

Tema 6 Funciones reales de varias variables

1. Conceptos básicos: dominio, recorrido.
2. Funciones reales de dos variables reales.
3. Gráficas.
4. Curvas de nivel.
5. Trazas.
6. Concepto de límite.
7. Límites reiterados, según trayectorias y direccionales.
8. Utilización de coordenadas polares: Criterio de la función mayorante.
9. Continuidad.
1. Derivadas parciales
2. Plano tangente y recta normal
3. Derivadas parciales sucesivas (o de orden superior)
4. Diferenciabilidad (para una y dos variables)
5. Plano tangente y diferenciabilidad
6. Derivada de la función compuesta (Regla de la cadena)
7. Derivación en forma implícita
8. Derivada según un vector
9. Derivada direccional
10. Vector gradiente
11. Fórmula de Taylor para funciones de dos variables

Conceptos básicos

El volumen de una caja rectangular de dimensiones: x, y, z vale xyz ; este es un ejemplo de una función real de tres variables reales, que simbolizamos así:

$$f(x, y, z) = xyz.$$

En general, una función real de n variables reales es una correspondencia: que asigna a cada (x_1, x_2, \dots, x_n) , perteneciente a un cierto conjunto, un único valor: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, y lo indicamos así

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Las variables x_1, x_2, \dots, x_n se llaman independientes (que también pueden representarse sin subíndices como en el caso del ejemplo) siendo u la variable dependiente. Normalmente se definen a partir de una fórmula.

Ejemplos:

$f(x, y) = x + y^2$, que es una función de dos variables.

Algunos valores son: $f(0, -2) = 4$, $f(-2, 3) = 7$.

$g(x, y, z, v) = x + y - v^2$, que es una función de cuatro variables.

Algunos valores son: $g(1, 1, -5, 0) = 2$, $g(-2, 0, 3, -3) = -11$.

Conceptos básicos

Los conceptos conocidos para funciones de una variable tienen su equivalente para funciones de n variables.

Se llama *dominio* de una función al conjunto de puntos para los que la función tiene sentido.

Llamamos *recorrido o imagen* de una función al conjunto de valores que toma la función.

Nuestro estudio se centrará fundamentalmente en las funciones de dos variables, escribiéndose entonces:

Dominio de $f = D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \exists f(x, y)\}$.

Imagen o recorrido de $f = \text{Im}(f) = \{f(x, y) / (x, y) \in D\}$.

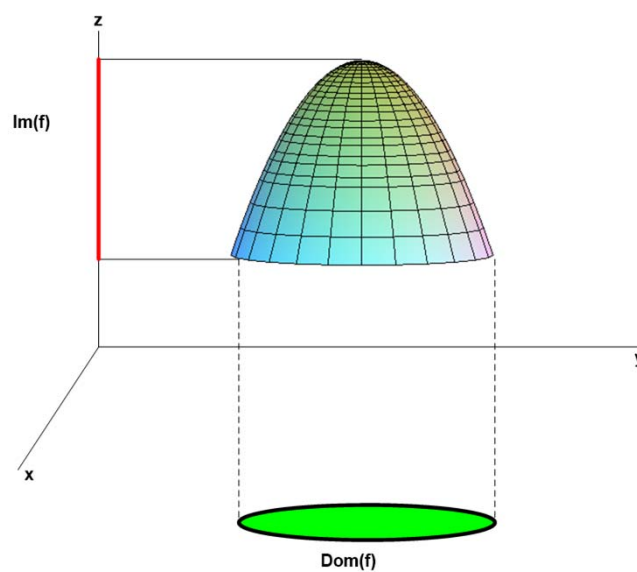
Ejemplo

Obtener el dominio de $z=f(x,y)=3x-2y+7$.

El dominio es \mathbb{R}^2 , pues la fórmula que define existe para cualquier par $(x, y) : D = \mathbb{R}^2$.

3

Dominio e imagen



4

Conceptos básicos

Ejemplo

Obtener el dominio de $z=f(x, y)=\frac{3x-5y}{y-x^2} \Rightarrow D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y-x^2 \neq 0\}$, luego el dominio es todo el plano \mathbb{R}^2 excepto los puntos de la parábola $y = x^2$.

Ejemplo

Obtener el dominio de $z=f(x, y)=\sqrt{9-x^2-y^2} \Rightarrow D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 9-x^2-y^2 \geq 0\}$. Como $x^2+y^2=9$, es la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 3, D representa el interior y la frontera de dicha circunferencia.

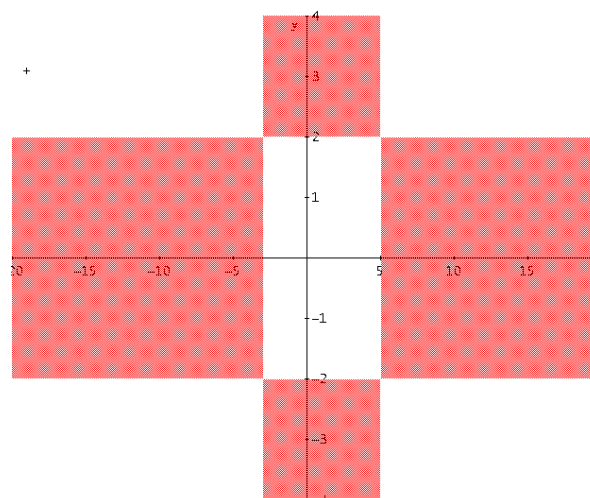
Ejemplo

Obtener dominio de $z = f(x, y) = \log(x - y) \Rightarrow D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x-y > 0\}$
Luego el dominio es el semiplano inferior definido por $y = x$.

5

Conceptos básicos

Obtener el dominio de $f(x, y) = \frac{\log(x^2 - 2x - 15)(4 - y^2)}{x^3}$.



6

Operaciones entre funciones

Las funciones de varias variables pueden operarse de igual forma que las de una variable, así para dos variables se tiene:

Suma o diferencia: $(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$

Producto: $(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$

Cociente: $\frac{f}{g}(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$, para $g(x, y) \neq 0$

Composición: $(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$, siendo g una función de dos variables y f de una sola variable.

7

Funciones polinómicas y racionales

Se utilizan frecuentemente las siguientes funciones de dos variables:

- a) Funciones polinómicas, que son aquellas que se escriben como suma de funciones de la forma $kx^m y^n$, siendo k un número real y m y n enteros no negativos.
- b) Funciones racionales, que son aquellas que se expresan como cociente de dos funciones polinómicas.

Ejemplos:

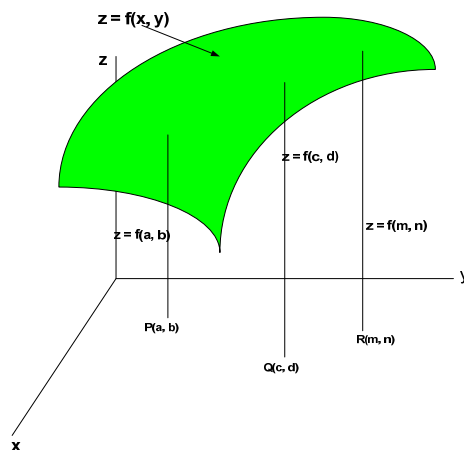
$f(x, y) = -x^2 y^5 + y - \frac{1}{7}xy^3$, es una función polinómica.

$g(x, y) = \frac{x^3 y^4}{x^5 - y^2}$, es una función racional.

8

Gráficas

De igual forma que para funciones de una variable, también se pueden considerar las gráficas de funciones de dos variables. La gráfica de la función de dos variables f se entiende como el conjunto de puntos de la forma (x, y, z) , donde $z = f(x, y)$ y (x, y) pertenece al dominio de f . Dicha gráfica se interpreta geométricamente como una superficie en el espacio, y se dice que $z = f(x, y)$ es la ecuación en forma explícita de dicha superficie.



9

Gráficas

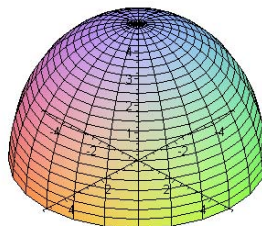
Ejemplo

Estudiemos la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$

Haciendo $z = f(x, y) \Rightarrow z = \sqrt{49 - x^2 - y^2} \Rightarrow z^2 = 49 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 49 \Rightarrow$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = 7$, que representa el conjunto de los puntos del espacio cuya distancia al origen vale 7, es decir se trata de la esfera de centro el origen y radio 7.

Como la función considerada es positiva : $z \geq 0$, su gráfica es la semiesfera, con z positiva, centro el origen y radio 7.



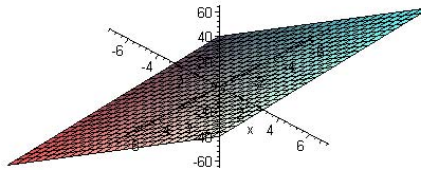
10

Gráficas

Ejemplo

Estudiamos la gráfica de $f(x, y) = -x + 8y$.

Haciendo $z = f(x, y) \Rightarrow z = -x + 8y$, que es la ecuación de un plano siendo este la gráfica de la función.



11

Trazas

El obtener la gráfica de una función es, en general, complicado. Un método para conseguir una idea aproximada de la gráfica consiste en obtener los cortes o intersecciones de la superficie que representa la gráfica con planos paralelos a los planos coordenados, es decir, de la forma $x = a$, $y = b$, $z = c$ siendo a , b , c números reales arbitrarios.

Las intersecciones anteriores se llaman **trazas de la superficie en el plano considerado**.

Ejemplo

Estudiar la gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

La ecuación de la superficie será $z = x^2 + y^2$

Cortando por planos de la forma $x = a \Rightarrow z = a^2 + y^2$, que son parábolas en el plano OZY.

Cortando por planos de la forma $y = b \Rightarrow z = x^2 + b^2$, que son parábolas en el plano OZX.

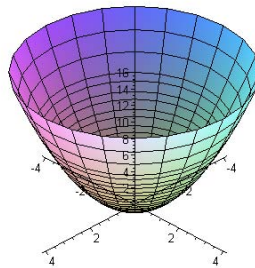
Cortando por planos de la forma $z = c \Rightarrow c = x^2 + y^2$, que son, para $c > 0$, circunferencias de centro el origen.

Luego las trazas obtenidas sobre planos paralelos a los coordenados son parábolas o circunferencias.

