

Tema 7 Máximos y mínimos

1. Extremos relativos de funciones de varias variables.
2. Condición necesaria de extremo relativo.
3. Condición suficiente de extremo relativo.
4. Extremos absolutos de funciones de varias variables.
5. Extremos condicionados de funciones de varias variables.
6. Método de los multiplicadores de Lagrange.

1

Extremos de funciones de varias variables

Una de las aplicaciones más importante del Cálculo Infinitesimal se realiza al tratar problemas de optimización. La construcción de naves espaciales pretende minimizar el peso de la estructura y, maximizar la resistencia de la estructura. En la fabricación de un determinado producto se busca hacer máxima la calidad, minimizando sus defectos. Los ejemplos de estas características serian muy numerosos. Aquí estudiaremos procedimientos matemáticos de optimización de funciones de varias variables.

Sea f una función de dos variables:

Se dice que f presenta en (a, b) un **máximo relativo** (o local) si se verifica $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo (x, y) perteneciente a cierto disco centrado en (a, b) y de radio no nulo.

Se dice que f presenta en (a, b) un **mínimo relativo** (o local) si se verifica $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) perteneciente a cierto disco centrado en (a, b) y de radio no nulo.

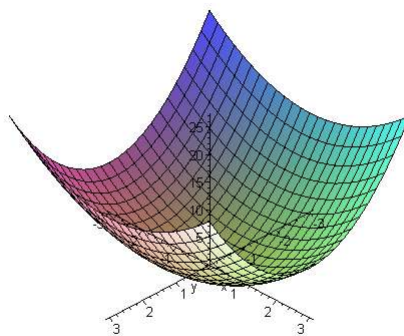
Los máximos o mínimos relativos reciben el nombre de extremos relativos (o locales).

2

Ejemplo

Gráfica de la función $z = 2x^2 + y^2$, en un entorno de $(0, 0)$ min. rel.

```
plot3d(2*x^2+y^2,x=-3..3,y=-3..3);
```

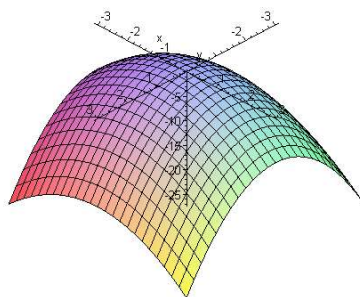


3

Ejemplo

Gráfica de la función $z = -2x^2 - y^2$, en un entorno de $(0, 0)$ max. rel.

```
plot3d(-2*x^2-y^2,x=-3..3,y=-3..3);
```



4

Puntos críticos

Ejemplo

La función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, presenta en $(0, 0)$ un mínimo relativo, pues $f(0, 0) = 0$, por lo que $f(0, 0) \leq f(x, y)$ para (x, y) perteneciente a cualquier disco de centro $(0, 0)$.

La función $f(x, y) = -2x^2 - y^2$, presenta en $(0, 0)$ un máximo relativo, pues $f(0, 0) = 0$, por lo que $f(x, y) \leq f(0, 0)$ para (x, y) perteneciente a cualquier disco de centro $(0, 0)$.

En el caso de una variable, la existencia de extremo relativo implicaba necesariamente la anulación de la derivada en el punto considerado o la no existencia de derivada en dicho punto.

En el caso de dos variables se presenta una situación análoga.

Se dice que **el punto (a, b) es un punto crítico o estacionario de la función f** si se verifica una de las siguientes condiciones:

- 1) Existen las derivadas parciales en (a, b) y son nulas : $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$
- 2) Al menos una de las derivadas parciales en (a, b) no existe.

5

Condición necesaria de extremo

Para el caso de dos variables se tiene el siguiente:

Teorema

Si f presenta en (a, b) un extremo relativo, entonces (a, b) es un punto crítico de f .

Para demostrarlo, supongamos en primer lugar, que no existe alguna de las derivadas parciales en (a, b) . En este caso (a, b) es un punto crítico.

Supongamos ahora que existen las derivadas parciales en (a, b) , y que en (a, b) se tiene un máximo relativo, luego se cumple $f(x, y) \leq f(a, b)$ para cierto disco de centro (a, b) .

Fijando $x = a$, f se convierte en función solo de y : $z = f(a, y)$, por lo que presentará también un máximo relativo en el punto $y = b$, luego su derivada será nula en dicho punto, es decir, $f_y(a, b) = 0$.

Análogamente fijando $y = b$ se obtendría $f_x(a, b) = 0$.

El razonamiento es similar si suponemos que en (a, b) se alcanza un mínimo relativo.

Si f presenta en (a, b) un extremo relativo, existiendo plano tangente en el punto $P(a, b, f(a, b))$, una consecuencia inmediata del teorema anterior, es que su ecuación debe ser $z = f(a, b)$.

6

Condición necesaria de extremo

Para que en un punto se alcance un extremo relativo, es necesario que sea un punto crítico. Sin embargo esta condición no es suficiente para la existencia de extremo relativo; lo comprobamos con el siguiente

Ejemplo

Consideremos la función $f(x, y) = x^2 - y^2$. Calculemos sus puntos críticos:

$f_x = 2x = 0$, $f_y = -2y = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$. Luego el único punto crítico es $(0, 0)$, siendo $f(0, 0) = 0$. La función sobre el eje OX toma los valores $f(x, 0) = x^2 \geq 0$. Sobre el eje OY toma los valores $f(0, y) = -y^2 \leq 0$.

