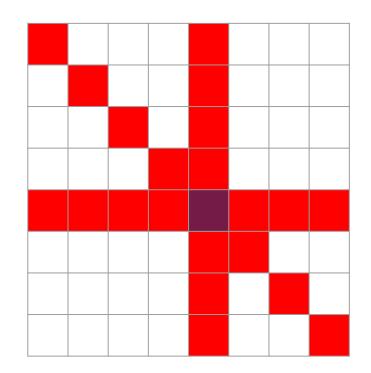


El problema de las 8 reinas



4. Sin repetir filas, columnas, ni diagonales

 Cuantas más restricciones pongamos, menos operaciones tendremos que realizar antes de llegar a una solución fallida



El problema de las 8 reinas



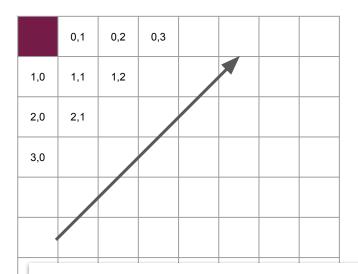
4. Sin repetir filas, columnas, ni diagonales

Nivel	1
Iteración	-
Columnas	[]
Filas	[]
diag45	[]
diag135	[]

El problema de las 8 reinas



Nivel	1
Iteración	1
Columnas	[0]
Filas	[0]
diag45	[]
diag135	[]



diag45

Identificada por número de fila de inicio, localizable por suma de componentes (e.g., (3,0) = 3; (2,1) = 3; (1,2) = 3; etc.)

El problema de las 8 reinas



Nivel	1
Iteración	1
Columnas	[0]
Filas	[0]
diag45	[]
diag135	[]

0,0		\			
1,0	1,1				
2,0	2,1	2,2			
	3,1	3,2	3,3		
		4,2	4,3		×
			5,3		

diag135

Identificada por número de fila de inicio, localizable por resta de componentes (e.g., 1 = 1 - 0 = 2 - 1 = 3 - 2)



Nivel	1
Iteración	1
Columnas	[0]
Filas	[0]
diag45	[0]
diag135	[0]



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[0]
Filas	[0]
diag45	[0]
diag135	[0]



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[0]
Filas	[0]
diag45	[0]
diag135	[0]



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[0]
Filas	[0]
diag45	[0]
diag135	[0]



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[0]
Filas	[0]
diag45	[0]
diag135	[0]

1				
1				



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[0,2]
Filas	[0,1]
diag45	[0,3]
diag135	[0,-1]



Nivel	3
Iteración	1
Columnas	[0,2]
Filas	[0,1]
diag45	[0,3]
diag135	[0,-1]



Nivel	3
Iteración	1
Columnas	[0,2]
Filas	[0,1]
diag45	[0,3]
diag135	[0,-1]



Nivel	3
Iteración	1
Columnas	[0,2]
Filas	[0,1]
diag45	[0,3]
diag135	[0,-1]



Nivel	3			
Iteración	1			
Columnas	[0,2,4] [0,1,2]			
Filas				
diag45	[0,3,6]			
diag135	[0,-1,-2]			



Nivel	1
Iteración	2
Columnas	[1]
Filas	[0]
diag45	[1]
diag135	[-1]



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[1]
Filas	[0]
diag45	[1]
diag135	[-1]



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[1]
Filas	[0]
diag45	[1]
diag135	[-1]



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[1]
Filas	[0]
diag45	[1]
diag135	[-1]

_				
L				
L				
L				
-				
L				
-				
L				



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[1]
Filas	[0]
diag45	[1]
diag135	[-1]



Nivel	2
Iteración	1
Columnas	[1]
Filas	[0]
diag45	[1]
diag135	[-1]

Sudoku





https://junguera.gitlab.io/sudoku-solver

Más problemas...



Otro problema del backtracking

$$O(n^n)$$

Podemos mitigarlo, además de mediante la detección temprana de soluciones erróneas, mediante la predicción de soluciones óptimas.

Podemos presentación en anchura: Backtra Búsque Si los combinados presentación en anchura:

Universidad de Alcalá

Búsqueda en anchura

Podemos pronosticar ramas del grafo más fructíferas mediante la búsqueda en anchura:

- Backtracking → Depth first
- Búsqueda en anchura → Análisis de hijos antes de profundizar

Si los combinamos podemos hacer búsqueda en profundidad sólo cuando, tras hacer una búsqueda en anchura, pronosticamos qué hijo puede dar una rama más viable.

