Interpolación y aproximación polinomial

Definición

Un polinomio de grado n es una expresión de la forma:

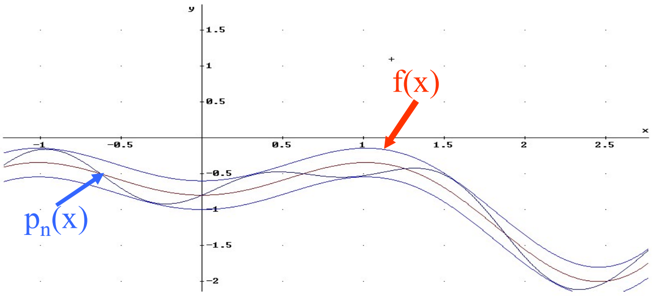
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Donde $a_n <> 0$

Teorema (teorema de aproximación de Weierstrass)

Suponga que f está definida y es continua en $[a, b]$. Para $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P definido en $[a, b]$, con la propiedad de que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, para toda x en $[a, b]$

Teorema de Weierstrass



$$\left|f(x) - p_n(x)\right| < \varepsilon \;\forall\; x \quad [a, b]$$

Si la función f(x) que deseamos aproximar, tiene la propiedad de ser ***continua en un intervalo finito***, puede ser aproximada convenientemente con un ***polinomio***.

A fin de elegir correctamente S_n, debe tenerse en cuenta la información que se posea sobre f(x). Como vimos, si f(x) es continua en un intervalo finito aproximamos con un polinomio porque este también es continuo en un intervalo finito.

Criterios de aproximación

La base del problema de aproximación es el ***criterio*** que debe usarse **para determinar las constantes en**

$$f(x) \qquad p_n(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \ldots + a_n g_n(x)$$

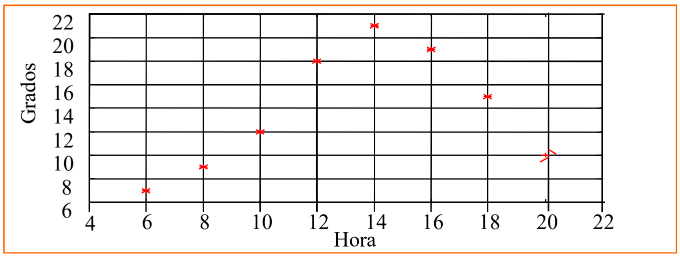
i.e., que condiciones se impone a la función aproximante en relación a la función que se desea aproximar**. Se debe decidir como aproximar f(x).**

9/11/18 4

Un problema de interpolación

- Evolución de la temperatura diurna

Hora	6	8	10	12	14	16	18	20
Grados	7	9	12	18	21	19	15	10



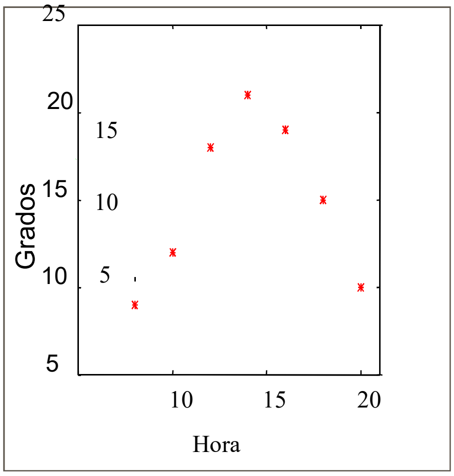
Interpolación lineal

Recta que pasa por los puntos (x_0,y_0) y (x_1,y_1)

$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

$$a_0 + a_1x_0 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 = y_1$$

$$a_0 + 12a_1 = 18$$
$$a_0 + 14a_1 = 21$$

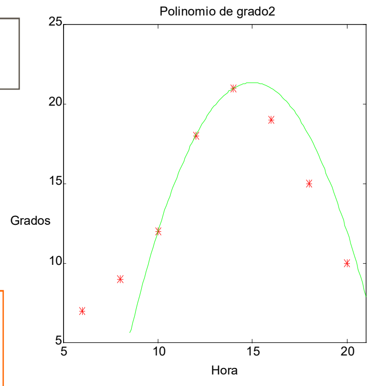


Interpolación cuadrática

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 &= y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 &= y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 12 & 144 \\ 1 & 14 & 196 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$




```
X=10:2:14
Y=[12 18 21]'
A=vander(X)
cond(A)
p=A\Y
```

```
polyval(p,X)
x=5:0.1:22;
y=polyval(p,x);
plot(x,y)
```

Forma normal del polinomio de interpolación

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Dados n+1 puntos de abscisas distintas $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$, existe un único polinomio de grado no superior a n tal que
  $P(x_i) = y_i, \quad i=1,2,\ldots,n$

Orden de contacto

Si f y g son funciones derivables hasta el orden n en un entorno del punto a, entonces:

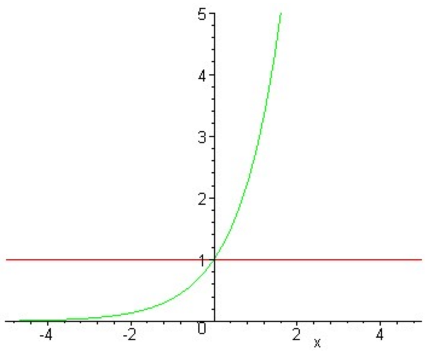
1) **Si f(a) = g(a) se dice que f y g tienen un contacto de orden 0 en el punto a.**

1) **Si f(a) = g(a), f´(a) = g´(a) se dice que f y g tienen un contacto de orden 1 en el punto a.**

1) **Si f(a) = g(a), f´(a) = g´(a), f´´(a) = g´´(a) se dice que f y g tienen un contacto de orden 2 en el punto a.**

4) **En general, se dice que f y g tienen un contacto de orden n si f(a) = g(a), f´(a) = g´(a), …$f^{n)}$(a) = $g^{n)}$(a).**

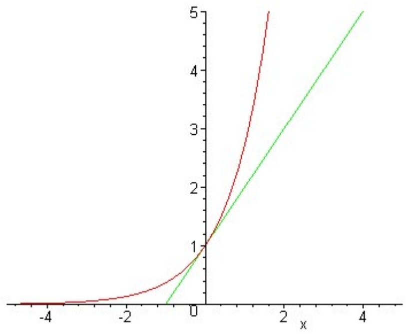
Orden de contacto



$f(x) = e^x$ y $T_0(x) = 1$,tienen un contacto de orden cero el punto P(0, 1).

