PEC 1. 20 de Noviembre de 2015

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Sean a y b enteros positivos coprimos. Entonces

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}.$$

c) Para cualesquiera enteros a, b y c, $mcd(a + cb, b) = mcd(a, b)$.

2.- *(*1,5 *ptos.)* Resolver la ecuación diofántica

$$30x + 70y + 42z + 105t = 1.$$

Probar que no existe ninguna solución (x, y, z, t) tal que $x \cdot y \cdot z \cdot t = 0$.

3.- *(*1,5 *ptos.)* En este problema asumimos, sin demostración, el siguiente resultado:
Proposición: Sea p un número primo y $M_p = 2^p - 1$ su correspondiente número de Mersenne. Entonces, todo factor primo q de M_p verifica

$$q \equiv 1 \ (mod\ p) \text{ y } q \equiv \pm 1 \ (mod\ 8).$$

Utilizar el resultado anterior para probar que $M_{13} = 8191$ es primo.

4.- *(*1,5 *ptos.)* Demostrar que si a es un entero coprimo con 210, $a^{12} - 1$ es divisible por 210.

5.- *(*1,5 *ptos.)* Construir un cuerpo con 125 elementos.

PEC 2. 13 de Enero de 2016

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0, y_0) tales que: 1) el límite de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) es igual a cero y 2) $g(x, y)$ está acotado en un entorno de (x_0, y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0$$

b) La matriz hessiana de la función $f(x, y) = 6x^3 - x^2y + y^2$ en el punto $(1, 0)$ es

$$d^2f(1,0) = \begin{pmatrix} 36 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $(1, 0)$ es mínimo relativo de f.

2.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-2) = -138, f'(-2) = -234, f(1) = 24, f'(1) = 72, f''(1) = 92, f'''(1) = 540.$$

3.- *(1,5 ptos.)* Consideremos la función $f(x, y) = (x^3 + 3y^2 + xy)e^{1-x^2-y^2}$.

a) Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $f(x, y)$ en el punto $(-1, 1)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

b) Calcular la derivada direccional de $f(x, y)$ en $(-1, 1)$ en la dirección determinada por el vector $\mathbf{v} = (2, 3)$.

4.- *(3 ptos.)* Sea la función $f(x, y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8$.

a) Encontrar y clasificar sus extremos relativos.

b) Determinar los puntos donde $f(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Matemáticas Avanzadas (Ing. Informática. Grupo Mañana) Curso 2015-2016

Examen Extraordinario. 20 de Junio de 2016

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Sea m un natural distinto de cero y a un entero positivo menor que m, $a < m$, no coprimo con m. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \equiv 0 \ (mod\ m)$.

c) Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0, y_0) tales que: 1) el límite de $f(x,y)$ en (x_0, y_0) es igual a cero y 2) $g(x,y)$ está acotado en un entorno de (x_0, y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0.$$

2.- *(2 ptos.)* Veintitrés viajeros hambientros se adentran en un bosque en el que encuentran 63 pilas iguales de plátanos y siete plátanos más sueltos, de tal forma que pueden dividirse todos los plátanos en partes iguales. ¿Cuántos plátanos había en cada pila? Encontrar TODAS las posibles respuestas a la pregunta anterior.

3.- *(2 ptos.)* Sea p un número primo mayor o igual que once y sea r un número natural entre uno y nueve ($1 \leq r \leq 9$). Consideremos la sucesión de números naturales (en base diez)

$$r, rr, rrr, rrrr, \ldots$$

Probar que p divide a infinitos términos de la sucesión.

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-2) = -138, f'(-2) = -234, f(1) = 24, f'(1) = 72, f''(1) = 92, f'''(1) = 540.$$

5.- *(1 ptos.)* Consideremos la función $g(x,y) = (x^2 + y^2)e^{sen(xy)}$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $g(x,y)$ en el punto $(1,0)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

6.- *(1,5 ptos.)* Calcular y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2.$$

PEI 1. 25 de Noviembre de 2016

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Si $a \equiv b$ $(mod\ n)$, entonces $mcd(a, n) = mcd(b, n)$ para cualesquiera enteros a y b y cualquier entero positivo n.

c) Para cualquier primo p, 4 no es generador de $\mathbb{Z}_p^*$.

2.- *(1,5 ptos.)* Encontrar el menor entero positivo a para el que la ecuación diofántica

$$1001x + 770y = 10^4 + a$$

tiene solución. Resolver la ecuación diofántica para dicho entero a.