Trabajaremos con pilas y listas de prioridad



Agente \ Coste	T1	T2	Т3	T4	T5
A1	2	8	11	9	6
A2	3	2	4	8	9
А3	1	13	3	4	5
A4	10	12	8	3	1
A5	4	3	1	5	2

Asignar tareas a los agentes, de tal forma que cada tarea se realice sólo una vez, y cada agente tenga asignada una sola tarea: $T[i][j] \rightarrow Coste de realizar tarea T_i por el agente A_i$



Agente \ Coste	T1	T2	Т3	T4	T5
A1	2	8	11	9	6
A2	3	2	4	8	9
А3	1	13	3	4	5
A4	10	12	8	3	1
A5	4	3	1	5	2

1. Crear cota real (marcar un primer límite para ver si hacer poda o no): e.g., valores aleatorios (sin repetir A o T) \rightarrow Coste = 2 + 2 + 1 + 3 + 5 = 13



Agente \ Coste	T1	T2	Т3	T4	T5
A1	2	8	11	9	6
A2	3	2	4	8	9
А3	1	13	3	4	5
A4	10	12	8	3	1
A5	4	3	1	5	2

2. Crear cota mínima por filas (i.e., estimación sin dos valores en una fila): e.g., min por fila \rightarrow Coste = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7



Agente \ Coste	T1	T2	Т3	T4	Т5
A1	2	8	11	9	6
A2	3	2	4	8	9
А3	1	13	3	4	5
A4	10	12	8	3	1
A5	4	3	1	5	2

3. Crear cota mínima por columnas (i.e., estimación sin dos valores en una columna): e.g., min por columna \rightarrow Coste = 1 + 2 + 1 + 3 + 1 = 8



Agente \ Coste	T1	T2	Т3	T4	T5
A1	2	8	11	9	6
A2	3	2	4	8	9
А3	1	13	3	4	5
A4	10	12	8	3	1
A5	4	3	1	5	2

4. Cota mínima-máxima = $max{7, 8} = 8$

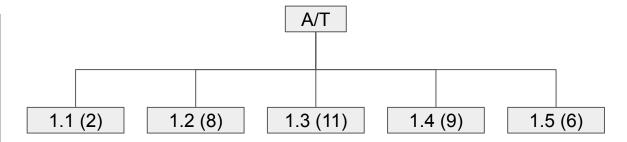
N tareas, N agentes



Rango de valores válidos = [8, 13]

1. Análisis de primera tarea

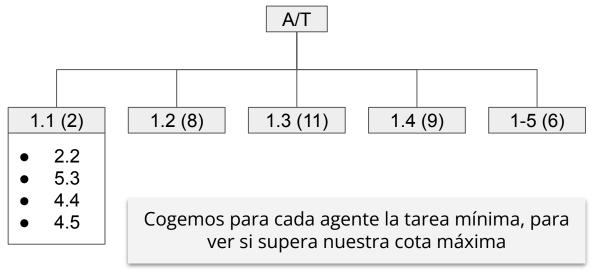
A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2





Rango de valores válidos = [8, 13]

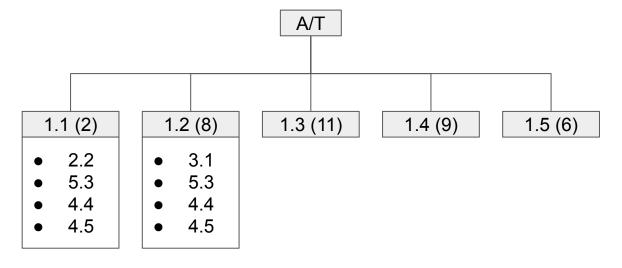






Rango de valores válidos = [8, 13]

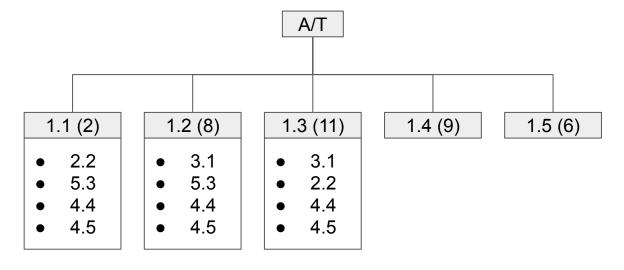
A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2





Rango de valores válidos = [8, 13]