$f(0) = T_0(0) = 1$

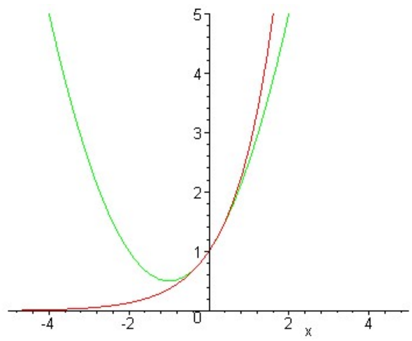
• Orden de contacto



- $f(x) = e^x$ y $T_1(x) = 1+x$,tienen
- un contacto de orden uno
- el punto P(0, 1).

- $f(0) = T_1(0) =1$
- $f´(0) = T_1´(0) = 1$

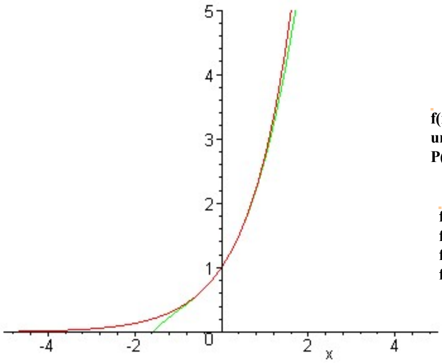
Orden de contacto



$f(x) = e^x$ y $T_2(x) = 1+x+x^2/2$,
tienen un contacto de orden dos
en el punto P(0, 1)

$f(0) = T_2(0) = 1$
$f´(0) = T_2´(0) = 1$
$f´´(0) = T_2´´(0) =1$

Orden de contacto

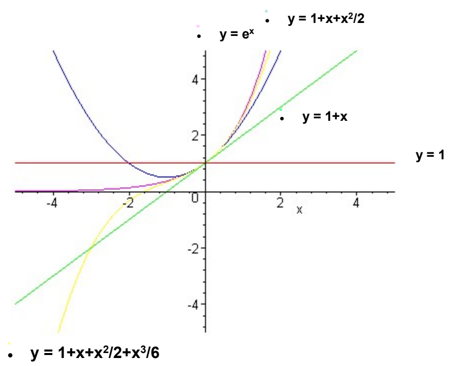


$f(x) = e^x$ y $T_3(x) = 1+x+x^2/2+x^3/6$, tienen un contacto de orden tres en el punto P(0, 1)

$f(0) = T_3(0) = 1$
$f'(0) = T_3'(0) = 1$
$f''(0) = T_3''(0) = 1$
$f'''(0) = T_3'''(0) = 1$

Orden de contacto

- Representamos conjuntamente las funciones anteriores:



• Polinomios de Taylor

Concretemos los conceptos:

Si f es una función n veces derivable en $a \in \mathbb{R}$, entonces llamamos polinomio de Taylor de f, de orden n (o grado n) y en el punto a, que denotamos por $T_n(f,a)(x)$ (o bien $T_n(x)$), al polinomio

$$T_n(f,a)(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

<u>Teorema</u>

Si f admite polinomio de Taylor de grado n en el punto a entonces:

$$T_n(a)=f(a),\ T_n'(a)=f'(a),\ T_n''(a)=f''(a),\ldots,T_n^{n)}(a)=f^{n)}(a).$$

Por tanto f y $T_n(x)$ tienen un contacto de orden n en el punto a.

Al sustituir la función f por su polinomio de Taylor se comete un error, que en valor absoluto, viene dado por $|f(x)-T_n(x)|$.

Llamamos resto o termino complementario a la diferencia $f(x)-T_n(x)$, que simbolizamos por $R_n(f,a)(x)$, o bien $R_n(x)$, luego

$$R_n(f,a)(x) = f(x)-T_n(x)$$

• Teorema de Taylor

<u>Teorema</u>

El resto $R_n(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $(x-a)^n$, en x = a, es decir

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n}=0$$

El resultado anterior se indica simbólicamente así: $R_n(x)=o((x-a)^n)$.

<u>Teorema de Taylor (Fórmula de Taylor)</u>

Si las funciones $f, f', f'', \ldots, f^{n+1}$ están definidas en [a, x], entonces existe $t \in (a, x)$ tal que

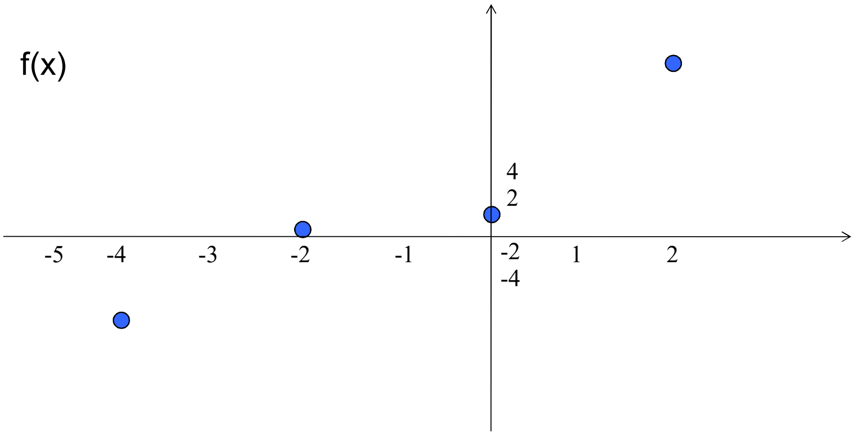
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1)}.$$

A esta expresión se la conoce como fórmula o desarrollo limitado de Taylor en el punto a.