3.- *(1,5 ptos.)* Considérese el siguiente sistema de congruencias lineales:

$$\begin{cases} 2x \equiv 6 & (\text{mod } 14) \\ 7x \equiv 19 & (\text{mod } 24) \\ 2x \equiv -1 & (\text{mod } 63) \end{cases}$$

Se pide:

a) Transformarlo en uno equivalente de la forma:

$$\begin{cases} x \equiv a & (\text{mod } \mathrm{n}_1) \\ x \equiv b & (\text{mod } \mathrm{n}_2) \\ x \equiv c & (\text{mod } \mathrm{n}_3) \end{cases}$$

b) Una vez hecho esto, resolverlo en el caso de que tenga solución.

4.- *(1,5 ptos.)* Calcular los cuatro últimos dígitos de la expresión decimal de 7^{504}.

5.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación $x^2 + 2x + 4 = 0$ en Z_{196}.

Examen Extraordinario. 16 de Junio de 2017

1.- *(1, 5 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Se tiene que: $x^2 \equiv y^2 (\text{mod } p)$ si, y sólo, si $x \equiv \pm y (\text{mod } p)$.

2.- *(2 ptos.)* Una cierta empresa fabrica tres productos A, B y C que vende a 590, 410 y 300 euros respectivamente. Calcular cuántas unidades de cada producto se vendieron en un día determinado sabiendo que:

- La recaudación por la venta de los productos fue de 32420 euros.
- Se vendieron más unidades de A que de B.
- El número de unidades de C vendidas fue mayor que 83.

3.- *(2 ptos.)* ¿Podemos asegurar que $147^{128} \equiv 1 \pmod{255}$? ¿Y que $51^{128} \equiv 1 \pmod{255}$? En caso de respuesta negativa a esta útima pregunta, calcular el resto de dividir 51^{128} entre 255.

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-2) = -138, f'(-2) = -234, f(1) = 24, f'(1) = 72, f''(1) = 92, f'''(1) = 540.$$

5.- *(1 ptos.)* Dada la función $g(x, y) = \sqrt{8x^2 + y^2} + xy^2$, calcular el valor máximo de la derivada direccional en el punto $A(2, 2)$. Indicar un vector en la dirección en que esa derivada direccional es máxima.

6.- *(2 ptos.)* Sea la función de dos variables $f(x, y) = 2+xy$. Hallar, razonadamente, los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x, y)$:

a) con la condición $x^2 + 4y^2 = 25$

b) con la condición $x^2 + 4y^2 \leq 25$.

PEI 1. 17 de Noviembre de 2017

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todos los elementos no nulos del anillo $\mathbb{Z}_5[x]/(x^8 + x^6 + 3)$ poseen inverso.

b) Sean n y r enteros positivos. Entonces

$$n \equiv r\ (mod\ 6) \implies 4^n \equiv 4^r\ (mod\ 7).$$

c) Sean $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, a y α números enteros y p un número primo. Entonces,

$$f(a + \alpha p) \equiv f(a) + \alpha p f'(a)\ (\text{mod}\ p^2),$$

donde $f'(x)$ denota la derivada de $f(x)$.

2.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación diofántica:

$$13x + 30y + 42z = 12$$

3.- *(1,5 ptos.)* Los generales chinos contaban sus soldados alineándolos varias veces en filas de distinto tamaño, contando los soldados sobrantes y calculando el total a partir de esos soldados sobrantes. Si un determinado general chino mandaba 1200 soldados al comienzo de una batalla y, al final de la misma, le sobraban tres soldados cuando los alineaba de cinco en cinco, tres si los alineaba de seis en seis, uno si lo hacía de siete en siete y no le sobraba ninguno si los alineaba de once en once, ¿cuántos soldados comandados por el citado general murieron en la batalla?

4.- *(1,5 ptos.)* Un número compuesto n se dice que es un número de Carmichael si $b^{n-1} \equiv 1\ (\text{mod}\ n)$ para todo entero positivo b coprimo con n. ¿Es 561 un número de Carmichael?

5.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{Z}_{75}$.