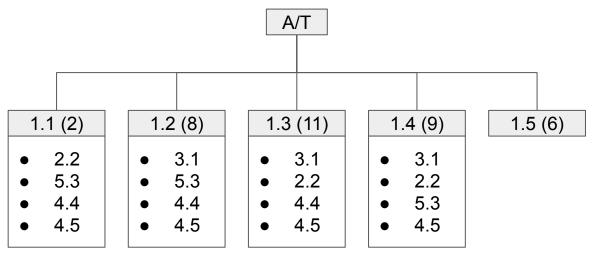
A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2





Rango de valores válidos = [8, 13]

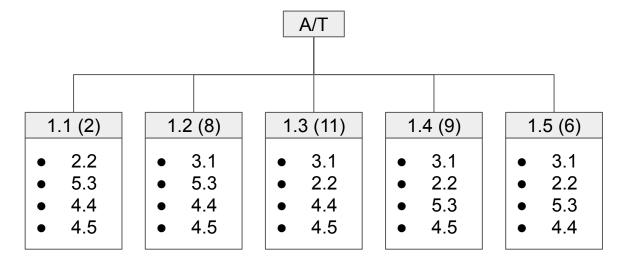






Rango de valores válidos = [8, 13]

A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2

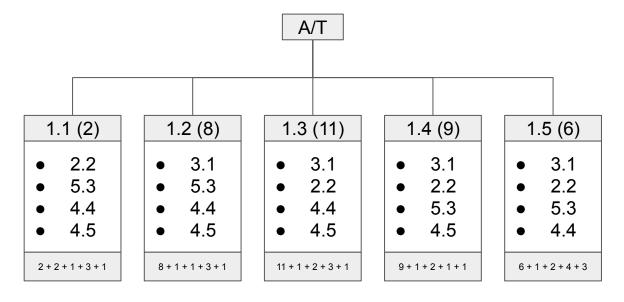




Rango de valores válidos = [8, 13]

3.	Cálculo	de nueva	cota
		J. J J. J. J.	

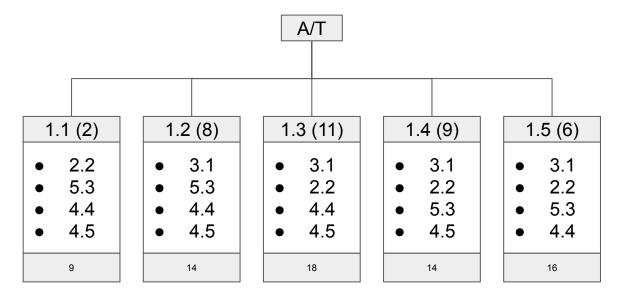
A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2





Dango do v	⁄alores válido	$c = [0 \ 12]$	
Rango de v	aiores vailuo	5 - 10.131	
		- [-/]	

A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2



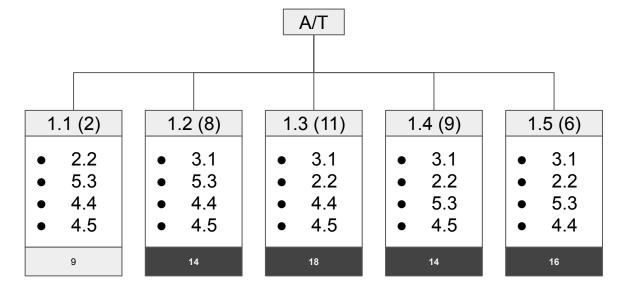
3. Cálculo de nueva mínima



Rango de valores válidos = [8, 13]

4. Poda de valores que superen cota de referencia

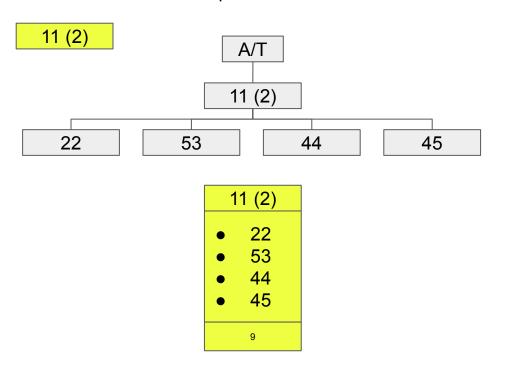
A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2





Rango de valores válidos = [8, 13]

A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2

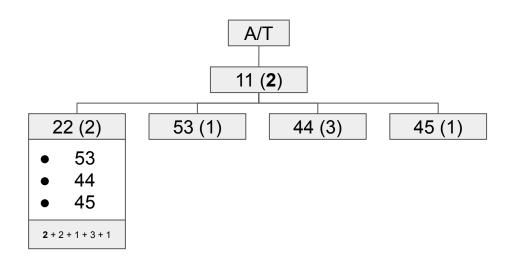






Rango de valores válidos = [8, 13]