Luego en cualquier disco de centro el origen hay puntos donde la función toma valores superiores a 0, y puntos donde ocurre lo contrario, por lo que en el punto crítico $(0, 0)$ f no tiene un extremo relativo, y el punto $(0, 0)$ se denomina punto de silla.

En general, se dice que la función f tiene **un punto de silla en (a, b)** , si (a, b) es un punto crítico de f , y todo disco centrado en (a, b) contiene puntos (x, y) del dominio de f tales que $f(x, y) < f(a, b)$ y puntos (x, y) en el dominio de f tales que $f(a, b) < f(x, y)$.

7

Condición suficiente de extremo relativo

Veremos un criterio, que da una condición suficiente, para la existencia de extremos relativos y de puntos de silla y, que es análogo al criterio de la primera y segunda derivada para funciones de una variable.

Teorema (Criterio de las derivadas segundas)

Sea f una función definida en una región abierta R , con derivadas parciales primeras y segundas continuas en R ; si $(a, b) \in R$, siendo un punto crítico : $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$, y definiendo el hessiano de f como la función:

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

Entonces:

- 1) Si $H(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ (o $f_{yy}(a, b) > 0$), f tiene un mínimo relativo en (a, b) .
- 2) Si $H(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ (o $f_{yy}(a, b) < 0$), f tiene un máximo relativo en (a, b) .
- 3) Si $H(a, b) < 0$, f tiene un punto de silla en (a, b) .
- 4) Si $H(a, b) = 0$, el caso es dudoso y el criterio no concluye nada.

8

Ejemplo

Obtener los extremos relativos de la función $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

En este caso R es todo el plano R^2 , y la función cumple todas las condiciones del teorema por ser polinómica.

Calculemos en primer lugar los puntos críticos:

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ z_y = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = u \Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0 \Rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow u_1 = 4, u_2 = 1$$

$$\text{Luego } x = \sqrt{u} \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2, x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Los correspondientes valores de y serán:

$$x = 2, y = 1 \Rightarrow A(2, 1); \quad x = -2, y = -1 \Rightarrow B(-2, -1)$$

$$x = 1, y = 2 \Rightarrow C(1, 2); \quad x = -1, y = -2 \Rightarrow D(-1, -2)$$

9

Ejemplo

$$\text{Obtenemos el hessiano: } H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{yy} = 6x, \quad z_{xy} = 6y \Rightarrow H(x, y) = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Calculemos el valor de $H(x, y)$ en cada punto crítico:

$$H(2, 1) = 36(4 - 1) > 0, \quad z_{xx}(2, 1) = 12 \Rightarrow \text{en } A(2, 1) \text{ hay mínimo relativo con valor}$$

$$z(2, 1) = 8 + 6 - 30 - 12 = -28.$$

$$H(-2, -1) = 36(4 - 1) > 0, \quad z_{xx}(-2, -1) = -12 \Rightarrow \text{en } B(-2, -1) \text{ hay un máximo relativo}$$

$$\text{con valor } z(-2, -1) = -8 - 6 + 30 + 12 = 28.$$

$$H(1, 2) = 36(1 - 4) < 0 \Rightarrow \text{en } C(1, 2) \text{ hay un punto de silla.}$$

$$H(-1, -2) = 36(1 - 4) < 0 \Rightarrow \text{en } D(-1, -2) \text{ hay un punto de silla.}$$

10

Extremos de funciones de varias variables

Desde el punto de vista gráfico, la forma de la superficie que representa a la función, en las cercanías de un extremo relativo, es parecida a la de un paraboloides elíptico.

Las curvas de nivel en las cercanías de un extremo relativo son curvas cerradas parecidas a óvalos concéntricos, mientras que en las cercanías de un punto de silla, las curvas de nivel son parecidas a las hipérbolas.

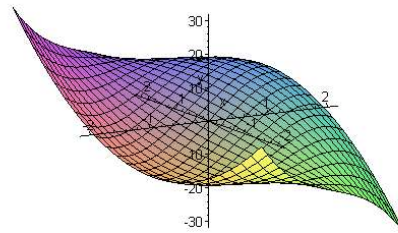
Comprobemos estas afirmaciones con los datos obtenidos del ejemplo anterior.

11

Representación gráfica

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

```
plot3d(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x=-2.1..2.1,y=-2.1..2.1);
```

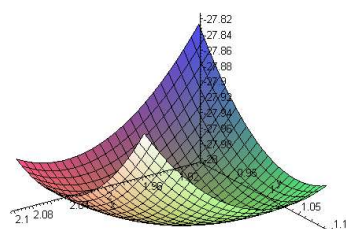


12

Representación gráfica

Gráfica de $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ en un entorno de $A(2, 1)$ mínimo relativo

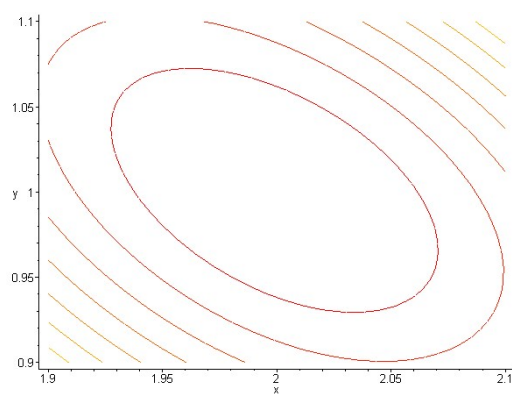
```
plot3d(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x=1.9..2.1,y=0.9..1.1);
```



13

Representación gráfica

Curvas de nivel de $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ en un entorno de $A(2, 1)$ mínimo relativo