12

Trazas

El estudio anterior da una idea de la forma de la superficie que se llama paraboloide elíptico.



Gráfica de $z = x^2 + y^2$

13

Curvas de nivel

Otra forma de obtener una idea aproximada de la superficie que representa una función de dos variables $z = f(x, y)$, es a través de sus **curvas de nivel (o líneas de contorno)**, que son aquellas curvas de la superficie donde el valor de $f(x, y)$ permanece constante, luego su ecuación será de la forma $f(x, y) = c$, siendo c una constante arbitraria; gráficamente se obtienen cortando la superficie que representa a la función por planos paralelos a OXY de ecuación $z = c$. Si representamos en un mismo plano varias curvas de nivel, correspondientes a distintos valores de c , se obtiene un mapa de curvas de nivel (o mapa de contorno), los cuales se suelen utilizar para representar regiones de la superficie terrestre, donde las curvas de nivel representan la altura sobre el nivel del mar.

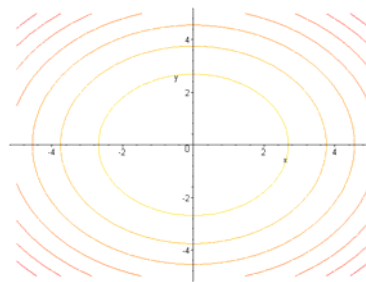
14

Curvas de nivel

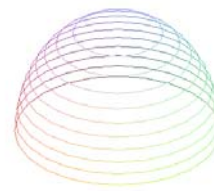
Ejemplo

Obtener las curvas de nivel de $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$.

Haciendo $z = c \Rightarrow c^2 = 100 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100 - c^2$, que son circunferencias de centro el origen para $c < 10$. Para $c = 10$ representa el punto $(0, 0)$, y para $c > 10$ no tienen significado geométrico.



Mapa de contorno



Curvas de nivel

15

Límites

Antes de entrar en el estudio de los límites para funciones de dos variables veremos unos conceptos previos.

Recordando que la distancia entre dos puntos $P(x, y)$ y $Q(a, b)$ es

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Definimos el δ -entorno, bola o disco bidimensional de centro Q y radio δ como el conjunto de puntos contenidos en el círculo de centro Q y radio δ

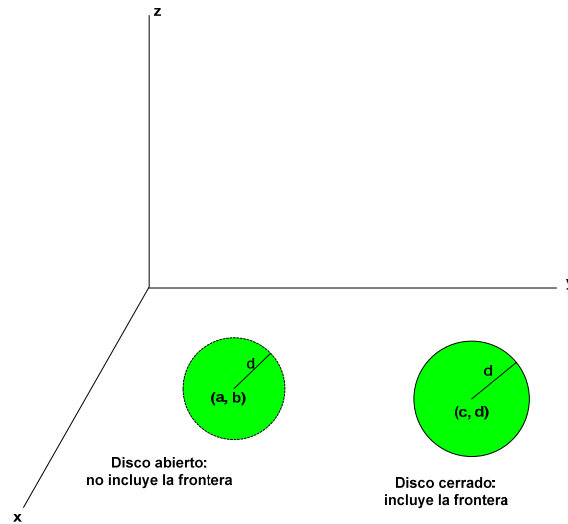
Disco cerrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta\}$

Disco abierto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\}$

Luego el disco cerrado incluye la circunferencia o frontera y el abierto no. Estos conceptos son análogos a los de entorno cerrado o abierto para una variable.

16

Límites



17

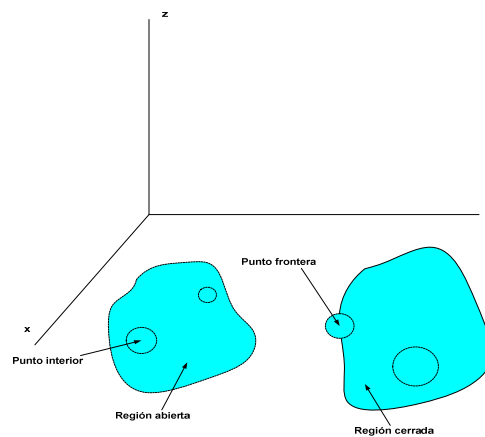
Límites

Se dice que un punto $Q(a, b)$, es un punto interior de una región R , si existe un disco abierto con centro en $Q(a, b)$ y radio no nulo, completamente contenido en R .

Una región se dice abierta si todos sus puntos son interiores.

Un punto frontera es aquel que verifica que todo disco centrado en el contiene puntos interiores y no interiores (exteriores).

Si una región contiene todos sus puntos frontera se llama cerrada.

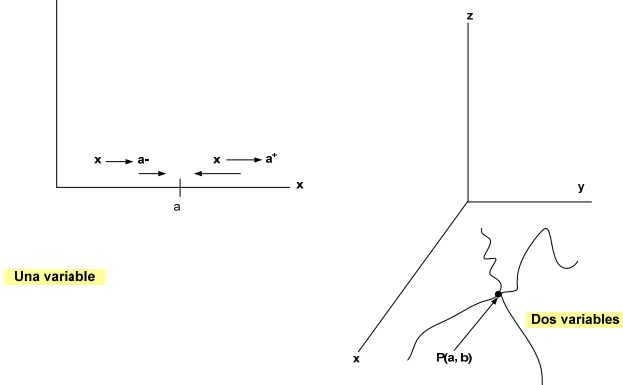


18

Límites

Para una variable, la expresión $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, donde a y L son números reales, significa que cuando x es próximo a a , entonces $f(x)$ es próximo a L . En este caso x se puede aproximar a a de dos formas distintas: por la izquierda o por la derecha de a .

En el caso de dos variables el significado de la expresión $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$, siendo a, b y L números reales, es análogo, es decir, cuando (x,y) se aproxima a (a,b) entonces $f(x,y)$ se aproxima a L , pero en este caso dicha aproximación se puede hacer de infinitas formas.



19

Límites

La definición rigurosa de límite bidimensional es análoga al unidimensional:

Si f es una función de dos variables definida en un disco abierto de centro (a,b) , excepto posiblemente en (a,b) , y L es un número real, entonces se dice que L es el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a (a,b) y se escribe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

Si cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$, debe existir otro número $\delta > 0$ tal que

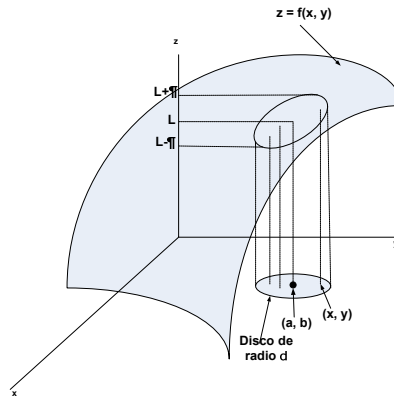
$$\text{si } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta, \text{ entonces } |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Notemos que al igual que en el caso de una variable el número δ depende del número ε .

20

Límites

Límite para una función de dos variables



21

Límites

Aun siendo esta definición análoga al caso de una variable, existe una diferencia fundamental. Para comprobar si una función de una variable tiene límite solo necesitamos comprobar que ocurre al aproximarnos por la izquierda o por la derecha. Si los límites por la izquierda y por la derecha coinciden entonces el límite existe. Para una función de dos variables (x, y) se puede aproximar a (a, b) siguiendo infinitos caminos o trayectorias.

Si el valor de $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$, no es el mismo para todas las trayectorias, entonces no existe el límite.

22

Límites

Si las trayectorias que utilizamos son las rectas que pasan por (a, b), al límite correspondiente le llamamos direccional.

Si el límite existe su valor debe ser el mismo para cualquier trayectoria:
 $y = \varphi(x)$, o bien $x = \gamma(y)$, que pase por el punto (a, b), es decir: $b = \varphi(a)$,
 $a = \gamma(b)$.

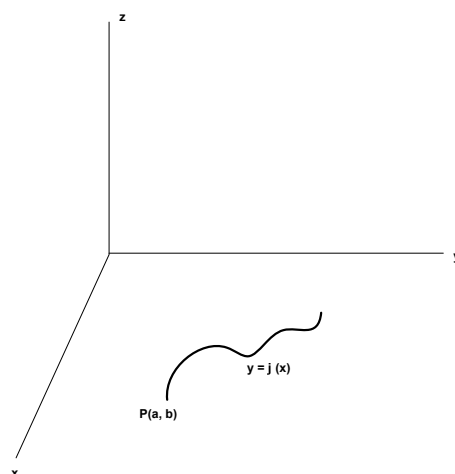
Luego debe ser

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ y = \varphi(x)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, \varphi(x)) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ x = \gamma(y)}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} f(\gamma(y), y) = L.$$

23

Límites

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ y = \varphi(x)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, \varphi(x)) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ x = \gamma(y)}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} f(\gamma(y), y) = L$$



24

Límites

Ejemplo

Estudiar el límite en el origen de la función $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^5 + y^2}$.

Se pide estudiar la existencia de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^5 + y^2}$.

Calculemos primero los límites direccionales según las rectas que pasan por el origen, que tienen por ecuación $y = mx$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 mx}{x^5 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^3 + m^2} = 0, \text{ para cualquier } m.$$

Calculemos ahora el límite a lo largo de la trayectoria $y = x^3$, que pasa por $(0, 0)$

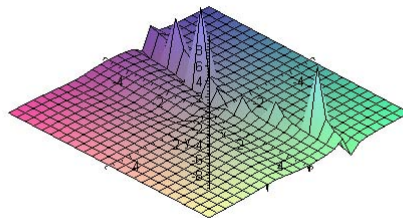
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^5 + x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Como los límites obtenidos son distintos podemos afirmar que no existe el límite en el origen de la función dada.

25

Límites

Gráfica de la función $z = \frac{x^2 y}{x^5 + y^2}$



26

Límites

Ejemplo

Estudiar el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, calculándolo en su caso.

Calculemos los límites direccionales según las rectas $y = mx$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^2}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^2}{|x| \sqrt{1+m^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 |x|}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$

Como los límites obtenidos no dependen de m , es posible que el límite valga 0.

Intentemos demostrar que es 0 aplicando la definición de límite

En este caso $L = 0$, luego se debe probar que $|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0| < \varepsilon$, siempre que

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$, es decir, dado ε , debe determinarse δ en función de ε .