PEI 2. 18 de Enero de 2018

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Consideremos $n+1$ puntos en $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, con todos los x_i distintos dos a dos, y supongamos que el correspondiente polinomio interpolador tiene grado n. Sea, ahora, (x_{n+1},y_{n+1}) un nuevo punto con x_{n+1} distinto a todos los x_i anteriores. Entonces, el polinomio interpolador para los puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n),(x_{n+1},y_{n+1})$ tiene grado $n+1$.

b) Sea $f(x,y,z)=a_1x+a_2y+a_3z$ una función en tres variables con algún a_i $(i=1,2,3)$ distinto de cero y sea $D\subset\mathbb{R}^3$ un conjunto cerrado y acotado. Entonces, el máximo y mínimo absolutos de f en D se alcanzan en la frontera de D.

c) Sea $f(x,y)$ una función definida en un entorno reducido de $(0,0)$, es decir, definida en $B((0,0),\varepsilon)\setminus\{(0,0)\}$ para algún $\varepsilon>0$. Entonces, si todos los límites radiales de f en $(0,0)$ son iguales a L se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L.$$

2.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1)=1, f'(-1)=2, f(1)=3, f'(1)=4, f''(1)=5, f'''(1)=6.$$

3.- *(1,5 ptos.)* Estudiar la continuidad en $(0,0)$, existencia de derivadas parciales de primer orden en $(0,0)$ y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f(x,y)$ dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

4.- *(3 ptos.)* Consideremos la función $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$.

a) Encontrar y clasificar sus extremos relativos.

b) Determinar los puntos donde $f(x,y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 0, y\leq 0, x^2+y^2\leq 4\}$.

Matemáticas Avanzadas (Ing. Informática. Grupo Mañana) Curso 2017-2018

Examen Final. 18 de Enero de 2018

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Sea m un natural distinto de cero y a un entero positivo menor que m, $a < m$, no coprimo con m. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \equiv 0\ (mod\ m)$.

c) Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0, y_0) tales que: 1) el límite de $f(x,y)$ en (x_0,y_0) es igual a cero y 2) $g(x,y)$ está acotado en un entorno de (x_0,y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0.$$

2.- *(2 ptos.)* Veintitrés viajeros hambientros se adentran en un bosque en el que encuentran 63 pilas iguales de plátanos y siete plátanos más sueltos, de tal forma que pueden dividirse todos los plátanos en partes iguales. ¿Cuántos plátanos había en cada pila? Encontrar TODAS las posibles respuestas a la pregunta anterior.

3.- *(2 ptos.)* ¿Podemos asegurar que $146^{128} \equiv 1$ (mod 255)? ¿Y que $51^{128} \equiv 1$ (mod 255)? En caso de respuesta negativa a esta útima pregunta, calcular el resto de dividir 51^{128} entre 255.

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = 1, f'(-1) = 2, f(1) = 3, f'(1) = 4, f''(1) = 5, f'''(1) = 6.$$

5.- *(1 pto.)* Consideremos la función $g(x,y) = (x^2+y^2)e^{sen(xy)}$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $g(x,y)$ en el punto $(1,0)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

6.- *(1,5 ptos.)* Calcular y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz + x + y + z.$$

Examen Final. 22 de Junio de 2018

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Sean $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, a y α números enteros y p un número primo. Entonces,

$$f(a + \alpha p) \equiv f(a) + \alpha p f'(a) \pmod{p^2},$$

donde $f'(x)$ denota la derivada de $f(x)$.

c) Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0, y_0) tales que: 1) el límite de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) es igual a cero y 2) $g(x, y)$ está acotado en un entorno de (x_0, y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0.$$

2.- *(2 ptos.)* Sea n un entero impar. Probar que la ecuación diofántica

$$nX + (n + 2)Y = a$$

tiene solución para todo entero a. Calcular todas las soluciones para el caso $n = 999$ y $a = 7$.

3.- *(2 ptos.)* Doce piratas tratan de repartirse, a partes iguales, un botín de monedas de oro. Por desgracia, sobran seis monedas por lo que se desata una pelea en la que muere un pirata. Como al hacer de nuevo el reparto sobran dos monedas, vuelven a pelear y muere otro. En el siguiente reparto vuelven a sobrar dos monedas y solamente después de que muera otro es posible el reparto a partes iguales. Sabiendo que el número de monedas es mayor que dos mil y menor que tres mil, ¿cuántas monedas de oro componían el botín?

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = 1, f'(-1) = 2, f(1) = 3, f'(1) = 4, f''(1) = 5, f'''(1) = 6.$$

5.- *(1 ptos.)* Consideremos la función $g(x, y) = (x^3 + y^2)e^{cos(xy)}$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $g(x, y)$ en el punto $(1, 0)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

6.- *(1,5 ptos.)* Consideremos la función $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$. Determinar los puntos donde $f(x,y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

.