A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2

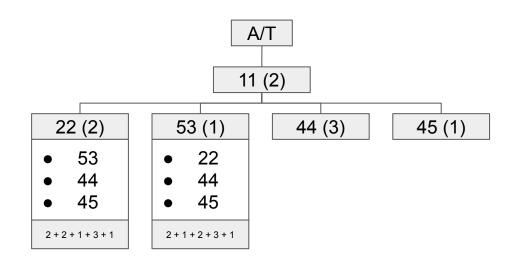






Rango de valores válidos = [8, 13]

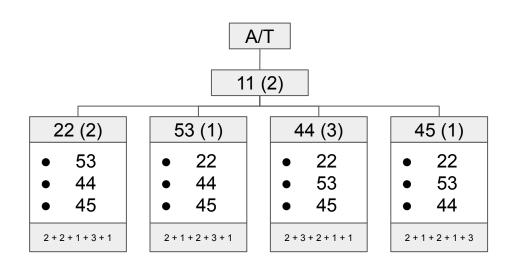
A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2





Rango de valores válidos = [8, 13]

A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2

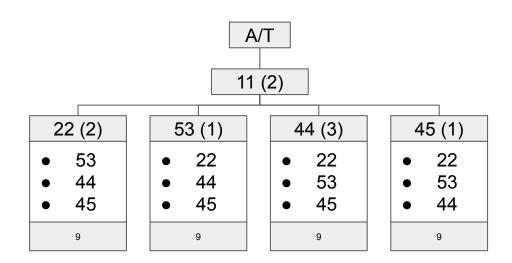


N tareas, N agentes



Rango de valores válidos = [8, 13]

		I			
A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2

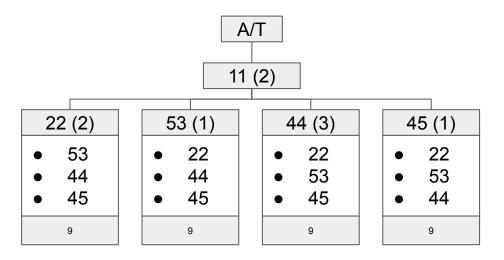




Rango de valores válidos = [8, 13]

A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2

6. Si no se producen descartes, crear pila (lista FIFO) de exploración



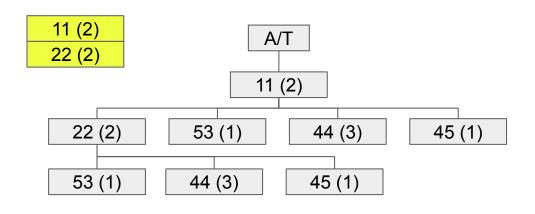
11 (2)	11 (2)	11 (2)	11 (2)
45 (1)	44 (3)	53 (1)	22 (2)



Rango de valores válidos = [8, 13]

A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2

7. Y extraer elementos 1 a 1, repitiendo el procedimiento



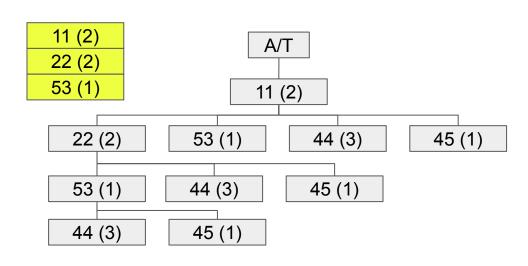
11 (2)	11 (2)	11 (2)	11 (2)	11 (2)	11 (2)
45 (1)	44 (3)	53 (1)	22 (2)	22 (2)	22 (2)
			45 (1)	44 (3)	53 (1)



Rango de valores válidos = [8, 13]

A\CT	1	2	3	4	5
1	2	8	11	9	6
2	3	2	4	8	9
3	1	13	3	4	5
4	10	12	8	3	1
5	4	3	1	5	2

7. Y extraer elementos 1 a 1, repitiendo el procedimiento



11 (2)	11 (2)	11 (2)	11 (2)	11 (2)
45 (1)	44 (3)	53 (1)	22 (2)	22 (2)
			45 (1)	44 (3)