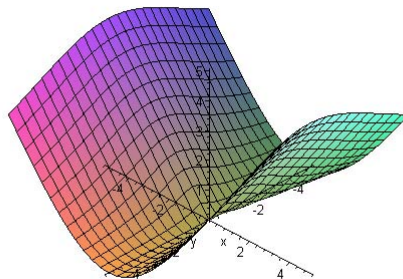
$$|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{|y|}{\sqrt{(\frac{x}{y})^2 + 1}} \leq |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta, \text{ luego tomando } \delta = \varepsilon, \text{ queda}$$

demostrado que el límite es 0.

27

Límites

Gráfica de la función $z = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$



28

Límites reiterados

Consideremos la función $z = f(x, y)$, si fijamos la variable x , f se convierte en una función solo de y , entonces tiene sentido el $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$, que llamamos:

$$f_1(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y).$$

Análogamente, fijando y , f se convierte en una función de x , y tiene sentido llamar:

$$f_2(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y).$$

Si a su vez calculamos los límites de $f_1(x)$ y de $f_2(y)$, se obtienen los llamados límites reiterados o sucesivos en el punto (a, b) , que son

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)), \quad \lim_{y \rightarrow b} f_2(y) = \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$$

Dichos límites, en general, no tienen por qué coincidir entre sí, ni con el $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$

29

Límites reiterados

Ejemplo

Halleemos los límites reiterados de $f(x, y) = \frac{x+y-2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}-2}$ en el punto $(1, 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\lim_{y \rightarrow 1} \frac{x+y-2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}-2}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^3}-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} (\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+y-2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}-2}) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{\sqrt[3]{y^3}-1} = \frac{0}{0} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{3y^2}} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(y^3-1)^2}}{y^2} = 0$$

Luego en este caso ambos límites reiterados coinciden y valen 0.

30

Límites reiterados

Una aplicación útil de los límites reiterados la da el siguiente:

Teorema

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si los límites

$$f_1(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y), \quad f_2(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y), \text{ existen y existe } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L,$$

entonces existen los límites reiterados y coinciden con L.

Los límites reiterados pueden existir y ser distintos, lo que significaría que no que no existe $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$.

31

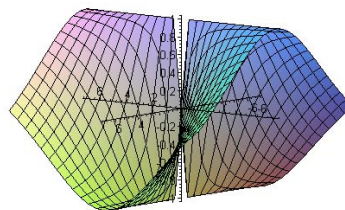
Límites reiterados

Ejemplo

Estudiamos el $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, utilizando los límites reiterados.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{-y^2}{y^2} \right) = -1.$$

Luego no existe el $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.



$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

32

Límites reiterados

Los límites reiterados pueden existir, ser iguales, y no existir $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$:

Ejemplo:

Estudiamos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$, utilizando los límites reiterados y siendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Luego los límites reiterados existen y valen 0.

Estudiamos el límite direccional según las rectas $y = mx$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}, \text{ como el límite depende de } m, \text{ no existe}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y).$$

33

Límites reiterados

Puede existir el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ sin que exista alguno o ninguno de los límites reiterados.

Ejemplo.

Estudiar el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ y, los límites reiterados, siendo

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x > 0 \\ -y & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Probemos que el límite es 0 utilizando la definición.

Dado $\varepsilon > 0$, $|f(x,y)-0| < \varepsilon \Rightarrow |y| < \varepsilon$, esto se debe cumplir tomando un δ conveniente que verifique $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, como $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, se puede tomar $\delta = \varepsilon$, luego se ha probado que el límite es 0.

Calculemos los límites reiterados

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x,y) = y, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x,y) = -y$$

luego para $y \neq 0$, no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$

por tanto tampoco existe el límite reiterado $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y))$.

34

Uso de coordenadas polares

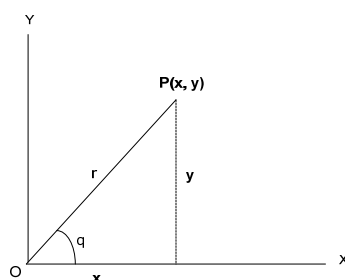
En ciertos casos se puede simplificar el estudio del límite de una función mediante la utilización de coordenadas polares, ya empleadas en la representación de números complejos.

Recordemos que si (x, y) son las coordenadas cartesianas de un punto P del plano, entonces sus coordenadas polares (ρ, θ) verifican

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

donde ρ , representa la distancia de P al origen de coordenadas O, y θ es el ángulo entre OP y la dirección positiva de eje OX.



$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

35

Uso de coordenadas polares

Si sustituimos x, y por sus expresiones en polares, la función $z = f(x, y)$ toma la forma:

$$z = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Se verifica el siguiente

Teorema (Criterio de la función mayorante)

Una condición necesaria y suficiente para que exista $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L$, es que la expresión $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - L|$ esté acotada por una función $F(\rho)$, para cualquier valor de θ , cumpliéndose además que $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = 0$.

Ejemplo

Demostrar, utilizando el criterio anterior que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 2xy^2}{x^2 + y^2} = 0$.

La expresión a acotar es $\left| \frac{\rho^3 \cos^3 \theta + 2\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} - 0 \right| = |\rho \cos^3 \theta + 2\rho \cos \theta \sin^2 \theta| \leq$

$|\rho \cos^3 \theta| + |2\rho \cos \theta \sin^2 \theta| \leq \rho + 2\rho = 3\rho = F(\rho)$, luego $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = 0$, como se quería demostrar.

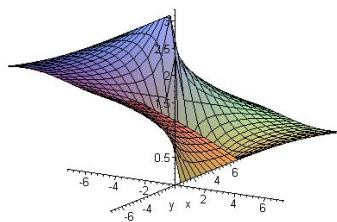
36

Uso de coordenadas polares

Ejemplo

Haciendo uso del criterio anterior comprobar que el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, no existe.

Pasando a polares intentamos acotar $|\arccos(\frac{\rho \cos \theta}{\rho}) - 1| = |\arccos(\cos \theta) - 1| = |\theta - 1|$, como θ puede aumentar tanto como se quiera, es imposible acotar la expresión anterior, luego el límite considerado no existe.



$$z = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

37

Uso de coordenadas polares

Ejemplo

Utilizando polares (es decir, el teorema anterior) probar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sin(\sqrt{x^2+y^2})} = 0$.

Pasando a polares acotamos $|\frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\sin \rho} - 0| = \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\sin \rho} = F(\rho)$. Hay que probar que $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = 0$.

Haciendo el cambio $t = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sin \frac{1}{t}} = \frac{0}{0} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{-\frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^3 e^{-t^2}}{\cos \frac{1}{t}}$.

Se tiene que $\cos \frac{1}{t} \rightarrow 1$, $t^3 e^{-t^2} = \frac{t^3}{e^{t^2}} \rightarrow 0$, pues el infinito exponencial es de orden superior al infinito potencial (también se puede aplicar L'Hôpital), luego

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = 0.$$

38

Continuidad

Si f es una función de dos variables, definida en una región abierta D , se dice que es continua en un punto $(a, b) \in D$, si se verifican las condiciones siguientes:

- 1) Existe el $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$.
- 2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

La función f se dice continua en la región abierta D , si es continua en cada punto de D .

39

Continuidad

Ejemplo

Estudiar la continuidad de la siguiente función en el punto $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1 & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Calculemos los límites direccionales según las rectas $y = mx$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{|x|\sqrt{1+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

Luego el límite si existe debe ser 0. Intentemos probarlo usando coordenadas polares

$$\left| \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho} - 0 \right| = |\rho \cos\theta \sin\theta| = \rho |\cos\theta| |\sin\theta| \leq \rho \cdot 1 = \rho, \text{ por tanto } F(\rho) = \rho, \text{ siendo}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = 0.$$

Se ha probado que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, consecuentemente, f no es continua en $(0,0)$,

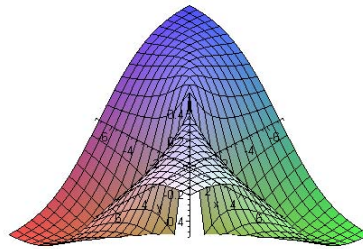
pero si modificamos su valor en $(0, 0)$, poniendo $f(0,0) = 0$, será continua en dicho punto.

Este tipo de discontinuidad, por la razón vista, se llama evitable. Si el límite no hubiese existido la discontinuidad se llamaría inevitable.

40

Continuidad

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



41

Continuidad

Propiedades de las funciones continuas:

Si c es un número real y f, g son funciones continuas en (a, b) , entonces las funciones siguientes son continuas en (a, b) .

- 1) Producto por un número cf
- 1) Producto fg
- 2) Suma o diferencia $f \pm g$
- 3) Cociente f/g , siendo $g(a, b) \neq 0$

Como consecuencia de estas propiedades se deduce que las funciones polinómicas y racionales son continuas en todo su dominio.

Para la composición de funciones continuas se tiene el siguiente

Teorema

Si h es una función de dos variables, continua en (a, b) y, g es una función de una variable continua en $h(a, b)$, entonces la función compuesta $(g \circ h)(a, b) = g(h(a, b))$ es continua en (a, b) .

42

Continuidad

Ejemplos:

- 1) La función $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$ es continua en todo \mathbb{R}^2 por ser composición de las funciones: $g(x) = e^x$ y $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 2) La función $f(x, y) = \cos(\log(x+y))$, es continua en el semiplano $x+y > 0$, por ser composición de las funciones: $g(x) = \cos x$, $h(x, y) = \log(x + y)$.