Luego en este caso $R_n(x)=\frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, que se conoce como resto en forma de Lagrange. Como el número t no está determinado, $R_n(x)$ tampoco lo está, aún así, esta

expresión del resto es útil en muchas ocasiones para acotar el error cometido al considerar en lugar de la función su polinomio de Taylor.

Interpolación polinómica



f(x) es la función a aproximar. SI bien suponemos que existe, solo la conocemos discretamente, esto es, algunos puntos p.e. una muestra de 4 puntos)

Interpolación polinómica

Ahora, supongamos que ***solo*** conocemos de f(x) cuatro puntos (que serán nuestros *datos)*:

i	x_i	$f(x_i)$	=	$p(x_i)$
0	-4	-7.38		-7.38
1	-2	0.52		0.52
2	0	2		2
3	2	14.52		14.52

$$p_3(x)=0.36375\,x^3+1.38\,x^2+2.045x+2$$

Interpolación polinómica

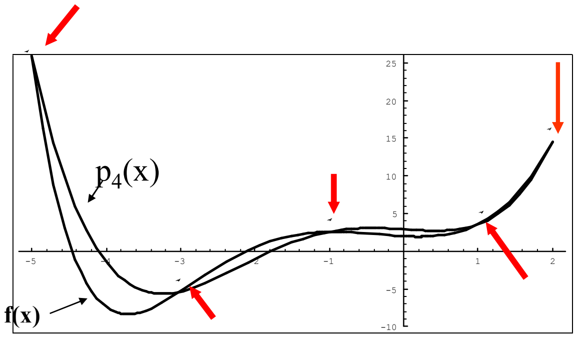
i	x_i	$f(x_i)$	=	$p(x_i)$
0	-4	-7.38		-7.38
1	-2	0.52		0.52
2	0	2		2
3	2	14.52		14.52

Vemos que la función y el polinomio coinciden en los puntos datos -4 , -2 , 0 , y 2

Interpolación polinómica

Ahora, tomamos 5 puntos y hacemos pasar el polinomio de grado 4 :

i	x_i	$f(x_i)$	$p_3(x_i)$
0	**-5**	**25.92**	**25.92**
1	**-3**	**-5.36**	**-5.36**
2	**-1**	**2.58**	**2.58**
3	**1**	**3.59**	**3.59**
4	**2**	**14.52**	**14.52**



$$p_4\left(x\right)=\frac{43903}{168000}x^4+\frac{189769}{168000}x^3-\frac{2179}{24000}x^2-\frac{104929}{168000}x+\frac{16321}{5600}$$

Interpolación polinómica

Para calcular los polinomios interpolantes se ha usado el criterio: ***n+1 puntos, hacemos coincidir los valores de la función aproximante ($p_n(x)$) y aproximada (f(x)) en dichos valores de x.***

$$f\left(x_i\right)=p_n\left(x_i\right) \text{ i=0,1,2,....}n$$

Para encontrar pn(x) debemos *calcular los coeficientes del polinomio* :

$$p_n\left(x\right)=a_0+a_1\text{x}+a_2x^2+.\ .\ .\ .\ .\ .\ +a_nx^n$$

El grado del polinomio interpolador siempre es menor o igual a n cuando tenemos (n+1) puntos

Interpolacion polinomica

Una forma de estimarlos es hacer valer directamente el criterio. Como ejemplo, veamos el p_3(x), recientemente visto. Recordemos los valores de los puntos por donde queremos hacerlo pasar, luego planteamos las igualdades:

$$f\left(\text{-4}\right) \square -7.38=p_3\left(-4\right)=a_0+a_1\left(\text{-4}\right)+a_2$$

$$f\left(\text{-2}\right)=0.52=p_3\left(-2\right)=a_0+a_1\left(\text{-2}\right)+a_2$$

$$f\left(0\right)=2=p_3\left(0\right)=a_0+a_1\left(0\right)+a_2$$

$$f\left(2\right)=14.52=p_3\left(2\right)=a_0+a_1\left(2\right)+a_2$$

Interpolación polinómica

La solución de este sistema son los coeficientes del polinomio que buscamos:

$a_0=2$; $a_1=2.045$; $a_2=1.38$; $a_3=0.36375$, por lo tanto nos queda el polinomio ya visto:

$$p_3(x) = 0.36375\,x^3 + 1.38\,x^2 + 2.045x + 2$$

Si n es grande este sistema de ecuaciones se transforma en mal condicionado!!!!
Por lo tanto no es buen camino para hallar los valores a_i.

Unicidad del polinomio interpolador

Si disponemos de n+1 puntos de la función f(x) $(x_i, f(x_i))$, i=0,1,.,,,n, el polinomio interpolador que pasa por ellos es UNICO.

Demostración (por el absurdo)

Supongamos que hay **dos** polinomios interpoladores que pasan por los n+1 puntos.
Entonces: $\mathbf{d(x) = p_n(x) - q_n(x)}$ donde d(x) es un polinomio, como mucho, de grado n.

Si $\mathbf{p_n(x) = q_n(x)}$ en los n+1 puntos entonces $\mathbf{d(x) = 0}$ en esos puntos. Entonces:

$\mathbf{p_n(x_i) = q_n(x_i) \Rightarrow d_n(x_i) = 0\ ,\ i=0,1,2,\ldots,n}$

Estamos diciendo que un polinomio de grado n, como máximo, tiene (n+1) raices distintas. Esto es un imposible, a menos que d(x) sea el polinomio nulo.

Y si esto es cierto, entonces $p_n(x)$ es igual a $q_n(x)$.

Formas de encontrar el polinomio interpolante:

Definimos

$$A(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Notar que todos los x_i ,i=0,1,2,....,n son ceros de este polinomio.