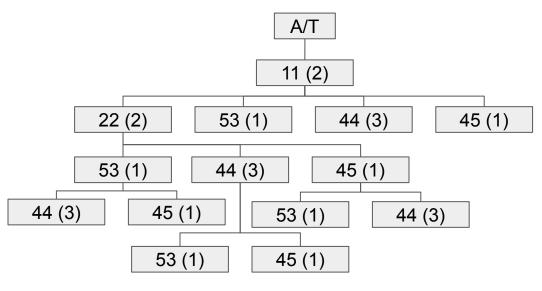


Rango de valores válidos = [8, 13]

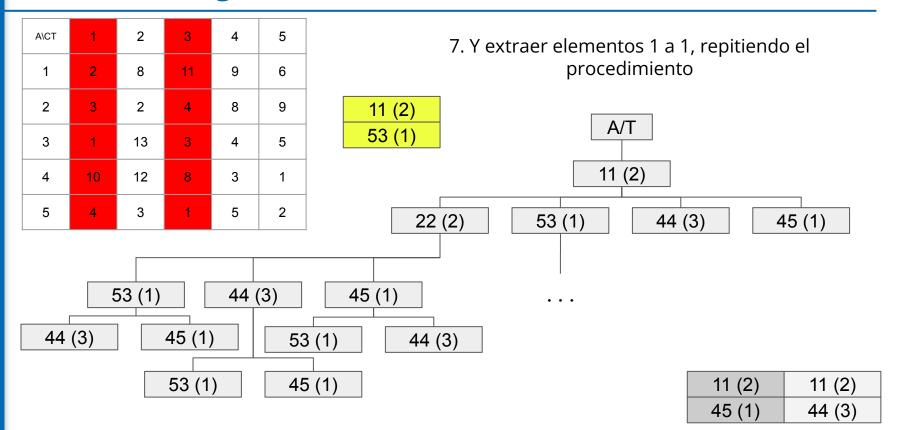
7. Y extraer elementos 1 a 1, repitiendo el procedimiento



11 (2)	11 (2)	11 (2)
45 (1)	44 (3)	53 (1)

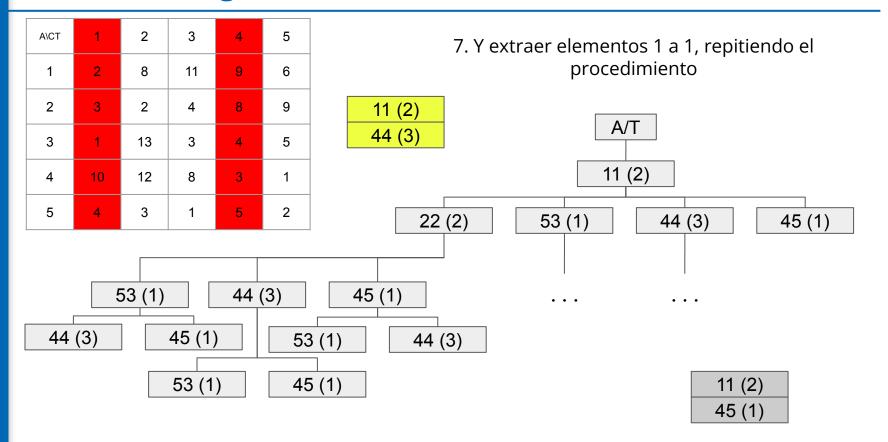






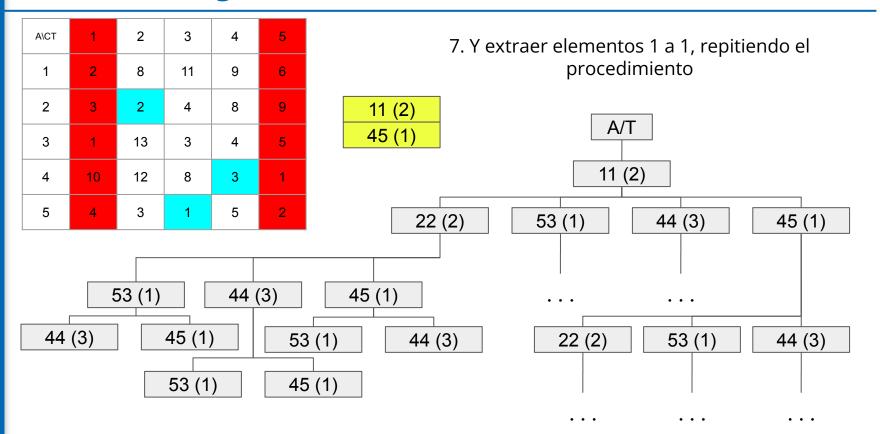
N tareas, N agentes





N tareas, N agentes







¿Preguntas?