43

Derivadas parciales

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables con dominio D . Si mantenemos la variable y fija: $y = b$, siendo b una constante, y suponemos que solo la x varía, la función f se convierte entonces en función de solo la variable x : $g(x) = f(x, b)$. Si g tiene derivada en a , entonces esta se llama derivada parcial de f respecto de x en (a, b) , que denotamos por $f_x(a, b)$. Luego por definición se tiene:

$$f_x(a, b) = g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}, \text{ por tanto}$$

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

Análogamente se define la derivada parcial de f respecta de y en (a, b) , y que denotamos por $f_y(a, b)$, que se obtiene fijando $x = a$, y obteniendo la derivada en b de la función $h(y) = f(a, y)$

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

44

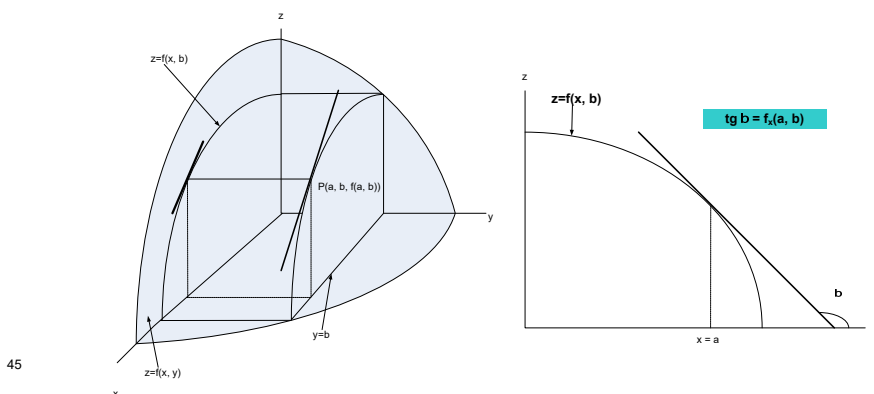
Interpretación geométrica de la derivada parcial

Si consideramos la superficie que tiene por ecuación $z = f(x, y)$, el plano $y = b$, corta a la superficie en la curva $z = f(x, b)$, que tiene por pendiente en el punto $x = a$, el valor de su derivada en dicho punto, que es precisamente:

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

Corte de $z = f(x, y)$ con $y = b$

Proyección del corte de $z = f(x, y)$ con $y = b$ sobre el plano ZX



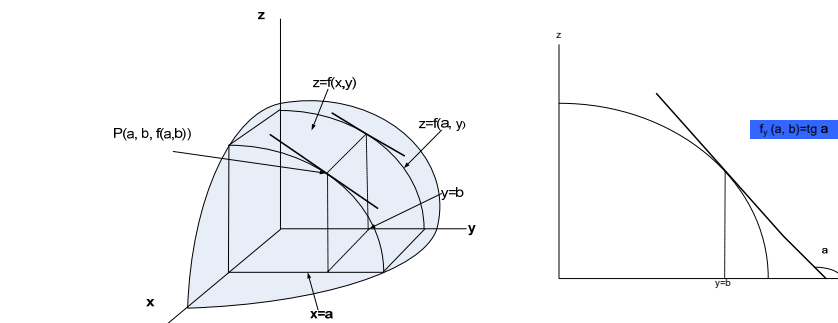
Interpretación geométrica de la derivada parcial

Análogamente, si cortamos la superficie por el plano $x = a$, se obtiene la curva $z = f(a, y)$, que tiene por pendiente en el punto $y = b$, el valor de su derivada en dicho punto:

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

Corte de $z = f(x, y)$ con $x = a$

Proyección del corte de $z = f(x, y)$ con $x = a$ sobre el plano ZY



Plano tangente

Suponiendo que el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(a, b, f(a, b))$ existe obtengamos su ecuación. Dicho plano debe contener a las rectas tangentes a la curvas contenidas en la superficie y que pasan por $P(a, b, f(a, b))$; en particular contendrá a las rectas tangentes a las curvas que resultan de cortar a la superficie por los planos $x = a$, $y = b$.

Al cortar por $x = a$, se obtiene la curva $z = f(a, y)$ en el plano ZY , y cuya recta tangente en el punto $P(a, b, f(a, b))$ tiene por pendiente $f_y(a, b)$, luego un vector director de esta recta será de la forma $(0, u, v)$, siendo $\frac{v}{u} = f_y(a, b)$, tomando $u = 1$, se

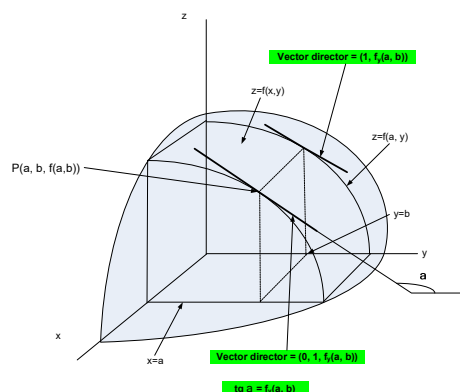
obtiene: $v = f_y(a, b)$

es decir, un vector en la dirección de la recta tangente es $(0, 1, f_y(a, b))$.

47

Plano tangente

Corte de $z=f(x, y)$ con $x=a$

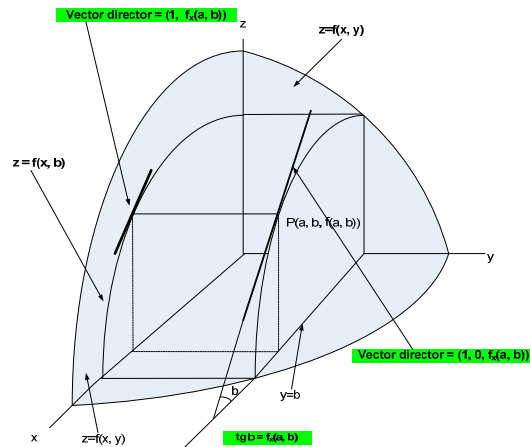


48

Plano tangente

Corte de $z = f(x, y)$ con $y = b$

Análogamente, al cortar por $y = b$, se obtiene la curva $z = f(x, b)$ en el plano ZX, y cuya recta tangente en el punto $P(a, b, f(a, b))$ tiene por pendiente $f_x(a, b)$, luego un vector director de esta recta será de la forma $(u, 0, v)$, siendo $\frac{v}{u} = f_x(a, b)$, tomando $u = 1$, se obtiene $v = f_x(a, b)$, es decir, un vector en la dirección de la recta tangente es $(1, 0, f_x(a, b))$.



49

Plano tangente y recta normal

En consecuencia dos vectores directores del plano tangente en el punto :

$P(a, b, f(a, b))$ son $\vec{p} = (0, 1, f_y(a, b))$ y $\vec{q} = (1, 0, f_x(a, b))$, luego un vector perpendicular al plano se obtendrá multiplicándolos vectorialmente

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f_y(a, b) \\ 1 & 0 & f_x(a, b) \end{vmatrix} = f_x(a, b)\vec{i} + f_y(a, b)\vec{j} - \vec{k}$$

Por lo tanto el plano tangente queda definido por el punto $P(a, b, f(a, b))$ y tiene por vector característico $(f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$, por lo que su ecuación será:

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0.$$

La recta perpendicular al plano tangente en el punto $P(a, b, f(a, b))$ se llama recta normal a la superficie en dicho punto, por lo que su ecuación, en forma paramétrica, será

$$\left. \begin{aligned} x &= a + t f_x(a, b) \\ y &= b + t f_y(a, b) \\ z &= f(a, b) - t \end{aligned} \right\}$$

50

Plano tangente y recta normal

Ejemplo

Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $z = 3x^2 - y^2$, en el punto $P(1, 1, 2)$, así como la ecuación de la recta normal en dicho punto.

En este caso:

$$f_x(x, y) = 6x, f_y(x, y) = -2y, (a, b) = (1, 1) \Rightarrow f_x(1, 1) = 6, f_y(1, 1) = -2, f(1, 1) = 2.$$

Luego la ecuación del plano tangente es:

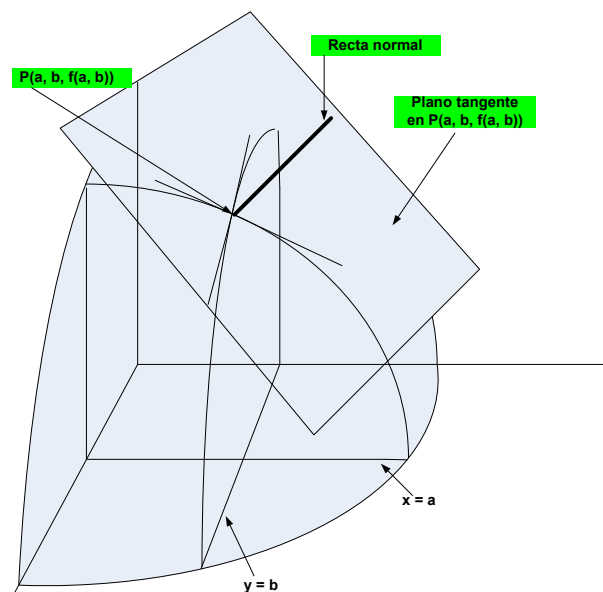
$$6(x-1) - 2(y-1) - (z-2) = 0 \Rightarrow 6x - 2y - z = 2.$$

La recta normal tiene por ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x=1+6t \\ y=1-2t \\ z=2-t \end{array} \right\}$$

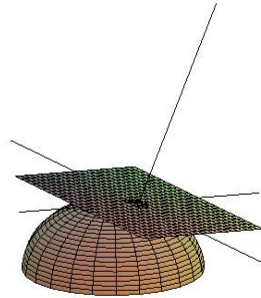
51

Plano tangente y recta normal



52

Plano tangente y recta normal



53

Función derivada parcial

Si (a, b) , es un punto variable lo representaremos por (x, y) y obtendremos el concepto de funciones derivadas parciales:

La derivada parcial de f con respecto de x , la denotamos por f_x , y se define así

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

para todos los puntos (x, y) donde este límite exista.

La derivada parcial de f con respecto de y , la denotamos por f_y , y se define así

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

para todos los puntos (x, y) donde este límite exista.

Si $z = f(x, y)$, otras notaciones usuales para las derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

54

Derivadas parciales

Como en el cálculo de derivadas parciales una de las variables se mantiene constante, se podrán aplicar las reglas de derivación para funciones de una variable, siempre que esté clara la existencia de esta derivada.

Ejemplo

Siendo $f(x, y) = (x^2 + y)e^{xy}$, calcular sus derivadas parciales y evaluarlas en el punto (1,1):

$$f_x(x, y) = 2xe^{xy} + (x^2 + y)ye^{xy} \Rightarrow f_x(1, 1) = 2e + 2e = 4e$$

$$f_y(x, y) = e^{xy} + (x^2 + y)xe^{xy} \Rightarrow f_y(1, 1) = e + 2e = 3e$$

Se han aplicado directamente las reglas de derivación de funciones de una variable, ya que al fijar una variable la función se convierte en una función derivable por ser el resultado de operar funciones derivables. Esta función admite derivadas parciales en todo punto de \mathbb{R}^2 .