Usaremos la siguiente función:

$$A_k(x)=(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots\ldots(x-x_n)=\prod (x-x_i)$$

- 9/11/18 25

Desarrollo en series de Taylor

Sea $f(x) = e^x$

Desarrollando en serie de Taylor alrededor de $x = 0$

$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = 1 + x$ $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$

$P_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ $P_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$

$P_5(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120$

Valores de e^x

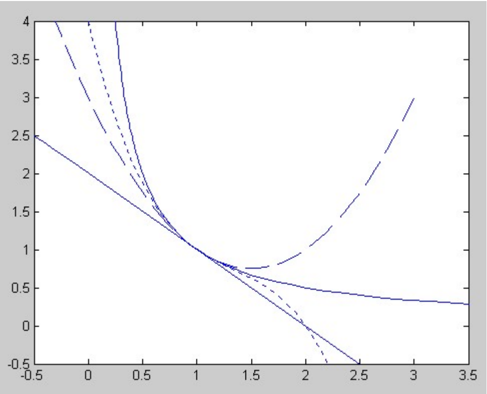
Valores de las aproximaciones de e^x con polinomios de Taylor

x	p0(x)	p1(x)	p2(x)	p3(x)	p4(x)	p5(x)	exp(x)
-2.0	1.00000	-1.00000	1.00000	-0.33333	0.33333	0.06667	0.13534
-1.5	1.00000	-0.50000	0.62500	0.06250	0.27344	0.21016	0.22313
-1.0	1.00000	0.00000	0.50000	0.33333	0.37500	0.36667	0.36788
-0.5	1.00000	0.50000	0.62500	0.60417	0.60677	0.60651	0.60653
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.5	1.00000	1.50000	1.62500	1.64583	1.64844	1.64870	1.64872
1.0	1.00000	2.00000	2.50000	2.66667	2.70833	2.71667	2.71828
1.5	1.00000	2.50000	3.62500	4.18750	4.39844	4.46172	4.48169
2.0	1.00000	3.00000	5.00000	6.33333	7.00000	7.26667	7.38906

Expansión de Taylor para $1/x$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
Pn(3)	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85



Interpolación y polinomio de Lagrange

Se trata de encontrar un polinomio de grado n que pase por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ... $(x_n, f(x_n))$,

se construye un cociente $L_{n,k}(x_k)$ con la propiedad de que

$L_{n,k}(x_i) = 0$ cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k) = 1$

Se requiere entonces que el numerador contenga

$(x - x_0)\ (x - x_1)...\ (x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...\ (x - x_n)$

El denominador debe coincidir con el numerador cuando $x = x_k$.

Definición de los Coeficientes de Lagrange

$$L_k(x) = \frac{A_k(x)}{A_k(x_k)} = ¿$$

$$\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}$$

Notar que los coeficientes de Lagrange solo dependen de los nodos.

Además tenemos que:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0\ ; i \neq k \\ 1\ ; i = k \end{cases}$$

9/11/18 30

Polinomio interpolador de Lagrange

Teorema

Si $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, son n+1 números distintos y si f es una función cuyos valores están dados en esos números, entonces existe un polinomio de grado a lo más n, con la propiedad de que $f(x_k) = P(x_k)$ para cada $k = 0, 1, 2, \ldots n$

Este polinomio está dado por

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \quad + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

Para nodos (x_i):

$$p_n(x) = \sum L_k(x)\, f(x_k) = \sum \left[\prod \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \right] y_k$$

donde se cumple el criterio de interpolación

$$f(x_i) = p_n(x_i) \quad i=0\ldots,n$$

9/11/18 32

Ejemplo para encontrar el polinomio de Lagrange

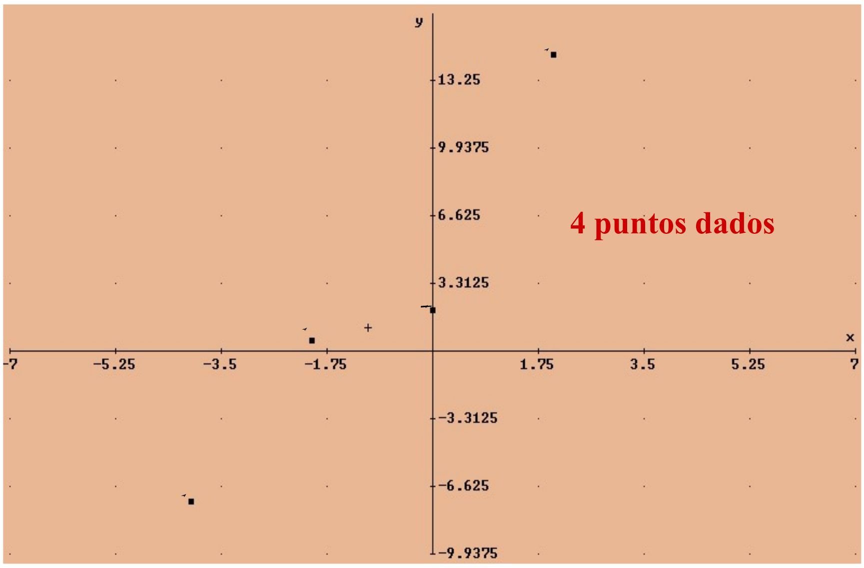
i	x_i	$f(x_i)$
0	-4	-7.38
1	-2	0.52
2	0	2
3	2	14.52

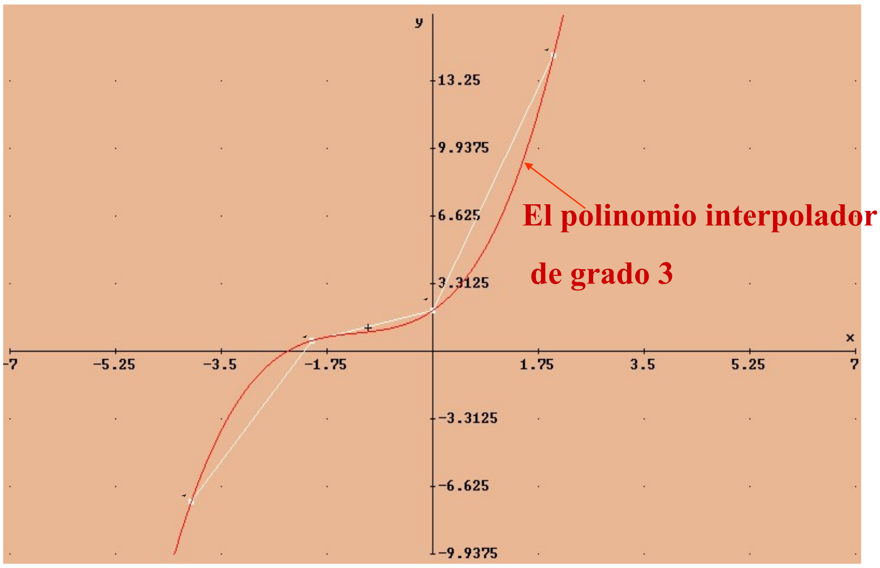
Haremos pasar el único polinomio interpolador por estos valores funcionales