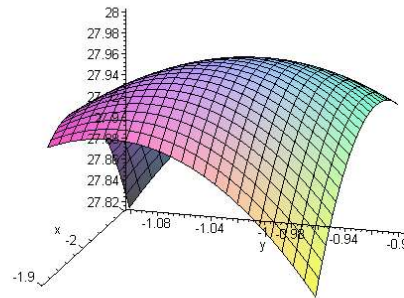


14

Representación gráfica

Gráfica de $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, en un entorno de $B(-2, -1)$ máximo relativo

```
plot3d(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x=-2.1..-1.9,y=-1.1..-0.9);
```

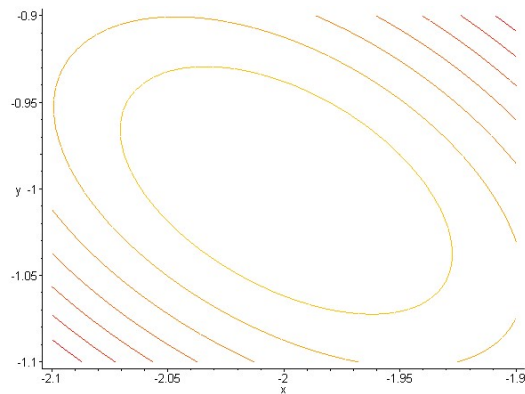


15

Representación gráfica

Curvas de nivel de $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ en un entorno de $B(-2, -1)$ mínimo relativo

```
contourplot(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x=-2.1..-1.9,y=-1.1..-0.9);
```

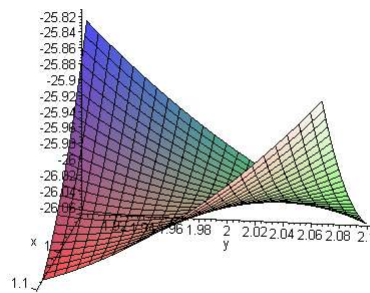


16

Representación gráfica

**Gráfica de $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
en un entorno de $C(1,2)$ punto de silla**

```
plot3d(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x=0.9..1.1,y=1.9..2.1);
```

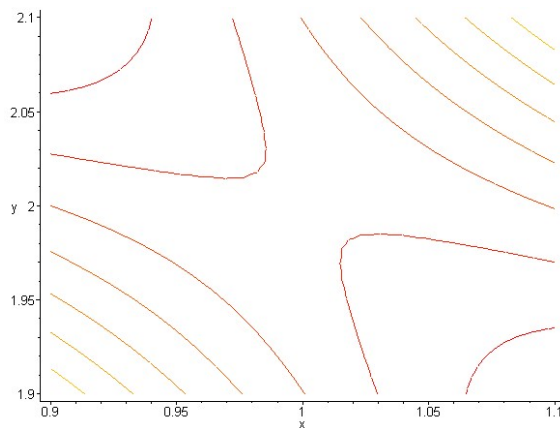


17

Representación gráfica

**Curvas de nivel de $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
en un entorno de $C(1, 2)$ punto de silla**

```
contourplot(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x=0.9..1.1,y=1.9..2.1);
```

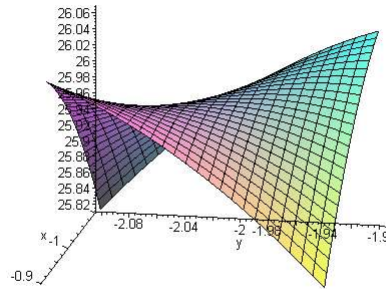


18

Representación gráfica

**Gráfica de $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
en un entorno de $D(-1,-2)$ punto de silla**

```
plot3d(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x=-1.1..-0.9,y=-2.1..-1.9);
```

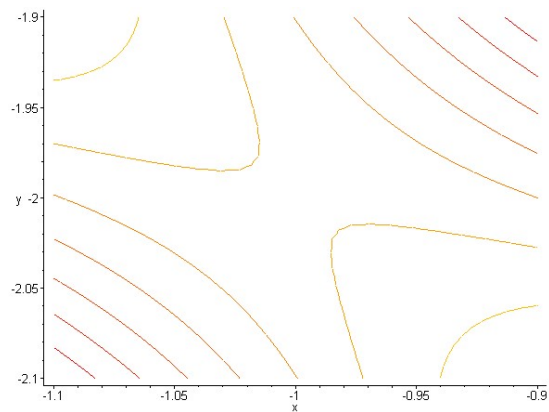


19

Representación gráfica

**Curvas de nivel de $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
en un entorno de $D(-1, -2)$ punto de silla**

```
contourplot(x^3+3*x*y^2-15*x-12*y,x=-1.1..-0.9,y=-2.1..-1.9);
```



20

Extremos absolutos

Si en lugar de comparar el valor de una función en un punto $P(a, b)$ con los valores que toma en los puntos “próximos” a $P(a, b)$, lo comparamos con los valores que toma la función en los puntos de una cierta región R , que contenga a $P(a, b)$, se llega al concepto de **extremo absoluto**.

Se dice que la función f , definida en la región R , alcanza en $P(a, b)$ un **máximo absoluto**, con valor $f(a, b)$, si se verifica $f(x, y) \leq f(a, b)$, para todo $(x, y) \in R$.

Análogamente, se dice que la función f , definida en la región R , alcanza en $P(a, b)$ un **mínimo absoluto**, con valor $f(a, b)$, si se verifica $f(a, b) \leq f(x, y)$, para todo $(x, y) \in R$.

En los dos casos, se dice que la función f presenta en el punto $P(a, b)$ un extremo absoluto con valor $f(a, b)$.