55

Derivadas parciales

Ejemplo

Estudiar la existencia de derivadas parciales, para cualquier punto, de la función

$$f(x, y) = |x+y| = \begin{cases} x+y & \text{si } x+y > 0 \\ -x-y & \text{si } x+y \leq 0 \end{cases} \quad \text{calculándolas en su caso}$$

Si $x+y \neq 0$, existen ambas derivadas parciales, ya que al fijar una variable se obtiene un polinomio que siempre es derivable, siendo

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 1, f_y(x, y) = 1, \text{ si } x+y > 0 \\ f_x(x, y) &= -1, f_y(x, y) = -1, \text{ si } x+y \leq 0 \end{aligned}$$

Queda por estudiar cuando el punto $P(a, b)$ si $x+y = 0$, es decir, $b = -a \Rightarrow P(a, -a)$

$$f_x(a, -a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, -a) - f(a, -a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}, \text{ que no existe, ya que vale } 1 \text{ o } -1$$

según que h tienda a cero por la derecha o por la izquierda.

$$f_y(a, -a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, -a+h) - f(a, -a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}, \text{ que no existe, ya que vale } 1 \text{ o } -1$$

según que h tienda a cero por la derecha o por la izquierda.

Luego la función admite derivadas parciales en todos los puntos, salvo en la recta $x + y = 0$.

56

Derivadas parciales sucesivas

Al calcular las derivadas parciales de una función de dos variables se obtienen también funciones de dos variables, a las que se les puede calcular sus derivadas parciales, a las que llamamos derivadas parciales segundas. Este proceso puede seguir obteniéndose las derivadas sucesivas (o de orden superior). Las notaciones más usuales son:

Derivadas parciales segundas:

- 1) derivando dos veces respecto de x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

- 2) derivando dos veces respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

- 3) derivando primero respecto de x y luego respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

- 4) derivando primero respecto de y y luego respecto de x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

En las dos notaciones utilizadas se deriva primero respecto a la variable más cercana a f.

57

Derivadas parciales sucesivas

Ejemplo

Calcular las derivadas parciales segundas de:

$$f(x, y) = y^2 e^x + \cos(xy) + \frac{x}{y}$$

- $f_x(x, y) = y^2 e^x - y \sin(xy) + \frac{1}{y}$
- $f_y(x, y) = 2ye^x - x \sin(xy) - \frac{x}{y^2}$
- $f_{xy}(x, y) = 2ye^x - \sin(xy) - yx \cos(xy) - \frac{1}{y^2}$
- $f_{yx}(x, y) = 2ye^x - \sin(xy) - yx \cos(xy) - \frac{1}{y^2}$
- $f_{xx}(x, y) = y^2 e^x - y^2 \cos(xy)$
- $f_{yy}(x, y) = 2e^x - x^2 \cos(xy) + \frac{2x}{y^3}$

58

Derivadas parciales sucesivas

En el último ejemplo se verificaba que $f_{xy} = f_{yx}$, igualdad que en general no es cierta, aunque si lo será para la mayoría de funciones que manejemos.

Una condición suficiente para que $f_{xy} = f_{yx}$, la da el:

Teorema (de Schwarz, sobre la permutabilidad de orden de derivación)

Si f está definida en un entorno U de (a, b) , y si existen las derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} en el mismo U , siendo también f_{xy} continua en (a, b) , entonces existe $f_{yx}(a, b)$ y se cumple $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Para más de dos variables el concepto de derivada parcial es análogo. Veamos un ejemplo para tres variables

Ejemplo

Calcular la derivadas parciales primeras de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + e^{xyz}$$

$$f_x(x, y, z) = 2x + yze^{xyz}$$

$$f_y(x, y, z) = 2y + xze^{xyz}$$

$$f_z(x, y, z) = 2z + xye^{xyz}$$

59

Diferenciabilidad

Diferenciabilidad. Diferencial.

Recordemos el concepto para una función de una variable:

Sea $y = f(x)$, una tal función, y a un punto de su dominio, se quiere establecer una relación entre el incremento de la variable x , al tomar valores próximos a a , y que representamos por $\Delta x = x - a$, con el correspondiente incremento de la función, y que simbolizamos por $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$.

Supongamos que f está definida en un cierto intervalo I , si a es un punto fijo de I , decimos que f es diferenciable en a , si su incremento en a , es decir, si

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a), \quad \text{siendo } a + \Delta x \in I,$$

se puede escribir en la forma:

$$\Delta y = k\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \quad \text{siendo } k \in \mathbb{R} \text{ y } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

Si esto se verifica, entonces se llama diferencial de f en a , a la función de Δx , que representamos por $dy(\Delta x) = k\Delta x$, y que abreviadamente ponemos $dy = k\Delta x$. Luego se tiene:

$\Delta y = dy + o(\Delta x)$, donde $o(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, siendo $o(\Delta x)$ un infinitésimo de orden superior a Δx cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

60

Diferenciabilidad

Ejemplo

Comprobar que la función $f(x) = x^2 + 3x - 1$ es diferenciable en cualquier punto $x = a$.

Calculemos el incremento de la función en dicho punto:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x)^2 + 3(a + \Delta x) - 1 - f(a) = a^2 + \Delta x^2 + 2a\Delta x + 3a + 3\Delta x - 1 - a^2 - 3a + 1 = \Delta x^2 + 2a\Delta x + 3\Delta x = (2a + 3)\Delta x + \Delta x\Delta x$$

Luego se cumple la definición de diferenciabilidad tomando $k = 2a + 3$, $\varepsilon(\Delta x) = \Delta x$.

Nótese que $k = f'(a)$, veremos que esto es un resultado cierto en general.

61

Diferenciabilidad

Para una función de una variable los conceptos de diferenciabilidad y derivabilidad en un punto son equivalentes. Precisando, se verifica el:

Teorema

La función f es derivable en a si y solo si es diferenciable en a .

Demostrémoslo en un sentido:

Suponiendo que f es derivable en $a \Rightarrow$

$$\text{existe } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = 0, \text{ llamando } \varepsilon(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \Rightarrow$$

$\varepsilon(\Delta x)$ es un infinitésimo para $\Delta x \rightarrow 0$, luego $\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, por tanto f es diferenciable en a , siendo $k = f'(a)$.

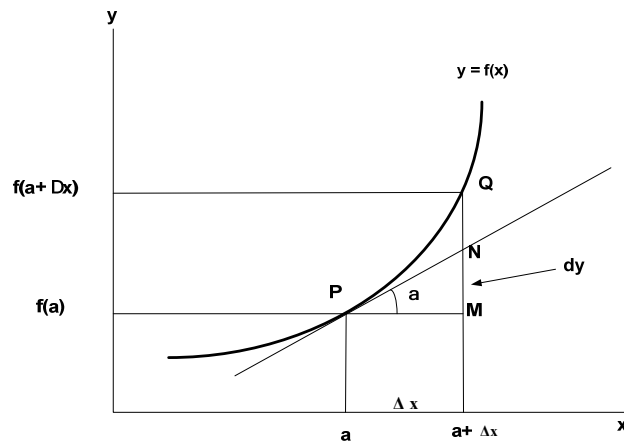
En sentido contrario la demostración es análoga.

Si consideramos la función $y = x \Rightarrow dy = dx \Rightarrow dy = dx = \Delta x$, por lo que la dife-

rencial de f se suele escribir $dy = f'(a)dx \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx}$, que es otra notación para la derivada.

62

Interpretación geométrica de la diferencial



$$\operatorname{tg} \alpha = f'(a) = \frac{MN}{PM} \Rightarrow MN = f'(a)PM = f'(a)dx = dy$$

$$Dy = MQ$$

63

Diferenciabilidad

Ejemplo

Calcular la diferencial de $f(x) = x^3 - x^2$, en un punto arbitrario x , y luego en el punto $x = 1$:

Se tiene $f'(x) = 3x^2 - 2x$, luego $dy = (3x^2 - 2x)dx$.

Tomando $x = 1 \Rightarrow dy = dx$.

64

Diferenciabilidad

Estudiemos ahora la diferenciabilidad para una función de dos variables.

Sea $z = f(x, y)$ definida en un cierto entorno del punto $P(a, b)$; si incrementamos la abscisa en Δx , y la ordenada en Δy , se obtiene el punto $Q(a + \Delta x, b + \Delta y)$, a la diferencia entre el valor de la función en Q y el valor de la función en P le llamamos incremento de la función al pasar del punto P al Q , que puede ser positivo o negativo y que representamos por $\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$.

Se quiere establecer una relación entre los incrementos de las variables x , y en los valores a y b , con el incremento de la función.

Si P y Q pertenecen al dominio de f , la función se dice diferenciable en $P(a, b)$, si existen dos números M y N , tales que

$$\Delta z = M\Delta x + N\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

siendo ε_1 y ε_2 , dos funciones de las variables Δx e Δy , e infinitésimos cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, es decir se cumple

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$

65

Diferenciabilidad

Se puede demostrar que la anterior definición de diferenciabilidad es equivalente a esta otra:

La función se dice diferenciable en $P(a, b)$, si existen dos números M y N , tales que

$$\Delta z = M\Delta x + N\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

siendo ε , función de las variables Δx e Δy , e infinitésimo cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$,

es decir se cumple $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$

En el caso en que f sea diferenciable en (a, b) , se llama diferencial de f en el punto (a, b) a la función lineal respecto de las variables Δx e Δy : $M\Delta x + N\Delta y$, que se designa así: $dz = M\Delta x + N\Delta y$.

66

Diferenciabilidad

Ejemplo

Dada la función $z = f(x, y) = x^2 - xy + y$, y el punto (a, b) , calculemos su incremento, para incrementos Δx e Δy de a y b :

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b) = (a+\Delta x)^2 - (a+\Delta x)(b+\Delta y) + b + \Delta y - a^2 + ab - b = \\ &= a^2 + \Delta x^2 + 2a\Delta x - ab - a\Delta y - b\Delta x - \Delta x\Delta y + b + \Delta y - a^2 + ab - b = \\ &= (-b+2a)\Delta x + (-a+1)\Delta y + \Delta x\Delta x - \Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

Como $f_x(x, y) = 2x - y$, $f_y(x, y) = -x + 1 \Rightarrow f_x(a, b) = 2a - b$, $f_y(a, b) = -a + 1$,
luego $\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$, siendo $\varepsilon_1 = \Delta x$, y $\varepsilon_2 = -\Delta x$,
cumpliéndose que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Como consecuencia se cumple la definición de diferenciabilidad en el punto (a, b) , poniendo $M = f_x(a, b)$ y $N = f_y(a, b)$. Las relaciones obtenidas en el ejemplo, para M y N , son ciertas en general, aunque el procedimiento aquí empleado, de cálculo directo, se hace complicado en la mayoría de los casos.