PEI 1. 23 de Noviembre de 2018

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sea p un número primo y $r \in \{1, \ldots, p-1\}$. Entonces, $\binom{p}{r}$ es múltiplo de p.

b) Para cualquier primo p, 4 no es generador de $\mathbb{Z}_p^*$.

c) Todos los elementos no nulos del anillo $\mathbb{Z}_7[x]/(x^{20} + 3x^4 + 3)$ poseen inverso.

2.- *(1,5 ptos.)* Sea c un número entero que verifica $10 \leq c \leq 100$. Se pide:

a) Determinar el valor mínimo de c (en el rango indicado) para el que la ecuación diofántica $84x + 990y = c$ admite solución. Resolverla en dicho caso.

b) ¿Existe algún valor de c (en el rango indicado) para el que la ecuación diofántica tiene soluciones positivas?

3.- *(1,5 ptos.)* Estudiar para qué números enteros n que verifican $10 \leq n \leq 100$, el sistema de congruencias

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} x & \equiv & 17 & \pmod{38} \\ x & \equiv & 816 & \pmod{n} \\ x & \equiv & 21 & \pmod{52} \end{array} \right.$$

tiene solución. Resolver el sistema anterior para el menor de todos ellos.

4.- *(1,5 ptos.)* Calcular las cuatro últimas cifras de 27^{2002}.

5.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación $10x^3 + 7x^2 + 8x + 5 = 0$ en $\mathbb{Z}_{350}$.

Matemáticas Avanzadas (Ing. Informática. Grupo Mañana) Curso 2018-2019

PEI 2. 15 de Enero de 2019

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Consideremos $n+1$ puntos en $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, con todos los x_i distintos dos a dos, y supongamos que el correspondiente polinomio interpolador tiene grado n. Sea, ahora, (x_{n+1}, y_{n+1}) un nuevo punto con x_{n+1} distinto a todos los x_i anteriores. Entonces, el polinomio interpolador para los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$ tiene grado $n+1$.

b) Sean $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ dos funciones definidas en un entorno reducido (es decir, un entorno sin el centro) de (x_0, y_0, z_0) tales que: 1) el límite de $f(x, y, z)$ en (x_0, y_0, z_0) es igual a cero y 2) $g(x, y, z)$ está acotado en el citado entorno reducido. Entonces,

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) \cdot g(x, y, z) = 0$$

c) La matriz hessiana de la función $f(x, y) = 6x^3 - x^2y + y^2$ en el punto $(1, 0)$ es

$$d^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} 36 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $(1, 0)$ es mínimo relativo de f.

2.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = 0, f'(-1) = 1, f(1) = 2, f'(1) = 3, f''(1) = 4, f'''(1) = 5.$$

3.- *(1,5 ptos.)* Estudiar la continuidad en $(0, 0, 0)$, existencia de derivadas parciales de primer orden en $(0, 0, 0)$ y diferenciabilidad en $(0, 0, 0)$ de la función $f(x, y, z)$ dada por:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{si} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

4.- *(3 ptos.)* Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

a) Encontrar y clasificar sus extremos relativos.

b) Determinar los puntos donde $f(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

Examen Extraordinario. 10 de junio de 2019

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sean a y b enteros positivos coprimos. Entonces

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}.$$

b) Todos los elementos no nulos del anillo $\mathbb{Z}_{11}[x]/(x^7 + 2x^6 + 5x^3 + 3)$ poseen inverso.

c) Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0, y_0) tales que: 1) el límite de $f(x,y)$ en (x_0, y_0) es igual a cero y 2) $g(x,y)$ está acotado en un entorno de (x_0, y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0.$$

2.- *(2 ptos.)* Según las reglas de la World Rugby, en un partido de rugby, en el que se enfrentan dos equipos de quince jugadores cada uno, estas son las formas de conseguir puntos: drop, transformación de golpe de castigo, ensayo, transformación tras ensayo y ensayo de castigo. El drop y el golpe transformado valen tres puntos mientras que el ensayo vale cinco y siete el ensayo de castigo. Además, tras todo ensayo que no sea de castigo, el equipo que lo consigue chuta a palos y, si lo hace con éxito (es decir, consigue la transformación), añade dos puntos a su marcador. Usar ecuaciones diofánticas para responder a la siguiente pregunta: ¿cuáles son las formas en las que un equipo de rugby puede anotar 48 puntos si no consigue ningún drop ni ningún ensayo de castigo y, además, el número de golpes transformados es el doble que el de ensayos?