$$p_n(x)=\frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(-4+2)(-4-0)(-4-2)}(-7.38)+\frac{(x+4)(x-0)(x-2)}{(-2+4)(-2-0)(-2-2)}(0.52)+¿$$

$$+\frac{(x+4)(x+2)(x-2)}{(0+4)(0+2)(0-2)}2+\frac{(x+4)(x+2)(x-0)}{(2+4)(2+2)(2-0)}14.52=¿$$

$$=0.36375\ x^3+1.38\ x^2+2.045\ x+2$$





9/11/18 35

Aproximación a 1/x con interpoladores de Lagrange

Usaremos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 4$, para obtener un polinomio de grado 2 para 1/x. $f(x_0) = 0.5$, $f(x_1)= 0.4$ y $f(x_2) = 0.25$.

Los polinomios de Lagrange son:

$$L_{n,0}(x)=\frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-0.5)(2-4)}=(x-6.5)x+10$$

$$L_{n,1}(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)}=\frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$L_{n,2}(x)=\frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)}=\frac{(x+4.5)x+5}{3}$$

$P(x) = 0.5*((x-6.5)x+10)+0.4*((-4x+24)x-32)/3+ 0.25*((x + 4.5)x+5)/3$

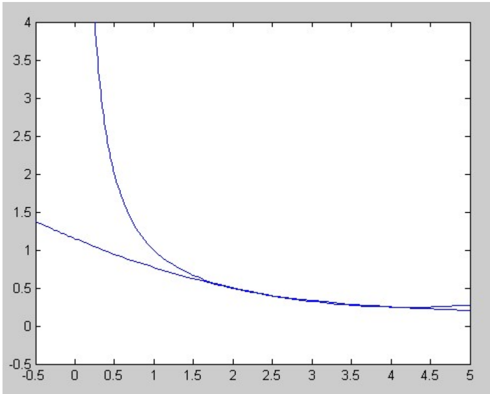
$P(x) = (0.05x - 0.425)x + 1.15 = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$

$f(3) = P(3) = 0.325$

Aproximación a 1/x con interpolantes de Lagrange

$P(x) = (0.05x - 0.425)x + 1.15$

$f(3) = P(3) = 0.325$



El error en la interpolación de Lagrange

El error en la interpolación de Lagrange puede calcularse con

$$\left|f(x_0) - P(x)\right| \le \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) L (x - x_n)$$

$$f[x_0, x_1, L, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(h)}{(n+1)!}$$

Interpolación Inversa

Tabla de valores de $f(x) = 1/x$.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429

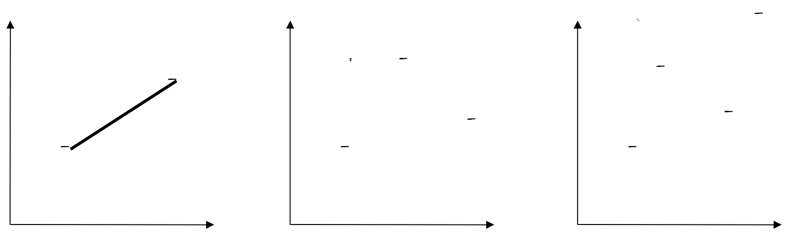
Se desea conocer el valor de x tal que $f(x) = 0.3$.

El problema se resuelve definiendo un polinomio de interpolación de grado 2 con los puntos (2, 0.5), (3, 0.3333) y (4, 0.25) y resolviendo la ecuación: $f(x) = 0.3 = 1.08333 - 0.375x + 0.041667x^2$

Lo que da $x = 5.704158$ y $x = 3.295842$, el valor real es 3.333.

Interpolación polinomial de Newton

Revisaremos solo algunos casos: lineal, de segundo grado y de tercer grado.



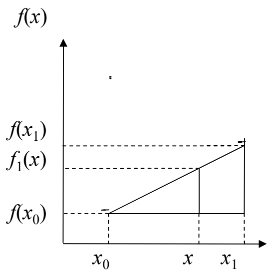
Interpolación lineal

Utilizando triángulos semejantes

$$\frac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Reordenando

$$f_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$



Ejemplo

Estimar ln 2 mediante interpolación lineal si ln1 = 0 y ln 6 = 1.791759 y ln 4 = 1.386294

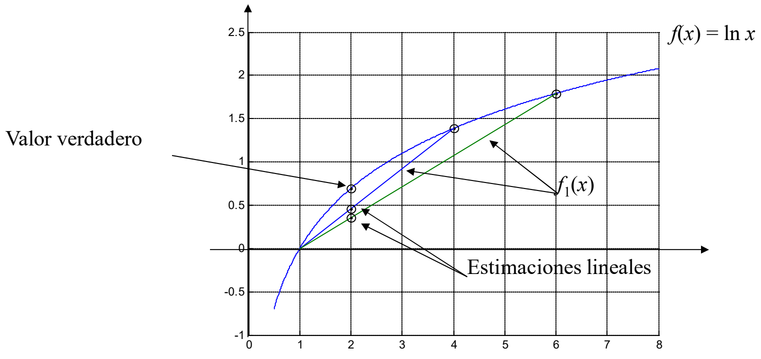
$$f_1(2)=\ln 1+\frac{1.791759-0}{6-1}(2-1)=0.3583519$$

$$f_1(2)=\ln 1+\frac{1.386294-0}{4-1}(2-1)=0.4620981$$

$$f_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

Valor real ln 2 = 0.6931472

Error relativo porcentual = 33.3%



Interpolación cuadrática

Polinomio cuadrático

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \qquad (1)$$

simplificado

$$f_2(x) = b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0x_1 - b_2xx_0 - b_2xx_1$$