Recordemos el siguiente resultado para una función de una variable: toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, alcanza los extremos absolutos (máximo y mínimo) en dicho intervalo.

21

Extremos absolutos

Para una función de dos variables, se tiene un resultado análogo.

Introducimos previamente una definición necesaria: se dice que una región $R \subset \mathbb{R}^2$, es una **región acotada**, si existe un disco que la contiene completamente.

Teorema

Sea $f(x, y)$ continua en una región $R \subset \mathbb{R}^2$, cerrada y acotada, entonces f alcanza en R el máximo absoluto y el mínimo absoluto. Dichos extremos absolutos se alcanzan en puntos críticos de f situados en R o en puntos de la frontera de R .

Si f alcanza en (a, b) un extremo absoluto, siendo (a, b) punto interior de R (cerrada y acotada), entonces (a, b) será un extremo relativo de f y por tanto un punto crítico de f .

Como consecuencia el procedimiento para obtener los extremos absolutos de una función f , sobre una región cerrada y acotada R , será el siguiente:

22

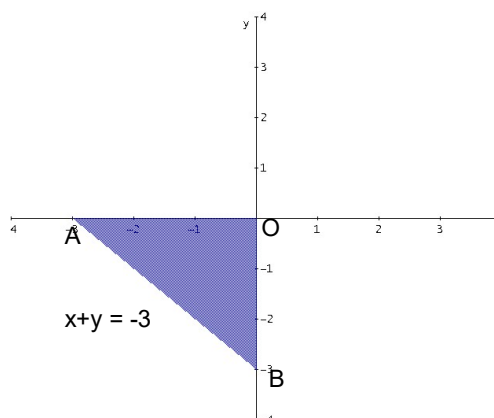
Extremos absolutos

- 1) Hacer un estudio en **el interior de la región**, obteniendo los puntos donde se alcanzan los extremos relativos y los valores de f en cada uno de ellos.
- 2) Hacer un estudio en **la frontera de la región**, sobre la cual f se convierte en función de una sola variable, calculando los extremos absolutos sobre dicha frontera, así como los valores de f en cada uno de ellos.
- 3) Comparar los valores obtenidos en 1) y 2); en el punto (o puntos) donde f tome el mayor valor, se alcanzará el máximo absoluto; y en el punto (o puntos) donde f tome el menor valor se alcanzará el mínimo absoluto.

23

Ejemplo

Determinar, tanto los extremos absolutos como relativos, de la función
 $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$,
 sobre la región R definida por las condiciones: $x \leq 0, y \leq 0, x+y \geq -3$.



24

Ejemplo

1) Estudio en el interior:

Obtengamos los puntos críticos

$$\left. \begin{array}{l} z_x = 2x - y + 1 = 0 \\ z_y = 2y - x + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1, y = -1. \text{ Como el punto } P(-1, -1) \text{ es interior a la región, es un punto crítico de } f.$$

Calculemos el hessiano:

$$z_{xx} = 2, z_{xy} = -1, z_{yy} = 2 \Rightarrow H(x,y) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0, z_{xx} > 0 \Rightarrow P(-1, -1) \text{ es un mínimo relativo con valor } f(-1, -1) = 1 + 1 - 1 - 1 = -1.$$

25

Ejemplo

2) Estudio en la frontera:

En OB: $x = 0, -3 \leq y \leq 0 \Rightarrow z = y^2 + y$

Buscamos los extremos absolutos de z en $[-3, 0]$.

$$z' = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}, z''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow \text{en } y = -\frac{1}{2} \text{ se alcanza un mínimo relativo}$$

$$\text{con valor } z\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Los valores en los extremos son: } z(-3) = 9 - 3 = 6, z(0) = 0.$$

Comparando los resultados obtenidos, se tiene:

el mínimo absoluto se alcanza en $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ con valor $-\frac{1}{4}$; el máximo absoluto se alcanza en $(0, -3)$ con valor 6.

26

Ejemplo

En OA: $y = 0, -3 \leq x \leq 0 \Rightarrow z = x^2 + x$.

Buscamos los extremos absolutos de z en $[-3, 0]$.

$z' = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, z''(-\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow$ en $x = -\frac{1}{2}$ se alcanza un mínimo relativo con valor $z(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

Los valores en los extremos son: $z(-3) = 9 - 3 = 6, z(0) = 0$.

Comparando los resultados obtenidos, se tiene:

el mínimo absoluto se alcanza en $(-\frac{1}{2}, 0)$ con valor $-\frac{1}{4}$; el máximo absoluto se alcanza en $(-3, 0)$ con valor 6.

27

Ejemplo

En AB: $y = -3 - x \Rightarrow z = x^2 + (3+x)^2 + x(3+x) + x - 3 - x = 3x^2 + 9x + 6, -3 \leq x \leq 0$.

Buscamos los extremos absolutos de z en $[-3, 0]$.

$z' = 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$, luego como $z'' = 6$, en $x = -\frac{3}{2}$ se alcanza un mínimo relativo con valor $z(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$.

Los valores en los extremos son $z(-3) = 6, z(0) = 6$.

Se tiene $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$; $x = -3 \Rightarrow y = 0$; $x = 0 \Rightarrow y = -3$.

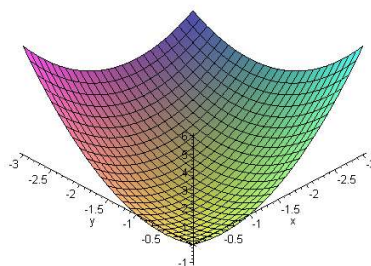
Luego el mínimo absoluto se alcanza en $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ con valor $-\frac{3}{4}$, y el máximo absoluto en $(-3, 0)$ y en $(0, -3)$ con valor 6.