67

Diferenciabilidad

Se verifica el siguiente:

Teorema

Si f es diferenciable en (a, b) y $dz = M\Delta x + N\Delta y$ es su diferencial en ese punto, entonces existen la derivadas parciales $z_x(a, b)$, $z_y(a, b)$ y coinciden con M y N respectivamente:

$$M = z_x(a, b), N = z_y(a, b)$$

Considerando la función $z = x \Rightarrow f_x = 1, f_y = 0 \Rightarrow dz = dx = 1\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$.

Análogamente si $z = y \Rightarrow f_x = 0, f_y = 1 \Rightarrow dz = dy = 1\Delta y \Rightarrow dy = \Delta y$.

Por lo tanto dz se puede escribir en la forma

$$dz = f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy$$

68

Diferenciabilidad

Como en el caso de una variable: diferenciabilidad implica continuidad.

Teorema

Si f es diferenciable en (a, b) entonces es continua en (a, b) .

Para una variable los conceptos de derivabilidad y diferenciabilidad son equivalentes.

Para más de una variable esto, en general no es cierto.

69

Diferenciabilidad

Ejemplo

La función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Estudiemos sus derivadas parciales en $(0, 0)$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0 + h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Luego las dos derivadas parciales existen y valen 0. ¿ Que ocurre para el resto de los puntos ?

Estudiemos la continuidad en $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Como los límites direccionales calculados dependen de m , se deduce que no existe el límite en el origen, luego la función no es continua en $(0, 0)$.

70

Diferenciabilidad

Ejemplo
La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en \mathbb{R}^2 (¿por qué?)

Estudiamos la diferenciabilidad en $(0, 0)$.

Calculamos las derivadas parciales

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{\sqrt{h^2+0}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{\sqrt{0+h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Si fuese diferenciable se tendría

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0, 0) = 0\Delta x + 0\Delta y + \varepsilon \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$$

Comprobemos si $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ es un infinitésimo

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \text{ este límite no existe (ya visto en un ejem-}$$

plo anterior, poniendo x, y en lugar de $\Delta x, \Delta y$).

Luego $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ no es un infinitésimo y , por lo tanto la función no es diferenciable.

71

Diferenciabilidad

Con estos ejemplos se ha comprobado que la continuidad o la existencia de derivadas parciales no son condiciones suficientes para la diferenciabilidad (aunque los resultados teóricos confirman que sí son condiciones necesarias).

Ejemplo

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiamos la existencia de derivadas parciales

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0 \log(h^2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h \log(h^2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Por existir las derivadas parciales es posible que sea diferenciable. Intentamos demostrarlo aplicando la definición. Despejando ε de la condición de diferenciabilidad

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = 0\Delta x + 0\Delta y + \varepsilon \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

72

Diferenciabilidad

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - 0\Delta x - 0\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y \log(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \text{ para}$$

ver si existe este límite calculemos los límites según las direcciones $\Delta y = m\Delta x$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m\Delta x^2 \log(\Delta x^2 + m^2 \Delta x^2)}{\sqrt{\Delta x^2 + m^2 \Delta x^2}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m\Delta x^2 \log(\Delta x^2 (1+m^2))}{|\Delta x| \sqrt{1+m^2}} = \\ &= \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| (\log \Delta x^2 + \log(1+m^2)) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| \log \Delta x^2 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| \log(1+m^2) \right] \end{aligned}$$

Se tiene evidentemente $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| \log(1+m^2) = 0$.

El otro límite es una indeterminación de la forma 0∞ , para calcularlo, y como interviene un valor absoluto, se debe estudiar, por separado, a la izquierda y a la derecha de 0.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} |\Delta x| \log \Delta x^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\log \Delta x^2}{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2\Delta x}{\Delta x^2}}{\frac{-1}{\Delta x^2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} -2\Delta x^2 = 0, \text{ análogamente se obten-}$$

dría el mismo resultado para $\Delta x \rightarrow 0^-$, luego los límites direccionales existen y valen todos 0, por tanto es posible que el límite que estudiamos valga 0.

73

Diferenciabilidad

Intentemos probarlo aplicando el criterio de la función mayorante, para lo cual pasamos a polares

$$\left| \frac{\Delta x \Delta y \log(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{\rho \cos \theta \rho \sin \theta \log(\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta))}{\rho} \right| = \left| \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta \log(\rho^2)}{\rho} \right|$$

$\leq \rho^2 |\log \rho|$, llamando $F(\rho) = \rho^2 |\log \rho|$, queda por probar que $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = 0$

$$2 \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho |\log \rho| = 0(-\infty) = -2 \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\log \rho}{\frac{1}{\rho}} = -2 \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{-1}{\rho^2}} = -2 \cdot 0 = 0.$$

Se ha probado que ε es un infinitésimo, por tanto la función estudiada es diferenciable en el origen y, como consecuencia continua en el mismo punto.

74

Condición suficiente de diferenciabilidad

El comprobar la diferenciabilidad de una función a partir de la definición es, en general, complicado, sin embargo existen condiciones suficientes que garantizan la diferenciabilidad y pueden simplificar el trabajo. La más usual la da el siguiente

Teorema

Sea $z = f(x, y)$ definida en un cierto entorno del punto (a, b) y, al menos una de sus derivadas parciales: z_x o z_y es continua en (a, b) , entonces la función es diferenciable en (a, b)

75

Condición suficiente de diferenciabilidad

Ejemplo.

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad en cualquier punto de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En el ejemplo anterior se comprobó que esta función es diferenciable en $(0, 0)$.

Para los puntos (x, y) distintos del $(0, 0)$, se pueden calcular las derivadas parciales utilizando las formulas de derivación para una variable, pues al fijar una variable resulta una función de una variable que es derivable por estar compuesta de funciones derivables.

$$f_x(x, y) = y \log(x^2 + y^2) + xy \frac{2x}{x^2 + y^2} = y \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$f_y(x, y) = x \log(x^2 + y^2) + xy \frac{2y}{x^2 + y^2} = x \log(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$

Estas derivadas parciales son continuas para cualquier $(x, y) \neq (0, 0)$, por estar compuestas de funciones continuas.

Concluimos que la función estudiada es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^2 y, por lo tanto continua en \mathbb{R}^2 .

76

Plano tangente y diferenciabilidad

Para una variable, la existencia de derivada en un punto, equivale a la existencia de recta tangente en el mismo punto.

Veremos que para dos variables, la diferenciabilidad en un punto, equivale a la existencia de plano tangente, a la superficie que representa la función, en el mismo punto.

En general, la existencia de derivadas parciales no garantiza la existencia de plano tangente.

Se tiene el siguiente resultado fundamental:

Teorema

La superficie $z = f(x, y)$ admite plano tangente en el punto $P(a, b, f(a, b))$ si y solo si la función f es diferenciable en el punto (a, b) , y en este caso su ecuación es

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

77

Plano tangente y diferenciabilidad

Supongamos ahora que f es diferenciable en el punto $P(a, b)$, y llamemos $x = a + \Delta x$, $y = b + \Delta y$, $c = f(a, b)$ por lo que debe verificarse, por definición de diferenciabilidad:

$$f(x, y) = c + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \varepsilon \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

El plano que tiene por ecuación $z = c + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$, tiene la propiedad de que la diferencia entre la “ z ” de la función y la “ z ” del plano es un infinitésimo de orden superior a $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, ya que se tiene

$$f(x, y) - (c + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)) = \varepsilon \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

luego $z(\text{de la función}) - z(\text{del plano}) = \varepsilon \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, además se cumple:

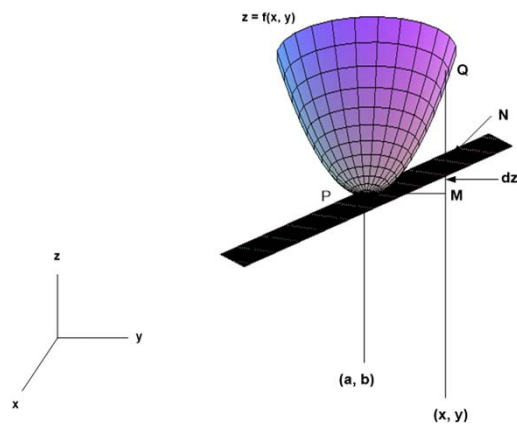
$$\frac{z(\text{de la función}) - z(\text{del plano})}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \varepsilon, \text{ siendo } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon = 0, \text{ con lo que se prueba lo afirmado anteriormente.}$$

mado anteriormente.

El plano considerado antes es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(a, b, f(a, b))$, y la condición que verifica se toma como definición de plano tangente a una superficie en un punto.

78

Interpretación geométrica de la diferencial



$$MN = z(\text{del plano}) - f(a, b) = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) = dz$$

$$MQ = dx$$

79

Regla de la cadena

Estudiemos ahora la regla de la cadena o la derivada de la función compuesta para funciones de dos variables.

Regla de la cadena para el caso: $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$.