Podemos escribirlo como

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Donde

$$a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1,\ a_1 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1,\ a_2 = b_2$$

Podemos evaluar b_0, b_1 y b_2 sustituyendo x_0, x_1 y x_2 en la ecuación (1), se obtiene

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

ejemplo 2

Calculemos ln 2 con ln 4 y ln 6, los punto que se conocen son:

$x_0 = 1$ $\quad f(x_0) = 0$

$x_1 = 4$ $\quad f(x_0) = 1.386294$

$x_0 = 6$ $\quad f(x_0) = 1.791759$

Aplicando las ecs. anteriores

$b_0 = 0$

$b_1 = (1.386294 - 0)/(4 - 1) = 0.4620981$

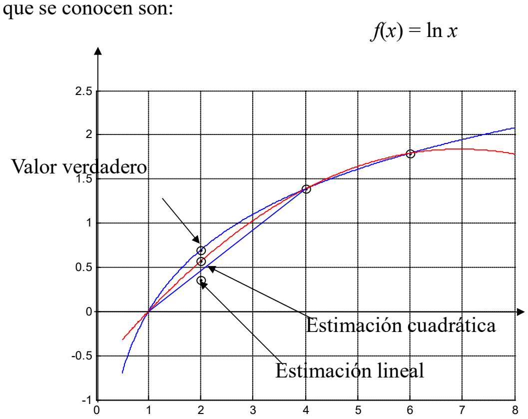
$b_2 = ((1.791759 - 1.386294)$

$/(6 - 4) - 0.4620981)/(6 - 1)$

$= - 0.0518731$

El polinomio es

$f_2(x) = 0.4620981(x - 1) - 0.0518731(x - 1)(x - 4)$



$f_2(2) = 0.5658444$

Valor real ln 2 = 0.6931472

Error relativo porcentual = 18.4%

Forma general

Polinomio general

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + ... + b_n(x - x_0)(x - x_1)... (x - x_{n-1})$$

Los coeficientes se calculan con

$b_0 = f(x_0)$

$b_1 = f[x_1, x_0]$

$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$

$b_n = f[,x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0]$

Donde los paréntesis cuadrados se denominan *diferencias divididas finitas*.

La n-ésima diferencia dividida finita es:

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$$

Se conoce como *polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas*.

ejemplo 3

Calculemos ln 2 con ln 0, ln 4, ln 5 y ln 6, los punto que se conocen son:

$x_0 = 1$ $f(x_0) = 0$

$x_1 = 4$ $f(x_1) = 1.386294$

$x_2 = 6$ $f(x_3) = 1.791759$

$x_3 = 5$ $f(x_2) = 1.609438$

primeras diferencias

$f[x_1, x_0] = (1.386294 - 0)/(4 - 1) = 0.4602981$

$f[x_2, x_1] = (1.791759 - 1.386294)/(6 - 4) = 0.2027326$

$f[x_3, x_2] = (1.609438 - 1.791759)/(5 - 6) = 0.1823216$

Segundas diferencias

$f[x_2, x_1, x_0] = (0.2027326 - 0.4602981)/(6 - 1) = -0.05187311$

$f[x_3, x_2, x_1] = (0.1823216 - 0.2027326)/(5 - 4) = -0.02041100$

tercera diferencia

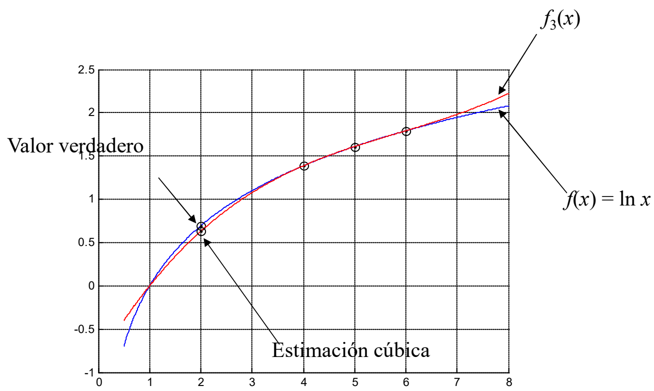
$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = (-0.02041100-(-0.05187311))/(5 - 1) = 0.007865529$

Polinomio

$f_3(x) = 0 + 0.4602981(x - 1) -0.05187311(x - 1)(x - 4) + 0.007865529(x - 1)(x - 4)(x - 6)$

Valor calculado con el polinomio $f_3(2) = 0.6287686$

Ejemplo 3 (cont.)



Estimación del error

Para estimar el error requerimos de un datos más (x_{n+1}).

La siguiente fórmula puede utilizarse para estimar el error.

$$Rn = f\,[,x_{n+1}, x_n, \ldots, x_1, x_0](x - x_0)\,(x - x_1)\ldots\,(x - x_n)$$

Polinomio Interpolador de Newton

La estrategia de este método consiste en mejorar la estimación introduciendo curvatura a la línea de unión de puntos.

Para generalizar, se utiliza el polinomio de grado n para diferencias divididas de newton como:

$f_n(x) = b_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})$.