28

Ejemplo

Por último comparando todos los resultados obtenidos anteriormente, se concluye que:

- el máximo absoluto en R se alcanza en los puntos frontera: $(0, -3)$ y $(-3, 0)$ con valor 6.
- el mínimo absoluto en R se alcanza en el punto interior $(-1, -1)$ con valor -1.



29

Extremos de funciones de varias variables

Si la región R no es cerrada y acotada, en general, no está garantizada la existencia de extremos absolutos, como se comprueba con el siguiente

Ejemplo.

La función $z = f(x, y) = x^3 - 2xy + y$, no está acotada en R^2 , pues tomando, por ejemplo, la dirección $y = x$, se tiene $f = x^3 - 2x^2 + x$, que tiende a $\pm\infty$ para $x \rightarrow \pm\infty$, por lo que f no tiene extremos absolutos.

30

Extremos de funciones de varias variables

Ejemplo

Obtener los extremos absolutos y relativos, de la función

$z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, en la región definida por:

$$0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2.$$

La solución es:

El mínimo relativo se alcanza en (1, 1) con valor -1.

El mínimo absoluto se alcanza en los puntos (0,-1) y (1, 1) con valor -1.

El máximo absoluto se alcanza en el punto (2, -1) con valor 13.

Ejemplo

Descomponer el número positivo a en tres sumandos no negativos, de manera que el producto de ellos sea máximo.

Solución: los sumandos son iguales y cada uno de ellos vale $\frac{a}{3}$.

31

Utilización de ecuaciones paramétricas

Otra forma de estudiar una función en la frontera de una región cerrada y acotada, consiste en expresar la ecuación de dicha frontera en forma paramétrica, lo que en ocasiones da lugar a cálculos mas cómodos que los que habría que realizar utilizando otros procedimientos.

Ya se conoce la ecuación paramétrica de la curva más simple: la recta. Si dicha recta pasa por el punto (a, b), y tiene por vector dirección (c, d), su ecuación es

$$\left. \begin{array}{l} x=a+tc \\ y=b+td \end{array} \right\} \text{ siendo } t \text{ un parámetro que al tomar valores reales proporciona los puntos de coordenadas } (x, y) \text{ de la recta.}$$

Veamos como se puede obtener la ecuación paramétrica de algunas curvas sencillas.

Veamos como se puede obtener la ecuación paramétrica de algunas curvas sencillas.

32

Utilización de ecuaciones paramétricas

En el caso de la circunferencia C de centro (a, b) y radio r la ecuación cartesiana es

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow \frac{(x-a)^2}{r^2} + \frac{(y-b)^2}{r^2} = 1,$$

por lo que teniendo en cuenta que: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$,

se puede poner: $\frac{x-a}{r} = \cos t$, $\frac{y-b}{r} = \sin t$, que equivale a $\left. \begin{array}{l} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t \end{array} \right\}$

que es la ecuación paramétrica de C , con $t \in [0, 2\pi]$.

Para el caso de una elipse E de centro el origen y semiejes a y b , su ecuación cartesiana es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

por lo que se puede poner $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$, que equivale a $\left. \begin{array}{l} x=a \cos t \\ y=b \sin t \end{array} \right\}$

que es la ecuación paramétrica de E , con $t \in [0, 2\pi]$.

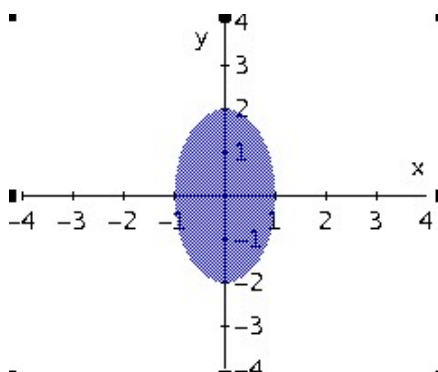
33

Ejemplo

Ejemplo

Obtener los extremos absolutos y relativos de $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$, en la región

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1.$$



34

Ejemplo

Estudio en el interior:

El sistema de puntos críticos es

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = y = 0$$

Calculemos el valor del hessiano en el único punto crítico $P(0, 0)$:

$f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = 0 \Rightarrow H(x, y) = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0, f_{xx}(0, 0) = 2$, luego f presenta en P un mínimo relativo con valor $f(0, 0) = 2$.

35

Ejemplo

Estudio en la frontera:

Obtengamos la ecuación paramétrica de la curva que delimita la región:

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1.$$

Al tratarse de una elipse de semiejes 1 y 2 su ecuación paramétrica es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{array} \right\} t \in [0, 2\pi].$$

Luego la expresión de f en la frontera será $f(\cos t, 2 \sin t) = 2 + \cos^2 t + 4 \sin^2 t$.

Por tanto $f(t) = 2 + \cos^2 t + \sin^2 t + 3 \sin^2 t = 3 + 3 \sin^2 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Calculemos los puntos críticos de f en la frontera: $f'(t) = 0 \Rightarrow 6 \cos t \sin t = 0$, luego

debe ser $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

A estos valores de t corresponden los siguientes puntos críticos:

$t = 0, t = 2\pi \Rightarrow x = 1, y = 0$, luego $A(1, 0)$ es un punto crítico, con valor $f(1, 0) = 3$.