Teorema

Sea $z = f(x, y)$ diferenciable en (x, y) . Si $x = g(t)$, $y = h(t)$, siendo g y h funciones derivables en t , entonces f es derivable en t , y su derivada es

$$z'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t).$$

Ejemplo

Siendo $z = xy^2 - x^2$, con $x = \cos t$, $y = \sin t$ verificamos el resultado anterior calculando $z'(t)$ de dos formas distintas: directamente sustituyendo x, y en función de t y, aplicando el teorema anterior:

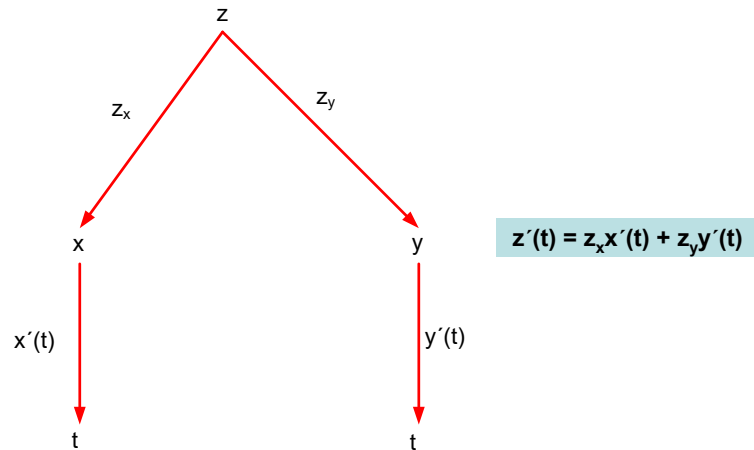
$$z = \cos t \sin^2 t - \cos^2 t \Rightarrow z' = -\sin t \sin^2 t + 2 \cos t \cos t \sin t + 2 \sin t \cos t = -\sin^3 t + 2 \cos^2 t \sin t + 2 \sin t \cos t$$

$$z'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = (y^2 - 2x)(-\sin t) + 2xy \cos t = (\sin^2 t - 2 \cos t)(-\sin t) + 2 \cos^2 t \sin t, \text{ que coincide con el resultado anterior.}$$

80

Regla de la cadena

$$z = f(x, y), x = g(t), y = h(t).$$



81

Regla de la cadena

Regla de la cadena para el caso: $z = f(x, y)$, $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$:

Teorema

Si f es diferenciable en (x, y) , existen las derivadas parciales x_u, x_v, y_u, y_v en (u, v) , entonces existen z_u, z_v en (u, v) y se verifica:

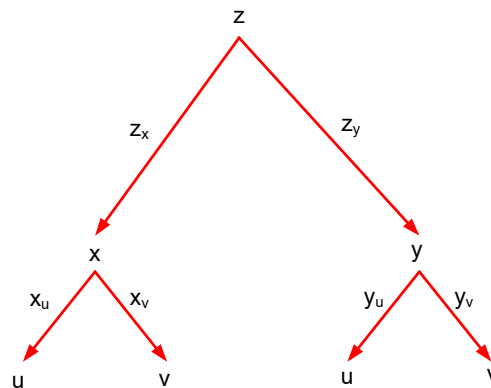
$$\begin{aligned} z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\ z_v &= z_x x_v + z_y y_v \end{aligned}$$

Para funciones de mas de dos variables se obtienen resultados análogos.

82

Regla de la cadena

$$z = f(x, y), x = g(u, v), y = h(u, v)$$



$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

83

Derivación en forma implícita

El modo de escribir la función de dos variables, hasta ahora, ha sido $z = f(x, y)$, y decimos que z está dada en forma explícita, es decir, despejada en función de x, y .

Otra forma, mas general, de definir z como función de x, y es $F(x, y, z) = 0$, que se llama forma implícita de definir z como función de x, y (la z no está despejada).

El pasar de la forma explícita a la implícita es inmediato:

$$z = f(x, y) \Rightarrow z - f(x, y) = 0, \text{ llamando } F(x, y, z) = z - f(x, y) \Rightarrow F(x, y, z) = 0$$

El pasar de la forma implícita a la explícita, en general, es mas complicado, y a veces, es imposible como se ve con el ejemplo $z^5 x^2 + z^3 y - \sin xy = 0$.

84

Derivación en forma implícita

Supongamos que z está definida implícitamente como función de x e y :
 $F(x, y, z) = 0$, considerando F como una función de tres variables: x, y, z , si aplicamos la regla de la cadena a la igualdad $F(x, y, z) = 0$, se obtiene:

derivando respecto de x :

$$F_x x_x + F_y y_x + F_z z_x = 0, \text{ siendo } x_x = 1, y_x = 0 \quad z_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

derivando respecto de y :

$$F_x x_y + F_y y_y + F_z z_y = 0, \text{ siendo } y_y = 1, x_y = 0 \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

Ejemplo

Siendo $z^3 \sin x + ze^{xy} - xy = 0$, obtener z_x, z_y aplicando el resultado anterior.
 En este caso $F(x, y, z) = z^3 \sin x + ze^{xy} - xy$, luego

$$F_x = z^3 \cos x + ze^{xy} - y, F_y = zxe^{xy} - x, F_z = 3z^2 \sin x + e^{xy}.$$

Por lo que sustituyendo queda:

$$z_x = \frac{-z^3 \cos x - ze^{xy} + y}{3z^2 \sin x + e^{xy}}, \quad z_y = \frac{-zxe^{xy} + x}{3z^2 \sin x + e^{xy}}$$

85

Derivación en forma implícita

Como otra aplicación de la derivación implícita, obtengamos la ecuación de plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(a, b, c)$ cuando esta viene dada en forma implícita $F(x, y, z) = 0$.

Se obtuvo que esta es:

$$z_x(a, b)(x-a) + z_y(a, b)(y-b) - (z-c) = 0$$

y siendo $z_x = -\frac{F_x}{F_z}, z_y = -\frac{F_y}{F_z}$ sustituyendo queda:

$$\begin{aligned} & \frac{-F_x(a, b, c)}{F_z(a, b, c)}(x-a) - \frac{F_y(a, b, c)}{F_z(a, b, c)}(y-b) - (z-c) = 0 \Rightarrow \\ & F_x(a, b, c)(x-a) + F_y(a, b, c)(y-b) + F_z(a, b, c)(z-c) = 0 \end{aligned}$$

Luego la recta normal en el punto $P(a, b, c)$ tiene como vector director $(F_x(a, b, c), F_y(a, b, c), F_z(a, b, c))$, por lo que su ecuación en forma paramétrica es

$$\left. \begin{aligned} x &= a + tF_x(a, b, c) \\ y &= b + tF_y(a, b, c) \\ z &= c + tF_z(a, b, c) \end{aligned} \right\}$$

86

Derivación en forma implícita

Ejemplo

Obtener la ecuación del plano tangente y de la normal a la superficie $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, en el punto $P(2, 2, 1)$.

En este caso es $F(x, y, z) = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8$, calculamos las derivadas parciales:

$$F_x = \log 2 \frac{1}{z} 2^{\frac{x}{z}}, \quad F_y = \log 2 \frac{1}{z} 2^{\frac{y}{z}}, \quad F_z = \log 2 \frac{x}{z^2} 2^{\frac{x}{z}} - \log 2 \frac{y}{z^2} 2^{\frac{y}{z}}.$$

Tomando valores en P :

$$F_x(2,2,1) = 4\log 2, \quad F_y(2,2,1) = 4\log 2, \quad F_z(2,2,1) = 8\log 2 - 8\log 2 = -16\log 2.$$

Como consecuencia la ecuación del plano tangente en P es

$$4\log 2(x-2) + 4\log 2(y-2) - 16\log 2(z-1) = 0 \Rightarrow x-2+y-2-4z+4 = 0 \Rightarrow x+y-4z = 0.$$

La ecuación de la recta normal es

$$\left. \begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 2+t \\ z &= 1-4t \end{aligned} \right\}$$

87

Derivada según un vector

Estudiemos ahora un concepto más general que el de derivada parcial: la derivada según un vector.

Al definir la derivada parcial en un punto una coordenada permanece fija y la otra varía siguiendo la dirección de uno de los ejes coordenados, con el nuevo concepto podrán variar las dos coordenadas siguiendo una dirección arbitraria.

Consideremos la función $z = f(x, y)$, cuyo dominio es una región abierta y $P(a, b)$ un punto de su dominio.

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$, un vector arbitrario no nulo, se define la derivada según el vector \vec{u} , en el punto (a, b) , de la función f , como el siguiente límite, si existe y es finito

$$D_{\vec{u}} f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + h(u_1, u_2)) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h}$$

Nótese que $Q(a + hu_1, b + hu_2)$ es un punto de la recta que pasa por el punto P , y tiene como dirección el vector \vec{u} .

88

Derivada según un vector

Ejemplo

Obtener la derivada de $z = f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$ en el punto $(1, 2)$ según el vector $(-1, 1)$.

$$D_{(-1,1)} f(1,2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1,2)+h(-1,1)) - f(1,2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h, 2+h) - f(1,2)}{h}$$

$$f(1-h, 2+h) = 1-h + 2(1-h)(2+h) - 3(2+h)^2 = \dots = -5h^2 - 15h - 7$$

$$f(1,2) = 1 + 4 - 12 = -7$$

$$\text{Sustituyendo queda } D_{(-1,1)} f(1,2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5h^2 - 15h - 7 + 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-5h - 15) = -15.$$

89

Derivada direccional

En el caso en que \vec{u} sea unitario, $|\vec{u}|=1$, la derivada se llama *direccional*, y tiene particular interés teórico.

Las derivadas parciales son casos particulares de derivadas direccionales:

f_x se obtiene tomando $\vec{u} = (1, 0)$.

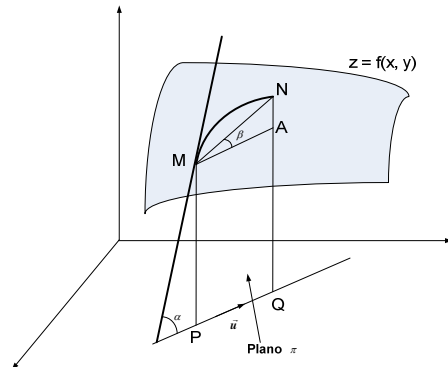
f_y se obtiene tomando $\vec{u} = (0, 1)$.

Para dar un significado geométrico a la derivada direccional, definimos primero el concepto de pendiente en un punto de una superficie según la dirección definida por un vector unitario \vec{u} .

90

Interpretación geométrica de la derivada direccional

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{AN}{AM} = \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{PQ} = \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{\sqrt{(a+tu_1 - a)^2 + (b+tu_2 - b)^2}} = \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{\sqrt{t^2(u_1^2 + u_2^2)}} = \\ &= \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{t} \end{aligned}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = D_{\vec{u}} f(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta$$

91

Interpretación geométrica de la derivada direccional

Consideremos la superficie $z = f(x, y)$, $P(a, b)$ un punto del dominio de f y \vec{u} un vector unitario; tomemos un plano vertical \square que pase por P y sea paralelo a \vec{u} , que cortará a la superficie en una curva C , que contendrá al punto $M(a, b, f(a, b))$ cuya proyección sobre el plano OXY es P ; entonces definimos la pendiente en el punto M , según la dirección \vec{u} , como la pendiente de la curva C en M , es decir como la pendiente de la tangente a la curva en M según la dirección \vec{u} .