3.- *(2 ptos.)* Trece piratas tratan de repartirse, a partes iguales, un botín de monedas de oro. Por desgracia, sobran seis monedas por lo que se desata una pelea en la que muere un pirata. Como al hacer de nuevo el reparto sobran dos monedas, vuelven a pelear y muere otro. En el siguiente reparto vuelven a sobrar dos monedas y solamente después de que muera otro es posible el reparto a partes iguales. Sabiendo que el número de monedas es mayor que ocho mil y menor que dieciséis mil, ¿cuántas monedas de oro componían el botín?

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-2) = 1, f'(-2) = 2, f(1) = 3, f'(1) = 4, f''(1) = 5, f'''(1) = 6.$$

5.- *(1 ptos.)* Consideremos la función $g(x,y) = (x^2+y^2)e^{sen(xy^2)}$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $g(x,y)$ en el punto $(0,1)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

6.- *(1,5 ptos.)* Consideremos la función $f(x,y) = \exp(y+1-(x-2)^2)+x$. Determinar los puntos donde $f(x,y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, y+1 \leq (x-2)^2\}.$$

PEI 1. 22 de noviembre de 2019

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sean a y α enteros, k un entero positivo y $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Entonces,

$$f(a + \alpha p^k) \equiv f(a) + \alpha p^k f'(a) \pmod{p^{k+1}},$$

donde $f'(x)$ denota la derivada de $f(x)$.

b) Sea p un número primo. Entonces, $nm(m^{p-1} - n^{p-1})$ es múltiplo de p para cualesquiera enteros m y n.

c) Existe un cuerpo con 1225 elementos.

2.- *(1,5 ptos.)* Una compañía aérea ofrece tres tipos de billetes en sus vuelos de Madrid a Londres. Los billetes de clase preferente cuestan 125 euros, los de clase turista con derecho a comida 75 y los de clase turista 57. En un vuelo concreto viajan nueve viajeros en clase turista con derecho a comida y la recaudación total del mismo es de 10000 euros. ¿Cuál es el número total de billetes vendidos? ¿Cuántos de cada tipo?

3.- *(1,5 ptos.)* ¿Para qué números enteros positivos a tiene solución el sistema de congruencias

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv 2 & \pmod{11} \\ 7x & \equiv a & \pmod{24} \\ x & \equiv 68 & \pmod{198} \end{array}\right. ?$$

Resolverlo para el menor de todos ellos.

4.- *(1,5 ptos.)* Sea a un entero positivo cualquiera. ¿Cuál es el resto de la división de a^{301} por 250?

5.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 + 11x + 11 = 0$ en $\mathbb{Z}_{242}$.

PEI 2. 14 de enero de 2020

1.- *(2 ptos.)* Responder, razonando adecuadamente las respuestas, a cada una de las siguientes preguntas:

a) Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^2$. El polinomio interpolador para dichos puntos es $P(x) = y_0 L_0(x) + \cdots + y_n L_n(x)$. ¿Cómo se pueden calcular cada uno de los polinomios $L_i(x)$?

b) ¿Toda función $f(x, y)$ diferenciable en un punto (x_0, y_0) es continua en dicho punto?

c) Sea $f(x, y) = x \cdot e^{y^2}$ y D un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$. ¿El máximo y mínimo absolutos de f en D se encuentran en la frontera de D?

2.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = 1, f'(-1) = 3/2, f(1) = 2, f'(1) = 3, f''(1) = 4, f'''(1) = 6.$$

3.- *(1,5 ptos.)* Estudiar la continuidad en $(0, 0)$, la existencia de derivadas parciales de primer orden en $(0, 0)$ y la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f(x, y)$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x + y^2) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^4}\right) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

4.- *(3 ptos.)* Consideremos la función $f(x, y) = e^{xy} - x$.

a) Encontrar y clasificar sus puntos críticos.

b) Determinar los puntos donde $f(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, xy \leq 1\}$.

PEI 2. 1 de febrero de 2021

2.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = -1, f'(-1) = 1, f(0) = 3/2, f(1) = 3,$$
$$f'(1) = 4, f''(1) = 6, f'''(1) = 12.$$

2.- *(2 ptos.)* Estudiar la continuidad en $(0,0,0)$, la existencia de derivadas parciales de primer orden en $(0,0,0)$ y la diferenciabilidad en $(0,0,0)$ de la función $f(x,y,z)$ dada por:

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot e^{-(x^3+y^3+z^3)}$$

3.- *(1,5 ptos.)* Consideremos la función $g(x,y) = (y^3 + x^2 - y^2)e^{\operatorname{sen}(xy)}$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $g(x,y)$ en el punto $(0,2)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

4.- *(3 ptos.)* Consideremos la función $f(x,y) = x^2y^2 - x^2y - xy^2$.

a) Encontrar y clasificar sus puntos críticos.

b) Determinar los puntos donde $f(x,y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en el conjunto

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y, y \leq 2x, xy \leq 1\}.$$

Examen Extraordinario. 6 de julio de 2021

1.- *(1,5 ptos.)* ¿Para qué enteros positivos a tiene solución la ecuación diofántica

$$180x + 252y + 594z = 6a?$$

Resolver la ecuación para el menor de todos ellos.