$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0, y = 2$, luego $B(0, 2)$ es un punto crítico, con valor $f(0, 2) = 6$.

$t = \pi \Rightarrow x = -1, y = 0$, luego $C(-1, 0)$ es un punto crítico, con valor $f(-1, 0) = 3$.

$t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 0, y = -2$, luego $D(0, -2)$ es un punto crítico, con valor $f(0, -2) = 6$.

36

Ejemplo

Comparando todos los resultados obtenidos, se concluye que el máximo absoluto se alcanza en los puntos B y D con valor 6, y el mínimo absoluto se alcanza en P (interior) con valor 2.

37

Método de los multiplicadores de Lagrange

Los problemas estudiados hasta ahora son de extremos libres (o sin restricciones), en ellos se pretende obtener los extremos de una función sin añadir condición alguna.

Sin embargo, se pueden plantear problemas de obtención de extremos de una función, de manera que estos cumplan determinadas condiciones (restricciones o ligaduras).

Gran cantidad de problemas que se presentan en la realidad son de extremos con ligaduras. Por ejemplo, una empresa tratará de maximizar las ganancias, pero estará condicionada por la cantidad de mano de obra necesaria, la materia prima disponible, etc.

Ejemplo de esto, puede ser el siguiente problema: determinar los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, verificando la ligadura $x + y - 2z = 1$; la función dada, en principio, es de tres variables, pero se reduce a una función de dos variables despejando una cualquiera de las variables de la ligadura y sustituyéndola en la en la función, con lo cual se ha reducido el problema con ligadura a otro sin ligadura.

38

Método de los multiplicadores de Lagrange

Lo realizado anteriormente, en general puede no ser fácil, y en algunos casos puede ser imposible.

Estudiamos ahora un método alternativo: el de los multiplicadores de Lagrange.

Consideremos el caso de la función $z = f(x, y)$, con la ecuación de ligadura $\varphi(x, y) = 0$, por lo cual las variables x, y no son independientes, ya que están relacionadas por la condición de ligadura

Las definiciones de extremos relativos condicionados y de extremos absolutos condicionados, se obtienen añadiéndole a la definición de extremo sin condiciones la ecuación de ligadura $\varphi(x, y) = 0$.

Obtendremos una condición necesaria de extremo condicionado, sin despejar y de la ecuación $\varphi(x, y) = 0$, que convertiría a la función f en función de una variable.

Admitamos que la condición de ligadura define y como función implícita de x , luego si existe extremo debe ser $z' = f'(x, y(x)) = 0$, luego aplicando la regla de la cadena debe ser:

$$z'(x) = f_x x' + f_y y' = f_x + f_y y' = 0.$$

39

Método de los multiplicadores de Lagrange

Además derivando la condición de ligadura $\varphi(x, y) = 0$, respecto de x , se obtiene de forma análoga $\varphi_x + \varphi_y y' = 0$.

Si multiplicamos $\varphi_x + \varphi_y y' = 0$, por λ (que, de momento, es un número indeterminado llamado multiplicador de Lagrange), y se la sumamos a $f_x + f_y y' = 0$, obtenemos

$f_x + f_y y' + \lambda(\varphi_x + \varphi_y y') = 0 \Rightarrow f_x + \lambda \varphi_x + (f_y + \lambda \varphi_y) y' = 0$, esta igualdad se cumple en todos los puntos donde hay extremos.

Eligiendo λ , de forma que $f_y + \lambda \varphi_y = 0$, para los puntos donde hay extremo, se tendrá también $f_x + \lambda \varphi_x = 0$, en los puntos donde hay extremos.

Por lo tanto en los puntos extremos se cumplen las condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{array} \right\} \text{Sistema de tres ecuaciones en las incógnitas } x, y, \lambda. \text{ (Sistema de Lagrange)}$$

El coeficiente λ desempeñó un papel auxiliar.

40

Método de los multiplicadores de Lagrange

Las condiciones obtenidas son necesarias para la existencia de extremo condicionado, aunque, en general, no son suficientes.

Observemos que los primeros miembros del sistema obtenido son las derivadas parciales de la función de tres variables $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, que se denomina función de Lagrange del problema de extremos con ligadura en cuestión.

Una condición suficiente, análoga a la que se tiene para el problema de extremo sin ligadura, es la siguiente:

Llamando $H(x, y, \lambda) = F_{xx}(x, y, \lambda)F_{yy}(x, y, \lambda) - F_{xy}^2(x, y, \lambda)$, si (x, y, λ) es una solución del sistema de Lagrange, entonces

Si $H(x, y, \lambda) > 0$, $F_{xx}(x, y, \lambda) > 0$, hay un mínimo condicionado de la función f en el punto (x, y) .

Si $H(x, y, \lambda) > 0$, $F_{xx}(x, y, \lambda) < 0$, hay un máximo condicionado de la función f en el punto (x, y) .

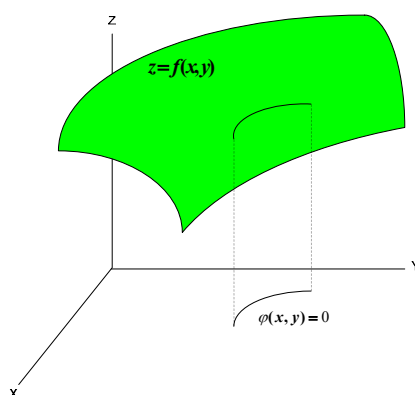
En los demás casos, o no hay extremo condicionado o si lo hay se debe recurrir para averiguarlo a otros procedimientos.