El plano \square corta al plano OXY según una recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + tu_1 \\ y &= b + tu_2 \end{aligned} \right\}$$

Si Q es un punto arbitrario de la recta r tendrá la forma $Q(a+tu_1, b+tu_2)$, que es la proyección del punto $N(a+tu_1, b+tu_2, f(a+tu_1, b+tu_2))$ de la superficie sobre el plano OXY . La recta MN es una secante a la curva C , cuya pendiente según la dirección \vec{u} es:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{PQ} &= \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{\sqrt{(a+tu_1 - a)^2 + (b+tu_2 - b)^2}} = \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{\sqrt{t^2(u_1^2 + u_2^2)}} = \\ &= \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{t} \end{aligned}$$

92

Interpretación geométrica de la derivada direccional

Cuando t tiende a 0, el punto N tiende al punto M , por lo que la secante tiende a la recta tangente en M , que tiene por pendiente, según la dirección \vec{u} :

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{t}$, que es precisamente la derivada direccional de la función f , en el punto $P(a, b)$, según el vector \vec{u} .

La expresión $\frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a, b)}{t}$ se puede interpretar como el cociente entre el incremento de la función f al pasar del punto P al punto Q , y la distancia entre dichos puntos; que también se suele expresar como la razón del cambio de la función respecto a la distancia entre los puntos; por este motivo a la derivada direccional se le llama también razón o ritmo instantáneo del cambio.

93

Derivada direccional

Si f es diferenciable en (a, b) existe una forma alternativa para calcular la derivada direccional, pues se verifica el:

Teorema

Si f es diferenciable en (a, b) y $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario cualquiera, entonces existe la derivada direccional en el punto (a, b) según el vector \vec{u} y se verifica

$$D_{\vec{u}} f(a, b) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2$$

El anterior teorema permite, si f es diferenciable, el cálculo de la derivada direccional a partir de las derivadas parciales.

94

Derivada direccional

Comprobemos el resultado anterior con un:

Ejemplo

Obtener la derivada direccional de $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ en el punto $(1, 0)$ según la dirección $(1, 1)$, aplicando la definición. Estudiar si es posible la aplicación del teorema anterior, aplicándolo en su caso.

Como el vector $(1, 1)$ no es unitario, hay que convertirlo en unitario conservando el sentido y la dirección, es decir, hay que dividirlo por su módulo: $|(1, 1)| =$

$$\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \text{obteniéndose } \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Apliquemos la definición

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(1,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\sqrt{\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2} - \log 1}{h} = \\ &= \dots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\sqrt{1+h^2+\sqrt{2}h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{2h+\sqrt{2}}{\sqrt{1+h^2+\sqrt{2}h}} : \sqrt{1+h^2+\sqrt{2}h} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+\sqrt{2}}{1+h^2+\sqrt{2}h} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

95

Derivada direccional

Las derivadas parciales de $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ son:

$$f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

que son continuas en $(1, 0)$, por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador en el punto; luego f es diferenciable en $(1, 0)$.

Se puede aplicar, por tanto, el teorema anterior:

$$D_{\vec{u}}f(1,0) = f_x(1,0) \frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(1,0) \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

96

Derivada direccional

Ejercicio

Estudiar la existencia de derivadas direccionales en el punto $(0, 0)$, en los casos:

$$\text{a) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

97

Derivada direccional

Vector gradiente

Según el teorema anterior, si f es diferenciable en (a, b) , tiene infinitas derivadas direccionales en (a, b) , es decir, una derivada direccional para cada vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$, y su valor es $D_{\vec{u}}f = f_x(a,b)u_1 + f_y(a,b)u_2$, que se puede escribir como un producto escalar de dos vectores:

$$D_{\vec{u}}f(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b)) \cdot (u_1, u_2).$$

Al vector cuyas componentes son las derivadas parciales de f en el punto (a, b) se le llama vector gradiente de f en (a, b) y se simboliza por $\vec{\nabla}f(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b))$.

Por lo tanto se verifica el siguiente:

Teorema

Si f es diferenciable en (x, y) , y $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario cualquiera, entonces

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \vec{\nabla}f(x,y) \cdot \vec{u}$$

98

Derivada direccional

Fijando un punto (x, y) , y haciendo variar el vector unitario \vec{u} , se obtienen valores distintos para la derivada direccional, verificándose el siguiente

Teorema

Si f es una función, diferenciable en (a, b) , entonces:

- 1) La derivada direccional (también llamada velocidad o ritmo de cambio) de f en (a, b) , toma el valor máximo en la dirección del gradiente, siendo su valor $|\vec{\nabla}f(a, b)|$, y el vector $\vec{u} = \frac{\vec{\nabla}f(a, b)}{|\vec{\nabla}f(a, b)|}$.
- 2) La derivada direccional (también llamada velocidad o ritmo de cambio) de f en (a, b) , toma el valor mínimo en la dirección opuesta a la del gradiente, siendo su valor $-|\vec{\nabla}f(a, b)|$, y el vector $\vec{u} = \frac{-\vec{\nabla}f(a, b)}{|\vec{\nabla}f(a, b)|}$.

La demostración se basa en la expresión del producto escalar de dos vectores como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman, y se propone como ejercicio.

99

Derivada direccional

Ejemplo

Obtener las direcciones de máximo ritmo de crecimiento y de decrecimiento, y sus valores respectivos, para la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$, en el punto $P(1, 2)$.

Calculemos el gradiente en el punto P :

$$f_x = 2x, f_y = 2y \Rightarrow \vec{\nabla}f(1, 2) = (f_x(1, 2), f_y(1, 2)) = (2, 4)$$

Lo que se pide son las direcciones donde la derivada direccional toma los valores máximos o mínimos.

Luego para el valor máximo se tiene

$$\vec{u} = \frac{\vec{\nabla}f(1, 2)}{|\vec{\nabla}f(1, 2)|} = \frac{(2, 4)}{|(2, 4)|} = \frac{(2, 4)}{\sqrt{20}} = \left(\frac{2}{2\sqrt{5}}, \frac{4}{2\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \text{ siendo el valor máximo}$$

en esta dirección $|\vec{\nabla}f(1, 2)| = |(2, 4)| = 2\sqrt{5}$.

La dirección de mayor ritmo de decrecimiento será la opuesta, es decir

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \text{ siendo su valor } -2\sqrt{5}.$$

100

Fórmula de Taylor para funciones de dos variables

Estudiemos ahora la fórmula de Taylor para funciones de dos variables.

Se verifica el siguiente

Teorema

Sea $z = f(x, y)$ definida en un entorno de $P(a, b)$, con derivadas parciales continuas hasta el orden n en el mismo entorno y, existiendo todas las derivadas parciales de orden $n+1$ en dicho entorno. Entonces $f(x, y)$ se puede escribir en la forma

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y), \text{ (fórmula de Taylor)}$$

siendo $P_n(x, y)$ un polinomio de grado n en $(x-a)$ e $(y-b)$. $R_n(x, y)$ representa un infinitésimo de orden superior a $(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})^n$ cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$.

La expresión concreta de $P_n(x, y)$ es

$$P_n(x, y) = f(a, b) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(a, b)$$

donde las potencias se entienden de manera simbólica, es decir, al actuar el exponente sobre los símbolos de derivada parcial representarán derivación sucesiva, y al actuar sobre $(x-a)$ o $(y-b)$ representarán potencias.

101

Fórmula de Taylor para funciones de dos variables

Aclaremos esto obteniendo $P_n(x, y)$ para algunos valores de n :

$$n = 1, P_1(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b)$$

$$n = 2, P_2(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b) + \frac{1}{2}((x-a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f_{yy}(a, b))$$

$$n = 3, P_3(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b) + \frac{1}{2}((x-a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f_{yy}(a, b)) + \frac{1}{6}((x-a)^3 f_{xxx}(a, b) + 3(x-a)^2(y-b)f_{xxy}(a, b) + 3(x-a)(y-b)^2 f_{xyy}(a, b) + (y-b)^3 f_{yyy}(a, b)).$$

$P_n(x, y)$ recibe el nombre de polinomio de Taylor de la función f , de grado n , en el punto (a, b) .

Cuando $a=b=0$, la fórmula de Taylor se llama de McLaurin.

102

Fórmula de Taylor para funciones de dos variables

Ejemplo

Obtener la fórmula de McLaurin de orden dos para la función $f(x, y) = e^x \cos y$. En este caso $a = b = 0$. Necesitamos calcular las derivadas parciales primeras y segundas:

$f_x(x, y) = e^x \cos y$, $f_y(x, y) = -e^x \sin y$, $f_{xx}(x, y) = e^x \cos y$, $f_{yy}(x, y) = -e^x \cos y$, $f_{xy}(x, y) = -e^x \sin y$. Sus valores en el punto $(0, 0)$ son:
 $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = 1$, $f_{yy}(0, 0) = -1$, $f_{xy}(0, 0) = 0$, $f(0, 0) = 1$.
 Por lo tanto

$$e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + R_2(x, y)$$

donde $R_2(x, y)$ es un infinitésimo de orden superior a $(\sqrt{x^2 + y^2})^2$, para $(x, y) \rightarrow (a, b)$.

103

Fórmula de Taylor para funciones de dos variables

Ejemplo

Obtener el desarrollo de Taylor de orden dos de la función $f(x, y) = y^x$, en un entorno del punto $(1, 1)$.

Calculemos las derivadas parciales de primer y segundo orden.

$$f_x(x, y) = y^x \ln y, f_y(x, y) = xy^{x-1}, f_{xx}(x, y) = \ln y y^x \ln y = y^x \ln^2 y, f_{yy}(x, y) = x(x-1)y^{x-2}$$

$$f_{xy}(x, y) = xy^{x-1} \ln y + y^x \frac{1}{y} = xy^{x-1} \ln y + y^{x-1} = y^{x-1}(x \ln y + 1)$$

Sus valores en el punto $(1, 1)$ son

$$f_x(1, 1) = 0, f_y(1, 1) = 1, f_{xx}(1, 1) = 0, f_{yy}(1, 1) = 0, f_{xy}(1, 1) = 1. \text{ Además } f(1, 1) = 1.$$

Luego se tiene

$$y^x = 1 + (y-1) + \frac{1}{2} 2(x-1)(y-1) + R_2(x, y) \Rightarrow$$

$$y^x = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + R_2(x, y)$$

Donde $R_2(x, y)$ es un infinitésimo de orden superior a $(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2})^2$

104

Referencias

- José N. Narro. “Introducción al Cálculo Infinitesimal”.

105