2.- *(2 ptos.)* ¿Queda unívocamente determinado un número natural positivo sabiendo que es estrictamente menor que 1128 y conociendo los restos de dividirlo por 23, 16 y 6? Calcular todos los números naturales menores que 1128 cuyo resto al dividirlos por 23 sea 10, al dividirlos por 16 sea 5 y al dividirlos por 6 sea 3.

3.- *(2 ptos.)* Calcular las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 - 550 = 0$ en $\mathbb{Z}_{605}$.

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = 0, f'(-1) = 2, f(0) = 5/2, f(1) = 3,$$
$$f'(1) = 5, f''(1) = 7, f'''(1) = 13.$$

5.- *(1 ptos.)* Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y) = \left(\frac{1}{y}\right)^x$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección del vector $\mathbf{u} = (2, 1)$.

6.- *(2 ptos.)* Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + 2x + y$.

a) Encontrar y clasificar sus puntos críticos.

b) Determinar los puntos donde $f(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en la región limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \;\; g(x) = 2x^2 - 4x$$

Matemáticas Avanzadas (Ing. Informática. Grupo Mañana) Curso 2021-2022

PEI1. 19 de noviembre de 2021

1.- *(2 ptos.)* Responder a las siguientes preguntas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sean p un primo impar y $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene, exactamente, dos soluciones en $\mathbb{Z}_p$. ¿Puede tener la ecuación $f(x) = 0$ exactamente $p + 2$ soluciones en $\mathbb{Z}_{p^2}$?

b) Sea n un número entero positivo impar. ¿Es cierto que $n^k \equiv n \pmod{2n}$ para todo entero positivo k?

c) Sea p un primo impar y $r \in \{1, \ldots, p-1\}$. ¿Es $\binom{p}{r}$ múltiplo de p?

2.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación diofántica

$$17x + 30y + 42z = 12$$

3.- *(1,5 ptos.)* Estudiar la existencia de solución y, en su caso, resolver el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x & \equiv & 10 \pmod{57} \\ x & \equiv & 67 \pmod{76} \\ 23x & \equiv & 1 \pmod{100} \end{cases}$$

4.- *(1,5 ptos.)* Sea p un número primo distinto de 7. Sean $n = 7p^6$, $k = 6p^5(p-1)+1$ y $a \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Si $mcd(a, 7) = 1$ y $mcd(a, p) = p$, ¿cuánto vale el resto de dividir a^k entre n? ¿Y si $mcd(a, 7) = 7$ y $mcd(a, p) = 1$?

5.- *(1,5 ptos.)* Sea p un número primo mayor que cinco. Probar que la ecuación:

$$x^3 - 5x^2 - 50p = 0$$

tiene una única solución en $\mathbb{Z}_{5p^2}$. Calcular la citada solución para $p = 19$.

PEI1. 9 de diciembre de 2021

1.- *(2 ptos.)* Decidir si las siguientes afirmaciones son ciertas o no razonando adecuadamente la respuesta:

a) El sistema de congruencias

$$\begin{cases} x & \equiv & b_1 \pmod{n_1} \\ ax & \equiv & b_2 \pmod{n_2} \end{cases}$$

tiene solución si, y sólo si, $mcd(an_1, n_2)$ divide a $b_2 - ab_1$.

b) Sean a y b enteros positivos coprimos. Entonces

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \ \ (mod\ ab).$$

c) Todos los elementos no nulos del anillo $\mathbb{Z}_{13}[x]/(x^8 + 2x^6 + 5x^3 + 5)$ poseen inverso.

2.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación diofántica

$$19x + 32y + 45z = 12$$

3.- *(1,5 ptos.)* ¿Para qué números enteros positivos a tiene solución el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x & \equiv 3 & \pmod{13} \\ 7x & \equiv a & \pmod{24} \\ x & \equiv 68 & \pmod{234} \end{cases} \ ?$$

Resolverlo para el menor de todos ellos.

4.- *(1,5 ptos.)* Calcular las cuatro últimas cifras de 27^{2002}.