Donde los coeficientes se obtienen utilizando los (n+1) puntos requeridos de la siguiente forma:

$$b_0 = f(x_0)$$
$$b_1 = f[x_1, x_0]$$
$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$
$$.$$
$$:$$
$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

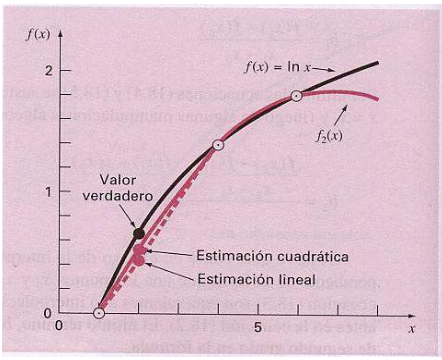
Donde las evaluaciones de la función colocadas entre paréntesis son diferencias divididas finitas. Por ejemplo:

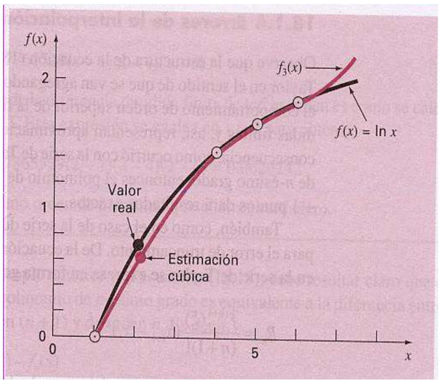
1. $$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

2. $$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

En general, la n-ésima diferencia dividida finita es:

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$





i	x_i	$f(x_i)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas
0	x_0	$f(x_0)$		
			$f[x_1,x_0]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	
1	x_1	$f(x_1)$		$f[x_2,x_1,x_0]=\dfrac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$
			$f[x_2,x_1]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	
2	x_2	$f(x_2)$		$f[x_3,x_2,x_1]=\dfrac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$
			$f[x_3,x_2]=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	
3	x_3	$f(x_3)$		$f[x_4,x_3,x_2]=\dfrac{f[x_4,x_3]-f[x_3,x_2]}{x_4-x_2}$
			$f[x_4,x_3]=\dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$	
4	x_4	$f(x_4)$		

Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
$f[x_2,x_1,x_0]=\dfrac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$	
	$f[x_3,x_2,x_1,x_0]=\dfrac{f[x_3,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_0]}{x_3-x_0}$
$f[x_3,x_2,x_1]=\dfrac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$	
	$f[x_4,x_3,x_2,x_1]=\dfrac{f[x_4,x_3,x_2]-f[x_3,x_2,x_1]}{x_4-x_1}$
$f[x_4,x_3,x_2]=\dfrac{f[x_4,x_3]-f[x_3,x_2]}{x_4-x_2}$	

Para concluir la secuencia anterior se llega a:

$$f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_4 x_3, x_2, x_1] - f[x_3, x_2, x_1, x_0]}{x_4 - x_0}$$

Ejemplo 1:

Usando la siguiente tabla de datos, calcúlese ln 2 con un polinomio de interpolación de Newton con diferencias divididas de tercer orden.

X	f(X)
X_0=1	0.000 0000
X_1=4	1.386 2944
X_2=6	1.791 7595
X_3=5	1.609 4379

Solución:

Primero debemos recordar que el polinomio con n = 3, es:

$$f_3(X) = b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1) + b_3(X - X_0)(X - X_1)(X - X_3)$$

Las primeras diferencias divididas del problema son:

$$f[X_1, X_0] = \frac{1.386\,2944 - 0}{4 - 1} = 0.462\,0981$$

$$f[X_2, X_1] = \frac{1.791\,7595 - 1.386\,2944}{6 - 4} = 0.202\,7326$$

$$f[X_3, X_2] = \frac{1.609\,4379 - 1.791\,7595}{5 - 6} = 0.182\,3216$$

Las segundas diferencias divididas son:

$$f[X_2,X_1,X_0]=\frac{f[X_2,X_1]-f[X_1,X_0]}{X_2-X_0}=\frac{0.202\,7326-0.462\,0981}{6-1}=-\,0.051\,8731$$

$$f[X_3,X_2,X_1]=\frac{f[X_3,X_2]-f[X_2,X_1]}{X_3-X_1}=-\,0.020\,4110$$

La tercera diferencia dividida es:

$$f[X_3,X_2,X_1,X_0]=\frac{f[X_3,X_2,X_1]-f[X_2,X_1,X_0]}{X_3-X_0}=0.007\,8655$$

i	xi	f (x_i)	Primera diferencia dividida	Segunda diferencia dividida	Tercera diferencia dividida
0	1.0	0.00000000			
			0.46209813		
1	4.0	1.3862944		-0.051873116	
			0.20273255		0.0078655415
2	6.0	1.7917595		-0.020410950	
			0.18232160		
3	5.0	1.6094379			

i	xi	f (x_i)	Primera diferencia dividida	Segunda diferencia dividida	Tercera diferencia dividida
0	1.0	0.00000000			
			0.46209813		
1	4.0	1.3862944		-0.051873116	
			0.20273255		0.0078655415
2	6.0	1.7917595		-0.020410950	
			0.18232160		
3	5.0	1.6094379			

Los resultados para $f(x_1, x_0)$, $f(x_2, x_1, x_0)$ y $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ representan los coeficientes b_1, b_2 y b_3 Junto con $b_0 = f(x_0) = 0.0$, la ecuación da:

$f_3(x) = 0 + 0.46209813 (x - 1) - 0.0518731 (x - 1) (x - 4) + 0.0078655415 (x - 1) (x - 4) (x - 6)$

Con la ecuación anterior se puede evaluar para x=2,
$f_3(2) = 0.62876869$, lo que representa un error del
$\varepsilon_a \% = 9.3\%$.

Ejemplo 2:

Usando la siguiente tabla de datos, calcúlese log 5 con un polinomio de interpolación de Newton de tercer grado:

X	f(X)
$X_0=4$	0.60206
$X_1=4.5$	0.6532125
$X_2=5.5$	0.7403627
$X_3=6$	0.7781513

Solución:

Nuevamente debemos recordar que el polinomio con n = 3, es:

$$f_3(X) = b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1) + b_3(X - X_0)(X - X_1)(X - X_2)$$

Las primeras diferencias divididas del problema son:

$$f[x_1, x_0] = f[4.5, 4] = \frac{f[4.5] - f[4]}{4.5 - 4} = 0.094385$$

$$f[x_2, x_1] = f[5.5, 4.5] = \frac{f[5.5] - f[4.5]}{5.5 - 4.5} = 0.0871502$$

$$f[x_3, x_2] = f[6, 5.5] = \frac{f[6] - f[5.5]}{6 - 5.5} = 0.0755772$$

A continuación se facilitará la tabla con las diferencias divididas

Las segundas diferencias divididas son:

$$f[X_2, X_1, X_0] = \frac{f[X_2, X_1] - f[X_1, X_0]}{X_2 - X_0} = -0.0048232$$

$$f[X_3, X_2, X_1] = \frac{f[X_3, X_2] - f[X_2, X_1]}{X_3 - X_1} = -0.00771533.$$