41

Interpretación geométrica

Función: $z = f(x, y)$

Condición de ligadura: $\varphi(x, y) = 0$



42

Método de los multiplicadores de Lagrange

Ejemplo

Determinar la mínima distancia del punto $P(1, 0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.

Se trata de obtener el mínimo de la función $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, o lo que es equivalente, el mínimo de su cuadrado (esto es válido por ser la función considerada positiva), es decir, de la función $z = f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$, con la ligadura $y^2 - 4x = 0$. En este caso la función de Lagrange es $F(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda (y^2 - 4x)$.

Por lo tanto el sistema de Lagrange es:

$$\left. \begin{array}{l} F_x = 2(x-1) - 4\lambda = 0 \\ F_y = 2y + 2y\lambda = 0 \\ F_\lambda = y^2 - 4x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y(1 + \lambda) = 0$$

43

Método de los multiplicadores de Lagrange

Si $1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow 2x - 2 + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y^2 = -4$, que es imposible.

Luego debe ser $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow -2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$.

Por tanto se ha obtenido el punto $(0, 0)$.

Comprobemos si cumple la condición suficiente:

$$F_{xx} = 2, F_{yy} = 2 + 2\lambda, F_{xy} = 0 \Rightarrow H(x, y, \lambda) = 2(2 + 2\lambda) - 0^2 = 4 + 4\lambda \Rightarrow H(0, 0, -\frac{1}{2}) = 2 > 0, F_{xx}(0, 0, -\frac{1}{2}) = 2 > 0.$$

Luego en el punto $(0, 0)$ se alcanza un mínimo condicionado.

44

Método de los multiplicadores de Lagrange

El método de Lagrange se puede generalizar a una función con n variables y m condiciones de ligadura ($m < n$). Veámoslo, por ejemplo, para una función con tres variables y una o dos condiciones de ligadura respectivamente.

- a) Sea la función $u = f(x, y, z)$ con la condición de ligadura $g(x, y, z) = 0$.

En este caso la función de Lagrange es:

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

por lo que el sistema de Lagrange que da las condiciones necesarias de extremo condicionado es:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= f_x + \lambda g_x = 0 \\ F_y &= f_y + \lambda g_y = 0 \\ F_z &= f_z + \lambda g_z = 0 \\ F_\lambda &= g = 0 \end{aligned} \right\}$$

45

Método de los multiplicadores de Lagrange

- b) Sea la función $u = f(x, y, z)$ con las condiciones de ligadura

$$g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0$$

En este caso, la función de Lagrange es:

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

por lo que el sistema de Lagrange que da las condiciones necesarias de extremo condicionado es:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= f_x + \lambda g_x + \mu h_x = 0 \\ F_y &= f_y + \lambda g_y + \mu h_y = 0 \\ F_z &= f_z + \lambda g_z + \mu h_z = 0 \\ F_\lambda &= g = 0 \\ F_\mu &= h = 0 \end{aligned} \right\}$$

46

Método de los multiplicadores de Lagrange

El método de los multiplicadores de Lagrange da lugar a un sistema que, en general, no es lineal.

Sin embargo, el sistema puede considerarse como lineal respecto de los multiplicadores de Lagrange (considerados como incógnitas) y tomando como datos el resto de las incógnitas; esto da otra posibilidad de resolución del sistema: imponer la condición de compatibilidad del sistema:

$$\text{rango(matriz del sistema)} = \text{rango(matriz ampliada)}$$

47

Método de los multiplicadores de Lagrange

Ejemplo

Determinar los puntos de la superficie $z = \frac{1}{xy}$ más próximos al origen de coordenadas.

Se trata de optimizar la función “distancia al origen” $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, o lo que es equivalente optimizar su cuadrado $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, con la ligadura $z - \frac{1}{xy} = 0$.

Por lo tanto la función de Lagrange es $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(z - \frac{1}{xy} \right)$.

El sistema de Lagrange es

$$\left. \begin{aligned} F_x &= 2x + \frac{\lambda}{x^2 y} = 0 \\ F_y &= 2y + \frac{\lambda}{xy^2} = 0 \\ F_z &= 2z + \lambda = 0 \\ F_\lambda &= z - \frac{1}{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = -2z, z = \frac{1}{xy} \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{xy} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{2}{xy} \frac{1}{x^2 y} = 0 \Rightarrow 2x^4 y^2 = 2 \Rightarrow x^4 y^2 = 1 \\ 2y - \frac{2}{xy} \frac{1}{xy^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 y^4 = 2 \Rightarrow x^2 y^4 = 1 \end{cases}$$

48

Método de los multiplicadores de Lagrange

Luego se tiene: $x^4 y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^4}$,
sustituyendo en $x^2 y^4 = 1$, queda:

$$\frac{x^2}{x^8} = 1 \Rightarrow x^6 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow A(1,1,1) \\ y = -1 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow B(1,-1,-1) \end{cases}$$

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow C(-1,1,-1) \\ y = -1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow D(-1,-1,1) \end{cases}$$

Luego los puntos A, B, C, D deben ser la solución del problema.

49

Método de los multiplicadores de Lagrange

Lo resolvemos ahora mediante el último procedimiento indicado: consideramos los multiplicadores como incógnitas (y el resto como datos), obteniendo así un sistema lineal al que imponemos la condición de compatibilidad, es decir, la igualdad de los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada.