5.- *(1,5 ptos.)* Sea p un número primo mayor o igual que 7. Probar que la ecuación $x^4 - 5x^2 - 50p = 0$ tiene solución en $\mathbb{Z}_{5p^2}$ si, y sólo si, 5 es residuo cuadrático módulo p. Calcular las soluciones, si existen, para $p = 13$.

PEI 2. 14 de enero de 2022

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sean x_0, x_1, x_2, x_3 cuatro números reales y h un número real positivo tales que $x_i - x_{i-1} = h$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces, para cualquier función f se tiene:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)}{6h^3}$$

b) Toda función $f(x, y, z)$ diferenciable en (x_0, y_0, z_0) tiene derivadas parciales continuas en (x_0, y_0, z_0).

c) La matriz hessiana de la función $f(x, y, z) = 6x^3 - x^2y + y^2 + z^3 + xz$ en el punto $(1, 0, 1)$ es

$$Hf(1,0,1) = \begin{pmatrix} 36 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $(1, 0, 1)$ es mínimo relativo de f.

2.- *(*1,5 *ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(3) = 0, f'(3) = 1, f(6) = 2, f'(6) = 3, f''(6) = 4, f'''(6) = 6.$$

3.- *(*1,5 *ptos.)* Estudiar la continuidad en $(0, 0, 0)$, la existencia de derivadas parciales de primer orden en $(0, 0, 0)$ y la diferenciabilidad en $(0, 0, 0)$ de la función $f(x, y, z)$ dada por:

$$f(x, y, z) = \|(x, y, z)\| \cdot \cos(x^3 + y^3 + z^3)$$

4.- *(*3 *ptos.)* Dada la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-y}$, se pide:

a) Calcular y clasificar los puntos críticos de $f(x, y)$.

b) Calcular máximo y mínimo absolutos de $f(x, y)$ en

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x - y \geq 1\}$$

y los puntos en los que se alcanzan los citados extremos absolutos.

Examen Extraordinario. 29 de junio de 2022

1.- *(2 ptos.)* Responder a las siguientes preguntas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sean p un primo impar y $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene, exactamente, dos soluciones en $\mathbb{Z}_p$. ¿Puede tener la ecuación $f(x) = 0$ exactamente $p+2$ soluciones en $\mathbb{Z}_{p^2}$?

b) ¿El sistema de congruencias

$$\begin{cases} x & \equiv & b_1 \pmod{n_1} \\ ax & \equiv & b_2 \pmod{n_2} \end{cases}$$

tiene solución si, y sólo si, $mcd(an_1, n_2)$ divide a $b_2 - ab_1$?

c) Sean x_0, x_1, x_2, x_3 cuatro números reales y h un número real positivo tales que $x_i - x_{i-1} = h$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. ¿Es cierto que para cualquier función f se tiene

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)}{6h^3}?$$

2.- *(2 ptos.)* Resolver la ecuación diofántica

$$19x + 32y + 45z = 12.$$

3.- *(2 ptos.)* Trece piratas tratan de repartirse, a partes iguales, un botín de monedas de oro. Por desgracia, sobran seis monedas por lo que se desata una pelea en la que muere un pirata. Como al hacer de nuevo el reparto sobran dos monedas, vuelven a pelear y muere otro pirata. En el siguiente reparto vuelven a sobrar dos monedas y solamente después de que muera otro pirata es posible el reparto a partes iguales. Sabiendo que el número de monedas es mayor que ocho mil y menor que dieciséis mil, ¿cuántas monedas de oro componían el botín?

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-2) = -138, f'(-2) = -234, f(1) = 24, f'(1) = 72, f''(1) = 92, f'''(1) = 540.$$

5.- *(1 ptos.)* Dada la función $g(x, y) = \sqrt{8x^2 + y^2} + xy^2$, calcular el valor máximo de la derivada direccional en el punto $A(2, 2)$ y la dirección para la que se alcanza dicho valor.

6.- *(1,5 ptos.)* Sea la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-y}$. Calcular máximo y mínimo absolutos de $f(x, y)$ en

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x - y \geq 1\}$$

y los puntos en los que se alcanzan los citados extremos absolutos.