La tercera diferencia dividida es:

$$f[X_3, X_2, X_1, X_0] = \frac{f[X_3, X_2, X_1] - f[X_2, X_1, X_0]}{X_3 - X_0} = -0.001446065$$

i	xi	f (x_i)	Primera diferencia dividida	Segunda diferencia dividida	Tercera diferencia dividida
0	4	0.60602			
			0.094385		
1	4.5	0.6532125		- 0.0048232	
			0.0871502		-0.001446065
2	5.5	0.7403627		- 0.00771533	
			0.0755772		
3	6	0.7781513			

Los resultados para $f(x_1, x_0)$, $f(x_2, x_1, x_0)$ y $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ representan los coeficientes b_1, b_2 y b_3 Junto con $b_0 = f(x_0) = 0.0$, la ecuación da:

$f_3(x) = 0.60602 + 0.094385 (x - 4) - 0.0048232(x – 4) (x – 4.5)$
$-0.001446065 (x - 4) (x – 4.5) (x – 5.5)$

Con la ecuación anterior se puede evaluar para x=5,
$f_3(5) = 0.6983549163$, lo que representa un error del
$\varepsilon_a \% = 0.087999\%$.

Polinomio de interpolación basado en Diferencias Finitas Progresivas (Ordinarias)

- Se debe hallar una relación entre las diferencias finitas y divididas; se deja como ejercicio la demostración que:

$$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, \ldots x_k] = \frac{\Delta^k f}{k!h^k}}$$

- Reemplazando en el polinomio basado en diferencias divididas se tiene:

$$P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!h^1}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

Polinomio de interpolación basado en Diferencias Finitas Progresivas

- Teniendo en cuenta que los intervalos se tomarán igualmente espaciados (h=cte) para x, y haciendo el cambio de variable, se demuestra que:

$$s = \frac{x-x_0}{h}$$

$$P_n(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$P_n(s) = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i f_0 \binom{s}{i} P_n(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 P_n(s) = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i f_0 \binom{s}{i}$$

- Esta última forma se conoce como polinomio de interpolación de Newton Progresivo con cambio de escala.

Ejemplo

a) Aproximar los siguientes datos usando un polinomio basado en diferencias finitas:

X	2	3	4
Y	0	-1	0

b) Estime Y(2.5):

c) Calcule el error cometido, si estos datos se obtuvieron de la función Y=sen(pi*X/2)

Solución

Tabla de diferencias finitas:

X	Y	ΔY	Δ²Y
2	0		
		-1	
3	-1		2
		1	
4	0		

$$P(s) = Y_0 + s\Delta Y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 Y_0$$

$$P(s) = 0 + s(-1) + \frac{s(s-1)}{2!}(2)$$

$$P(s) = s^2 - 2s$$

$$X = 2.5$$

$$s = \frac{X - X_0}{h} = \frac{X-2}{1}$$

$$s = \frac{2.5-2}{1} = 0.5$$

$$P(s=0.5) = (0.5)^2 - 2(0.5) = -0.75$$

$$y(2.5) = sen\left(\frac{2.5\,\pi}{2}\right) = -0.7071$$

$$Error = 0.0429$$

Polinomio de interpolación basado en Diferencias Finitas Regresivas (Descendentes)

$$P_n(s) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \ldots + \frac{s(s+1)(s+2)+\ldots+(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

Teniendo en cuenta que : $s = \dfrac{x - x_n}{h}$

INTERPOLACION DE HERMITE

- Los polinomios ajustados a los valores de la función y de su derivada se llaman Polinomios de Interpolación de Hermite o Polinomios Osculantes.

  Representa una generalización de los polinomios de Taylor y de Lagrange.

  Su principal función es interpolar una función dada coincidiendo con ella en n+1 puntos y en sus m derivadas

  Aquí entra el polinomio de Hermite que interpola la función dada y coinciden en ella n+1 y en m puntos de la derivada primera

INTERPOLACION DE HERMITE

- Recurriremos al método de Hermite cuando:
  - Necesitemos efectuar operaciones o calcular una función en un punto pero tenemos funciones complicadas
  - En determinadas aplicaciones que cuenten con datos de una función y sus derivadas en una serie de puntos que requieran aumentar la aproximación en las proximidades de ciertos puntos

PROPIEDADES DEL POLINIMIO DE HERMITE

- Sea X0,…Xn ∈ [a,b] números distintos y m*i* ≥ 0 un entero no negativo asociado a Xi para i ∈ {0,…,n}. Supongamos que *f* ∈ C^m [a,b], donde m= max {m0,…,m*n*}. El polinomio que aproxima f es el polinomio *P* de menor grado que concuerda con la función f y con todas sus derivadas de orden ≤ m*i* en x*i* para cada *i* ∈ {0,…,n}:

  (xi)= p^k *(xi)=* f^k $0 \leq i \leq n$ $0 \leq k \leq mi$

GRADO DE POLINOMIO DE HERMITE

- El grado se determina por :

$$\deg(p) \le M = n + \sum_{i=0}^{n} \quad m1$$

Cuando m0=,...=mn= 1

Y un polinomio de grado n tiene m+1 coeficientes que pueden usarse para satisfacer estas condiciones

POLINOMIO DE HERMITE

- El polinomio de Hermite esta dado por

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\, \hat{H}_{n,j}(x),$$

donde

$$H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)]L_{n,j}^2(x)$$

y

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L_{n,j}^2(x).$$

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi),$$

para alguna ξ con $a < \xi < b$.

Referencias

- Equipo Docente. “Métodos numéricos para Ingeniería” UNMdP”
- José N. Narro. “Introducción al Cálculo”.
- Héctor Eduardo Medellín Anaya “Programación Numérica”.
- “Métodos Numéricos”

81