En este caso la matriz del sistema y la matriz ampliada son respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2 y} \\ \frac{1}{xy^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2 y} & 2x \\ \frac{1}{xy^2} & 2y \\ 1 & 2z \\ 0 & z - \frac{1}{xy} \end{pmatrix}$$

Como $r(A) = 1$, para que $r(A') = 1$, deben ser nulos todos los menores de orden superior a 1:

50

Método de los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{x^2y} & 2x \\ \frac{1}{xy^2} & 2y \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow \frac{2x}{xy^2} = \frac{2y}{x^2y} \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x \\ \begin{vmatrix} \frac{1}{x^2y} & 2x \\ 1 & 2z \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow 2x = \frac{2z}{x^2y} \Rightarrow z = x^3y \\ \begin{vmatrix} 1 & 2z \\ 0 & z - \frac{1}{xy} \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow z - \frac{1}{xy} = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{xy} \end{aligned}$$

Por lo que $x^3y = \frac{1}{xy} \Rightarrow x^4y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } y=x \Rightarrow x^6=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ \text{si } y=-x \Rightarrow x^6=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$

Luego considerando todos los casos posibles se obtienen los mismos resultados anteriores.

51

Método de los multiplicadores de Lagrange

Ejemplo

Determinar la distancia mínima del origen a la recta de intersección de los dos planos

$$x+y+z=8, 2x-y+3z=28.$$

En este caso la función a optimizar es $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, que equivale a optimizar su cuadrado $f = x^2+y^2+z^2$, con las ligaduras $x+y+z=8, 2x-y+3z=28$; por lo tanto la función de Lagrange será: $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2+y^2+z^2 + \lambda(x+y+z-8) + \mu(2x-y+3z-28)$.

La condición necesaria de extremo condicionado (Sistema de Lagrange) es

$$\left. \begin{aligned} F_x &= 2x + \lambda + 2\mu = 0 \\ F_y &= 2y + \lambda - \mu = 0 \\ F_z &= 2z + \lambda + 3\mu = 0 \\ F_\lambda &= x + y + z - 8 = 0 \\ F_\mu &= 2x - y + 3z - 28 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Que es un sistema lineal en las variables x, y, z, λ, μ , cuya solución es

$$x = 4, y = -2, z = 6, \lambda = 0, \mu = -4.$$

Por lo tanto la solución es el punto $P(4, -2, 6)$, luego la distancia pedida es

$$\sqrt{4^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{56}.$$

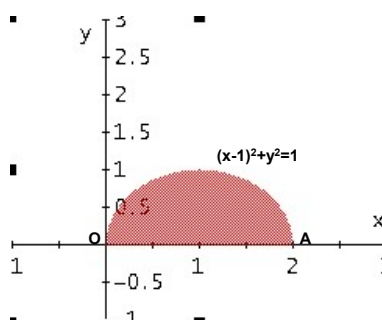
52

Método de los multiplicadores de Lagrange

También se puede utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar extremos de una función en la frontera de una región, tomando la ecuación de la curva frontera como condición de ligadura. Veamos el siguiente

Ejemplo

Determinar los extremos absolutos y relativos, de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$, sobre la región del primer cuadrante limitada por el eje OX y la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$. Hacer el estudio sobre la semicircunferencia utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.



53

Método de los multiplicadores de Lagrange

Estudio en el interior

El sistema de puntos críticos es

$$\begin{cases} f_x = 2x - 1 = 0 \\ f_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}. \text{ Luego el único punto crítico es } P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Calculemos el hessiano:

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = 0 \Rightarrow H(x, y) = 4 \Rightarrow H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 4, f_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 > 0.$$

Se deduce que P es un mínimo relativo con valor $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \dots = -\frac{1}{2} = -0,5$

Estudio en la frontera

En el segmento OA:

$$y = 0 \Rightarrow f = x^2 - x, x \in [0, 2].$$

$$\text{Se tiene } f' = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} = -0,25.$$

Los valores en los extremos son: $f(0, 0) = 0, f(2, 0) = 2$.

54

Método de los multiplicadores de Lagrange

En la semicircunferencia:

La función de Lagrange es $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - x - y + \lambda (x^2 + y^2 - 2x)$, por lo que el sistema de Lagrange es

$$\begin{cases} F_x = 2x - 1 + 2\lambda x - 2\lambda = 0 \\ F_y = 2y - 1 + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{1-2x}{2x-2} = \frac{1-2y}{2y} \Rightarrow 2y-4xy=2x-4xy-2+4y \Rightarrow -2y-2x=-2 \Rightarrow y=1-x$$

Sustituyendo en la última ecuación queda $x^2 + (1-x)^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2 + 1 + x^2 - 2x - 2x = 0 \Rightarrow$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 1 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ no pertenece a la semicircunferencia considerada.

Si $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ si pertenece a la semicircunferencia

considerada, y el correspondiente valor de λ es $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

55

Método de los multiplicadores de Lagrange

Comprobemos la condición suficiente:

$$F_{xx} = 2 + 2\lambda, F_{yy} = 2 + 2\lambda, F_{xy} = 0 \Rightarrow H(x, y, \lambda) = (2 + 2\lambda)^2 \Rightarrow H(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) = (2 + 2\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}})^2$$

$$F_{xx}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) = (2 + 2\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}})^2 > 0.$$

Luego en el punto $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ hay mínimo relativo condicionado con valor

$$f(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \dots = 1 - \sqrt{2} \approx 1 - 1,414 = -0,414$$

Por tanto comparando los resultados obtenidos, se deduce que el máximo absoluto se alcanza en $(2, 0)$ con valor 2, y el mínimo absoluto se alcanza en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ con valor -0,5.

56

Referencias

- José N. Narro. “Introducción al Cálculo Infinitesimal”.