PEI1. 25 de noviembre de 2022

1.- *(2 ptos.)* Responder a las siguientes preguntas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sean p un primo impar y $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene, exactamente, dos soluciones en $\mathbb{Z}_p$. ¿Puede tener la ecuación $f(x) = 0$ exactamente $p + 2$ soluciones en $\mathbb{Z}_{p^2}$?

b) Si a y b son números enteros y n es un número entero positivo tales que $a \equiv b \pmod{n}$, ¿se tiene $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$?

c) Si p es un primo y $mcd(a, p^2) = mcd(b, p^2) = p$, ¿se tiene $mcd(ab, p^4) = p^2$?

2.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación diofántica:

$$17x + 33y + 46z = 15.$$

3.- *(1,5 ptos.)* ¿Para qué enteros positivos tiene solución el sistema de congruencias

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x & \equiv & 51 & \pmod{46} \\ x & \equiv & 86 & \pmod{n} \\ 59x & \equiv & 1 & \pmod{76} \end{array}\right. ?$$

4.- *(1,5 ptos.)* Sea n un número entero positivo congruente con 2 módulo 110. Calcular el resto de dividir $2^n + 5^n + 7^n$ entre 605.

5.- *(1,5 ptos.)* Sea p un número primo impar congruente con 1 módulo 3. Calcular las soluciones de la ecuación

$$x^6 - x^4 + px + p = 0$$

en $\mathbb{Z}_{3p^2}$.

PEI 2. 16 de diciembre de 2022

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sean x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 cinco números reales y h un número real positivo tales que $x_i - x_{i-1} = h$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces, para cualquier función f se tiene:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f(x_4) - 4f(x_3) + 6f(x_2) - 4f(x_1) + f(x_0)}{24h^4}$$

b) La matriz hessiana de la función $f(x, y, z) = 6x^2 - x^2y + y^2 + z^3$ en el punto $(1, 1, 1)$ es

$$Hf(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $(1, 1, 1)$ es mínimo relativo de f.

2.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(2) = 0, f'(2) = 1, f(4) = 2, f'(4) = 3, f''(4) = 4, f'''(4) = 6.$$

3.- *(1,5 ptos.)* Estudiar la continuidad en $(0, 0)$, la existencia de derivadas parciales de primer orden en $(0, 0)$ y la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f(x, y)$ dada por:

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4} \cdot \operatorname{sen}(x^3 + y^2)$$

4.- *(3 ptos.)* Dada la función $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{xy}$, se pide:

a) Calcular y clasificar los puntos críticos de $f(x, y)$.

b) Calcular máximo y mínimo absolutos de $f(x, y)$ en

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2, xy \leq 2\}$$

y los puntos en los que se alcanzan los citados extremos absolutos.

Examen Extraordinario. 30 de junio de 2023

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces en $\mathbb{Z}_m$ como su grado.

b) El sistema de congruencias

$$\begin{cases} x & \equiv & b_1 \pmod{n_1} \\ ax & \equiv & b_2 \pmod{n_2} \end{cases}$$

tiene solución si, y sólo si, $mcd(an_1, n_2)$ divide a $b_2 - ab_1$.

c) Sean x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 cinco números reales y h un número real positivo tales que $x_i - x_{i-1} = h$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces, para cualquier función f, se tiene:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f(x_4) - 4f(x_3) + 6f(x_2) - 4f(x_1) + f(x_0)}{24h^4}$$

2.- *(2 ptos.)* Resolver la ecuación diofántica

$$17x + 55y + 91z = 23.$$

3.- *(2 ptos.)* Trece piratas tratan de repartirse, a partes iguales, un botín de monedas de oro. Por desgracia, sobran seis monedas por lo que se desata una pelea en la que muere un pirata. Como al hacer de nuevo el reparto sobran dos monedas, vuelven a pelear y muere otro pirata. En el siguiente reparto vuelven a sobrar dos monedas y solamente después de que muera otro pirata es posible el reparto a partes iguales. Sabiendo que el número de monedas es mayor que ocho mil y menor que dieciséis mil, ¿cuántas monedas de oro componían el botín?

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-2) = -138, f'(-2) = -234, f(1) = 24, f'(1) = 72, f''(1) = 92, f'''(1) = 540.$$

5.- *(1 pto.)* Dada la función $g(x, y) = \sqrt{8x^2 + y^2} + xy^2$, calcular el valor máximo de la derivada direccional en el punto $A(2, 2)$ y la dirección para la que se alcanza dicho valor.

6.- *(1,5 ptos.)* Dada la función $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{xy}$, se pide:

a) Calcular y clasificar los puntos críticos de $f(x,y)$.

b) Calcular máximo y mínimo absolutos de $f(x,y)$ en

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2, xy \leq 2\}$$

y los puntos en los que se alcanzan los citados extremos absolutos.